N. 0185

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXVIV | Jul. 2018 | 4,20€

(Não) São Números Complexos

PATRÍCIA DAMAS BEITES

NUNO CAMARNEIRO | MATEMÁTICA E LITERATURA

O Mundo de Sophia

JORGE NUNO SILVA | RECREIO

Os Números Surpreendem De Novo!

Uma Abordagem Matemática do Sudoku

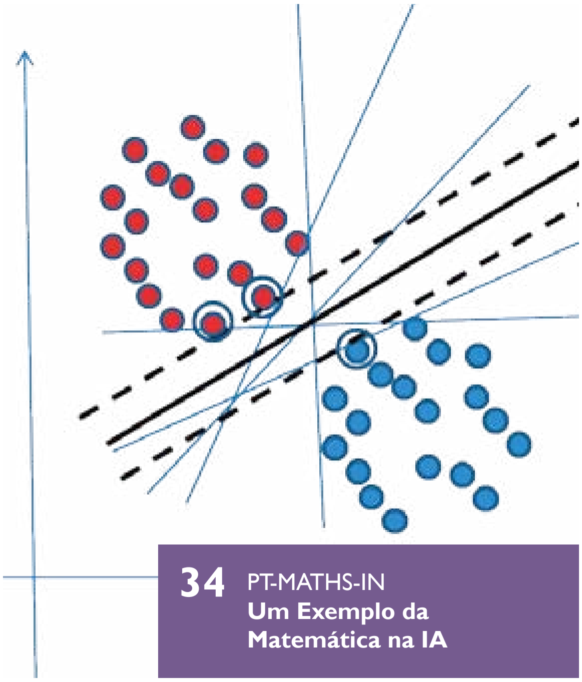
PEDRO M. LIMA

21 A 29 DE SETEMBRO 2018

XXXIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

ESPAÑA ~ PORTUGAL

La Rábida — Monte Gordo


34 PT-MATHS-IN
Um Exemplo da Matemática na IA


28 (NÃO) SÃO NÚMEROS COMPLEXOS
Patrícia Damas Beites


33 CONVERSA COM...
José Mourão

ÍNDICE

Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

CHAVES DO FUTURO

A revolução que nos leva à nova era digital acontece diante do nosso olhar. Quem terá acesso às chaves do futuro?

A Inteligência Artificial refere-se a sistemas que exibem um comportamento autónomo e, tendo em conta o ambiente e a circunstância, realizam ações e alcançam objetivos específicos.

Outrora ficção científica ou limitada à esfera científica, passou a fazer parte do nosso quotidiano. Os exemplos disso são infindáveis: telemóveis que nos sugerem viagens ou músicas de acordo com as nossas preferências, tradutores automáticos de línguas, sistemas de reconhecimento de voz, veículos autónomos ou computadores que vencem a humanos em jogos como o Go onde a intuição parece ter um papel fundamental. Os recentes sucessos devem-se ao desenvolvimento de novos algoritmos, ao maior poder de computação, ao acesso a uma enorme quantidade de dados digitais e a avanços na capacidade do seu processamento, e estão fortemente relacionados com progressos em Aprendizagem Automática (*Machine Learning*). Este tópico quente tem evoluído como um campo interdisciplinar impulsionado por dados e está ancorado em diversas áreas da matemática como Cálculo, Álgebra Linear, Probabilidade, Estatística, Otimização e Ciências da Computação.

Num mundo digital, que agora é nosso, esta tecnologia potencia a nossa capacidade de organizar o conhecimento e lhe dar significado, tendo influência nas nossas decisões. Sendo também certo que desempenhará um papel cada vez mais importante na nossa sociedade.

Cédric Villani, brilhante matemático reconhecido com uma medalha Fields em 2010 e membro do Parlamento francês, divulgou um relatório sobre Inteligência Artificial elaborado sob a sua liderança, como resultado de uma missão de seis meses solicitada pelo primeiro-ministro francês. As principais ideias do documento de 235 páginas intitulado "*For a meaningful Artificial Intelligence. Towards a French and European strategy*" referem-se não só a recomendações relacionadas com o aumento de competitividade mas também a questões sociais em tópicos centrais como saúde, ecologia, trabalho, ética, inclusão e diversidade. Este documento interessantíssimo constitui uma reflexão sobre os desafios estratégicos e deontológicos que se colocam a nível político, social e individual.

Os surpreendentes avanços tecnológicos têm como reverso da medalha questões éticas que surgem a um ritmo vertiginoso. Para uma sociedade que se quer esclarecida, interventiva e livre é necessário que se promova o debate coletivo. A tecnologia tem de ser desmistificada e o seu potencial compreendido. A sociedade informada terá as chaves futuro.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

TEOREMAS COLORIDOS

O triângulo de Pascal é uma tabela infinita de números em posição triangular, que se tornou famosa por exibir propriedades aritméticas surpreendentes. Para cada natural $d \geq 2$, o triângulo de Pascal módulo d obtém-se substituindo cada entrada do triângulo de Pascal pelo resto da sua divisão inteira por d. Propomos-lhe que visualize nestes novos arranjos algumas relações interessantes de divisibilidade entre os coeficientes binomiais.

Comecemos por recordar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, na n-ésima linha do triângulo de Pascal estão, por esta ordem, os números

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

onde $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$ se $0 \leq j \leq n$. Na j-ésima entrada da linha n está o número de subconjuntos com j elementos de um conjunto com cardinal n. Por isso, para todo o $n \in \mathbb{N}$, cada coeficiente binomial é um inteiro; e a soma das entradas da linha n conta o número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos, o que permite escrever

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{1}$$

Podemos construir o triângulo de Pascal recursivamente, linha a linha, uma vez que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e todo o $j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}, \tag{2}$$

igualdade que descreve o seguinte procedimento: para determinar o número de subconjuntos com $j \geq 1$ elementos de um conjunto A com cardinal $n+1$, fixamos $\alpha \in A$ e procuramos os subconjuntos de A com j elementos que contêm α (havendo $\binom{n}{j-1}$ possibilidades) e os que não contêm α (há $\binom{n}{j}$ escolhas possíveis). Na realidade, para obter a linha $n+1$ basta conhecer a linha n até à entrada $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ porque, para todo $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, se tem

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}. \tag{3}$$

A figura 1 mostra as primeiras linhas do triângulo de Pascal módulo 2: os pontos a branco (invisíveis) representam as entradas nulas, que correspondem a posições com números pares no triângulo de Pascal; os pontos a preto substituem as entradas iguais a 1. Detetam-se nele uns grandes triângulos centrais que se iniciam nas linhas $n = 2^k$, para $k \in \mathbb{N}$, nas quais, com exceção dos extremos (iguais a 1 e correspondentes a $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$), todas as entradas são iguais a zero. Nas linhas p^k, para $p = 3, 5, 7, 11$ e $k \in \mathbb{N}$, dos triângulos de Pascal módulo p ilustrados na figura 2 (com $p-1$ cores para as entradas não nulas), notamos um padrão idêntico. Conjeturamos, por isso, que as entradas interiores da linha p^k são divisíveis por p sempre que p é primo. E, de facto, designando por mdc o máximo divisor co-

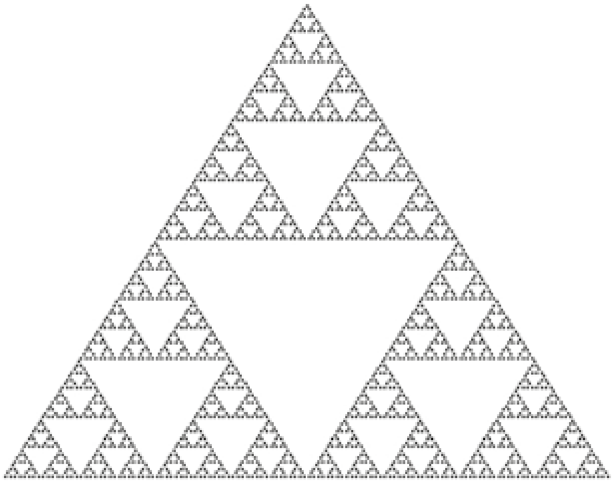


Figura 1.

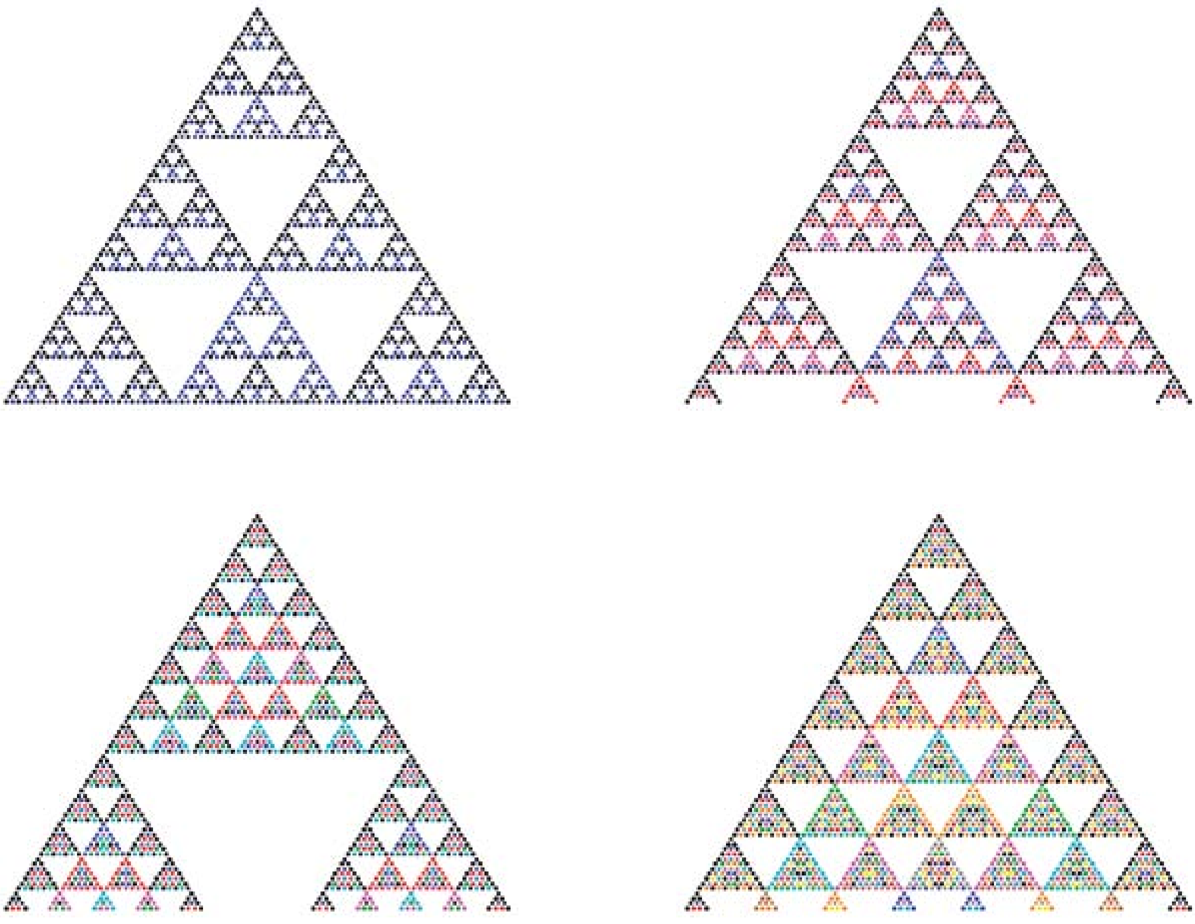


Figura 2.

mum de uma lista de inteiros, se $n \geq 2$ então

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j}:\ 1 \leq j \leq n-1\right\} = \begin{cases} p & \text{se existem um primo } p \text{ e } k \in \mathbb{N} \text{ tais que } n = p^k \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

A primeira prova desta propriedade é atribuída a B. Ram, e foi publicada em [1]. A generalização obtida em [3] afirma que, dados naturais n e $s \leq n$,

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{s}\right\} = \frac{n}{\operatorname{mmc}\left\{d \in \mathbb{N}:\ d \text{ divide } n \text{ e } d \leq s\right\}}, \tag{5}$$

onde mmc designa o menor múltiplo comum.

A análise das linhas $n = 6, 10, 12$ do triângulo de Pascal (parcialmente reproduzido na figura 3) revela mais informação interessante: ainda que para estes valores de n o máximo divisor comum das entradas interiores seja 1, todas as entradas interiores de índice primo com n são divisíveis por n; e, para cada par de entradas interiores, consecutivas ou não, o máximo divisor comum delas é estritamente maior do que 1. É, portanto, natural conjeturar que, para cada natural $n \geq 2$,

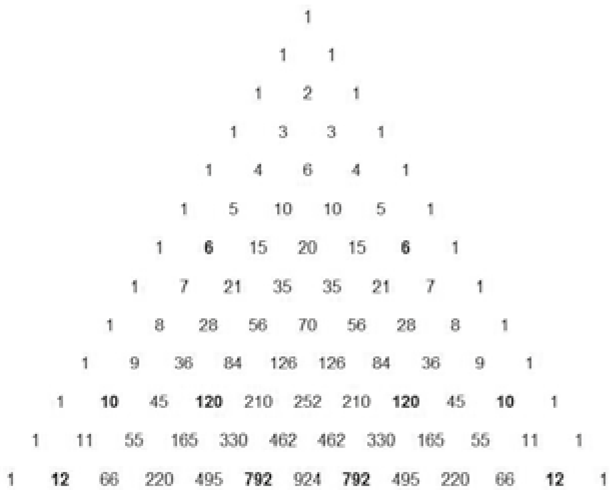


Figura 3.

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{j}:\ 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } \operatorname{mdc}(j,n) = 1\right\} = n \tag{6}$$

e

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{n}{i},\binom{n}{j}:\ 1 \leq i,j \leq n-1\right\} > 1.$$

Provemos que assim é. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto

$$\mathcal{E}_n := \left\{\binom{n}{j}:\ 1 \leq j \leq n-1 \text{ e } \operatorname{mdc}(j,n) = 1\right\}$$

e denotemos por D_n o máximo divisor comum dos elementos de $\mathcal{E}_n$. Como $\binom{n}{1} = n \in \mathcal{E}_n$, o natural D_n tem de dividir n, logo $D_n \leq n$. Além disso, se $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$j\binom{n}{j} = j\,\frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

$$= n\,\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-1-(j-1))!} = n\binom{n-1}{j-1}$$

e, portanto, n divide $j\binom{n}{j}$. Mas, se n e j são primos entre si, n tem de dividir $\binom{n}{j}$. Consequentemente, n divide D_n, o que, sendo $D_n \leq n$, só é possível se $D_n = n$.

Quanto à segunda propriedade, uma vez que se tem a igualdade (3), basta considerar valores

$$i,\, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

garantindo-se assim que $i + j \leq n$. Além disso, uma conta simples confirma que

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}.$$

Se, para algum par $1 \leq i, j \leq n-1$, os coeficientes $\binom{n}{i}$ e $\binom{n}{j}$ fossem primos entre si, $\binom{n}{i}$ teria de dividir $\binom{n-j}{i}$, o que não é possível porque $\binom{n}{i} > \binom{n-j}{i}$.

Voltemos ao triângulo de Pascal módulo 2 e reparemos nas linhas de índice 10, 12, 14; depois atentemos nas linhas 8, 12, 16 do triângulo de Pascal módulo 4, que a figura 4 ilustra. Notamos que as entradas em posições ímpares destas linhas são iguais a zero. Esse padrão traduz nestes casos particulares uma propriedade mais geral: para todo o natural m,

$$\operatorname{mdc}\left\{\binom{2m}{1},\binom{2m}{3},\binom{2m}{5},\cdots,\binom{2m}{2m-1}\right\} = 2^{1+\nu_2(m)}, \tag{7}$$

sendo $\nu_2(m)$ a maior potência de 2 que divide m. Vejamos

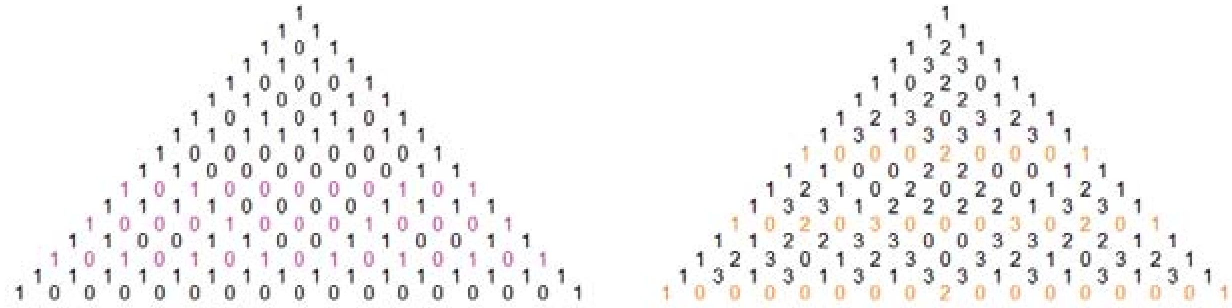


Figura 4.

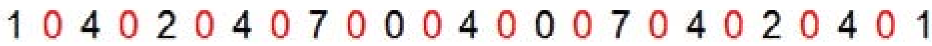


Figura 5.

por que é válida. Da igualdade (1) aplicada a $n = 2m$ e da equação (2) quando $n = 2m-1$ resulta que

$$\binom{2m}{1} + \binom{2m}{3} + \binom{2m}{5} + \cdots + \binom{2m}{2m-1} = 2^{2m-1}.$$

Daqui concluímos que, se $d \in \mathbb{N}$ divide todas as parcelas $\binom{2m}{j}$ da soma anterior, então d tem de dividir 2^{2m-1} e, portanto, d tem de ser uma potência de 2. Além disso, se $m = 2^k N$, onde N é ímpar e $k = \nu_2(m) \in \mathbb{N}_0$, então, por d dividir $\binom{2m}{1} = 2m = 2^{k+1}N$, deduzimos que $d \leq 2^{k+1}$. Observe-se ainda que, como

$$\binom{2^{k+1}N}{j} = \frac{2^{k+1}N}{j}\binom{2^{k+1}N-1}{j-1}$$

e os coeficientes binomiais são inteiros, para cada j ímpar existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{2^{k+1}N}{j} = 2^{k+1}M$. O que confirma que 2^{k+1} divide $\binom{2m}{j}$ para todo o j ímpar em $\{1, 2, \cdots, 2m-1\}$.

Por um argumento semelhante mostra-se que, para cada primo p e todo o natural m,

$$\mathrm{mdc}\left\{\binom{pm}{j} : 1 \leq j \leq pm \text{ e } \mathrm{mdc}(j,p) = 1\right\} = p^{1+\nu_p(m)}, \tag{8}$$

sendo $\nu_p(m) \in \mathbb{N}_0$ a maior potência de p que divide m. Ou seja, as entradas em posição j que é primo com p da linha pm são divisíveis por p, e até por uma potência maior de p se este primo dividir m. Por exemplo, para $n = 6$, a tabela seguinte assinala a verde as entradas interiores na sexta linha que são divisíveis por 2, a magenta as divisíveis por 3 e a azul as divisíveis por 5.

0.ª	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª
1	6	15	20	15	6	1
1	6	15	20	15	6	1
1	6	15	20	15	6	1

Em particular, se n é uma potência p^k do primo p, já sabemos que as entradas interiores da n-ésima linha são divisíveis por p; vemos agora que, destas entradas, as de índice primo com p são divisíveis por p^k, e portanto essas entradas são simultaneamente zero nos triângulos de Pascal módulo p, $p^2, \cdots, p^k$.

Em [4] estabeleceu-se a seguinte generalização da fórmula (8): para quaisquer naturais m e q, tem-se

$$\mathrm{mdc}\left\{\binom{qm}{j} : 1 \leq j \leq qm \text{ e } \mathrm{mdc}(j,q) = 1\right\} = q \prod_{p:\ p\,|\,\mathrm{mdc}(q,m)} p^{\nu_p(m)},$$

sendo o produto feito com todos os primos p que dividem $\mathrm{mdc}(q,m)$. Pode conferir-se esta propriedade num exemplo como o da figura 5 que mostra, a vermelho, as entradas em posição j primo com 4 da linha 24 no triângulo de Pascal módulo 8.

O Atractor disponibiliza em [2] material interativo que o leitor poderá utilizar para, por exemplo, descobrir fórmulas explícitas para os seguintes máximos divisores comuns.

(A) $\text{mdc}\left\{\binom{n}{j} :\ 1 \leq j \leq n-1 \ \text{ e } \ \text{mdc}(j,n) > 1\right\}$.

Denotemos por d_n este máximo divisor comum para naturais $n > 2$. O gráfico da figura 6 (com os valores de d_n para n composto entre 4 e 24) e a tabela da figura 7 (mostrando d_n para n composto entre 4 e 203) sugerem desde logo que para alguns naturais n pares se tem $d_n = n - 1$ (por exemplo, n = 6, 12, 14, 18, 20, 24); que para vários outros naturais pares $d_n = 1$ (veja-se o caso de n = 22, 34, 36, 40, 46, 52); e que d_n é par para as potências de 2.

Pode ler-se em [2] uma demonstração de que, se $n > 2$ é par mas não é uma potência de 2, então d_n é ímpar e

- $d_n = q$, se $n - 1$ é uma potência do primo q;
- $d_n = 1$, caso contrário.

O que sugere a tabela da figura 7 quanto ao valor de d_n quando $n \geq 4$ é uma potência de 2? Parece que para algumas potências de 2 se tem $d_n = 2(n-1)$, como quando n = 4, 8, 32, 128, e que para outras $d_n = 2$ (veja-se o caso de n = 16, 64, 256). Observe-se que, se $n = 2^k$ para algum natural $k \geq 2$, então

$$d_n = \text{mdc}\left\{\binom{n}{j} :\ 1 \leq j \leq n-1 \ \text{ e } j \text{ é par}\right\}.$$

Provou-se em [2] que, se $n \geq 4$ é uma potência de 2, então d_n é par e

- $d_n = 2(n-1)$, se $n - 1$ é primo;
- $d_n = 2$, caso contrário.

Além disso, mostrou-se que, quando n é uma potência de 2, não se pode ter $n - 1 = q^\alpha$ para um primo q (ímpar) e um natural $\alpha > 1$.

Deixamos ao leitor o desafio de estudar a questão (A) para os naturais ímpares.

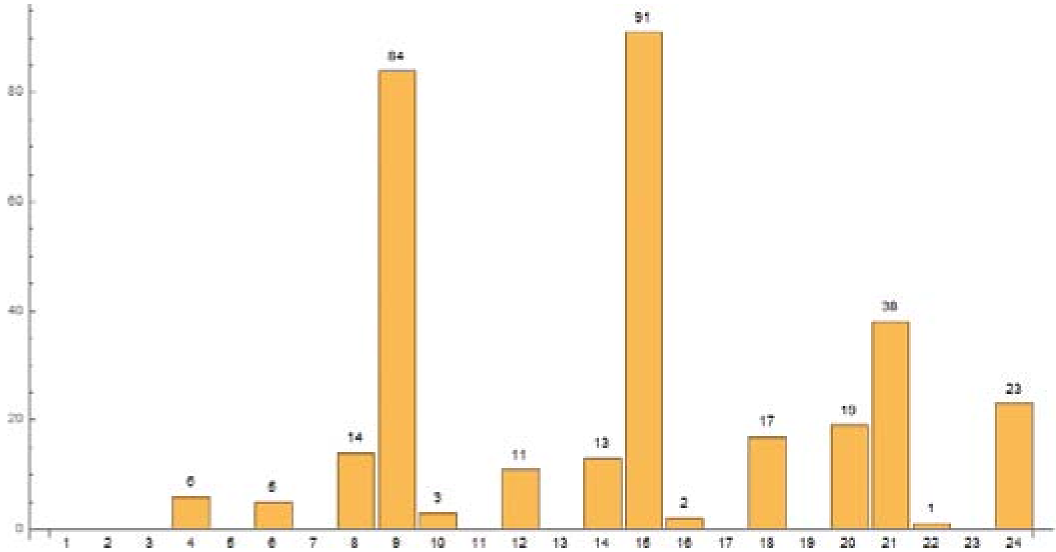


Figura 6.

4 → 6	24 → 23	40 → 1	57 → 7	75 → 2701	91 → 332 949	108 → 107	123 → 671	140 → 139	155 → 1661	171 → 13	187 → 4 640 264 125 151
6 → 5	25 → 2530	42 → 41	58 → 1	76 → 1	92 → 1	110 → 109	124 → 1	141 → 139	156 → 1	172 → 1	188 → 1
8 → 14	26 → 5	44 → 43	60 → 59	77 → 36 436 490	93 → 1	111 → 109	125 → 4 264 205	142 → 1	158 → 157	174 → 173	189 → 1
9 → 84	27 → 195	45 → 43	62 → 61	78 → 1	94 → 1	112 → 1	126 → 5	143 → 4 257 614 897	159 → 12 403	175 → 173	190 → 1
10 → 3	28 → 3	46 → 1	63 → 1891	80 → 79	95 → 1457	114 → 113	128 → 254	144 → 1	160 → 1	176 → 1	192 → 191
12 → 11	30 → 29	48 → 47	64 → 2	81 → 474	96 → 1	115 → 113	129 → 508	145 → 1562	161 → 5 258 872	177 → 1	194 → 193
14 → 13	32 → 62	49 → 2 603 040	65 → 15 120	82 → 3	98 → 97	116 → 1	130 → 1	146 → 1	162 → 1	178 → 1	195 → 18 721
15 → 91	33 → 124	50 → 7	66 → 1	84 → 83	99 → 679	117 → 1	132 → 131	147 → 73	164 → 163	180 → 179	196 → 1
16 → 2	34 → 1	51 → 35	68 → 67	85 → 10 209	100 → 1	118 → 1	133 → 62 954 400	148 → 1	165 → 163	182 → 181	198 → 197
18 → 17	35 → 23 188	52 → 1	69 → 134	86 → 1	102 → 101	119 → 193 343	134 → 1	150 → 149	166 → 1	183 → 2353	200 → 199
20 → 19	36 → 1	54 → 53	70 → 1	87 → 43	104 → 103	120 → 1	135 → 67	152 → 151	168 → 167	184 → 1	201 → 199
21 → 38	38 → 37	55 → 159	72 → 71	88 → 1	105 → 103	121 → 86 024 301	136 → 1	153 → 151	169 → 99 743 025 008 090 646	185 → 11 041	202 → 1
22 → 1	39 → 703	56 → 1	74 → 73	90 → 89	106 → 1	122 → 11	138 → 137	154 → 1	170 → 13	186 → 1	203 → 530 573 402

Figura 7.

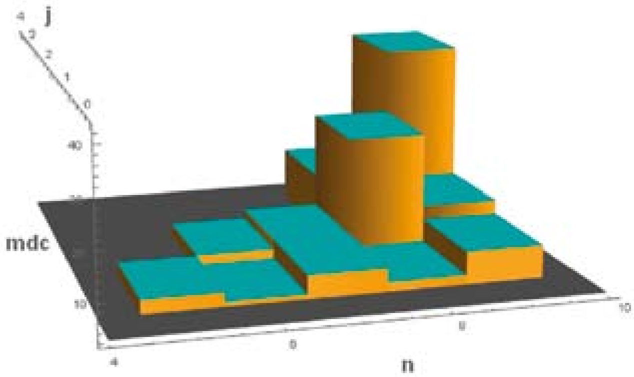


Figura 8.

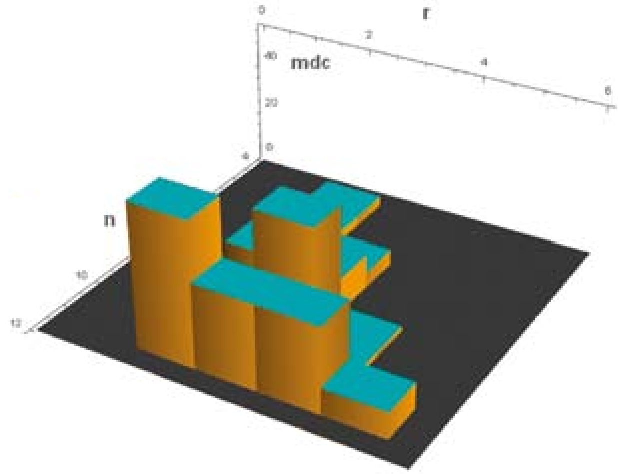


Figura 9.

(B) $\mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{i},\binom{n}{j}:\ 1\leq i,j\leq n-1\right\}$.

Já sabemos que este máximo divisor comum é maior do que 1, mas não como ele varia com n, i e j. Na figura 8 está o gráfico da função

$$(n,j) \quad\mapsto\quad \mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{j},\binom{n}{j+1}:\ 1\leq j\leq n-1\right\}$$

para naturais n entre 4 e 10, obtido com um módulo interativo que pode explorar-se em [2].

(C) $\mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{j}:\ r\leq j\leq s\right\}$.

Para naturais $n\geq 4$, $r\geq 2$ e s tais que $2r\leq s\leq n$, o máximo divisor comum das entradas consecutivas da n-ésima linha do triângulo de Pascal entre as posições r e s é dado por

$$\mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{r},\ldots,\binom{n}{s}\right\} = \prod_{k=0}^{r-1}\mathrm{mdc}\left\{\binom{n-k}{1},\ldots,\binom{n-k}{s}\right\}$$

(*cf.* [3]), podendo utilizar-se agora a igualdade (5) para obter cada fator do produto anterior. A figura 9 mostra a variação do máximo divisor comum

$$(n,r) \quad\mapsto\quad \mathrm{mdc}\left\{\binom{n}{j}:\ r\leq j\leq 2r\right\}$$

quando $5\leq n\leq 12$, $r\geq 2$ e $2r<n$. Não é conhecida nenhuma fórmula para blocos gerais de entradas não consecutivas.

REFERÊNCIAS

[1] B. Ram. *Common factors of* $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ $(m=1,2,\ldots,n-1)$. Indian Math. Club J. 1 (1909) 39-43.

[2] *http://www.atractor.pt/mat/triangulo_Pascal/*

[3] H. Joris, C. Oestreicher, J. Steinig. *The greatest common divisor of certain sets of binomial coefficients.* J. Number Theory 21:1 (1985) 101-119.

[4] S. Hong. *The greatest common divisor of certain binomial coefficients.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 354:8 (2016) 756--761.

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

OS *NÚMEROS* SURPREENDEM DE NOVO!

Revisitamos um problema proposto no nosso primeiro Recreio (*Gazeta* 145), já lá vão uns três lustros. O problema que apresentámos, envolvendo três pessoas, generaliza-se com um resultado surpreendente. Veremos que, no jogo proposto, quantos mais participam, maior é a probabilidade de todos ganharem! Uma versão do jogo é a seguinte.

TRÊS NUMA FESTA

Três amigas, Alice, Berta e Carla, recebem convites para uma festa. Os convites trazem também a descrição de um jogo social que será praticado quando chegarem ao local da diversão. As regras são as seguintes: Ao entrar na casa, o mordomo coloca na cabeça de cada uma delas um chapéu. Este só pode ser vermelho ou azul, e a escolha é feita por moeda ao ar pelo criado. Cada uma das três não pode ver o chapéu que tem na própria cabeça, mas vê com facilidade os que couberam às outras duas amigas. Num momento preciso, simultaneamente, as três convidadas tentam adivinhar a cor do chapéu que lhes coube, ou dizem "passo!". Se, pelo menos uma acertar e nenhuma errar, ganham, em conjunto, um bilião de euros. Caso contrário, não ganham nada.

Ao ver o convite, disse a Alice: "Bom, vocês passam e eu digo uma cor à sorte. Assim temos 50% de chances de ganhar uma fortuna. Vamos embora para essa festa!" Mas a Carla interrompeu: "Parece-me que há maneira mais inteligente de jogar..."

O que passou pela cabeça da Carla?

Na edição 146, mostrámos que a estratégia de adivinhar a cor contrária, quando se vê duas cores iguais, e passar em todos os outros casos, garante 75% de probabilidade de ganhar este jogo.

Imaginemos agora que temos sete jogadores a enfrentar um jogo com regras similares. A vitória corresponde a alguém acertar e ninguém errar. Qual a melhor estratégia neste caso?

Mais uma vez, a *soma-nim* vem em nosso auxílio. (Relembro que, em base 2, a tabuada é a seguinte: $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$.)

Numeremos os jogadores de 1 a 7, de forma a que todos saibam que número tocou a cada um. Para simplificar, sejam os jogadores representados por

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7

Façamos uma distribuição de chapéus:

●	●	●	●	●	●	●
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7

A estratégia ótima é a seguinte: cada jogador faz a soma-nim dos números dos jogadores que vê terem chapéu azul. Se esse número coincidir com o seu próprio número, deve gritar "vermelho". Em qualquer outro caso, deve passar.

Na tabela seguinte, constam os cálculos e o resultado da aplicação deste esquema.

•	•	•	•	•	•	•
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7
6	4	5	6	6	6	1
Passo	Passo	Passo	Passo	Passo	Passo	Passo

Assim, o acerto do jogador F e a abstenção dos restantes garantiu a vitória.

Em geral, se a soma-nim dos números dos jogadores com chapéus azuis for nula, todos erram o palpite. Caso contrário, há só um que acerta e todos os outros passam, uma vitória. Para sete jogadores, há 128 maneiras de distribuir os chapéus, das quais 112 originam soma-nim dos que têm chapéu azul nula. A probabilidade de vitória é, portanto, $112/128 = 7/8$! Nada mau!

E se tivéssemos 31 jogadores?

Sobre a questão do número anterior: Como muito bem nos comunicou o nosso assíduo leitor Luís Madureira, a quem agradecemos a colaboração, no primeiro problema cada um dos $n-1$ filhos recebe $n-1$ euros, enquanto na segunda versão tocam n euros a cada um dos $n-1$ filhos.

CONJUNTOS CONVEXOS E INTERSECÇÕES DE CÍRCULOS

Intersectando círculos pode obter-se um triângulo?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

Um conjunto S no plano diz-se **convexo** se, quaisquer que sejam os pontos x e y de S, o segmento de recta com extremos em x e y estiver totalmente contido em S. Exemplos simples de conjuntos convexos são os triângulos, os quadrados e os círculos.

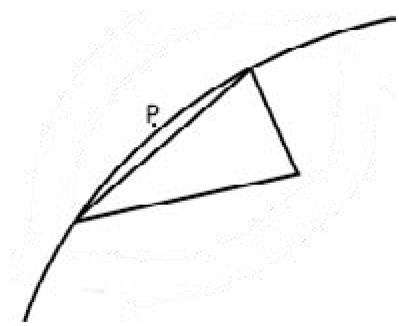
É óbvio que a intersecção de qualquer família de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo. Por exemplo, a intersecção de qualquer família de círculos é um conjunto convexo.

Uma pergunta interessante nasce de uma espécie de recíproco da afirmação anterior: que conjuntos convexos podem obter-se intersectando círculos? Esta pergunta é o objecto da presente nota.

A resposta é curiosa: essencialmente todos os conjuntos convexos se podem obter como intersecções de círculos, desde que naturalmente nos restrinjamos a conjuntos convexos limitados (já que qualquer círculo é um conjunto limitado).

A afirmação anterior é, à primeira vista, surpreendente: como é que, por exemplo, um triângulo pode ser uma intersecção de círculos? Mas basta pensar uns segundos para perceber o que está em causa.

Tomemos então um triângulo qualquer, fechado no sentido topológico, isto é, contendo a sua fronteira (suposição que faremos para todos os conjuntos neste texto). A afirmação precisa que fazemos é que o triângulo é exactamente igual à intersecção dos círculos que o contêm. É evidente que o triângulo está contido em tal intersecção. Provemos agora que essa intersecção é igual ao triângulo. Se não fosse, existiria pelo menos um ponto p fora do triângulo mas pertencendo a todos os círculos que contêm o triângulo. Mas é simples perceber que, escolhendo o centro do lado oposto a p e suficientemente longe, se consegue encontrar um círculo contendo o triângulo mas deixando p de fora.



O raciocínio que acabámos de ver pode ser generalizado para um espaço vectorial real E de dimensão finita com produto interno. Uma boa referência para o estudo de conjuntos convexos nesse contexto é o livro [1].

Teorema. *Seja S um conjunto convexo fechado limitado em E. Então S é igual à intersecção de todas as bolas fechadas que o contêm.*

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno e por $\| \cdot \|$ a correspondente norma.

Seja p um ponto não pertencente a S. Vamos construir uma bola fechada contendo S e não contendo p. Seja H um hiperplano que separa p de S (no sentido estrito, isto é, H está a uma distância positiva dos objectos separados) e seja q um ponto de H. Denotemos por R a semi-recta que é ortogonal a H em q e que está do mesmo lado de H que S. Consideremos a família $\mathcal{B}$ de bolas fechadas centradas em pontos de R e que são tangentes a H em q. É claro que p não pertence a nenhuma destas bolas.

Dado um ponto arbitrário $s \in S$, alguns cálculos mostram que o raio da bola em $\mathcal{B}$ cuja fronteira passa por s é dado por

$$\rho(s) = \frac{\|s-q\|^2 \|r-q\|}{2\langle s-q, r-q \rangle}$$

onde r é qualquer ponto de R.

Esta expressão define uma função contínua em S, uma vez que a distância entre H e S é positiva (e, portanto, o produto interno no denominador nunca é zero). Ponhamos $\rho = \max \rho(s)$ (que existe, por S ser fechado e limitado). É óbvio que a bola em $\mathcal{B}$ com raio ρ contém S. $\square$

Uma consequência potencialmente útil tem que ver com a noção de invólucro convexo.

O invólucro convexo de um conjunto define-se como a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm o conjunto. É, no sentido da inclusão, o mais pequeno conjunto convexo que contém o conjunto dado. Quando se estuda conjuntos convexos, esta definição é habitualmente seguida por várias caracterizações do invólucro convexo, que em diversas situações tornam mais simples verificar se um dado ponto lhe pertence ou não.

É consequência imediata do teorema que, dado um conjunto S fechado e limitado qualquer em E, um ponto p pertence ao invólucro convexo de S se e só se, para todo o v no espaço, se tiver

$$\|p-v\| \leq \max_{s \in S} \|s-v\| .$$

Voltando ao teorema, ele não é válido em espaços normados arbitrários, como se pode ver tomando as normas $\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ ou $\|(x_1,x_2)\| = \max\{|x_1|,|x_2|\}$ em $\mathbb{R}^2$. O problema está na falta de diferenciabilidade da fronteira das bolas construídas com essas normas.

No artigo [2] são descritas com precisão, no contexto de $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual, as famílias de subconjuntos com a propriedade de que qualquer conjunto convexo fechado limitado é igual à intersecção de todos os conjuntos da família que o contêm. Omitindo os pormenores, a ideia básica é que nas fronteiras dos conjuntos de uma tal família todas as "direcções de diferenciabilidade" devem estar representadas. A família das bolas provindas de um produto interno é o exemplo mais simples.

Agradeço a Cristina Caldeira a leitura cuidadosa do texto.

REFERÊNCIAS

[1] S. R. Lay, *Convex sets and their applications*, New York, Wiley, 1982.

[2] J. F. Queiró e E. Marques de Sá, "On separation properties of finite dimensional compact convex sets", *Proceedings of the American Mathematical Society,* 124, p. 259-264, 1996.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

IMPRESSÕES DIGITAIS, O CASO DREYFUS E OS MATEMÁTICOS

Uma colaboração entre Henri Poincaré, Gaston Darboux e Paul Appell certamente visava uma nova teoria matemática, certo? Na verdade, não. Vamos ver como alguns dos matemáticos franceses mais brilhantes da sua geração se uniram para corrigir um dos maiores erros da história da justiça francesa.

O dia 18 de janeiro de 2018 era um típico dia de verão numa das praias mais famosas do mundo. Numa noite agradável, pelas 20h30, uma multidão estava à beira-mar, no calçadão de Copacabana, no Rio de Janeiro, a dançar o samba e a beber imperiais, sem perceber a tragédia que se avizinhava. Numa fração de segundos, sem que ninguém desse por isto, um carro desgovernado, com o motorista a meio de um ataque epilético, avançou sobre a população matando um bebé e deixando diversos feridos, alguns em estado grave.

Um destes, sem esperança de recuperação devido a uma lesão cerebral, foi identificado como um australiano há muito residente no Brasil. A polícia carioca entrou em contacto com as autoridades do seu país de origem, a fim de que a família fosse notificada do infortúnio. Qual a surpresa quando se descobriu que o passaporte com o qual se identificava era falsificado!

Se não era quem dizia ser, quem era então?

Peritos brasileiros recolheram as suas impressões digitais, que foram enviadas à polícia australiana, numa primeira tentativa de o identificar. Após quase dois meses, descobriu-se que este natural de Melbourne andava a monte há 22 anos, depois de sair em condicional da prisão da cidade de Darwin. Disse que retornaria a casa dos pais e nunca mais foi visto [1].

Vamos esquecer toda a sucessão de crimes relatados e focar-nos em algo hoje em dia tão trivial que já nem chama a atenção. Como é possível garantir que uma pessoa é quem ela diz ser? Neste caso, isto foi feito através das impressões digitais, marcas únicas que carregamos nas pontas dos dedos. Mas há outros métodos: pode-se comparar arcadas dentárias, ou até o quase infalível método de ADN. Também é possível fazer o mais simples: comparar a face com uma fotografia certificada, um método muito pouco fiável mas ao qual estamos diariamente sujeitos.

Tudo isto se refere, no entanto, a tecnologias relativamente recentes. Até 1832, era costume em França marcar a ferro criminosos graves de forma a que uma nova incidência no crime resultasse numa punição significativamente mais dura. Este método foi substituído por tatuagens, mas não durou muito devido à oposição da Igreja, que identificava estas pinturas corporais com rituais pagãos.

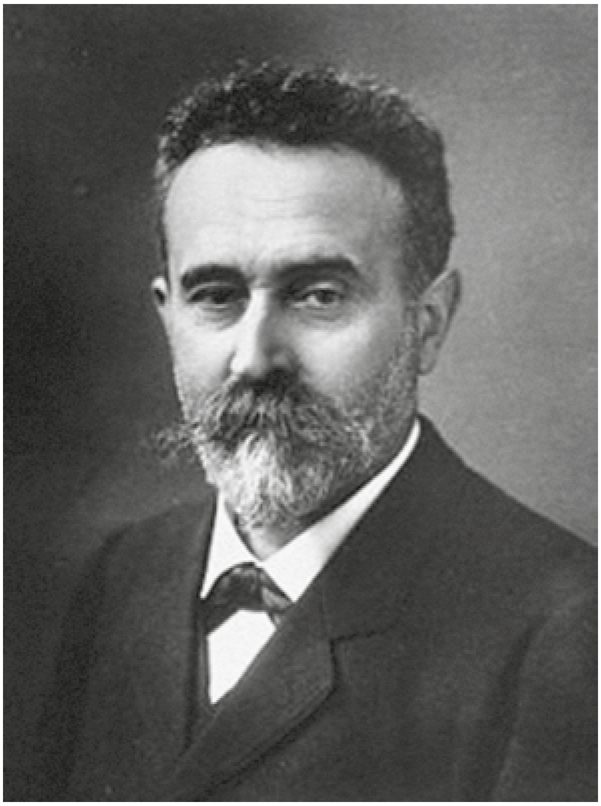


Figura 1. Alphonse Bertillon (1853-1914). **Fonte: Wikimedia Commons.**

É neste ambiente que aparece Alphonse Bertillon, um dos criadores das Ciências Forenses. Inventou o que se chama de Antropometria, um conjunto de medidas físicas capazes de identificar além de dúvidas razoáveis a identidade de uma pessoa. Foi também dos primeiros a utilizar sistematicamente as impressões digitais, e, de facto, o primeiro a utilizá-las na solução de um crime. Os seus métodos foram utilizados (pelo menos, em parte) até 1970, quase 100 anos após a sua introdução. Veja a fig. 1.

A sua fama não tinha limites. Até Sherlock Holmes o elogiou: "*Há uma enorme atração pelo trabalho de Monsieur Bertillon para qualquer um que seja dotado de uma mente científica.*" [2]

Apesar de não ter uma formação académica tradicional, pois desde cedo juntou-se à polícia, era filho e neto de dois dos maiores estatísticos de França, e desta forma tinha uma certa confiança nos métodos desta ciência, mesmo sem nunca a ter estudado de forma rigorosa.

O que vamos contar agora segue três fontes: [3, 4, 5].

Em fins de 1894, Bertillon foi chamado a depor num caso que agitava toda a nação. O capitão do Exército Alfred Dreyfus estava a ser julgado por traição. Era acusado de ter passado ao consul alemão uma série de segredos de Estado. A prova era uma carta encontrada pelos serviços secretos franceses no lixo da embaixada germânica, cuja caligrafia era semelhante à de Dreyfus. O ambiente fortemente antissemita de fins do século XIX era um grande complicador de todo o processo e certamente não ajudava nada o facto de o réu ser originário da Alsácia, região de eterna disputa entre as duas potências europeias.

Dos cinco peritos que analisaram os escritos, dois disseram não poder identificar a caligrafia e três afirmaram ser a de Dreyfus. Mas foi Bertillon quem foi mais enfático. Provou matematicamente que o capitão havia tentado alterar o seu próprio modo de escrever. Utilizando métodos estatísticos, demonstrou que a forma do traço do "t" era idêntica ao de cartas cuja autoria era inquestionável. Veja uma imagem da análise na figura 2.

Dreyfus foi condenado ao degredo na Ilha do Diabo (Guiana Francesa), em condições terríveis, que inspiraram diversos filmes e romances. A defesa não teve acesso às provas, o julgamento foi feito em tribunais fechados, sempre em nome dos segredos de Estado.

Imediatamente iniciou-se uma campanha em França para provar a sua inocência. Num dos textos mais famosos da História, o escritor Émile Zola publicou o manifesto *J'accuse* onde mostra passo a passo a série de absurdos do processo. Foi acusado de ofensa ao Exército. Esta querela, no entanto, correu num tribunal civil, onde a publicidade dos atos é a norma. Vários oficiais, peças-chave da acusação, tiveram de subir à barra – e ficaram calados. Muitos peritos desmontaram o processo. Enquanto a elite intelectual francesa percebia a conspiração para evitar a reabertura do processo, a população manifestava-se em apoio ao Exército, instituição sempre bem vista. No final, Zola foi condenado e exilou-se.

As eleições seguintes foram ganhas por nacionalistas, que não tinham dúvidas da culpa por traição de um judeu alsaciano. O novo ministro da Guerra, certo da justeza de todo o processo, resolveu tornar públicas as provas condenatórias. Era necessário ganhar a elite desconfiada de volta, que, em sua opinião, só não via o óbvio crime por não ter acesso aos autos.

Foi, no entanto, um tiro no pé. Ficou evidente que a condenação se baseava essencialmente na análise estatística de Bertillon, e isso fez com que os matemáticos fran-

Figura2. Texto original, colado pelos serviços secretos franceses. Imagens sobrepostas da palavra "Interêt" em dois textos. Detalhe. **Fonte: Wikimedia Commons e referência [5].**

ceses acordassem. Escreveu Henri Poincaré numa carta aos tribunais:

> *"No entanto, se vós desejais saber se o raciocínio que M. Bertillon aplica ao cálculo de probabilidades é correto, então posso dar a minha opinião. (...) Está errado. (...) Este erro colossal faz com que todo o resto seja suspeito."*

As missivas de Poincaré eram sempre limitadas às questões científicas, apesar de a política não lhe ser estranha (o seu irmão Raymond foi primeiro-ministro e Presidente de França). Outros matemáticos de peso, como Paul Painlevé (futuramente primeiro-ministro) e Paul Appell foram mais incisivos ao declarar publicamente que toda a condenação não passava de uma fraude.

O erro de Bertillon foi o de selecionar a amostra. Como se ao jogar quatro dados, estimássemos que a probabilidade de obter um duplo seis fosse de $(1/6)^2$. Isto é falso, pois esta é a probabilidade de um duplo 6 ao jogar dois dados. Ao selecionar a letra que se queria comparar, Bertillon estimou probabilidades muito diferentes das corretas.

O processo Dreyfus foi finalmente reaberto por ordem da Suprema Corte e Poincaré, Gaston Darboux e Appell foram chamados a depor. Em seu testemunho, desmontaram um a um os argumentos de Bertillon, num importante texto entre a matemática e o direito [6].

Alfred Dreyfus foi absolvido e reintegrado no Exército. Recebeu a Legião de Honra, sobreviveu a um atentado e lutou por França na Primeira Grande Guerra. Os seus acusadores nunca foram processados.

REFERÊNCIAS

[1] Letícia Mori. "Como atropelamento em Copacabana revelou australiano condenado por pedofilia foragido há 20 anos no Brasil", BBC Brasil, *http://www.bbc.com/portuguese/brasil-43716612*

[2] Arthur Conan Doyle. "The Hound of the Baskervilles". *The Strand Magazine* (august 1901-april 1902). Disponível em *https://www.arthur-conan-doyle.com/*

[3] Leila Schneps, Coralie Colmez. *Math on Trial: How Numbers Get Used and Abused in the Courtroom*. Basic Books, 2013.

[4] Laurent Rollet. "Autour de l'affaire Dreyfus. Henri Poincaré et l'action politique". *Revue Historique* T. 298, Fasc. 1 (603) (1997), pp. 49-101.

[5] Laurent Rollet. *Des mathématiciens dans l'affaire Dreyfus? Autoforgerie, bertillonnage et calcul des probabilités. http://images.math.cnrs.fr/Des-mathematiciens-dans-l-affaire--Dreyfus.html?lang=fr.*

[6] Henri Poincaré, Gaston Darboux et Paul Appell, *Examen critique des divers systèmes ou études graphologiques auxquels a donné lieu le bordereau, in La révision du procès de Rennes.* Enquête de la chambre criminelle de la Cour De Cassation, 5 mars-19 novembre 1904, Tome 3, Ligue des Droits de l'Homme, Paris, pp. 500-600.

UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA DO SUDOKU

PEDRO M. LIMA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, UNIVERSIDADE DE LISBOA
pedro.t.lima@ist.utl.pt

O objetivo deste texto é expor alguns conceitos e regras básicas que, aplicadas de forma sistemática, permitam resolver qualquer problema de SUDOKU.

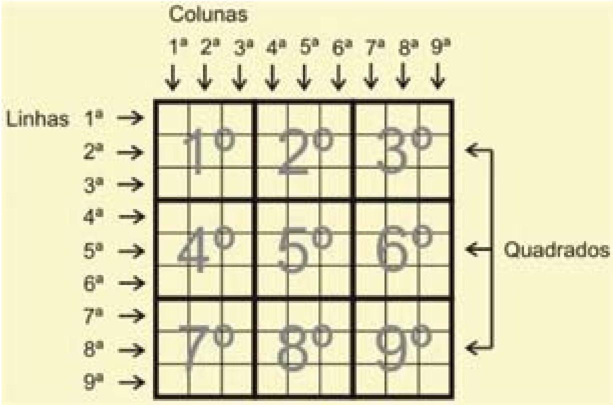


Figura 1. Tabela de Sudoku.

1 INTRODUÇÃO

Como é do conhecimento geral, o jogo do SUDOKU é um quebra-cabeças, de origem japonesa, que consiste numa tabela de 9×9 células, a qual está dividida em 9 quadrados pequenos de dimensão 3×3 (ver fig. 1).

Neste texto designarei por conjunto fundamental cada um dos seguintes conjuntos de 9 células: uma linha, uma coluna ou um quadrado pequeno da tabela.

Evidentemente, numa tabela de SUDOKU existem 27 conjuntos fundamentais: 9 linhas, 9 colunas e 9 quadrados.

Definido o conceito de conjunto fundamental, **a regra principal do SUDOKU** pode ser formulada da seguinte maneira:

Cada dígito $i \in 1, \ldots, 9$ aparece uma e só uma vez em cada conjunto fundamental da tabela.

O objetivo do jogo é preencher totalmente a tabela, observando a regra principal.

Para garantir que um problema tem solução única, na tabela inicial está preenchido um certo número de células (geralmente entre 20 e 30, conforme o grau de dificuldade do problema).

Se o problema estiver corretamente formulado, ele deverá ter solução única; mas também existem problemas que não têm solução ou que admitem múltiplas soluções .

Em [1] e [2] foi provado que um problema de SUDOKU com solução única tem, pelo menos, 17 células preenchidas na tabela inicial. No entanto, o número da células preenchidas, por si só não garante a unicidade de solução. Na realidade, pode construir-se até uma tabela com 77 células preenchidas que admite mais do que uma solução.

Hoje em dia, o SUDOKU está profusamente difundido por todo o mundo: existem milhares de publicações sobre o jogo em muitas línguas diferentes e até se realizam competições internacionais da modalidade. De referir um interessante artigo sobre SUDOKU na Wikipedia. Além dos artigos já citados, gostaria ainda de mencionar [3] e [4], onde os leitores poderão encontrar mais informações sobre este jogo apaixonante.

2 CONJUNTO DE POSSIBILIDADES

A técnica de resolução que se propõe baseia-se no conceito de **conjunto de possibilidades**.

Definição. Chama-se conjunto de possibilidades de uma célula ao conjunto de dígitos que podem preenchê-la, de acordo com as regras do jogo. Representaremos o conjunto de possibilidades da célula c por $p(c)$.

Na tabela inicial, se uma célula tiver as coordenadas (i, j) e pertencer a um certo quadrado Q, então o conjunto das possibilidades dessa célula é constituído pelos dígitos de 1 a 9 que não ocorrerem em nenhuma entrada da linha i, da coluna j, ou do quadrado Q.

Ao longo do processo de resolução do problema, os conjuntos de possibilidades das células são reduzidos, de acordo com novas regras que vamos estudar.

Evidentemente, se o conjunto de possibilidades de uma célula for um conjunto **singular**, então a célula encontra-se **resolvida**, isto é, existe uma única maneira correta de a preencher. Assim, um problema estará resolvido quando todas as células da tabela estiverem resolvidas.

Exemplo 1. Suponhamos que na linha 2 da tabela já estão preenchidas células com os dígitos 1, 2, 3; na coluna 3 já estão preenchidas células com os dígitos 4, 5, 6; e no primeiro quadrado dessa tabela estão preenchidas células com os dígitos 7, 8 (ver fig. 2). Nesse caso, o conjunto de possibilidades da célula (2, 3) é constituído apenas pelo dígito 9, ficando a célula resolvida com esse dígito.

Como já foi dito, no início de cada jogo existe um certo número de células resolvidas, o que naturalmente implica certas restrições aos conjuntos de possibilidades das restantes células. A primeira coisa a fazer, portanto, é determinar o conjunto de possibilidades de cada célula não resolvida. Ao fazê-lo, possivelmente, algumas dessas células ficarão imediatamente resolvidas (como no exemplo 1).

O método que se propõe é por etapas, tentando reduzir sucessivamente o cardinal do conjunto de possibilidades de todas as células, até que todos os conjuntos de possibilidades sejam singulares. Para isso, vamos definir um conjunto de conceitos e regras, resultantes da regra principal do SUDOKU.

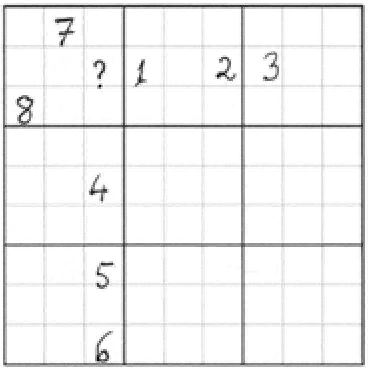


Figura 2. Ilustração do exemplo 1: pretende-se determinar o conjunto de possibilidades da célula (2, 3).

3 REGRA DA ÚNICA OCORRÊNCIA

Já sabemos que uma célula fica resolvida quando o conjunto de possibilidades é singular. Além disso, existe outra situação em que uma célula fica imediatamente resolvida: se houver um dígito que ocorre apenas no conjunto de possibilidades de uma das células dum certo conjunto fundamental. Nesse caso, obviamente, esse dígito constitui a solução dessa célula (doutro modo, o dígito referido não ocorreria no conjunto fundamental em causa, violando a regra principal do SUDOKU).

Exemplo 2. Suponhamos que a célula (*i, j*), do quadrado *Q*, tem o conjunto de possibilidades $p(i, j) = 1, 2, 3$; e que o dígito 3 não pertence ao conjunto de possibilidades de nenhuma outra célula da linha *i* (ou da coluna *j*, ou do quadrado *Q*). Nesse caso, a célula (*i, j*) será preenchida pelo dígito 3 (descartando-se as possibilidades 1 e 2).

Designaremos esta regra por regra da única ocorrência.

4 SUB CONJUNTOS INDEPENDENTES

A existência de um conjunto de possibilidades singular e a regra da única ocorrência permitem-nos imediatamente resolver uma célula. No entanto, além destas, existem outras regras que, não permitindo imediatamente resolver uma célula, permitem reduzir o cardinal dos conjuntos de possibilidades de algumas células.

Para formularmos essas regras vamos começar por definir subconjuntos independentes de células e de dígitos. Suponhamos que num certo conjunto fundamental existem duas células (designemo-las por *A* e *B*), para as quais o conjunto de possibilidades coincide e é constituído apenas por dois dígitos: $p(A) = p(B) = \{d_1, d_2\}$. Nesse caso, dizemos que as células *A*, *B* formam um **subconjunto independente de duas células.**

A existência de um subconjunto independente de duas células significa que os dígitos d_1, d_2 só podem ocorrer nessas duas células (e não em nenhuma das outras células do mesmo grupo fundamental). Esta regra, que designaremos por regra das duas células, permite-nos descartar todas as ocorrências dos dígitos d_1, d_2 nos conjuntos de possibilidades das outras células do mesmo conjunto fundamental, reduzindo assim esses conjuntos de possibilidades.

Exemplo 3. Suponhamos que na mesma linha (ou coluna, ou quadrado) existem quatro células com os seguintes conjuntos de possibilidades: $p(A) = \{5, 6\}$, $p(B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(C) = \{5, 6\}$, $p(D) = \{5, 6, 7, 8\}$. Neste caso, os conjuntos de possibilidades das células *A* e *C* têm cardinal 2 e coincidem, pelo que estas duas células formam um subconjunto independente. Por conseguinte, os dígitos 5, 6 só podem ocorrer nessas duas células. Assim, a aplicação da regra das duas células faz com que os conjuntos de possibilidades das células *B* e *D* passem a ser $p(B) = \{1, 2, 3, 4\}$, $p(D) = \{7, 8\}$.

De forma análoga se define um **subconjunto independente de dois dígitos**. Suponhamos que dois dígitos d_1, d_2 ocorrem apenas nos conjuntos de possibilidades de duas células (c_1, c_2) do mesmo conjunto fundamental (não ocorrendo no conjunto de possibilidades de nenhuma outra célula desse conjunto). Então diz-se que os dígitos d_1, d_2 formam um **subconjunto independente de dois dígitos**, associado às células c_1, c_2. Note-se que os conjuntos de possibilidades das células c_1, c_2 poderão à partida ter outros dígitos além de d_1 e d_2.

A importância da existência de subconjuntos independentes de dois dígitos consiste em nos permitir reduzir o conjunto das possibilidades das células correspondentes. Isto é, nas células em que ocorrem os dígitos d_1, d_2, o conjunto de possibilidades deixará de ter outros dígitos que não sejam esses. A esta regra chamaremos a **regra dos dois dígitos**. Isto explica-se porque, se os dígitos d_1, d_2 não aparecem em mais nenhuma célula do mesmo conjunto fundamental, então eles terão de preencher estas duas células e nelas não poderá ocorrer qualquer outro dígito.

Exemplo 4. Suponhamos que na mesma linha existem duas células A e B, tais que os seus conjuntos de possibilidades são $p(A) = \{1, 2, 3\}$ e $p(B) = \{2, 3, 4\}$; suponhamos ainda que os dígitos 2, 3 não figuram nos conjuntos de possibilidades de nenhuma outra célula da mesma linha. Nesse caso, os dígitos {2, 3} formam um subconjunto independente de dois dígitos, associado às células A, B. Da aplicação da regra dos dois dígitos resulta que os conjuntos de possibilidades das células A e B passam a ser iguais: $p(A) = p(B) = \{2, 3\}$ (sendo descartadas as outras possibilidades das células A e B).

Da mesma forma que se definem os subconjuntos independentes de duas células e de dois dígitos, podem ser definidos conjuntos independentes de k células e k dígitos, com $k = 2, 3, ..., 8$. A definição é a seguinte:

As células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ (do mesmo conjunto fundamental) formam um subconjunto independente se e só se o cardinal da reunião dos conjuntos de possibilidades dessas células for k, ou seja,

$$p(c_1) \cup p(c_2) \cup \cdots \cup p(c_k) = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\},$$

onde $d_1, d_2, \ldots, d_k$ são k dígitos distintos.

Uma vez definido um conjunto independente de k células, a regra das k células pode ser formulada do seguinte modo:

Se as células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ formarem um subconjunto independente, tal que a reunião dos seus conjuntos de possibilidades seja $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$, então os dígitos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ não podem ocorrer nos conjuntos de possibilidades das outras células do mesmo conjunto fundamental.

É fácil verificar que, no caso de $k = 2$, esta regra se reduz à regra das duas células, anteriormente formulada.

Exemplo 5. Suponhamos que A, B, C são células do mesmo conjunto fundamental, tais que $p(A) = \{2, 3\}$, $p(B) = \{1, 3\}$, $p(C) = \{1, 2\}$. Neste caso, temos $p(A) \cup p(B) \cup p(C) = \{1, 2, 3\}$, ou seja, o cardinal da reunião é 3, igual ao número de células. Logo, as células A, B, C formam um subconjunto independente de três células. Suponhamos que no mesmo conjunto fundamental existem as células D, E, F com os conjuntos de possibilidades $p(D) = \{2, 3, 4\}$, $p(E) = \{1, 3, 5, 6\}$, $p(F) = \{1, 2, 5, 6\}$. Pela aplicação da regra das três células, estes conjuntos de possibilidades ficariam reduzidos a $p(D) = 4$, $p(E)$={5,6}, $p(F) = 5, 6$. Em particular, a célula D ficaria resolvida. $p(E)$={5,6},

Finalmente, defina-se um subconjunto independente de k dígitos.

Diremos que os dígitos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ formam um subconjunto independente de k dígitos, associados às células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ de um certo conjunto fundamental, se cada um esses dígitos figurar, pelo menos, no conjunto de possibilidades de uma dessas células, e se não figurar em nenhum conjunto de possibilidades, correspondente às restantes células do mesmo conjunto fundamental.

Por analogia com a regras dos dois dígitos, pode formular-se **a regra dos *k* dígitos**:

Se os dígitos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ formarem um subconjunto independente, associado às células $c_1, c_2, \ldots, c_k$ dum certo conjunto fundamental, então nos conjuntos de possibilidades dessas células não poderão figurar outros dígitos, além de $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Exemplo 6. Suponhamos que A, B, C são células da mesma linha, tais que $p(A) = \{2, 3, 5\}$, $p(B) = \{1, 3, 4\}$, $p(C) = \{1, 2, 6\}$. Suponhamos ainda que os dígitos 1, 2, 3 não figuram nos conjuntos de possibilidades de nenhuma das restantes seis células da mesma linha. Então, os dígitos 1, 2, 3 formam um subconjunto independente (associado às células A, B, C). Uma vez que os dígitos 1, 2, 3, formam um subconjunto independente, ao aplicar a **regra dos três dígitos**, os conjuntos de possibilidades das células associadas a este subconjunto passariam a ser $p(A) = \{2, 3\}$, $p(B) = \{1, 3\}$, $p(C) = \{1, 2\}$.

É importante assinalar o seguinte. De cada vez que se deteta um subconjunto independente de k células ou de k dígitos e se aplica a regra correspondente, o conjunto fundamental considerado fica dividido em **dois subconjuntos** independentes (um com k células, outro com $9-k$), conjuntos esses que podem, por sua vez, estar (ou vir a ser) subdivididos, se o conjunto de possibilidades de uma das células vier a ser reduzido. Por isso, ao reduzir os conjuntos de possibilidades das células, estamos também a definir partições do conjunto fundamental, em subconjuntos cada vez mais pequenos.

5 COMPLEMENTARIDADE DE SUBCONJUNTOS INDEPENDENTES

Como foi referido na secção anterior, existem subconjuntos independentes de k células e de k dígitos, com k entre 2 e 8. Por outro lado, é de referir que qualquer célula resolvida (com um conjunto singular de possibilidades) pode ser considerada um subconjunto independente de uma célula. Do mesmo modo, se numa certa célula A se verifica um caso de única ocorrência do dígito d, também se pode dizer que esse dígito forma um subconjunto independente, associado à céula A. Desse modo, as regras de resolução de células resultantes do conjunto de possibilidades singular e da ocorrência única podem ser consideradas regras de *uma célula* e de *um dígito*.

Assim, verificamos que existe uma relação importante entre os **subconjuntos independentes de uma célula** (células resolvidas) e os **subconjuntos independentes de oito dígitos**, que passamos a referir. Se a célula c_1 de um certo conjunto fundamental tiver o conjunto de possibilidades $p(c_1) = \{d_1\}$, então os restantes oito dígitos $d_2, ..., d_9$ vão figurar apenas nos conjuntos de possibilidades das células $c_2, ..., c_9$, pelo que, segundo a nossa definição , esses oito dígitos vão formar um **subconjunto independente**, associado às referidas células.

Do mesmo modo, quando se verifica a *única ocorrência do dígito* d_1 na célula c_1, de tal maneira que esse dígito forma um subconjunto independente, então as restantes oito células do mesmo conjunto fundamental formam um subconjunto independente (já que a reunião dos conjuntos de possibilidades dessas oito células produz os oito dígitos $\{d_2, ..., d_9\}$).

Destas duas propriedades podemos concluir o seguinte:

- é equivalente aplicar a um certo conjunto fundamental uma regra de uma célula ou uma regra de oito dígitos.

- é equivalente aplicar a um certo conjunto fundamental uma regra de um dígito ou uma regra de oito células.

Neste sentido, podemos dizer que existe uma *relação de complementaridade entre subconjuntos independentes* de um e de oito elementos. Obviamente, os subconjuntos independentes de um elemento (uma célula ou um dígito) são muito mais fáceis de detetar, por isso, podemos descartar a pesquisa de subconjuntos independentes de oito células ou de oito dígitos.

Generalizando um pouco, podemos constatar que existe a mesma relação de complementaridade entre subconjuntos independentes de k células e subconjuntos independentes de $9-k$ dígitos ($k = 1, 2, \ldots, 8$). Mais precisamente, se as células $c_1, \ldots, c_k$ de um conjunto fundamental formarem um subconjunto independente, de tal modo que a reunião dos conjuntos de possibilidades dessas células produz o conjunto $\{d_1, \ldots, d_k\}$, então o conjunto de dígitos $\{d_{k+1}, \ldots, d9$ $\}$ também forma um subconjunto independente (de $9-k$ dígitos).

As relações de complementaridade e a equivalência entre a aplicação da regra das k células e a regra dos $9-k$ dígitos levam-nos à seguinte conclusão.

Para detetar todos os subconjuntos independentes de um certo conjunto fundamental, e aplicar todas as regras possíveis, basta detetar todos os subconjuntos independentes de uma a quatro células e todos os subconjuntos independentes de um a quatro dígitos, e aplicar as regras correspondentes.

Por outras palavras, não é necessário aplicar regras com mais de quatro células ou de quatro dígitos, uma vez que essas regras são equivalentes a outras, com menor número de elementos.

Esta conclusão tem um grande significado prático, quando se trata de aplicar sistematicamente as regras de simplificação, até conseguir resolver um dado problema de SUDOKU.

6 ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

Uma vez conhecidas todas as possíveis regras de simplificação do SUDOKU, podemos formular uma estratégia que nos permite, em princípio, resolver qualquer problema de SUDOKU (desde que ele tenha solução única).

Para isso, vamos supor que sabemos executar as seguintes operações elementares:

- dado um certo conjunto de células preenchidas, construir os conjuntos de possibilidades de todas as outras células.

- conhecidos os conjuntos de possibilidades das células de um conjunto fundamental, detetar todos os subconjuntos independentes de uma a quatro células e de um a quatro dígitos.

- encontrado um certo subconjunto independente, aplicar a respetiva regra (transformando os conjuntos de possibilidades das células envolvidas).

O algoritmo consiste em aplicar sucessivamente estas três operações , até que não seja possível aplicar mais nenhuma das regras acima descritas.

Note-se que o processo de resolução terá sempre de ser um processo iterativo e que o número de passos a realizar não é, à partida, conhecido.

De facto, de cada vez que se aplica uma regra a um certo conjunto fundamental, isso produz alterações nos conjuntos de possibilidades não só desse conjunto fundamental, mas também de outros que fazem parte da mesma tabela. Por isso, depois de aplicar uma regra, é sempre necessário atualizar os conjuntos de possibilidades de todas as células afetadas. Por sua vez, sempre que se altera os conjuntos de possibilidades de alguma célula, podem surgir novos subconjuntos independentes nos conjuntos fundamentais a que essa célula pertence (não esquecer que cada célula pertence a três conjuntos fundamentais: uma linha, uma coluna e um quadrado).

Para ilustrar o algoritmo proposto, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 7. Consideremos o conjunto fundamental descrito na tabela 1. Para sermos concisos, neste exemplo analisaremos apenas um conjunto fundamental, embora, como se sabe, num problema de SUDOKU seja necessário considerar 27 conjuntos fundamentais.

Tabela 1. Descrição do exemplo 7. Cada coluna da tabela representa os conjuntos de possibilidades das células depois de efetuado o passo correspondente.

Célula	Tabela inicial	Passo 1	Passo 2	Passo 3
A	2, 3	2, 3	2, 3	2, 3
B	1, 3	1, 3	1, 3	1, 3
C	1, 2	1, 2	1, 2	1, 2
D	2, 3, 4	2, 3, 4	**4**	**4**
E	1, 3, 5, 6	1, 3, 5, 6	**5, 6**	**5, 6**
F	1, 2, 5, 6	1, 2, 5, 6	**5, 6**	**5, 6**
G	1, 2, 4, 9	**9**	**9**	**9**
H	1, 3, 5, 7, 8	1, 3, 5, 7, 8	**5, 7, 8**	**7, 8**
I	2, 6, 7, 8	2, 6, 7, 8	**6, 7, 8**	**7, 8**

Suponhamos que na configuração inicial os conjuntos de possibilidades das nove células são os que se enumeram na segunda coluna desta tabela.

Pela análise destes conjuntos de possibilidades, concluímos que a regra da única ocorrência se aplica à célula *G*, já que o dígito 9 figura apenas no conjunto de possibilidades desta célula. Assim, neste caso, o primeiro passo da resolução consiste em aplicar esta regra, o que nos leva à resolução da célula *G* (o conjunto de possibilidades desta célula fica reduzido ao número 9, como se vê na terceira coluna da tabela).

O segundo passo da resolução consiste em detetar que as células *A, B, C* formam um subconjunto independente, tal que a reunião dos seus conjuntos de possibilidades resulta no conjunto {1, 2, 3}. Consequentemente, ao aplicar a regra das três células, os conjuntos de possibilidades passam a ter a composição indicada na quarta coluna. Em particular, verifica-se que a célula *D* fica resolvida com o número 4.

Analisando os conjuntos de possibilidades resultantes do segundo passo, verifica-se que as células *E, F* formam um subconjunto independente, com o conjunto de possibilidades {5, 6}. Assim, para efetuar o terceiro passo da resolução, aplica-se a regra das duas células, o que nos leva aos conjuntos de possibilidades que constam da última coluna.

Analisando esta coluna, verifica-se que o grupo fundamental ficou decomposto em cinco subconjuntos independentes: {*A, B, C*}, {*D*}, {*E, F*}, {*G*}, {*H,I*}. Nenhum destes subconjuntos independentes contém um subconjunto independente menor, pelo que nesta fase não é possível realizar qualquer outra transformação neste grupo fundamental. Entretanto, as células *A, B, C, E, F, H, I* continuam por resolver. Essas células poderão vir a ser resolvidas, se os seus conjuntos de possibilidades forem reduzidos, em consequência de transformações realizadas noutros grupos fundamentais.

Assim, o passo seguinte da resolução do problema seria atualizar os conjuntos de possibilidades das células dos outros conjuntos fundamentais, e passar a analisar um desses conjuntos.

O Exemplo 7 mostra-nos como aplicar as regras de resolução a um conjunto fundamental, decompondo-o no maior número possível de subconjuntos independentes. Mas não permite responder à seguinte questão: será possível através deste algoritmo resolver totalmente qualquer problema de SUDOKU?

A resposta é: **sim, é possível, desde que o problema**

tenha solução única. Para o provar, baseamo-nos nos seguintes argumentos. Como vimos, a sucessiva aplicação do algoritmo permite-nos decompor cada conjunto fundamental em subconjuntos independentes cada vez mais pequenos. Este processo termina quando se verifica uma das seguintes três situações :

1. Cada grupo fundamental fica decomposto em nove sub-grupos independentes de uma célula. Neste caso, o problema fica resolvido.

2. Após realizadas todas as transformações possíveis em todos os conjuntos fundamentais, e depois de actualizados os conjuntos de possibilidades de todas as células da tabela, restam subconjuntos independentes com mais do que uma célula. Neste caso, o problema admite múltiplas soluções. Com efeito, a existência de um subconjunto independente não singular implica que existem diferentes possibilidades de preencher a tabela.

3. Numa certa etapa do processo ,surge um conjunto de possibilidades vazio. Neste caso, o problema é evidentemente impossível (não tem solução).

7 CONCLUSÃO

Neste texto não foi tratada uma questão importante: a **eficiência** do algoritmo descrito. Com efeito, para a prática não basta ter a garantia de que um certo algoritmo nos conduz à solução do problema. É essencial ter uma estimativa do número de operações que a resolução exige. Esta é uma questão complexa para o problema em causa.

Com efeito, a prática mostra que a rapidez da resolução pode variar muito para o mesmo problema. Ela depende, entre outras coisas, da ordem pela qual são considerados os conjuntos fundamentais. Uma regra heurística simples que pode ajudar bastante é a seguinte: começar por analisar os conjuntos fundamentais que têm mais células resolvidas.

Finalmente, poder-se-á objetar que o algoritmo aqui descrito é demasiado complicado e que os problemas de SUDOKU podem ser resolvidos sem tanto formalismo. Isso é verdade, até certo ponto. Quando se trata de problemas de dificuldade baixa ou média, uma abordagem 'intuitiva' poderá eventualmente ter sucesso. Mas para problemas de dificuldade elevada, a experiência de cerca de dez anos diz-me que a garantia do sucesso está numa abordagem rigorosa do problema, isto é, em termos matemáticos, como aqui se tentou fazer.

REFERÊNCIAS

[1] G. McGuire, B. Tugemann; G. Civario, *There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*. Arxiv.org, janeiro 2012.

[2] H.H. Linand I-C. Wu., *No 16-clue Sudoku puzzles*, by sudoku@vtaiwan project, setembro 2013.

[3] D. Berthier, *The Hidden Logic of Sudoku*. LULU PR. p. 76 N. ISBN 1-84753-472-4, 2007.

[4] F. Jarvis, *Sudoku enumeration problems*. Frazer Jarvis's home page, 2006.

SOBRE O AUTOR

Pedro M. Lima é docente do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico e investigador do Centro de Matemárica Computacional e Estocástica da Universidade de Lisboa

B A

COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2017:

Sócio Efetivo: **40 euros**

Sócio Estudante: **20 euros**
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante
comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais
Escolar: **80 euros**
Académico: **400 euros**
Corporativo: **600 euros**

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.

spm
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785
E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

PODE PROVAR-SE ALGO TÃO SIMPLES COMO O ABC?

Em 2012, o matemático japonês Shinichi Mochizuki afirmou ter demonstrado a Conjetura ABC. Será que o fez? Ninguém sabe.

A Conjetura ABC é um dos mais conhecidos e importantes problemas em aberto da matemática, e já foi abordada na *Gazeta de Matemática* [4]. Mas será que está mesmo em aberto?

A CONJETURA

Normalmente, começa-se por descrever esta conjetura com uma frase do género: "Sejam a, b e c três números naturais primos entre si e tais que $a+b=c$." Pode parecer que há aqui alguma ambiguidade: dizer que a, b e c são primos entre si quer dizer que não há nenhum fator comum aos três maior do que 1? Ou significa mais do que isso, nomeadamente que quaisquer dois deles são primos entre si? De facto, uma vez que $a+b=c$, as duas interpretações têm o mesmo significado.

Dado um número natural $n>1$, o seu radical, que se representa por $\mathrm{rad}(n)$, é o produto dos fatores primos de n. Por exemplo:

- $\mathrm{rad}(12)=6$, visto que os fatores primos de 12 são 2 e 3;
- se n é primo, $\mathrm{rad}(n)=n$;
- se $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{rad}\,(10^n)=10$, pois os únicos fatores primos de 10^n são 2 e 5 (seja qual for o valor de n).

Constata-se que, geralmente, (supondo que $a+b=c$ e que a, b e c são primos entre si) $c\leqslant \mathrm{rad}(abc)$. Há exceções; por exemplo, se $a=3$, $b=125$ e $c=128$, então

$$\mathrm{rad}(abc)=\mathrm{rad}(3\times 5^3\times 2^7)=30<128=c.$$

A Conjetura ABC tem a ver com as exceções a esta "regra":

> **Conjetura ABC:** Se $k\in]1,+\infty[$, há somente um número finito de tripletos (a,b,c) de números naturais primos entre si tais que $a+b=c$ e que $c>\mathrm{rad}(abc)^k$.

Esta conjetura foi formulada por dois matemáticos na década de 80 do século passado: o britânico David Masser [2] e o francês Joseph Oesterlé [3].[1] Daí também ser conhecida por conjetura de Masser-Oesterlé.

A importância da Conjetura ABC foi abordada num texto publicado no Clube SPM por Miguel Abreu.[2] Terence Tao, que recebeu a Medalha Fields em 2006, expôs um argumento heurístico a favor da validade da conjetura no seu blogue *What's new*.[3]

SHINICHI MOCHIZUKI

Este artigo não é relativo à Conjetura ABC em si própria, mas sim a um extraordinário evento que teve lugar em 2012 relativamente a uma sua eventual demonstração.

A 31 de agosto de 2012, o matemático japonês Shinichi Mochizuki divulgou pela Internet que tinha demonstrado a conjetura, tendo publicado a demonstração num conjunto de quatro textos com o título comum *Inter-universal Teichmüller theory*. É preciso acrescentar que a expressão "divulgou pela Internet" significa exactamente isso e não mais. Mochizuki não enviou os textos para nenhuma revista de matemática, a fim de ser revisto e, eventualmente, publicado. Pura e simplesmente, colocou-os na página dele da Internet.

Não é a primeira vez que algo deste género tem lugar. Em 2002 e 2003, o matemático russo Grigory Perelman divulgou um conjunto de textos que continham uma demonstração de um famoso problema em aberto, a Conjetura de Poincaré.[4] No entanto, não os enviou para nenhuma revista de matemática. Apesar disso, os textos foram analisados por outros matemáticos, a demonstração estava correta e, devido a isso, foi-lhe atribuída a Medalha Fields em 2006 (ou seja, no mesmo ano em que foi atribuída a Terence Tao), bem como um prémio de um milhão de dólares, atribuído pelo Instituto Clay de Matemática.

Há outro fator em comum entre os dois casos. Tanto Perelman como Mochizuki eram considerados matemáticos muitíssimo competentes pelos seus colegas antes de terem tido esta atitude. A carreira académica de Mochizuki é, de facto, impressionante por qualquer padrão.[5] Terminou o ensino secundário (nos Estados Unidos) aos 16 anos, licenciou -se aos 19 (pela Universidade de Princeton) e doutorou -se aos 23, tendo-se tornado professor catedrático aos 33 anos. A qualidade dos seus trabalhos também é notável. O mais conhecido (antes da tentativa de demonstrar a Conjetura ABC) é a sua demonstração, aos 27 anos, da validade de uma outra conjetura, da autoria de Alexander Grothendieck. Dois anos mais tarde, foi orador convidado no Congresso Internacional de Matemáticos de 1998.

Sendo assim, como deve ser claro, Mochizuki não é nenhum maluquinho com veleidades a ser visto como um matemático... isto apesar de o próprio Mochizuki se descrever a si próprio na sua página da Internet, não como matemático mas sim como "inter geómetra universal".

Mas a demonstração dele é impenetrável! Isto não quer dizer somente que é impenetrável a quem não seja um matemático profissional. Isso não teria nada de estranho. O que acontece é que mesmo os colegas dele não a conseguem ler. Um destes, o professor Johan de Jong, da Universidade de Columbia, afirmou: "Os outros artigos dele – são legíveis. Consigo compreendê-los e são fantásticos." Mas nem o professor de Jong consegue entrar no mundo que Mochizuki construiu para fazer a sua demonstração, nem, aparentemente, mais ninguém.

É preciso dizer que só o tamanho dos artigos assusta. Inicialmente, já tinham mais de 500 páginas no total. Atualmente (os textos foram revistos pelo autor) já ultrapassam as 600. E são 600 páginas cheias de conceitos novos e inexplorados.

Além disso, o comportamento de Mochizuki relativamente ao seu próprio trabalho é, no mínimo, pouco ortodoxo. Como é natural, dados o currículo dele e a importância da conjetura, Mochizuki já recebeu diversos convites de universidades de todo o mundo para expor as suas ideias, facilitando assim uma troca de ideias com os seus colegas. E ele recusou todos esses convites sempre que envolveram viagens para fora do Japão [1]. Essa atitude causa, naturalmente, algum ressentimento. Como disse Cathy O'Neil (matemática, esposa de de Jong e autora do blogue *mathbabe*[6]), "uma pessoa não se limita a dizer que demonstrou algo sem o ter explicado. Uma demonstração é uma construção social. Se a comunidade [matemática] não a compreende, é porque o trabalho não está bem feito." Esta é, talvez, a posição maioritária, mas Mochizuki também tem quem o defenda. O seu colega Minhyong Kim, da Universidade de Oxford, justificou o comportamento atrás descrito com o facto de Mochizuki ser simultaneamente uma pessoa um tanto tímida e, ao mesmo tempo, muito trabalhadora, que não está para perder tempo em hotéis e em viagens de avião.

A comunidade matemática terá de aguardar por novos desenvolvimentos até se sair deste impasse.

REFERÊNCIAS

D. Castelvecchi, "The biggest mystery in mathematics: Shinichi Mochizuki and the impenetrable proof", *Nature* 526, Nº 7572. *https://www.nature.com/news/the-biggest-mystery-in-mathematics-shinichi-mochizuki-and-the-impenetrable--proof-1.18509*

D. W. Masser, *Open problems*. In: W. W. L. Chen (ed.): Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory. London: Imperial College, 1985

J. Oesterlé, *Nouvelles approches du "théorème" de Fermat*, Astérisque 161–162, 1988

M. Silva e P. J. Freitas, "A Conjetura ABC", *Gazeta de Matemática* 174, (Nov. 2014), pp. 41–42

[1] Nota pessoal: o autor deste texto estava presente quando Joseph Oesterlé anunciou a sua Conjetura, num seminário Bourbaki.

[2] "A Conjetura ABC", *https://clube.spm.pt/news/1461/*

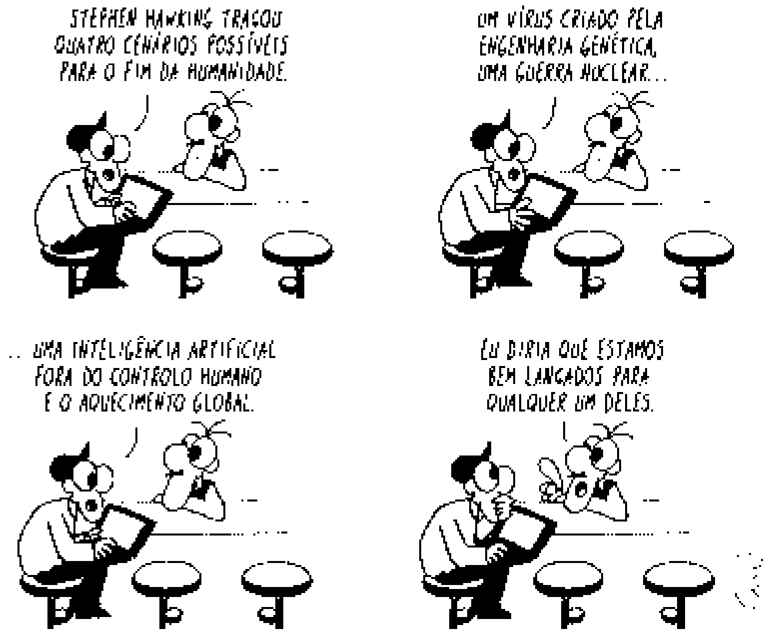
[3] "The probabilistic heuristic justification of the ABC conjecture", *https://terrytao.wordpress.com/2012/09/18/the-probabilistic-heuristic-justification--of-the-abc-conjecture/*

[4] Provada uma conjetura matemática com mais de cem anos, *http://e--escola.tecnico.ulisboa.pt/destaque/provada+uma+conjectura+matematica+com+mais+de+cem+anos*

[5] Estas e outras informações foram retiradas do texto "The Paradox of the Proof" *http://projectwordsworth.com/the-paradox-of-the-proof/*

[6] *https://mathbabe.org/*

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 15/03/2018. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto
Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Graciano de Oliveira** Professor aposentado da Universidade de Coimbra • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design
Rua da Nau Catrineta n 14 2º Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

(NÃO) SÃO NÚMEROS COMPLEXOS

Patrícia Damas Beites
Departamento de Matemática e CMA-UBI – Universidade da Beira Interior
pbeites@ubi.pt

No âmbito dos números complexos, reflete-se sobre duas modificações que se destacam na passagem do anterior para o atual Programa de Matemática A do Ensino Secundário. À luz do novo currículo e da investigação em Didática da Matemática, apresentam-se algumas propostas de tarefas com números complexos para a sala de aula.

Na passagem do anterior Programa de Matemática A do Ensino Secundário em [5] para o atual em [3], uma das continuidades é a presença dos Números Complexos. Anteriormente com a Trigonometria do 12.º ano chamado de tema, atualmente designado por domínio de conteúdo no mesmo ano de escolaridade, foi, aparentemente, o que menos alterações sofreu. Contudo, há duas modificações que se destacam.

A introdução dos Números Complexos com abordagem histórica manteve-se, mas passou a ser mais formal com o corpo dos números complexos. Segundo os autores, a construção algébrica dos números complexos visa "evitar algumas das reticências evidenciadas geralmente pelos alunos quanto à "verdadeira existência" dos números imaginários" [3, p. 22]. Em particular, trata-se de encontrar um número cujo quadrado é igual a -1.

A aplicação das fórmulas de De Moivre à primitivação de funções, com o estabelecimento de fórmulas trigonométricas e a linearização de polinómios trigonométricos, passou a constar como intenção no texto que precede os conteúdos, mas não surge explicitamente nos descritores. A mesma pressupõe que o domínio de conteúdo Primitivas e Cálculo Integral, excecionalmente facultativo em 2017/2018 e 2018/2019 como consta em [9], seja considerado.

1. ESTRUTURAS ALGÉBRICAS COM COMPLEXOS

O problema de saber os valores de n para os quais se têm identidades

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2, \tag{1}$$

$$\text{onde } z_i = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} x_j y_k \ \text{ com } a_{ijk} \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

foi proposto e resolvido $(n = 1, 2, 4, 8)$ pelo matemático Adolf Hurwitz.

Dois pontos de vista equivalentes podem ser tomados: o formal e o funcional, [8]. No formal, os x's e y's são indeterminadas e (1) é uma relação no anel[1] dos polinómios nessas indeterminadas sobre $\mathbb{C}$. No funcional consideram-se: $\mathbb{C}^n$, o espaço vetorial complexo, de dimensão n, dos n-uplos de números complexos

$$x = (x_1, \ldots, x_n);$$

a forma quadrática, de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, dada por

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

a aplicação bilinear, de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, definida por

$$(x, y) \mapsto z \text{ onde } z_i \text{ é dado por (2)}$$

em termos dos complexos fixos a_{ijk}. Denotando z por xy obtém-se uma álgebra não associativa. Note-se ainda que, denotando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ por $n(x)$, (1) da relação funcional (1)-(2) assume a forma $n(x)n(y) = n(xy)$ relacionada com a definição subsequente.

Sejam F um corpo com $\mathrm{car}(F) \neq 2$ e V uma álgebra sobre F, com multiplicação denotada por justaposição. A álgebra V é uma álgebra de composição se está munida de uma forma quadrática não degenerada (a norma) $n : V \to F$ que é multiplicativa, isto é, para quaisquer $x, y \in V$,

$$n(xy) = n(x)n(y). \tag{3}$$

Dizer que n é não degenerada significa que a forma bilinear simétrica associada

$$n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x+y) - n(x) - n(y))$$

é não degenerada. Se V é uma álgebra de composição com

[1] Para além da referência [8], cuja exposição está a ser seguida, os conceitos de Álgebra Linear e de Álgebra Abstrata envolvidos podem ser consultados em [4] e [11].

identidade, então V é chamada álgebra de Hurwitz. Neste sentido, o citado problema de Hurwitz foi assim generalizado: quais são as álgebras de Hurwitz?

Uma resolução do matemático Nathan Jacobson, conhecida como Teorema de Hurwitz generalizado, encontra-se em [7]. Nesta referência prova-se que, sobre um corpo de característica diferente de dois, qualquer álgebra de Hurwitz é isomorfa a uma das seguintes álgebras: o corpo base, de dimensão 1; uma extensão quadrática separável do corpo base, de dimensão 2; uma álgebra de quaterniões generalizada, de dimensão 4; uma álgebra de octoniões generalizada, de dimensão 8. Em dimensão 2 trata-se de uma generalização da clássica álgebra real $\mathbb{C}$ dos números complexos cuja multiplicação parece pouco natural, mas a razão reside nas estruturas algébricas que se podem conferir a $\mathbb{R}^2$.

A adição usual e a multiplicação natural em $\mathbb{R}^2$ são, para quaisquer (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, respetivamente dadas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2).$$

Apesar da simplicidade, $\times$ perde interesse, pois, por exemplo, $(0, 1) \times (1, 0) = (0, 0)$. Esta constatação invalida propriedades desejáveis, como a lei do anulamento do produto, que podem ser recuperadas com a multiplicação menos natural mas adequada: para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Como + e . são operações associativas e comutativas de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, (0,0) e (1,0) são respetivamente os elementos neutros de + e ., cada elemento de $\mathbb{R}^2$ tem oposto aditivo (simétrico), cada elemento de $\mathbb{R}^2$ diferente de (0,0) tem oposto multiplicativo (inverso) e . é distributiva em relação a +, então $(\mathbb{R}^2, +, .)$ é um corpo – o dos números complexos, $\mathbb{C}$. Para quaisquer $a, c \in \mathbb{R}$,

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \text{ e } (a, 0).(c, 0) = (ac, 0),$$

pelo que pode identificar-se $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{C}$, associando a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Assim, o complexo $(x, 0)$ pode ser representado por x. Denotando o complexo (0,1) por i, tem-se $i^2 = -1$, pois

$$(0, 1)^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0).$$

Como um número complexo z é um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1),$$

omitindo ., z pode ser representado por $a + bi$.

Esta construção algébrica dos números complexos, do matemático William Hamilton, constitui a forma construtiva de os definir no atual Programa de Matemática do Ensino Secundário em [3]. Os complexos surgiam de forma descritiva no anterior, em [5], pois não se pretendia construir os números complexos nem estabelecer, por demonstração, as suas propriedades, mas antes postulá-los numa descrição por axiomas. Em particular, incluem-se nestes: a existência de um número i tal que $i^2 = -1$; para cada elemento $z \in \mathbb{C}$, a sua forma $x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Neste sentido, os manuais com as orientações em [5] apresentam a definição de número complexo através destes axiomas, eventualmente com a condição relativa à unidade imaginária substituída por $i = \sqrt{-1}$. Esta última notação levanta questões de ambiguidade e polissemia, como sucede na discussão sobre os reais em [6], por $\sqrt{-1}$ denotar a raiz principal i de -1 e, em simultâneo, as raízes quadradas (i e -i) de -1.

2. CONCEITOS IMAGEM NOS COMPLEXOS

Na aprendizagem da Matemática, não sendo os números complexos uma exceção, continuam a existir dificuldades, muitas fruto de conceções erróneas. Uma possível justificação prende-se com duas designações em [12]: conceito definição e conceito imagem. Para uma certa noção matemática, o primeiro termo refere-se a uma forma com palavras que o especifica, enquanto o segundo termo descreve a estrutura cognitiva total (imagens mentais, propriedades relacionadas, processos) que lhe está associada. Quando se considera uma definição para uma noção matemática, embora as palavras possam ser substituídas por outras com o mesmo significado, o conceito definição é fixo. O mesmo não sucede com os conceitos imagem de um indivíduo para outro, pois podem ser diferentes e, como se menciona em [12], sofrem modificações por serem construídos ao longo dos anos através de diversas experiências.

Na citada referência são reportadas várias investigações em Didática da Matemática, no âmbito do tópico limites e continuidade, que indicam conceitos imagem individuais que diferem da teoria formal de onde vem um certo conceito definição e que contêm fatores causadores de conflito cognitivo. A discussão é precedida por uma interessante menção em que se recorda que um número complexo $x + yi$ pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y. Em particular, tem-se $x + 0i$

ou $(x, 0)$, estes podendo ainda ser identificados com o número real x. Cada uma das expressões é utilizada quando conveniente, mas as mesmas constituem um potencial fator de conflito cognitivo quando evocadas em simultâneo, pois, em termos de conjuntos, distingue-se o elemento x do par ordenado $(x, 0)$. Neste sentido, num estudo referido pelos autores de [12], $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} + 0i$ foram vistos, respetivamente, como real e complexo por muitos dos estudantes.

Uma variedade apreciável de conceitos imagem associados ao conceito definição de número complexo foi apresentada num estudo em [10]. Concretamente, emergiram quatro categorias de conceito imagem: um artifício matemático; números 2-dimensionais; uma extensão simbólica da Matemática; um mistério incompreensível. Uma tarefa integrante dos instrumentos de recolha de dados, designada teste de identificação, consistia em decidir se cada um dos números numa lista era ou não complexo. As conclusões indicam uma tendência dos estudantes: relacionam os complexos com números 2-dimensionais, com uma parte real e uma parte imaginária, ou que, pelo menos, têm a unidade imaginária i visível. Assim, a grande maioria dos participantes no estudo considerou que, por exemplo, $\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$ e i são números complexos, mas que $-2,5$ e $\cos \pi + \operatorname{sen} \pi$ não são números complexos.

3. PROPOSTAS DE TAREFAS COM COMPLEXOS

A primeira proposta de tarefa resulta da adaptação do teste de identificação em [10] para a Matemática – 12.º Ano, unidade curricular do Curso Ano Zero da Universidade da Beira Interior. Com o atual Programa de Matemática A do Ensino Secundário, que não estava a ser implementado no 12.º ano do ano letivo 2016/2017, $\operatorname{cis}(\pi)$ poderia ser substituído por $e^{i\pi}$.

O formato da tarefa torna-a particularmente útil numa abordagem com Aprendizagem pelos Pares, método de ensino-aprendizagem caracterizado pelos típicos eventos de votação. Estes são despoletados por questões conceptuais e implicam a indispensável discussão dos alunos com os seus pares. Mais detalhes podem ser consultados em [2] e referências aí citadas.

A segunda e a terceira propostas de tarefas têm a linearização de polinómios trigonométricos como fio condutor. Na segunda, preparatória para a terceira, pretende-se que os alunos experienciem atividades habituais para um matemático: enunciação de conjeturas através de um raciocínio indutivo cujo ponto de partida são casos particulares; teste de conjeturas mediante exemplos e contraexemplos; decisão sobre a validade de conjeturas. Na terceira, através ainda das fórmulas de De Moivre, pretende-se que os alunos linearizem um polinómio trigonométrico para o primitivarem.

1.ª Proposta de tarefa, com conceitos imagem nos números complexos.

Quais das expressões

$$i; \quad -2,5; \quad \operatorname{cis}(\pi); \quad \cos \pi + \operatorname{sen} \pi$$

representam números complexos?

(A) só i e $\operatorname{cis}(\pi)$
(B) só $-2,5$ e $\cos \pi + \operatorname{sen} \pi$
(C) todas
(D) nenhuma

2.ª Proposta de tarefa, com decisão sobre a validade de conjeturas.

1. Para alguns valores de θ à sua escolha, determine $\cos \theta$, $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.

2. Enuncie uma conjetura que relacione $\cos \theta$, $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.

3. Decida sobre a validade da sua conjetura. Caso seja falsa, construa um contraexemplo. Caso seja verdadeira, apresente uma demonstração.

3.ª Proposta de tarefa, com primitivação de polinómio trigonométrico.

Utilize a forma como exprimiu o cosseno em função da exponencial complexa para:

1. mostrar que $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$;

2. determinar $\int \cos^4 x \, dx$.

REFERÊNCIAS

[1] Beites, P. D. *Números complexos e seus parentes algébricos*. Notas da formação CCFC/ACC-79778/14, Universidade da Beira Interior. 2015

[2] Beites, P. D., & Romano, A. "Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!". *Educação e Matemática*, (129), 13-16. 2014

[3] Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário.* Lisboa: MEC. 2014

[4] Cabral, I., Perdigão, C., & Saiago, C. *Álgebra Linear*. Lisboa: Escolar. 2009

[5] Carvalho e Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., da Fonseca, C., & Lopes, I. *Programa de Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: ME, DES. 2001/2002.

[6] Gómez, B. "Ambiguëdad y polisemia del signo radical: un problema matemático y didáctico". *La Gaceta de la RSME*, 17, 139-153. 2014

[7] Jacobson, N. "Composition algebras and their automorphisms". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 7, 55-80. 1958

[8] Jacobson, N. *Basic Algebra I*. New York: Dover. 1985.

[9] Ministério da Educação *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Lisboa: ME, D-GE. 2016

[10] Nordlander, M. C., & Nordlander, E. "On the concept image of complex numbers". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43, 627-641. 2012.

[11] Sobral, M. *Álgebra*. Lisboa: Universidade Aberta. 1996.

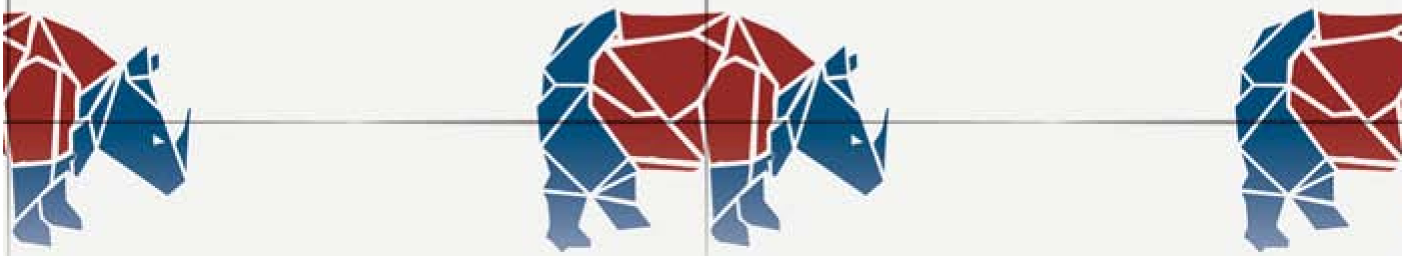
[12] Tall, D., & Vinner, S. "Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity". *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. 1981.

Agradecimentos

Patrícia Damas Beites agradece o apoio do Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior (CMA–UBI), projeto UID/MAT/00212/2013 da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT).

SOBRE A AUTORA

Patrícia Damas Beites é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses de investigação prendem-se com tópicos de Álgebra, em particular Não Associativa, e de Didática da Matemática.



11*th* European Conference *on* Mathematical *and* Theoretical Biology

ECMTB 2018
LISBON

www.ecmtb2018.org

Lisbon **July 23-27**

Celebrating the ***Year*** of ***Mathematical Biology!***

Plenary Speakers:

Helen Byrne
University of Oxford, UK

Samuel Kou
Harvard University, USA

Andrea Pugliese
University of Trento, Italy

Antonio DeSimone
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Italy

Mirjam Kretzschmar
UMC Utrecht, The Netherlands

Eörs Szathmáry
Eötvös Loránd University, Hungary

Eva Kisdi
University of Helsinki, Finland

Eva Löcherbach
Université de Cergy-Pontoise, France

Kees Weijer
University of Dundee, UK

Supported by

Funding FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia) Projects: UID/MAT/04561/2013 (CMAFCIO); UID/MAT/04674/2013 (CIMA); UID/MAT/00297/2013 (CMA); UID/MAT/00006/2013 (CEAUL).

Paula Amaral
Univ. Nova
de Lisboa
pt-maths-in@spm.pt

UM EXEMPLO DA MATEMÁTICA NA IA

A Inteligência Artificial vai modelar o futuro das sociedades, sendo que um dos seus aspetos mais salientes está relacionado com a Aprendizagem Automática (*Machine Learning*). Qual é o papel da matemática nesta área do conhecimento?

1. A IA E A 4.ª REVOLUÇÃO INDUSTRIAL

A Inteligência Artificial está na agenda social, política e científica e há boas razões para isso, com mais ou menos exageros. Foi notícia recentemente em Portugal a utilização de uma foca *robot* terapêutica, o "Paro". A terapia baseada em animais de companhia para problemas do foro mental e afetivo não é nova [1], tendo sido formalmente instituída em 1953 com os trabalhos do psiquiatra Boris Levinson, existindo no entanto registos anteriores, já de 1792, constatando os benefícios desta prática. No entanto, o que é novo é a substituição de um animal por uma máquina, que, de acordo com o seu inventor, Takanori Shibata, tem a vantagem de que, em ambiente hospitalar ou de cuidados a idosos, não implica o risco de alergias ou infeções. A discussão sobre os aspetos sociológicos da substituição de animais por *robots* levar-nos-ia muito longe mas não é um tópico a discutir neste artigo, sendo que o desemprego iminente dos animais domésticos está longe de ser um dos aspetos mais salientes da disrupção criada pela Inteligência Artificial (IA) nas nossas sociedades.

Foi realizado em 2015 pelo Fórum Económico Mundial [2] um estudo com o objetivo de identificar as tecnologias mais socialmente disruptivas, ou seja, implicando profundas alterações no nosso modo de vida, e a previsibilidade de até 2025 se poder considerar que o ponto de viragem (pv) já tivesse ocorrido. O ponto de viragem corresponde a uma implantação considerada significativa no domínio público. As mudanças fundamentais verificar-se-iam: na pegada digital [ponto de viragem (pv) quando se aplicar a 80% dos cidadãos]; na visão como uma nova interface (pv com 10% de óculos de leitura ligados à Internet); na Internet vestível (pv com 10% das pessoas com roupa conectada à Internet); na computação ubíqua (pv quando 90% da população tiver acesso regular à Internet); nos supercomputadores de bolso (pv quando 90% da população for possuidora de um *smartphone*); no armazenamento de dados (pv com 90% da população com acesso a armazenamento ilimitado gratuito); na Internet das e para as coisas (pv quando um bilião de sensores estiverem conectados à Internet); nas casas conectadas (pv quando mais de 50% do tráfego de Internet nas habitações for dedicado a equipamento e dispositivos); nas cidades inteligentes (pv aquando da primeira cidade com mais de 50.000 habitantes sem semáforos); no Big Data para decisões (pv para o primeiro Governo a substituir os censos por fontes de Big Data); nos automóveis sem condutor (pv quando houver 10% de automóvies sem condutor em circulação); com a IA na tomada de decisões (pv quando a primeira máquina de IA participar num conselho de administração) e nos empregos administrativos (pv para 30% de auditorias realizadas por IA); na robótica e snos erviços (pv com o primeiro *robot* farmacêutico); Bitcoin e Blockchain (pv com 10% do PIB mundial armazenado pela tecnologia Blockchain); na economia partilhada (pv quando houver mais viagens partilhadas do que em automóveis privados); para Governos e Blockchain (pv com impostos cobrados por Blockchain); na impressão 3D no fabrico (pv com primeiro automóvel impresso), na saúde (pv com aplicação ao transplante de órgãos) e nos bens de consumo (pv para 5% dos produtos comuns produzidos por impressão 3D); nas tecnologias implantáveis (pv para o primeiro telemóvel implantado); nos seres projetados (pv aquando do nascimento do primeiro humano com um genoma editado direta e deliberadamente) e finalmente na neurotecnologia (pv para o primeiro humano com memória artificial implantada no cérebro).

Esta já iniciada "Quarta Revolução Industrial" começa a dar mostras de um desenvolvimento muito acelerado em determinadas áreas, com um efeito de "bola de neve", sendo previsível que o ponto de viragem de alguns dos fatores de mudança acima descritos venha a ocorrer até 2025. Veja-se, por exemplo, o caso da Oxbotica e dos carros auto dirigidos entre Oxford e Londres. Por estes fatores a IA e a Industria 4.0 ganham foros de tema global, começando a pecar por ser tardia, de acordo com alguns peritos, a reação dos Governos, das empresas e das instituições [3][4].

Um dos pilares ou, dependendo das definições que se considerar, uma das principais aplicações da IA é a Aprendizagem Automática (*Machine Learning*), definida em 1959 por Arthur Samuel como sendo "uma área de estudo que capacita os computadores de aprendizagem sem uma programação explícita para tal". Introduzindo a ideia de uma aprendizagem contínua mesmo sem intervenção humana, Tom Mitchell [5] propõe o conceito de Aprendizagem Automática como a construção de programas com a capacidade de se melhorarem automaticamente com a experiência. Numa definição mais formal, um programa informático diz-se capaz de aprender com a experiência "E" relativamente a uma classe de tarefas "T" e medida de aprendizagem "P" se, relativamente às tarefas "T", a medida de desempenho "P" é incrementada pela experiência "E". Por exemplo, se "T" representar "jogar xadrez", "E" representa um conjunto de jogos efetuados, e "P" a probabilidade de ganhar o próximo jogo.

2. PROBLEMAS DE CLASSIFICAÇÃO

A Aprendizagem Automática pode seguir dois paradigmas distintos, com ou sem supervisão (*supervised/unsupervised learning*). Considere-se como um caso desta aprendizagem a classificação automática, ou seja, um programa que, dado um *input* consegue atribuir-lhe automaticamente uma etiqueta. Por exemplo, dados os registos médicos de um paciente, conseguir fazer um diagnóstico correto para uma determinada doença ou, então, verificar se ele é propenso (acima de 60% de probabilidade) à mesma.

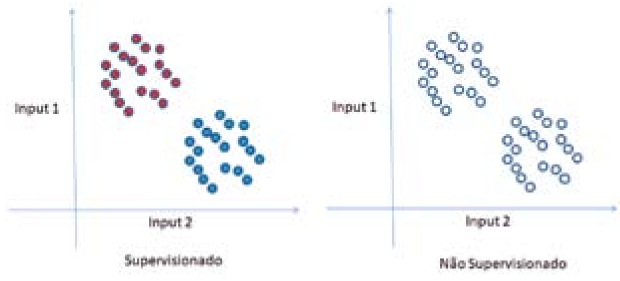


Figura 1. Aprendizagem supervisionada *versus* não supervisionada

No caso, da aprendizagem supervisionada, o classificador automático é treinado recorrendo a um historial de dados de diversos indivíduos, sendo para estes conhecido o registo médico e sabendo-se à partida a ocorrência ou não da doença. Na figura 1, ser, ou não ser, portador da doença está assinalado com a diferença de cor dos pontos do gráfico. No caso não supervisionado, essa informação não está disponível e o que se pretende é ser capaz de identificar dois grupos distintos de indivíduos. O primeiro caso pode ser abordado por um método de classificação SVM (*Support Vector Machine*), no segundo caso, por exemplo, por Agregação (*Clustering*). Ambos os métodos implicam a resolução de um problema de otimização (num caso contínuo, no outro discreto). Analisemos o primeiro caso.

2.1 SVM como um problema de otimização

No caso dos SVM [6], utilizando o caso mais simples de duas classes (azuis e vermelhas na figura 1) linearmente separáveis, o que se pretende é determinar um hiperplano (neste caso, uma reta) de separação das duas classes.

Na figura 2 as retas a azul permitem, todas elas, separar os dois conjuntos, no entanto, o que se pretende é identi-

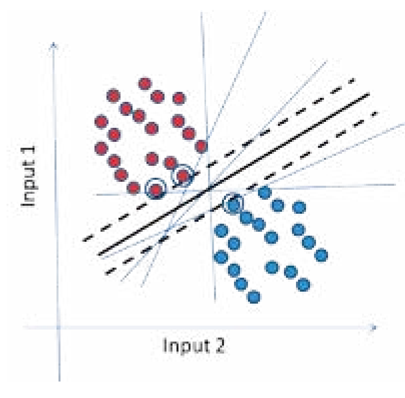


Figura 2. Classificação com SVM.

ficar a reta de separação cuja distância a qualquer um dos pontos das diferentes classe é máxima. Essa reta corresponde à indicada na figura 2 a cheio e é paralela e equidistante a outras duas, assinaladas a tracejado. Os pontos de cada classe (dois vermelhos e um azul assinalados com uma circunferência em torno) que pertencem a essas retas e que definem a distância máxima de separação, são os vetores de suporte.

O hiperplano $w^T x + w_0 = c$, considerando duas classes C_1, C_2 de pontos em $\mathbb{R}^m$, é determinado começando por considerar um conjunto de N pontos de treino (x_i, y_i) com $i = 1, \ldots, N$ e $y_i = 1$ para os pontos pertencentes a uma classe e $y_i = -1$ para a segunda classe. Assume-se a existência de hiperplanos capazes de separar os pontos das duas classes, ou seja, que

$$\hat{w}^T x_i + \hat{w}_0 > 0 \text{ para } y_i = 1 \tag{2.1}$$

$$\hat{w}^T x_i + \hat{w}_0 < 0 \text{ para } y_i = -1. \tag{2.2}$$

Considerando que as duas classes são linearmente separáveis, nenhum ponto se encontra no hiperplano de separação. Logo, (2.1-2.2) corresponde a

$$\hat{w}^T x_i + \hat{w}_0 \geq \alpha \text{ para } y_i = 1 \tag{2.3}$$

$$\hat{w}^T x_i + \hat{w}_0 \leq -\alpha \text{ para } y_i = -1. \tag{2.4}$$

com algum valor de $\alpha > 0$. Dividindo ambos os membros (2.3-2.4) por α, obtém-se

$$w^T x_i + w_0 \geq 1 \text{ para } y_i = 1 \tag{2.5}$$

$$w^T x_i + w_0 \leq -1 \text{ para } y_i = -1 \tag{2.6}$$

ou seja,

$$y_i(w^T x_i + w_0) > 1 \text{ para } i = 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Para todo o c tal que $-1 < c < 1$, $D(x) = w^T x + w_0 = c$ é um hiperplano de separação sendo que para $c = 0$ o mesmo se encontra no meio dos que correspondem a $c = 1$ e $c = -1$. A distância entre o hiperplano de separação e os pontos de treino mais próximos é denominada *margem*. O hiperplano optimal é o que corresponde ao maior valor de *margem*. A distância euclidiana entre um ponto x_i e o hiperplano $D(x) = 0$ é dada por

$$\| - \frac{D(x_i)}{\| |w| \|} \|,$$

logo para todo o $i = 1, \ldots, N$ deve verificar-se

$$\frac{y_i D(x_i)}{\|w\|} \geq \delta,$$

onde δ é a *margem*. Uma vez que a norma de w pode tomar qualquer valor, para regularização introduz-se a restrição $\delta \|w\| = \beta$. Assim sendo, $\delta = \beta \|w\|^{-1}$. Logo, determinar a *margem* máxima corresponde a determinar o máximo valor de δ, através da resolução do problema de otimização,

$$\min Q(w) = \frac{1}{2} \|w\|^2 \tag{2.8}$$

$$y_i(w^T x_i + w_0) \geq 1 \text{ para } i = 1, \ldots, N \tag{2.9}$$

$$w \in \mathbb{R}^m. \tag{2.10}$$

Esta formulação pode ser facilmente estendida ao caso em que os dados não são rigorosamente linearmente separáveis, quer porque existe alguma sobreposição entre as classes ou quer porque a separação não é linear como é apresentado nos dois primeiros gráficos da figura 3. Neste caso é introduzida uma "folga" (*soft margins*) na definição da margem pela introdução de um vetor ϵ e um *Kernel* ϕ nos vetores de entrada, aumentando a dimensão dos dados e promovendo uma separação linear, como ilustrado no último gráfico da figura 3.

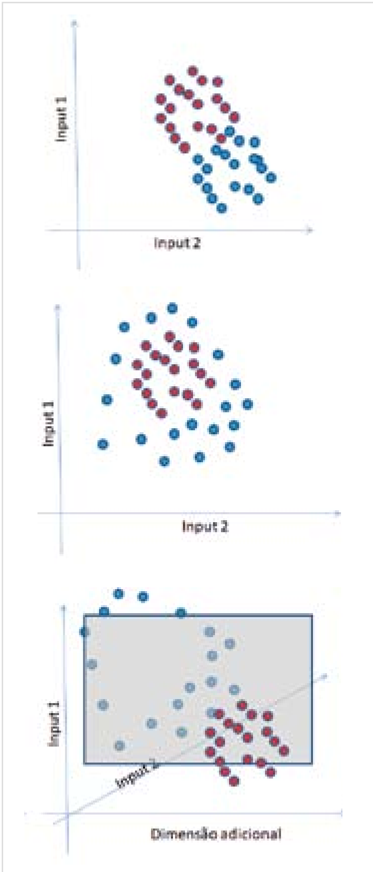


Figura 3. Pontos não linearmente separáveis.

O classificador é, neste caso, determinado pela resolução do seguinte problema:

$$\min Q(w) = \frac{1}{2}|||w|||^2 + K\|\epsilon\|_1 \quad (2.11)$$

$$y_i(w^T\phi(x_i) + w_0) \geq 1 - \epsilon_i$$

$$\text{com } \epsilon_i \geq 0,\ i = 1, ..., N \quad (2.12)$$

$$w \in \mathbb{R}^m. \quad (2.13)$$

Uma vez determinado o hiperplano, a classificação para cada novo ponto x torna-se simples, bastando para tal verificar a qual dos semi espaços definidos pelo hiperplano de separação o ponto pertence. Voltando ao exemplo médico já referido, dado um conjunto de treino relativo a N doentes, para os quais se conhecem m características (peso, tensão arterial, resultados de análises de sangue, etc.) e se sabe se tinham, ou não, a doença em estudo, constrói-se o classificador. Na presença dos dados de um novo doente, para o qual se pretende diagnosticar a existência dessa doença, o classificador automaticamente produz a resposta. Claro que associada a cada classificador existe a possibilidade de erro. Essa capacidade de acertar a resposta, fazendo a classificação correta, é referida como o poder de generalização do classificador.

NOTA FINAL

O icebergue da matemática é usado muitas vezes para descrever os algoritmos matemáticos que existem por detrás das aplicações, dos métodos e das técnicas para resolver problemas reais complexos. Muito se tem procurado fazer para tornar a matemática mais visível e, para que lhe sejam atribuídos os méritos, sobretudo em áreas científicas de grande destaque e atualidade como é a Inteligência Artificial. Num pequeno e modesto contributo, apresentámos aqui um pequeno exemplo de como o *Machine Learning* e a Matemática são por vezes "quase" a mesma coisa.

REFERÊNCIAS

[1] Cusack, Odean. *Pets and mental health*. RoutledgeU, 2014.

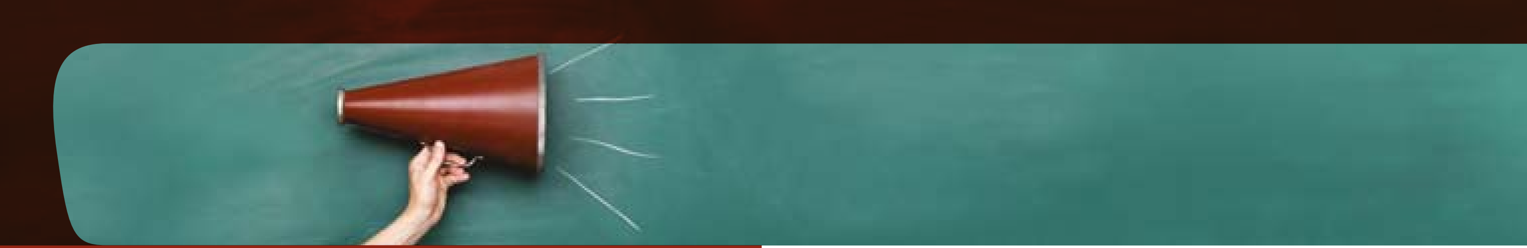
[2] *Deep Shift: Technology Tipping Points and Societal Impact*, GAC15, WEF, 9 de setembro de 2015.

[3] Schwab, Klaus. *A Quarta Revolução Industrial*. WEF, Levoir, 2016.

[4] Helbing, Dirk. *The Automation of Society is Next*. 2015.

[5] Mitchell, Tom M. *Machine Learning*. WCB, 1997.

[6] Abe, Shigeo. *Support Vector Machines for Pattern Classification*. Springer, 2005.



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

JOSÉ MOURÃO

José Mourão é professor catedrático do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico (IST). Em 1980, com 17 anos, foi para Moscovo estudar Física. Em 1986, licenciou-se em Física pela Universidade de Moscovo e, em 1988, obteve, também pela Universidade de Moscovo, o doutoramento em Física. Após uma passagem breve pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, entrou para o Departamento de Física do IST, de onde transitou para o Departamento de Matemática. Sendo herdeiro da grande tradição da escola russa, assistiu ao final do Império Soviético desde dentro. Deixo-vos com o resumo da longa conversa que tivemos.

GONÇALO Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a sua disponibilidade para conceder esta entrevista.

JOSÉ MOURÃO Eu é que agradeço o convite...

GONÇALO Começando pelo princípio, gostaria de saber em que momento despertou o seu interesse em estudar Matemática e Física, visto que se encontra num meio-termo entre as duas áreas...

JOSÉ MOURÃO Eu estava no liceu e pensava estudar Matemática. Mudei de opinião quando assisti, aqui no Técnico, a uma palestra de Física pelo professor Dias de Deus. Para além disso, tinha um excelente professor de Física no liceu, extremamente motivador, e apesar das dificuldades em lidar com a parte experimental, decidi ir estudar Física.

GONÇALO Estamos a falar de que ano?

JOSÉ MOURÃO Eu fui para a União Soviética estudar Física em 1980.

GONÇALO Ou seja, terminou o liceu no pós-PREC...

JOSÉ MOURÃO Exatamente. Eu apanhei o primeiro ano do ensino unificado...

GONÇALO Estamos a falar de uma altura altamente conturbada para se estudar no liceu. Ainda por cima, no D. Dinis...

JOSÉ MOURÃO Era de facto, embora no ano em que cheguei ao D. Dinis as coisas tivessem acalmado um bocadinho. Na altura em que as minhas irmãs frequentaram essa escola, três anos antes, então sim. As alturas conturbadas que vivi foram nas escolas que eu frequentei antes. Foi engraçado...

GONÇALO Como é que surgiram a ideia e a oportunidade de ir para a União Soviética?

JOSÉ MOURÃO Nós temos um primo que saiu de Portugal antes de ter idade para ser chamado para o serviço militar. Ele foi em primeiro lugar para França e de seguida para a União Soviética estudar Física. Depois do 25 de Abril, a União Soviética começou a dar 50 bolsas de estudo por ano para estudantes portugueses. A minha irmã foi em 1977 estudar Física, mais concretamente Astrofísica, e eu fui em 1980.

GONÇALO Tinha então 18 anos...

JOSÉ MOURÃO 17...

GONÇALO E como foi sair com essa idade de um país como Portugal e chegar à União Soviética?

JOSÉ MOURÃO Nós tínhamos um ano para aprender a língua. Vivia num quarto com cinco portugueses e tínhamos 30 horas semanais para aprendermos russo.

GONÇALO Quando saiu de Portugal, já sabia que ia para a Universidade de Moscovo estudar Física?

JOSÉ MOURÃO Não, não sabia. Após esse primeiro ano é que as pessoas eram distribuídas pelas universidades em função das classificações obtidas.

GONÇALO Mas já sabia que ia estudar Física...

JOSÉ MOURÃO Sim, já sabia que ia estudar Física, só não sabia em que universidade é que ia fazê-lo.

GONÇALO Por outro lado, esteve na União Soviética numa altura interessantíssima...

JOSÉ MOURÃO Sim, tivemos os Presidentes todos!

GONÇALO Ainda apanhou o Brezhnev...

JOSÉ MOURÃO Quando cheguei, o Brezhnev ainda era o Presidente. Depois tivemos o Andropov e já havia movimentações para que lhe sucedesse o Gorbachev. Eram personalidades muito distintas. O Andropov tinha vindo do KGB e era pelo aumento da disciplina. Acabou, no entanto, por promover o Gorbachev que era completamente diferente, se bem que na altura o partido não soubesse disso. Contudo, quem acabou por suceder ao Andropov foi o Chernenko, que esteve lá pouco mais de um ano. Quando o Chernenko assumiu a presidência já estava a morrer. Por isso, este foi apenas um passo para adiar a decisão.

GONÇALO E sentia um clima de repressão e falta de liberdade?

JOSÉ MOURÃO O que se sentia era algo semelhante ao que se vivia em Portugal no Estado Novo. Na União Soviética houve períodos de grande repressão, no tempo do Stalin sobretudo, mas também nos tempos do Lenin. Depois entrou-se gradualmente num período de repressão não muito acentuada, em que o regime tinha encontrado uma forma de se manter sem precisar de grandes repressões. Havia, por exemplo, formas de escolher as elites e a seleção fazia-se de um modo aparentemente natural. Por exemplo, escolhiam-se os melhores alunos para irem para doutoramento e essa escolha era feita através das classificações por eles obtidas. No meio das disciplinas todas, havia uma cadeira semestral, de índole política, em que basicamente os alunos que estavam contra o regime não conseguiam ter boa nota.

GONÇALO Era uma repressão burocrática...

JOSÉ MOURÃO Era muito eficiente. Os alunos tinham de ter todas as notas iguais a 5, numa escala de 1 a 5, para poderem prosseguir para doutoramento. Quem nessa disciplina não tinha a nota máxima não era escolhido para seguir para doutoramento, e viam-se afastados e destinados para funções em que, para o Estado, era indiferente se eles eram contra ou a favor. O regime preferia ter um pacto de não-agressão com os professores universitários e com a academia e não se interessava muito com o que se passava no resto da sociedade. Não era, por isso, necessário ter permanentemente o KGB em ações visíveis. No nosso caso, dos estudantes estrangeiros, não sentíamos qualquer tipo de controle. Falava-se que a nossa correspondência era controlada. De resto, não sentíamos qualquer tipo de repressão.

GONÇALO E o clima científico?

JOSÉ MOURÃO O clima científico era muito bom. As condições para os alunos eram excelentes. Tínhamos todas as condições necessárias para estudar. Houve na União Soviética, em diferentes períodos, repressão sobre determinadas áreas da ciência, como foi o caso da Biologia...

GONÇALO Da Genética...

JOSÉ MOURÃO Exatamente. O mesmo aconteceu em determinados períodos com a Física. Um dos maiores físicos soviéticos, o Landau, esteve preso durante um ano. Em Matemática sentia-se muito menos, pela própria natureza da ciência, e a pressão do sistema, que se manifestava de diferentes formas, fez com que os matemáticos se tivessem unido em Moscovo, numa escola única, criando, juntamente com o Bourbaki em França, a escola de Matemática mais influente do século XX. Em Moscovo, em volta dos matemáticos mais importantes, como são os casos do Kolmogorov e, sobretudo, do Gelfand, foram criados seminários muito importantes. A pressão do sistema refletia-se, por exemplo, na admissão dos alunos. Havia períodos em que os judeus não eram aceites nas universidades...

GONÇALO Esse é um ponto interessante. Quando se lê a História russa antes da revolução de 1917, damos conta de um profundo antissemitismo...

JOSÉ MOURÃO Julgo que, no caso do século XX, as razões poderão estar relacionadas com o facto de haver poucos judeus na Rússia e metade dos lugares da Academia de Ciências Russa serem ocupados por eles. Isto estará necessariamente relacionado com a tradição de envolvimento das crianças desde muito cedo com a ciência, com a tecnologia e com o conhecimento em geral. Julgo que o antissemitismo era a reação contra isto. Havia momentos em que a União Soviética abria as portas para que os judeus emigrassem para Israel e, de seguida, perseguia os que tinham ficado.

GONÇALO Parece um sistema um bocado esquizofrénico...

JOSÉ MOURÃO Era, de facto.

GONÇALO A escola de Matemática de Moscovo é algo sem paralelo...

JOSÉ MOURÃO Era sem paralelo também porque as condições nas quais foi criada não tinham paralelo. E ainda bem que não há paralelo, por causa da situação política onde foi formada, mas a verdade é que se formou...

GONÇALO Quando pensamos no período mais agudo da perseguição, no tempo do Stalin, e vemos por exemplo a perseguição ao Luzin...

JOSÉ MOURÃO O Luzin, que foi precisamente o fundador da escola, que curiosamente não se dava muito bem com os seus alunos, com o Kolmogorov e o Gelfand, mas pelo facto de eles terem de sobreviver naquele sistema, acabaram por se manterem juntos. Na Matemática, ao contrário do que acontecia na Física, a diferença entre a escola russa e a escola judaica não era tão marcante. Na Física, os institutos em Moscovo estavam divididos entre institutos judeus e russos. O mesmo acontecia com os jornais científicos. Era muito difícil ser-se judeu e ver o seu trabalho publicado num jornal russo e vice-versa. Não seria impossível, mas era muito difícil.

GONÇALO Isso é ainda mais paradoxal quando na União Soviética supostamente não havia religião...

JOSÉ MOURÃO Sim, é um facto. Mas a religião foi substituída por uma superstição incrível. Os russos eram supersticiosos até ao limite. Agora voltaram à religião antiga e perderam um pouco isso.

GONÇALO Ou manifestam isso de uma forma mais normal ou, se calhar, mais frequente...

JOSÉ MOURÃO Sim, mais frequente. Mas há muitas outras contradições. Por exemplo, a sociedade russa era extremamente machista e esse machismo tinha de conviver com a igualdade propagada entre mulher e homem.

GONÇALO Uma das características da escola de Matemática russa era a ligação próxima com a Física... Estou a pensar, por exemplo, no Arnold...

JOSÉ MOURÃO O Arnold é especial. Sendo um matemático fantástico, não sei se ele representa uma ligação especial que tivesse existido entre as duas áreas. Julgo que a ligação mais forte ocorreu através do Gelfand e da sua escola. Esta ligação era como que uma aprendizagem forçada. Um físico-matemático muito conhecido russo contou-me uma história interessante. O seminário de

Gelfand era uma coisa que durava cinco ou seis horas. O orador dizia umas frases, era interrompido, mandavam-no sentar-se, vinha outra pessoa, e por aí fora. O que me foi contado pelo Morozov foi o seguinte: o Gelfand lia um artigo de Física que achava interessante mas que não percebia e chamava o físico para dar um seminário. O físico dizia uma frase e o Gelfand mandava-o sentar-se e dizia: – *Alyosha* vai ao quadro explicar o que ele está a dizer. O *Alyosha* podia ser um membro da Academia das Ciências.

GONÇALO Sendo *Alyosha*...

JOSÉ MOURÃO *Alyosha* é um nome fictício, sendo o diminutivo de Alexei...

GONÇALO Um nome frequente...

JOSÉ MOURÃO Exato. Estamos a falar de alguém que podia ser o Kirillov. Passados uns segundos, o Gelfand mandava-o sentar-se e pedia ao *Sasha* para ir ao quadro, o Alexander, um aluno de pós-doutoramento, portanto alguém que não tinha nada a ver com o estatuto de um membro da Academia das Ciências. O *Sasha* falava e o Gelfand também não ficava contente. Vinha então um aluno do segundo ano da licenciatura e o Gelfand dizia: – *Uhm*! Isso já faz mais sentido. Se calhar, é mesmo isso que ele está a querer dizer-nos. Sentava-se e o físico lá conseguia dizer mais uma frase antes de ser novamente interrompido. Foi com isto que muitos matemáticos russos, se calhar o exemplo mais paradigmático é o caso do Medalha Fields Maxim Kontsevich, aprenderam uma série de segredos, uma série de armas, que funcionam em matemática sem se perceber muito bem porquê, e que dão resultados fantásticos. Ele (Kontsevich) aprendeu a manipular o integral de caminho como os físicos, o que lhe possibilitou resolver uma série de problemas sem que se perceba porquê do ponto de vista matemático. Os dois exemplos mais espetaculares, e que estão por detrás da atribuição da Medalha Fields, é a Teoria da Interseção para Espaços de Moduli e de Curvas e, ainda mais espetacular, a chamada fórmula de Kontsevich para o produto estrela em variedades de Poisson. Para este problema, os matemáticos que trabalhavam na área tinham a ideia de que não existia uma solução comum para todas as variedades de Poisson, pois estas variam muito, sendo muito diferentes umas das outras.

GONÇALO Para um leigo, o que é uma variedade de Poisson?

JOSÉ MOURÃO Em matemática trabalhamos em primeiro lugar com $\mathbb{R}^n$, com uma geometria fixa plana, ou seja, sem curvatura, como a que temos na superfície de uma esfera. Numa variedade temos então uma geometria que a distingue da geometria plana de $\mathbb{R}^n$. Ser uma variedade de Poisson significa que temos uma forma de, a partir de pares de funções, obtermos uma terceira função com os chamados parêntesis de Poisson. A cada função está associado um campo vetorial ao qual, por sua vez, está associada uma dinâmica.

GONÇALO E isto tem uma representação na Física.

JOSÉ MOURÃO Exatamente. A dinâmica em Física tem por trás uma variedade de Poisson.

GONÇALO E o produto estrela...

JOSÉ MOURÃO O produto estrela aparece em problemas relacionados com Física Quântica. As funções numa variedade têm o produto usual, que é o produto ponto a ponto. Este produto é comutativo e associativo porque o é nos reais e nos complexos. Quando usamos uma variedade de Poisson para um modelo quântico, surge a necessidade de pensar nas funções, que os físicos designam como observáveis, como sendo operadores, com um produto que deforma o produto original, que era comutativo. Este produto que substitui o produto original é o chamado produto estrela onde a falta de comutatividade está relacionada com o parêntises de Poisson de que falámos antes. Já se sabia calcular este produto para casos muito simples, para variedades simpléticas, mas não havia nenhum vislumbre de como se poderia proceder para variedades de Poisson. Pensava-se que seria impossível escrever uma fórmula para este tipo de variedades. De repente, julgo que em 1997, o Kontsevich enviou uma pré-publicação com uma fórmula complicadíssima que não se percebe de onde é que vem. O que se pensava é que ele tinha um telefone para Deus, telefonou-lhe e Deus atendeu. Do ponto de vista matemático, ele não precisa de apresentar qualquer tipo de explicação de como encontrou aquela fórmula. O produto estrela é uma série formal e a única coisa que ele precisa de fazer é dizer quais são os coeficientes e provar resultados. Ele postula que este é o produto estrela e de seguida mostra que tem as propriedades que se esperavam. Mais tarde, dois físicos-matemáticos da Universidade de Genebra, Cattaneo e Felder, mostraram que o que está por detrás da fórmula de Kontsevich é o integral de caminho. O integral de caminho em si é muito simples, mas está extremamente mal definido. Alguns integrais de caminho estão matematicamente bem definidos e essa é a frustração do estado das coisas. Do ponto de vista matemático, o integral de caminho é uma ferramenta fantástica, que está bem entendido em alguns casos, através de métodos desenvolvidos em Análise Estocástica por pessoas como Kolmogorov e companhia. Contudo, nas aplicações mais interessantes, tanto à Física das interações fundamentais em quatro dimensões, como à Matemática, no caso do produto estrela e em Teoria do Campo Topológico, não está bem entendido. Ao mesmo tempo, existem regras de cozinha em como manipular o integral de caminho, coisas que para os matemáticos constituem uma dor de cabeça infinita mas que o Kontsevich aprendeu a manipular no seminário do Gelfand.

GONÇALO Considera-se hoje um matemático, um físico ou um físico-matemático?

JOSÉ MOURÃO Eu tenho trabalhado essencialmente em Matemática, em colaboração com o João Pimentel Nunes e com o Thomas Baier, sempre com o objetivo de compreendermos fenómenos em Física Quântica.

GONÇALO Olhando de novo para o seu percurso, como é vir de um país do tamanho da Rússia para um país como Portugal? As coisas não parecem todas muito pequeninas?

JOSÉ MOURÃO Parecem, se ficarmos confinados a Portugal. Mas quando cheguei, em 88, estabeleci de imediato uma série de laços com colegas no estrangeiro. Em 94, por exemplo, vivi um ano nos Estados Unidos.

GONÇALO Ou seja, hoje um cientista é um cidadão do mundo, não enclausurado...

JOSÉ MOURÃO Exatamente.

GONÇALO Se tivesse de escolher o problema central a que se dedicasse no resto da sua carreira científica, qual seria?

JOSÉ MOURÃO Bom...

GONÇALO Eu sei que é uma pergunta injusta...

JOSÉ MOURÃO Nós temos andado atrás de uma coisa curiosa que é evolução em tempo complexo.

GONÇALO Ou seja, o tempo mede-se em números complexos.

JOSÉ MOURÃO Sim. Nós queremos perceber o que acontece a um sistema ao fim de $10i$ segundos. Isto está, mais uma vez, ligado aos parêntesis de Poisson de que falámos antes.

GONÇALO E com que método? Observa qualquer fenómeno interessante em Física que não se compreende e tenta fazer uma tradução matemática desse fenómeno...

JOSÉ MOURÃO E depois tentamos ver mais do que se observou na experiência.

GONÇALO Nos últimos anos, assistimos à partida de muitos docentes para o estrangeiro. Adivinha alguma forma de inverter este processo?

JOSÉ MOURÃO Nós, no Técnico, estamos fazer um esforço de expansão, de forma a rejuvenescer os quadros e a atrair para o Técnico gente muito boa que está disponível, visto que o mercado está saturado com qualidade. Julgo que essa fase negra está a terminar. Hoje estamos apostados em procurar contratar jovens melhores do que nós. Esse é o nosso objetivo.

GONÇALO Professor, resta-me agradecer mais uma vez pela sua disponibilidade.

JOSÉ MOURÃO Nada! Obrigado eu!

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

O MUNDO DE SOPHIA

Afinal, o que é isso da inteligência artificial? Poderá um computador ser verdadeiramente inteligente? Ter consciência, vontade, sentimentos e emoções? Ou será apenas uma pálida imitação dos seus criadores?

Já todos vimos os mais recentes anúncios de uma empresa de telecomunicações em que um *robot* de nome Sophia exibe as suas capacidades cognitivas para vender os produtos da empresa. O *robot* conversa com diversas personalidades famosas, mostra-se curioso, responde de forma mais ou menos ingénua e chega até a demonstrar algum humor, que não sabemos se é fortuito ou intencional.

A aparição desta personagem humanoide na comunicação social é um bom pretexto para que se discuta a questão da inteligência artificial e uma infinidade de problemáticas que lhe estão associadas. Afinal, o que é a inteligência? E o que define a humanidade? Serão sinónimos? Até quando?

O termo *"robot"* teve origem na peça de teatro de ficção científica "R.U.R", de 1920, escrita pelo escritor checo Karel Čapek. A peça descreve uma fábrica que produz seres artificiais humanoides que possam servir a espécie humana enquanto escravos. O incremento no número de *robots* e o decréscimo dos seres humanos decorrente de uma baixa de natalidade acabam por levar a uma revolta dos "escravos" e ao extermínio da raça humana. Escrito há quase 100 anos, o texto de Čapek antecipa muitas das angústias contemporâneas e os sentimentos ambíguos de fascínio e horror que associamos à possibilidade de uma espécie tecnológica criada por nós que possa suplantar-nos e tornar-nos obsoletos.

Mas, afinal, o que é isso da inteligência artificial? Poderá um computador ser verdadeiramente inteligente? Ter consciência, vontade, sentimentos e emoções? Ou será apenas uma pálida imitação dos seus criadores? Um mero conjunto de algoritmos e bases de dados que se conjuram para imitar os nossos comportamentos?

Ninguém sabe, mas muitos especulam. Se pusermos de parte conceitos extra científicos tais como "alma" e "espírito", não há verdadeiros motivos para que um cérebro artificial suficientemente complexo não adquira em algum momento as mesmas capacidades dos nossos cérebros biológicos, feitos de células e alimentados por impulsos elétricos, e que desde sempre associámos ao conceito de humanidade ou personalidade. Poderá um cérebro de silicone ser auto consciente? Sentir dor e prazer? Amar e odiar? Ter medo de morrer?

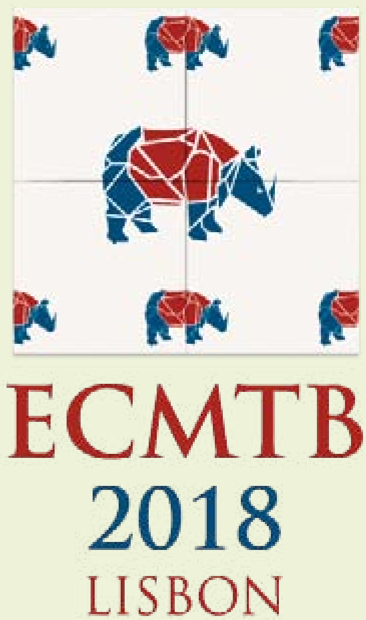
O "teste de turing" parece ter sido ultrapassado, muitos de nós terão já conversado com máquinas sem se terem apercebido. Serão as máquinas inteligentes ou apenas espertalhonas? Estarão ainda ao nosso serviço ou estaremos nós a trabalhar para elas? Quantas das nossas horas de trabalho servem para comprarmos computadores mais sofisticados, telemóveis sempre mais "*smart*" e automóveis cada vez mais autónomos? Quem é mais esperto? Quem é senhor e quem é escravo?

ROGÉRIO MARTINS É **ORADOR CONVIDADO** DO **ICM 2018**

O International Congress of Mathematicians 2018 (ICM 2018), que se realizará entre 1 e 9 de agosto de 2018, no Rio de Janeiro, contará com uma presença lusa entre os seus oradores convidados: Rogério Martins, professor na Universidade Nova de Lisboa e apresentador do programa televisivo "Isto é Matemática". Rogério Martins participará na mesa-redonda *"New avenues for raising public awareness of mathematics"*, juntamente com Simon Pampena (Austrália), Mariana Pereira (Uruguai), Nikolai Andreev (Rússia) e Tadashi Tokieda (EUA), no âmbito da conferência *"Mathematics Education and Popularization of Mathematics"* e será ainda responsável pela sessão plenária pública de dia 8 de agosto. O ICM é considerado o mais importante congresso de matemática do mundo e vai realizar-se pela primeira vez na América do Sul. As inscrições para o evento estão disponíveis em *http://www.icm2018.org/portal/en.*

ECMBT JÁ CONTA COM MAIS DE **800 INSCRITOS**

A 11.ª European Conference on Mathematical and Theoretical Biology (ECMTB) é o evento principal do Ano da Biologia Matemática e, por isso, é pela primeira vez uma organização conjunta da European Mathematical Society e da European Society for Mathematical and Theoretical Biology. A ECMTB 2018 que decorrerá em Lisboa, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, de 23 a 27 de julho, já conta com mais de 800 inscritos. A Sociedade Portuguesa de Matemática é coorganizadora do evento. Consulte a página h*ttp://www.ecmtb2018.org.*



ÚLTIMA LIÇÃO DE CARLOS BRAUMANN

Carlos Braumann deu a sua última lição, com o título "A Matemática, o Acaso e a Vida", no dia 23 de maio, no Colégio do Espírito Santo da Universidade de Évora. O evento contou com a presença da reitora da Universidade de Évora, a professora Ana Costa Freitas, e com vários testemunhos de colegas e alunos. Carlos Braumann é, desde março de 2018, professor catedrático aposentado da Universidade de Évora. Ingressou nesta universidade em 1975 e nela desenvolveu quase toda a sua carreira académica. Além de ter lecionado diversas cadeiras, aqui foi reitor (2010-14), vice-reitor (1987-94), presidente do Conselho Científico (1999-2001), presidente do Conselho do Departamento de Matemática e da Área Departamental de Ciências Exatas (2005-07, 1991) e diretor do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (1994-99). Concluiu a licenciatura em Matemática Aplicada na Universidade de Luanda com 18 valores, tendo sido galardoado com o Prémio Rotary Club de Luanda para o licenciado da universidade com classificação mais elevada. Obteve o grau de doutor em 1979 na State University of New York at Stony Brook.

É membro do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações e membro eleito do International Statistical Institute, tendo a sua atividade científica e as suas publicações incidido especialmente nas equações diferenciais estocásticas e nas suas aplicações. Participou e coordenou projetos de investigação e orientou pós-doutoramentos e teses de doutoramento, entre outros trabalhos. Foi investigador visitante e prestou colaboração em várias universidades nacionais e estrangeiras. Tem, desde 2007, integrado o júri do Reinhart Heinrich Doctoral Thesis Award, concurso internacional anual para a melhor tese de doutoramento na área da Biologia Matemática. É avaliador de várias revistas científicas internacionais e participou em inúmeros júris de provas e graus académicos. É perito avaliador da Agência para a Avaliação e Acreditação do Ensino Superior e integra a Mesa da Assembleia Geral do Centro Internacional de Matemática. Exerceu as funções de presidente da European Society for Mathematical and Theoretical Biology (2009-12) e da Sociedade Portuguesa de Estatística (2006-12). Foi membro do Conselho Superior de Estatística em representação do CRUP e membro do CEIES (organismo consultivo para as questões estatísticas do Conselho Europeu e da Comissão Europeia). É ainda copresidente da 11th European Conference on Mathematical and Theoretical Biology (ECMTB2018) que se realizará de 23 a 27 de julho deste ano.

MATHGURL NO **ENCONTRO NACIONAL** DA **SPM**

Inês Guimarães, mais conhecida por MathGurl, fará parte da mesa-redonda sobre divulgação no Encontro Nacional da SPM, no dia 9 de julho, no Instituto Politécnico de Bragança. Inês, estudante do 2.º ano da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, é a criadora do primeiro canal do YouTube sobre matemática em Portugal: MathGurl. Os seus vídeos são humorísticos e com uma pequena dose de loucura, mas a verdade é que o canal, criado em 2015, já conta com mais de 45 mil subscritores. Como diz na sua apresentação: "A matemática pode pôr-te maluco, mas VALE A PENA!" Na mesma mesa-redonda da MathGurl estarão também Rogério Martins (Universidade Nova de Lisboa) e Raul Ibañez (Universidad del País Vasco).

PRÉMIO FERRAN SUNYER I BALAGUER

Estão abertas as inscrições para o prémio internacional de investigação matemática Ferran Sunyer i Balaguer até ao dia 30 de novembro às 13 horas. O prémio será concedido a uma monografia matemática de carácter expositivo, que apresente os últimos desenvolvimentos numa área ativa de pesquisa em matemática, na qual o candidato tenha feito contribuições importantes. A monografia deve ser original, inédita, escrita em inglês e de ter, pelo menos, 150 páginas. Em casos excecionais, poderão ser considerados trabalhos noutras línguas. O prémio tem um valor pecuniário de 15.000 euros e a monografia vencedora será publicada na série *"Progress in Mathematics"* da Birkhäuser. O nome do vencedor será apresentado em Barcelona em abril de 2019.

UM **DIA COM** A **MATEMÁTICA**

No dia 2 de julho, decorreu o encontro "Um Dia com a Matemática", no Colégio Luís António Verney, na Universidade de Évora. Este encontro, destinado a alunos do ensino secundário, teve como objetivos estimular e desenvolver o interesse pela matemática, em particular pela investigação; dar a conhecer novas áreas da matemática e as suas aplicações noutras áreas do saber, bem como promover o reconhecimento da importância da matemática no nosso quotidiano e no mundo. O DIAMAT foi organizado pelo Departamento de Matemática da Universidade de Évora e teve o apoio do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações e da Delegação Regional do Sul e Ilhas da Sociedade Portuguesa de Matemática.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA DISTINGUIU **NOVO BANCO**

A Sociedade Portuguesa de Matemática distinguiu o Novo Banco, no dia 4 de maio, com a placa de Sócio Corporativo Honorário, como reconhecimento pelo apoio incansável que tem dado às Olimpíadas Portuguesas de Matemática ao longo da última década. O momento contou com a presença do presidente da SPM, Jorge Buescu, do CEO do Novo Banco, António Ramalho, do diretor do Departamento de Comunicação do Novo Banco, Paulo Tomé, e de Carla Veludo, do mesmo departamento. Estiveram ainda presentes o coordenador geral das Olimpíadas, Luís Merca Fernandes, e Joana Teles, da direção da SPM.

JORGE BUESCU ELEITO **MEMBRO** DO **COMITÉ EXECUTIVO DA EMS**

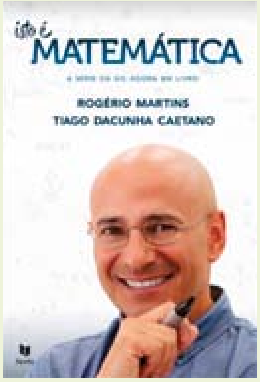
O presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, Jorge Buescu, foi eleito membro do Comité Executivo da European Mathematical Society (EMS) por expressiva maioria dos votos, no encontro que decorreu de 23 a 24 de junho, em Praga. No dia 1 de janeiro de 2019 tomarão também posse Volker Mehrmann como presidente, Betül Tanbay como vice-presidente, Mats Gyllenberg e Sjoerd Verduyn Lunel reeleitos tesoureiro e secretário, respetivamente.
Jorge Buescu é licenciado em Física, doutorado em Matemática pela Universidade de Warwick (Reino Unido) e professor associado com agregação na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Realiza investigação em diversas áreas, dos Sistemas Dinâmicos à Análise Matemática, e dedica-se à divulgação científica e ao ensaio. É reconhecido autor de vários livros de divulgação da matemática, de "O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias" ao mais recente "Primos Gémeos, Triângulos Curvos".

CLUBE DE MATEMÁTICA DA SPM COM **NOVA IMAGEM**

O Clube de Matemática da SPM conta com uma nova imagem desde abril, venha conhecê-la em *https://clube.spm.pt.* Com coordenação do professor Carlos Marinho, o Clube continua a ser um espaço dedicado a miúdos e graúdos com muitas novidades todos os meses. Em julho, o Clube entrevistou André Neves, matemático e professor do Departamento de Matemática da Universidade de Chicago e o primeiro matemático português a ganhar um prémio de mais 1 milhão de dólares da *Starting Grant* do Conselho Europeu de Investigação. Nesta entrevista, André Neves fala da paixão pela matemática passando pelo Instituto Superior Técnico, por Londres e pelos EUA, pelas saudades da família e de Portugal.

"ISTO É MATEMÁTICA" EM LIVRO

Depois do grande sucesso da série "Isto é Matemática" na SIC, agora o "Isto é Matemática" surge em livro, com 26 desafios matemáticos das duas últimas séries. Rogério Martins, autor e apresentador, e Tiago DaCunha Caetano, guionista, continuam o projeto de divulgar matemática de uma forma acessível, rigorosa e divertida. O lançamento do livro aconteceu no dia 14 de junho, na livraria Buchholz, e contou com a apresentação de Carlos Fiolhais e José Paulo Viana.



MATHEMATICS FOR SMART SECURITY 2018

A PT-MATHS-IN organiza anualmente um *workshop* de um dia ligado a temas do momento, procurando abrir perspetivas para áreas de investigação em matemática com particular impacto societal. Depois do encontro sobre Big Data em 2017, propõe o tema Segurança para 2018, num evento a realizar a 19 de outubro. A segurança é uma das componentes essenciais na estabilidade e no desenvolvimento de sociedades desde os tempos primordiais. Hoje em dia, este aspeto possui uma vertente tecnológica fortíssima e um alcance enorme. Falamos da segurança não só de pessoas mas também de dados, e pensando apenas nestes dois ramos, podemos considerar ramificações deste tema ligados a evacuações de emergência, policiamento, terrorismos, cibersegurança, encriptação, saúde e alimentação, entre muitos outros.
Este encontro conta com um painel de reputados oradores convidados num programa que poderá ser consultado em *www.spm.pt/PT-MATHS-IN*.
Este *workshop* é precedido, no dia 18, pela reunião da direção da EU-MATHS-IN, fazendo de Lisboa, nestes dias, a capital da Matemática Industrial na Europa.

Jorge Buescu
Presidente da SPM
jsbuescu@ciencias.ulisboa.pt

DOIS ANOS INTENSOS NA VIDA DA SPM

Chega ao final, em Julho de 2018, o mandato da Direcção eleita em 2016, à qual tive a honra de presidir. É portanto esta a altura adequada para uma análise sobre a actividade da SPM nestes dois anos particularmente intensos.

A SPM manteve o seu padrão de grandes Encontros Nacionais bienais, alternando com Escolas de Verão, também bienais. O Encontro Nacional de 2018, em Bragança, será provavelmente o mais concorrido de sempre; a Escola de Verão de 2017, em Leiria, teve também grande sucesso. O seminário Nacional de História de Matemática realizou três encontros (2016, FCT-UNL; 2017, Academia Militar; 2018, Viseu), revelando grande dinamismo. Prosseguiram actividades de divulgação como as Tardes de Matemática em diversos locais do país. Demos continuidade a grandes projectos de parceria com outras instituições: o projecto Aula Aberta, com a Fundação Gulbenkian (que viu já em 2018 ser aprovada a proposta para uma terceira fase quadrienal); o projecto Khan Academy, no qual a SPM colabora com a Fundação PT para a adaptação de conteúdos multimédia a Portugal; o projecto Memória da SPM, com a Fundação Gulbenkian, que viu concluída a sua primeira fase e está presente na Web (*https://memoria.spm.pt/*); e o programa de TV Isto é Matemática, concluído em 2016.

Do ponto de vista das publicações da SPM houve também desenvolvimentos. Na *Portugaliae Mathematica*, o Editor-em-Chefe Luís Nunes Vicente solicitou a conclusão de mandato devido a abraçar um projecto profissional nos EUA. Fá-lo depois de um trabalho notável, deixando a Portugaliae Mathematica como revista no segundo quartil do ISI, facto que é motivo de grande orgulho para a SPM. Será substituído nas suas funções por José Francisco Rodrigues, entrando para o corpo editorial Ana Paula Dias (UP) e Ercília Sousa (UC), abandonando o Corpo Editorial José Ferreira Alves (UP). A todos eles a SPM agradece terem aceite este desafio que prestigia a toda a comunidade matemática portuguesa.

Outra novidade em relação a publicações é a passagem da distribuição do Boletim a sócios em formato electrónico, aprovada na AG de Março de 2018. A SPM acompanha assim a evolução do edição científica, permitindo ao mesmo tempo a edição no Boletim de Actas do Encontro Nacional, o que já se tinha tornado impossível em 2016 pelo enorme crescimento deste.

Ainda no plano editorial, a SPM editou em 2017, em parceria com a Porto Editora, o extraordinário *Compreender os números na Matemática escolar*, de Hsiang-Hsi Wu, figura de referência na moderna pedagogia da Matemática e principal responsável pelo Common Core americano. No plano da divulgação a SPM estabeleceu uma parceria com a Federação Portuguesa de Futebol para a edição de Contas de Cabeça, de Hélder Pinto e Cristina Silva. O lançamento, no dia do π, decorreu na Cidade do Futebol sendo convidado de honra o Ministro da Educação.

As Olimpíadas de Matemática são um enorme motivo de orgulho para a SPM: são a maior organização circum-escolar em Portugal, movimentando nas suas várias fases um total de 70.000 alunos. O seu carácter excepcional foi reconhecido em Julho de 2017 pela Fundação Calouste Gulbenkian, que atribuiu à SPM o Prémio Gulbenkian na categoria Conhecimento – Promoção do Sucesso escolar. E as Olimpíadas não param: em Julho de 2017 tiveram lugar no Porto as Olimpíadas da CPLP, em que acolhemos todos os países da comunidade lusófona; e em Setembro de 2018 terão lugar, pela primeira vez numa organização conjunta de dois países – Portugal e Espanha – as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática, em Monte Gordo e La Rabida.

A mais recente Secção Autónoma da SPM é a PT-MATHS-IN, rede portuguesa de Matemática para a Indústria. Tem revelado uma dinâmica notável, tendo realizado como evento de lançamento a Conferência internacional Big Data – Mathematics in Industry 4.0, no Porto. Está integrada EU-MATHS-IN, rede europeia de Matemática para a Indústria, de cujo Board Meeting será anfitrião em 2018.

Consciente de que a Matemática é cada vez mais uma construção global e em rede, a SPM esforçou-se por dar maior visibilidade e representatividade internacionais à comunidade matemática portuguesa. Para lá dos já estabelecidos Encontros Ibéricos bienais, organizados alternadamente pela SPM e RSME (em 2016 em Santiago de Compostela, e em 2018 em Évora), a SPM organizou em Abril de 2017 o Meeting of Presidents da European Mathematical Society (EMS) em Lisboa, na Fundação Gulbenkian, sendo orador convidado o Ministro da Ciência Manuel Heitor. O Ex-Presidente da SPM Fernando Pestana da Costa foi escolhido para Editor da Newsletter da EMS. Por proposta da SPM, foram escolhidos para Comissões da EMS dois matemáticos portugueses: o Vice-Presidente da SPM Fabio Chalub para a Comissão de Matemática Aplicada, Pedro Freitas a Comissão de Ética. O Vice-Presidente da SPM Adérito Araújo foi eleito Presidente do ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry). Finalmente, o Presidente Jorge Buescu foi eleito, na Assembleia Geral da EMS em Junho, para a Comissão Executiva da EMS. Este é um dos grandes motivos de orgulho deste mandato: definitivamente, Portugal está na rota da Matemática internacional.

Em contrapartida, os maiores revezes sofridos pela SPM ao longo destes dois anos foram no plano interno e num sector que parecia estabilizado, o da Educação. Com efeito, o Ministério da Educação, depois de um início de mandato em que dialogou e criou um grupo de trabalho conjunto com os dois parceiros da área, SPM e APM, decidiu a partir de Setembro de 2016 excluir a SPM de todo e qualquer diálogo. A um pedido de reunião urgente em Outubro de 2016 a propósito do recém-anunciado "Grupo de Trabalho para as Aprendizagens Essenciais", que integrava a APM mas não a SPM, o Secretário de Estado João Costa recusou receber a SPM, afirmando liminarmente em carta de 20/10/2016 "foi minha opção convocar as associações profissionais e não as sociedades científicas". Curiosamente, dias depois convocava as Sociedades Portuguesas de Química e de Física – continuando sempre a excluir a SPM. Nunca o sr. SEE justificou, mesmo directamente interpelado, as razões deste voto ao ostracismo.

O facto é que a partir daí a SPM foi sistematicamente excluída pelo ME de participação nas muitas e radicais iniciativas que este tem desenvolvido: o Perfil do Aluno (Fevereiro de 2017), a primeira fase das Aprendizagens Essenciais (Agosto-Setembro de 2017), o projecto de Flexibilidade Curricular (em curso), o Curriculo do Ensino Básico e Secundário (Abril de 2018) e a conclusão das Aprendizagens Essenciais (Maio de 2018). No momento da escrita destas linhas já foi nomeado pelo Ministério um grupo de trabalho para elaboração de novos programas de Matemática e está já em estudo a possibilidade de eliminação do exame de 12º ano, pelo menos na sua vertente de acesso ao Ensino Superior. De todas estas discussões a SPM continua inadmissivelmente excluída pelo ME.

Se é preceito bíblico que ninguém é profeta na sua terra, o facto de o Ministério da Educação estar a tratar uma sociedade científica com o prestígio e o reconhecimento internacional da SPM como um pária enquanto toma medidas estruturais que vão determinar o desenvolvimento do sistema educativo em Portugal para as próximas décadas não pode deixar de ser considerado extremamente preocupante e com consequências muito nefastas.

Esta é a herança que a Direcção cessante deixa à futura Direcção da SPM. Como todas as heranças, tem aspectos positivos e aspectos negativos. Estou certo de que a futura Direcção saberá tirar partido dos positivos e transformar os negativos em oportunidades.

O autor escreve, por opção, de acordo com a antiga ortografia da língua portuguesa.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA **GAZETA DE MATEMÁTICA:**

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt***.

ASSINATURA DA **GAZETA** PARA O **ANO 2018**

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR