

N. 0186

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXVIV | Nov. 2018 | 4,20€

ATRACTOR

Matemática dos Azulejos

Ainda a Definição
de Limite no Ensino
Secundário

António Bivar

Visualizando a Composta
de Rotações através de um
Software de Geometria
Dinâmica

Günhan Caglayan



Queres ser campeão Olímpico? Participa!



Inscrições Mini-Olimpiadas até 16 de janeiro de 2019

mopm.mat.uc.pt/MOPM

Categoria: Mini-Olimpiadas (3.º e 4.º Anos do Ensino Básico)

Prova Única: 23 de janeiro de 2019

9.ª Edição Nacional das Olimpíadas de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Inscrições Olimpíadas até 31 de outubro de 2018

www.opm-online.net

Categorias: Pré-Olimpiadas (5.º Ano), Júnior (6.º e 7.º Anos)
A (8.º e 9.º Anos), B (10.º, 11.º e 12.º Anos)

1.ª Eliminatória: 07 de novembro de 2018

2.ª Eliminatória: 09 de janeiro de 2019

Final Nacional: 04 a 07 de abril de 2019

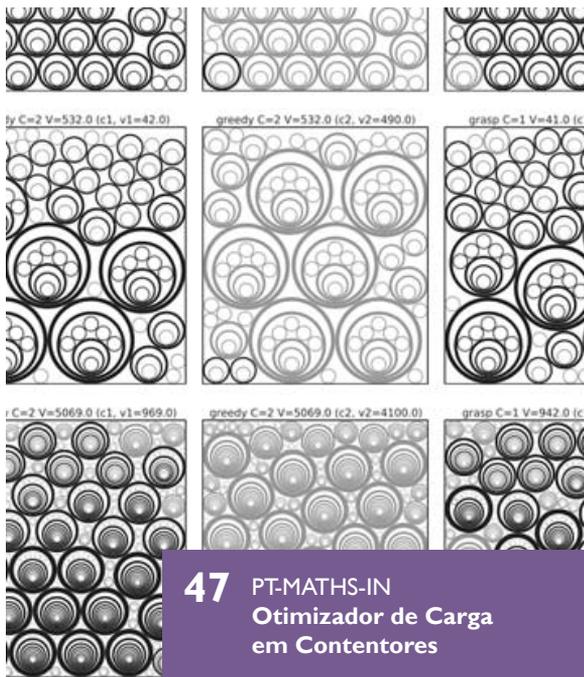
Agrupamento de Escolas Sebastião da Gama, Setúbal

Julho 2019 • 60.^{as} Olimpíadas Internacionais de Matemática • Reino Unido

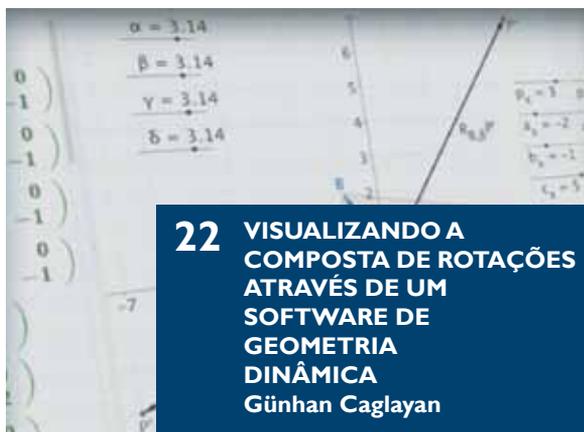
Julho 2019 • 9.ª Olimpíada de Matemática da CPLP

Setembro 2019 • XXXIV Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática • México

CONTACTOS: www.spm.pt • 217 986 353 • 960 130 506 • opm@spm.pt



47 PT-MATHS-IN
Otimizador de Carga
em Contentores



22 VISUALIZANDO A
COMPOSTA DE ROTAÇÕES
ATRAVÉS DE UM
SOFTWARE DE
GEOMETRIA
DINÂMICA
Günhan Caglayan



50 CONVERSA COM...
Samuel Kou

- 02 EDITORIAL** | *Sílvia Barbeiro*
artigo de capa
- 03 ATRACTOR**
Matemática dos Azulejos
- 10 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
A Fonte Eterna do Mestre
- 12 CANTO DÉLFICO** | *Alexander Kovačec*
O Alberto Descobre uma Famosa Curva
- 19 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*
Sol e Lua à Beira-mar
- 22 VISUALIZANDO A COMPOSTA DE ROTAÇÕES
ATRAVÉS DE UM SOFTWARE DE GEOMETRIA
DINÂMICA**
Günhan Caglayan
- 27 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
Emanuel Lasker
- 31 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 32 AINDA A DEFINIÇÃO DE LIMITE
NO ENSINO SECUNDÁRIO**
António Bivar
- 47 PT-MATHS-IN** | *João Nuno Tavares e João Pedro Pedroso*
Otimizador de Carga em Contentores
- 50 CONVERSA COM...** | *Gonçalo Morais*
Samuel Kou
- 55 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
Ciência e Poesia
- 56 NOTÍCIAS**
- 63 CARTAS DA DIREÇÃO** | *Filipe Oliveira*
Uma Agenda para o Biénio 2018-2020

SIMETRIAS, CONTROVÉRSIAS E OUTROS

Encerramos o ano de 2018 com mais uma edição da *Gazeta de Matemática* recheada de artigos de grande qualidade que publicamos com orgulho.



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

O artigo que inspirou o design da capa desta edição, *Matemática dos Azulejos*, que preenche a coluna do Atrator, analisa do ponto de vista da simetria os painéis de azulejos de casas. A observação dos padrões ou frisos não nos recompensa só com a sua beleza imediata. Temos também o desafio de pesquisar as suas simetrias. O texto incita uma visita virtual ou real aos azulejos das casas das localidades de Ovar e Furadouro onde o Atrator fez recolha e tratamento de dados e desenvolveu ferramentas para o seu tratamento. Com a ferramenta *GeCla*, um programa criado e distribuído gratuitamente pelo Atrator, podemos obter mapas que nos ajudam a localizar as casas com o motivo dos azulejos que escolhemos ou o tipo de simetria que pretendemos observar.

A *Gazeta de Matemática* publica frequentemente artigos que abordam temas relacionados com o ensino que são relevantes para uma boa parte dos nossos leitores. Uma questão que tem gerado alguma controvérsia prende-se com as recentes alterações aos programas de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, no que diz respeito à noção de limite. Consideremos a definição de limite de uma função num ponto a , segundo a formulação de Heine. Há duas possibilidades que têm sido discutidas no que diz respeito às sucessões: escolher apenas aquelas que nunca tomam o valor a , ou, em alternativa, permitir sucessões que possam tomar o valor a . A remodelação curricular adota a segunda opção em vez da primeira, que vinha sendo considerada não só no Ensino Secundário mas também em muitos cursos do Ensino Superior. No número 184 de março deste ano, foi publicado um

artigo de Augusto Franco de Oliveira com uma visão crítica das mudanças postas em prática. No artigo intitulado *Ainda a definição de limite no Ensino Secundário*, que agora publicamos, António Bivar defende a escolha da abordagem dos novos programas.

A equipa editorial desta revista tem procurado não só alcançar novos públicos mas também alargar o grupo de autores. Queremos dar espaço aos investigadores que querem divulgar as suas descobertas a um público alargado, professores motivados e inspiradores com vontade de comunicar as suas experiências e jovens dinâmicos e talentosos que escolham a nossa revista para partilhar os seus trabalhos e as suas ideias. Neste número publicamos um artigo que chegou de além-mar sobre a visualização da composta de rotações, da autoria de Günhan Caglayan, que leciona matemática na New Jersey City University.

O leitor que percorra este e outros números da revista vai descobrir muitos mais motivos de grande interesse. Recordo que a *Gazeta* tem um arquivo dos artigos em formato digital acessível pela página *web* e que os assinantes têm acesso imediato aos artigos dos números mais recentes. Faço votos boas leituras!

Quero expressar um forte agradecimento a Graciano de Oliveira, que deixou o Conselho Editorial. A *Gazeta de Matemática* renasceu no ano 2000 sob a sua direção e manteve desde então uma publicação regular. A sua contribuição ao longo destes anos tem sido notável e determinante para o percurso da revista, como autor, diretor e membro do Conselho Editorial.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o *Atrator*, este é um espaço da responsabilidade do *Atrator*; relacionado com conteúdos interativos do seu site www.atrator.pt.
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para atrator@atrator.pt.

MATEMÁTICA DOS AZULEJOS

O *Atrator* tem em curso um projecto de alguma dimensão com o objetivo de analisar, do ponto de vista da simetria, os painéis de azulejos das casas de uma localidade.

A parte de recolha e tratamento de dados, relativamente a Ovar (incluindo o Furadouro), está avançada e as ferramentas que foram desenvolvidas para esse tratamento poderão vir a ser aplicadas noutras localidades com azulejos. Este texto faz um ponto da situação atual.

À partida, o título *Matemática dos Azulejos* poderia levantar a questão de saber se a análise matemática "dos azulejos" foca cada azulejo individualmente ou o resultado da forma como o assentamento dos azulejos é feito numa certa zona da fachada de uma casa. Por exemplo, consideremos o azulejo¹ representado na figura 1, formado por um V; esse azulejo, individualmente, tem uma reflexão vertical, com eixo exatamente a meio. Mas podemos imaginar diversas formas de disposição, por exemplo as representadas nas três imagens da figura 2. Nos três casos, há simetrias de reflexão de eixos verticais passando pelo vértice do V de cada azulejo, reflexões essas provenientes da simetria existente no próprio azulejo. No segundo caso, são as únicas, e nos outros dois, há também simetrias de reflexão com eixos verticais passando pelas junções verticais



Figura 1.

dos azulejos; no terceiro caso, há ainda reflexões de eixos horizontais passando pelas junções horizontais. Nos três casos há rotações de meia-volta cujos centros são: i) no primeiro, para cada V, os meios dos seus dois segmentos e as suas projeções no lado do azulejo que contém o vértice do V; ii) no segundo, os quatro vértices de cada azulejo e os meios dos seus lados verticais; iii) no terceiro, os meios dos lados dos V (além das que resultam das reflexões).

Seria ilusório pensar



Figura 2.

¹Salvo menção em contrário, os azulejos, zonas e casas representados referem-se a Ovar (incluindo o Furadouro). O leitor que não conhecer as notações referentes aos tipos de simetria de frisos e padrões pode consultar [1].

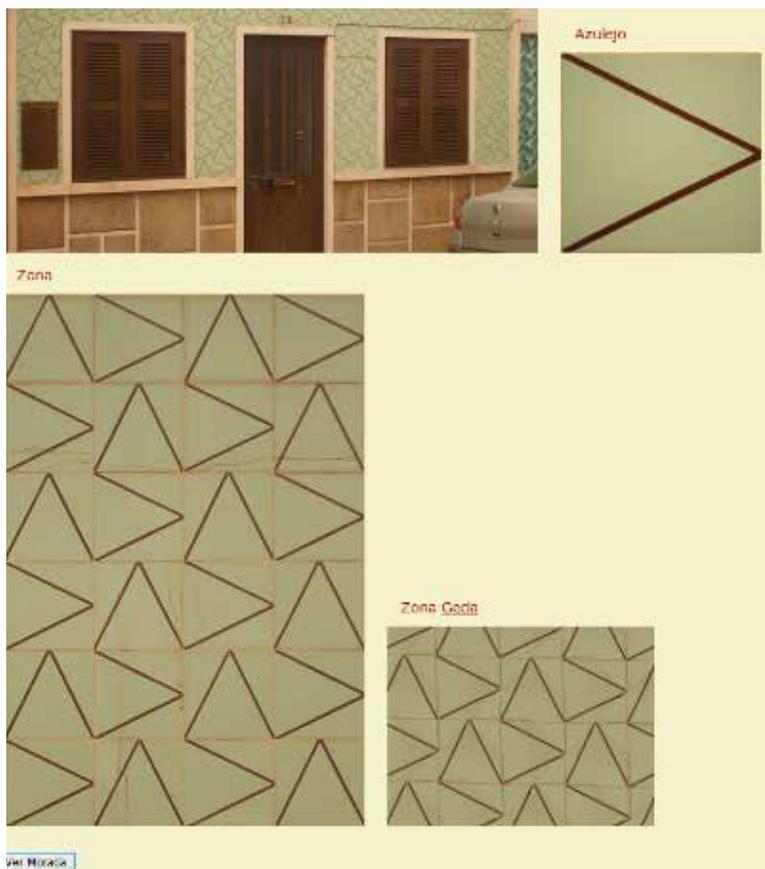


Figura 3.

que, extrapolando o que é afirmado no início do parágrafo anterior, poderíamos afirmar que a simetria de reflexão do azulejo V dá necessariamente lugar a uma simetria de reflexão do padrão que o utiliza. No Furdouro foi encontrada uma casa com este azulejo, mas disposto de uma forma que não conduz a nenhuma simetria de reflexão: ver na figura 3 uma imagem copiada de [1] com essa casa e uma zona da sua fachada principal². Nessa figura está representada também, em baixo à direita, uma *Zona GeClá*³. Clicando nessa imagem no portal do Atractor, o leitor poderá importá-la e utilizá-la com o GeClá para receber ajuda ao procurar as simetrias e o tipo de simetria do padrão correspondente. Estas funcionalidades estão disponíveis para todos os padrões e todos os frisos de todas as casas com azulejos, e há casas que apresentam, entre padrões e frisos, um total de cinco diferentes.

A figura 4 representa: i) um mapa de [1], obtido por um utilizador que escolheu um círculo (centro e raio) e alguns tipos de simetria, para localizar as casas nesse



Figura 4.

círculo com azulejos desses tipos de simetria; ii) o carimbo correspondente ao azulejo da casa clicada, numa fase da animação que o mostra a carimbar o friso.

A figura 5 apresenta os 18 tipos de simetria encontrados em padrões e frisos de Ovar até esta data.

Todos os sete tipos de frisos existentes estão presentes (última linha e último elemento da penúltima) e, quanto aos 17 padrões, os cinco que admitem rotações de 120° (quatro no canto superior esquerdo e um no superior direito) não estão representados, como era de esperar, por ser mais natural surgirem com azulejos hexagonais. Há ainda um tipo de simetria, o último da segunda linha, que poderia perfeitamente aparecer, mas (ainda) não encontramos. Vamos dar algumas indicações sobre como proceder para o obter usando azulejos de outras casas, com disposição diferente; isso tornará fácil a tarefa de alguém que decida, usando-as, fazer com que haja brevemente em Ovar todos os tipos de simetria que se podem obter com azulejos existentes à venda.

Começemos por notar que, nos padrões com alguma



Figura 5.

simetria de reflexão, há duas situações possíveis: ou o azulejo já tem alguma simetria de reflexão e a forma de assentamento respeita-a (casos da figura 2); ou o azulejo não tem nenhuma simetria de reflexão, mas existem dois azulejos, um refletido do outro. A primeira situação é, de longe, a mais frequente. A figura 6 mostra todos os azulejos encontrados em Ovar correspondentes à segunda situação, isto é, em que, para cada azulejo, há também o seu refletido. Escolhendo um dos que não têm nenhuma simetria (qualquer diferente do primeiro e do quarto) e



Figura 6.

² O padrão tem reflexões deslizantes e grupo de simetria xx (pg), tendo sido encontradas até agora, entre mais de 700 casas já tratadas e referidas em [1], só mais três com padrões desse grupo, curiosamente todas elas no Furdouro. Uma é contígua à representada na figura 3 e as três usam um mesmo azulejo com forma semelhante ao dessa figura, sendo o assentamento exatamente do mesmo tipo.

³ GeCla é um programa criado e distribuído gratuitamente pelo Atractor e que permite: i) produzir padrões e frisos de qualquer tipo de simetria a partir de um motivo desenhado pelo utilizador; ou contido numa imagem; ii) classificar um padrão ou friso, facilitando a pesquisa de todas as suas simetrias.



Figura 7.

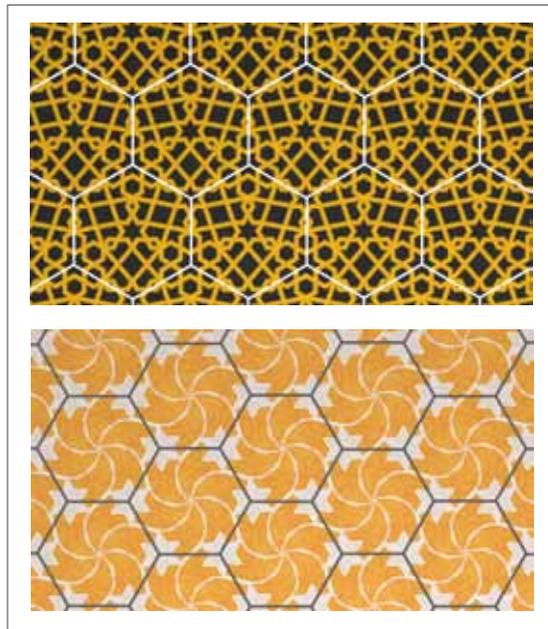


Figura 8.

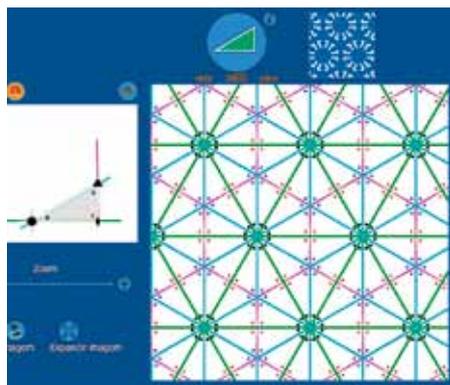


Figura 9.

usando o GeCla com essa imagem por motivo e o carimbo correspondente a $22x$ (plano projetivo), obtemos uma zona com o tipo de simetria que (ainda) parece faltar em Ovar: ver a figura 7 obtida com o quinto azulejo.

Para construir esta zona toma-se um azulejo e coloca-se junto a cada um dos seus lados um refletido mas rodado de meia-volta. Basta, pois, dispor de pares de azulejos, refletidos um no outro.

Vejam os brevemente o caso dos cinco padrões que faltam. No DVD *Simetria - apresentação dinâmica*, criado pelo Atractor em 2009, há imagens de padrões recolhidos no Alhambra referentes a esses 5 tipos de simetria. Se houvesse azulejos hexagonais ou triangulares (equiláteros) no mercado, seria uma tarefa simples encontrar motivos para esses azulejos e com eles produzir naturalmente os cinco tipos em falta⁴. A figura 8 ilustra como obter dois desses cinco tipos.

Sem azulejos hexagonais, há uma solução com azulejos retangulares de proporções adequadas. Consideremos, por exemplo, o tipo de simetria $*632$, que tem



Figura 10.

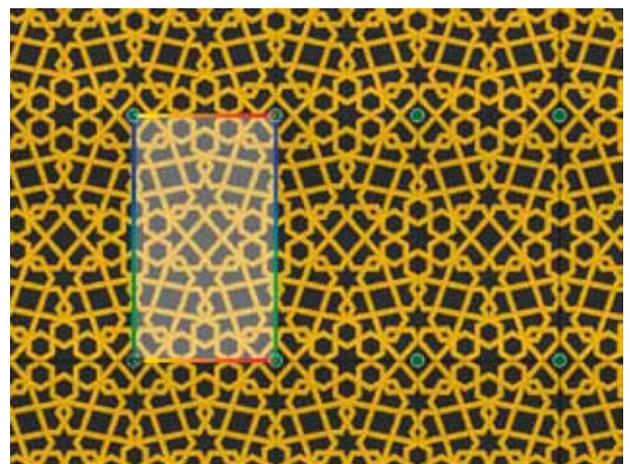


Figura 11.

como carimbo um triângulo retângulo com ângulos 30° e 60° , e suponhamos a hipotenusa de comprimento unitário (ver figura 9 criada com o GeCla). Este carimbo dá origem a redes de hexágonos regulares. Calculemos as amplitudes das translações mínimas em duas direções perpendiculares entre si. As normas dos vetores de translação são 3 para a vertical e $\sqrt{3}$ para a horizontal, portanto a razão é $\sqrt{3}$. Com azulejos retangulares de lados nesta proporção, seria exequível produzir o padrão. A título de exemplo referente ao caso *632, o azulejo representado na figura 10 permite obter o primeiro padrão do Alhambra da figura 8. Na figura 11, obtida com o GeCla, mostra-se o padrão obtido com esse azulejo; nela estão marcados os vértices dos azulejos. Numa solução destas, a concretizar-se, seria essencial que o assentamento final dos azulejos tornasse praticamente imperceptíveis as juntas entre eles e seria crucial que as proporções entre os comprimentos dos lados fossem respeitadas.

Aliás, esta questão da visibilidade ou não das juntas foi várias vezes discutida durante a realização do trabalho, visto que o grau de destaque delas é muito variável de casa para casa⁵ e tê-las ou não em conta como parte da figura altera frequentemente a classificação do ponto de vista da simetria. Vejamos um exemplo. Vendo de longe a casa representada na imagem da esquerda da figura 12, apenas se notam umas linhas retangulares claras, tendo o padrão o tipo de simetria *2222. Aquelas linhas correspondem às juntas dos azulejos, como se percebe ao olhar mais de perto (imagem do meio), vendo-se neste caso também o detalhe de cada azulejo. Entrando agora em conta não só com aquelas linhas mas também com o

detalhe dos azulejos (nessa imagem do meio), nem muda o tipo de simetria nem a região fundamental, que é um quarto do azulejo todo. Mas se tivermos em vista só o detalhe dos azulejos e pintarmos as juntas de uma cor próxima da do fundo do azulejo (imagem da direita) e as ignorarmos, o tipo de simetria muda para *442, e uma região fundamental corresponde a $1/8$ de um quadrado azul, portanto sendo 16 vezes mais pequena do que a anterior. Há, no entanto, outros casos em que as juntas dos azulejos são imperceptíveis e em que é, pois, natural ignorá-las à partida. Um caso extremo seria o de uma fachada toda com azulejos quadrados brancos, sem desenhos. Sem vermos as juntas, nem sequer temos um padrão⁶, mas com as juntas temos um *442, sendo a região fundamental $1/8$ do azulejo. Um caso em que as juntas são quase imperceptíveis é o representado na imagem da esquerda, na figura 13. Nessa figura estão também representadas: a imagem de um azulejo, tratada de forma a melhorar a qualidade do desenho; uma imagem com si-

⁴ Seria interessante que a autarquia de uma localidade com abundância de azulejos indagasse da possibilidade de produção económica de azulejos hexagonais e promovesse a produção de tais azulejos, para vir a poder, dentro de algum tempo, incluir na informação ou num roteiro cultural a indicação de que já estavam representados na localidade todos os tipos de simetria existentes de padrões com azulejos...

⁵ Mesmo considerando só azulejos sem relevo, a visibilidade depende da folga deixada entre azulejos e do contraste entre a cor do material de remate e a cor de fundo do azulejo (por vezes branco com azulejos de fundo escuro).

⁶ Recorde-se que o Atractor sempre usa a palavra *padrão* no sentido de duplamente periódico.



Figura 12.

metrias assinaladas (reflexões de eixos perpendiculares entre si passando pelos centros das flores e rotações de meia-volta) e também com o carimbo resultante, um cone de bordos espelhados. Finalmente, a última imagem da figura 13 mostra o que aconteceria se as juntas tivessem sido assinaladas com destaque: desapareceriam todas as simetrias com eixos de reflexão descendentes para a direita; das crescentes para a direita, ficariam as que passam pelos cantos do azulejo e as outras dariam lugar a reflexões deslizantes: o carimbo seria uma tira de Möbius de bordo espelhado.

O gráfico de barras da figura 14 permite comparar as

frequências com que aparecem, entre os dados até agora tratados para Ovar, os diferentes tipos de simetria, desde o mais frequente (*442 ou p4m) com 38.8% até outro (22x ou pgg) com 0%. Na coluna mais à esquerda estão indicados os 5.1% que foram classificados *sem simetria*. A figura representa o gráfico (de [1]) no momento em que se clicava na barra correspondente a *2222 (ou pmm).

Como nota final, vejamos exemplos de casos classificados como sem simetria. Um dos primeiros encontrados foi o da figura 15, que mostra o azulejo e uma fotografia da fachada. O azulejo não tem simetria de rotação e é por isso importante o modo como ele é colocado, se se quiser



Figura 13.

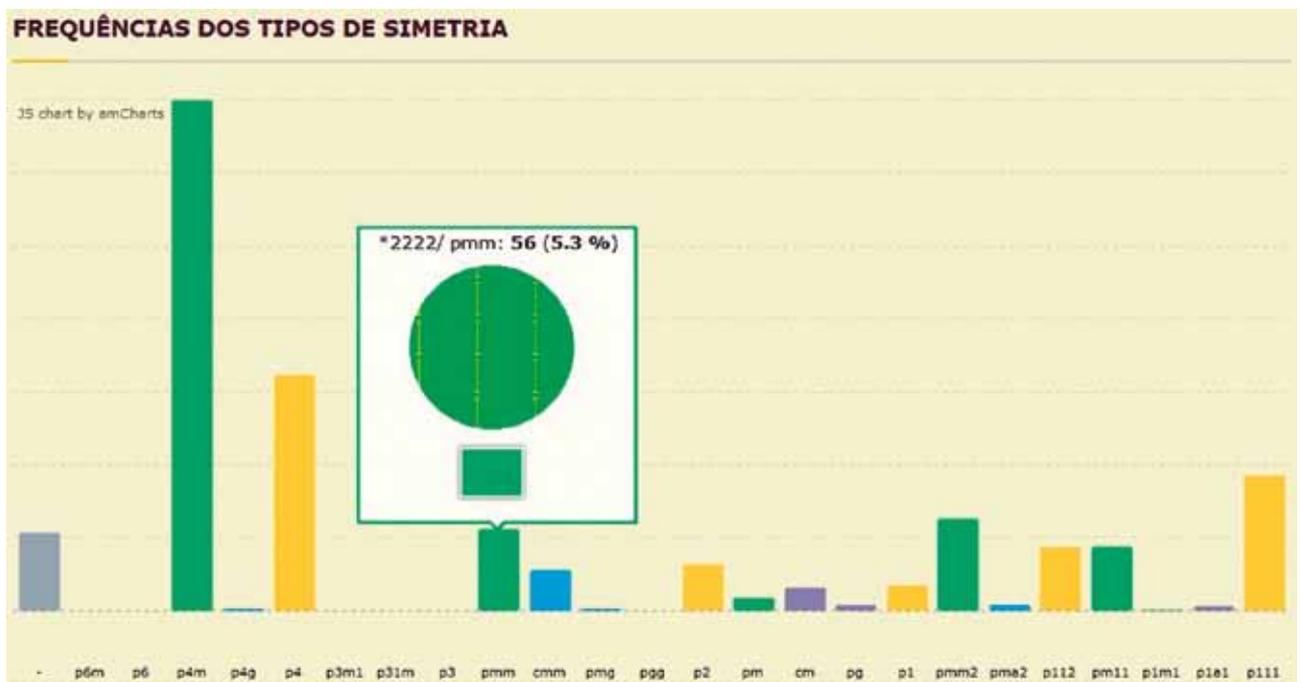


Figura 14.

produzir um padrão. Ora uma análise cuidada da fotografia mostra que o assentamento do azulejo foi aparentemente aleatório, encontrando-se a mesma região do azulejo virada para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda sem qualquer regra identificável. Em particular, também não foram identificadas translações que respeitem o modo de assentamento do azulejo. Outros problemas do mesmo tipo surgem, não surpreendentemente, com azulejos como os representados na figura 16. O desenho muito irregular levanta logo a questão de saber se ele varia de azulejo para azulejo. A resposta é negativa, portanto, havendo cuidado no assentamento, é possível criar padrões com vários tipos de simetria, embora essa simetria seja muito mais difícil de identificar visualmente. Mas, na verdade, nos exemplos analisados não se verificou nenhuma preocupação no assentamento, o que, aliás, é mais compreensível com imagens deste género.

Finalmente, há outro tipo diferente de zonas sem simetria: aquelas em que os azulejos são todos intencionalmente diferentes. Um muito frequente, representado na figura 17, é o formado por azulejos com um retângulo claro para o qual aparentemente foram enviados chapiscos coloridos, diferentes de azulejo para azulejo. Como essas diferenças entre os azulejos foram intencionais e não devidas a imperfeição no desenho, as zonas das fachadas foram classificadas como sem simetria: não há nenhuma translação (diferente da identidade) que não altere o aspeto da zona em questão.

O Atractor tem a intenção de, após a conclusão do tratamento dos dados existentes, acrescentar ao portal [1] algum material introdutório que facilite o eventual uso por alunos de escolas da região e sugerir alguns roteiros comentados que possam ser utilizados por visitantes com interesses culturais.

[1] www.atractor.pt/mat/matematica_azulejos2



Figura 15.

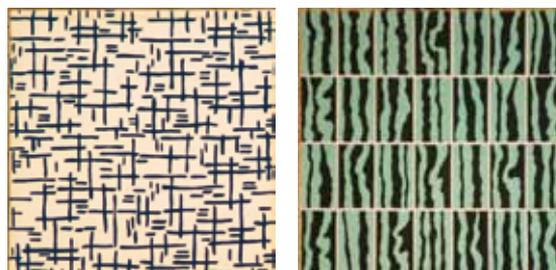


Figura 16.



Figura 17.



A FONTE ETERNA DO MESTRE

Martin Gardner nasceu em 21 de outubro de 1914. Desde a sua morte, em 2010, que a sua vida é celebrada globalmente, no movimento *Celebration of Mind*, mediante palestras, workshops, sessões de problemas, jogos, magia, etc. A vida intelectual de Gardner foi variada e o CoM reflete isso mesmo. Temos sempre honrado esta homenagem e este ano não é exceção. Martin Gardner foi celebrado durante a Feira da Matemática, que decorreu no MUHNAC nos dias 19 e 20 de outubro. É ainda da vasta coleção de recreações que nos deixou que seleccionámos os desafios de hoje.



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa

jnsilva@cal.berkeley.edu

DIVIDIR IRMÃMENTE. Dois irmãos resolvem vender um rebanho de ovelhas, propriedade comum de ambos. Curiosamente, cada ovelha rende um número de euros igual ao número de ovelhas no rebanho. O comprador paga em notas de €10 mais trocos (os trocos correspondem a um valor inferior a €10).

Para efetuar uma divisão equitativa do dinheiro, os irmãos começaram por, alternadamente, retirar uma

nota de €10, começando o mais velho. Acontece que a última nota também coube ao irmão mais velho, pelo que o mais novo se queixou. O mais velho deu-lhe os trocos todos, mas nem mesmo assim o mais jovem parou o seu protesto. Então, o mais velho disse-lhe: “Vou passar-te um cheque com a quantia que te devo para ficarmos iguais.”

De quanto era o cheque passado pelo irmão mais velho ao mais novo?



MOEDAS MUITO ÚTEIS. A moeda japonesa de ¥1 pesa exatamente um grama e o seu diâmetro mede dois centímetros.



É fácil ver como, dispondo de várias moedas destas, se pode pesar objetos em gramas, usando uma balança (de pratos). Também é evidente que, alinhando as moedas, podemos medir qualquer distância sobre uma reta, desde que corresponda a um número par de centímetros.

Como podemos usar as moedas para medir também qualquer distância ímpar sobre a mesma reta?

MOEDAS ESTRANHAS. As cinco moedas da figura são muito semelhantes entre si, mas sabemos que têm pesos distintos. Com uma balança de pratos, de quantas pesagens necessitamos para as ordenar por ordem crescente de peso?



Se o problema dissesse respeito a duas moedas, uma pesagem bastaria. Se fossem três, precisaríamos de três pesagens. Cinco pesagens bastam para ordenar quatro moedas.

E em geral, quantas pesagens para ordenar n moedas de pesos diferentes?

Sobre a questão do número anterior: Aplicando estratégia similar à descrita no texto, a probabilidade de vitória é de $31/32$. Em geral, se $n = 2^r - 1$ para algum r natural, a probabilidade de acerto é de $n/(n + 1)$. Note-se que esta probabilidade cresce com n (evito o ponto de exclamação para evitar confusões com o fatorial de n).



Visite o site da
Gazeta de Matemática.

www.gazeta.spm.pt

Para aceder à área reservada a assinantes,
solicite o seu código de subscrição através
do e-mail gazeta@spm.pt

O ALBERTO DESCOBRE UMA FAMOSA CURVA



ALEXANDER
KOVÁČEC
Universidade
de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

Sócrates maça o escravo de Meno com questões, até que ele descubra por si sozinho a relação entre comprimento de lado e área dum quadrado; Galileu, no seu *Diálogo*, deixa discutir Salviati, Sagredo e Simplicio sobre dois sistemas do Mundo; e Polya interpela no seu livrinho *Como Resolver Problemas* por intermédio dum professor um simples 'aluno'. Todos têm um mesmo objetivo: pela técnica de questões criteriosamente escolhidas e argumentos pro e contra, aproximam os parceiros da conversa, pouco a pouco, ao reconhecimento de factos científicos. Levamos assim o Alberto à descoberta da catenária! Não é preciso muito mais do que o que está nos programas de Física e de Matemática A do Secundário.

Professor (P): Caro Alberto, visto que tanto te interessas pela física como pela matemática e já leste até sozinho um pouco num manual de Análise Matemática, como sempre fazem alguns Délficos, levo-te estes dias à descoberta da equação da catenária: daquela curva que é assumida por uma corrente fixada em dois pontos e que, de resto, livremente está pendurada numa parede vertical.

Alberto (A): Isto deve ser complicado. Não faço ideia de como eu podia, com os meus modestos conhecimentos, chegar a descobri-la! Mas a curva tem importância. Vemo-la nas linhas de alta tensão, nos cabos que fixam os barcos aos cais, etc. Parecem-me parábolas.

P: Já Galileu (1564-1642) suspeitava de que talvez fossem parábolas. Mas não é assim tão simples: a equação correcta da catenária foi descoberta apenas 50 anos após a sua morte. Experimenta em casa. Marca o vértice (o ponto mais baixo da corrente) e traça uma parábola que passe pelo mesmo vértice e os dois pontos fixos duma catenária, e compara as curvas.

A, um dia depois: Fiz como sugeriu; nas várias experiências, as diferenças são mínimas. A corrente está quase sempre um pouco abaixo da correspondente parábola. Por isso, se calhar, as diferenças não são todas atribuíveis a imperfeições da corrente ou a imprecisões com que tomamos medidas.

P: Estás a ver! Um cálculo exato deverá também levar a uma fórmula cujo gráfico se aproxima de baixo à parábola. Vamos então matematizar o assunto. Já te mencionei o que fazemos quando um problema parece ser demasiado complexo...

A: Pois. Disse-me que devemos pensar num problema mais simples...; um análogo...; ou algum problema que tenha algo a ver com aquilo que queremos resolver.

P: E então...

A: Bom, podemos, por exemplo, pensar num fio de peso negligenciável e alguns pesos fixados nele. Isto vai dar de

certeza uma linha quebrada. Talvez isto ajude... para clarificar a situação?

P: Boa ideia! Quantos pesos queres pendurar?

A: Disse-nos que devemos pensar na situação mais simples que não seja imediatamente evidente.... Ora, se eu puser apenas um peso, então acho que, independentemente do peso, a linha quebrada vai ser sempre a mesma – enquanto o fio não rebentar, claro. Por isso, opto por dois pesos.

P: Mas mesmo com um só peso, podemos perguntar-nos que forças o mantêm no sítio onde está.

A: A pergunta parece-me um pouco estúpida... – peço desculpas – ... Está onde está porque, se o peso é fixado ou pendurado num ponto P em distância r_0 do ponto fixo A e r_1 do ponto B , digamos, P deve estar evidentemente num dos pontos de interseção das circunferências de centros em A e B e raios r_0 , r_1 , respetivamente. E, evidentemente, não pode ficar no ponto superior, pois daí iria cair.

P: Ora! Não fazemos apenas geometria! O ponto P tem alguma liberdade para se mexer, mas fica no sítio... Devíamos estranhar. Segundo Newton (1642-1727), isto acontece apenas em situações bastante especiais ...

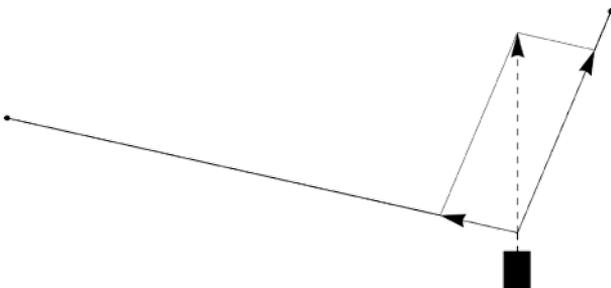
A: Pois, está bem... a soma das forças que nele atuam deve ser zero.

P: E estas são?

A: O peso puxa para baixo, mas forças transmitidas pelo fio fixado em A e B equilibram este peso.

P: E tu podes determinar estas forças segundo uma lei que já aprendeste há algum tempo!

A: Pela regra do paralelograma das forças?



P: Isso mesmo! Isto significa...?

A: Que as tensões nos fios devem ser tais que se tem a figura mostrada: a soma vetorial das forças que atuam nos fios deve ser igual ao negativo da força vertical exercida pelo peso.

P: Muito bem! Agora podemos atacar o caso de dois pesos. Este caso é, de facto, mais complicado; a linha quebrada que o fio vai assumir não depende apenas das distâncias $|AP_1|$, $|P_1P_2|$, $|P_2B|$, mas sobretudo também da magnitude dos pesos. Introduz uma notação que seja facilmente generalizável para n pesos, se possível.

A: Bom. Para tratar dos pesos "em pé de igualdade" vou denotar os pontos fixos A , B por P_0 e P_3 – pois, em equilíbrio, parece-me que quaisquer dois pontos dos P_i podiam ser aqueles onde fixo a corrente – sem que o troço entre eles se modifique relativamente à situação anterior. A força que "puxa" o ponto P_i para P_{i+1} vou escrever como vetor $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$. Vai ser, portanto, um vetor paralelo a $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$; ou seja, algum múltiplo real positivo deste vetor.

Estou já a pensar em cálculos que faremos num sistema cartesiano com eixo yy orientado no sentido contrário da força gravítica.

P: OK. Parece-me razoável. E como queres escrever a força vertical que atua no i -ésimo ponto?

A: Se o peso, enquanto escalar positivo, for p_i , o vetor que indique a correspondente força deve ser escrito $\vec{p}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_i \end{pmatrix}$, pois não tem componente horizontal; e, sua componente vertical é em sentido contrário do eixo yy . Este facto é indicado pelo sinal negativo.

P: Muito bem. São escolhas notacionais simples e naturais. Usando a tua notação, o facto de que em equilíbrio o ponto P_1 não se mexe significa o quê?

A: Significa que a soma das forças que sobre ele atuam é o vetor zero. Ou seja, significa que temos algo como

$$? + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

P: E não sabes o que pôr no lugar com o "?" ?

A: Não.



Fonte da Imagem:
<https://www.wikihow.it/Giocare-con-i-Cani#/media:Play-With-Dogs-Step-15.jpg>

P: Ora pensa: quando brincas com o teu cãozinho, tu puxando numa extremidade duma corda, ele na outra, os dois ficam em equilíbrio porque...

A: ... porque nós dois puxamos com a mesma força em sentidos contrários. Não é assim?

P: Pois! E, segundo as tuas definições, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ indica a força exercida no ponto P_0 em direção a P_1 . Agora deve ser claro como a equação para o ponto P_1 se lê. A equação para o ponto P_2 será análoga.

A: OK. Portanto as equações vão ser, julgo eu:

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

E se tivéssemos mais pontos a considerar, teríamos mais tais equações. Mas assim entram cada vez mais incógnitas x_i, y_i .

P: Pois, parece assustador. Mas olha para as equações. Em princípio, podes expressar qualquer $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ só.

A: É verdade! Da primeira equação, obtenho $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; e substituindo isto na segunda equação, obtenho $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Assim

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + p_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + p_1 + p_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

P: Portanto, tens agora, como sendo as únicas indeterminadas, apenas as entradas de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Ora, não te esqueças, os $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ são os vetores das tensões nos fios. Mas o que sobretudo nos interessa são as posições dos vértices P_1, P_2, \dots do polígono...

A: Mas noto que x_0, y_0 ainda ficam indeterminados...

P: Bom, as equações obtidas são genéricas. São válidas

para quaisquer fios com dois pesos, sejam quais forem as suas posições, sejam quais forem as suas magnitudes...; e sejam quais forem os pontos onde a corrente é fixada.

A: Estou a ver. Portanto, devemos dar tanto as posições A, B , ou seja de P_0 e P_3 dos pontos fixos como os comprimentos r_0, r_1, r_2 dos troços, como, finalmente, os próprios pesos p_1, p_2 . Só dado todo este *input* em forma numérica podemos calcular a linha poligonal que o fio irá assumir.

P: Pois. E, supondo isto tudo conhecido, como podes saber os vértices?

A: Já sabemos que as forças atuam segundo a orientação dos troços; ou seja, $\overrightarrow{P_0P_1}$ será paralelo a $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{P_1P_2}$ será paralelo a $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, etc. Mas são vetores de forças; a sua norma tipicamente não reflete os comprimentos dos troços.

P: Ora se tens um vetor não nulo qualquer, como podes dar-lhe o comprimento desejado sem mudar a sua orientação?

A: Divido o vetor pela sua norma e depois multiplico-o pelo o comprimento que quero. E a norma de um vetor é dada pela raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes.

P: Então, obténs para os vértices da linha poligonal que equações?

A: Obtenho P_1 adicionando a P_0 o vetor de direção $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e de comprimento r_0 . P_2, P_3 obtenho de formas análogas e assim tenho o sistema

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{r_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ P_2 &= P_1 + \frac{r_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ P_3 &= P_2 + \frac{r_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

P: Ora P_3 é, no nosso exemplo de dois pesos, igual a...

A: É igual a B . Portanto, será também dado.

P: Exatamente. Assim podes agora, em princípio, calcular a tua linha poligonal. Escreve uma equação cuja solução te permita calcular a posição dos vértices!

A: Bom, vejo que $x_0 = x_1 = x_2$, e $y_1 = y_0 + p_1$, $y_2 = y_0 + p_1 + p_2$. p_1 e p_2 conheço. Por isso, sabendo

também o vetor $\begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$, isto é,

$B - A = P_3 - P_0 = (P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) + (P_1 - P_0)$,
obtenho do sistema acima uma equação vetorial. Se eu introduzir a expressão

$$D(x, y) = \frac{r_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{r_1}{\sqrt{x^2 + (y + p_1)^2}} + \frac{r_2}{\sqrt{x^2 + (y + p_1 + p_2)^2}},$$

onde escrevi x, y em vez de x_0, y_0 , tenho de resolver o seguinte sistema de equações:

$$o_1 = xD(x, y)$$

$$o_2 = yD(x, y) + \frac{r_1 p_1}{\sqrt{x^2 + (y + p_1)^2}} + \frac{r_2 (p_1 + p_2)}{\sqrt{x^2 + (y + p_1 + p_2)^2}}.$$

Por exemplo: Supondo $A = (0, 1.3)$, $B = (4.5, 2.1)$,
 $r_0 = 1.5, r_1 = 2.4, r_2 = 1.8, p_1 = 1, p_2 = 5$, temos

$$D(x, y) = \frac{1.5}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2.4}{\sqrt{x^2 + (1 + y)^2}} + \frac{1.8}{\sqrt{x^2 + (6 + y)^2}},$$

e devemos resolver o sistema seguinte em ordem a x e y .

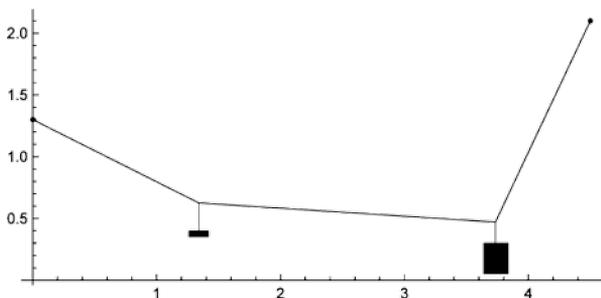
$$4.5 = xD(x, y)$$

$$0.8 = yD(x, y) + \frac{2.4}{\sqrt{x^2 + (1 + y)^2}} + \frac{10.8}{\sqrt{x^2 + (6 + y)^2}},$$

Não me parece fácil resolver este sistema.

P: Certo. Provavelmente não se pode expressar x, y de forma elementar em termos dos símbolos $o_1, o_2, p_1, p_2, r_0, r_1, r_2$. Mas se estas grandezas são conhecidas, então este tipo de sistema resolve-se com métodos numéricos; e para mais pesos existem óbvias extensões deste sistema. Em Mathematica®, por exemplo, basta escrever umas poucas linhas para o resolver. A figura abaixo foi produzida com este código, usando os valores numéricos mencionados. Podes verificar que os valores que tiras da figura resolvem o sistema. E, em casa, verifica que a Natureza chega à mesma solução!

A: Caso me torne engenheiro da construção civil, tenho aqui uma boa opção. Resultados deste género, julgo eu, podem ser úteis na construção de pontes de suspensão?



P: Com certeza! Mas voltemos ao nosso problema principal. Decorre das nossas equações uma coisa que é importante perceber: a componente horizontal das tensões que atuam no fio é em todos os troços a mesma: x_0 .

Agora imagina que todos os pesos são iguais e estão pendurados em distâncias iguais. Por exemplo: o fio tem 1 metro de comprimento e a cada centímetro colocamos um peso de 1 grama. Mais: assume que o primeiro centímetro define um troço horizontal. Diz-me os declives que teremos nos troços que definem o primeiro, o segundo, o terceiro centímetro...

A: Generalizando equações atrás obtidas, temos no caso de n pesos

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_i \end{pmatrix}, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

e o "declive" deste vetor é, portanto,

$$(y_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_i) / x_0.$$

Declive zero no primeiro centímetro significa $y_0 = 0$. Depois, temos de calcular o "declive" do vetor $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Sendo $p_1 = \dots = p_n = 1$, obtemos declive $1/x_0$, depois $2/x_0$, depois, $3/x_0$... Estou a ver: O declive cresce essencialmente linearmente com a distância percorrida ao longo da curva.

P: Viste uma coisa muito importante. O nosso arranjo assemelha-se em muito a uma corrente. A razão é que cada elo de uma corrente regular tem o mesmo peso. Se definirmos a abcissa como sendo 0 no ponto onde a catenária tem tangente horizontal, então o declive da catenária cresce linearmente com o comprimento percorrido ao longo dessa, partindo da abcissa 0.

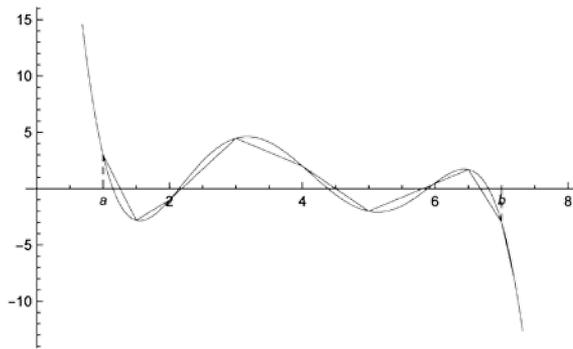
A: Ou seja, se a catenária for dada pela função $x \mapsto f(x)$, e $l(x)$ for o comprimento dessa curva até o seu ponto de abcissa x , vamos ter uma equação da forma $l(x) = c \cdot f'(x)$, onde c é um fator de proporcionalidade positivo, pois o declive cresce com o comprimento. Tal como é o caso com os nossos polígonos.

P: Exato.

A: Mas como determino $l(x)$?

P: Olha a seguinte figura do gráfico de uma função f . Concordas que o comprimento da linha poligonal inscrita aproxima bem o comprimento da própria curva?

A: Obviamente.



P: E que, portanto, é natural definir o próprio comprimento da curva como o limite de comprimentos de polígonos inscritos, se tornarmos cada vez mais curtos os seus segmentos?

A: Sim, se este limite existir.

P: OK. Aceita que para curvas suficientemente afáveis se prova que, seja qual for a sucessão de partições cada vez mais finas que consideremos, se obtém um limite bem definido e que este limite não depende da sucessão. Este limite comum define-se como o comprimento da curva. Vamos supor então que um intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos iguais; todos de comprimento $\Delta = (b - a)/n$. Seja x a abcissa de um ponto qualquer da partição. Quais são as coordenadas do ponto da curva e do seu sucessor? E qual é o comprimento do segmento que liga estes dois pontos?

A: Os pontos são $(x, f(x))$ e $(x + \Delta, f(x + \Delta))$; e segundo Pitágoras, o comprimento que liga estes pontos é dado pela raiz quadrada de $(x + \Delta - x)^2 + (f(x + \Delta) - f(x))^2$.

P: E como podemos, segundo o cálculo diferencial, representar $f(x + \Delta) - f(x)$?

A: Se f for continuamente diferenciável, então existe um ξ no intervalo $]x, x + \Delta[$ tal que $f'(\xi) = \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$.

P: Portanto, o pedido comprimento é...

$$A: \sqrt{\Delta^2 + f'(\xi)^2 \Delta^2} = \sqrt{1 + f'(\xi)^2} \Delta$$

P: E, portanto, o comprimento do polígono de, digamos n segmentos associado a f , é dado por ...

$$A: \dots \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta, \text{ onde cada } \xi_i \text{ é um ponto ade-}$$

quado no i -ésimo intervalo.

P: E, como dissemos, quando n vai para infinito, estas somas convergem. Elas dizem-se...

A: Somas de Riemann!

P: E, como convergem, o limite escreve -se no caso do intervalo considerado $[a, b]$ por...

$$A: \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

P: Portanto, se medirmos o comprimento da curva do ponto 0 até ao ponto x , e, a partir de agora voltando a supor que f representa a catenária, teremos para o teu $l(x)$:

$$A: l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

P: Muito bem, estamos a aproximar-nos do fim. Relativamente à função integranda $\sqrt{1 + f'(t)^2}$, a função $l(x)$ é uma...

A: Primitiva!

P: Aprendeste um teorema que se diz teorema fundamental do cálculo. Se derivarmos a primitiva l em x , obtemos o quê?

$$A: \text{Obtemos } l'(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

P: Por outro lado, $l'(x)$ é, segundo tua equação inicial $l(x) = cf'(x)$, acima encontrada igual a ...

A: $cf''(x)$. Ah! Portanto, a nossa função f satisfaz a equação $cf'' = \sqrt{1 + f'^2}$, e portanto também a equação

$$*_0 : c^2 f''^2 - f'^2 = 1.$$

Alguém uma vez me disse que uma tal equação em que entram derivadas de funções diz-se uma equação diferencial.

P: Certíssimo! Agora, como ainda não aprendeste métodos sistemáticos para resolver tais equações, deves usar os poucos conhecimentos que tens e a imaginação para a resolver. Repara que do lado direito da equação $*_0$ está uma constante. Se derivas $*_0$ mais uma vez, obténs, portanto...?

A: Segundo a regra do produto e porque constantes têm derivada 0, obtenho,

$$c^2 2f''f''' - 2f'f'' = 0, \text{ ou seja, } f'''(c^2f''' - f') = 0.$$

Isto significa que para cada x temos $f''(x) = 0$ ou $c^2f'''(x) - f'(x) = 0$. Mas acima vimos $c^2f''' = \sqrt{1+f'^2}$, o que é evidentemente positivo.

Por isso, temos

$$*_1 : c^2f'''(x) - f'(x) = 0.$$

E agora?

P: Lembra-te: se não sabemos fazer progressos,...

A: ... olhamos, por exemplo, para casos especiais. Acho muito estranho a derivada de f ser múltiplo de uma outra derivada de f . Mas, espere lá! Quando falámos da função exponencial achei muito curioso que exista uma função, e^x , que é igual à sua própria derivada. Assim é claro que, para $c = 1$, e^x é uma solução. Possivelmente, alguma modificação de e^x resolve a equação?

P: Então brinca um pouco!

A: A modificação mais óbvia de e^x é $f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$. Neste caso, obtemos $f' = \alpha\beta e^{\beta x}$, $f'' = \alpha\beta^2 e^{\beta x}$, $f''' = \alpha\beta^3 e^{\beta x}$. Substituindo estas derivadas na equação $*_1$, obtemos $(c^2\alpha\beta^3 - \alpha\beta)e^{\beta x} = 0$, ou seja, $c^2\beta^2 = 1$, pois supondo $\alpha\beta = 0$, obtemos apenas que f é constante; solução que evidentemente podemos descartar. Assim, $c\beta = 1$ ou $c\beta = -1$. Portanto para $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ quaisquer, as funções $f_1 = \alpha_1 e^{x/c} + \gamma_1$ e $f_2 = \alpha_2 e^{-x/c} + \gamma_2$ são soluções de $*_1$.

P: Pode dizer isto de forma mais elegante usando o conceito da "combinação linear"?

A: Parece-me claro que toda a combinação linear das funções base 1, $e^{x/c}$, $e^{-x/c}$, ou seja, qualquer função da forma $\gamma + \alpha_1 e^{x/c} + \alpha_2 e^{-x/c}$, resolve a equação. Isto é devido a que a k -ésima derivada de uma combinação linear de funções suficientes vezes diferenciáveis é a combinação linear das k -ésimas derivadas destas funções com os mesmos coeficientes. Fiz exercícios relativamente a questões deste género nas páginas 322 e 368 em [6].

P: Muito bem. A tua observação relativamente a $*_1$ é correta porque nesta equação não entram quadrados nem potências superiores de derivadas de f . A equação $*_1$ é linear homogénea de ordem três e de coeficientes constantes. Sabes de [6] se calhar que tais equações têm um espaço

de solução de dimensão três; portanto, a solução por ti proposta é a geral. E agora lembra-te de duas coisas: obtivemos a equação $*_1$ porque derivámos $*_0$. Mas queríamos resolver esta última equação. Sabemos apenas que toda a função três vezes diferenciável que satisfaz $*_0$ satisfaz $*_1$. Mas pode haver funções três vezes diferenciáveis que satisfazem $*_1$ mas que não satisfazem $*_0$. Em segundo lugar podemos esperar fórmulas mais "limpas" se procurarmos aquelas soluções de $*_0$, que também tenham tangente horizontal no ponto $x = 0$. Pois destas fórmulas podemos esperar que mostrem a simetria da catenária, clara por razões físicas, também a nível formal.

A: Está bem. Se eu considerar a solução geral

$$f = \gamma + \alpha_1 e^{x/c} + \alpha_2 e^{-x/c},$$

obtenho

$$f' = \frac{\alpha_1}{c} e^{x/c} - \frac{\alpha_2}{c} e^{-x/c} \text{ e } f'' = \frac{\alpha_1}{c^2} e^{x/c} + \frac{\alpha_2}{c^2} e^{-x/c}.$$

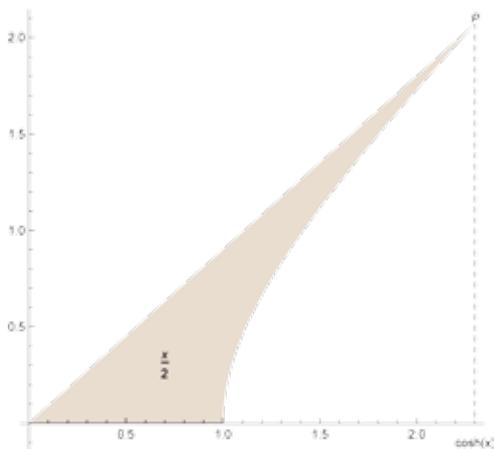
Substituindo estas derivadas em $c^2f'' - f'^2 = 1$, então muita coisa se corta e fica $4\alpha_1\alpha_2 = c^2$. Agora, querendo tangente horizontal em 0, $f'(0) = 0$, ou seja, $\frac{\alpha_1}{c} e^{0/c} - \frac{\alpha_2}{c} e^{-0/c} = 0$. Assim $\alpha_1 = \alpha_2$, logo $\alpha_1 = \pm \frac{c}{2}$.

E assim a nossa curva é dada por

$$f = \frac{c}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c}).$$

Os parâmetros γ , que suprimi, e c , não têm importância maior do ponto de vista teórico. São determinados, se bem entendo ideias anteriores, pelo comprimento do fio e os pontos onde este está fixado. Mais um parâmetro não aparece devido ao requerimento $f'(0) = 0$!. Este permitiria transladar a catenária ao longo da horizontal. Também noto que a outra escolha para α_1 dava, face a que $c > 0$, uma curva virada para baixo, o que evidentemente não é o caso. Se bem que num planeta com força gravítica repelente pudesse ser...

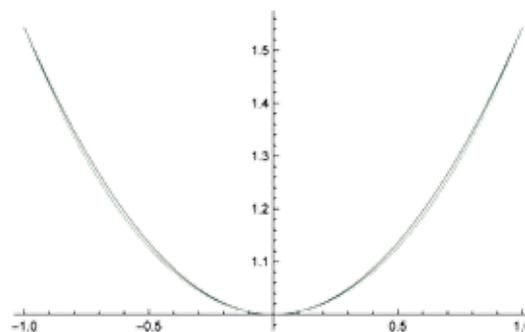
P: Fantástico! Esta equação é, de facto, a da catenária. Foi encontrada em resposta a um desafio de Jakob Bernoulli, em 1691, por Leibniz, Huyghens e Johann Bernoulli, dos maiores luminares do século XVII. Pondo $c = 1$, obtém-se a função $\cosh(x) = 1/2(e^x + e^{-x})$, que se diz cosseno hiperbólico de x , nome que provém do facto de que, se $x/2$ define a área sombreada limitada por uma hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, o eixo xx , e uma reta pela origem, tal como na figura mostrada, então $\cosh(x)$ é o comprimento do segmento da origem até à projecção do ponto P , interseção de reta e curva, sobre o eixo xx . Nota que o cosseno usual $\cos(x)$ podia ser analogamente



definido usando a área de um setor circular em vez do usual comprimento de um arco. O nome "catenária" aliás provém do latim "catena", que significa corrente.

A nossa dedução da catenária não é particularmente elegante. Saltámos a discussão de algumas subtilezas e podíamos ser acusados aqui e ali de falta de rigor. Mas foi mais importante mostrar-te os princípios que fundamentam a sua dedução e incentivar-te a fazer o uso máximo dos teus ainda modestos conhecimentos: numa palavra, treinar-te na resolução de problemas e acreditar nas tuas capacidades. Modernas deduções (ver, e.g. [1, p. 480]), chegam muito cedo a uma equação diferencial – usualmente diferente da nossa – e resolvem-na doutra maneira. Pode deduzir-se a catenária também de forma inteiramente diferente invocando os princípios mínimos da Natureza. No caso presente procurar-se-ia a curva cujo baricentro tenha, dadas as óbvias restrições, a menor altura possível – ou seja, a curva que tenha energia potencial mínima – e aplicava-se o cálculo das variações, uma fascinante área da matemática criada por Euler (1707-1783) e Lagrange (1736-1813). Alguma da sua matemática e da sua história é contada em [4], [5]. A catenária tem várias ligações com outros objetos geométricos interessantes: Por exemplo, se perguntarmos qual a curva por dois pontos fixos que, por rotação em torno do eixo xx , gera uma superfície de área mínima, a solução, encontrada por cálculo das variações, é uma catenária. A evoluta da catenária, obtida cortando-a no seu vértice, define uma curva chamada tractriz, porque esta também se obtém puxando uma extremidade dum fio ao longo do canto de uma mesa, sendo que na outra extremidade está fixado um peso que escorrega sobre a mesa. A tractriz, por sua vez, quando rodada em torno desse canto, define uma superfície de revolução, dita pseudosfera, que tem curvatura gaussiana negativa constante. É a superfície "oposta" de uma esfera. E a pseudosfera

foi usada em 1868 por Eugénio Beltrami (1835-1900) para construir um dos primeiros modelos de uma geometria não-euclidiana e, assim, definitivamente mostrar a sua existência... E talvez mais ligações surpreendentes existam! Bom, fiquem estes tópicos para vindouros estudos teus. Despeço-me por hoje, mostrando-te que uma parábola que tem as mesmas extremidades e o mesmo vértice que uma catenária fica muito perto dela: a catenária é a curva verde por baixo da parábola preta. Por números, por exemplo, $\cosh(0.6) = 1.1854$, enquanto a associada parábola $t \mapsto 0.543t^2 + 1$, tem no ponto 0.6 o valor 1.1954. (Atenção: A interseção dos eixos está no ponto $(0, 1)$, $\cosh(x)$ não passa por $(0, 0)$.)



REFERÊNCIAS

- [1] A. S. Alves, *Mecânica Geral*, Coimbra, 1988.
- [2] *Metas curriculares para o Ensino Secundário Matemática A. 12º ano*. Caderno de Apoio. A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura, M. C. Timóteo. Ver em particular as páginas 56, 58, 68, 71.
- [3] A. Kovačec, "Justificação Matemática da Regra do Paralelograma na Física", *Gazeta de Matemática* 165, 2011.
- [4] A. M. F. Louro e D. F. M. Torres, "Computação simbólica em Maple no Cálculo das Variações", *Boletim da SPM*, 59, 2008.
- [5] H. Sussmann, "J. C. Willems: 300 anos de controlo ótimo: da braquistócrona ao princípio do máximo", *Boletim da SPM*, 45, out. 2001.
- [6] A. P. Santana, J. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, 2010.
- [7] en.wikipedia.org: sabe todo o resto.



FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

SOL E LUA À BEIRA-MAR

Escrevo estas linhas no final do verão. Verão é, evidentemente, sinónimo de praias. Para melhor aproveitar as horas à beira-mar, recomenda-se ter em mente o horário das marés. Afinal, uma maré alta significa uma estreita faixa de areia, enquanto na maré baixa temos mais espaço para esticar as pernas ao sol. Hoje, vamos, então, falar das marés. Um assunto que nos permite ir longe no espaço, sem sair do nosso areal favorito.

O nível do mar sobe e desce periodicamente, num movimento conhecido como *maré*. Conhecer a sua dinâmica em detalhes é fundamental para a navegação, a administração portuária, as pescas, etc. Mas também é fundamental para o lazer à beira-mar, seja para esticar as pernas num areal espaçoso, para um bom mergulho ou para prever a hora das melhores ondas.

A cada dia temos, em geral, duas marés altas e duas baixas. Numa primeira aproximação, a maré alta se dá-se ao longo da linha que une a Terra à Lua, enquanto a maré baixa ocorre na direção perpendicular. Vamos começar por discutir por que é assim. Veja, também a referência [1] para mais detalhes, em particular para o efeito fora do eixo que une os centros de massa.

Tanto a Lua quanto a Terra estão a rodar, e fazem-no na mesma direção. Imagine o nosso veranista olhar para o sol a pino ao meio-dia. Vinte e quatro horas depois, no mesmo local, estará novamente o sol a pino. A Lua, no entanto, esteve a rodar em torno da Terra e portanto já não se encontra no mesmo lugar. De facto, estará um pouco à frente. Logo, todos os efeitos que se devam à Lua, mesmo que apenas parcialmente, precisarão de um pouco mais de tempo para se repetirem.

Para estimar o tempo desta repetição, vamos considerar como linha de referência o eixo Sol-Terra. Evidentemente, este não está parado – gira 360 graus por ano. No entanto, a nossa análise será simplificada se o tomarmos por referencial. A pergunta que temos de formular é: qual o ângulo α tal que, no tempo em que a Lua gira em torno da Terra por um ângulo α , a Terra roda deste ângulo, mais uma volta completa, ou seja, de $2\pi + \alpha$. Quando isto acontece, a configuração Terra-Lua repete-se. Neste referencial, a Terra dá uma volta sobre si própria por dia, enquanto uma revolução completa da Lua em torno da Terra (o chamado mês sinódico) demora 29,53 dias.

Um pouco de conta se faz necessário: sejam ω_T e ω_L as velocidades angulares da Terra e da Lua, respetivamente. Nominalmente, estas velocidades são: $2\pi/\text{dia}$ e $2\pi/\text{mês}$. O tempo necessário para se deslocar de um certo ângulo é dado pela razão entre o ângulo percorrido e a velocidade angular. Desta forma, uma repetição aproximada da maré ocorrerá quando $\alpha/\omega_L = (2\pi + \alpha)/\omega_T$, ou seja,

$$\alpha = \frac{2\pi\omega_L}{\omega_T - \omega_L} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_T}{\omega_L} - 1}.$$

Fazendo as contas, encontramos que α é aproximadamente 0,2202 radianos. Assim, uma maré de mesma tipologia (alta ou baixa) ocorre cerca de 50 minutos mais tarde a cada dia. Veja a figura 1.

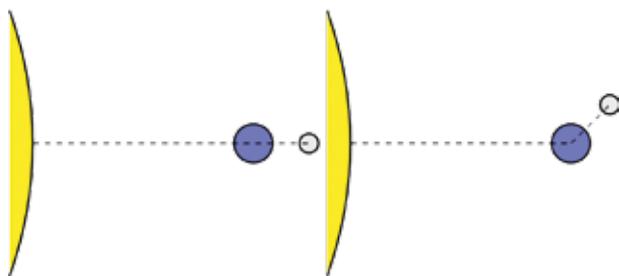


Figura 1. Num dia, o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados. Após 24h, a Terra completou uma volta sobre si mesma e adiantou-se $1/365.25$ de volta em relação ao Sol. (Podemos ignorar este último efeito rodando novamente o referencial). No mesmo tempo, a Lua roda, em relação à Terra, uma fração de $1/29.53$ de uma volta completa. A Terra tem de girar mais um pouco para alcançar a mesma configuração da última maré alta.

Vamos agora refinar um pouco a nossa análise e considerar os efeitos conjuntos do Sol e da Lua. Apesar de estar mais longe, aquele tem muito mais massa e os seus efeitos são comparáveis. A forma mais simples de modelar a configuração relativa é levar em consideração a fase da Lua, cuja importância para prever as marés é notória.

É natural imaginar que quando o Sol e a Lua *puxam* a água na mesma direção, então as marés serão maiores. É o que ocorre nas luas cheia e nova. Quando a mesma está na fase crescente ou decrescente, então a maré será menos intensa. É isto, e mais uma grande coincidência, que nos permitirá prescutar o interior do Sol e da Lua a partir das praias da costa. O nosso argumento seguirá uma ideia original de [2].

Começamos por quantificar a forças motrizes da maré. Estas estão diretamente relacionadas com a gravidade, mas não são a mesma coisa. A gravidade, uma lei universal da física, afirma que "matéria atrai matéria". A maré ocorre por as diferentes partes de um corpo extenso serem atraídas com diferentes intensidades. Efetivamente, a gravidade decai com o quadrado da distância, e desta forma as partes da Terra que estão mais próximas da Lua são atraídas com mais força do

que as que estão mais distantes. Assim, a força que causa a maré deve-se a variação da gravidade, e esta decai de intensidade com o cubo da distância, a derivada espacial da intensidade da força gravitacional. Veja a figura 2.

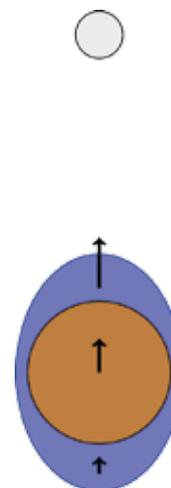


Figura 2. Efeito da Lua sobre a Terra, com uma parte rígida (em castanho) e uma parte fluida (azul), representando os oceanos. A parte mais próxima da Lua é atraída com mais força, enquanto a mais distante, com menor intensidade, sempre em comparação com a atração média, que se faz sentir no centro da Terra. Daí que a altura da linha d'água é maior tanto na região virada para a Lua, quanto na parte a esta oposta. A diferença da atração gravitacional nas diversas partes da Terra é que causa os efeitos das marés. (A bem da verdade, devido à inércia da massa d'água, a maior maré alta não se dá nem na lua cheia nem na lua nova, mas um ou dois dias depois destas, assim como, a cada dia, um atraso de alguns minutos ou horas é normal.) Para completar a figura, seria necessário incluir o Sol neste desenho.

Como a força gravitacional é proporcional ao produto das massas, então a força de maré devida ao Sol é dada por kM_S/R_S^3 , onde M_S e R_S são a massa do Sol e a distância Sol-Terra. Identicamente, a força de maré devida à Lua é dada por kM_L/R_L^3 , com M_L e L a massa da Lua e a sua distância à Terra. Em ambos os casos, k é uma constante de proporcionalidade, idêntica para ambos os sistemas.

Agora vem o ponto interessante. Vistos da Terra, a Lua e o Sol têm aproximadamente o mesmo tamanho. A partir de uma relação de semelhança de triângulos, concluímos que a razão entre o raio do Sol e a sua distância à Terra é igual à razão entre o raio da Lua e a distância desta à Terra. Podemos então escrever as forças de maré do Sol

e da Lua como $\bar{k}M_S/r_S^3$ e $\bar{k}M_L/r_L^3$, onde \bar{k} é uma nova constante, idêntica em ambos os sistemas e r_S e r_L são os raios do Sol e da Lua.

Aproximando ambos por esferas, temos que a razão entre a massa e o cubo do raio é proporcional à densidade. Assim, a força da maré é proporcional à densidade de cada dos astros. É importante notar que isto ocorre apenas porque os tamanhos aparentes do Sol e da Lua são os mesmos, um facto fortuito.

Podemos, finalmente, inferir a densidade relativa dos mesmos acompanhando as flutuações do nível do mar hora após hora, dia após dia. A figura 3 mostra a altura da linha d'água no porto de Lisboa no mês de junho de 2018, com especial ênfase para a preamar e a baixa-mar [3].

A diferença máxima entre ambas dá-se na lua nova, onde comparamos o momento em que os dois efeitos do Sol e da Lua se somam ($L+S$) com aqueles aquando da ausência de ambos. Encontramos uma diferença máxima de $L + S = 3,6$ metros no dia 14 de junho. Por outro lado, na lua decrescente, temos a comparação entre o momento

onde só há efeito da Lua (preamar) com o momento onde o único astro a atuar é o Sol (baixa-mar). Encontramos que $L - S = 1.5$ metros, no dia 7/6. Resolvendo o sistema, concluímos que os efeitos da Lua e do Sol na maré são de 2,55 e 1,05 metros respetivamente, ou seja, o efeito da Lua sobre as marés é o 2,4 vezes o efeito do Sol. Consequentemente, sua densidade média deve ser 2,4 vezes a densidade solar.

Em medidas astronómicas completamente independentes, estima-se que a densidade do Sol seja de $1,41 \text{ g/cm}^3$, enquanto a da Lua é de $3,34 \text{ g/cm}^3$. A razão é de 2,37.

Nada mau para uma conta feita à beira-mar, não é?

REFERÊNCIAS

- [1] Narayan Rana and Pramod Joag. *Classical Mechanics*. McGraw Hill India; 25th edition (2013).
- [2] R. H. Good. "Tides and Densities". *Am. J. Phys.* 68 (4), 387 (2000).
- [3] http://webpages.fc.ul.pt/~cmantunes/hidrografia/hidro_mares.html# em 27/9/2018.

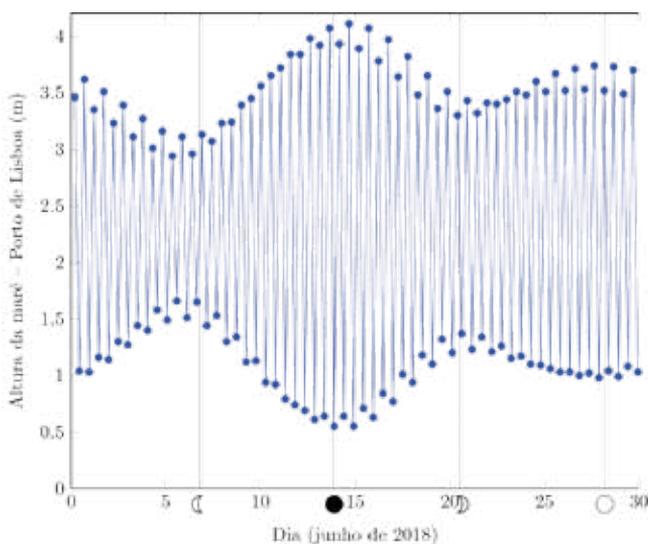
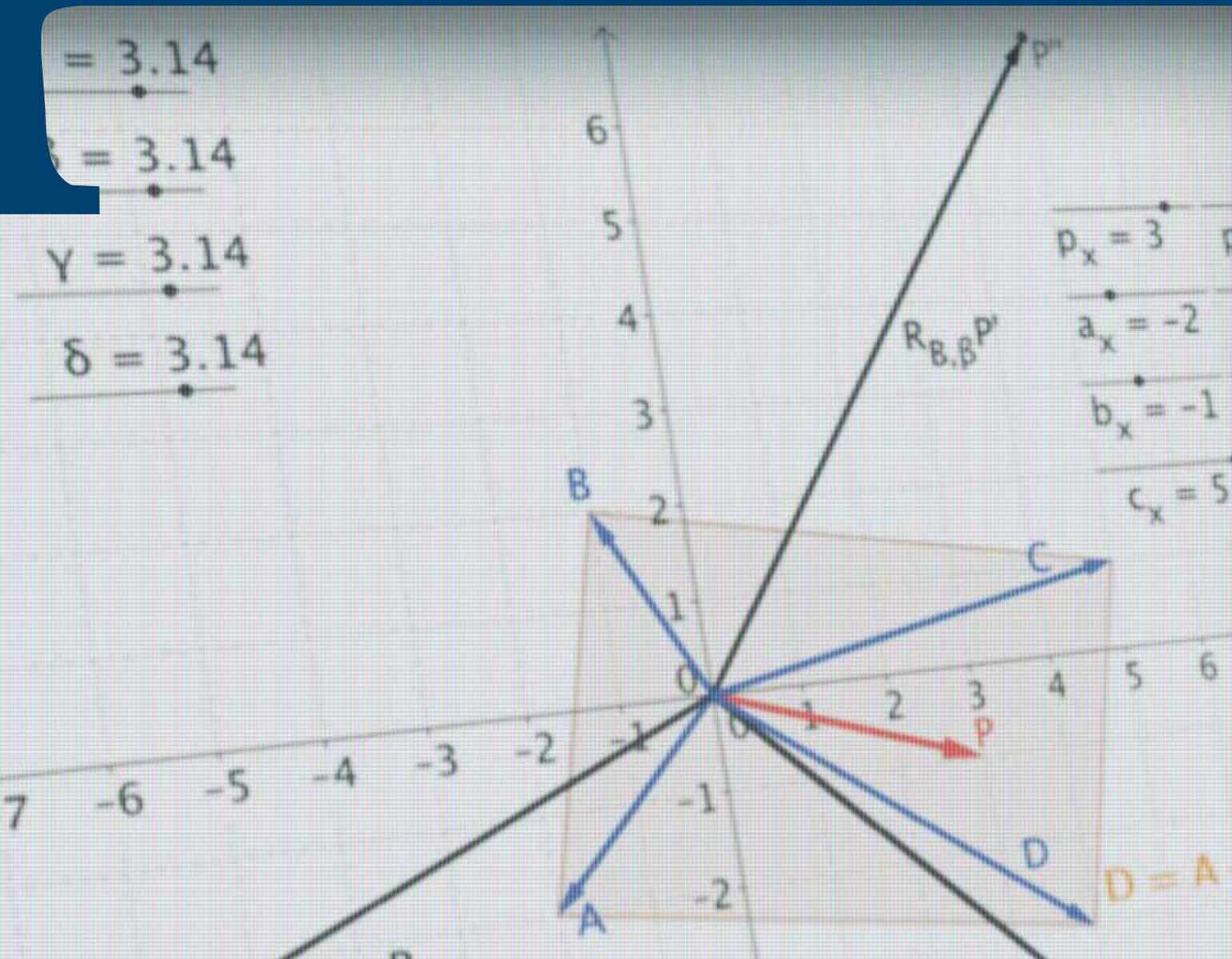


Figura3. Tabela de marés para o porto de Lisboa em junho de 2018. Note a correlação entre as fases da lua, marcadas por C, ●, O para as luas decrescente, nova, crescente e cheia, respetivamente. Veja que a cada dia, entre as marés altas, há uma que é um pouco mais alta: esta refere-se a quando estamos virados na direção da Lua. (A força de maré cai com o cubo da distância, e portanto é mais fraca na direção oposta ao astro que a causa). Repare também que na lua nova as marés são mais intensas, pois nestes dias os efeitos do Sol e da Lua somam-se.



VISUALIZANDO A COMPOSTA DE ROTAÇÕES ATRAVÉS DE UM SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

GÜNHAN CAGLAYAN

NEW JERSEY CITY UNIVERSITY

gcaglayan@njcu.edu

Normalmente, o estudo que se faz em cursos de Geometria Moderna ou Álgebra Linear sobre rotações em \mathbb{R}^2 baseia-se na sua descrição como composição de duas reflexões. Neste artigo pretendemos apresentar uma abordagem diferente, estudando a composição de rotações em \mathbb{R}^2 sem recorrer ao uso de reflexões.

1. SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Para ilustrar as várias situações consideradas neste artigo, nós construímos duas *applets* num *software* de geometria dinâmica, nomeadamente no Geogebra. Uma das *applets* é sobre a composição de duas rotações. Nessa *applet* incluímos seletores que nos permitem escolher um ponto P qualquer e obter a sua imagem pela composição de duas rotações quaisquer (ver figuras 2, 3 e 4). Note-se que os seletores p_x e p_y representam as coordenadas do ponto P , isto é, $P = (p_x, p_y)$. Situação semelhante acontece para os centros A e B das rotações. A segunda *applet* é sobre a composta de três rotações (ver figura 5). Embora neste artigo apenas se aborde a composta de três meias-voltas, a *applet* construída permite considerar qualquer caso de composta de três rotações. Este tipo de *applets* pode ser muito útil na abordagem deste tópico e de tópicos semelhantes. Elas permitem que os alunos explorem várias situações e elaborem conjecturas, antes de as tentarem provar.

2. REDUÇÃO DE ROTAÇÕES A ROTAÇÕES EM TORNO DA ORIGEM.

Dado um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ e um ângulo α , vamos denotar por $R_{(A,\alpha)}$ a matriz associada à rotação de centro A e amplitude α no sentido anti-horário, ou seja, se $P \in \mathbb{R}^2$, então $R_{(A,\alpha)}P$ é a imagem de P pela rotação de centro A e amplitude α no sentido anti-horário (note-se que, como é usual, estamos a identificar vetores com matrizes coluna). Logo, como exemplo,

$$R_{(O,\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

onde O denota a origem de \mathbb{R}^2 . Vamos convencionar que, caso nada seja dito em contrário, sempre que nos referirmos a uma rotação, estamos a considerá-la no sentido anti-horário.

Qualquer rotação em \mathbb{R}^2 pode ser reduzida à rotação centrada na origem com a mesma amplitude através de translações. A forma usual é a seguinte: se P_1 for a imagem de P pela rotação de centro A e amplitude α , isto é, se $P_1 = R_{A,\alpha}P$, então podemos obter P_1

a) começando por aplicar a translação associada ao vetor $-A$ ao ponto P , obtendo o ponto $P - A$;

b) depois aplicar a rotação de centro O e amplitude α ao ponto $P - A$, obtendo o ponto $R_{O,\alpha}(P - A)$;

c) e, finalmente, aplicar a translação associada ao vetor A ao ponto $R_{O,\alpha}(P - A)$, obtendo o ponto $P_1 = R_{O,\alpha}(P - A) + A$.

Contudo, podemos seguir uma perspetiva diferente. Note-se que

$$P_1 = R_{A,\alpha}P = R_{O,\alpha}(P - A) + A =$$

$$= R_{O,\alpha}P + (I - R_{O,\alpha})A = R_{O,\alpha}P + S_\alpha A,$$

onde I é a matriz identidade e $S_\alpha = I - R_{O,\alpha}$. Logo, podemos obter P_1

(i) aplicando a rotação de centro O e amplitude α ao ponto P , obtendo o ponto $R_{O,\alpha}P$;

(ii) e, depois, aplicando a translação associada ao vetor $S_\alpha A$ ao ponto $R_{O,\alpha}P$.

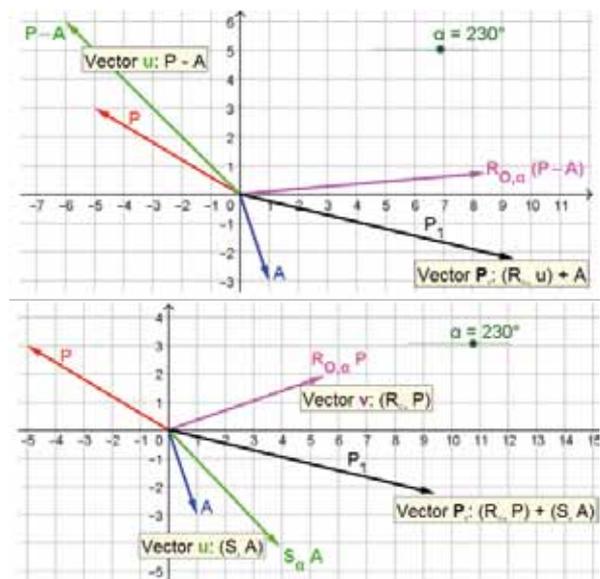


Figura 1.

3. COMPOSTA DE DUAS ROTAÇÕES

Consideremos duas rotações, digamos uma de centro A e amplitude α e outra de centro B e amplitude β . Vamos estudar a sua composição sem recorrer ao uso de reflexões. Veremos que esta composição é uma translação se $\alpha + \beta = 2\pi$ e uma rotação caso contrário. No caso da translação, veremos também que o vetor de translação pode ser descrito a partir dos pontos A e B e da matriz S_β . No caso da rotação, veremos que $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = R_{O,\gamma}P + S_\gamma C = R_{C,\gamma}P$ onde $\gamma = \alpha + \beta$ e C é um ponto que pode ser descrito a partir dos pontos A e B e das matrizes S_β e S_γ .

Note-se que

$$\begin{aligned} R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P &= R_{O,\beta}[R_{O,\alpha}P + S_\alpha A] + S_\beta B \\ &= R_{O,\beta}R_{O,\alpha}P + R_{O,\beta}S_\alpha A + S_\beta B \\ &= R_{O,\gamma}P + R_{O,\beta}S_\alpha A + S_\beta B \end{aligned}$$

Logo, como $S_\gamma - S_\beta = R_{O,\beta} - R_{O,\gamma} = R_{O,\beta}(I - R_{O,\alpha}) = R_{O,\beta}S_\alpha$, temos que

$$R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = R_{O,\gamma}P + (S_\gamma - S_\beta)A + S_\beta B.$$

3.1. Caso $\gamma = \alpha + \beta = 360^\circ$

Neste caso, $R_{O,\gamma} = I$, S_γ é a matriz nula e $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = P + S_\beta(B - A)$, ou seja, estamos na presença da translação associada ao vetor $S_\beta(B - A)$. Ilustramos este caso na figura 2.

Uma situação particular deste caso acontece quando $\alpha = \beta = 180^\circ$. Note-se que $R_{O,\beta} = -I$, $S_\beta = 2I$ e $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = P + 2(B - A)$. Estamos, portanto, na presença da translação associada ao vetor $2\vec{AB}$. Esta situação está ilustrada na figura 3.

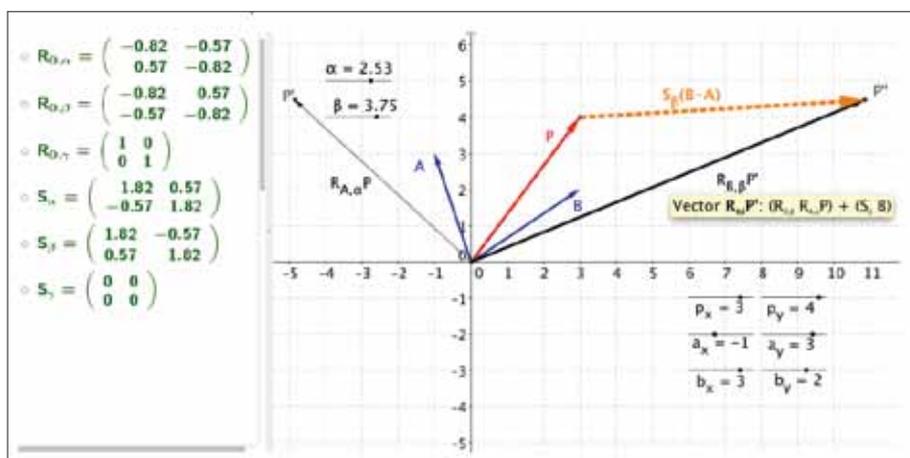


Figura 2: O efeito de $R_{B,\beta} R_{A,\alpha}$ sobre um ponto arbitrário P quando $\gamma = \alpha + \beta = 360^\circ$.

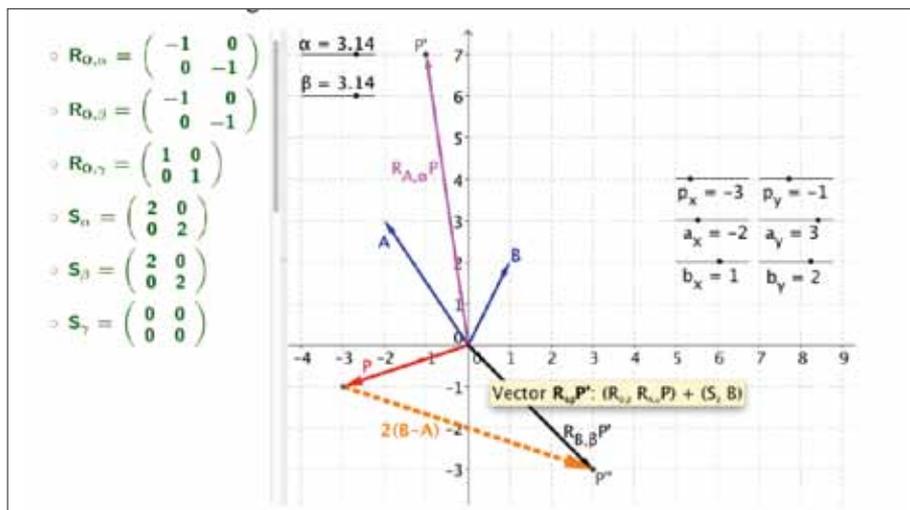


Figura 3: O efeito de $R_{B,\beta} R_{A,\alpha}$ sobre um ponto arbitrário P quando $\alpha = \beta = 180^\circ$.

3.2. Caso $\gamma = \alpha + \beta \neq 360^\circ$

Denotando por S_γ^T a matriz transposta de S_γ , temos que

$$S_\gamma^T S_\gamma = (I - R_{O,\gamma})^T (I - R_{O,\gamma}) = (I - R_{O,-\gamma})(I - R_{O,\gamma}) \\ = I - R_{O,-\gamma} - R_{O,\gamma} + I = 2(1 - \cos \gamma)I,$$

pois $R_{O,-\gamma} + R_{O,\gamma} = 2 \cos \gamma \cdot I$. Logo, a matriz S_γ é invertível com matriz inversa $S_\gamma^{-1} = \frac{1}{2(1-\cos \gamma)} S_\gamma^T$. Se considerarmos agora $C = S_\gamma^{-1}((S_\gamma - S_\beta)A + S_\beta B)$, concluímos que

$$R_{B,\beta} R_{A,\alpha} P = R_{O,\gamma} P + (S_\gamma - S_\beta)A + S_\beta B \\ = R_{O,\gamma} P + S_\gamma C = R_{C,\gamma} P,$$

ou seja, obtemos a rotação de centro C e amplitude γ . Finalmente, vejamos melhor a descrição do ponto C :

$$C = (I - S_\gamma^{-1} S_\beta)A + S_\gamma^{-1} S_\beta B = (I - L)A + LB$$

onde $L = S_\gamma^{-1} S_\beta = \frac{1}{2(1-\cos \gamma)} S_\gamma^T S_\beta$.

Uma situação particular com algum interesse surge

quando $\gamma = \alpha + \beta = 180^\circ$. Neste caso, $S_\gamma^{-1} = \frac{1}{2}I$, pois $S_\gamma = 2I$, e $L = S_\gamma^{-1} S_\beta = \frac{1}{2}S_\beta = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}R_{O,\beta}$. Assim,

$$C = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}R_{O,\beta}\right)A + \left(\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}R_{O,\beta}\right)B \\ = \left(\frac{A+B}{2}\right) + R_{O,\beta} \left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Ilustramos esta situação particular na figura 5.

4. COMPOSTA DE TRÊS MEIAS-VOLTAS

Consideremos três meias voltas, $R_{A,\alpha}$, $R_{B,\beta}$ e $R_{C,\gamma}$, de centros A , B e C , respectivamente. Logo $\alpha = \beta = \gamma = \pi$. Pelos cálculos já efetuados em 4.1,

$$R_{C,\gamma} R_{B,\beta} R_{A,\alpha} P = R_{C,\gamma} [P + 2(B - A)] \\ = -I[P + 2(B - A)] + 2IC \\ = -P + 2(A - B + C),$$

pois $R_{O,\gamma} = -I$ e $S_\gamma = 2I$, ou seja, $R_{C,\gamma} R_{B,\beta} R_{A,\alpha} P = R_{D,\pi} P$

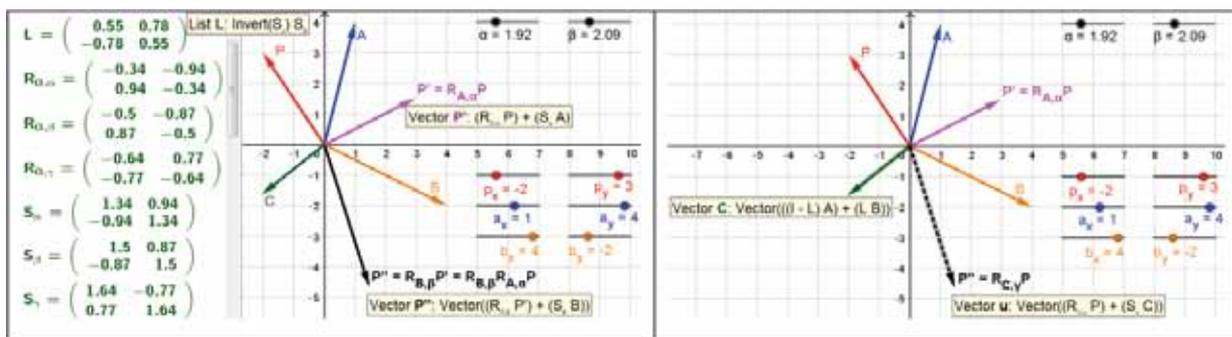


Figura 4.

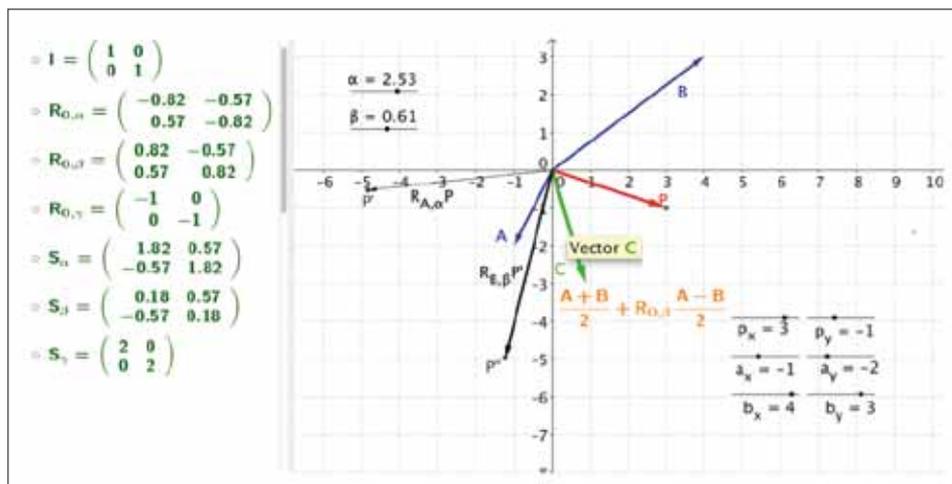


Figura 5: O efeito de $R_{B,\beta} R_{A,\alpha}$ sobre um ponto arbitrário P quando $\gamma = \alpha + \beta = 180^\circ$.

onde $D = A - B + C$. Verificamos assim que a composta de três meias-voltas é outra meia-volta de centro no ponto D . Note-se também que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Daí, que D seja o quarto vértice do paralelogramo definido pelos pontos A , B e C (se A , B e C forem colineares, então estamos a considerar um paralelogramo degenerado e D também é colinear com estes três pontos). A figura 6 ilustra este resultado.

Agradecimento: Gostaria de agradecer aos editores e revisores da *Gazeta Matemática* pelos seus úteis comentários.

SOBRE O AUTOR

Günhan Caglayan leciona matemática na New Jersey City University. Os seus principais interesses são a visualização matemática e a aprendizagem dos alunos através da modelação e visualização.

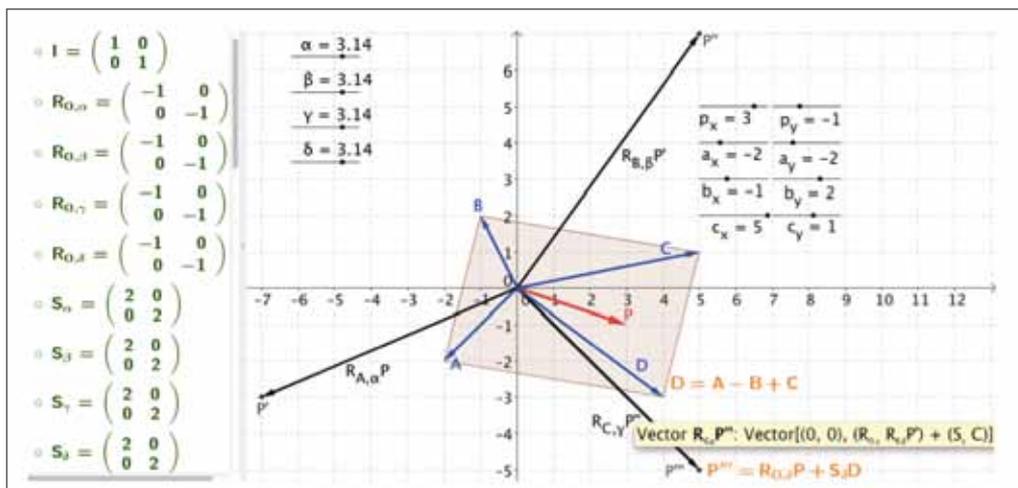


Figura 6: A composição de três meias-voltas é outra meia-volta.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

EMANUEL LASKER

Emanuel Lasker, o segundo campeão do mundo de xadrez, nasceu há 150 anos. E também foi matemático.

Há 150 anos, na véspera de Natal de 1868, nasceu em Berlimchen, na Alemanha (embora hoje em dia fique na Polónia e se chame Barlinek), Emanuel Lasker, que viria a ser o segundo campeão do mundo de xadrez e o campeão que manteve o título em sua posse por mais tempo: 27 anos, de 1894 a 1921.¹



Quando Lasker nasceu, o título de campeão do mundo de xadrez ainda não existia. No entanto, o austríaco (mais tarde norte-americano) Wilhelm Steinitz era então geralmente considerado o melhor jogador do mundo, desde a sua vitória em 1866 num *match* contra o alemão Adolf Anderssen, que era professor de Matemática no Ensino Secundário. Só em 1886 é que teve lugar o primeiro *match* pelo título de campeão do mundo, entre Steinitz e o polaco Johannes Zukertort, que terminou com a vitória de Steinitz.

Lasker revelou desde cedo grande capacidade intelectual e os pais mandaram-no estudar para Berlim aos 11 anos de idade, junto do seu irmão Berthold, que era oito anos mais velho e que viria a ser quem o ensinou a jogar xadrez. Berthold Lasker foi um jogador notável e chegou a ser um dos dez melhores jogadores do mundo, no início da última década do século XIX.²

Os estudos secundários de Lasker terminaram em 1888 e ele, em seguida, estudou Matemática e Filosofia nas Universidades de Berlim, Göttingen e Heidelberg. Mas, tal como já vinha a fazer antes de se tornar aluno universitário, continuou a jogar xadrez. Os seus resultados desportivos foram melhorando e participou no

¹Para mais informações sobre Lasker, com ênfase na matemática, veja-se <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lasker.html>

² <http://chessmetrics.com/>

seu primeiro internacional em Amsterdão, tendo ficado em segundo lugar. Logo na primeira ronda desse torneio, jogou uma das partidas mais famosas da sua carreira.³

O nível de Lasker continuou a subir. Jogou diversos *matches* e torneios no Reino Unido e nos Estados Unidos da América em 1892 e em 1893, vencendo-os a todos. Aliás, num torneio no qual participou em Nova Iorque, em 1893, Lasker ganhou *todas* as partidas, um feito extremamente raro. Nesta altura, era claro que ele era um dos três principais candidatos ao título mundial, sendo os outros o russo Mikhail Tchigorin (que já disputara duas vezes o título com Steinitz, tendo sido derrotada em ambas as ocasiões) e o alemão Siegbert Tarrasch (que tinha tido a oportunidade de disputar o título em 1892, mas que resolveu adiar a oportunidade por razões ligadas à sua profissão de médico). Por essa altura, Lasker desafiou Tarrasch para um *match*, o qual reagiu dizendo: “Este jovem deve primeiro provar o seu valor vencendo um ou dois grandes torneios internacionais. Ainda não tem o direito de disputar um *match* contra alguém como eu.” [2, cap. 4] Lasker não esteve com meias medidas: desafiou então Steinitz para um *match* pelo título mundial. As negociações levaram algum tempo, pois Steinitz exigiu um prémio bastante elevado em caso de vitória, mas acabou por baixar o valor exigido inicialmente,⁴ o que foi visto na época como um sinal de grande desportivismo (mas é possível que Steinitz estivesse desesperadamente a precisar de ganhar dinheiro). O *match* teve início a 15 de março de 1894, em Nova Iorque, continuou em Filadélfia e terminou em Montreal, a 26 de maio do mesmo ano, quando Lasker venceu ao alcançar a sua décima vitória (Steinitz só venceu cinco partidas).⁵ Tarrasch desvalorizou a vitória de Lasker, dizendo que se devia à idade de Steinitz (que tinha 58 anos nessa altura).

Após a sua vitória sobre Steinitz, Lasker participou no torneio de Hastings de 1895, que não lhe correu particularmente bem: ficou em terceiro lugar, tendo perdido partidas para Tchigorin, Tarrasch e para o campeão britânico Joseph Henry Blackburn. Por essa altura, Lasker proferiu uma série de palestras, que estiveram na base do seu primeiro livro [3], publicado em 1896. Após o percalço em Hastings, Lasker venceu dois importantes torneios, em São Petersburgo (1895/96) e em Nuremberga (1896). Finalmente, concedeu a Steinitz um *match* de desforra (em 1896/97), no qual triunfou de uma maneira ainda mais convincente do que da vez anterior (dez vitórias de Lasker contra somente duas de Steinitz).⁶

Voltemos agora à carreira matemática de Lasker, que

não esteve parada. Ainda em 1893, proferiu uma série de palestras sobre equações diferenciais na Universidade Tulane, em Nova Orleães. Dois anos depois, sendo já campeão do mundo, publicou dois artigos de matemática na *Nature*. Finalmente, doutorou-se em Matemática na Universidade de Erlangen, em 1900, sob a orientação de Max Noether. A sua tese, sobre convergência de séries, também seria publicada sob a forma de artigo, no ano seguinte.

Lasker viveu nos Estados Unidos de 1902 a 1907, mas jogou relativamente pouco xadrez nesse período. Em contrapartida, publicou em 1905 o seu resultado mais famoso, um teorema relativo a anéis de polinómios. Mais tarde, esse teorema seria generalizado por Emmy Noether, filha do seu antigo orientador de doutoramento, sendo essa generalização conhecida por teorema de Lasker-Noether.⁷

Após o *match* de desforra de 1896/97, passaram-se bastantes anos até o título de campeão do mundo de xadrez estar novamente em jogo. Mas depois houve uma série de *matches*: contra o campeão norte-americano Frank Marshall em 1907 (Lasker venceu oito partidas e não perdeu nenhuma), contra Tarrasch em 1908 (oito vitórias de Lasker contra três de Tarrasch), contra o polaco David Janowski em 1910 (tal como no *match* contra Marshall, Lasker venceu oito vezes e não perdeu nenhuma) e, ainda em 1910, contra o austríaco Carl Schlechter, tendo este último *match* terminado empatado (uma vitória para cada um e oito empates), o que fez com que Lasker mantivesse o título, pois um candidato a campeão do mundo tem de derrotar o campeão para o substituir. Este seria o primeiro *match* para o título de campeão do mundo de xadrez a terminar com um empate.

Depois disso, voltaram a decorrer bastantes anos até haver um *match* pelo título mundial. Houve negociações nesse sentido com o cubano José Raúl Capablanca e com o polaco Akiba Rubinstein, mas não deram em nada e entretanto começou a Primeira Guerra Mundial. Nos anos que antecederam a guerra, Lasker só participou em dois torneios (em 1909 e em 1914), ambos em São Petersburgo, tendo vencido os dois (no caso do primeiro torneio *ex aequo* com Rubinstein, sendo o vencedor isolado no segundo).

A guerra foi um período difícil para Lasker. Nacionalista convicto (escreveu uma brochura em 1916 a explicar como seria uma tragédia para a civilização caso o Império Alemão perdesse a guerra⁸), investiu as suas poupanças em títulos de guerra e, como o Império Alemão foi derrotado, Lasker ficou sem esse dinheiro.

Convém fazer algumas observações sobre o estilo de

Lasker como xadrezista. Um aspecto importante da sua maneira de jogar consistia na sua abordagem psicológica: tentava jogar da maneira mais desagradável para o seu oponente. Por exemplo, não jogava com um adversário que precisava desesperadamente de ganhar uma partida da mesma maneira que jogava com um adversário que se contentava com um empate. E tinha em conta o facto de o adversário preferir ou não que houvesse muitas peças em jogo (o chamado meio jogo) ou não (finais). Mas isto não bastava para explicar os sucessos de Lasker. O xadrezista checoslovaco Richard Réti defendeu em 1933 a ideia de que o segredo de Lasker consistia em procurar não aquela que era objetivamente a melhor jogada para cada posição mas sim aquela que mais incomodava o adversário, mesmo que fosse uma má jogada [5]. Lasker negou categoricamente que fosse esse o caso. De qualquer modo, começou cedo e perdurou por muito tempo a imagem de Lasker como um jogador brilhante mas incompreensível. Por exemplo, durante o *match* contra Lasker, Janowski afirmou que este jogava de uma maneira tão estúpida que ele (Janowski) nem conseguia olhar para o tabuleiro enquanto Lasker pensava. E o quinto campeão do mundo, o matemático holandês Max Euwe, afirmou:

“Não é possível aprender muito com ele. Tudo o que se consegue é apreciar e ficar maravilhado.”

Euwe sabia do que falava: enfrentaram-se por três vezes em torneios e Lasker derrotou-o em todos eles, tendo a última derrota tido lugar quando Euwe já era campeão do mundo.

Um aspecto importante da personalidade de Lasker, que contribuiu para o seu sucesso, era o seu elevado autocontrole. Tarrasch, que não perdia uma oportunidade de o criticar, afirmou uma vez que, embora Lasker por vezes perdesse uma partida, se havia algo que nunca perdia era a cabeça.

Mas voltemos à carreira de Lasker. Em 1920, este escreveu uma carta a Capablanca a abdicar do título de campeão do mundo e a transferi-lo para o cubano, mas a comunidade xadrezística não quis saber disso. Assim, em 1921 os dois enfrentaram-se em Havana, naquele que foi um dos pontos mais baixos da carreira de Lasker: estando previsto um *match* de 30 partidas, Lasker desistiu ao fim de 14, tendo já sofrido quatro derrotas e sem ter vencido uma única vez. Foi a primeira vez que um campeão do mundo perdeu o título num *match* sem vencer qualquer partida e a única em que um campeão desistiu a meio de um *match*.

Lasker era uma pessoa com interesses variados. Durante os primeiros anos após o fim da guerra, dedicou-se à Filosofia e, juntamente com o seu irmão, escreveu uma peça de teatro (que foi levada à cena). Só voltou a participar num torneio de xadrez (após ter recusado vários convites) em 1923, em Ostrava, e venceu brilhantemente, sem perder uma única partida. No ano seguinte houve um torneio muito forte em Nova Iorque, no qual participou toda a elite do xadrez mundial da época e, em particular, Capablanca e o futuro quarto campeão do mundo, o russo (naturalizado francês) Alexander Alekhine. Lasker, que era o segundo participante mais idoso (o mais idoso, Janowski, ficou em último), venceu por uma grande margem, embora Capablanca tenha tido uma espécie de prémio de consolação, ao infligir-lhe a única derrota que teve nesse torneio. Após mais um torneio no ano seguinte, em Moscovo, no qual ficou em segundo lugar (mas novamente à frente de Capablanca), Lasker preparou-se para abandonar a competição. Publicou nesse ano o seu livro mais famoso, o *Manual de Xadrez* [4]. Entretanto, tinha ficado fascinado com o *Go*, jogou bridge a nível de competição e escreveu um livro sobre esse jogo,⁹ e inventou o seu próprio jogo, chamado Lasca.¹⁰ Einstein descreveu-o como uma das pessoas mais interessantes que conheceu na fase avançada da sua vida, além de ser alguém eminentemente criativo. [2, Prefácio]

Poderia parecer que o que aguardava Lasker era uma reforma tranquila, mas não foi isso o que se passou. Os nazis chegaram ao poder na Alemanha e, aos olhos deles, Lasker era somente um judeu e nada mais (o mesmo aconteceu ao igualmente nacionalista Tarrasch).

³ https://en.wikipedia.org/wiki/Lasker_versus_Bauer,_Amsterdam,_1889

⁴ Na época, não havia nenhum organismo internacional a regulamentar o título de campeão do mundo de xadrez. Mesmo depois de a FIDE (Federação Internacional de Xadrez) ter sido criada, em 1924, ainda foi preciso decorrer cerca de um quarto de século até começar a desempenhar essa função. Antes de isso acontecer, um candidato ao título tinha de obter patrocinadores, que avançassem com dinheiro para o prémio.

⁵ Em todos os *matches* aqui mencionados (com exceção do *match* Steinitz-Anderssen) houve empates, mas na maior parte dos casos só serão mencionadas as partidas que acabaram com a vitória de um dos lados.

⁶ Ao disputar este *match* aos 60 anos, Steinitz estabeleceu um recorde, que nunca foi batido, do xadrezista mais idoso a disputar o título mundial.

⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Primary_decomposition

⁸ <https://books.google.pt/books?id=0D20kgEACAAJ>

⁹ Veja-se [1, pp. 332-363] para a carreira de Lasker como jogador de bridge.

¹⁰ <https://en.wikipedia.org/wiki/Lasca>

Emigrou para o Reino Unido e, logo em seguida, para a União Soviética, a convite do futuro Comissário da Justiça, Nikolai Krylenko, que era um fervoroso adepto de xadrez. Lasker tornou-se então cidadão soviético e foi-lhe atribuído um lugar no Instituto de Matemática de Moscovo, além de se tornar treinador de xadrez. Retomou nessa altura a sua atividade xadrezística, participando em quatro torneios internacionais de 1934 a 1936. No primeiro destes, que teve lugar em Zurique, o vencedor foi Alekhine, que já era então campeão do mundo e que, no banquete após o fim do torneio, afirmou publicamente:

“Emanuel Lasker foi meu professor toda a minha vida. Sem ele, não seria o que sou. O seu livro sobre o torneio de São Petersburgo de 1909¹¹ foi para mim uma espécie de catequese. Estudei, vez após vez, cada ideia exposta por Lasker nesse livro e há anos que o tenho comigo noite e dia. O próprio conceito de xadrez como uma forma de arte seria impensável sem Emanuel Lasker.”

Em 1935, Lasker teve o seu último resultado notável em torneios: ficou em terceiro lugar, à distância mínima dos vencedores (o soviético Mikhail Botvinnik, futuro sexto campeão do mundo, e o checoslovaco Salo Flohr), sem perder uma única partida. Este desempenho, aos 66 anos de idade, foi descrito na altura como um milagre biológico. Nos seus últimos torneios, jogados em 1936 em Moscovo e em Nottingham, terminou a meio da tabela.

Em 1937, Lasker emigrou pela última vez, para os Estados Unidos, onde viveu até à sua morte, primeiro em Chicago e depois em Nova Iorque. Estando então já demasiado idoso para participar em competições, Lasker ganhava a vida a fazer palestras e a jogar partidas simultâneas. Faleceu de problemas renais a 11 de janeiro de 1941. Sem dinheiro para pagar os próprios tratamentos, foi internado num hospital por caridade. O boletim da Federação Alemã de Xadrez nem sequer deu a notícia da sua morte.¹²

Estava-se então em plena Segunda Guerra Mundial e, naturalmente, o xadrez não era uma prioridade. Capablanca morreu três meses após Lasker e Alekhine, que perdera o título para Euwe em 1935 mas que o recuperara dois anos mais tarde, morreu no Estoril em 1946, ainda campeão do mundo. A partir dessa altura, começou a hegemonia dos jogadores soviéticos, que dominariam quase completamente o xadrez mundial nas décadas seguintes. Lasker ia-se tornando uma memória cada vez mais distante, acompanhado da sua fama

de jogador brilhante mas incompreensível. Passaram-se muitos anos e, por fim, alguns jogadores soviéticos voltaram a examinar em detalhe as partidas de Lasker e... acharam a sua maneira de jogar perfeitamente natural. Ou seja, Lasker estava décadas à frente do seu tempo. Viktor Korchnoi, um dos melhores jogadores de xadrez a não conseguir sagrar-se campeão do mundo, considerava-o o seu herói xadrezístico.¹³ E não é de espantar que o oitavo campeão do mundo, Mikhail Tal, tenha afirmado:

“O maior de todos os campeões foi, claro, Emanuel Lasker. Ele fez milagres em pleno tabuleiro.”

REFERÊNCIAS

- [1] R. Forster, S. Hansen e M. Negel (eds.), *Emanuel Lasker: Denker Weltenbürger Schachweltmeister*, Exzelsior, 2009
- [2] J. Hannak, *Emanuel Lasker: The life of a chess master*, Dover, 1991
- [3] E. Lasker, *Common Sense in Chess*, Dover, 1965
- [4] E. Lasker, *Lehrbuch des Schachspiels*, Joachim Beyer, 2012. Tradução para inglês: *Lasker's Manual of Chess*, Dover, 1960
- [5] R. Réti, *Masters of the Chessboard*, Dover, 1977

¹¹<https://archive.org/details/internationalche00lask>

¹² <http://www.chesshistory.com/winter/extra/nationalism.html>

¹³ Em [1] podem ver-se análises detalhadas feitas por Korchnoi a três partidas da fase final da carreira de Lasker.



Publicado originalmente no jornal Público, em 02/10/2018. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:

Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machia-**

velo Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^o

Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Univer-

sidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Fede-

ral Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de

Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José**

Miguel Rodrigues de Sousa Agrupamento de Escolas de Mangualde •

Lina Fonseca Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de

Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agosti-

nho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde •

Paulo Correia Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino**

Costa Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Ro-**

gério Martins Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

Fid'algo – Print Graphic Design

Rua da Nau Catrineta n 14 2^o Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE:

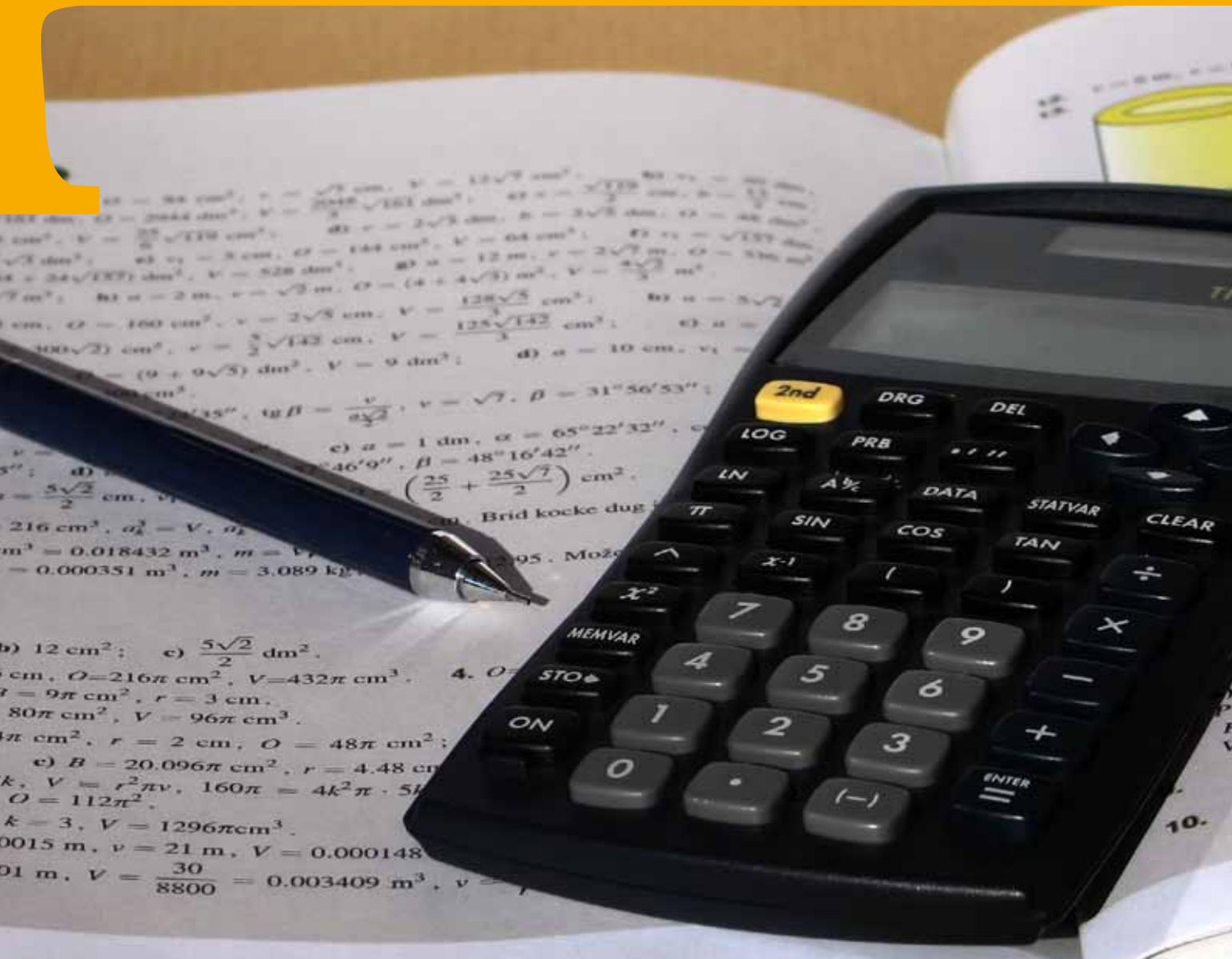
Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. República 45, 3^oEsq. 1050-187 Lisboa

Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM 1250 Exemplares

ISSN 0373-2681 • ICS 123299 • DEPÓSITO LEGAL: 159725/00



AINDA A DEFINIÇÃO DE LIMITE NO ENSINO SECUNDÁRIO

ANTÓNIO BIVAR

PROFESSOR ASSOCIADO APOSENTADO - FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

abivar@sapo.pt

A discussão sobre qual a definição de limite que deve ser ensinada aos alunos portugueses do Ensino Secundário continua viva. Em Março de 2018, a *Gazeta de Matemática* publicou um artigo de Augusto Franco de Oliveira sobre o tema. Defendendo uma posição distinta, António Bivar explica agora algumas das razões matemáticas e pedagógicas que sustentam a sua preferência.

1 INTRODUÇÃO

No passado dia 13 de Abril realizou-se em Coimbra, no Departamento de Matemática da FCTUC, por iniciativa da Sociedade Portuguesa de Matemática, um debate relativo a duas definições alternativas de limite de uma função num ponto e à utilização destas definições no Ensino Secundário em Portugal. Este debate surgiu também na sequência de um artigo ([10]) publicado na *Gazeta de Matemática*, relativo a esta questão, pelo Prof. Augusto Franco de Oliveira; para facilidade do leitor utilizarei a terminologia introduzida nesse artigo para as duas definições que adiante se especificarão, nomeadamente «limite (em ponto) incluído» (com a notação abreviada ou em fórmulas, «limi») e «limite (em ponto) excluído» (com a notação abreviada ou em fórmulas, «lime»). Participei nesse debate enquanto co-autor do novo programa de Matemática A (de 2014), em que se optou pelo *limite incluído* enquanto definição básica de limite, ao contrário do que era usual no Ensino Secundário; assim, nesse contexto, se se pretender também introduzir o conceito de *limite excluído*, para o designar será necessário acrescentar algum qualificativo ao termo «limite».

Naturalmente, e contra a opinião do Prof. Franco de Oliveira, defendi, nesse debate, a opção tomada no programa de que fui co-autor e aceitei agora o desafio que me foi feito pela redacção da *Gazeta de Matemática* para expor em artigo o meu ponto de vista. Utilizarei livremente, quer um documento da minha autoria destinado a acções de formação e que se encontra on-line no site da Direcção Geral de Educação¹, quer o próprio texto da minha palestra no referido debate em Coimbra.

Apesar desta alteração, no programa de Matemática A de 2014 optou-se por manter as definições “à Heine” de limite de função real de variável real num ponto, já habituais no Ensino Secundário, em detrimento das definições “à Cauchy”, que não são portanto utilizadas. Assim, neste artigo, não se analisarão as eventuais vantagens e desvantagens de cada um destes grupos de definições (em certo sentido equivalentes) para uma primeira abordagem da noção de limite, a nível do Ensino Secundário. Diremos apenas que, tal como desde há muito ocorre no Ensino Secundário, começa por tratar-se em primeiro lugar do conceito de limite de sucessão de números reais, como preliminar para o estudo mais geral do conceito de limite de função real de variável real; passa-se assim de funções reais em que o domínio é sempre o conjunto dos números naturais e o limite é sempre calculado “em mais infinito” para o caso mais geral de funções reais de variável real (portanto não apenas para funções com domínio igual a \mathbb{N} , como era o caso das sucessões, mas para domínios arbitrários reais) e em que, em condições adequadas, se alarga aos números reais e a menos infinito os “pontos em que se calcula o limite”. Assim, para além da vantagem pedagógica de se iniciar o estudo dos limites com um caso particular mais simples, utiliza-se depois este caso particular como base para o alargamento da noção a outras situações; no que se segue supor-se-á que o leitor conhece a definição e propriedades elementares dos limites de sucessões reais.

2. UMA DEFINIÇÃO GERAL DE LIMITE E O LIMITE “BÁSICO”.

Fixando-nos então na formulação de Heine e analisando apenas, para fixar ideias, os limites em pontos da recta real, recordemos que, dada uma função:

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

e sendo $a, b \in \mathbb{R}$, para definir o que se entende por b ser,

¹ cf. [1].

em algum sentido, *limite de f em a* (dizendo-se, nesse caso que « b é limite de $f(x)$ quando x tende para a », abreviadamente $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, eventualmente com outros qualificativos que explicitam de que tipo de limite se trata), fixamos determinado conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e consideramos sucessões x_n de números reais pertencentes a $A \cap D$ a convergir para a , analisando o que acontece às sucessões $f(x_n)$; se, para qualquer sucessão x_n naquelas condições, a sucessão $f(x_n)$ tender para b , sendo satisfeitas as condições suplementares que adiante se explicitarão, diremos que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a , acrescentando eventualmente um qualificativo ao termo “limite”, dependente da escolha do conjunto A .

As distintas noções de limite dependem portanto, essencialmente, dessa escolha, a qual determina, por seu lado, que condições prévias suplementares se devem impor ao número a ; estas condições serão as necessárias e suficientes para que, a existir, o limite em a seja único. Não é difícil concluir que basta e é necessário, para esse efeito, que exista pelo menos uma sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ a tender para a ; por outras palavras, que a seja o que habitualmente se designa por (ponto) aderente a $A \cap D$. Com efeito, se essa condição não for satisfeita, fixado $b \in \mathbb{R}$, não existindo nenhuma sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ a tender para a , em particular não existirá nenhuma para a qual, além disso, $f(x_n)$ não tenda para b ; assim, qualquer número real satisfará a condição necessária acima expressa para ser um limite de f em a , com essa escolha de A (já que a negação de tal condição nunca pode ser verdadeira), perdendo-se a unicidade. Reciprocamente, se a for aderente a $A \cap D$ e $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq c$, considerando uma sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ a tender para a (que sabemos existir, por definição de ponto aderente), não podemos ter simultaneamente $f(x_n)$ a convergir para b e para c , atendendo à unicidade do limite de sucessões, pelo que b e c não podem ser ambos limite de $f(x)$ quando x tende para a , para esta escolha do conjunto A , ou seja, valerá a unicidade pretendida.

Atendendo ao exposto, não há dúvidas na comunidade matemática quanto à “legitimidade” de qualquer noção de limite de função que seja caso particular da definição acima exposta, independentemente da designação que se utilize para a identificar. Podemos resumir nos seguintes termos a definição genérica de limite acima analisada:

Dada uma função:

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, diremos que b é o **limite de $f(x)$ quando**

x tende para a (ou o limite de f em a) por valores em A se a for aderente a $A \cap D$ e, para qualquer sucessão x_n de elementos de $A \cap D$ tendendo para a , $f(x_n)$ tender para b .

Também não há qualquer divergência assinalável no seio da comunidade matemática quanto a determinadas designações para certas escolhas particulares do conjunto A . Assim, por exemplo, para $A =]a, +\infty[$, o limite por valores em A designa-se habitualmente por limite «à direita», ou «por valores superiores», para $A =]-\infty, a[$ por limite «à esquerda» ou «por valores inferiores».

Quanto às designações referidas no início deste artigo, «limite (em ponto) incluído» (com a notação, abreviada ou em fórmulas, *limi*) e «limite (em ponto) excluído» (com a notação, abreviada ou em fórmulas, *lime*), correspondem respectivamente a $A = \mathbb{R}$ e $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

A divergência que subsiste na comunidade matemática, com exemplos que se podem encontrar em obras de diferentes níveis de complexidade e de qualidade, desde que seja referida uma noção de limite de função, consiste apenas na escolha “entre *limi* e *lime*” para noção básica de limite, ou seja, limite a referir sem qualquer qualificativo, ficando-se assim obrigado a utilizar algum qualificativo para a outra noção, caso se pretenda utilizá-la. Quando a escolha recai sobre o *limi*, muitas vezes designa-se o *lime* por «limite por valores diferentes» (que em francês se designa por vezes por «limite épointée»), já que neste caso $A \cap D$ é exactamente o conjunto dos elementos do domínio de f distintos de a ; quando recai sobre o *lime* não é usual utilizar-se a noção de *limi* (que aliás não é definível de modo simples com base na de *lime*), pelo que não há uma designação minimamente consagrada para o efeito. Consoante a escolha feita, outras designações óbvias poderão corresponder a determinações diferentes de A ; assim, por exemplo, se for *limi* o limite “básico” escolhido, o «limite por valores racionais» corresponderá naturalmente a $A = \mathbb{Q}$, ao passo que corresponderá a $A = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$ se essa escolha recair sobre o *lime*.

Não nos alongaremos sobre as razões históricas ou psicológicas que podem explicar esta divergência. Trata-se de situação semelhante a muitas outras em Matemática, pois não foi ainda possível, nem provavelmente alguma vez o será (ou sequer será desejável), uniformizar totalmente as definições, mesmo as de conceitos tão usuais como o de «conjunto dos números naturais» (contém ou não o 0?) ou «rectas paralelas» (uma recta é ou não paralela a si própria?). Desde que, evidentemente, em cada obra matemática se esclareça adequadamente o significado dos termos utilizados e se procure confor-

mar as escolhas feitas, tanto quanto possível, a consensos estabelecidos na comunidade matemática, estas “divergências” não ferem a qualidade da comunicação com os utilizadores dessas obras.

A questão que subsiste será apenas a maior conveniência de uma ou outra opção para o fim a que se destina a obra em que é adoptada, ou, mais genericamente, qual das opções permite um desenvolvimento mais “simples” ou “esteticamente mais apelativo” da teoria dos limites de funções reais de variável real. Estas expressões entre aspas deixam suspeitar que haverá sempre algum grau de subjectividade nestas apreciações, mas procurarei descrever quais os argumentos que me parecem favorecer a opção pelo *limite incluído*, que é a do actual programa de Matemática A, em particular também por se tratar de uma primeira abordagem deste conceito e para o nível de escolaridade a que se destina, mesmo contrariando uma tradição há muito estabelecida no nosso Ensino Secundário.

Antes de abordarmos questões mais técnicas e outras de carácter pedagógico, também convém analisar alegações que por vezes se fazem quanto ao carácter mais intuitivo do *limite excluído* relativamente ao *limite incluído*, enquanto conceito básico de limite. Um argumento habitual a este respeito segue linhas equivalentes ou pelo menos muito próximas das seguintes: na linguagem comum, a noção de “aproximação”, que de alguma maneira se pretende formalizar matematicamente com a noção de limite (no contexto das funções reais de variável real), pressupõe que “quem, ou aquilo que, se está a aproximar” não chega a atingir “aquilo de que se aproxima”; ninguém diz que “se está a aproximar” de um sítio se já lá tiver chegado... Assim, considera-se que a tradução matemática da expressão “quando x tende para a ” (que pretende significar mais propriamente qualquer coisa como “quando x se aproxima indefinidamente de a ”) quando é feita através de sucessões convergindo para a , não deve admitir sucessões que tomem o valor a . No entanto ninguém contesta que $f(x_n)$ possa tomar o valor b , quanto às correspondentes sucessões $f(x_n)$ cuja convergência para b traduz matematicamente a expressão “ $f(x)$ tende para b ”... Esta “assimetria”, inerente ao *limite excluído*, entre a interpretação matemática do conceito de “aproximação indefinida” no caso das variáveis independente e dependente de uma função real de variável real, explica de certa maneira as dificuldades, adiante analisadas, com que nos deparamos ao pretendermos enunciar um teorema do *lime* da função composta que seja simultaneamente tão geral quanto possível, com um enunciado suficientemen-

te simples para ter alguma utilidade, e com uma demonstração abordável no Secundário, ao passo que com o *limi* é uma trivialidade enunciar (e demonstrar) um teorema com essas características. Com efeito, a própria noção de composição conduz a que a variável dependente de uma função passe a funcionar como variável independente da que com ela se compõe...

Para se apreciar o quanto nos afastamos dessa suposta visão intuitiva da “aproximação” com qualquer das noções de limite, basta pensarmos na interpretação de uma função real de variável real como trajectória de um ponto num eixo, em que a variável independente representa o tempo e a dependente a abcissa do ponto no eixo em questão; uma função constantemente igual a $b \in \mathbb{R}$ em determinado intervalo não degenerado representará “o repouso” no ponto de abcissa b do eixo, ao longo do intervalo de tempo considerado. É óbvio que, com qualquer das duas noções de limite, incluído ou excluído, é igual a b o limite dessa função em qualquer ponto (“instante”) t_0 do intervalo-domínio, mas dificilmente alguém diria, em linguagem comum, que um objecto cujo movimento seja representado por essa função “se está a aproximar” do ponto de abcissa b do eixo quando t tende para t_0 , já que o objecto está parado nesse ponto durante todo o intervalo de tempo... Assim, a tentativa de adequar a noção de limite de função a este aspecto particular da linguagem comum através do recurso ao *lime* é, de certa maneira, ilusória.

3. CONFRONTO DO LIME COM O LIMÍ.

Abordemos agora alguns aspectos mais técnicos que distinguem o *lime* do *limi* quanto ao modo como se pode desenvolver, a nível do Ensino Secundário, uma iniciação ao estudo da Análise Matemática e quanto às ferramentas que os alunos podem adquirir a esse nível, também para a prossecução dos estudos. Como é óbvio, a escolha de uma noção para “*limite básico*” tem como consequência que, sempre que possível, se privilegie essa noção no enunciado dos diversos resultados inerentes a essa iniciação; tratando-se de noções matematicamente distintas, é de prever que os resultados devam ser distintos, podendo resultados análogos ser mais ou menos complexos, quer quanto ao enunciado quer quanto à demonstração, e/ou mais ou menos úteis, consoante a escolha feita. A apreciação global destes efeitos deverá pesar na escolha a fazer, nomeadamente quando se desenha um curriculum.

Uma primeira observação resulta facilmente da maneira como se apresentou acima uma definição geral de limite *por valores num conjunto* A ou «segundo um con-

junto A »; é claro que o caso $A = \mathbb{R}$ (correspondente ao *limite incluído*), ou seja, “o mais extenso possível”, será o que menos parece justificar um qualificativo, já que não há qualquer restrição ao domínio de f para efeito de escolha das sucessões “a tender para a ”; todas as outras escolhas de A são susceptíveis de restringir o conjunto em que se tomam essas sucessões, pelo que parecem merecer algum qualificativo que explicita essa restrição. Do mesmo modo, no caso do *limi*, a restrição suplementar a impor ao ponto a é simplesmente que seja *aderente ao domínio D de f* , ao passo que com qualquer outra escolha de A teremos de considerar o conceito de “ponto aderente a $A \cap D$ ”, o que no caso do *lime*, em que $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, justifica a introdução de uma nova designação para tais pontos, nomeadamente «*pontos de acumulação do domínio de f* », conceito portanto, neste sentido, mais complexo do que o de *ponto aderente*.

O que precede justifica que se possa considerar o conceito de *limi* mais simples do que o conceito de *lime*, podendo este último e todos os outros conceitos de *limite por valores em A* que correspondam a subconjuntos estritos A de \mathbb{R} , ser considerados muito simplesmente “*limis*” (ou seja “*limites*”, sem mais, se for *limi* o limite básico considerado) de restrições de f aos correspondentes conjuntos $A \cap D$ (ou simplesmente A , com uma adequada definição geral de restrição de função a conjunto não necessariamente contido no domínio).

É de notar também que esta abordagem (escolha do *limi*, *limite incluído*, como limite básico) está bastante vulgarizada em diversos âmbitos em que se introduz ou em que se desenvolve uma introdução à Análise Matemática; ou seja, a unanimidade que se verificou a nível do Ensino Secundário em Portugal durante muito tempo quanto à definição alternativa à actualmente em vigor, sempre esteve muito longe de existir a nível do ensino universitário². Assim, sendo o *limite excluído* (*lime*) um caso particular, no sentido acima referido, do *limite incluído* (*limi*), a eventual adaptação a uma alteração na definição de limite é simples quando se faz passando desta última versão para a anterior, sendo fácil utilizar para o *lime* todos os teoremas enunciados para o *limi* (basta considerar as restrições das funções a $D \setminus \{a\}$). Como é óbvio, o mesmo não se pode dizer de uma eventual adaptação ao *limi* da teoria desenvolvida com base no *lime*, já que não existe nenhuma maneira óbvia de encarar o primeiro como caso particular do segundo.

Em segundo lugar, embora qualquer das definições obrigue a *cuidados* por vezes com alguma subtilidade para

que se evitem *erros* no enunciado de determinadas propriedades, o *limite excluído* obriga a *cuidados suplementares*, infelizmente muitas vezes escamoteados mesmo em obras de referência.

Vejam alguns exemplos numa excelente obra de co-autoria de Sebastião e Silva.

Começaremos com um exemplo que só por si não permite ainda distinguir as duas definições quanto à simplicidade de uma abordagem correcta, mas serve de alerta quanto aos cuidados a ter com estes assuntos.

Utilizaremos o Compêndio de Álgebra de Sebastião e Silva e Silva Paulo, 1º Tomo, 6º ano, edição de 1968 ([12]).

Introduz-se o *limite excluído* como conceito básico de limite (cf. *op. cit.* p. 188), com toda a generalidade quanto ao domínio das funções e com o cuidado, na definição de limite, de exigir que o ponto a em que este se calcula seja ponto de acumulação do domínio da função, embora não se utilize essa terminologia. Essa exigência aparece numa nota de rodapé (cf. *op. cit.*, *loc. cit.*):

Subentende-se nesta definição que os valores atribuídos a x pertencem ao domínio da função e que existe pelo menos uma sucessão de pontos deste domínio, diferentes de a , tendente para a .

É esta exigência que permite depois garantir a *unicidade do limite*, tal como é enunciada na página seguinte. No entanto, com as definições gerais adoptadas de operações com funções reais de variável real (cf. *op. cit.*, p. 118), em que se definem estas operações nos casos mais gerais possíveis e, como é habitual, com os domínios também mais extensos possíveis, *não é possível* agora, com toda a generalidade, garantir, como se faz logo em seguida (cf. *op. cit.*, p. 189), que:

Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tendem para limites finitos quando x tende para um limite a (finito ou infinito) também a soma, a diferença e o produto dessas funções tendem para limites finitos quando $x \rightarrow a$ (...)

Com efeito, o domínio de $f + g$, por exemplo, pode reduzir-se ao ponto a ; ou, mais geralmente, *a pode não ser ponto de acumulação do domínio de $f + g$* , ainda que o seja de cada um dos domínios de f e g . Nesse caso, com as definições dadas, podem existir os limites (em particular finitos) de f e g quando $x \rightarrow a$ mas *não pode existir o limite de $f + g$ quando $x \rightarrow a$...*

Se na definição de limite se omitisse aquela exigên-

cia, então *perder-se-ia a unicidade*; em qualquer caso não poderíamos simultaneamente demonstrar todas as propriedades dos limites expressas na mesma página, do modo como estão enunciadas.

Por exemplo, sendo $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$ sabemos que ambas as funções têm limite 0 quando $x \rightarrow 2$, mas $f+g$ tem domínio reduzido ao ponto 2, pelo que, com a definição dada, não existe o limite (lime) de $f(x) + g(x)$ quando $x \rightarrow 2 \dots$

Se na definição de limite eliminássemos a exigência expressa na referida nota de rodapé, então $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ tenderia para qualquer valor quando $x \rightarrow 2$, como atrás se viu. Que nesta obra se admite a utilização de somas de funções deste tipo fica expresso num exemplo que se apresenta em nota de rodapé, na página em que se introduzem as operações algébricas sobre funções (cf. op. cit. p. 118): $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$, chamando-se a atenção, com este exemplo, para a possibilidade de ser até vazio o domínio da soma.

Note-se que os enunciados anteriormente referidos ficariam adequadamente corrigidos acrescentando-se a hipótese de que o ponto em que se calcula o limite também é de acumulação dos domínios das funções resultantes das operações executadas sobre as funções dadas. Analogamente, com o *limite incluído* enquanto definição básica de limite, é necessário pressupor uma condição idêntica, substituindo “ponto de acumulação” por “ponto aderente”.

Assim, neste caso, a “vantagem” do *limite incluído* estará apenas em que a condição a impor à partida aos pontos em que se pode “permutar passagem ao limite com operação algébrica” é menos restritiva, já que *todo o ponto de acumulação é aderente*, não sendo a recíproca verdadeira (“é mais fácil ser ponto aderente do que de acumulação”).

No exemplo dado, com $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$, como 2 é aderente ao domínio da soma das duas funções, embora não seja ponto de acumulação desse domínio, podemos concluir que existe *limi* da soma nesse ponto, embora não exista *lime*.

É claro que alterando adequadamente as funções, ponto, por exemplo,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x-2}}, g(x) = \frac{4 - x^2}{\sqrt{2-x}},$$

já 2 não é aderente ao domínio da soma das duas funções (que, neste caso, é vazio...), pelo que não existe limite dessa soma em 2, embora exista o limite nesse ponto de cada uma delas. Assim, mesmo com o *limite incluído*, não se pode dispensar uma condição suplementar para que os referidos

enunciados correspondam a teoremas.

Outro tipo de incorrecções que se podem encontrar, agora claramente mais facilmente evitáveis com o *limite incluído*, está associado à definição habitualmente dada de *continuidade* (cf. op. cit., p. 204):

Diz-se que uma função $f(x)$ é contínua num ponto a , quando se verificam as duas seguintes condições:

(1) o ponto a pertence ao domínio da função $f(x)$.

(2) $f(x)$ tende para $f(a)$ quando x tende para a , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Com esta definição e sendo o “excluído” (*lime*) o limite adoptado no enunciado, uma função não seria contínua num ponto isolado do domínio...

Portanto, por exemplo, $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ não seria contínua em 2, único ponto do respectivo domínio, o que é um contra-exemplo para (cf. op. cit., p. 209):

A soma, a diferença e o produto de duas funções contínuas num dado ponto ainda são funções contínuas nesse ponto.

O programa anterior (de 2002) de Matemática A, embora também prescrevesse a definição de limite segundo Heine, não explicitava qual das versões deveria ser adoptada e, uma vez que já tinha acabado o regime de livro único e ainda não tinham sido adoptadas as metas curriculares agora em vigor, foram os autores de manuais que optaram unanimemente por manter a definição de Heine com a formulação “por valores diferentes” (*limite excluído*), enquanto esse programa vigorou.

No entanto, não havendo também prescrições explícitas do anterior programa quanto a diversos aspectos do tratamento a dar a estas questões, as soluções encontradas foram *variadas e nem todas correctas*. Em particular, por um lado impunham-se, em alguns manuais, *restrições aos domínios* (por exemplo para se definir a noção de *continuidade*) que não existiam enquanto vigorou o regime de livro único (por vezes para contornar as dificuldades acima apontadas) e, por outro, nem sempre houve o cuidado de, nos enunciados das propriedades algébricas dos limites ou das funções contínuas, se imporem condições

² Para a opção pelo *limite incluído*, cf., por exemplo, os manuais [6], [3] e [4], utilizados ao longo de décadas respectivamente na FCUL e no IST.

adequadas para a validade das conclusões a tirar³. Parece assim que havia aqui uma “máquina a necessitar de reparação” e uma análise a fazer do que teria contribuído para a danificar...

A definição de limite adoptada no Programa de 2014 permite que a *definição e propriedades da noção de continuidade* sejam enunciadas como acima ficou ilustrado (até de maneira mais simples e equivalente...) sem necessidade de ressalvas relativas aos domínios das funções ou aos pontos em que se define a continuidade. Já com o *limite excluído*, para que funcione o *Teorema da continuidade da soma, produto, etc. de funções contínuas* com o mesmo grau de generalidade, será necessário acrescentar à definição de continuidade algo equivalente a: “além disso qualquer função real de variável real se considera contínua nos pontos isolados do domínio”.

Como vimos, com o *limite incluído*, para que tenha lugar a *unicidade do limite*, há que restringir também os pontos onde se calculam limites, agora aos chamados *pontos aderentes*.

No Programa e Metas Curriculares de Matemática A de 2014 ([8], de agora em diante designados apenas por «metas») ficou então, aqui com alguns negritos acrescentados (FRVR11):

1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais.

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A » quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a » **quando a for aderente ao domínio D_f de f** e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por « $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a » e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos.

Com alguns cuidados nas propriedades algébricas dos limites:

FRVR11-1:

9. Justificar que os limites da soma, do produto e do quociente de funções $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ e do produto por um escalar α e da potência de expoente racional r de uma função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, se calculam, **em pon-**

tos aderentes aos domínios respetivamente de $f + g, fg, f/g, \alpha f$ e f^r a partir dos limites de f e g nesse pontos de forma análoga ao caso das sucessões, reconhecendo que se mantêm as situações indeterminadas.

Já quanto à continuidade, tudo fica mais simples (FRVR11-2):

1. Justificar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio que se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe então é igual a $f(a)$.

2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a » quando o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

5. Justificar que se as funções reais de variável real $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas num ponto a , então as funções $f + g, f - g$ e $f \times g$ são contínuas em a e, se $g(a) \neq 0$, a função f/g é contínua em a .

Também a definição dos *limites laterais* pode aproveitar a definição geral dada de limite e de restrição de uma função (exemplifica-se com a definição de limite à direita - FRVR11-1):

4. Identificar, dada uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como o «limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a » quando $b = \lim_{x \rightarrow a} f|_{]a, +\infty[}(x)$, representar b por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, designá-lo também por «limite de $f(x)$ à direita de a », referir, nesta situação, que « $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a » e estender esta definição ao caso de limites infinitos.

Veremos adiante qual a utilização que os limites laterais têm no desenvolvimento da introdução à Análise no Ensino Secundário.

4. ALGUMAS DIFICULDADES INEVITÁVEIS E UM TEOREMA “FERIDO DE MORTE E RESSUSCITADO”.

Limite da composta:

Como acabámos de ver, mesmo com o *limite incluído* há que ter alguns cuidados com os *domínios das funções* quando se pretende enunciar resultados relativos a limites de funções definidas pela aplicação de operações algébricas ou composição a funções dadas.

Esses cuidados já foram referidos e exemplificados a propósito dos resultados gerais acerca do *limite da soma*,

produto e quociente. O mesmo ocorre com o limite de uma função composta. Formalmente gostaríamos de poder “permutar a passagem ao limite com a composição” no sentido seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)} g(y).$$

e, de facto, com o *limite incluído* é possível fazê-lo, nas condições mais gerais possíveis em que os limites expressos no segundo membro façam sentido, sendo suficiente para o efeito acrescentar a hipótese de que a é também aderente ao domínio da função composta, condição que é aliás também necessária para a existência do limite no primeiro membro. Este resultado ocorre nas metas com o seguinte enunciado (FRVR11-1):

11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e um ponto a aderente a $D_{g \circ f}$, que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

O problema, mais uma vez, é que não fica garantido à partida que o ponto a em que se pretende calcular o limite continue a ser aderente ao domínio da nova função construída a partir das funções dadas. Considere-se, por exemplo, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x \ln x$ e $a = b = c = 0$; temos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (em particular 0 é aderente aos domínios de f e g), mas o domínio de $g \circ f$ é vazio, não tendo portanto pontos aderentes, pelo que, em particular, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$.

Pelo contrário, quando se trata de analisar a *continuidade* tais cuidados são agora desnecessários, pois, nesse caso, a é sempre *elemento do domínio* tanto das funções dadas como da nova função, nos casos considerados, sendo portanto forçosamente aderente ao respectivo domínio. Note-se que o ponto a em que se estuda a continuidade o que não tem de ser é *ponto de acumulação* dos domínios das funções dadas e, mesmo que o seja, daí não resulta que tenha de ser *ponto de acumulação* do domínio da nova função construída a partir delas. Daí as dificuldades até agora detectadas relativas ao tratamento da continuidade com a definição baseada no *limite excluído* e que se esfumam com o *limite incluído*.

O *teorema do limite da função composta* acima reproduzido (FRVR11-1.11) é outro dos temas em que o “comportamento” do *limite excluído* levanta dificuldades talvez, à primeira vista, inesperadas.

Na verdade, com o *limite excluído* não é mesmo possível enunciar um teorema relativo ao limite de uma função composta simultaneamente tão abrangente como o acima recordado e com um grau de simplicidade suficiente para

que seja verdadeiramente útil. Em particular, o resultado, tal qual está enunciado, fica *falso* para o *limite excluído*, mesmo substituindo nas hipóteses «ponto aderente» por «ponto de acumulação» e, o que é talvez mais inesperado, mesmo para funções ambas com domínio igual a \mathbb{R} e mesmo no caso em que existem tanto os limites (excluídos) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, nos termos da hipótese do teorema do limite da função composta, como o limite (excluído) $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x)$, como nos termos da tese do referido teorema; o que acontece é que *este último limite pode não ser igual a c* .

Basta considerar o seguinte exemplo (também referido no artigo do Prof. Franco de Oliveira atrás citado [10]):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, g = f.$$

Como é óbvio, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e portanto também $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. No entanto, como também é óbvio,

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

pelo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = 1 \neq 0!$$

Uma vez que o “limite por valores diferentes” (*excluído*) é simplesmente um *limite incluído* de uma restrição da função dada, cabe perguntar como analisar o exemplo anterior a esta luz e tendo em mente o teorema do limite (*limi*) da função composta; notemos que a restrição f_1 a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de f é muito simplesmente, neste caso, a função constante

³ cf. por exemplo, [9], [5], [2] e [11]; apenas no primeiro manual se dá uma definição simultaneamente geral e correcta de limite (limite, em todos os casos) e se enunciam correctamente os teoremas relativos a operações algébricas com limites. No segundo, estando bem formulada a definição, já os enunciados dos referidos teoremas estão, em bom rigor, incompletos e no terceiro, para além dos correspondentes teoremas, a própria definição não é abordada de modo inteiramente correcto. No quarto manual impõem-se restrições suplementares aos domínios das funções para as quais se define a noção de limite; em alguns dos teoremas, para que fiquem correctos, tem de presumir-se que essas restrições também se aplicam às funções resultado das operações algébricas consideradas. Quanto à continuidade, apenas o terceiro manual não impõe condições suplementares ao ponto em que se define continuidade, mas a definição fica incorrecta, e apenas o primeiro e o quarto enunciam as propriedades algébricas da continuidade de forma coerente com a definição adoptada (com uma pequena ressalva para o primeiro), mas com restrições relativas aos domínios das funções consideradas. Em todos os manuais são escassas ou inexistentes as indicações relativas a demonstrações dos referidos resultados; em nenhum deles se aborda o limite da função composta, resultado tradicionalmente utilizado no Secundário, por vezes sob a forma de “cálculo de limites por mudança de variável”.

igual a 0 nesse domínio, portanto com limite 0 em 0, que é aderente ao domínio, o mesmo se passando portanto com $g_1 = f_1$. No entanto, como também é óbvio, o domínio de $g_1 \circ f_1$ é vazio! Assim, nada podemos concluir do teorema quanto à existência de limite da composta em 0, já que 0 não é aderente ao domínio de $g_1 \circ f_1$.

A inexistência de um teorema para o *limite excluído* de uma função composta com hipóteses razoavelmente simples e suficientemente geral torna difícil de justificar determinadas passagens ao limite, numa formulação baseada no *lime*, que são trivialmente justificáveis com o referido teorema, para uma abordagem baseada no *limi*. Consideremos, por exemplo, o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}.$$

É fácil concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ (basta notar que $|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq |x|$, para $x \neq 0$); admitindo a continuidade da exponencial, teremos então $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1$, pelo que, pelo teorema do limite (*limi*) da composta, concluímos imediatamente que $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}} = 1$.

Podemos também substituir a exponencial por uma função qualquer com limite em 0, desde que, evidentemente, 0 continue a ser aderente ao domínio da composta; por exemplo, admitindo o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e notando que há sucessões x_n a tender para 0 tais que $x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}$ nunca se anula (por exemplo, $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$), o que garante que 0 é aderente ao domínio da composta abaixo utilizada, podemos imediatamente concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right)}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}} = 1.$$

Já com o *limite excluído* como limite básico, por um lado, como veremos, não se disporia de um teorema de limite da composta que abrangesse *de modo simples* todos estes casos; por outro, se pretendêssemos usar apenas a definição de continuidade para obter o limite em zero da primeira daquelas “funções compostas” ficaríamos atrapalhados, pois tentando usar a definição de Heine de limite e a definição de função contínua baseada no *limite excluído*, teríamos de tomar uma sucessão arbitrária a tender para zero por valores diferentes, digamos x_n , e depois verificar o que acontece com a sucessão das imagens. Embora soubéssemos que $x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}$ tende para 0, como pode não ser por valores sempre diferentes de 0 (basta tomar, por exemplo $x_n = 2/n\pi$), não saberíamos logo o que acontece, por exemplo, a $e^{x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}}$, pois pela definição de continuidade de e^x em 0 que tem por base o *limite excluído* apenas sabemos o que se passa para o limite em 0 de e^{y_n} se y_n

tender para 0 por valores diferentes. É claro que no ensino superior a conclusão seria, em geral, fácil de obter, porque se estaria habituado a trabalhar com propriedades de limites de sucessões envolvendo subsucessões, ou com a definição de Cauchy de continuidade, mas qualquer dessas abordagens obrigaria a trazer esses temas para o Ensino Secundário...

Podem encontrar-se alguns enunciados de resultados relativos a funções compostas com a definição de limite “por valores diferentes” (ou seja, adoptando o *limite excluído* como definição básica de limite). Num excelente manual de Elon Lages Lima ([7]) encontra-se a seguinte versão do Teorema do limite da função composta, no caso do *limite excluído* (em que se utiliza a notação X' para o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X):

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(X) \subset Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ tem-se $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$, desde que seja $c = g(b)$.

O enunciado é manifestamente mais complicado do que o atrás recordado para o *limite incluído*. É, no entanto, mais restritivo; com efeito impõem-se condições suplementares aos domínios de f e g (o que evita ter de se acrescentar que o ponto a seja de acumulação do domínio da composta, já que este domínio, neste caso, coincide com X) e impõe-se além disso que $c = g(b)$, ou seja, que a função g esteja definida e seja contínua em b . Além disso, a respectiva demonstração, com a definição à Heine, suscitaria as dificuldades apontadas atrás, relativas ao uso de subsucessões, o que na prática a tornaria dificilmente acessível ao Ensino Secundário, quando no caso do *limite incluído* a demonstração do teorema da composta é uma simples justificação de carácter imediato, para um aluno do Secundário que siga esta abordagem dos limites. Além disso, este teorema do livro de Elon Lages Lima, mais complicado tanto no enunciado como na demonstração, nem sequer se aplica imediatamente ao segundo exemplo atrás apresentado de cálculo de limite de uma composta, em que, logo à partida, não estava satisfeita a condição relativa aos domínios, nem sequer a função g estava definida em b .

No artigo atrás referido do Prof. Franco de Oliveira apresenta-se uma versão mais geral do teorema do *lime* da composta em que não se colocam restrições aos domínios das funções e consequentemente se acrescenta a condição (que é obviamente *necessária*) de que a seja de acumulação do domínio da composta; para além da condição sufi-

ciente apresentada por Elon Lages Lima enuncia-se uma condição suficiente alternativa para a conclusão desejada quanto ao *limite* da composta, que é a seguinte (adaptando as notações às usadas por Elon Lages Lima):

$$f(x) \neq b \text{ para todo } x \text{ numa vizinhança de } a.$$

Infelizmente, mais uma vez, este teorema mais abrangente (mas de enunciado ainda mais complexo e de demonstração igualmente dificilmente acessível ao Secundário) também não se aplica directamente ao referido segundo exemplo atrás apresentado de cálculo de um limite de composta, pois, nesse caso, em qualquer vizinhança de 0 existe uma infinidade de pontos em que $x \text{ sen } \frac{1}{x}$ se anula, ou seja, em que " $f(x) = b$ ".

Note-se que, com o *limite incluído*, o teorema do limite da composta atrás apresentado revela que se existirem os limites das funções componentes (em condições de se poder formalmente "passar ao limite dentro da composição", no sentido atrás explicitado) uma condição necessária e suficiente para que exista limite da composta e seja igual ao que se espera, é muito simplesmente que o ponto em que se calcula o limite seja aderente ao domínio da composta; todos os casos "que façam sentido" de cálculo do limite da composta ficam assim abrangidos por este enunciado extremamente simples e de demonstração imediata, bastando em cada caso verificar que o ponto em que se calcula o limite é aderente ao domínio da composta.

Os teoremas acima apresentados relativos ao *limite excluído* da composta, apesar da complexidade acrescida, não se aplicam a todas as situações em que existem os *limites incluídos* das funções componentes, nas condições acima expostas, mesmo que, em particular, sejam também *limites excluídos* (o que acontece sempre que os pontos em que se calculam os limites são de acumulação dos domínios das respectivas funções) e que o ponto em que se calcula o limite seja de acumulação do domínio da composta, ou seja, a situações em que o próprio *limite excluído* da composta pode ser calculado usando o Teorema relativo ao *limite incluído*.

Note-se que, quer a condição de continuidade de g do teorema acima referido, constante do livro de Elon Lages Lima ([7]), quer as condições do resultado exposto no artigo do Prof. Franco de Oliveira ([10]), não são necessárias, mas apenas suficientes para a existência e valor esperado do limite da composta, embora estas últimas no universo mais alargado possível de pares de funções componentes e de valores admitidos para os limites. O segundo exemplo atrás apresentado mostra que é possível existirem os

limites (tanto excluídos como incluídos) quer das funções componentes quer da função composta e este último ter o valor esperado e não se verificar nenhuma das condições suficientes do teorema exposto em [10].

É possível colmatar esse "defeito" introduzindo uma terceira condição alternativa e enunciando então o seguinte teorema de função composta para o *limite excluído*:

Teorema. *Dadas funções reais de variável real f e g e sendo a ponto de acumulação de $D_{g \circ f}$, se existirem os limites excluídos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então é condição necessária e suficiente para que exista e seja igual a c o limite excluído $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x)$, que se verifique uma das duas seguintes condições:*

- 1) $b \notin D_g$;

- 2) $b \in D_g$ e, ou g é contínua em b , ou existe uma vizinhança V de a tal que, em $(V \setminus \{a\}) \cap D_{g \circ f}$, f não toma o valor b .

Demonstração: Seja x_n uma sucessão de elementos de $D_{g \circ f}$ a tender para a e com x_n sempre distinto de a ; se $b \notin D_g$, necessariamente (por definição de $D_{g \circ f}$) $f(x_n)$ é sempre distinto de b e, atendendo aos limites que por hipótese têm lugar, esta sucessão tende para b e consequentemente $g(f(x_n))$ converge para c . Supondo agora que $b \in D_g$ e g é contínua em b ou que existe uma vizinhança de a tal que, em $(V \setminus \{a\}) \cap D_{g \circ f}$, f não toma o valor b , por um lado, do mesmo modo $f(x_n)$ tende para b , e, por outro, só poderá existir uma subsucessão x_{nk} de x_n para a qual se tenha sempre $f(x_{nk}) = b$ se g for contínua em b ; se não existir tal subsucessão concluímos imediatamente da hipótese relativa ao limite excluído de g que $g(f(x_n))$ converge para c . Caso tal subsucessão exista, a mesma conclusão se pode tirar, pois, por um lado, g é, nesse caso, contínua em b , e portanto, por definição de continuidade, $g(b) = c$; por outro lado, considerando duas subsucessões de x_n indiciadas em conjuntos formando uma partição de \mathbb{N} , uma delas, x_{nk} , constituída exactamente pelos termos de x_n para os quais $f(x_n) = b$, concluímos que $g(f(x_{nk}))$ converge para c , já que é constantemente igual a este valor, e para a outra subsucessão a mesma conclusão resulta da hipótese relativa ao limite excluído de g . Mais uma vez portanto concluímos que $g(f(x_n))$ converge para c ; fica assim demonstrada a condição suficiente.

Reciprocamente, supondo que existe e é igual a c o *limite excluído* $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x)$, que $b \in D_g$ e que não existe uma vizinhança V de a tal que, em $(V \setminus \{a\}) \cap D_{g \circ f}$, f não toma o valor b , ou seja, que em qualquer vizinhança V de a existe

pelo menos um ponto distinto de a em $D_{g \circ f}$ no qual f toma o valor b , podemos construir uma sucessão x_n de pontos de $D_{g \circ f}$ distintos de a a convergir para a tal que se tem sempre $f(x_n) = b$; então, por um lado, pela hipótese acerca do limite de $g \circ f$, concluímos que $g \circ f(x_n)$ tende para c e por outro tem-se sempre $g \circ f(x_n) = g(b)$, pelo que, necessariamente, $c = g(b)$ e portanto, por definição, g é contínua em b , já que, por hipótese, c é o *limite excluído* de g em b . A condição é, assim, também necessária. \square

Este Teorema do *lime* da composta, apresentando uma condição necessária e suficiente, obviamente que já se pode aplicar ao exemplo já diversas vezes referido do limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}.$$

No entanto este novo teorema para além de ainda mais complexo (já que acrescenta uma terceira condição suficiente, enunciada na primeira alínea, às duas que já se tinham introduzido) tem características que o tornam muito pouco útil (dá talvez não se encontrar na literatura, tanto quanto sei): se utilizado a nível de uma iniciação à Análise no Secundário teria uma demonstração dificilmente acessível, atendendo ao que acima ficou exposto; se utilizado a nível do ensino superior, tendo sido abordado, por exemplo, o estudo das subsucessões e de alguns resultados simples relativos à existência de limite de sucessão envolvendo o referido conceito, ou então a definição de Cauchy de limite, a demonstração do teorema ficaria bastante simples, sendo o enunciado do teorema de certo modo “desproporcionado”, na respectiva complexidade, à demonstração, sobretudo porque, na prática, é a condição suficiente que se desejaria, em geral, utilizar. Ora um teorema cuja demonstração é tão ou mais clara ou tão ou mais curta do que o enunciado não apresenta obviamente grande utilidade matemática; o tempo perdido a decifrar e verificar as condições da hipótese em cada caso concreto poderia ser usado, talvez com vantagem, numa demonstração directa da tese nesse caso particular...

Continuidade da composta:

Com a definição de continuidade baseada no *limite incluído*, a continuidade da composta é uma trivialidade, já que é corolário imediato do teorema do limite da composta, razão pela qual aparece nas metas apenas com a menção “justificar”, o que se usa quando a demonstração pedida é muito imediata (FRVR 11.2):

10. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g e $a \in D_{g \circ f}$, que se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$ então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .

Já com a definição usual de continuidade baseada no *limite excluído*, mesmo presumindo que se adopta a definição que leva em conta o caso dos pontos isolados, tornar-se-ia difícil a nível do Ensino Secundário demonstrar este último resultado, mais uma vez por não se dispor em geral de resultados relativos a limites envolvendo subsucessões.

Esbarraríamos no mesmo escolho anteriormente detectado e que resulta da “assimetria” inerente à definição de *lime*, no sentido em que as sucessões x_n que se tomam “a tender para a ” não tomam o valor a mas não se impede que as sucessões $f(x_n)$ tomem o valor do respectivo limite...

Com efeito, se tentássemos uma demonstração directa, não incluindo a prévia demonstração de resultados adequados envolvendo o conceito de subsucessão iríamos deparar-nos com dificuldades talvez inesperadas apesar do carácter intuitivo das conclusões que é necessário extrair.

Excluindo já o caso trivial dos pontos isolados do domínio de $g \circ f$, se x_n for sucessão de pontos deste domínio a tender para a (por valores diferentes), $f(x_n)$ tende para $f(a)$, por definição de função contínua. Teremos agora de provar que $g(f(x_n))$ tende para $g(f(a))$; mas não basta aplicar a definição de continuidade de g baseada no *lime*, pois não sabemos se $f(x_n)$ toma ou não o valor $f(a)$... Assim, teremos de construir a partir de $f(x_n)$ subsucessões (designando-as ou não assim...) respectivamente com os termos diferentes de e iguais a $f(a)$, a partir das quais seja depois possível concluir que a sucessão $g(f(x_n))$ tende de facto para $g(f(a))$.

Note-se ainda que, com o *limite excluído*, mesmo tentando utilizar um resultado admitido sem demonstração relativo à continuidade da composta para justificar algumas das passagens ao limite anteriormente examinadas, poderiam surgir outras dificuldades. Voltando a examinar o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}},$$

poderíamos começar por definir funções contínuas f e g dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

e concluir, pela continuidade da composta, que $f \circ g$ é contínua em 0, donde se deduziria a existência e valor do limite em questão. Mas note-se que a função original tem domínio igual a:

$$\left] -\infty, -\frac{1}{\pi} \left[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n\pi}, -\frac{1}{(n+1)\pi} \right] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi} \right] \cup \left[\frac{1}{\pi}, +\infty \right[$$

pelo que 0 não é “interior a” nem “extremo de” nenhum intervalo não degenerado de interior contido neste domínio, o que exclui esta função (se for apenas prolongada ao ponto em que se calcula o limite) do âmbito em que a continuidade era estudada em muitos dos manuais utilizados com o anterior programa, embora 0 seja ponto de acumulação do referido domínio. Apenas alguns manuais abrangiam esta situação, mas entre estes também nem todos enunciavam depois correctamente as definições e/ou alguns dos resultados relativos a funções contínuas.

Teríamos assim ainda de argumentar que a existência e o valor do limite em 0 de $f \circ g$ implica a existência, com o mesmo valor, do limite em 0 de

$$\frac{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \frac{1}{x})}{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}},$$

o que, sendo fácil pela definição de limite, poderia ter de ser feito sem passar pela continuidade desta última função (prolongada a 0) e voltando antes ao âmbito dos limites de função, desde que também aqui não tivesse havido restrições de domínio que excluíssem esta situação.

Há que reconhecer que a opção de não introduzir no Secundário a noção de subsucessão e as propriedades essenciais dos limites que envolvem essa noção, nem os limites e continuidade “à Cauchy”, tem um “preço” para ambas as definições de limite.

Já vimos que, quanto à continuidade da composta, esse preço é apenas devido pelo *lime*, mas levantam-se dificuldades semelhantes, desta vez para ambas as definições, se pretendermos justificar as propriedades usuais envolvendo limites laterais; foi essa a razão pela qual nas metas se colocaram tais propriedades sem exigência de demonstração, apenas como “saber” (FRVR11-1):

5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f , que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Um pequeno preço suplementar a pagar pela “nova” definição: Quanto a estas questões há uma pequena distinção entre as duas definições, no caso em que se lida com o limite num ponto a não isolado do domínio, pois quanto ao *limite excluído* o problema reside apenas na possibilidade de se ter de lidar com sucessões tomando simultaneamente valores superiores e valores inferiores ao ponto em que se calcula o limite, ao passo que com o *limite incluído*, tais sucessões podem ainda tomar esse ponto como valor. Mas com qualquer delas, sem invocar propriedades envolvendo subsucessões, com os pré-requisitos habituais em vigor no Ensino Secundário, torna-se necessário admitir sem demonstração um resultado como o FRVR11-1.5 atrás reproduzido.

Já quanto à continuidade, com as definições envolvendo o *limite excluído*, pode concluir-se imediatamente (por definição) que uma função f é contínua num ponto a não isolado do domínio desde que tenha limite (“por valores diferentes”) nesse ponto igual ao valor da função, ao passo que com o *limite incluído*, se apenas soubermos que existe limite em a , por valores diferentes, igual a $f(a)$, também neste caso teríamos de utilizar propriedades envolvendo subsucessões para concluir a continuidade. Há aqui portanto um pequeno preço suplementar a pagar por se adoptar esta definição, que é afinal “mais exigente” para se verificar que determinada função é contínua num ponto não isolado do domínio.

Exemplifiquemos; para uma função como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Tanto com a definição de continuidade baseada no *lime* como com a que se baseia no *limi*, para concluirmos a continuidade de f em 1 teremos de invocar uma propriedade envolvendo limites laterais como a acima reproduzida (FRVR11-1.6) e que, como vimos, dificilmente poderá ser demonstrada no Secundário, não se dispondo de proprie-

dades envolvendo subsucessões. Já para uma função como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

com a definição de continuidade baseada no *limite excluído* é óbvio que f é contínua em 0 por definição, ao passo que com a definição que se baseia no *limite incluído* é necessário também aqui invocar qualquer propriedade como FRVR11-1.6.

Ainda poderíamos examinar o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Mais uma vez, com a definição baseada no *lime* é fácil verificar que f é contínua, por definição (desde que o limite em 0 seja considerado conhecido, pois com a abordagem através do *lime*, mesmo partindo do limite “notável” de $\frac{\text{sen } x}{x}$ em 0, dificilmente se poderia dispensar depois um recurso directo à definição de limite para justificar a existência e valor do limite de $\frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ no mesmo ponto...); com o *limi*, neste caso, sendo embora imediato passar do referido limite notável para o limite à direita de f em 0 (invocando apenas o teorema do limite da composta), não bastaria em seguida invocar FRVR11-1.6, já que não existe limite à esquerda... Poderíamos utilizar uma propriedade semelhante envolvendo o limite “por valores diferentes”, ou então começar por prolongar a função, por exemplo, por 1 aos valores negativos de x , aplicar FRVR11-1.6 a essa função e em seguida concluir que f é contínua em 0 por ser restrição de uma contínua...

Assim, há este pequeno preço a pagar por se substituir as “antigas” definições pelas “novas” na abordagem da noção de limite no Secundário, mas esse preço resulta apenas de, na definição de continuidade, se exigir “menos” (à partida) quando se usa o *lime* do que quando se usa o *limi* (basta testar o que se passa com um conjunto mais reduzido de sucessões); em contrapartida, essa menor exigência tem depois como consequência, entre muitas outras também atrás analisadas, que se torna tarefa mais complexa (fora do alcance usual do Ensino Secundário) justificar um resultado tão básico quanto a continuidade da composta. Assim este “preço” parece bastante exíguo em comparação com o preço de as manter...

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Bivar, A.; Grosso, C.; Oliveira, F.; Timóteo, M.C. 2014. [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Formacao/es_limite](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Formacao/es_limite_funcao_analise_de_uma_opcao.pdf)

[te_funcao_analise_de_uma_opcao.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Formacao/es_limite_funcao_analise_de_uma_opcao.pdf) (acedido a 27/8/2018)

[2] Costa, B.; Resende, L.C.R.; Rodrigues, E., *Espaço 12*, 2.^a edição, ASA (2010).

[3] Figueira, M.S.R. *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (1996).

[4] Ferreira, J.C. *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (1987).

[5] Gomes, F.; Viegas, C. *XEQ MAT, Matemática, 12.º Ano, Volume 2*, Texto Editores, Lisboa (2005)

[6] Guerreiro, J.S. *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, Lisboa (2008).

[7] Lima, E.L. *Curso de Análise, Volume 1*, IMPA, 5.^a edição, Rio de Janeiro (1987).

[8] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*, http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf (acedido a 27/8/2018).

[9] Neves, M.A.F.; Guerreiro, L.; Moura, A. *Funções III, Matemática A, 12.º ano*, Porto Editora, Porto (2010).

[10] Oliveira, A.J.F., “Limites Alternativos”, *Gazeta da Matemática*, N. 184, Mar. 2018, pp. 18-27.

[11] Silva, J.C., *Manual NiuAleph 12*, vol. 3 http://niualeph.eu/download/niualeph12/manual/niualeph12_manual_vol3_v01.pdf (acedido a 27/8/2018).

[12] Silva, J.S.; Paulo J.D.S. *Compêndio de Álgebra, 1º Tomo, 6º ano*, Braga (1968).

Por decisão própria, o autor não escreve segundo o novo acordo ortográfico.

SOBRE O AUTOR

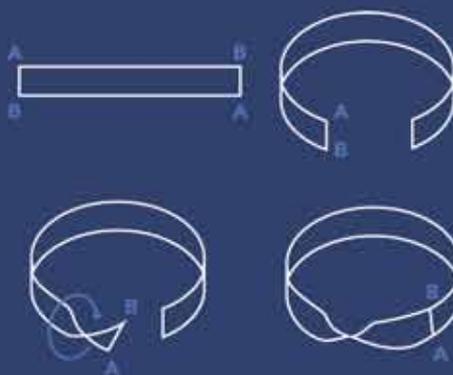
António Bivar é professor associado aposentado da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e foi membro da equipa de coordenação científica e co-autor dos novos programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário.

QUER SER SÓCIO DA SPM?

Veja as vantagens e condições no verso.



CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA



COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2017:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt

AUTORES

JOÃO NUNO TAVARES
Faculdade Ciências -
Universidade Porto
jntavar@fc.up.pt

JOÃO PEDRO PEDROSO
Faculdade Ciências -
Universidade Porto
jpp@fc.up.pt

OTIMIZADOR DE CARGA EM CONTENTORES

Fomos confrontados com o problema prático de embalar tubos num contentor. Mais concretamente, dada uma encomenda de vários tubos (para saneamento, condutas de abastecimento de água, etc.) há que calcular o número mínimo de contentores que devem ser utilizados para transportar os tubos da encomenda (*bin-packing problem*). A complexidade do problema aumenta dada a possibilidade de *telescopagem* dos tubos, isto é, os tubos podem ser colocados dentro de outros tubos de forma recursiva.

História. A empresa FERSIL (Cesar, Oliveira de Aze-
méis, Portugal), fabricante de tubos de plástico, re-
alizava manualmente a distribuição dos vários tubos de
uma encomenda (na ordem dos milhares) por vários con-
tadores, tentando minimizar o seu número. Este processo
era tratado pelos funcionários da empresa, com alto nível
de qualificação, por um processo de tentativa-erro, com o
auxílio de uma folha Excel. Este processo envolvia tempos
elevados de resposta aos pedidos dos clientes, com altos
custos operacionais. Após um estudo completo dos requi-
sitos, a Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
(FCUP), através do gabinete de prestação de serviços GE-
MAC (Gabinete de Estatística, Modelação e Aplicações
Computacionais) celebrou um contrato para criação de um
algoritmo de otimização de carga em contentores, e sua
implementação computacional, que permitiu uma solução
automática para o problema referido.

PROBLEMA MATEMÁTICO.

Os problemas de empacotamento de círculos têm a
sua origem na indústria de tubos, onde os custos de
transporte representam uma fração importante do custo
total da entrega do produto. Os tubos são produzidos por
uma máquina de extração contínua e cortados com um

comprimento igual ao do recipiente dentro do qual serão
enviados.

Antes de serem colocados no recipiente, eles podem ser
inseridos dentro de outros tubos mais grossos, de modo
que o uso do espaço do recipiente seja maximizado – um
processo chamado *telescopagem*. Como todos os tubos
ocupam o comprimento total do recipiente, maximizar a
carga do recipiente é equivalente a maximizar a área pre-
enchida com círculos (ou, mais precisamente, anéis/anéis)
numa secção transversal do contentor.

Neste projeto, propusemos um método heurístico que
provou ser capaz de produzir soluções muito boas para
fins práticos.

Descrevemos a seguir, muito sucintamente, uma forma
possível de abordar este problema. Quando se embala um
tubo (que tratamos como um círculo) no recipiente retan-
gular, este tubo é telescopado com outros tubos mais finos.
A *telescopagem* é feita de uma maneira recursiva, isto é,
qualquer tubo colocado no interior pode ser preenchido
com tubos mais finos disponíveis; isso é tentado recursi-
vamente até não haver candidatos que possam ser inse-
ridos. Após a conclusão da *telescopagem*, o tubo externo
(que tem possivelmente outros tubos internos) é inserido
no contentor; isso corresponde ao problema mais comum

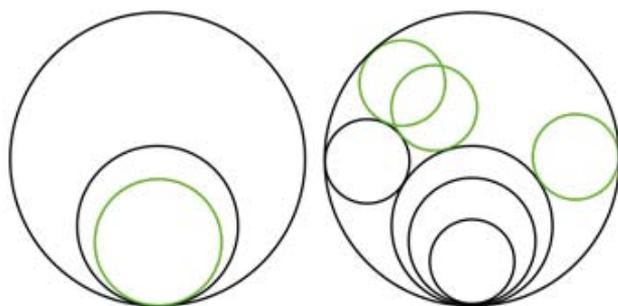


Figura 1. Possibilidades de empacotamento de círculos dentro de outro círculo (telescopagem): possibilidades de posicionamento, dados círculos fixos (a preto). Ver referência [1].

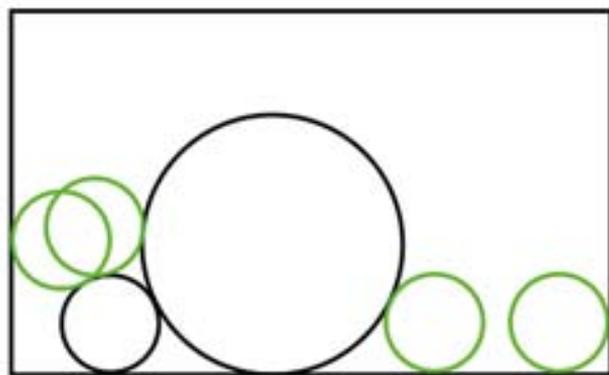


Figura 2: Possibilidades de empacotamento de círculos dentro de um retângulo: possibilidades de posicionamento, dados círculos fixos (a preto). Ver referência [1].

de agrupar círculos diferentes num contentor retangular. A ideia básica para escolher o local de colocação de um círculo é torná-lo tangente a dois outros objetos (a exceção é o primeiro círculo sendo empacotado dentro de um círculo; este é colocado na parte inferior, como mostra a figura 1). Pontos possíveis para a colocação de um círculo tangente a dois objetos são apresentados nas figuras 1 e 2.

Uma heurística para posicionar um círculo consiste em escolher posição de menor ordenada entre as posições possíveis para cada círculo e, para desempate, seleccionar a posição mais à esquerda entre posições com a mesma (menor) ordenada.

Essas ferramentas especificam um procedimento *ávido* para obter soluções para a versão de minimização de contentores nos problemas de empacotamento de círculos (RCPP): criar sequencialmente novos contentores para o embalamento de tubos, inserindo em cada um deles tubos telescopados, até que a lista de tubos remanescentes

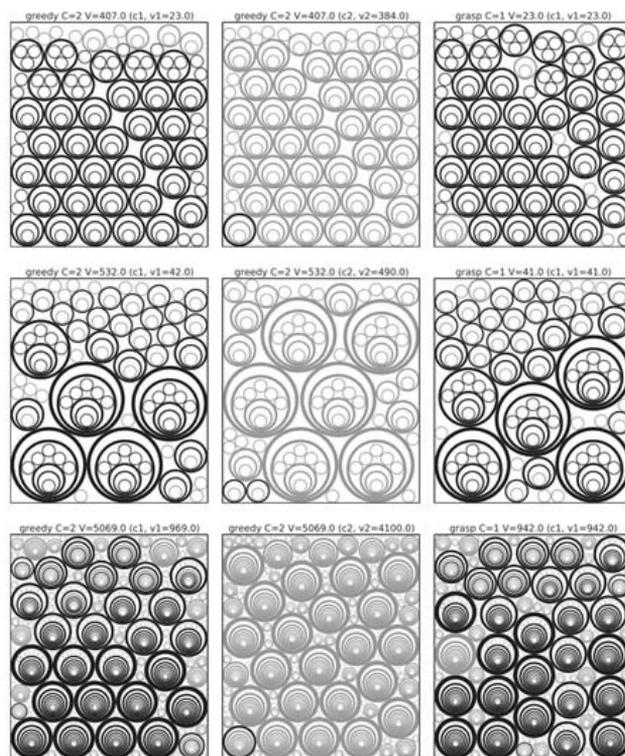


Figura 3. Gráficos de soluções obtidas com construção ávida (esquerda e centro) e com GRASP (mediana de soluções obtida em 25 observações independentes, à direita) para pequenas instâncias: s03i1 (topo), s05i1 (centro) e s16i1(inferior). Os tubos requeridos estão representados a preto e os não requeridos a cinza. Ver referência [1].

esteja vazia.

Quanto à versão de maximização de carga, o procedimento é adaptado da seguinte forma: após o acondicionamento de um contentor com os tubos exigidos, o contentor e os tubos internos são preenchidos com tubos não requeridos, novamente de forma ávida. Isso é feito a partir do tubo mais valioso não requerido, até que nenhum tubo adicional possa ser inserido sem se sobrepor, ou até que a lista de tubos não solicitados esteja vazia. Novos contentores são abertos apenas enquanto houver tubos exigidos não embalados.

Este problema é mais geral que o empacotamento de círculos, que é conhecido, na teoria da complexidade computacional, por ser do tipo NP. Um outro fator de complexidade resulta do facto de haver encomendas com tubos de vários comprimentos. Este problema foi também abordado, resultando na criação de um algoritmo de divisão longitudinal ótima do contentor em módulos (subconten-

tores virtuais).

Neste curto artigo, não é possível detalhar os modelos de otimização que foram usados. Estes modelos, suas limitações, e os algoritmos construídos estão extensivamente descritos na referência [1], para a qual remetemos a atenção do leitor mais interessado. Na figura 3 apresentamos algumas das soluções obtidas.

IMPLEMENTAÇÃO.

Foi proposto um algoritmo baseado num procedimento de busca adaptativa, com componente aleatória (GRASP = *greedy randomized adaptive search procedure*) sendo o seu desempenho avaliado num conjunto de instâncias de referência.

1. Estudos preliminares (quatro meses) – O objetivo desta fase foi a caracterização das necessidades reais dos promotores e a especificação do modus operandi, métodos e programas do *software* para a entrega do *workflow*, e as características necessárias para uma melhor integração no sistema de informação da Fersil.

2. Desenvolvimento de Algoritmo de Estudo e Distribuição (oito meses) - Esta fase consistiu no estudo, na modelação matemática e em rotinas de desenvolvimento que otimizam a colocação de dos tubos, incluindo a possibilidade de telescopagem. A abordagem final usou técnicas GRASP (*random and greedy adaptive search procedure*). Foram desenvolvidos códigos em Python, para empacotamento 3D de caixas, e para empacotamento e telescopagem de tubos.

RESULTADOS.

Com a implementação do programa de otimização de carga de contentores, destinado a aumentar a eficiência a curto

prazo dos processos associados ao orçamento e à execução de carga, conseguiu-se um impacto muito significativo na redução do custo desses processos e melhorias significativas na qualidade dos serviços prestados a clientes, com impacto imediato na sua satisfação. A solução implementada resultou numa importante melhoria dos processos logísticos e comerciais da Fersil, aumentando significativamente a sua competitividade.

BIBLIOGRAFIA

[1]. João Pedro Pedroso, Sílvia Cunha e João Nuno Tavares, "Recursive circle packing problems". *International Transactions in Operational Research* 23 (1), June 2014, DOI: 10.1111/itor.12107.

CONTACTOS

João Nuno Tavares (Project head)

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Rua do Campo Alegre s/n 4169-007, Porto Portugal, jntavar@fc.up.pt

João Pedro Pedroso

Departamento de Ciência dos Computadores, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Rua do Campo Alegre s/n 4169-007, Porto Portugal, jpp@fc.up.pt

FERSIL PORTUGAL

Zona Industrial de Cesar, Rua das Matas, Cesar – Oliveira de Azeméis (Portugal), fersil@fersil.com

Coordenação do espaço PT-MATHS-IN: Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, pt-maths-in@spm.pt.



Visite-nos em <https://clube.spm.pt>





GONÇALO MORAIS CONVERSA COM SAMUEL KOU



GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de
Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

Samuel Kou nasceu na China em 1974, tendo-se licenciado em Matemática Computacional pela Universidade de Pequim. Mais tarde mudou-se para os Estados Unidos, onde se doutorou em Estatística pela Universidade de Stanford em 2001. Nesse mesmo ano, começou a lecionar na Universidade de Harvard, onde é atualmente *Professor of Statistics* e *Professor of Biostatistics*. Recebeu vários prêmios e faz investigação em várias áreas relacionadas com Análise Estocástica, entre as quais, destacamos, aplicações à dinâmica de proteínas. Fica aqui parte da conversa que tivémos com este senhor de uma simpatia e de uma simplicidade tocantes.

GONÇALO Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a sua disponibilidade para conceder esta entrevista. Como surgiu o seu interesse em estudar matemática?

SAMUEL KOU Eu nasci e cresci no Noroeste da China. Mudei-me para Pequim quando fui para a universidade (Universidade de Pequim) onde me licenci em Matemática. Depois de ter terminado a licenciatura, fui para Stanford para estudar Estatística, área na qual fiz o mestrado e o doutoramento. Mudei-me novamente em 2001, desta vez para Harvard, onde desde então sou professor.

GONÇALO Antes do mestrado, estava mais ligado ao que se habitualmente se chama Matemática Pura, certo?

SAMUEL KOU Sim, estudava as coisas mais habituais como equações diferenciais e combinatória, por exemplo. Percebi que podia estudar estes temas com boas notas e com relativo sucesso. Contudo, à medida que ia

fazendo os diferentes cursos em Matemática Pura e em Matemática Aplicada, especialmente em Probabilidades e Estatística, percebi que a minha visão da matemática era a de alguém que a praticava no século XVIII ou no início do século XIX. Eu gostava imenso de estudar modelos matemáticos, mas precisava de os aplicar a algum fenómeno natural. Se nós olharmos para os grandes vultos desse período, como o Euler, o Gauss e outros, eles fizeram contribuições fundamentais em matemática, mas, por outro lado, sujavam as mãos, trabalhando com dados reais, sobretudo com dados astronómicos. Este tipo de matemática era, sem dúvida, o que mais me atraía. Comecei então a estudar modelos computacionais de modo a poder fazer aplicações com base em dados reais.

Quando chegou o momento de decidir qual o caminho que haveria de tomar no seguimento dos meus estudos, entre Matemática Pura e Matemática Aplicada, a escolha foi natural e decidi escolher algo relacionado com dados reais. Daí a minha escolha de ir estudar Estatística.



GONÇALO E será que a única forma de manter as mãos sujas, no sentido que referiu, é ir para Estatística?

SAMUEL KOU Não necessariamente. Por exemplo, podemos trabalhar em problemas relacionados com o clima, usando equações diferenciais, e ter um contacto próximo com fenómenos reais. Mas para mim, o que mais me atraía era estudar o que é aleatório e estocástico, tentar perceber as flutuações de algum fenómeno que tem também ruído. Por isso, fui para Estatística e para Stanford.

GONÇALO E passar da China para Stanford... Foi uma mudança enorme ou pelo facto de estar imerso no trabalho essa mudança foi de alguma maneira atenuada?

SAMUEL KOU Foi uma mudança enorme, quer a nível cultural quer a nível mental. Em primeiro lugar, como já referi, na China estava a estudar assuntos ligados a equações diferenciais. Em Stanford passei a estudar

de imediato Probabilidades e Estatística. Foi passar de uma visão orientada para os modelos para uma visão orientada para os dados.

GONÇALO Por outro lado, viver nos Estados Unidos da América deve ser diferente de viver na China...

SAMUEL KOU A distância cultural é imensa. Mais talvez do que em Portugal, na China os alunos são discípulos dos professores, seguindo o professor em tudo o que ele diga ou faça. Os alunos são absorvedores passivos de conhecimento, não colocando qualquer tipo de questões. Os professores são o conhecimento, sendo a única função dos alunos a de absorver a maior quantidade possível de conhecimento, tipo esponja. Nos Estados Unidos percebes imediatamente que as aulas são mais dinâmicas e que as pessoas têm uma maior ligação. E os alunos, quer seja uma pergunta profunda quer parva, são encorajados a fazê-la. Claro que no meu primeiro ano em Stanford não levantei quase nenhuma questão.

Eu percebo hoje que esta mudança foi muito importante, porque a cultura popular nos Estados Unidos é muito interessante.

GONÇALO E depois passou da Costa Oeste dos Estados Unidos para a Costa Leste. Esta também terá sido uma mudança enorme...

SAMUEL KOU Sem dúvida! A cultura académica em ambos os lados era muito diferente. Eu estive a estudar em Stanford entre 1997 e 2001. Foi no final desse período que rebentou a chamada bolha das *dotcoms*. Na altura, todos em Stanford, devido à proximidade com o Silicon Valley, falavam de *stock options* e de *startups*. Todos procuravam uma ideia. Este espírito empreendedor era uma marca de Stanford.

Harvard é algo mais parecido com a ideia de que temos do mundo académico. Por outro lado, do ponto de vista científico, Harvard está mais ligado às aplicações. Pelo menos, no caso das Probabilidades e Estatística.

GONÇALO Quando estava a preparar esta entrevista, foi uma agradável surpresa saber que ambos temos um interesse profundo no que habitualmente se chama de Movimento Browniano Fraccionário. Para os que nos leem, a diferença entre este e o mais habitual Movimento Browniano prende-se com o facto de no primeiro os incrementos não serem estatisticamente independentes.

Este modelo foi criado pelo Mandelbrot para tentar explicar os comportamentos dos mercados financeiros. No entanto, este mesmo modelo, no seu caso, tem aplicações bem diversas...

SAMUEL KOU Quando cheguei a Harvard, tive a oportunidade de trabalhar com um nome importante em Química e um dos nomes principais de uma área então recente designada por *Single-Molecule Biophysics*.

Com a tecnologia de dispomos atualmente, podemos ampliar ao ponto de visualizarmos o comportamento individual das moléculas. Falo especificamente das moléculas de proteínas. Do ponto de vista experimental, isto foi um avanço extraordinário, com muitas áreas diferentes envolvidas. Este avanços aconteceram no final dos anos 90 e foram de tal maneira revolucionários que o Nobel da Química de 2014 foi atribuído a cientistas que fizeram contribuições fundamentais nesta área.

Quando em 2001, falei com o Sunney Xie e ele me descreveu esta área, fiquei de imediato fascinado. Li de seguida uma série de artigos sobre o assunto e tive de aprender bastante Física Estatística ao longo do processo.

O fenómeno interessante é o seguinte. A partir do momento em que podemos ampliar ao ponto de seguir as trajetórias individuais das moléculas, numa escala *subnano*, passamos a viver num mundo governado pela Mecânica Estatística e pela Mecânica Quântica. Então todos os fenómenos têm necessariamente uma natureza estocástica. Pelo facto de as moléculas das proteínas serem relativamente grandes, podes iluminar as extremidades da molécula e fazê-la aparecer num microscópio moderno. A partir daqui, podemos estudar, por exemplo, a evolução da estrutura tridimensional da molécula. Era então necessário encontrar um modelo matemático que permitisse descrever esta dinâmica. Os modelos clássicos são os tradicionais modelos brownianos de difusão. Isto implica que são processos sem memória: o que acontece neste preciso momento é independente do que aconteceu em qualquer instante do passado. Por outro lado, olhando para os dados, percebemos que, de facto, existe uma correlação entre instantes diferentes e, portanto, o processo tem memória. Uma das coisas que tentámos de seguida perceber foi como é possível a molécula ter memória. Foi neste momento que chegámos à equação de Langevin generalizada e à possibilidade de nela introduzirmos uma componente que sintetiza a memória do processo.

Quando nas equações substituímos o processo de Wiener pelo movimento Browniano Fracionário, vimos

que o nosso modelo se ajustava muito melhor aos dados do que os modelos tradicionais.

GONÇALO E, de um ponto de vista intuitivo, de onde vem a memória do processo?

SAMUEL KOU A ideia fundamental tem origem na conceção do Movimento Browniano apresentada pelo próprio Einstein. O Movimento Browniano vem de um modelo de difusão. Quando, por exemplo, imergimos uma partícula em água, com uma massa muito superior às das moléculas de água, o Movimento Browniano é o resultado da colisão desta com as partículas da água. Pelo facto de a partícula que imergimos ser muito maior do que as partículas de água e por estas serem em enorme número, a partícula perde memória.

Quando mudamos a escala, quando conseguimos acompanhar o movimento individual das moléculas, contra o que é que estas moléculas colidem? Contra outras moléculas de tamanho comparável! Deste modo, ao contrário do que acontecia no modelo clássico, as moléculas já não perdem memória das colisões recentes. É por isso que este processo tem memória. Mais tarde, este modelo foi comprovado numa experiência independente.

GONÇALO Um dos aspetos que mais me fascinam na dinâmica estocástica prende-se com o seguinte. Quando olhamos para a teoria dos sistemas dinâmicos, percebemos que com um modelo puramente determinista podemos gerar uma complexidade imensa. Contudo, é difícil gerar um tipo específico e determinado de complexidade. Com a dinâmica estocástica isto é possível...

SAMUEL KOU É verdade. Os modelos tradicionais apresentam uma certa rigidez que só é ultrapassada quando introduzimos uma componente estocástica.

GONÇALO Quando se introduz o Movimento Browniano Fracionário nos modelos, uma das coisas inovadoras que ele permite em comparação com os modelos clássicos é a ocorrência de acontecimentos extremos no sentido estatístico do termo. Nas experiências que realizavam, foi possível observar estes acontecimentos extremos ou as *power laws* que lhes estão associadas?

SAMUEL KOU O que conseguimos observar são as *power laws*. Dito de outra maneira, as observações mostram um ajuste bastante bom a fenómenos com caudas pesadas.



GONÇALO Um outro facto que apresenta é o de a chamada *big data* estar ainda afastada do mundo académico...

SAMUEL KOU Em primeiro lugar, *big data* é uma expressão empregue em muitas situações diferentes. No Silicon Valley, em Wall Street e na indústria farmacêutica, usa-se essa expressão. No entanto, e a história recente do Facebook é prova disso, podemos usar uma quantidade enorme de dados para tentar perceber tendências sociais. Na indústria farmacêutica, por outro lado, uma quantidade enorme de dados pode ser o contributo para que se possa, um dia, desenvolver um medicamento individualizado para cada paciente. Por esta razão, mesmo em contextos diferentes, todos estão muito excitados com as possibilidades futuras do uso de uma enorme quantidade de dados.

Ao mesmo tempo, já existem pessoas no mundo académico a trabalhar com este tipo de tecnologia, por exemplo, na classificação de imagens.

GONÇALO Mas quando vamos ver os artigos que estabeleceram as chamadas *deep neural networks*, alguns destes, e não há muito tempo, foram rejeitados pelas revistas científicas apesar de os resultados práticos que eles apresentavam serem muitas vezes devastadores para o que se conseguia fazer então...

SAMUEL KOU Essa é uma descrição interessante da realidade. É, de facto, necessário que passe algum tempo para que as novas ideias sejam aceites. Quando falamos especificamente da área que referiste, do chamado *deep learning*, grande parte desse trabalho tem um aspeto mais empírico, sem grandes desenvolvimentos teóricos. Neste preciso momento ainda não sabemos de uma forma profunda por que razão essas ideias funcionam, de que forma obtemos a melhor taxa de aprendizagem para uma determinada tarefa, por exemplo. Este é o facto decisivo para que estas ideias sejam ainda de difícil aceitação dentro da comunidade científica. Por outro lado, eu

vejo isto como uma enorme oportunidade, pois é uma área fértil para se poder, no futuro, fazer contribuições importantes.

GONÇALO Quando pensamos em modelos matemáticos aplicados a ciências sociais, uma coisa que sempre me intrigou foi pensar que se o modelo for suficientemente bom a prever um determinado fenómeno, ao ponto de as pessoas mudarem o seu comportamento com base nas previsões deste, isso iria, em última análise, contradizer as próprias previsões do modelo...

SAMUEL KOU Por outras palavras, o que estás a perguntar-me é acerca da possibilidade de um modelo ser tão bom que possa derrotar-se a ele próprio...

GONÇALO Precisamente!

SAMUEL KOU Ainda estamos muito longe desse ponto. Hoje as autoridades ainda não levam estes modelos demasiado a sério, de modo a que possa acontecer o que estás a descrever. Se o que descreves pudesse acontecer então os modelos passariam a ter uma componente sobre a forma como as pessoas reagem ao próprio modelo.

GONÇALO Mais uma vez queria agradecer o facto de me conceder esta entrevista.

SAMUEL KOU Obrigado!



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

CIÊNCIA E POESIA

A ciência aplicada e a ciência fundamental são duas formas de encarar a ciência e que se completam entre si. Embora quase sempre a ciência aplicada seja tida como mais relevante.

Muito se tem debatido sobre se as universidades e os laboratórios científicos devem dedicar-se maioritariamente à ciência aplicada em detrimento da chamada ciência básica (ou fundamental), onde a aplicabilidade tecnológica não é garantida nem direcionada para áreas específicas. A ciência aplicada procura resolver questões prementes em áreas de relevância económica ou social (telecomunicações, saúde, transportes, armamento, etc), enquanto a ciência pura tende a ser guiada por mera curiosidade e o desejo de aumentar o conhecimento humano, mesmo que este não represente um ganho material imediato. Algumas questões associadas a este domínio podem ser vistas como meramente teóricas ou inconsequentes – Como começou o universo? Qual é a natureza do tempo? O que é a consciência? E são muitas vezes criticadas por produzirem teorias abstratas e inconsequentes.

A evolução da prática científica e a forma como esta é financiada têm levado as instituições a favorecer as áreas mais tecnológicas, já que estas resultam num maior número de patentes e publicações com impacto e num maior investimento por parte das empresas privadas. *“It’s the economy, stupid”* como foi tantas vezes repetido pela campanha de Bill Clinton em 1992. Porém... será do

nosso interesse, enquanto espécie, abdicar das perguntas fundamentais ou reservar-lhes um espaço residual nas universidades públicas? Tentemos uma resposta.

Há dois argumentos a favor da ciência básica: O primeiro é que muitos dos avanços tecnológicos mais significativos foram um produto secundário da tentativa de responder às grandes questões. Basta-nos pensar nos primeiros instrumentos óticos usados por astrólogos e filósofos, na química que nasceu da busca pela pedra filosofal ou, mais recentemente, nos avanços promovidos pelos programas espaciais ou que surgiram no CERN enquanto se procuravam as partículas elementares.

O segundo argumento, que me parece o mais forte, é que a nossa natureza enquanto seres humanos nos leva a querer respostas e a persegui-las pelo simples prazer de saber mais. A ciência fundamental aproxima-se da poesia, ambas são ferramentas do intelecto, expressões máximas da humanidade, de seres pensantes que se definem num confronto contínuo com o mistério. À pergunta “porque é que havemos de fazer ciência fundamental?” podemos responder simplesmente “porque somos uma espécie de poetas”.

OLIMPIADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA ORGANIZADAS PELA SEGUNDA VEZ EM PORTUGAL

A 33.^a edição das Olimpíadas de Ibero-Americanas de Matemática (OIAM) decorreu, de 21 a 29 de setembro, entre Monte Gordo e La Rábida. Pela primeira vez, a competição foi uma organização conjunta da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Real Sociedad Matemática Española. Mas Portugal já tinha sido anfitrião destas Olimpíadas em



2007, em Coimbra. Nesta edição participaram 22 países e 80 alunos. As OIAM atribuíram sete medalhas de ouro, 19 de prata e 22 de bronze. Portugal, Espanha, Argentina e Brasil conquistaram as medalhas de ouro do certame. Espanha teve o aluno mais bem qualificado na tabela, no entanto, a equipa que somou mais pontos foi a Argentina. Pedro Moreira Fernandes (Pombal, 12.^o ano) é o responsável pela medalha de ouro portuguesa. Kevin Luiz Ponte Pucci (Chaves, 11.^o ano), e Rodrigo Tuna de Andrade (Matosinhos, 11.^o ano) conquistaram as medalhas de prata. Ana Sofia Silva Guerreiro (Loulé, 12.^o ano), o elemento feminino da equipa, foi distinguido com uma menção honrosa, atribuída a quem tenha uma pergunta com a pontuação máxima. O evento contou no seu Comité de Honra com o Presidente da República Portuguesa, Professor Marcelo Rebelo da Sousa, e Sua Majestade, Rei Dom Felipe VI. A cerimónia de abertura teve lugar no dia 24 de setembro, no Centro Cultural António Aleixo, em Vila Real de Santo António. Para comemorar a ocasião, foi lançado um postal inteiro em parceria com os Correios de Portugal, com a imagem que representa estas Olimpíadas. A cerimónia de encerramento decorreu no dia 28 de setembro em La Rábida. A participação de Portugal nas OIAM é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática e a preparação dos alunos é assegurada pelo Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação, a Ciência Viva, o Novo Banco, a Fundação Calouste Gulbenkian e a Pathena apoiam a realização das Olimpíadas.

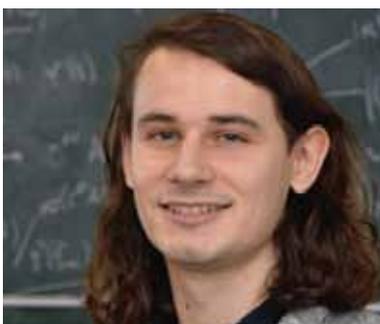
CONCURSO PARA O LOGÓTIPO DO DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA



A IMU (International Mathematical Union) está a liderar um projeto para declarar o Dia do Pi, comemorado a 14 de março, o Dia Internacional de Matemática (IDM). Se a UNESCO decidir favoravelmente, a primeira comemoração será a 14 de março em 2020. Neste momento a IMU lançou um concurso para o logótipo do IDM. Todas as propostas devem ser enviadas por e-mail para idm@mathunion.org. O prazo para a apresentação de propostas para a competição é 31 de dezembro de 2018. A decisão da IMU será conhecida em abril de 2019. Consulte o regulamento da competição em <http://euro-math-soc.eu/news/18/10/12/international-day-mathematics-logo-competition>.

MEDALHAS FIELDS 2018

As Medalhas Fields 2018 foram atribuídas durante a cerimónia de abertura do Congresso Internacional de Matemática (ICM), que decorreu no Rio de Janeiro, de 1 a 9 de agosto. Os mais recentes galardoados são: o alemão Peter Scholze, o indiano Akshay Venkatesh, o italiano Alessio Figalli e o iraniano Caucher Birkar. A Medalha Fields é o mais importante prémio em matemática e é atribuída de quatro em quatro anos pela União Matemática Internacional, desde 1936. Um momento caricato marcou esta cerimónia: apenas alguns minutos depois de conquistar a medalha, Caucher Birkar viu a sua medalha roubada dentro do local do evento. O iraniano tinha deixado a medalha dentro da sua pasta numa mesa durante a cerimónia. A medalha, feita de ouro, corresponde a um valor de mais de quatro mil euros.



ADÉLIA SEQUEIRA NA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS

Adélia Sequeira, professora do Instituto Superior Técnico, acaba de ser eleita membro correspondente nacional da Academia das Ciências de Lisboa. Adélia Sequeira é coordenadora da Área Científica de Análise Numérica e Análise Aplicada e diretora do Centro de Investigação em Matemática Computacional e Estocástica – CEMAT/IST-UL. É doutorada em Análise Numérica, desde 1981, pela École Polytechnique em Paris, França, e em Matemática, desde 1985, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. De 2001 a 2007, foi diretora do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CEMAT/IST). Atualmente, os seus interesses de investigação centram-se na área da modelação matemática do sistema cardiovascular e simulações de problemas intimamente relacionados de relevância clínica associados a doenças vasculares: progressão de aneurismas cerebrais específicos do paciente; e ações biomecânicas e bioquímicas em vasos sanguíneos, com aplicação nos processos de trombose e aterosclerose.





140TH EUROPEAN STUDY GROUP WITH INDUSTRY

AUTORA: Raquel Barreira – Instituto Politécnico de Setúbal e CMAF-CIO

Entre 4 e 8 de junho de 2018 decorreu, no Barreiro, o 140th European Study Group with Industry (ESGI140), organizado pela Escola Superior de Tecnologia do Barreiro do Instituto Politécnico de Setúbal sob coordenação da PT-MATHS-IN. Foi o décimo segundo ano consecutivo em que este método de transferência de tecnologia e conhecimento entre a matemática e a indústria se realizou em Portugal. Durante uma semana mais de 30 participantes, nacionais e estrangeiros, de várias áreas da matemática, trabalharam em colaboração em desafios lançados pelas empresas participantes. O ESGI140 contou com a presença das empresas Infraquinta, gestora de infraestruturas da Quinta do Lago, e a Lap2go, uma empresa de cronometragem e gestão de eventos.

A Infraquinta, pela sua localização e o seu contexto sócio-económico, confronta-se com desafios muito particulares e foram dois os que apresentou ao Study Group. O primeiro disse respeito à estruturação das taxas de consumo de água e saneamento. Estando localizada numa zona turística (a Quinta do Lago), possui um número elevado de clientes com grande consumo de água devido à necessidade de rega de grandes zonas relvadas e ao enchimento de piscinas. Além disso, a população da região em que se insere é flutuante ao longo do ano. As receitas são baseadas em taxas fixas e taxas variáveis, de acordo com o consumo de água, divididas por escalões de consumo. A empresa pretende implementar mecanismos que auxiliem o seu planeamento e encontrar o equilíbrio entre as taxas fixa e variável. Recentemente, deram aos clientes a possi-

bilidade de adoção de um segundo contador para consumos que não produzem saneamento, geralmente as regas, com uma taxa fixa superior e uma taxa variável do consumo sem as componentes de resíduos urbanos e saneamento de águas residuais, mas receiam que opção torne a sustentabilidade da empresa vulnerável às alterações climáticas, pelo que foi pedido que este aspeto fosse também tido em conta. Além disso, sendo o setor da água regulado, é preciso atender às recomendações do regulador (a ERSAR – Entidade Reguladora dos Serviços da Água e Resíduos).

O grupo de participantes que trabalhou este desafio desenvolveu um modelo de otimização que minimiza o aumento máximo das taxas, tendo em conta as recomendações da ERSAR e de modo a que a empresa continue a poder garantir disponibilidade financeira para a manutenção da infraestrutura. Com base no modelo construído, foi possível apresentar resultados para vários cenários de diminuição do consumo devido a alterações climáticas e mudança de comportamento dos consumidores, conjugados com variações no número de clientes que poderão vir a adotar um segundo contador dedicado à rega.

O segundo desafio lançado pela Infraquinta foi o de antecipar a necessidade de substituição dos seus contadores de água antes da sua avaria total, tendo por base os dados de consumo. Como ponto de partida, forneceram aos participantes três casos de estudo, através da disponibilização de séries temporais de consumos da água. Dada a sazonalidade do consumo naquela região, foi necessário utilizar uma metodologia de análise da série



temporal que tivesse isso em conta. Foi utilizado um método de decomposição para extrair a componente de sazonalidade e assim permitir analisar a tendência da série temporal. Desta forma, foi possível detetar a perda de performance do contador através da observação de quebras estruturais na tendência e da aplicação de um modelo linear simples entre quebras consecutivas. O que foi sugerido é que a empresa adote medidas de controlo, através da implementação de um algoritmo que tenha por base a metodologia proposta, e que em conjunto com outras variáveis de decisão permita identificar os contadores que devem ser substituídos.

A Lap2go apresentou um desafio relacionado com a gestão de eventos de corrida de estrada com um número elevado de participantes (na ordem dos milhares). Neste tipo de eventos é comum utilizar uma estratégia de partida segmentada, por vagas, com tempos de partida desfasados, de forma a evitar congestionamentos e quedas. Geralmente, a segmentação dos atletas é decidida pela organização tendo por base o tempo esperado de chegada de cada atleta, que deve fornecer no momento da inscrição o comprovativo do tempo realizado numa prova anterior para a mesma distância. A tecnologia utilizada pela empresa é baseada na leitura por radiofrequência de chips que os atletas transportam e que, tipicamente, são lidos na partida, na chegada e nalguns pontos intermédios de controlo. Foram fornecidas pela empresa as leituras para uma prova em particular e indicada qual a estratégia de segmentação que tinha sido adotada. Da análise dos dados, foi possível perceber que a estratégia de segmentação não terá

sido a mais eficaz, dado que se observou algum congestionamento. Através da construção de um sistema de equações lineares ordinárias que descreve a variação de posição dos atletas, tendo também em conta o impacto da topografia do percurso, foi possível simular numericamente a corrida apresentada como caso de estudo e realizar simulações de outras estratégias de segmentação possíveis (diferentes números de vagas e diferentes de tempos de partida entre vagas). Foi também proposto um modelo de otimização dos tempos de partida.

Os representantes das empresas tiveram oportunidade de ir acompanhando o progresso do trabalho ao longo da semana, esclarecendo dúvidas que foram surgindo, e mostrando grande satisfação no dia das apresentações finais devido à qualidade dos resultados alcançados durante a semana. Os grupos fizeram várias recomendações às empresas e apresentaram sugestões de desenvolvimento de trabalho futuro, como tem sido habitual nestes Study Groups. Os Study Groups, que se realizam um pouco por toda a Europa, proporcionam uma experiência muito enriquecedora tanto para o tecido económico, que beneficia dos resultados alcançados durante o Study Group, como para os participantes académicos, que têm assim oportunidade de trabalhar num problema real, em equipas multidisciplinares, sendo muitas vezes expostos a novas abordagens e metodologias e estabelecendo novas colaborações. Estes encontros podem constituir-se também como um ponto de partida para colaborações mais duradouras entre a academia e a indústria, com benefícios para ambas as partes.

Mais informações sobre o ESGI140 em www.esgi140.ips.pt.

MAIA RECEBERÁ 15.º CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

A 15.ª edição do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM15) está marcada para o dia 29 de março de 2019, na Maia. As inscrições para esta competição deverão ser efetuadas em <https://cnjm19.wixsite.com/pedroucos>. O CNJM é organizado pela Ludus, pela SPM, pela APM e pela Ciência Viva. Nesta edição, o jogo Atari Go vem substituir o Flume.



ICM 2022 SERÁ EM SÃO PETERSBURGO



São Petersburgo será o anfitrião do próximo International Congress of Mathematicians (ICM), o maior congresso internacional da comunidade matemática, que decorrerá de 15 a 23 de agosto de 2022. Paris foi o outro país que apresentou candidatura. O ICM realiza-se de quatro em quatro anos, sob a alçada da União Matemática

Internacional (IMU), e é durante a cerimónia de abertura, no primeiro dia do congresso, que são atribuídas as mais importantes distinções na área da matemática: as Medalhas Fields, o Prémio Gauss e a Medalha Chern. Veja a página oficial: <http://icm2022.ru/en/icm-in-st-petersburg/>.



IMM7 EM ÉVORA

O 7.º Encontro Ibérico de Matemática decorreu na Universidade de Évora, entre os dias 12 e 14 de outubro. O evento é uma organização conjunta da Sociedade Portuguesa de Matemática e da Real Sociedad Matemática Española. Seguindo a tradição dos encontros anteriores, foi estruturado em três áreas científicas principais. Nesta edição, as áreas científicas foram: Matemática e Biologia, Big Data, e Análise Harmónica e Complexa. O encontro, com cerca de 60 participantes, teve como oradores principais Daniel Abreu (Austrian Academy of Sciences), Carlos Braumann (Univer-

sidade de Évora), Emilio Carizosa (Universidad de Sevilla), Joan Mateu (Universitat Autònoma de Barcelona), Joan Saldaña (Universitat de Girona) e João Xavier (IST, Universidade de Lisboa). O Encontro Ibérico de Matemática realiza-se desde 2007 e tem como objetivo incentivar a colaboração entre matemáticos portugueses e espanhóis e desenvolver a investigação matemática na Península Ibérica. As edições anteriores do Encontro Ibérico de Matemática decorreram em Lisboa (2007), Badajoz (2008), Braga (2010), Valladolid (2012), Aveiro (2014) e Santiago de Compostela (2016).

Gazeta de atemática

TABELA DE PUBLICIDADE 2019

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

UMA AGENDA PARA O BIÉNIO 2018-2020

A direção da SPM, que tomou posse no passado mês de setembro, é composta por investigadores e por professores do Ensino Básico e do Ensino Secundário, do Ensino Politécnico e do Ensino Universitário, de diversas áreas e de vários pontos do País. Trata-se de uma lista equilibrada, integrando membros que se estreiam nestas funções e outros que acumulam já uma longa experiência diretiva. Se, por um lado, o conhecimento profundo da atividade presente da SPM, da sua estrutura e da sua situação atual é indispensável para enfrentar com segurança o futuro, as instituições devem também saber renovar-se através de novos dirigentes e de novas ideias.

A nossa Sociedade percorreu um longo caminho desde a sua fundação, afirmando-se hoje de forma inequívoca no panorama nacional como uma instituição de referência nas três componentes que constituem a sua principal missão: a promoção da investigação científica, a defesa da qualidade do ensino e a divulgação da matemática para públicos diversificados.

A par da SPM, também o País percorreu um longo caminho nas últimas décadas e devemos olhar o futuro com algum otimismo: a atividade de investigação tem-se desenvolvido de forma robusta. A qualidade da investigação produzida em Portugal aproxima-se a passos largos da dos melhores centros a nível europeu. No que diz respeito ao ensino, após os catastróficos resultados obtidos nos anos noventa do século XX, o desempenho dos alunos portugueses está hoje, tendo em conta os últimos estudos internacionais (2015), totalmente alinhado com o desempenho dos jovens oriundos dos países mais desenvolvidos da OCDE.

A nossa Sociedade não pode naturalmente chamar a si a responsabilidade por estes sucessos. Contudo, não devemos coibir-nos de ter orgulho na nossa contribuição para tais progressos, tendo-nos mantido sempre firmes e

coerentes ao longo de largos anos na defesa da excelência da atividade matemática nacional em todos os seus aspectos. A esse propósito, é também relevante salientar a importância das diversas atividades de divulgação realizadas ou apoiadas pela SPM, que, dirigidas a um público alargado, realçam a importância do conhecimento da matemática.

É objetivo da atual direção dar continuidade e reforçar estas diferentes linhas de ação.

No plano interno, procuraremos auxiliar o trabalho das delegações regionais, no respeito da sua autonomia, e apoiar as duas secções autónomas da SPM: o Seminário Nacional de História da Matemática e a Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação. Pretendemos igualmente promover campanhas de angariação de novos sócios, ação essencial para manter a vitalidade da SPM.

A atividade editorial constitui também uma importante missão da Sociedade. É essencial continuarmos a apoiar a *Portugaliae Mathematica*, cuja qualidade e a reputação internacional têm vindo a crescer de forma sustentada. Também a *Gazeta de Matemática* e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, revistas centrais da história da nossa Sociedade, mantêm hoje intacta a sua relevância

no panorama matemático nacional. À margem destas publicações periódicas, procuraremos editar outras obras de interesse para a comunidade matemática portuguesa. Por outro lado, os Encontros são momentos privilegiados para a reunião de investigadores, professores, estudantes e público em geral. Além da Escola de Verão e do Encontro Nacional da SPM, a realizar respetivamente em 2019 e 2020, contamos organizar ou coorganizar eventos científicos nacionais e internacionais com diversos parceiros, como universidades, institutos politécnicos, centros de investigação, sociedades científicas nacionais e estrangeiras, o International Center for Mathematics (CIM) ou a Comissão Nacional de Matemática (CNM).

Os ensinós Básico e Secundário constituem um setor em constante transformação que a SPM tem o dever de continuar a acompanhar de perto, em defesa de uma formação em matemática de qualidade para os jovens. Temos, pois, o objetivo de continuar a dinamizar o Gabinete para o Ensino Básico e Secundário (GEBS), promovendo análises, debates e emitindo pareceres rigorosos sobre as alterações que vão sendo implementadas nesta área, assim como criar novas estruturas de apoio ao ensino da matemática. Tal como o GEBS, teremos também em vista o desenvolvimento do Centro de Formação da SPM, e continuaremos, nos termos legais, a cumprir a nossa missão no Centro de Acreditação e Avaliação de Manuais Escolares.

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), organizadas em parceria com a Universidade de Coimbra, são uma das nossas atividades-bandeira de que muito nos orgulhamos. Envolvem anualmente mais de 70 000 alunos e desempenham um papel ímpar no contacto dos jovens portugueses com a matemática e no despertar de paixões e vocações nessa área e em áreas científicas afins.

É nosso objetivo dar continuidade ao alargamento da adesão a esta iniciativa, tornando-a ainda mais visível para o público em geral. As equipas portuguesas que representam o País nas competições internacionais (Olimpíadas Internacionais de Matemática, Olimpíadas Ibero-Americanas, Olimpíadas da CPLP) têm alcançado resultados que seriam impensáveis ainda há poucos anos. São um motivo de orgulho redobrado e merecem naturalmente o máximo apoio por parte das estruturas diretivas da SPM.

Todas estas atividades têm de ser complementadas com ações de divulgação junto da população em geral e dos jovens em particular. Assim, continuaremos a promover a realização das Tardes de Matemática, procurando alargar esta iniciativa ao maior número possível de locais. No que diz respeito a estas atividades de divulgação, contamos com um grande número de parceiros institucionais (Museu Nacional de História Natural e da Ciência, Associação Ludus, Associação de Professores de Matemática, entre outros), sendo nosso propósito prosseguir a coorganização de eventos com estas entidades, como o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, o ciclo de conferências Matemática às Terças e a Feira da Matemática.

À imagem das direções passadas, a atual direção tem pela frente uma desafiante e ambiciosa agenda, cuja consecução só tem sido possível graças à generosidade dos colaboradores mais ativos bem como de todos os associados.

Tomamos a liberdade de contar desde já com o seu precioso contributo!

Saudações matemáticas,
Filipe Oliveira, presidente da direção

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: *gazeta@spm.pt*.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2019

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

