N. 0187

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXX | Mar. 2019 | 4,20€

Saiu no ano passado!

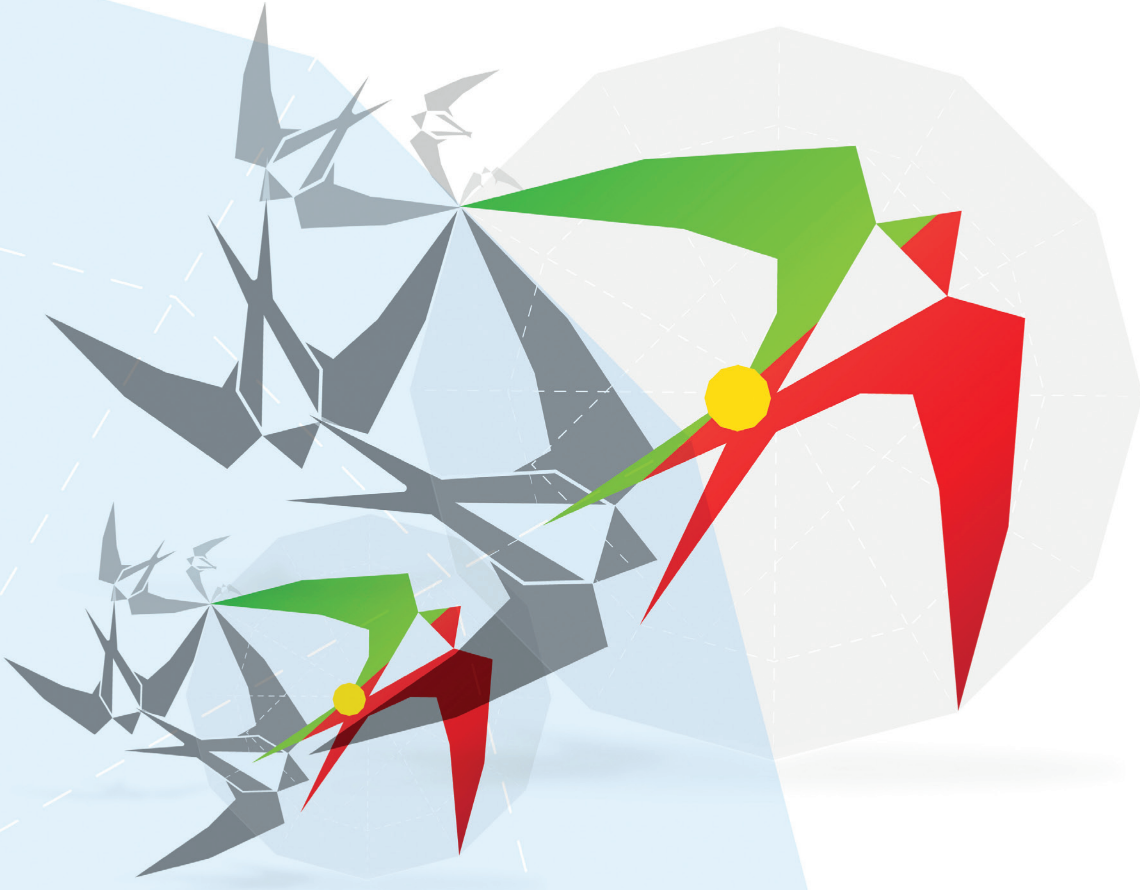
Transmissão de luz em placas transparentes

Manuela Ramos Silva e Pedro Pereira da Silva

Uma ideia natural funciona sempre

entrevista com Pascal Maroni

Kenier Castillo e Zélia da Rocha



MATEMÁTICOS PORTUGUESES PELO **MUNDO**

24-26 Junho

Departamento de Matemática da FCUP
Universidade do Porto

https://cmup.fc.up.pt/matematicos/

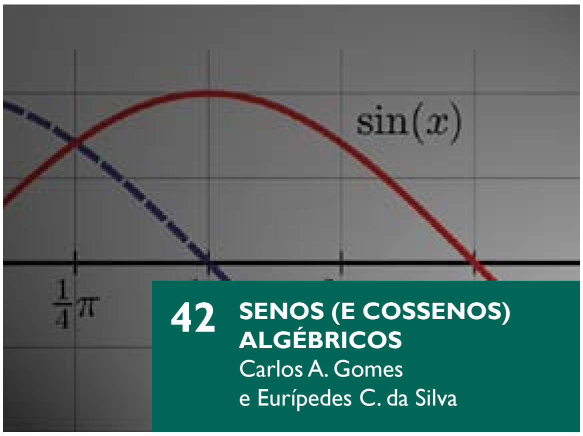
Comité Organizador:
Jorge Milhazes de Freitas
Samuel Lopes
Diogo Oliveira e Silva

Comité Científico:
José Ferreira Alves
Irene Fonseca
André Neves
Diogo Oliveira e Silva
Marcelo Viana

Centro de Matemática Universidade do Porto
Sociedade Portuguesa de Estatística
spm Sociedade Portuguesa de Matemática
Centro Internacional de Matemática
Faculdade de Ciências Universidade do Porto
FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
Santander Universidades
U.PORTO

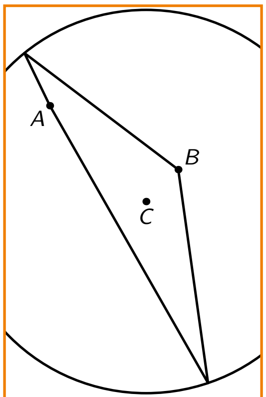
ÍNDICE

24 UMA IDEIA NATURAL FUNCIONA SEMPRE
ENTREVISTA COM PASCAL MARONI
Kenier Castillo e Zélia da Rocha

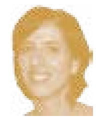


42 SENOS (E COSSENOS) ALGÉBRICOS
Carlos A. Gomes e Eurípedes C. da Silva

36 CONVERSA COM..
Patrícia Gonçalves



21 APANHADOS NA REDE
Quando os Amadores Superam os Profissionais



Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

PROCURA-SE MATEMÁTICO

A formação matemática ajuda a desenvolver capacidades de raciocínio lógico e competências na resolução de problemas e na tomada de decisões que têm vindo a ser valorizadas por empregadores em muitos setores da indústria e de serviços nacionais e internacionais. O mundo precisa de mais talento matemático.

Os avanços tecnológicos e os progressos científicos abrem uma ampla variedade de oportunidades de carreira aos matemáticos. Curiosamente, essas carreiras fora do meio académico raramente surgem com o título de "matemático". Os perfis de trabalho são muito variados e estão frequentemente ligados à informática, à ciência dos dados ou à gestão. Os objetivos apontam normalmente para a resolução de problemas. Os ramos de atividade são diversos, salientando-se os que estão relacionados com consultoras, banca, seguros, telecomunicações, novas tecnologias de informação, indústria tecnológica. Não havendo um emprego típico para um jovem licenciado, mestre ou doutorado em Matemática, a sua formação qualifica-o para muitas carreiras diferentes. Desde ensino, a investigação, atividades relacionadas com finanças, seguros, consultadoria, auditoria ou projetos tecnológicos, o espetro é muito abrangente. Além disso, não é raro encontrarmos exemplos de criação do próprio emprego pela constituição de uma pequena empresa altamente especializada, com uma vertente elevada de inovação científica e tecnológica.

É já incontornável referir as carreiras STEM (acrónimo de ciência, tecnologia, engenharia e matemática) quando se fala em emprego de futuro. Perspetiva-se que as tecnologias emergentes ou novas formas de utilização das tecnologias existentes influenciem e condicionem, de forma disruptiva, a evolução da sociedade e da economia. Estas forças motrizes em constante mutação colocam grandes desafios de modernização e competitividade ao tecido industrial. Surge assim uma procura crescente de quadros superiores de grande versatilidade e exigência técnica, em que talento e treino matemático são fundamentais. Mas os recursos humanos disponíveis não são suficientes para atender a essas solicitações de recrutamento.

Muitas universidades têm feito esforços no sentido de oferecer currículos para percursos adequados às necessidades dos perfis mais requisitados de carreiras STEM, alargando as fronteiras da matemática e promovendo a interdisciplinaridade. Paralelamente, estatísticas nacionais e internacionais sobre a carreira profissional dos graduados em Matemática mostram um elevado índice de empregabilidade, colocando-os num dos grupos de maior sucesso.

As perspetivas de emprego para os matemáticos são muito promissoras. Sinto orgulho por poder acompanhar e participar nos percursos académicos de alguns dos nossos mais talentosos estudantes de Matemática, vê-los iniciar as suas carreiras profissionais e antever que os seus projetos terão grande impacto na sociedade.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* .
Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

FILAS DE DADOS

Um jogo da exposição *Matemática Viva*, a explorar agora no portal do Atractor.

Na exposição *Matemática Viva*, criada pelo Atractor no ano 2000 e em exibição no Pavilhão do Conhecimento até 2010, havia um módulo (figura 1) contendo 56 dados, que podiam ser misturados pelo visitante e depois deslizados ordenadamente para uma zona alongada, criando uma fila de dados. De cada um, apenas se via a face de cima, dispondo-se assim de uma fila de 56 números ao acaso entre 1 e 6, cada número indicando quantas pintas eram visíveis no dado correspondente (figura 2). Bloqueada uma tal fila, o visitante devia agitar o módulo, obtendo com o dado isolado (figura 2) um dos números 1 a 6, chamemos-lhe k_1 (k_1=4 no caso da figura 2), e localizar o dado na posição k_1 da fila; chamando k_2 (k_2=6 no caso da figura 2) ao número de pintas desse dado, deveria depois avançar k_2 posições, obtendo-se um k_3 e assim sucessivamente. O processo terminava quando já só houvesse à direita um número de dados inferior ao número de pintas do dado a que se tinha chegado. Na figura 3 estão assinaladas a vermelho todas as posições de passagem, correspondentes à fila indicada, partindo da posição assinalada pelo dado à esquerda.

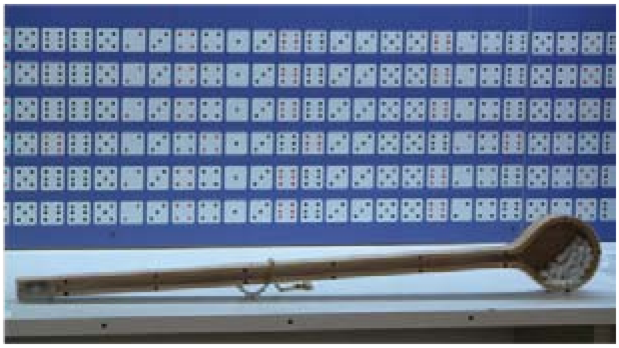


Figura 1.

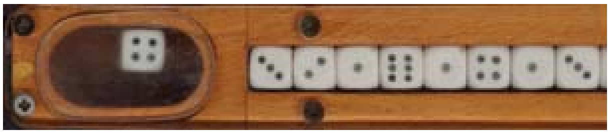


Figura 2.

Figura 3.

Registado o dado final obtido pelo processo descrito, o visitante era convidado a lançar novamente o dado isolado e a recomeçar a partir da nova primeira posição. Em geral, os caminhos diferiam, embora pudessem chegar ao mesmo dado final. O objetivo deste jogo era observar precisamente o que se passava quanto às posições finais, ao seguir o processo descrito para os valores de partida k_1=1, 2,…, 6. E o que muitos visitantes da exposição puderam verificar foi que chegaram sempre à mesma última posição, independentemente de qual o valor obtido no lançamento inicial do dado isolado. No que se segue, analisaremos a razão para essa propriedade constatada experimentalmente.

Comecemos por notar que não é assim tão surpreendente que se chegue à mesma posição final. Observe-se a figura 4, onde estão assinaladas a vermelho, para uma mesma fila, as posições de passagem partindo sucessivamente das posições iniciais 1, 2, ... , 6. Quando duas trajetórias têm uma posição comum, claro que ambas as trajetórias coincidem a partir dessa posição comum. Portanto, para uma trajetória ter um último elemento diferente do das outras, é necessário que essa trajetória evite todas as posições de passagem de qualquer das outras, o que, se a fila for grande, é improvável que aconteça. Por outras palavras, esta observação parece indiciar que, para filas grandes, o caso típico será aquele em que todas as trajetórias terminem no mesmo elemento da fila. Dito isto, põe-se a questão de saber se há filas excecionais, em que essa unicidade do termo não se verifique, mesmo que a fila tenha milhares de dados. Na verdade, é fácil construir exemplos. Suponhamos que a fila só tem números pares (2, 4 ou 6) visíveis; então todos os elementos de uma trajetória conservam a paridade da posição do primeiro elemento: estão todos em posições de ordem par ou todos em posições de ordem ímpar. Na figura 5, todas as posições de passagem, assinaladas a vermelho, estão em posições ímpares na primeira imagem e na segunda imagem estão todas em posição par. Como em qualquer fila há três posições iniciais de ordem par (2, 4, 6) e três de ordem ímpar (1, 3, 5), haverá, para uma fila de números pares, por maior que seja o tamanho, três trajetórias que terminam numa posição de ordem par e três numa posição de ordem ímpar, logo, há pelo menos duas posições finais diferentes.

Designemos por *toc* as filas com todas as órbitas concorrentes. Como há seis posições possíveis de partida na fila, só interessam filas com, no mínimo, 6 dados. Das 46 656 (=6^6) filas existentes com 6 dados, é fácil concluir que só 720 são toc (e que todas terminam na sexta posição).

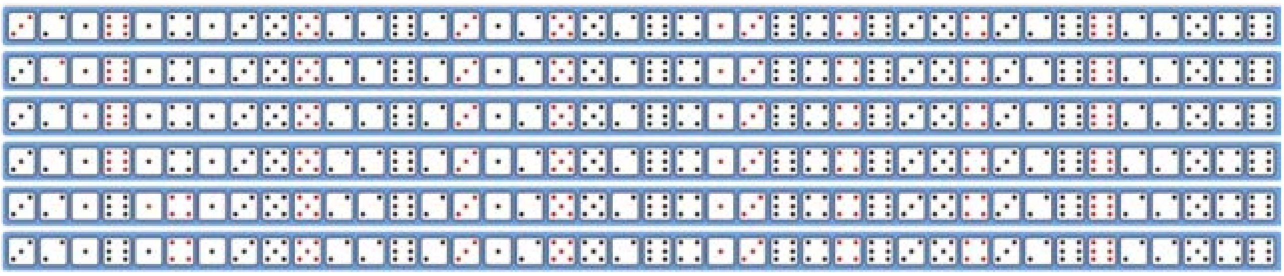


Figura 4.

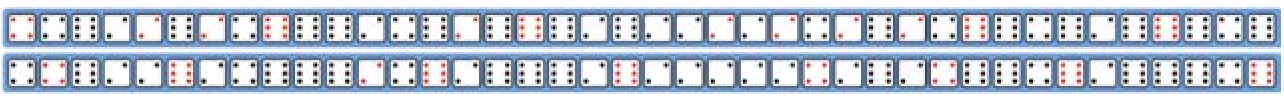


Figura 5.

Comprimento da fila	6	7	8	9	10
N.º de filas	46 656	279 936	1 679 616	10 077 696	60 466 176
N.º de filas toc	720	7 920	82 800	808 560	7 326 720
Percentagem	1.54321%	2.82922%	4.9297%	8.02326%	12.1171%

Figura 6.

A tabela da figura 6 indica o número total de filas, o número das que são toc e as respetivas percentagens, quando o número de elementos da fila varia entre 6 e 10.

Para uma fila cujo número de elementos seja maior do que 10, o algoritmo usado para determinar todas as filas toc revelou-se demasiado lento. Para cada n > 10 foi feita, por isso, uma simulação[1], tendo-se obtido valores aproximados das percentagens das filas toc[2]. Na figura 7 encontra-se o gráfico desses valores aproximados das percentagens das toc para filas com comprimentos entre 6 e 80. Observe-se que a função é crescente e que, para filas com 18 dados, há praticamente tantas que são toc como que o não são. Para filas mais longas, as que não são toc tornam-se mais raras, como se pode confirmar pela tabela da figura 8: para filas de 80 dados, a probabilidade de obter uma fila que não seja toc ronda apenas um em mil.

Em [1] estão disponíveis aplicações interativas (em formato CDF) que dão uma informação muito extensa sobre as filas de dados. Por exemplo, num quadro com as 720 filas toc de comprimento 6, ao sobrevoar com o rato cada linha, aparecerão as seis versões dessa linha com os pontos de passagem assinalados a cor. E também é possível obter aleatoriamente, para um comprimento escolhido, um quadro com um elevado número de filas de dados com esse comprimento (ver figura 9). No quadro dessa figura as linhas a azul correspondem às filas toc e as poucas a preto correspondem às não toc. Por exemplo, a primeira fila da primeira coluna não é toc, como o leitor poderá verificar, percorrendo-a segundo as regras a partir

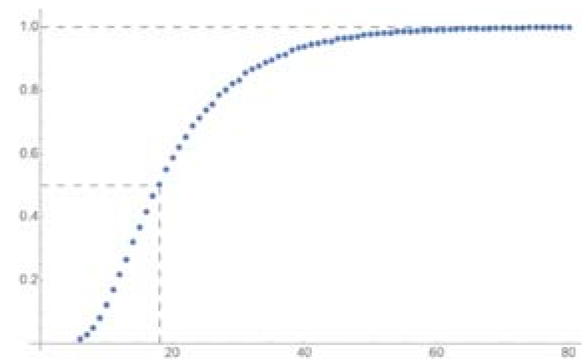


Figura 7

[1] Por exemplo, para obter uma fila de 56 dados, escolheu-se aleatoriamente um número entre 1 e 6, 56 vezes seguidas. Procedendo-se a esta operação umas dezenas de milhares de vezes e calculando o número de filas assim obtidas que eram toc, obtiveram-se valores aproximados das respetivas percentagens.

Comprimentos	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Percentagens	2.3	2.	1.9	1.9	1.5	1.4	1.4	1.3	1.1	0.9	0.9	0.9	0.7	0.7	0.6	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

Figura 8

Figura 9

das posições iniciais 1, 2, ..., 6. Na ocasião da gravação da imagem, o rato sobrevoava a fila imediatamente anterior à primeira preta (não toc) da segunda coluna do quadro. O retângulo destacado, que aparece bem visível, refere-se a essa linha e mostra os seis percursos, começando sucessivamente nas primeiras seis posições. Na 11.ª posição há um 3, a azul, que corresponde à primeira posição comum a todas as trajetórias; a última dessas posições comuns está representada a lilás e, por acaso, é mesmo a última da fila. Sobrevoando com o rato qualquer uma das outras filas desse quadro, apareceria em destaque informação análoga correspondente à fila sobrevoada. Por exemplo, a figura 10 mostra o destaque referente à fila preta imediatamente abaixo da anterior: não há aqui nenhum caminho comum até ao fim, embora as posições de passagem coincidam em todas as filas menos na terceira, a partir da posição 11. Depois desta posição, tudo se passa como se só houvesse dois caminhos a comparar: o terceiro e o comum às outras cinco.

Uma outra observação pertinente relativamente às filas toc prende-se com a ordem da primeira posição comum a todos os caminhos: vimos que no exemplo destacado na figura 9 os caminhos se juntavam relativamente cedo (na posição 11 de uma fila de comprimento 40); a figura 11 mostra outra fila do mesmo quadro em que tal não sucede: só se juntam na penúltima posição. Estas diferenças de comportamento são facilmente detetáveis com

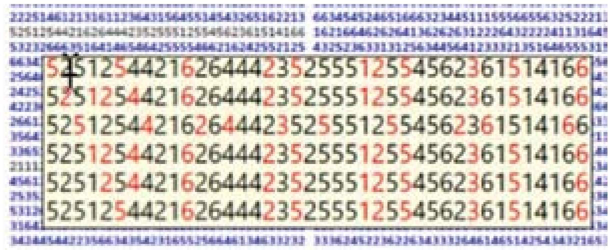


Figura 10

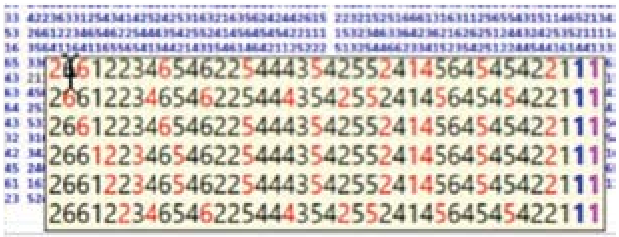


Figura 11

representações adequadas. Por exemplo, algumas das aplicações desenvolvidas pelo Atractor a propósito deste problema incluem nos destaques a representação das filas por grafos circulares, permitindo uma forma muito simples e rápida de acesso à informação correspondente. A figura 12 mostra os dois grafos correspondentes às filas destacadas nas figuras 9 e 11. Na primeira imagem, as diferentes trajetórias juntam-se na posição 11 e a parte

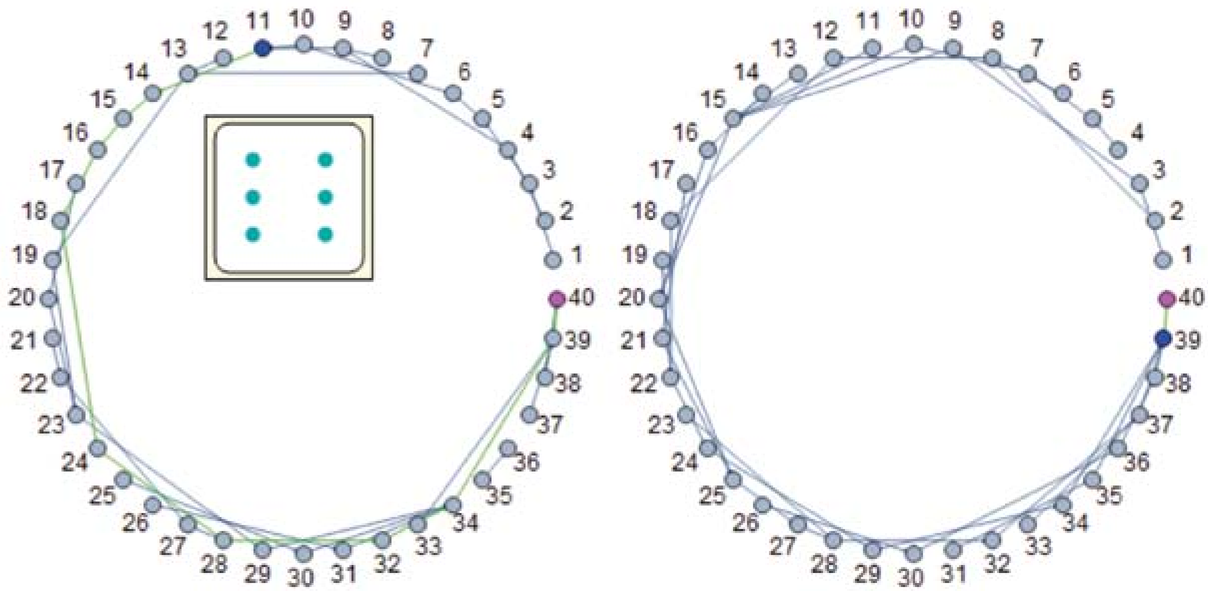


Figura 12

comum está assinalada a verde[3]. Na segunda, só se juntam na penúltima posição. Nas aplicações desenvolvidas pelo Atractor, é possível escolher[4] filas com números entre 2 e um número np (número de pintas) maior ou igual a 2, não necessariamente 6. A situação é, nalguns casos, bem diferente da que atrás foi descrita sobre o caso de o número máximo de pintas ser 6. Por exemplo, no caso de filas só de 1 e 2, para qualquer comprimento da fila, seja 2 ou 2 biliões, o número das filas que não são toc é sempre o mesmo: há (sempre) apenas duas filas com esse comprimento que não são toc. Do material obtido, indicamos na figura 13 uma tabela com os números de filas toc para dados com número de pintas *np* de 2 a 8 pintas (colunas) e filas de comprimento desde *np* até 8.

2						
6	6					
14	30	24				
30	132	168	120			
62	492	1080	1080	720		
126	1674	6216	9120	7920	5040	
254	5466	31 728	70 800	82 800	65 520	40 320

Figura 13

[1] *https://www.atractor.pt/mat/filadados*

[2] Os cálculos foram feitos também para os valores de 6 a 10 (aproximados a dois algarismos significativos) e os valores aproximados assim obtidos foram 1.5%, 3%, 5%, 8.1% e 12%, que constituem aproximações razoáveis dos valores indicados na última linha da tabela da figura 6.

[3] O dado com 6 pintas apareceu, porque o rato sobrevoava o vértice 13 do grafo, que na figura 9 correspondia a 6 pintas.

[4] Estas situações mais gerais também podem ser associadas a jogos. Usando um dado cúbico com igual número de pintas em faces opostas, podemos ter números 1, 2, 3, com igual probabilidade. Analogamente, se três faces tiverem uma pinta e as outras três tiverem duas, em cada lançamento teremos 1 ou 2 com igual probabilidade. Querendo um sistema que funcione para um certo número *np* (qualquer, maior ou igual a 3) de pintas, podemos colar pelas bases duas pirâmides regulares com *np* faces, colocando o mesmo número de pintas em duas faces quando elas estiverem em pirâmides diferentes e tiverem uma aresta comum.

JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

O LIVRO DE PROBLEMAS DE PETER HIGGINS

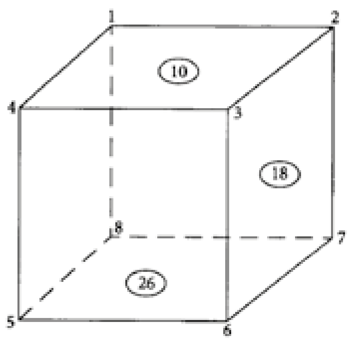
Peter M. Higgins é um matemático conceituado, originário da Austrália, com um percurso profissional que inclui os EUA e o Reino Unido. Além da sua atividade de investigador, Higgins tem publicado vários livros recreativos (inventou o Sudoku Circular, por exemplo). O último, da Oxford, é *Professor Higgins's Problem Collection*. É dele que hoje falamos.

É de uma coleção pessoal que se trata. Os problemas vêm de diversas áreas e têm graus de dificuldade variados. Refletem o gosto do autor que, recorrendo a múltiplas fontes, nos cativa com desafios muito elegantes.

Selecionámos quatro das questões para partilhar com os nossos leitores.

ETIQUETAR UM CUBO. É possível colocar os números de 1 a 8 nos vértices de um cubo de forma a que a soma dos números correspondentes aos vértices de qualquer face seja constante?

A figura ilustra uma tentativa falhada.



E se no lugar de "vértices" (e números de 1 a 8) tivéssemos escrito "arestas" (e números de 1 a 12)?

O ANIVERSÁRIO DO MANUEL. A Laura e o Alex estão a tentar adivinhar a data de nascimento do Manuel. Este diz-lhes que o seu dia de anos é uma das datas seguintes:

29 ou 30 ou 31 de março
8 ou 11 de julho
27 ou 30 de agosto
8 ou 27 ou 29 de dezembro.

Para os acicatar, o Manuel anuncia-lhes que vai dizer o mês certo ao Alex, mas não à Laura, e o dia correto à Laura, mas não ao Alex. E assim faz.

Segue-se o seguinte diálogo:

Alex: "Não sei qual é o aniversário do Manuel, mas sei que a Laura também não sabe."

Laura: "Eu não sabia o aniversário do Manuel, mas agora sei!"

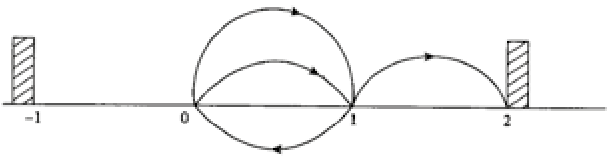
Alex: "Nesse caso, eu também sei!"

Em que dia calha o aniversário do Manuel?

O CASINO DAS DIFERENÇAS. Um jogador paga €2 para lançar dois dados cúbicos normais e ganha, em euros, o valor absoluto da diferença entre os valores que saírem no lançamento, exceto se sair doble de cenas ((6,6)), caso em que lança de novo.

Este jogo é bom para a casa ou para o apostador?

SALTITONA. Uma partícula parte da origem do referencial e move-se por saltos laterais, de comprimento unitário, sendo a probabilidade de saltar para a direita sempre igual à de saltar para a esquerda, isto é, 50%. Se a partícula encontrar qualquer uma das barreiras ilustradas, é absorvida. Qual é a probabilidade de ser absorvida na barreira correspondente à abcissa 2?

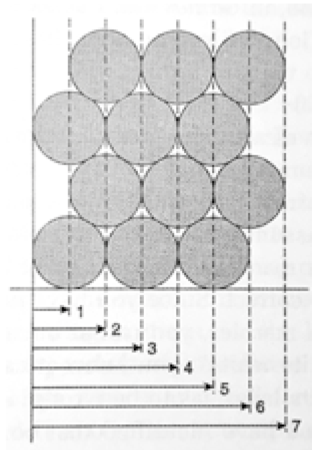


Imagine agora que as barreiras são retiradas e a partícula saltitona se move $2n$ vezes, segundo as mesmas condições. Qual é a probabilidade de ter saltado para a direita tantas vezes nos primeiros n saltos como nos segundos?

Sobre as questões do número anterior:

DIVIDIR IRMAMENTE. O enunciado torna claro que, sendo n o número de ovelhas, então o dígito das dezenas de n^2 é ímpar. Concluímos assim que n termina em 4 ou 6, sendo que 4^2 e 6^2 terminam em 6. Assim, a diferença entre os valores recebidos pelos irmãos é 4, o que se pode remediar mediante um cheque de €2 passado pelo mais velho ao mais novo.

MOEDAS MUITO ÚTEIS. A figura é eloquente.



MOEDAS ESTRANHAS. Ver a obra de Martin Gardner *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems*, Norton 2006, pp. 247-8.

A DESIGUALDADE TETRAEDRAL

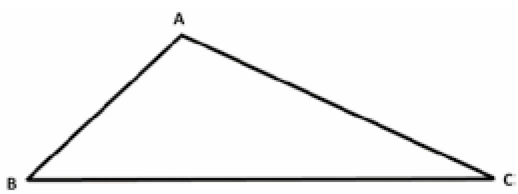
Uma prima da desigualdade triangular. Ou filha?

João Filipe Queiró
Universidade de Coimbra
jfqueiro@mat.uc.pt

1. INTRODUÇÃO

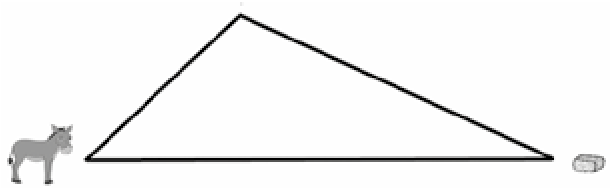
A 20.ª Proposição do 1.º Livro dos *Elementos* de Euclides diz o seguinte:

> Num triângulo, a soma dos comprimentos de dois quaisquer lados é maior do que o comprimento do lado restante.



Esta é a "desigualdade triangular", um facto básico da matemática. Euclides prova-a meticulosamente, recorrendo a proposições anteriores (a 5.ª e a 19.ª) e à 5.ª "noção comum" do 1.º Livro, que diz que "O todo é maior do que a parte."

Nas suas anotações aos *Elementos* [1], Thomas Heath cita a respeito disto o *Comentário* de Proclo [4]. Este refere os epicuristas, que ridicularizavam a proposição, dizendo que é evidente até para um burro e não precisa de demonstração. Justificavam esta afirmação dizendo que, se se colocar um fardo de palha num dos vértices do triângulo e um burro esfomeado noutro vértice, o burro seguirá o caminho do lado que une esses vértices e não o que percorre os outros dois lados.



Heath acrescenta que Henry Savile, numas lições sobre os *Elementos* publicadas em Oxford em 1621, diz que quem assim argumentava era digno de ir com o burro comer a palha.

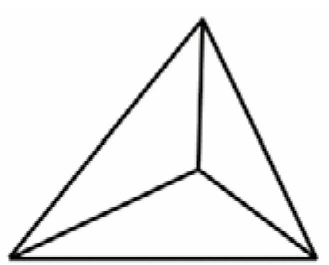
Proclo, escrevendo no século V, explica o que está em causa: uma coisa é o que nos parece, outra é a prova ou explicação científica. Esta distinção permanece relevante nos dias de hoje, não só para se compreender a natureza da matemática mas também para nos orientarmos em questões de ensino (veja-se, por exemplo, [2] e [3]). Mas o fundo do problema vai além disto e muito além do pequeno contexto de que partimos.

Em várias grandes universidades norte-americanas podemos encontrar à venda T-shirts com a seguinte inscrição: "Está bem, isso funciona na prática. Mas será que funciona na teoria?" É uma boa piada, mas levanta também uma questão profunda. Qual é a segurança do nosso conhecimento? Ao longo da história, houve um enorme esforço humano no caminho em direcção a uma maior certeza do conhecimento. Os humanos sempre quiseram saber mais e saber melhor, saber com mais segurança. Na Física, na Química, nas Ciências da Vida e numa certa visão das Ciências Sociais – que não inclui os interessados no reino da pura opinião não constrangida pela realidade – a busca de cada vez maior certeza vem da busca de factos, do respeito por eles, da sua representação, hierarquização e relacionação, da delimitação dos contextos em que as análises são válidas. Em tudo isto a matemática desempenha ou pode desempenhar um papel central.

Terminando aqui este intervalo "epistemológico", voltemos ao nosso tema.

2. DOS TRIÂNGULOS AOS TETRAEDROS

Pensemos no irmão tridimensional do triângulo: o tetraedro, ou pirâmide de base triangular. As suas quatro faces são triângulos.



Se formos à procura de uma afirmação sobre tetraedros que corresponda à desigualdade triangular, logo observamos que

> num tetraedro, a soma das áreas de três quaisquer faces é maior do que a área da face restante.

Isto – a que podemos chamar a "desigualdade tetraedral" – tem o mesmo grau de evidência que a desigualdade triangular, embora não se veja bem quem é que pode substituir o burro dos epicuristas neste caso.

Sem dúvida que é possível apresentar uma demonstração no mesmo espírito que a de Euclides para a 20.ª Proposição do 1.º Livro dos *Elementos*, o que até será um bom exercício. Mas, como vamos ver, podemos demonstrar a desigualdade de forma muito rápida seguindo outra via.

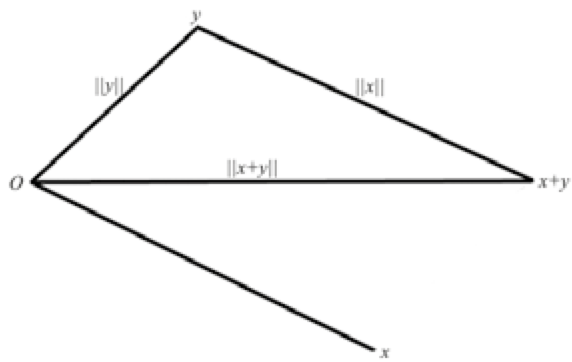
3. PROVA DA DESIGUALDADE TETRAEDRAL

Precisamos de introduzir alguma estrutura no espaço tridimensional vulgar:

- Um ponto O que escolhemos para origem;
- A soma de dois pontos x e y, denotada por $x+y$, pelo habitual processo de completar o paralelogramo a partir dos três vértices O, x e y;
- O produto de um ponto x por um número real α, denotado por αx, com o significado geométrico óbvio;
- A norma ou o comprimento de x, definido como a distância $\|x\|$ de x à origem.

Neste contexto, a desigualdade triangular aplicada ao triângulo de vértices O, y e $x+y$ diz simplesmente que

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$



É fácil ver que esta versão algébrica da desigualdade triangular permanece válida para mais do que duas parcelas. Por exemplo, para x, y, z arbitrários, tem-se

$$\|x+y+z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\|.$$

Vamos ver uma demonstração muito simples da desigualdade tetraedral usando um conceito básico de Álgebra Linear, o produto externo de pontos do espaço tridimensional [5].

Sejam x e y dois tais pontos. Há duas maneiras de definir $x \wedge y$, o produto externo de x por y. Uma usa coordenadas em relação ao vulgar sistema de eixos usado em geometria analítica: sendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, tem-se

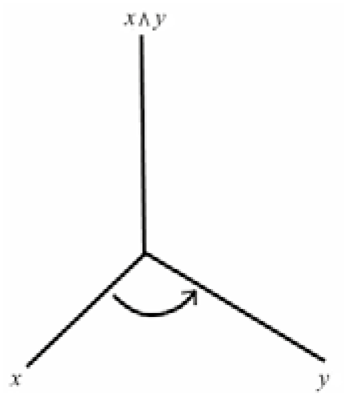
$$x \wedge y := (x_2y_3 - y_2x_3,\ y_1x_3 - x_1y_3,\ x_1y_2 - y_1x_2)\,.$$

A outra forma de definição não usa coordenadas, sendo por isso preferida em Física. Nesta segunda forma, $x \wedge y$ é o ponto no espaço assim identificado:

- O segmento que vai da origem para $x \wedge y$ é perpendicular aos segmentos que vão da origem para x e da origem para y;
- A norma de $x \wedge y$ é igual a $\|x\|\|y\| \operatorname{sen}\theta$, onde θ é

o (menor) ângulo definido pelos segmentos que vão da origem para x e da origem para y;

- Os segmentos que vão da origem para x, da origem para y e da origem para $x \wedge y$ formam um triedro directo, isto é, a rotação mais curta do primeiro segmento que o leva a sobrepor-se ao segundo segmento é feita, para um observador com os pés na origem e a cabeça na extremidade do terceiro segmento, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

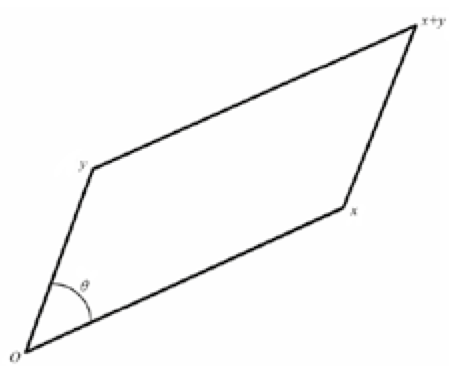


Que as duas definições são equivalentes pode ver-se, por exemplo, em [5].

Usando a primeira forma da definição é simples ver que o produto externo satisfaz as seguintes propriedades:

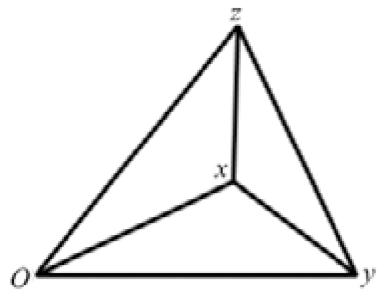
- $x \wedge x = 0$;
- $y \wedge x = -x \wedge y$;
- $(x + x') \wedge y = x \wedge y + x' \wedge y$,
  $x \wedge (y + y') = x \wedge y + x \wedge y'$;
- $(\alpha x) \wedge y = x \wedge (\alpha y) = \alpha (x \wedge y)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Da segunda forma da definição interessa-nos a expressão para a norma de $x \wedge y$: é imediato que $\|x\| \|y\| \operatorname{sen} \theta$ é a área do paralelogramo de vértices O, x, y e $x + y$.



Daqui tiramos uma fórmula para a área do triângulo de vértices O, x e y: essa área é simplesmente igual a $\frac{1}{2}\|x \wedge y\|$.

Olhemos então para um tetraedro arbitrário. Não há perda de generalidade em supor que um dos seus vértices está na origem. Designemos os restantes três vértices por x, y e z.



As quatro faces do tetraedro são então os triângulos com vértices

$$O, x, y$$
$$O, x, z$$
$$O, y, z$$
$$x, y, z$$

Já dispomos de fórmulas para as áreas dos três primeiros:

$$\frac{1}{2}\|x \wedge y\|, \;\; \frac{1}{2}\|x \wedge z\|, \;\; \frac{1}{2}\|y \wedge z\|\,.$$

Falta o quarto. Como a área é invariante por translação, a área do quarto triângulo é igual à área do triângulo com vértices O, $y - x$ e $z - x$, ou seja, é igual a

$$\frac{1}{2}\|(y - x) \wedge (z - x)\|\,.$$

Usando as propriedades do produto externo, vemos que

$$\begin{aligned}(y - x) \wedge (z - x) &= y \wedge z - y \wedge x - x \wedge z + x \wedge x \\ &= x \wedge y + y \wedge z + z \wedge x\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|(y - x) \wedge (z - x)\| &= \|x \wedge y + y \wedge z + z \wedge x\| \\ &\leq \|x \wedge y\| + \|y \wedge z\| + \|z \wedge x\|\,.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por 1/2, concluímos que a área da face com vértices x, y, z é menor ou igual à soma das áreas das outras três faces do tetraedro. Um raciocínio análogo prova a desigualdade para a área de qualquer outra face.

Vemos assim que a desigualdade tetraedral é consequência imediata da desigualdade triangular, o que retira protagonismo à primeira e reforça o carácter fundamental da segunda.

REFERÊNCIAS

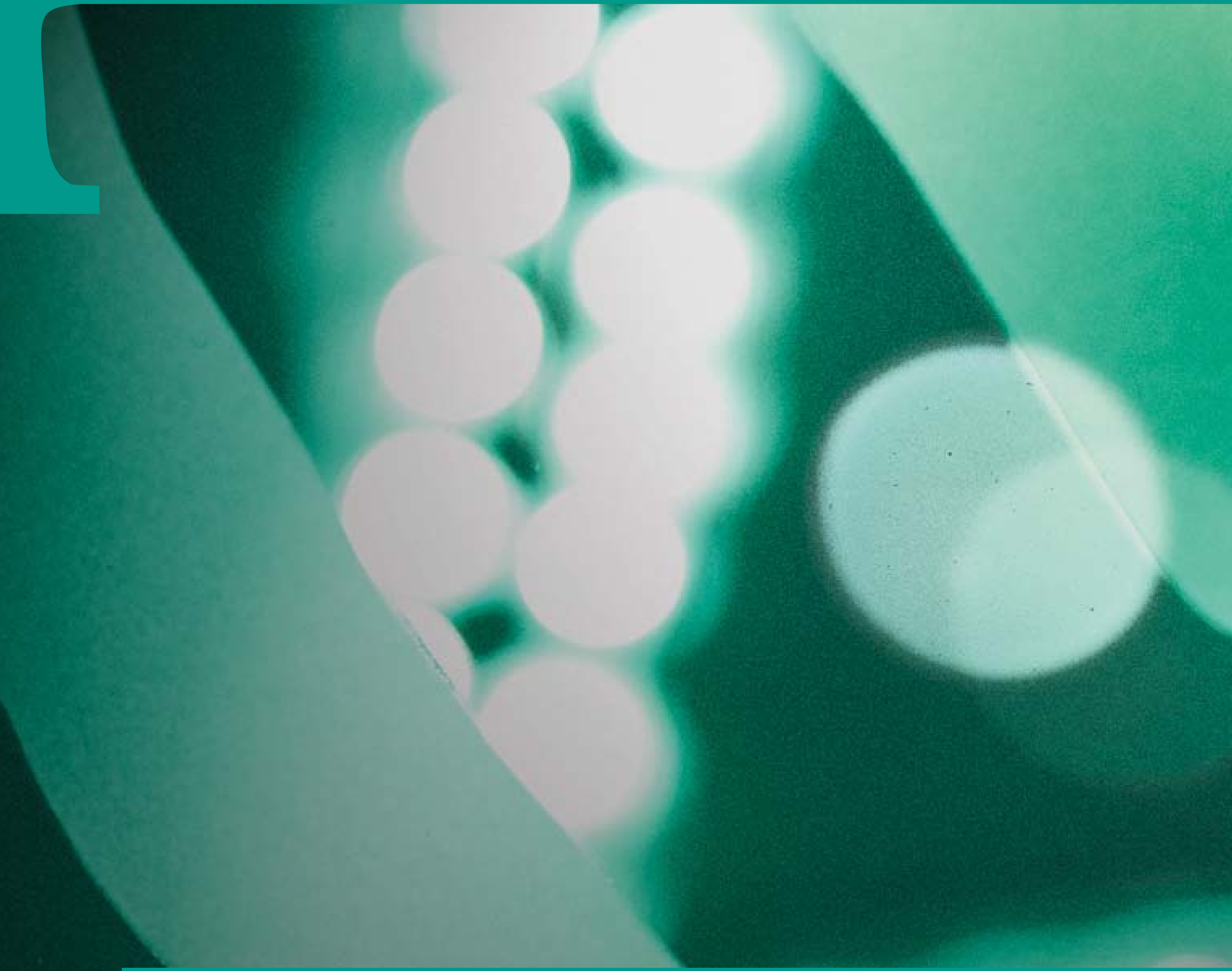
[1] Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*, with introduction and commentary by Thomas L. Heath, vol. I, New York, Dover, 1956.

[2] Yolanda Lima, *Geometria no Secundário. Conjecturar e provar – exemplos*, Boletim da SPM, n.º 39, pp. 77-85, 1998.

[3] Armando Machado, *O ensino da Matemática para a formação de professores*, em "O Ensino da Matemática na Universidade em Portugal e Assuntos Relacionados", L. Trabucho de Campos e J. F. Queiró (eds.), Centro Internacional de Matemática, p. 7-11, 2000. Actas disponíveis em *http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/debate2.pdf*

[4] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton University Press, 1970.

[5] A. P. Santana e J. F. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear*, Lisboa, Gradiva, 2010.



SAIU NO ANO PASSADO!

TRANSMISSÃO DE LUZ EM PLACAS TRANSPARENTES

Manuela Ramos Silva[a] e Pedro Pereira da Silva[b]

CFisUC, Departamento de Física, Universidade de Coimbra[a,b]

manuela@uc.pt[a] e psidonio@uc.pt[b]

Saber as respostas às perguntas do exame do ano passado é um dos principais interesses dos alunos, quer no ensino secundário, quer no ensino universitário, especialmente se se aproxima o dia do exame do corrente ano. É um tópico atraente que não precisa de estratégia pois são normalmente os alunos que se dirigem aos professores, interessados em entender as perguntas e saber as respostas. Aproveitando esse interesse natural e baseados na pergunta 4 do caderno 1 do exame de Matemática do ano letivo de 2017/2018 , apresentamos uma atividade de fácil execução para a aula de Física-Matemática [1]. A pergunta em causa apresentava a fórmula

$$I = I_0(1-R)^{2k}e^{-\lambda kd} \quad (1)$$

que corresponde à intensidade da luz transmitida (potência por unidade de área) através de uma pilha de k placas, com coeficiente de reflexão R, coeficiente de absorção λ, e espessura d. I_0 é a intensidade original da luz que incide perpendicularmente na placa.

A TEORIA

Quando raios luminosos atravessam uma placa transparente, como uma lâmina de vidro ou uma folha de acetato, sofrem dois efeitos principais que lhes modificam a intensidade: atenuação da intensidade da luz por absorção e reflexão da luz pelas interfaces vidro-ar ou ar-vidro.

Ao atingirem uma superfície de separação de dois meios com índices de refração diferentes, dá-se o fenómeno da reflexão e da refração: uma pequena parte do feixe é refletido (cerca de 4% para o par vidro-ar, numa incidência perpendicular) e a maior parte é refratada, ou seja, muda de direção de propagação ao entrar no segundo meio. Enquanto estiver dentro do vidro, propaga-se em linha reta, mas a sua intensidade sofre atenuação de acordo com a expressão matemática

$$I = I_0e^{-\lambda d}, \quad (2)$$

onde I_0 é a intensidade de entrada, λ o coeficiente de absorção e d a distância percorrida dentro do vidro, ou seja, a espessura da placa para uma incidência perpendicular. Ao atingir nova superfície de separação entre meios, a luz sofre novamente reflexão e assim sucessivamente pelas k placas de vidro. Cada lâmina que se acrescenta ao caminho da luz traz duas novas superfícies de separação, e, em cada uma, a intensidade R é refletida, 4%, e $T = (1R)$, 96%, é transmitida, fazendo diminuir a intensidade de $(1R) \times (1R)$, pelo que k placas fazem diminuir a luz de

$$I = I_0((1-R)^2)^k. \quad (3)$$

Combinando os dois efeitos, chegamos à fórmula do problema, que nos diz como varia a intensidade da luz que incide perpendicularmente num conjunto de k placas transparentes, empilhadas umas sobre as outras.

$$I = I_0(1-R)^{2k}e^{-\lambda kd} \quad (4)$$

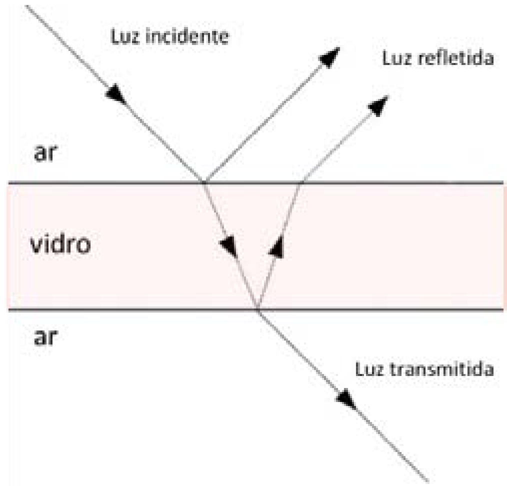


Figura 1. Diagrama de raios luminosos que atravessam superfícies de separação entre meios de diferente índice de refração.

Devem problemas da vida real fazer parte da aula de matemática? Assim prevê o Programa Curricular em vigor e aqui fica uma sugestão de **atividade para a aula de Física-Matemática.**

Uma demonstração simples destes dois efeitos consiste em segurar uma pilha de lâminas de vidro com a mão e tentar ver um objeto através delas. A observação é fácil se as lâminas estiverem de lado, pois os raios de luz só atravessam duas interfaces, mas difícil se olharmos de topo, pois a luz refletida, nas múltiplas interfaces, transforma a lâmina num espelho.

Figura 2. Fotografia de uma toalha de mesa através de uma pilha de lâminas de vidro. À esquerda, com as lâminas de lado, o padrão é perfeitamente visível. À direita, consegue-se ver a imagem da câmara que tira a fotografia.

A PRÁTICA

Para medir este efeito combinado, é necessário material muito simples e a atividade pode facilmente realizar-se em sala de aula: são necessários um conjunto de *slides* (lâminas) de vidro para microscópio, uma lanterna ou um candeeiro ou um apontador *laser*, e um *smartphone*. Os *smartphones* vêm equipados com um luxímetro, ou seja, um sensor de luz ambiente, mais ou menos sofisticado, e existem muitas *apps* gratuitas que permitem usar este sensor. Esta é uma forma de utilizar o *smartphone* nas aulas de Física ou Matemática em vez de o banir da sala de aula [2-4].

Figura 3. Montagem experimental mostrando o *smartphone* Android onde foi instalada a *app* gratuita Lux Meter.

No nosso ensaio, e numa sala escurecida, colocámos o sensor de luz por baixo de um candeeiro e fomos empilhando lâminas de vidro entre o sensor e a fonte de luz. Os resultados obtidos, em lux, ou seja em Watt/m^2, encontram-se no gráfico seguinte depois de normalizados, onde se representam os pares de valores (k, I_{exp}):

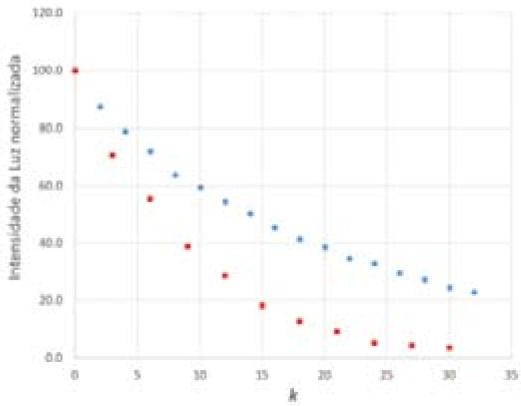


Figura 4. Intensidade da luz transmitida em função do número de placas sobrepostas. Os círculos azuis representam a intensidade da luz medida pelo luxímetro usando um candeeiro como fonte de luz. Os quadrados vermelhos correspondem à intensidade de luz usando um *laser* vermelho como fonte de luz.

Mais interessante é a representação do logaritmo da intensidade normalizada, pois:

$$
\begin{aligned}
I = I_0(1-R)^{2k}e^{-\lambda kd} &\Rightarrow ln(I) = ln(I_0(1-R)^{2k}e^{-\lambda kd}) \\
&\Rightarrow ln(I) = ln(I_0) + 2kln(1-R) - \lambda kd \\
&\Rightarrow ln(I) = ln(I_0) - (\lambda d - 2ln(1-R))k
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ou seja, espera-se uma dependência linear entre *ln(I)* e k, pois quer R quer λ quer d são constantes nesta experiência.

A dependência linear é fácil de confirmar visualmente e é possível um bom ajuste pelo método dos mínimos quadrados, figura 5. No caso de uma fonte de luz coerente, monocromática e direcionada, como o apontador *laser*, a perda de intensidade por reflexão, após k placas, é bastante drástica, sendo menos acentuada no caso da luz do candeeiro, não coerente, policromática e menos direcionada.

Para uma situação real, com uma fonte de luz comum, e com uma pilha de lâminas de vidro imperfeita, intercalada por camadas de ar não uniformes, a transmissão T é

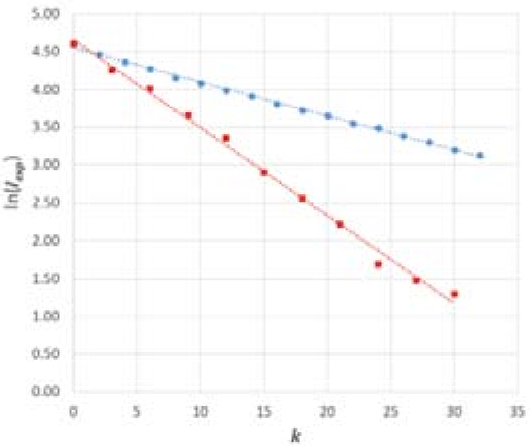


Figura 5. ln(I) em função do número de camadas usando a fonte de luz *laser.* Os círculos azuis e os quadrados vermelhos correspondem às medidas usando um candeeiro ou um *laser* como fonte de luz. Para a luz branca, um ajuste de mínimos quadrados leva à equação ln(I) = −0.045k + 4.552 com $r^2 = 0.998$ e para a luz *laser*, ln(I) = −0.116k + 4.653 com $r^2 = 0.995$.

diferente de 96% mas mantém-se a forma da equação para a intensidade da luz transmitida através de uma pilha de k placas, ver ref. [5]:

$$I = I_0(T)^{2k}e^{-\lambda kd} \qquad (6)$$

Em conclusão, apresentamos neste artigo uma atividade simples de realizar em sala de aula (ou até mesmo sugerida como trabalho para casa) que permite apresentar e discutir os fenómenos físicos por detrás da fórmula (1), onde a perda de intensidade da luz pelas múltiplas reflexões segue a lei de uma progressão geométrica e a da absorção da luz dentro de um meio homogéneo segue a lei de um decaimento exponencial. A partir desta pequena atividade experimental, os alunos são convidados a treinar o uso da função logaritmo e a perceber a sua importância no tratamento e na interpretação dos dados de experiências científicas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Exame Final Nacional de Matemática A, Prova 635, 1.ª Fase, Ensino Secundário, Instituto de Avaliação Educativa, 2018.

[2] V. Pereira, P. Martín-Ramos, P.P. da Silva, M. Ramos Silva, *Studying 3D Collisions with smartphones*, Phys. Teach., 55 (2017) 312-313.

[3] J. Imazeki, "Bring-Your-Own-Device: Turning Cell Phones into Forces for Good", *The Journal of Economic Education*, 45 (2014) 240-250.

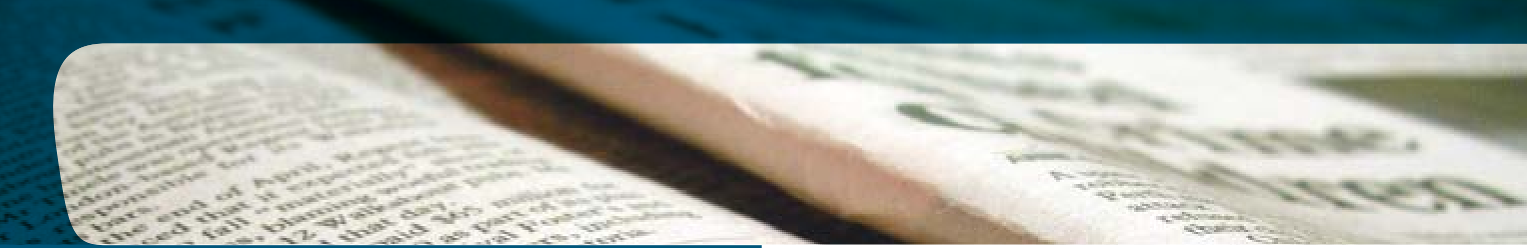
[4] P. Martín-Ramos, M. Ramos Silva, P.S. Pereira da Silva, Smartphones in the Teaching of Physics Laws: Projectile motion | El Teléfono Inteligente en la Enseñanza de las Leyes de la Física: Movimiento de Proyectiles, RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 20 (2017) 213.

[5] M. V. Berry, S. Klein, *Transparent Mirrors: rays, waves and localization*, Eur. J. Phys. 18 (1997) 222–228.

SOBRE OS AUTORES

Manuela Ramos Silva é professora auxiliar com agregação no Departamento de Física da FCTUC. Desenvolve investigação na área da Física da Matéria Condensada, especialmente no campo do Magnetismo Molecular.

Pedro Pereira da Silva tem doutoramento em Física da Matéria Condensada e trabalha como técnico superior na plataforma tecnológica TAIL da FCTUC. A sua atividade de investigação incide especialmente no estudo das Propriedades Óticas dos Materiais.



Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A TOUS LES TEMPS. A TOUS LES PEUPLES.

Demorou, mas chegámos lá! Duzentos anos depois da introdução do Sistema Métrico, finalmente o seu objetivo é realizado: um conjunto de unidades de medida que servirá a "todos os povos, por todo o tempo", como desejavam seus idealizadores. Contamos aqui um pouco desta história.

No dia 20 de maio de 2019, o peso muda. Bom, o *meu* peso muda todos os dias. O que mudará em breve é a própria definição de peso. O famoso "quilograma-padrão", um cilindro feito de platina e irídio, pretensamente imutável, deixará de ser a referência-base para todos os pesos ao redor do mundo (exceto, nos Estados Unidos da América, na Libéria, e em Myanmar...). Em vez disto, todo o sistema métrico será baseados em constantes físicas universais. Com o laboratório adequado, qualquer um, em qualquer lugar do mundo – ou melhor, do universo – poderá fazer medições obtendo o mesmo resultado [1, 2].

Num certo sentido, esta é a realização final do sonho dos revolucionários franceses, que, ao redefinirem as diversas unidades de medida em 1795, pretendiam dar à Humanidade um sistema coerente que poderia ser replicado em qualquer lugar do mundo [3]. Assim, a panóplia de unidades locais, cada uma com a sua rica história própria, mas que era, naquele momento, um entrave tanto ao comércio internacional como à comunicação científica, poderia ser substituída com vantagens.

A Assembleia Nacional Francesa, adequadamente aconselhada pelo famoso matemático Condorcet, definiu como unidades básicas do novo sistema de medida o *metro*, o *quilograma*, bastante próximos do que conhecemos – já lá voltamos – uma unidade de área *(acre)*, duas unidades de volumes (uma especificamente para lenha e outra o famoso *litro)* e uma unidade monetária, o *franco*. Veja a figura 1.

Figura 1. À esquerda, póster explicativo do novo sistema métrico (1800), **fonte: Wikimedia Commons.** À direita, selo evocativo do sistema métrico, emitido em 1954 – entre a proposta para a redefinição do metro (1952) e a sua efetivação (1960).

Além da ideia universalista, outra inovação fundamental foi introduzida juntamente com o sistema métrico – a notação decimal. Esta fora inventada por outro matemático, o holandês Simon Stevin

200 anos antes, mas a sua aceitação era limitada. Em vez de relatarmos $1/20$ de um valor qualquer, passamos, com a notação decimal a referir-nos a 0,05. A criação de unidades básicas e subunidades que são décimas, centésimas ou milésimas das anteriores, ou múltiplos que são potência de 10, permite uma conversão muito mais simples – por isso, também, por vezes, falamos em *sistema métrico decimal*.

Voltemos, então, às definições universalistas: o metro será a décima milésima parte da distância entre o polo e o equador ao longo de um meridiano. Algo que qualquer país com nível tecnológico adequado poderia medir, criando assim o seu metro-padrão. Não é necessário viajar até aos extremos da Terra. Basta ter acesso a um meridiano razoavelmente longo e conhecer trigonometria.

Sabia-se já neste tempo que a Terra não é uma esfera perfeita, e a sua forma já havia sido medida com grande precisão. Mesmo assim, acreditava-se que a distância referida seria independente do meridiano utilizado, devido a um certo efeito uniformizador da rotação da Terra. De qualquer forma, quando se decidiu criar um metro padrão inicial, foi necessário realizar uma medição específica. No final do século XVIII, decide-se medir a distância entre Dunkerque e Barcelona, duas importantes cidades com a mesma longitude. Além disso, são cidades marítimas, portanto, a medição será costa a costa, norte-sul, na Europa. Nada mal para o orgulho revolucionário que o meridiano que passa pelas duas cidades seja o "meridiano de Paris"! Veja a figura 2.

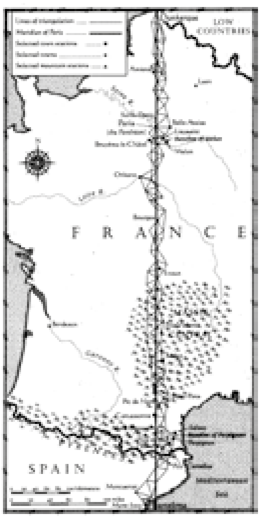


Figura 2. Medida da distância entre Dunkerque e Barcelona, ambas sobre o mesmo meridiano. Uma pausa em Paris para lembrar a origem do Sistema Métrico!

Conhecido o metro, conheçamos o litro: o volume de um decímetro cúbico. Enchemo-lo de água pura e, com temperatura controlada, temos o peso de um quilograma.

Como é natural, as unidades básicas foram alteradas. Essencialmente, por dois motivos: a busca de definições mais práticas e a necessidade de incluir novas unidades – em grande parte, derivadas do desenvolvimento do eletromagnetismo.

Claro, também há a unidade de tempo. Por alguma razão, esta não esteve presente nos primeiros momentos. Provavelmente, porque a introdução do sistema métrico estava associada à simplificação da conversão de diferentes unidades: o segundo era há muito definido como $1/86400$ do tempo necessário para o Sol passar duas vezes no mesmo meridiano (o "dia"). O facto de que a duração do dia não é uniforme ao longo do ano era irrelevante para o nível de precisão da época. Curiosamente, a inclusão do segundo como unidade do sistema métrico deveu-se à insistência do matemático C. Gauss.

Em 1960, a definição de metro foi alterada para a distância entre duas riscas numa certa barra metálica. Antes disto, o quilograma já fora redefinido como o peso de um certo cilindro. Ainda no século XIX, foram criadas unidades para a medição das correntes elétricas, o "ampere" (assim mesmo, sem acento [4]), a "candela", para a luminosidade, o "kelvin" e o "mol", para a temperatura e para a quantidade de matéria, respetivamente.

Dependíamos todos de objetos físicos guardados no Bureau de Pesos e Medidas, instituição internacional sediada em Paris e reponsável por manter os padrões. De tempos a tempos, era necessário deslocar os padrões nacionais para a capital francesa e compará-los. Sempre que havia alguma diferença, eram os convidados os errados: o anfitrião marca sempre a hora certa!

Definidos os padrões, os físicos obtinham experimentalmente as unidades fundamentais da Natureza. Mais explicitamente: sabemos que a velocidade da luz no vácuo é sempre a mesma, para todos os observadores. Este é um dos postulados da Teoria da Relatividade de Einstein. Mas quanto? É só medir, ora. Sabemos o que é o metro, sabemos o que é o segundo. Medimos quantos metros a luz se desloca num segundo, e depois dividimos um pelo outro.

Situações idênticas se passam com a constante de Boltzman, a constante de Planck, etc.

A ideia da última reforma foi a de definir estas constantes como números exatos (e que, portanto, não carecem de medição) e, a partir daí, qualquer laboratório com as competências necessárias poderá chegar a um padrão ma-

Figura3: Um peso de utilização doméstica/comercial simples (esquerda). O quilograma-padrão norte-americano (centro), depositado em US National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland, e a balança de Kibble, desenvolvida no mesmo instituto e capaz de determinar o quilograma a partir do valor da constante de Planck (esquerda).

croscópio a ser utilizado na indústria. Ou seja, podemos construir um metro e um quilograma padrões no fundo do quintal.

Acontece que os desenvolvimentos tecnológicos necessários para tanto não são triviais. Entre a ideia e a primeira instituição capaz de medir um quilo a partir de não-sei-quantas constantes de Planck passaram-se décadas. De facto, ironias do destino, o primeiro laboratório a conseguir tal precisão foi nos Estados Unidos da América. O segundo, no Canadá.

Somente agora a comunidade científica se sente segura para dar este salto universalista. Não basta termos definições logicamente corretas. É necessário que elas possam ser implementadas.

Ficamos então assim: um segundo é o tempo necessário para 9192631770 transições de um elétrão entre dois níveis da estrutura hiperfina no estado fundamental de um átomo de césio-133. Dito isto, o metro é a distância percorrida por um raio de luz no vácuo em $1/299792458$ segundos.

Para definir a unidade de massa, recorremos a duas relações fundamentais da física: a energia de um fotão é dada por $h\nu$, onde ν é a sua frequência e h a constante de Planck. Por outro lado, energia e massa relacionam-se por $E = mc^2$, onde c é a velocidade da luz. Medindo a frequência (que só depende da definição de segundo) e o peso de um fotão, podemos calcular a constante de Planck. Faça, então, o contrário: um quilograma é a massa que faz com que $h = 6.62607015 \times 10^{-34}$ kg m/s^2. Veja a figura 3.

Seguindo este raciocínio, conseguimos todas as unidades do Sistema Internacional [5].

Não poderia terminar sem um comentário: lembro-me de um conto em que uma civilização alienígena iria invadir a Terra. Durante algum tempo, ficam os aliens por perto, ouvindo as nossas comunicações. Decifram as várias linguagens da Terra, e fazem os seus planos. Mas têm uma dificuldade profunda: nunca conseguiram entender o que eram o *metro* e o *quilogram*a. Consideram então a empreitada demasiado arriscada e acabam por desisitr do ataque. Será que estas últimas alterações nos farão mais vulneráveis aos ETs?

REFERÊNCIA

[1] "The inevitable, tragic – and ultimately necessary – death of the kilogram. Farewell to the objects that defined our units of measure". Oliver Morton. *Washington Post* em 16/11/2018.

[2] "A massive change: Nations will vote to redefine the kilogram". Sarah Kaplan. *Washington Post* em 16/11/2018.

[3] *https://en.wikipedia.org/wiki/2019_redefinition_of_SI_base_units*

[4] *Vocabulário Internacional de Metrologia*, IPQ-INMETRO, 2012.

[5]*https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst\%C3\%A8me_international_d\%27unit\%C3\%A9s*

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

QUANDO OS AMADORES SUPERAM OS PROFISSIONAIS

Tal como em muitas outras atividades, há casos em que matemáticos amadores se revelaram mais competentes a resolver problemas do que os profissionais.

As histórias, reais ou ficcionais, sobre situações nas quais um amador consegue superar os profissionais de uma área costumam ser bastante populares. Na matemática, no entretanto, não é assim. É curioso constatar que, apesar de um elevado número de histórias, muitas delas falsas, que são frequentemente repetidas sobre matemática e matemáticos, histórias do tipo acima descrito são raras. E, no entanto, elas existem. Vão ser aqui vistos três casos desses. Mais concretamente, serão descritas três situações nas quais matemáticos amadores conseguiram resolver problemas que resistiram ao esforço de alguns dos maiores matemáticos profissionais de sempre.

Convém esclarecer que só serão abordados episódios de uma fase da História da Matemática na qual a generalidade da matemática criada tem origem em pessoas cuja principal fonte de rendimentos, bem como a principal atividade, consiste numa ocupação ligada à matemática. Sendo assim, não serão mencionados nomes como Fermat ou Descartes, que, se bem que possam ser descritos como "amadores", são anteriores a essa época. Veja-se [2], por exemplo, para saber mais sobre amadores nesse sentido mais vasto.

JEAN-ROBERT ARGAND

Sabe-se muito pouco sobre a vida de Jean-Robert Argand (1768–1822). Nasceu em Genebra (um estado independente, aquando do seu nascimento) e passou a sua vida adulta em Paris, sendo aí contabilista. O seu texto mais famoso é o *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*, de 1806.[1] É aí que surge pela primeira vez a agora usual maneira de identificar o conjunto dos números complexos como um plano (que, por isso mesmo, por vezes se designa por *plano de Argand*).

Isto já é por si um feito notável. E, embora não se possa dizer que Argand tenha ficado famoso por causa disto, este trabalho começou aos poucos a ser citado por outros matemáticos. No entanto, não é pelo plano que leva o seu nome que Argand está aqui a ser mencionado. Em primeiro lugar porque (embora o próprio Argand não o soubesse) a ideia não era nova. Com efeito, já fora proposta por outro amador, um agrimensor norueguês chamado Caspar Wessel,[2] num texto publicado em 1799. No entanto, o trabalho de Wessel ficou desconhecido durante quase um século. Mas o principal motivo pelo qual não é por este trabalho que se está aqui a mencionar Argand é porque, como ficou claro no início deste texto, aquilo que se vai aqui abordar são resoluções de problemas em aberto. E o problema em aberto em questão é nem mais nem menos do que o *Teorema Fundamental da Álgebra*: qualquer polinómio de uma variável, não constante e com coeficientes complexos tem alguma raiz complexa.

[1] *http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/geometrie/essai-sur-une-maniere-de-representer-des-quantites-imaginaires-dans-les-cons*

[2] Caspar Wessel: *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel.html*

Já desde meados que século XVIII que se tentava demonstrar este teorema. A primeira tentativa, que surgiu em 1746, é da autoria de D'Alembert. Seguiram-se outras, por parte de, entre outros, Euler, Lagrange e Laplace. Em 1799, Gauss, na sua tese de doutoramento, criticou as demonstrações anteriores e propôs uma nova demonstração. Mas, embora por vezes ainda seja afirmado que a demonstração de Gauss é a primeira demonstração correta daquele teorema,[3] o que é um facto é que aquela demonstração, mesmo sendo profundamente original, estava incompleta. E a primeira pessoa a fornecer uma demonstração correta daquele teorema foi Argand, num texto de 1814, *Reflexões sobre a nova teoria dos imaginários, seguidas de uma aplicação à demonstração de um teorema de Análise.*[4] É, talvez, a demonstração mais usada daquele teorema em textos de Análise; veja-se [7], por exemplo.

LÉON AUBRY

Em 1636 (veja-se [8, § II.V]), Fermat escreveu a Mersenne, perguntando-lhe se era verdade que se um número natural se pode escrever como soma dos quadrados de dois números racionais, então também se pode escrever como soma dos quadrados de dois números naturais, tendo também formulado a pergunta análoga que se obtém substituindo "dois" por "três". Nem Mersenne nem Fermat conseguiram resolver estes problemas. Estes estão ligados à publicação, em 1621, da primeira edição em latim da *Aritmética* de Diofanto, um texto escrito no século III da nossa era, no qual o autor parece supor que o problema mencionado por Fermat (no caso de dois quadrados) tem resposta afirmativa.

Passado mais de um século, Euler fez a pergunta análoga relativamente à soma de quatro quadrados.[5] Mais precisamente, Euler escreveu que "geralmente, parte-se do princípio de que nenhum inteiro se pode exprimir como soma de quatro quadrados de números racionais a menos que também se possa exprimir como soma de quatro quadrados de números inteiros [...] mas até hoje ninguém conseguiu demonstrar que assim é." A resposta às três perguntas só viria a ser obtida em 1912, não por um matemático, mas sim por um agricultor, viticultor e apicultor francês chamado Léon Aubry (1882–1947) (veja-se [1]... caso consiga encontrar algures este artigo; também pode consultar [8, Apêndice II]). Diga-se que Léon Aubry foi um autor prolífico, tendo publicado vários artigos de matemática e até um livro. Quanto aos estudos formais, fez somente o Ensino Básico (essencialmente até ao equivalente ao nosso 6.º ano de escolaridade), tendo aprendido matemática unicamente através da leitura de livros.[6]

JACK M. ELKIN

Em 1997, um jornal britânico publicou uma notícia que começava por "Um professor de Oxford resolveu um enigma matemático clássico, que deixou desconcertados os gregos há mais de 1 800 anos".[7] O problema em questão é o problema de Alhazen: dados dois pontos A e B de um bilhar circular, como determinar, usando somente régua e compasso, o(s) ponto(s) da sua borda para onde se deve lançar uma bola situada em A de maneira a fazer tabela nesse ponto e depois ir até B; veja-se a figura 1, na qual se vê uma situação na qual o problema tem duas soluções. Este problema foi enunciado por Cláudio Ptolomeu no século II, mas também foi estudado por Alhazen (séc. XI), no seu tratado de Ótica.

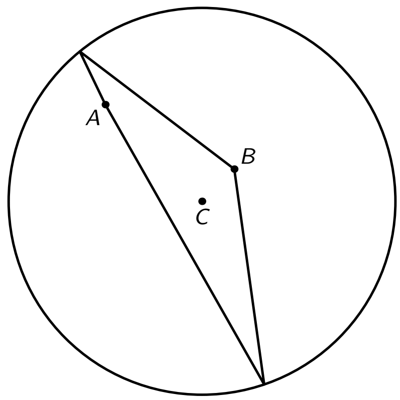


Figura 1. Problema de Alhazen

O "professor de Oxford" mencionado no artigo é Peter M. Neumann e a sua solução é negativa, ou seja, ele provou que o problema não tem solução em geral (embora tenha em certos casos particulares, tal como, por exemplo, quando os pontos A e B e o centro C da circunferência forem colineares). As primeiras demonstrações de que certos problemas clássicos de Geometria (nomeadamente, os problemas da trisecção do ângulo e da duplicação do cubo) não podem ser resolvidos usando somente régua e compasso foram obtidas por Pierre Wantzel em 1837.[8] No entanto, aplicar o método de Wantzel ao problema de Alhazen envolve algumas dificuldades.

Mas quando o texto de Neumann surgiu, em 1998, constatou-se rapidamente que se tratava somente de uma redescoberta. Com efeito, a demonstração da impossibilidade de resolver o problema de Alhazen usando somente régua e compasso já fora feita nove anos antes pelo matemático alemão Harald Riede [6]. Mas, de facto, a primeira pessoa a resolver o problema foi Jack M. Elkin (1913–1995) [4], em 1965. Acontece que Elkin, mesmo não sendo estritamente um amador como Argand ou Aubry, ainda assim pode ser classificado como tal, pois, apesar de ser professor de Matemática na Universidade de Long Island, só exercia este emprego a tempo parcial, uma vez que trabalhava como contabilista numa firma de consultadoria, a Martin E. Segal, sendo este último emprego quase certamente a sua principal fonte de rendimentos (quando se reformou, em 1979, era vice-presidente e chefe da secção de contabilidade da empresa) [3].

CONCLUSÃO

Em matemática, tal como noutras áreas, acontece por vezes os amadores superarem os profissionais. Resta saber quantos outros problemas resolvidos por amadores se encontram enterrados em revistas que já ninguém lê.

REFERÊNCIAS

[1] L. Aubry, *Solution de quelques questions d'analyse indéterminée*, Sphinx-Œdipe, 7ᵉ année (1912), pp. 81–84

[2] J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (2ª edição), 1990, Oxford University Press

[3] *Obituary: Jack M. Elkin*, Transactions of Society of Actuaries, 1995, Vol. 47, pp. 956–957

[4] Jack M. Elkin, *A deceptively easy problem*, The Mathematics Teacher, Vol. 58, No. 3, pp. 194–199

[5] Peter M. Neumann, "Reflections on reflection in a spherical mirror," *American Mathematical Monthly* 105 (6) (1998), pp. 523–528

[6] H. Riede, *Reflexion am Kugelspiegel. Oder: das Problem des Alhazen*, Praxis der Mathematik, 31 (2) (1989), pp. 65–70

[7] M. Spivak, *Calculus* (3ª edição), Publish or Perish, 1994

[8] A. Weil, *Number Theory: An Approach Through History*, 2001, Birkhäuser

[3] The Fundamental Theorem of Algebra: *https://www.mathpages.com/home/kmath056/kmath056.htm*

[4] *http://www.numdam.org/article/AMPA_1814-1815__5__197_0.pdf*

[5] *http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E242.pdf*

[6] No que se refere às informações relativas a Léon Aubry, o autor agradece à professora Jenny Boucard, da Universidade de Nantes, bem como a Camille Aubry, bisneta de Léon Aubry, a ajuda prestada.

[7] *Don solves the last puzzle left by ancient Greeks*: *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Obits2/Al-Haytham_Telegraph.html*

[8] Pierre Laurent Wantzel: *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wantzel.html*

UMA IDEIA NATURAL FUNCIONA SEMPRE

Entrevista com Pascal Maroni

Kenier Castillo[a], Zélia da Rocha[b]
Universidade de Coimbra[a], Universidade do Porto[b]
kenier@mat.uc.pt[a], mrdioh@fc.up.pt[b]

(Com fotografias de ELENA DEL MORAL, elenadelm@gmail.com)

Pascal Maroni realizou a sua formação académica na Faculdade de Ciências de Paris: licenciou-se em Matemática em 1957, diplomou-se em Mecânica Celeste em 1958 e obteve a agregação em 1967 sob a direcção de René de Possel, um dos fundadores do grupo Bourbaki. Exerceu a sua actividade profissional como investigador do CNRS, inicialmente no Instituto Blaise Pascal e depois no Laboratório de Análise Numérica da Universidade Pierre e Marie Curie – Paris VI, actualmente denominado por Laboratório Jacques-Louis Lions. De 1971 a 1975 foi Director da Unidade de Ensino e de Investigação – Análise, Probabilidades e Aplicações da Universidade de Paris VI e em 1980 foi Director do Laboratório de Análise Numérica dessa universidade. Especialista em Funções Especiais, introduziu nos anos oitenta uma teoria algébrica dos polinómios ortogonais. Nesta entrevista apresentamos parte das longas conversas que mantivemos com Pascal durante a sua estada em Portugal em Julho de 2018.

Quando é que sentiu que tinha vocação para a matemática? Algum dos seus professores o influenciou de forma determinante?

Desde a escola primária que eu soube que faria matemática. Nessa época, era excelente em cálculo mental. Era sempre o primeiro a levantar a mão quando a professora nos colocava um problema. No liceu, tive dois professores que me prepararam muito bem a enfrentar o nível universitário. Um deles aconselhava-me a ir para Paris, como ele próprio fizera, o outro gabava os méritos da Escola Politécnica de Zurique. Segui os conselhos do primeiro. Chamavam-lhe Clairon devido ao timbre agudo da voz dele. Era um excelente professor, sobretudo para os membros da secção científica. Sofreu o mesmo destino de Pierre Curie: foi atropelado por um automóvel ao atravessar a rua. Não sobreviveu.

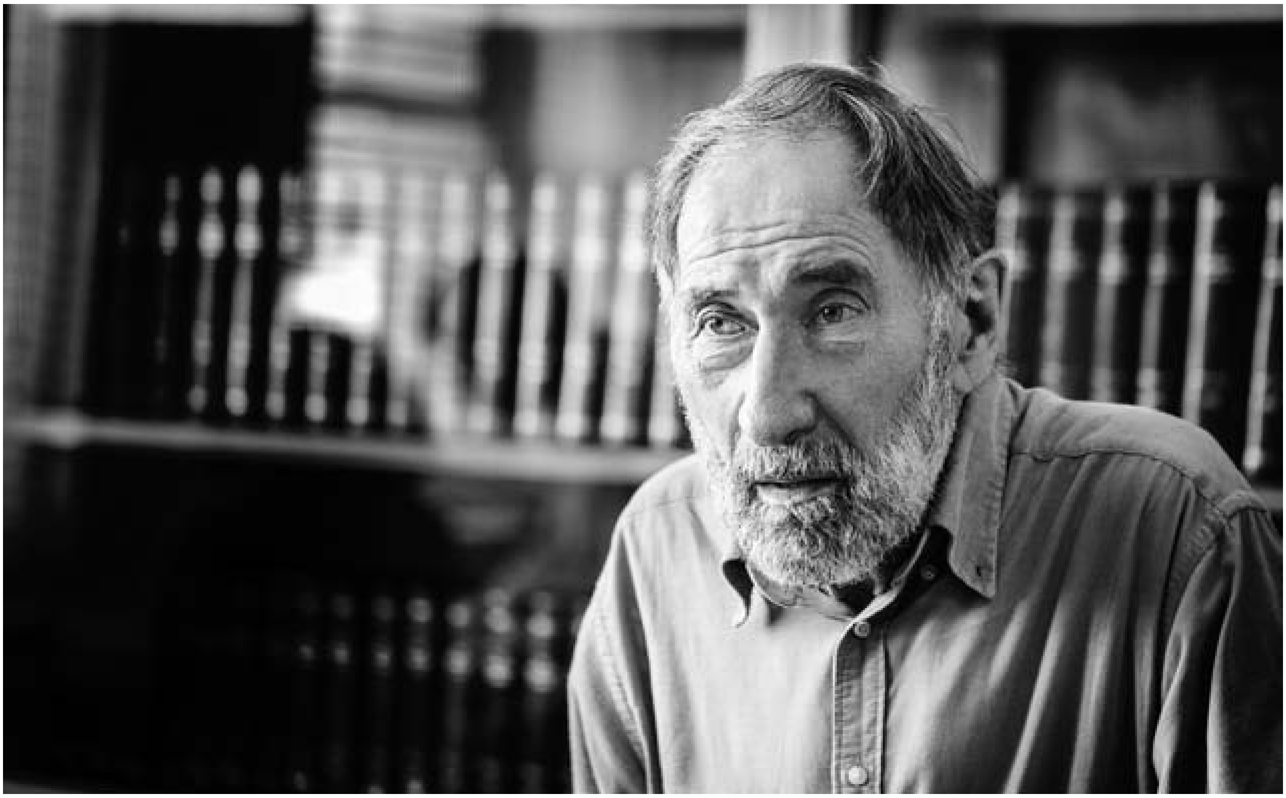
Qual foi o seu sentimento ao deixar a família para ir viver para Paris e seguir os estudos superiores? Que recordações guarda dessa época?

Nenhum estado nostálgico de alma acompanhou a minha partida para Paris. Era uma nova liberdade que estava a ser-me oferecida. Aproveitei a oportunidade descaradamente por várias semanas. Fui ao teatro quase todas as noites e ia ao cinema frequentemente. Tudo isso enquanto frequentava as aulas na Sorbonne, onde me matriculei assim que cheguei. Mas a situação foi-se regularizando rapidamente. O meu desejo de trabalhar era mais forte. Pouco a pouco, fui fazendo alguns amigos na faculdade com quem me reunia num café da zona, onde passávamos o serão a discutir política.

Apesar das aparências, a minha estada em Paris não foi improvisada. Eu tinha um amigo que estava hospedado há alguns meses no número 6 da Rua Bonaparte, que me arranjou um quarto para arrendar num apartamento no número 8 dessa rua. Era um primeiro andar ocupado por uma família constituída por um casal e dois filhos, onde tinha de atravessar várias dependências até chegar ao meu próprio quarto. Para sobreviver, esse amigo trabalhava nas cadeias de produção da indústria automóvel, mas o sonho dele era fazer parte de uma expedição polar liderada pelo etnologista Paul-Émile Victor, sonho esse que realizou durante vários anos, de acordo com as memórias que ele me relatou 40 anos mais tarde.

Durante esses anos de faculdade, que lembranças lhe ficaram dos seus professores? Quais foram aqueles que mais o impressionaram?

Durante o curso de Cálculo Diferencial e Integral, no segundo ano de licenciatura, havia dois assistentes que ministravam ora os complementos das aulas teóricas, ora as aulas práticas; eu admirava-os infinitamente. Um fasci-



nava-me pelo seu domínio da manipulação de integrais aquando do estudo assimtótico segundo um parâmetro... O outro agradava-me pela clareza e pelo rigor das suas exposições. Tratava-se de Jean-Pierre Kahane e de Jacques-Louis Lions.

Da mesma forma, o professor Georges Valiron, que eu nunca tinha visto antes, deixou-me uma lembrança indelével. Eis a razão. Doente, ao fim de alguns dias, ele deixou de aparecer no anfiteatro. Tiveram de o substituir durante o resto do ano. Vários substitutos seguiram-se ao longo dos meses. Cada um apresentou uma contribuição original: um algebrista falou de Álgebra, um analista falou de Análise. Depressa ficou claro que o que nos ensinavam não tinha nada que ver com o curso habitual do professor Valiron. De facto, durante esse ano, ensinaram-nos o que mais tarde viria a designar-se (inadequadamente) por matemáticas modernas. Sempre pensei que se tratou de uma partida dos Bourbakistas. Mas a partida custou-nos caro. Nunca esquecerei a nossa cara no dia do exame final quando vimos o enunciado: tratava-se de um exame ao verdadeiro estilo Valiron. A vingança do mandarim! Depois de um verão bem estudioso, da mesma forma que os outros, consegui ser aprovado na época de outono.

Qual era o domínio científico do seu orientador? Qual foi o tema da sua tese e como se desenrolou o seu trabalho?

René de Possel era um matemático puro. Em 1932, ele obteve uma tese de doutoramento intitulada "Alguns problemas de representação conforme", sob a direção de C. Carathéodory. A área de predileção dele era a teoria da medida, a integração voltada para as probabilidades, a topologia... Mas estaríamos errados se disséssemos que ele só se interessava por problemas abstratos. Por exemplo, dedicou um grande esforço à mecânica dos meios contínuos, à informática médica, à leitura automática...

Depois de recrutado pelo CNRS, em 1959, fui designado para o Instituto Blaise Pascal para preparar uma tese. Hoje em dia, o processo é muito diferente. Se já tivermos uma boa tese, então teremos a possibilidade de entrar no CNRS. Caso contrário, é melhor esquecer a entrada no CNRS.

Lembremos-nos de que os anos sessenta foram uma década excecional quanto à pesquisa aplicada, tanto devido aos rápidos progressos realizados na eletrónica (*the hardware*) como pelo surgimento de técnicas de diálogo com a máquina, os algoritmos, a programação, os pacotes de programas... (*the software*), que reunimos no vocábulo informática. O Instituto Blaise Pascal foi, entre outros, um vetor dessa transformação. Assim, a par do seu trabalho de desenvolvimento de tese, um investigador afeto a Blaise Pascal era convidado a resolver, na medida das suas competências, os problemas colocados por pesquisadores de todas as origens: físicos, químicos, biólogos, pesquisadores de humanidades... Foi um período maravilhoso de aprendizagem: a tese não avançava, mas aprendia imenso. Finalmente, consegui identificar um tema em Astrofísica que correspondia a resolver uma equação integral não linear e singular.

Pode falar um pouco mais sobre René de Possel, em particular da sua ligação com o grupo Bourbaki?
Em 1959, René de Possel era diretor do Laboratório de Cálculo Numérico do Instituto Blaise Pascal. Nesse ano, ele foi o primeiro titular da cátedra de Análise Numérica na Faculdade de Ciências de Paris. Foi nomeado diretor do Instituto Blaise Pascal em 1962, cargo que ocupou até 1967. Antes de vir para Paris, ele era o titular da cátedra de Análise Superior na Faculdade de Ciências de Argel. É difícil continuar sem mencionar o caso Audin. René de Possel tinha em particular um aluno, Maurice Audin, assistente na faculdade, prestes a defender a tese na primavera de 1957. Militante comunista, defensor da independência da Argélia, ele foi preso e torturado pelos paraquedistas encarregados da manutenção da ordem em Argel. A família dele nunca mais voltou a vê-lo. A versão oficial das autoridades apenas afirmou que ele havia tentado escapar e que tinha desaparecido. Foi constituído de imediato um comité, o Comité Maurice Audin, cujo objetivo era descobrir a verdade, presidido por Laurent Schwartz até à sua morte, em 2003. A 13 de setembro último, o Presidente da República reconheceu oficialmente a responsabilidade do Estado francês na tortura e no assassinato de Maurice Audin. Desde essa data, o Comité anseia conhecer as circunstâncias precisas da sua morte. Naquela época, a comunidade matemática tomou a decisão inédita de que a defesa da tese de Maurice Audin iria ocorrer apesar da ausência do candidato. Assim a 2 de Dezembro de 1957, perante o júri presidido por Jean Favard e constituído por Laurent Schwartz, Jacques Dixmier e René de Possel, Laurent Schwartz efectuou a introdução das provas após o que René de Possel, de giz na mão, expos no quadro os trabalhos de Maurice Audin. Foi um momento de grande emoção.

Retrocedamos no tempo e retornemos à aventura Bourbaki. Sim, De Possel foi membro fundador do grupo Bourbaki. Em 1934, havia um grupo de cinco jovens matemáticos que decidiram refazer o mundo matemático, porque em França não se passava nada, de acordo com a opinião deles. Todos eles foram para a Alemanha durante vários meses, trabalhar com matemáticos conhecidos. René de Possel trabalhou com C. Carathéodory e também conheceu Blaschke. A 10 de dezembro de 1934, o grupo realizou uma primeira reunião no Capoulade, na esquina do Boulevard Saint-Michel com a rua Soufflot, um café (que eu também frequentei) hoje desaparecido. Eram Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, René de Possel e André Weil. A ideia era escrever um tratado de Análise que expusesse a matemática contemporânea, o que as obras existentes não faziam. A plenária de fundação ocorreu em julho de 1935, em Besse-en-Chandesse, uma pequena aldeia de Auvergne, nas proximidades de Clermont-Ferrand, na presença de nove membros oficiais. Além das pessoas acima mencionadas, havia Jean Coulomb, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann e Szolem Mandelbrojt. Foi nessa altura que o pseudónimo coletivo Nicolas Bourbaki foi adotado. Durante este primeiro colóquio, que durou cerca de oito dias, foi estabelecido um plano global sobre o que havia a fazer e o volume de Análise foi avaliado em cerca de 3200 páginas. Tornou-se faraónico. Não era apenas a Análise que devia ser revista, mas também o que precedia, o que o grupo Bourbaki chamou de pacote abstrato. Em consequência, a partir de 1939-40, vimos os primeiros volumes da obra de Nicolas Bourbaki aparecerem sob o nome de *Elementos de Matemática*, publicações que se seguiram até 2016, formando assim um *corpus* de, pelo menos, 7200 páginas. De Possel deixou o grupo Bourbaki em 1939 porque não aceitou a escolha de Bourbaki de definir o integral como uma forma linear de um espaço vetorial de funções contínuas..., provavelmente também porque a sua esposa, Évelyne, se deixou seduzir por André Weil.

De Possel visitou Portugal em março de 1946. Durante a sua estada, realizou várias conferências em diferentes cidades, que deram origem a dois artigos publicados em revistas das universidades do Porto e de Coimbra e a um artigo na *Gazeta da Matemática*. Ele chegou a comentar consigo essa passagem por Portugal?
Não. Até agora, não sabia nada sobre esta viagem a Portugal.

Concentremo-nos na sua carreira científica. Quando e como começou a interessar-se pelos polinómios ortogonais?
Sempre me interessei pela teoria dos polinómios ortogo-

nais. No entanto, foi no final da década de setenta, após uma longa fase de atividades administrativas, que comecei realmente a ser atraído por este segmento particular do universo das funções especiais. Sem dúvida alguma, a leitura do livro de Theodore Chihara, publicado em 1978, foi determinante. Desse livro elaborei um curso de Diploma de Estudos Aprofundados sobre os polinómios ortogonais, bem standard, na linha desse excelente tratado que, apesar de algumas imperfeições, mantém, quarenta anos após a sua publicação, o carácter de uma bíblia. Em particular, fiquei mais uma vez interessado pelos métodos de quadratura, especialmente, pelo método de Gauss, que ressuscitava após séculos de esquecimento graças ao advento das máquinas de calcular modernas. A primeira tese de doutoramento que orientei, em 1966, tinha como tema o método de Gauss. Foi durante a elaboração desse curso, que emprega técnicas de frações contínuas, que comecei a colocar a mim mesmo um certo número de questões. Com efeito, certos aspetos dessa abordagem dos polinómios ortogonais não me agradavam, pelo que comecei a repensar e a refazer algumas das partes.

O que é que mais o motivou a iniciar o trabalho sobre esse assunto?

Essencialmente, o facto de que não estava de acordo com o ponto de vista aceite pela comunidade no que respeita à ortogonalidade não definida positiva. Com a notável exceção de J. Shohat, que estudou as sucessões não definidas positivas desde o início do século XX (mas sem fazer escola), quase todos trabalhavam no caso definido positivo.

Gostaria de salientar que o meu amigo Claude Brezinski tinha, na mesma época, preocupações análogas às minhas, que unificámos mais tarde num artigo conjunto de 1996. Devo esclarecer que Claude trabalhava sobre os polinómios sobretudo como padéista. Os padéistas utilizam os polinómios para fazer aproximação, em particular, aproximação de Padé. Eu nunca fui padéista. Tal como Hahn, eu sou um polinomista, isto é, alguém que se interessa pelos polinómios por si mesmos, sem se preocupar forçosamente em lhes encontrar uma aplicação. Considero-me um descendente de Hahn.

Introduziu uma nova abordagem neste domínio científico. Qual foi a ideia de base e por que razão essa ideia funcionou?

A ideia fundamental consistia em aplicar no domínio dos polinómios ortogonais os métodos em voga na área das equações em derivadas parciais desde a introdução das distribuições, isto é, o uso sistemático do conceito de dualidade, que levou à noção de solução fraca. É uma ideia natural e o que é natural funciona sempre.

Pode explicar melhor?

Em poucas palavras, a estrutura algébrica {natural} do espaço vectorial $\mathcal{P}$ das funções polinomiais, segundo a reunião de uma sucessão de subespaços de dimensão finita (os espaços componentes), implica automaticamente munir esse espaço de uma topologia de limite indutivo estrito, o que significa, tendo em conta as regras do jogo assim estabelecidas, que uma aplicação linear de $\mathcal{P}$ num espaço vetorial topológico é contínua se e somente se a sua restrição a cada espaço componente for contínua. E aqui é o caso, uma vez que cada espaço componente é de dimensão finita. Assim resulta, em particular, que o dual algébrico $\mathcal{P}^*$ é formado unicamente de formas contínuas.

Como é que essa ideia lhe surgiu? Antes, qual era a sua área de trabalho principal?

Tudo o que eu fiz resulta, antes de mais, de uma questão de ponto de vista. A dada altura, existe um ponto de vista diferente, e de repente vemos as coisas de outra maneira. Indiscutivelmente, o facto de pertencer ao Laboratório Jacques-Louis Lions constituiu a verdadeira razão do surgimento da minha teoria. Nesse laboratório, antes designado por Laboratório de Análise Numérica, trabalhava-se, e ainda se trabalha, essencialmente sobre as equações em derivadas parciais. Por essa razão, os espaços funcionais utilizados eram-me relativamente familiares. Além disso, alguns anos antes, durante a fase administrativa da minha carreira, ministrei um curso de Análise Funcional na Escola Central de Paris e, mais tarde, na Universidade Claude Bernard. Sempre trabalhei no domínio das Funções Especiais com, digamos, uma polarização no universo dos polinómios ortogonais.

Qual é a publicação que melhor representa a sua ideia original?

Sem dúvida que é o artigo intitulado *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques*, que foi apresentado por ocasião do terceiro colóquio internacional sobre os polinómios ortogonais e suas aplicações, que decorreu em Erice, na Sicília, em 1990. Esse artigo contém as ideias fundamentais da teoria algébrica sem apresentar demonstrações. Existem outros trabalhos dessa época também significativos, como por exemplo *Le calcul des formes...*, *Variations...*, e todos os artigos apresentados nos colóquios espanhóis nos anos de 1985 a 1991.

Fez parte da comissão de organização do primeiro colóquio da série OPSFA (Orthogonal Polynomial, Special Functions and Applications). Este congresso persiste até aos nossos dias como a mais importante reunião internacional nesse domínio científico. Pode falar um pouco sobre esse evento?
Éramos cinco no comité de organização: Claude Brezinski, André Draux, Alphonse Magnus, André Ronveaux e eu. Decidimos que a conferência seria dedicada a Edmond Laguerre para comemorar o centésimo quinquagésimo aniversário do seu nascimento em Bar-le-Duc, e convidámos Jean Dieudonné a apresentar uma palestra plenária sobre a obra matemática de Edmond Laguerre. Ele fez rir toda a assistência quando disse que Laguerre não fez absolutamente nada sobre os polinómios que têm o seu nome. Com efeito, nos anos 20, enquanto se elaborava a Mecânica Quântica, foram os físicos que, ao trabalhar na equação de Kummer, uma equação confluente da equação de Gauss, colocaram em evidência soluções polinomiais que batizaram arbitrariamente como polinómios de Laguerre.

Nessa ocasião, tive a oportunidade de conversar assiduamente com Jean Dieudonné e ele dizia-me: "Devemos praticar métodos algébricos, antes de tudo, quando trabalhamos com polinómios ortogonais". Ora era precisamente o que eu já tinha começado a fazer.

Gostava de assinalar que, dentre os organizadores, Alphonse Magnus era o que sabia mais sobre os polinómios. Por exemplo, foi ele que me disse que Geronimus foi o primeiro a construir os polinómios clássicos a partir da propriedade de Hahn utilizando diretamente os momentos da forma. Nestas condições, penso que seria adequado atribuir o nome Geronimus à equação funcional verificada por uma forma semiclássica, em vez de seguir esta moda atual que consiste em falar de equação de Pearson, em alusão a um notável matemático estatístico dos princípios do século XX, mas que a nenhum título deve ser citado nesta circunstância.

Teve dificuldades em fazer aceitar o seu ponto de vista algébrico pelos seus pares? Quando fazia comunicações em conferências, qual era a reação dos outros matemáticos?
Havia pessoas que pensavam que, fora do âmbito definido positivo, os polinómios ortogonais não existiam. Esta pergunta faz-me lembrar uma anedota bastante significativa.

Durante um colóquio, eu disse a um colega que a sucessão de polinómios de Laguerre, considerada para um valor estritamente complexo do seu parâmetro α, com $\Im(\alpha) > 0$, não deixa de existir. Ele replicou que tal não era possível. Com efeito, a forma de Laguerre é regular se e somente se $\alpha \neq -n,\ n \in \mathbb{N}$. Isto significa precisamente que a sucessão de Laguerre de índice $\alpha \neq -n,\ n \in \mathbb{N}$ existe. É verdade que, para valores estritamente complexos do parâmetro, pode ter-se dificuldade em encontrar uma representação integral à forma de Laguerre, mas a forma não deixa de existir. Em geral, a questão da representação integral de uma forma regular é um problema de Análise mais difícil do que o problema colocado inicialmente. Continuando a conversa com aquele colega, acrescentei que, além disso, os zeros (raízes) de um polinómio qualquer dessa sucessão são complexos, em geral, mas são sempre simples. O que significa, que a simplicidade dos zeros não é devida ao carácter definido positivo, mas ao carácter semi-clássico segundo a relação de estrutura. Então, ele riu-se de mim e não quis crer nas minhas afirmações.

Um outro aspeto que também cria polémica é a classificação dos polinómios ortogonais clássicos. Segundo a minha abordagem, clássico corresponde a uma noção matemática precisa, ou seja, à verificação da propriedade de Hahn. Nesse sentido, existem unicamente quatro famílias clássicas: as famílias de Hermite, Laguerre, Bessel e Jacobi. A sucessão de Hermite é definida positiva, a de Laguerre é definida positiva se $\alpha > -1$, a de Jacobi é definida positiva se $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. Assim sendo, as três sucessões precedentes têm o estatuto de sucessão clássica. A sucessão de Bessel, que depende de um parâmetro, nunca é definida positiva, pelo que lhe é recusado o estatuto de sucessão clássica, o que é aberrante, uma vez que ela satisfaz plenamente a propriedade de Hahn. Conclusão: como no romance de Alexandre Dumas, na realidade os três mosqueteiros eram quatro.

E quando submetia os artigos para publicação, qual era a reação dos *referees*?

Por vezes, recebi críticas que me motivaram ainda mais a prosseguir na via que introduzi. Devo dizer que nunca senti dificuldade de maior em ter todos os meus trabalhos aceites para publicação. Nunca me faltaram argumentos matemáticos para me opor às críticas que me foram feitas e sempre consegui colocar os meus artigos nas revistas que considerei apropriadas e interessantes. Acho que tive a sorte de ter uma carreira fácil. Gostaria também de salientar que Theodore Chihara sempre foi favorável ao meu ponto de vista algébrico, como se pode constatar lendo os *reviews* que ele escreveu sobre as minhas publicações.

Teve uma atividade e uma influência importantes em Espanha. Quando e em que circunstâncias teve início essa colaboração?

Conheci a equipa espanhola, cujo chefe era Francisco Marcellán, em Bar-le-Duc, em 1984, durante o colóquio dedicado a Edmond Laguerre. Posteriormente, Marcellán foi passar seis meses a Paris. Assistia e participava regularmente nas sessões de trabalho que decorriam todas as quartas-feiras no meu gabinete em Jussieu. Eu também fui a Madrid, mas por estadias de apenas alguns dias, unicamente para participar em júris de teses. O colóquio de Bar-le-Duc esteve, pois, na origem de uma colaboração franco-espanhola sobre os polinómios semiclássicos, a qual não durou mais do que uma década, pois a deontologia de Marcellán não é a minha. A via ficou livre para uma futura colaboração franco-portuguesa,

que teve início no final do século passado, que perdura até aos dias de hoje e da qual se encontram vestígios pré-históricos em Paris de dezembro de 1995, onde se encontrava a Zélia de passagem, com o objetivo de ir para Lille. Bloqueada pelas greves dos Caminhos de Ferro Franceses, forçada a permanecer em Paris, ela começou a preparar um dossier para enviar à FCT de Lisboa... Às vezes, as colaborações funcionam.

SOBRE OS AUTORES

Kenier Castillo. Especialista em Funções Especiais e Polinômios Ortogonais. Desde dezembro de 2018 é Investigador do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC) e membro do corpo docente do Programa Inter-Universitário de Doutoramento em Matemática organizado pelas Universidades de Coimbra e Porto.

Zélia da Rocha é Professora Auxiliar no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e é membro integrado do Centro de Matemática da Universidade do Porto. Desde 1995 que mantém uma colaboração regular com Pascal Maroni tendo com ele publicado vários artigos científicos e supervisionado várias teses de mestrado e de doutoramento.

As fotografias foram tiradas na Sala de Reuniões do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

autora / coord.
Paula Amaral
Univ. Nova
de Lisboa
pt-maths-in@spm.pt

SMART SECURITY – A MATEMÁTICA DA SEGURANÇA INTELIGENTE

A segurança é uma das principais preocupações de empresas e privados nos dias de hoje e para lidar com esses problemas e obter soluções eficazes, é muitas vezes necessário usar ferramentas de base matemática. A segurança aeronáutica é disso um bom exemplo.

1. O ENCONTRO SOBRE SMART-SECURITY

A segurança é um dos pilares das sociedades e assenta sobre muitas vertentes, a física, a económica, a social e a política, entre outras. Garantir a segurança a esses diferentes níveis é um grande desafio social, cuja responsabilidade é partilhada por diversos atores, por exemplo: governos, empresas, cientistas. Neste último âmbito, não temos dúvidas de que a matemática tem um papel de relevo a desempenhar. Por essa razão, no dia 19 de outubro de 2018 teve lugar em Lisboa, no ISEL, o segundo workshop organizado pela PT-MATHS-IN, "Mathematics for Smart Security", dedicado, tal como o título indica, a questões de Segurança.

A escolha do tema da segurança deveu-se não só à sua relevância e à sua atualidade mas principalmente ao grande contributo da matemática na resolução de problemas daí decorrentes. Por exemplo, a criptografia tem aplicações em segurança de dados, otimização em vigilância de residências e cidades, logística e redes, estatísticas no gerenciamento de fraudes. Numa classificação mais ampla, Modelação, Simulação e Otimização (MSO) têm lidado com muitas questões decorrentes de problemas de segurança e a PT-MATHS-IN cunhou esta ampla área de pesquisa como SMART SECURITY.

Os problemas abordados no workshop incluíram assuntos como Evacuação de Emergência, Comportamento Criminoso, Segurança Cibernética, Segurança Alimentar, Privacidade Digital, Prevenção de Fraudes e Proteção de Dados. O encontro contou com um painel de excelentes oradores, dos quais merecem destaque:

▶ Pietro Gennari, Chief Statistician, Food and Agriculture Organization (FAO), ONU, *The role of mathematical/statistical modelling in monitoring food security*;

▶ Rafael Tesoro Carretero, Comissão Europeia, *Maths for digital privacy*;

▶ Poul Hjorth da DTU - Technical University of Denmark e Director Executivo do ECMI, *Safety in numbers: smart prediction of crowd dynamics;*

▶ Wil Schilders, Presidente da EU-MATHS-IN, *Smart Security - Challenges and opportunities from EU-MATHS-IN point of view* ;

▶ David Rios, AXA-ICMAT Chair, ICMAT, CSIC e Royal Academy of Sciences, *Aviation safety risk management*.

Todos os temas tratados foram muito interessantes, ilustrando muito bem a base matemática nas diversas abordagens aos problemas de segurança. Neste artigo optámos por destacar o tema ligado à segurança aeronáutica por serem várias as áreas da matemática que intervêm na resolução deste problema. O resumo aqui apresentado decorre essencialmente do artigo [1] e dos slides da comunicação apresentada no workshop.

A SEGURANÇA AERONÁUTICA

O primeiro acidente mortal envolvendo passageiros na aviação civil deu-se em 1908 e, desde então, muitos esforços têm sido desenvolvidos na tentativa de tornar este transporte o mais seguro possível. Efetivamente, em 1945 é criada a Organização da Aviação Civil Internacional (ICAO) com o propósito de tornar a aviação o modo de transporte mais seguro. Desde 2004, a taxa de acidentes tem sido relativamente estável, com uma média entre quatro e cinco acidentes fatais por dez milhões de operações (voos). Tal pode dever-se ao facto de a segurança da aviação (SA) ter atingido um ponto em que se verifica um equilíbrio entre os benefícios de segurança e os seus custos.

No entanto, uma crescente desregulamentação e competição, bem como o aumento esperado do tráfego aéreo nas próximas décadas, poderá colocar os níveis atuais de segurança em risco.

A eliminação total de acidentes e incidentes graves de aviação é a meta desejável, mas realisticamente inatingível. A ideia de "sistemas sem risco" evoluiu para uma perspetiva centrada em torno da "gestão de segurança", destinada a apoiar processos de afetação de recursos em que um equilíbrio entre “operacionalidade” e “proteção” é alcançado. Nesse contexto, em [2] define-se segurança como o estado em que o risco de dano em pessoas ou danos materiais é reduzido e mantido abaixo de um nível considerado aceitável, através de um processo contínuo de identificação de perigos e gestão do risco.

O MODELO MATEMÁTICO

O modelo proposto em [1] procura criar uma metodologia para identificação de riscos na Segurança Aérea (SA) e determinar uma afetação de recursos de forma a mitigar as consequências dessas ocorrências. Uma ocorrência corresponde a um acidente ou incidente e, no caso do artigo citado, foram identificados 88 tipos de ocorrências como o aparecimento de pássaros em pista, outros tipos de invasão da pista, falhas do motor, greves, etc. Foi também considerada uma escala de gravidade das ocorrências, tendo-se considerado cinco classes:

> Acidente (1); incidente grave (2); incidente maior (3); incidente significativo (4); e ocorrência sem efeito de segurança (5).

Também as consequências que advêm das ocorrências são identificadas em categorias, nomeadamente:

> 1. Fatalidades; 2. Pessoas feridas com gravidade; 3. Pessoas feridas sem gravidade; 4. Atrasos de voos; 5. Cancelamentos de voos; 6. Necessidade de operações extra-programação de reparação de aeronaves; 7. Destruição da aeronave; 8. Perda de imagem devido a perceção negativa de ocorrências.

As sete primeiras classes são facilmente contabilizadas em valores numéricos, a oitava classe foi contabilizada através do número de acidentes, que sendo em geral divulgados pelas notícias, contribuem para a criação de uma má imagem.

Uma forma de diminuir o risco de ocorrências consiste numa melhor e maior afetação de recursos (mais vigilância, mais inspeções, mais sistemas de deteção de falhas, substituição de equipamentos mais antigos, mais tempo entre voos consecutivos, etc.). No entanto, em qualquer companhia os recursos são limitados, pelo que é necessário fazer uma gestão inteligente dos mesmos, tendo em consideração vários constrangimentos relevantes, como os económicos, técnicos, logísticos, jurídicos, e políticos, entre outros.

O objectivo do trabalho apresentado consistiu em estabelecer um conjunto de procedimentos com vista a minimizar as consequências das ocorrências acima descritas. O incremento dos recursos afetos a cada tipo de operação pode ter um impacto global sobre o estado da S.A. e portanto, na distribuição das taxas das ocorrências, na sua diminuição efetiva ou em alterações na proporções de cada classe de ocorrência, numa tentativa de tornar as ocorrências mais severas menos prováveis e reduzindo os impactos negativos associados a todo o tipo de ocorrências.

Para desenvolver este sistema, diferentes ferramentas matemáticas são utilizadas, nomeadamente, na previsão das ocorrências e das correspondentes classes de gravidade, previsão e estimativa das consequências, mapas de risco para rastrear ocorrências, e, finalmente, um procedimento para afetação ótima de recursos na gestão da segurança.

A cada política de segurança está associado um portefólio de medidas de prevenção representadas por um vetor onde cada componente representa a fração do recurso afeto a cada ocorrência. É assumido, para simplificar esta exposição, que os recursos são de um único tipo, por exemplo, tempo, pessoal, investimento financeiro, etc. Uma generalização a múltiplos recursos é também possível.

No modelo proposto assumiu-se que o recurso correspondia ao tempo de inspeção. Assim sendo, de forma a formular a afetação ótima dos recursos consideram-se as variáveis: $z_j =$ fração de tempo de inspeção afeto à operação j, para $j = 1, \ldots, k$. Pretende-se minimizar a função que representa os danos esperados dado o plano definido pelas variáveis z_j. Foram ainda consideradas restrições relativas a valores mínimos e máximos para os tempos de inspeção. Assim, obteve-se o seguinte modelo:

$$\min \quad \psi(z) \tag{3.1}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{k} z_j = 1 \tag{3.2}$$

$$z_j \geq z_{min} \text{ para } j = 1, \ldots, k \tag{3.3}$$

$$z_j \leq z_{max} \text{ para } j = 1, \ldots, k \tag{3.4}$$

A solução ótima deste problema, $z^* = (z_1^*, \ldots, z_k^*)$ determina a política ótima dos tempo de inspeção. De modo a definir a função $\psi(z)$ correspondente aos danos esperados para uma política definida por z, começa-se por definir o desenho de um diagrama de influência (DI). Este consiste numa representação gráfica compacta de uma situação de decisão [3], utilizando uma estrutura com nodos e arcos. Nestes diagramas há diversos tipos de acontecimentos: decisões são representadas por nodos retangulares, nós hexagonais descrevem valores, círculos e duplos círculos simbolizam, respetivamente, situações de incerteza e acontecimentos determinísticos. A imagem 1 representa o diagrama considerado em [1]. Aqui n representa o número de ocorrências a ter em conta durante o período de tempo em análise, k é o número estimado de ocorrências, e para cada ocorrência j, λ_j, x_j, $p_j = (p_j^1, p_j^2, \ldots, p_j^5)$ e $s_j = (s_j^1, s_j^2, \ldots, s_j^5)$ representam respetivamente a taxa, o número, e a proporção e o número em cada classe de gravidade. O valor da perda associado a j é dado por l_j e "*Loss*" representa a perda global. Neste caso, a taxa λ_j segue uma distribuição $f(\lambda_j|z) = f(\lambda_j|z_j)$ e a partilha entre as cinco classes de ocorrência $p_j = (p_j^1, p_j^2, \ldots, p_j^5)$ segue uma distribuição $f(p_j|z) = f(p_j|z_j)$.

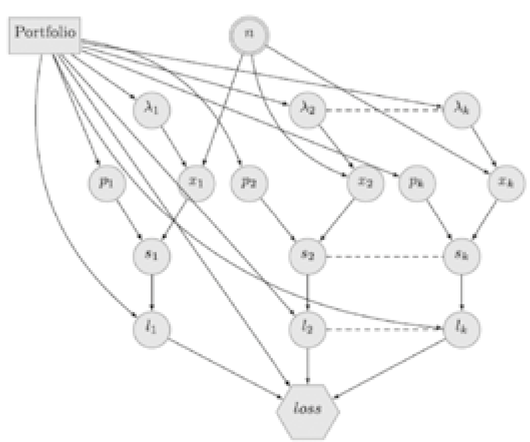


Figura 1. Diagrama de Influência.

Uma vez que o plano associado a z seja implementado, dadas as n operações:

- x_j ocorrências do tipo j repartidas por $(s_j^1, s_j^2, \ldots, s_j^5)$ têm lugar, ou seja $x_j = \sum_{i=1}^{5} s_j^i$.

- a g-ésima ocorrência do tipo j, designada por g_j resulta em $n_F^{g_j}$ fatalidades com distribuição $f(n_F|j, z_j)$; $n_H^{1g_j}$ e $n_H^{2g_j}$ ferimentos menores e graves com distribuição $f(n_H^1, n_H^2|j, z_j)$; $t_D^{g_j}$ acumulação de atrasos com distribuição $f(t_D|j, z_j)$; $n_C^{g_j}$ cancelamentos com distribuição $f(n_C|j, z_j)$ e finalmente $n_{RM}^{2g_j}$ e $n_{RM}^{3g_j}$ destruições ou reparações de aeronaves com distribuição $f(n_{RM}^2, n_{RM}^3|j, z_j)$.

- Globalmente houve lugar a $n_F = \sum_{j=1}^{k} \sum_{g=1}^{x_j} n_F^{g_j}$ fatalidades; $n_{Hi} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{g=1}^{x_j} n_H^{ig_j}$, $i = 1, 2$, ferimentos menores e graves respetivamente; $t_D = \sum_{j=1}^{k} \sum_{g=1}^{x_j} t_D^{g_j}$ atrasos acumulados; $n_C = \sum_{j=1}^{k} \sum_{g=1}^{x_j} n_C^{g_j}$ cancelamentos; $n_D = \sum_{j=1}^{k} \sum_{g=1}^{x_j} n_{RM}^{2g_j}$ destruições e finalmente $s^1 = \sum_{j=1}^{k} s_j^1$ acidentes.

- Com este esquema, a contabilização das consequências dos danos seria obtida por uma função $l(n_F, (n_{H1}, n_{H1}), t_D, n_C, (n_R, n_D), s^1)$.

Para cada portefólio z, a função de $\psi(z)$ (valor esperado dos danos) associada ao diagrama será dada por:

$$\psi(z) = E(l(n_F, (n_{H1}, n_{H1}), t_D, n_C, (n_R, n_D), s^1)|z).$$

De modo a obter os parâmetros de ψ, foi utilizada uma simulação de Monte Carlo usando um conjunto de portefólios e aproximando a superfície por um metamodelo de regressão como o proposto em [4]. Os métodos de Monte Carlo consistem numa vasta classe de métodos que computacionalmente permitem obter aproximações numéricas de funções complexas em que não é viável, ou é mesmo impossível, obter uma solução analítica ou, pelo menos, determinística.

NOTA FINAL

Este trabalho representa uma pequena demonstração do enorme potencial da matemática para se impor como uma disciplina transversal na resolução dos muitos problemas que se relacionam com a temática da segurança. É uma proposta da PT-MATHS-IN cunhar esta área de SMART SECURITY e apoiar a sua implementação e desenvolvimento a nível nacional. De realçar, para terminar, que este workshop foi precedido, a 18 de outubro, pela reunião anual do conselho EU-MATHS-IN, e pela apresentação do CORE-TEAM, o novo projeto europeu entre a matemática e a indústria europeia, que contou no final do dia com a presença do ministro da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Prof. Dr. Manuel Heitor. O presidente da EU-MATHS-IN, Wil Schilders, na sua intervenção final neste encontro, fez questão de sublinhar que, a par da MSO (Modelação, Simulação e Otimização), a SMART SECURITY pode impor-se como uma área chave de intervenção dos matemáticos na indústria.

REFERÊNCIAS

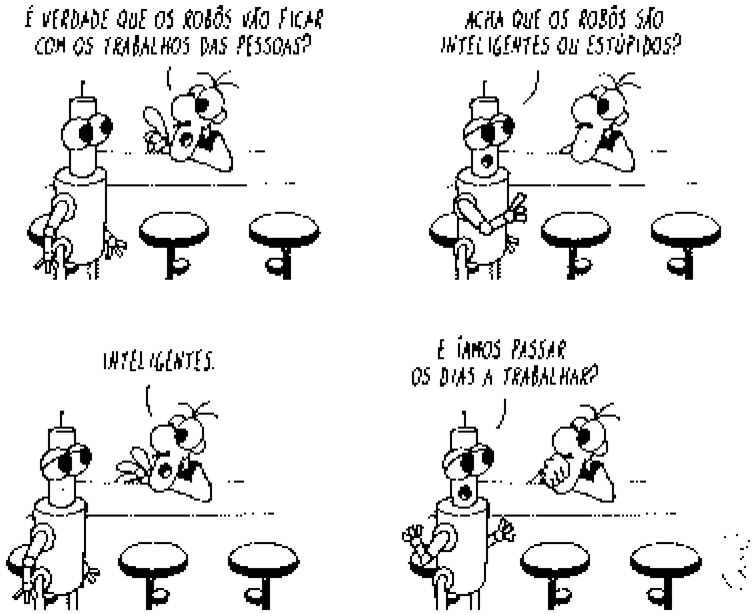
[1] D. Rios Insua, C. Alfaro, J. Gomez, P. Hernandez-Coronado, F. Bernal, *A Framework for Risk Management Decisions in Aviation Safety at State Level*, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 179, 2018, Págs 74-82, ISSN 0951-8320, *https://doi.org/10.1016/j.ress.2016.12.002*.

[2] ICAO. *Safety Management Manual* (Doc 9859 AN/474). International Civil Aviation Organization (ICAO); Montreal. 2006.

[3] Detwarasiti, A.; Shachter, R.D. *Influence diagrams for team decision analysis*. Decision Analysis. 2 (4): 207–228. doi:10.1287/deca.1050.0047, 2005.

[4] Jack P.C. Kleijnen and Robert G. Sargent, "A methodology for fitting and validating metamodels in simulation". *European Journal of Operational Research*, 120 (1), 14-29,doi:10.1016/S0377-2217(98)00392-0 , 2000.

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 19/01/2019. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto
Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

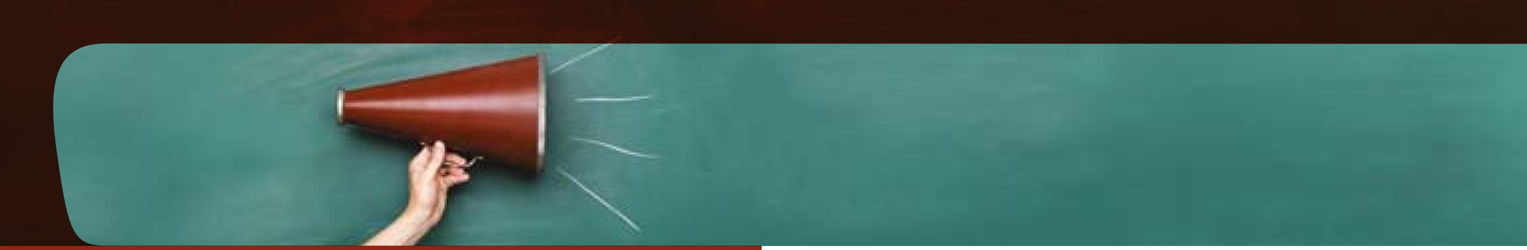
IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design
Rua da Nau Catrineta n 14 2º Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE:
Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ICS **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



Gonçalo Morais
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

PATRÍCIA GONÇALVES

Patrícia Gonçalves é professora associada do IST. Fez o doutoramento em matemática no IMPA e desenvolve investigação em Sistemas de Partículas. Foi-lhe atribuída, em 2016, uma bolsa do European Research Council, a primeira em Portugal para a área da Matemática. Aqui fica um resumo da longa conversa que tivemos com esta mulher assertiva e profunda. Muito ficou por transcrever e muito mais por falar.

GONÇALO Patrícia, fale-nos um pouco da área em que desenvolve o seu trabalho de investigação.

PATRÍCIA A minha área é uma área que não existe em Portugal. Eu sou a única pessoa que trabalha em sistemas de partículas. Parte da Teoria da Medida, de Processos Estocásticos e chegamos aos sistemas de partículas. A ideia que está por detrás do que eu faço é muito simples. Nós, tentando descrever tudo o que vemos com os nossos olhos, aquilo que podemos chamar de mundo macroscópico, um mundo contínuo, perguntamos, por exemplo, de que forma é que neste mundo um gás se espalha. Usando as leis da Física não podemos fazer uma descrição correta, porque teríamos de fazer uma lei para cada uma das partículas, algo que nem com os supercomputadores que temos hoje em dia isso seria possível. Estou a falar de um gás, mas poderíamos estar a falar de outras coisas, como planetas, galáxias...

GONÇALO Sistemas com muitas partículas...

PATRÍCIA Sistemas com muitas partículas... A ideia é então descretizar esse corpo, olhar para as partículas, para os constituintes, para as moléculas, e assumir que essas partículas não se movem de uma forma determinista. Eu não sei exatamente qual é a lei que elas seguem, mas direi que elas têm uma determinada probabilidade de se moverem para um determinado lugar. Claro que para conseguir calcular qualquer coisa, eu vou ter de escolher uma lei de probabilidade para as partículas. A matemática tem isso, eu posso querer ser muito ambiciosa e querer modelar o mundo usando fórmulas matemáticas, mas temos de ser realistas. Para conseguir tratar os modelos, temos de escolher a probabilidade e fazer simplificações. Há quantidades que eu estou interessada em analisar, por exemplo, a pressão, a temperatura. Num fluido, qual é a viscosidade...
Formalmente, isto significa que eu discretizo o espaço, unidimensional ou de dimensão superior. A discretização é feita segundo uma certa regra. Por exemplo, no caso unidimensional, faço a discretização do intervalo

[0,1] em intervalos pequenos e faço o comprimento de cada um destes subintervalos convergir para zero. Deste modo, no limite, consigo obter o espaço macroscópico inicial. Ou seja, faço uma inclusão de um espaço discreto num espaço contínuo, e quando passamos ao limite do parâmetro de escala, vou obter o meu espaço macro. Neste espaço discreto, dizemos que cada partícula vai esperar um tempo até começar a mover-se, uma quantidade de tempo aleatório, que é dada por um processo aleatório. Em geral, poderíamos considerar um processo qualquer, mas, de facto, para voltarmos ao mundo em que podemos fazer contas, vamos considerar um processo de Markov, em que, de todo o passado e o presente, para saber qual o futuro do meu processo só preciso de saber o presente. Quando a minha partícula decide iniciar o seu movimento, em que este início é regulado por uma variável exponencial, porque é a única distribuição contínua que tem a propriedade de perder a memória, obtemos então um sistema de partículas em que o tempo em que as partículas mudam de local e para onde mudam é aleatório. No entanto, a quantidade que queremos observar tem uma lei determinística, pois quando passo ao limite, tenho uma função que é solução de uma equação às derivadas parciais (EDP), completamente determinística.

GONÇALO Um modelo parecido com uma caixa de Ehrenfest...

PATRÍCIA Sim, mas mais complicado, porque temos mais dimensões, mais variáveis, temos processos para os tempos e processos para os saltos, temos uma coisa de que eu não falei, que é a configuração inicial de que parte o meu sistema. Por exemplo, eu estico o braço e lanço um gás numa sala. Isto reflete uma escolha. O que é interessante é a passagem do microaleatório e discreto para o macro contínuo e determinístico.

GONÇALO E isso foi aquilo que o Boltzmann conseguiu fazer muito bem...

PATRÍCIA Exatamente. Isto é tudo proposto pelo Boltzmann na Física Estatística.

GONÇALO Consegue imaginar o que é que daqui a 20 anos se saberá na sua área que hoje não se sabe?

PATRÍCIA Eu e os meus colaboradores contribuímos para a resolução de um problema que estava em aberto na Física-Matemática há muitos anos, desde 1986. Num dia de inverno, temos partículas de gelo que caem na janela de um carro. Devido à geometria das partículas de gelo, há buracos que se formam. Se pensarmos na interface que se forma do vidro que tem partículas do vidro que não tem partículas, foi conjeturado em 1986 por três físicos, Kardar, Parisi and Zhang, que essa linha é descrita por uma lei universal, descrita por uma solução de uma EDP estocástica, aí sim, deixando de ser determinística. Essa conjetura afirmava que isto não acontecia apenas no caso das partículas de gelo, mas igualmente noutro tipo de fenómenos como o crescimento de bactérias, ou noutro exemplo que está muito presente entre os matemáticos, que é a marca deixada pelo copo do café numa mesa. Se observarmos essa linha com um microscópio, observamos o mesmo tipo de interface.
A pergunta a que eu e os meus colegas procurámos responder foi a de como apanhar num sistema microscópico e, a partir daqui, chegar ao sistema macroscópico. De novo, era tentar perceber de que forma se faz essa passagem do micro para o macro.
Conseguimos fazê-lo considerando sistemas muito gerais, sistemas que têm uma assimetria, ou seja, nas probabilidades de transição há uma direção privilegiada. Por exemplo, no caso unidimensional, as partículas terão uma probabilidade de se moveram para a esquerda diferente da probabilidade de se moverem para a direita. Ou seja, há um *drift*. Fazendo variar este *drift* conseguimos modelar a deposição de partículas com outros tipos de geometria.

GONÇALO E essa assimetria advém de uma lei física...

PATRÍCIA Sim, podemos pensar num caso extremo em que eu vou para a direita com probabilidade um. Este é o caso do trânsito. Podemos assim modelar os engarrafamentos e coisas desse estilo.
Para cada assimetria, caímos naquilo a que os físicos chamam classe universal, em que existem certas propriedades e um conjunto de equações. Quando mudamos a assimetria, mudamos de classe e isto implica que mudamos o tipo de geometria das nossas partículas.
Uma questão que ainda está em aberto é saber que tipo de sistemas caem nestas classes. Nós contribuímos com a classificação de vários sistemas.

GONÇALO E como é que acabou por ser a única pessoa em Portugal a trabalhar nesta área?

PATRÍCIA Bem, eu fiz a minha licenciatura na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e passados 20 anos, fazendo uma crítica rápida ao ensino das Probabilidades em Portugal, as Probabilidades ainda são vistas junto à Estatística. Como qualquer pessoa num curso científico em Portugal, temos uma cadeira na licenciatura de Probabilidades e Estatística em que, basicamente, se passa um semestre inteiro a mentir aos alunos. O problema é que um aluno de licenciatura em Matemática chega ao fim dos três anos e não vê nunca nada de probabilidades. A minha realidade foi esta.
Na escolha da área do meu curso, escolhi inicialmente o ramo educacional. Mas antes de ir para estágio, decidi mudar para Matemática Pura. Ajudou-me na altura a forma como o curso estava organizado, pois, voltando atrás, apenas tive de fazer uma cadeira do terceiro ano e o quarto ano completo. Essa disciplina do terceiro ano era precisamente Teoria da Medida. Fiz o primeiro semestre. Na altura, os professores que eu tinha eram, na sua maior parte doutorados em sistemas dinâmicos pelo IMPA e eles estavam sempre a aconselharem-nos a ir fazer um curso de verão ao Rio de Janeiro. Era possível, porque o verão no Brasil coincide com a fase de exames do primeiro semestre aqui. Falámos com os professores e, eu e mais dois colegas, fomos. Embora a minha ideia original fosse ir fazer um curso de Análise Funcional ou Probabilidades, descobri que havia um curso de Teoria da Medida com um professor que eu não sabia quem era.

GONÇALO E quem era esse Professor?

PATRÍCIA Era o Cláudio Landim, que veio mais tarde a ser o meu orientador. Fiz então Teoria da Medida, de que eu já tinha ouvido falar mas não sabia o que era. Além disso, ia ter essa mesma disciplina no segundo semestre no Porto. Gostei imenso! Percebi que se fizesse o doutoramento no IMPA, era com ele que queria trabalhar. Independentemente daquilo que ele fizesse. Ele era muito duro mas ao mesmo tempo era muito rigoroso, qualquer

questão tinha sempre uma resposta correta.
Voltei ao Porto. Fiz basicamente um ano num semestre porque tinha estado no Brasil e tinha ainda as disciplinas de primeiro semestre para acabar. Candidatei-me ao IMPA diretamente para doutoramento, sabendo que tinha de fazer um enorme esforço para colmatar o que não sabia de Probabiidades.

GONÇALO Vamos falar um bocado do IMPA...

PATRÍCIA O ambiente do IMPA é espetacular. Não sei como está agora. Na altura havia muitos portugueses com bolsa da FCT. Hoje em dia está diferente, porque a FCT está a atribuir bolsas aos programas doutorais. Na altura, éramos dez portugueses, eu em Probabilidades e muitos em Sistemas Dinâmicos.
Alguns dos que foram comigo não voltaram mais, porque temos em Portugal este problema muito grave dos concursos. Eu demorei nove anos para arranjar emprego. É um problema que fingimos não existir. Eu passei por tudo, ao ponto de dizerem que não sou probabilista, ao ponto de não ser admitida sequer a concurso. Tive momentos em que tive vontade de nunca mais voltar a Portugal.

GONÇALO Mas a visão que temos é a de que no meio do caos que é o Brasil, o IMPA é uma ilha...

PATRÍCIA Mas em ciência as coisas são muito mais evoluídas do que aqui. A gestão de um projeto no Brasil é aquilo que deveríamos fazer em Portugal. Eu tenho esta bolsa da ERC para gerir e muitos dos cabelos brancos que tenho devem-se, não aos meus três filhos, mas à gestão desta bolsa. Por exemplo, para comprar os computadores para a minha equipa, mandei o preço para Bruxelas e eles disseram de imediato que sim. Em Portugal, um Mac é considerado um produto de luxo e, portanto, comprar isto nem pensar. Mandei uma carta para o Ministério das Finanças e estive seis meses sem resposta. Entretanto, a lei mudou e eu pude comprar os computadores. E isto com dinheiro europeu que quando chega a Portugal tem de se reger com a lei portuguesa e com a lei do Técnico. No Brasil

dão-nos um cartão de crédito e somos nós que fazemos a gestão do dinheiro, sem ter de passar por agências de viagens em que pagamos por uma deslocação quatro vezes mais do que se fosse comprado diretamente na internet.
Mas eu não quero saber nada do passado, costumo dizer que sou um processor de Markov. Felizmente, tudo correu bem e hoje estou no Técnico, que é um local onde quis estar.

GONÇALO E a bolsa da ERC...

PATRÍCIA Bem, decidi concorrer mas sem grandes esperanças. Primeiro, havia um colaborador meu que já tinha concorrido e passou para a entrevista, que é a segunda fase do concurso. O passar para a entrevista já é algo extraordinário. Em França quem chega a esta fase, mesmo que não progrida mais, tem financiamento do Ministério da Educação e Ciência, porque o projecto já é reconhecido como de excelência. Houve muitos outros, pessoas de muita qualidade que eu conhecia que nem sequer chegaram à entrevista.
Mas, apesar de tudo, decidi concorrer na mesma. Perdi um mês da minha vida, porque o processo é todo ele cheio de detalhes. Por exemplo, o resumo, que eu devo ter escrito umas 100 vezes, tem de ser feito de maneira a captar a atenção de alguém que não é necessariamente especialista na área. Os slides, por exemplo, não podem ter certo tipo de cores, por causa da luz da sala.
Quando terminei a apresentação achei que não ia ganhar, mas tudo acabou por correr bem.

GONÇALO Gostaria de falar de um último tema. Acha que o mundo da Matemática é um mundo de homens?

PATRÍCIA Tenho respondido a essa pergunta muitas vezes nos últimos tempos. Em dezembro, estava em Cambridge, no Newton Institute, numa conferência em Física-Matemática e, dos 86 participantes, éramos apenas cinco mulheres. Em muitas conferências em que sou organizadora, e em que proponho o nome de mulheres, existe sempre um certo atrito. Não que a pessoa que eu esteja a escolher fosse pior, mas o que muitas vezes acontece, caso duas pessoas estejam em pé de igualdade, é ser o homem o escolhido.

GONÇALO Ou seja, uma mulher tem de ser sempre melhor...

PATRÍCIA Muito melhor. Em muitas conferências, eu sou a única mulher que fala e existem pouquíssimas na assistência. Mas por detrás disto tudo existem razões fortes para isto acontecer. Há mulheres que querem ser mães. Eu andei muito tempo a esperar o tempo certo para ter filhos. No Técnico, por exemplo, depois de ter tido um filho, dão-nos a possibilidade de estar um semestre só a fazer investigação. Eu fui investigadora FCT com um filho e o prazo continua a correr. Por exemplo, a amamentação é um período difícil, em que estamos constantemente a correr para casa para dar de mamar. Com todas estas dificuldades, é fácil desistir. Julgo que este processo tem de ser revisto.

GONÇALO Patrícia, obrigado...

PATRÍCIA De nada, foi um gosto.

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

COMO ESTAMOS A PENSAR?

Como pensamos o que pensamos? Quantos de nós já pensaram nisso? Afinal, o que são os pensamentos? Palavras, imagens ou uma mistura das duas?

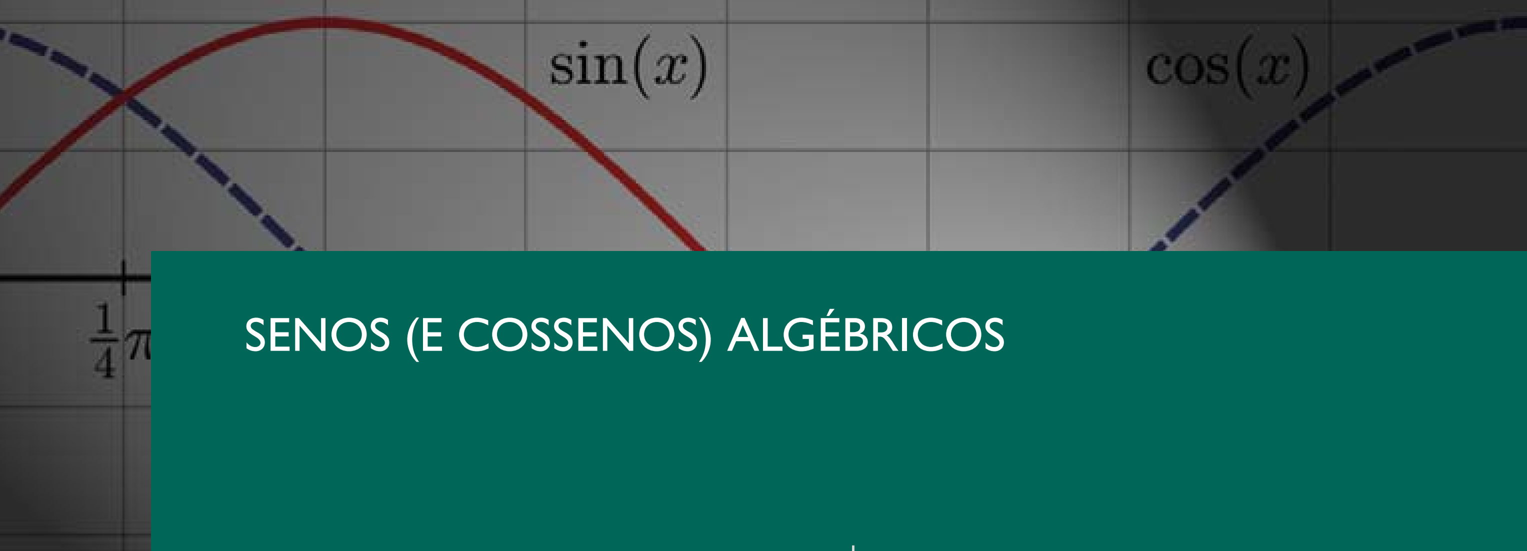
Cada vez mais vou encontrando membros das gerações mais novas (alunos, leitores, filhos de amigos) que admitem ter uma relação precária ou distanciada com a palavra escrita. Custa-lhes encontrar as palavras certas para exprimirem o que sentem e acabam por recorrer a "emojis" e a memes para comunicarem aos amigos ou namorados as suas alegrias, tristezas e frustrações. Muitos têm grandes dificuldades em concentrarem-se num texto por mais do que alguns segundos, o que lhes limita a capacidade de interpretar e comentar o que leem. As respostas que leio nos exames de alunos de vinte e poucos anos tendem a ser fragmentadas e mal construídas, pejadas de erros ortográficos e discordâncias gramaticais. É frequente perguntarem-me se podem desenhar um esquema para representar um conceito ou organizar um conjunto de ideias, e a verdade é que o fazem muito bem.

A psicóloga Linda Kreger Silverman, investigadora no Institute for the Study of Advanced Development de Denver, Colorado, publicou em 2005 um estudo que incidiu numa população de 750 crianças em idade escolar e no qual se afirmava que 30% das crianças pensavam sobretudo por imagens, 45% recorriam tanto a imagens como a palavras e que apenas 25% das crianças recorriam exclusivamente a palavras para estruturar o pensamento. O meu palpite de leigo é que estes 25% de 2005 serão hoje muito menos, fruto da evolução tecnológica que continua a privilegiar a imagem e o som em detrimento do texto. Será isto um mal? Não estou certo, mas é algo com que todos os pais e professores terão de lidar.

Quando vou a escolas secundáriasn pergunto sempre aos alunos quantos leram um livro da série "Harry Potter" antes de verem os filmes. Há sempre um ou dois braços levantados, mas não mais. A grande maioria quedou-se pelos filmes e alguns poucos leram os livros sem poderem imaginar um Harry Potter e um Voldemort diferentes dos que Hollywood já lhes tinha dado. Antes dos filmes todos os Harry Potter são diferentes, depois dos filmes todos ficam iguais.

O perigo que o abuso das tecnologias audiovisuais comporta não é tanto o de transladar o pensamento do texto para as imagens, mas sim o de atrofiar a capacidade de criar imagens únicas e originais. Parece-me difícil que a criação artística, científica e literária ocorra em cérebros que sentem e pensam unicamente por "emojis" e memes, onde tudo o que se pensa foi, afinal, já pensado. Acredito que os livros têm ainda um papel fundamental no desenvolvimento das capacidades de aprendizagem que nenhum outro meio pôde ainda suplantar, mas se calhar sou só eu, que insisto em pensar com palavras.

A história e o desenvolvimento dos conceitos de números algébricos e de números transcendentes é bastante rica, cheia de factos surpreendentes e de uma beleza extraordinária. Neste trabalho apresentamos, no nosso ver, os principais factos relacionados com o tema, localizando historicamente as várias personagens que participaram nessa jornada, e concluiremos apresentando uma família de valores de senos (e cossenos) que são números algébricos. Por fim, será exibido um polinómio não nulo, de coeficientes inteiros, que admite o sen1^o como raiz. Convidamos o leitor a fazer connosco esta rápida mas agradável viagem por estas belas ideias matemáticas!



SENOS (E COSSENOS) ALGÉBRICOS

Carlos A. Gomes[a] e Eurípedes C. da Silva[b]
DMAT – UFRN – Brasil[a] e DMAT – IFCE – Brasil[b]
cgomesmat@gmail.com[a] e euripedescarvalhomat@gmail.com[b]

1. INTRODUÇÃO

Os números reais são classificados sob diversos aspetos, entre os mais conhecidos está a classificação de um número real como sendo racional ou irracional. Um número real α é dito racional, quando existem inteiros p e q, com $q \neq 0$ tais que $\alpha = p/q$. Como de costume, representaremos o conjunto dos números racionais por $\mathbb{Q}$. Os números $\sqrt{2}$, e e π são exemplos bem conhecidos de números irracionais. A primeira demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional geralmente é atribuída a Hippasus de Metapontum (550 a.C.), que pertencia à escola pitagórica. Mais tarde, essa demonstração foi imortalizada nos Elementos de Euclides. Em 1737, o matemático suíço Leonard Euler foi o primeiro a provar que o número e é irracional (apesar de que a prova mais conhecida hoje é devida ao matemático francês Joseph Fourier, *vide* [3]). No caso do π, a primeira prova da sua irracionalidade foi dada por Lambert. Em 1761, ele provou que se $x \in \mathbb{Q}$ então $tg(x)$ é irracional. Assim, como $tg(\pi) = 0$, segue desse resultado que π é irracional. A prova mais popular da irracionalidade de π (que aparece na maioria dos livros) é devida ao professor Ivan Niven em [10].

Alternativamente, podemos definir um número real α como sendo racional quando for raiz de um polinómio do primeiro grau cujos coeficientes são inteiros. De facto, dado um racional $\alpha = p/q$, com p e q inteiros, com $q \neq 0$, segue que α é raiz do polinómio $f(x) = qx - p$, cujos coeficientes são inteiros, visto que

$$f(\alpha) = q.\alpha - p = q \cdot \frac{p}{q} - p = p - p = 0.$$

Reciprocamente, se α é raiz de um polinómio não nulo de grau 1 com coeficientes inteiros, $f(x) = qx + p$, então α é racional. De facto, $f(\alpha) = 0$ implica

$$q\alpha + p = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Em particular, $\sqrt{2}$ não é raiz de nenhum polinómio nessas condições, já que tal contradiria a sua irracionalidade.

Entretanto, o número $\sqrt{2}$ é raiz de um polinómio de grau 2 (com coeficientes inteiros), a saber: $p(x) = x^2 - 2$. Nesse contexto podemos classificar os números reais (na verdade, os números complexos) como sendo algébricos ou transcendentes, sendo algébricos aqueles que são raízes de um polinómio não nulo com coeficientes inteiros e transcendentes aqueles que não o são. Dizemos ainda que um número real (ou complexo) α é algébrico de grau $\boldsymbol{n}$, quando ele for raiz de um polinómio com coeficientes inteiros e de grau n, e se não existir um outro polinómio não nulo com coeficientes inteiros, de grau menor do que n, do qual α seja raiz.

No contexto dessas ideias, note que os números irracionais não são números algébricos de grau 1. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico de grau 2. Como um número transcendente não é raiz de nenhum polinómio não nulo com coeficientes inteiros, podemos encarar os números transcendentes como um conceito mais amplo do que os irracionais da seguinte forma: os irracionais são os números reais que não são algébricos de grau 1, já os transcendentes são aqueles números reais (ou complexos) que não são algébricos de nenhum grau.

Em 1874, o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) provou um facto surpreendente: o conjunto dos números algébricos é enumerável (*vide* [3]). A enumerabilidade desse conjunto implica a existência de uma "quantidade" infinitamente maior de transcendentes do que de algébricos, muito embora se conhecessem pouquíssimos exemplos explícitos. Esse facto é bastante curioso; se quase todos os números são transcendentes, é muito estranho que demonstrar a transcendência de um número seja, em geral, uma tarefa tão complicada como afirma Diego Marques em [8].

Ao longo do tempo, grandes matemáticos deram as suas contribuições a essa linha de pesquisa, como Euler, Liouville, Cantor, Weierstrass, Lindemann, Hermite, Hilbert, Sigel, e Hardy, entre muitos outros, mas o primeiro número a ter a sua transcendência demonstrada foi $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$, em 1851, fruto do trabalho do matemático francês Joseph Liouville (1809-1882). Desde então, esse número passou a ser chamado de constante de Liouville em sua homenagem (existe uma prova desse facto em [9]).

Em 1873, Charles Hermite (1822-1901) provou que e (número de Euler) é transcendente (*vide* [3]). Aproximadamente uma década após essa célebre constatação, o alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) provou que e^{α} é transcendente, sempre que α é algébrico não nulo. Com isso, Lindemann publicou uma bela demonstração de que π é transcendente (*vide* [3]), o que levou à solução de um dos três problemas clássicos de construção com régua e compasso dos gregos antigos: a quadratura do círculo. O facto de π ser transcendente revelou que tal construção é impossível.

Mesmo sabendo que π e e são irracionais, até hoje não sabemos se $\pi + e$ e $\pi \cdot e$ são irracionais. O que se sabe é que, pelo menos, um deles é irracional. Isso pode ser esclarecido como decorrente do facto de que π é transcendente. Na realidade, os números π e e são as raízes da equação quadrática $x^2-(\pi+e)x+\pi\cdot e=0$. Supondo que $\pi+e$ e $\pi\cdot e$ fossem ambos racionais, i.e., $\pi+e={}^a/_b$ e $\pi\cdot e={}^c/_d$, com a, b, c e d inteiros ($b\neq 0, d\neq 0$), teríamos que

$$x^2-(\pi+e)x+\pi\cdot e=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{a}{b}x+\frac{c}{d} \\ \Leftrightarrow bdx^2-adx+bc=0.$$

Ora, como π é uma das raízes dessa equação, teríamos que $bd\pi^2-ad\pi+bc=0$, o que implicaria que π seria algébrico, uma contradição! Logo a nossa hipótese inicial de que $\pi+e$ e $\pi.e$ fossem ambos racionais não pode ser verdadeira, donde concluímos que, pelo menos, um deles é irracional.

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Paris, o matemático alemão David Hilbert propôs a sua famosa lista de 23 problemas, na qual o 7.° perguntava se o logaritmo de um número algébrico numa base algébrica seria algébrico ou transcendente. Em 1934, trabalhando independentemente, Alexander Gelfand e Theodor Schneider, em 1935, demonstraram o seguinte facto: se α é algébrico, diferente de 0 e 1, e β é algébrico irracional, então α^β é transcendente (*vide* [11]). Assim, por exemplo, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $5^{\sqrt[3]{4}}$, $e^\pi=(-1)^{-i}$ e 2^i são números transcendentes.

2. SENOS (E COSSENOS) ALGÉBRICOS

Há alguns anos, folheando o livro *Tópicos de Álgebra* [4] (ou [5]), encontramos um curioso problema:

Prove que o sen1^o é um número algébrico.

Na época tentámos solucionar o problema sem muito sucesso. Recentemente, de modo inesperado, encontrámos em [1] um problema mais geral relacionado com esse problema de o sen1^o ser algébrico. A solução do problema que encontrámos é bastante simples e elegante, além de que utiliza apenas recursos elementares. Agora, neste pequeno artigo, vamos exibir esse problema assim como a sua solução, que revela uma ampla classe de números algébricos que são valores assumidos pelas funções trigonométricas seno e cosseno, como, por exemplo, o sen1^o, o que resolve o nosso velho e bom problema de anos atrás.

Nesta secção vamos provar que se $\alpha\in\mathbb{Q}$, então $\cos(\alpha\pi)$ e $\operatorname{sen}(\alpha\pi)$ são ambos números algébricos.

De facto, como $\alpha\in\mathbb{Q}$, segue que existem $a\in\mathbb{Z}$ e $b\in\mathbb{N}$ tais que $\alpha={}^a/_b$. Se φ é um número real, então

$$(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)^{4b}=\cos(4b\varphi)+i\operatorname{sen}(4b\varphi). \qquad (1)$$

Por outro lado, pelo binómio de Newton, temos que:

$$(\cos\varphi\operatorname{sen}+i\operatorname{sen}\varphi)^{4b}=\sum_{k=0}^{4b}\binom{4b}{k}(\cos(\varphi))^{4b-k}(i\operatorname{sen}(\varphi))^k. \qquad (2)$$

Igualando as partes reais das equações (1) e (2), segue que:

$$\cos(4b\varphi)=\cos^{4b}\varphi-\binom{4b}{2}\cos^{4b-2}\varphi.\operatorname{sen}^2\varphi+\cdots \\ \cdots-\binom{4b}{4b-2}\cos^2\varphi.\operatorname{sen}^{4b-2}\varphi+\operatorname{sen}^{4b}\varphi.$$

Como $\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, na expressão do $\cos(4b\varphi)$, para cada inteiro $1\leq t\leq 2b$, podemos fazer a substituição

$$\operatorname{sen}^{2t}\varphi=(\operatorname{sen}^2\varphi)^t=(1-\cos^2\varphi)^t,$$

o que nos permite escrever $\cos(4b\varphi)$ como

$$\cos(4b\varphi)=f(\cos\varphi),$$

onde f é um polinómio com coeficitentes inteiros. Fazendo $\varphi=\alpha\pi$, segue que

$$f(\cos(\alpha\pi))=\cos(4b\alpha\pi)=\cos(4b\frac{a}{b}\pi)=\cos(4a\pi)=1.$$

Assim, considerando o polinómio (de coeficientes inteiros) $g(x)=f(x)-1$, obtemos

$$g(\cos(\alpha\pi))=f(\cos(\alpha\pi))-1=1-1=0,$$

o que revela que o $\cos(\alpha\pi)$ é um número algébrico quando $\alpha\in\mathbb{Q}$.

Além disso, vamos mostrar que $g(\operatorname{sen}(\alpha\pi))=0$. De facto,

$$\begin{aligned} f(\operatorname{sen}(\alpha\pi)) &= f\left(\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\pi)\right) \\ &= \cos\left(4b(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\pi)\right) \\ &= \cos\left(4b(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{a}{b}\pi)\right) \\ &= \cos((b-2a)2\pi)=1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(\operatorname{sen}(\alpha\pi))=f(\operatorname{sen}(\alpha\pi))-1=1-1=0,$$

o que revela que $\operatorname{sen}(\alpha\pi)$ é um número algébrico quando $\alpha\in\mathbb{Q}$.

No caso particular em que $\alpha={}^1/_{180}$, temos que ${}^1/_{180}\pi=1^o$. Temos então um polinómio g de coeficientes inteiros e de grau $4\times 180=720$ tal que $g(\operatorname{sen}1^o)=0$, revelando que $\operatorname{sen}1^o$ é algébrico, o que resolve o nosso velho problema.

Apesar de termos exibido um polinómio g com coeficientes inteiros de grau 720, tal que $g(\cos 1^o)=0$, não podemos afirmar que $\cos 1^o$ é algébrico de grau 720, visto que esse não é o polinómio de coeficientes inteiros de menor grau que tem $\cos 1^o$ como raiz. Por exemplo, pode-se demonstrar que o polinómio

$$\begin{aligned}p(x) &= 281474976710656x^{48} - 3377699720527872x^{46}\\ &+ 18999560927969280x^{44} - 66568831992070144x^{42}\\ &+ 162828875980603392x^{40} - 295364007592722432x^{38}\\ &+ 411985976135516160x^{36} - 452180272956309504x^{34}\\ &+ 396366279591591936x^{32} - 280058255978266624x^{30}\\ &+ 160303703377575936x^{28} - 74448984852135936x^{26}\\ &+ 28011510450094080x^{24} - 8500299631165440x^{22}\\ &+ 2064791072931840x^{20} - 397107008634880x^{18}\\ &+ 59570604933120x^{16} - 6832518856704x^{14}\\ &+ 583456329728x^{12} - 35782471680x^{10}\\ &+ 1497954816x^{8} - 39625728x^{6}\\ &+ 579456x^{4} - 3456x^{2} + 1\end{aligned}$$

tem grau 48 e cumpre as condições $p(\cos 1^o) = 0$ e $p(\text{sen}\, 1^o) = 0$, como pode ser visto em [7], [2] ou *https://math.stackexchange.com/questions/1838116/the-other-47--roots-of-the-minimal-polynomial-for-cos-1-circ.*

De modo mais geral, pode provar-se que o menor grau de um polinómio de coeficientes inteiros tal que $p(\cos{}^{(2\pi)}/_{n}) = 0$, com $n \geq 3$, é $1/2\varphi(n)$, onde φ é a função phi de Euler. Lembremos que

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

e $p_1, p_2, \cdots, p_k$ são os primos que aparecem na decomposição do inteiro positivo n em fatores primos (veja, por exemplo, [6]). No caso do $\cos 1^o = \cos{}^{(2\pi}/_{360)}$, segue que

$$\varphi(360) = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 96.$$

Assim, o menor grau de polinómio de coeficientes inteiros tal que $p(\cos 1^o) = 0$ é $96/2 = 48$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bergen, J. *A Concrete Approach to Abstract Algebra: From the Integers to the Insolvability of the Quintic.* First edition . Academic Press. 2010.

[2] Cox, David A. *Galois Theory*. Second edition. John Wiley & Sons. 2013.

[3] Figueiredo, Djairo Guedes de. *Números Irracionais e Transcendentes*.Terceira edição. SBM. 2012.

[4] Herstein, I. *Tópicos de Álgebra*. Primeira edição. Editora Polígono. SP. 1970.

[5] Herstein, I. *Tópics in Algebra*. Fist edition. Ginn and Company. 1964.

[6] Watkins, William; Zeitlin, Joel. "The Minimal Polynomial of *cos* $(2\pi/n)$". *The American Mathematical Monthly,* Vol. 100, No. 5 (May, 1993), pp. 471-474.

[7] Lehmer, D. H. "A Note on Trigonometric Algebraic Numbers". *The American Mathematical Monthly* - Vol. 40, No. 3 (Mar., 1933), pp. 165-166.

[8] Marques, Diego. *Teoria dos Números Transcendentes.* Primeira edição. SBM. 2013.

[9] Niven, I. *Números: Racionais e Irracionais*.Primeira edição.SBM.2012.

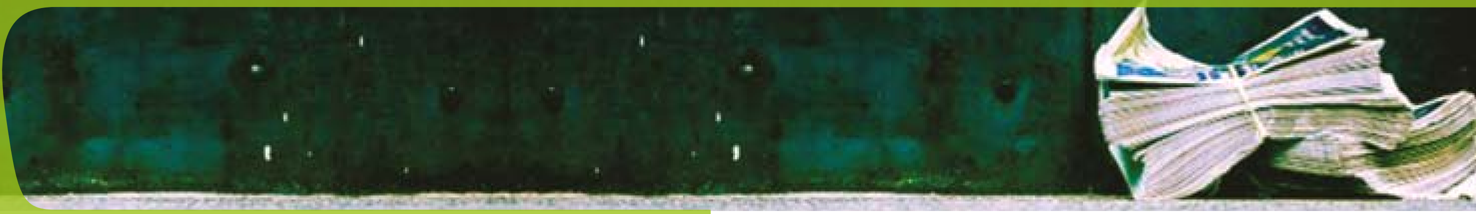
[10] Niven, I. *Números: Irrational Numbers*. First edition. The Carus Monographs. MAA - The Matematical Assotiation of America.1956.

[11] Rose, H. E. *A Course in Number Theory*. First edition. Oxford Science Publications. 1988.

SOBRE OS AUTORES

Carlos A. Gomes possui bacharelato em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2000) emestrado em Matemática Aplicada e Estatística pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2010). É doutorado em Matemática pelo IME-USP (2017). É professor no departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e coordenador regional da OBM-Olimpíada Brasileira de Matemática. Tem experiência na área de Matemática e Probabilidade, com ênfase em Matemática, e interesse principalmente nos seguintes temas: Álgebras Lie, Módulos de peso, Módulos de Gelfand-Tsetlin, Teoria das representações, Grupos de Lie e Olimpíadas de Matemática.

Eurípedes C. da Silva possui licenciatura em Matemática pela Universidade Regional do Cariri (2010) e mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2012). É doutorado pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, IME-USP (2017). Atualmente, é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Tem interesse nas áreas de Geometria Diferencial, com ênfase em Geometria Diferencial de Folheações, Topologia Diferencial e Análise Geométrica.

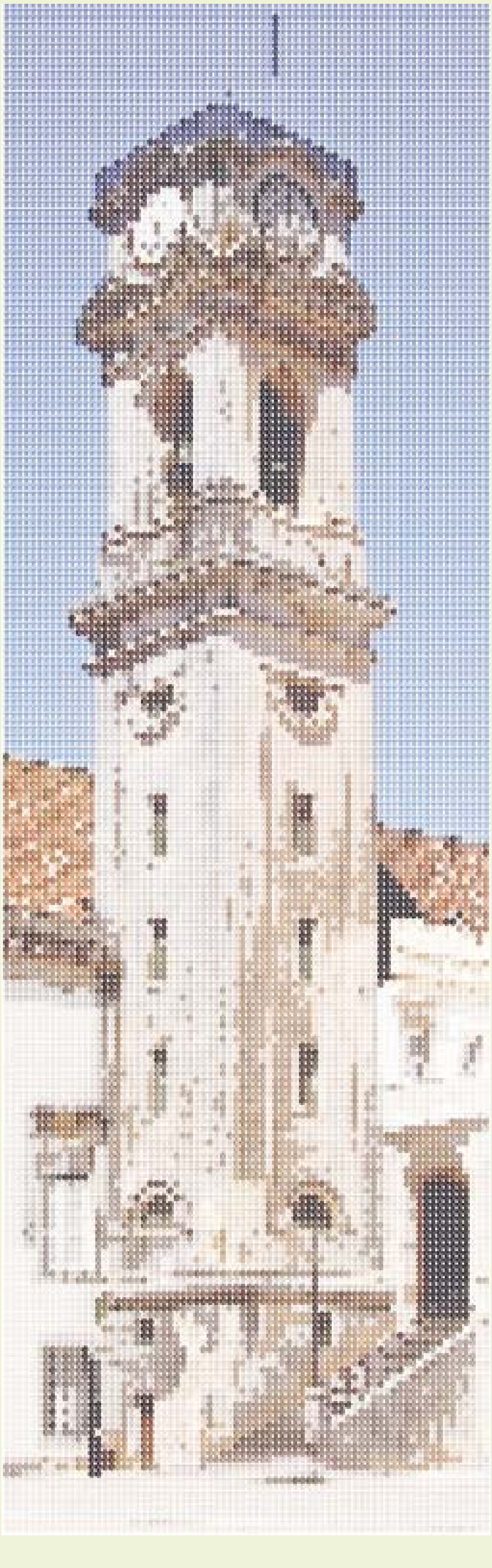


37.ª FINAL DAS **OLIMPÍADAS** EM **SETÚBAL**

De 4 a 7 de abril, o Agrupamento de Escolas Sebastião da Gama, em Setúbal, recebe a final das 37.ªs Olimpíadas Portuguesas de Matemática. As provas decorrerão durante as manhãs dos dias 5 e 6, e depois de almoço os estudantes têm agendadas diversas atividades lúdicas pelas terras de Bocage. Domingo é dia de conhecer os vencedores, 36 no total: 12 na categoria Júnior (6.º e 7.º anos), 12 na categoria A (8.º e 9.º anos) e 12 na categoria B (10.º, 11.º e 12.º anos) – que receberão as merecidas medalhas de ouro, prata e bronze. Os vencedores das categorias A e B poderão ainda vir a integrar as delegações que representarão Portugal nas competições internacionais depois de frequentarem um estágio no projeto Delfos, em Coimbra. As Olimpíadas Internacionais de Matemática terão lugar no Reino Unido, no mês de julho, e as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática decorrerão, em setembro, no México.

ICIAM 2019

De 15 a 19 de julho de 2019, Valência recebe o ICIAM 2019 – Encontro Internacional de Matemática Industrial e Aplicada. A 9.ª edição do congresso decorrerá no Campus de Blasco Ibáñez, da Universidade de Valência. Tal como nas edições anteriores, o ICIAM 2019 servirá como montra para os avanços mais recentes na matemática industrial e aplicada, demonstrando a aplicabilidade desta disciplina à ciência, à engenharia e à indústria. O congresso é uma grande oportunidade para jovens investigadores e estudantes de pós-graduação descobrirem o vasto potencial da matemática aplicada e entrarem em contacto com as mais recentes tendências. O ICIAM 2019 está a ser organizado pela SeMA (Sociedade Espanhola de Matemática Aplicada). Veja todas as informações em *https://www.iciam2019.com/*.



CHALLENGES IN **HEALTHCARE - THE ROLE OF MATHEMATICS, 7 DE JUNHO DE 2019, COIMBRA**

A PT-MATHS-IN organiza anualmente um workshop de um dia ligado a temas de grande relevância e atualidade, procurando abrir perspetivas para áreas de investigação em matemática com particular impacto social. Depois do encontro sobre Big Data em 2017 e Smart Security em 2018, o tema escolhido para este ano é a relação dos cuidados de saúde com a matemática, num evento a realizar a 7 de junho em Coimbra. Os desafios do setor da saúde abrangem muitas áreas diferentes, como medicina de precisão, bem-estar e prevenção de doenças, tratamento de dados, ou as implicações sociais e éticas dos avanços na área da saúde. As ferramentas matemáticas são muitas vezes necessárias para lidar com essas questões e são essenciais para a obtenção de soluções eficazes. Este encontro conta com um painel de reputados oradores convidados num programa que poderá ser consultado em *www.spm.pt/PT-MATHS-IN*

FALECEU O MATEMÁTICO **FERNANDO ROLDÃO DIAS AGUDO**

Faleceu, no dia 23 de fevereiro, o professor Fernando Roldão Dias Agudo, aos 93 anos de idade. O matemático era natural de Mouriscas, frequentou o Liceu de Santarém, onde completou o Curso Geral dos Liceus, em 1942, e o Curso Complementar de Ciências, em 1943, ambos com 20 valores. Ingressou então na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), onde, em 1947, obteve o grau de licenciado em Ciências Matemáticas. Ainda estudante, recebeu o Prémio Nacional Francisco Gomes Teixeira pelo trabalho "Sobre um Teorema de Kakeya", publicado em 1952 na *Gazeta de Matemática*. Em 1951, Dias Agudo licenciou-se em Engenharia pelo Instituto Superior Técnico. No mesmo ano, ingressou como professor assistente na FCUL. Em 1955, obteve o doutoramento nessa mesma faculdade. Lecionou também no Instituto Superior de Agronomia (1948 e 1949), no Instituto Superior Técnico (1959-1964), na Universidade de Lourenço Marques (1970-1972), na Universidade Nova de Lisboa (1975-1983) e na Universidade da Beira Interior (1990-1997). Foi investigador visitante na Universidade da Califórnia, em Berkeley (1957 e 1958). A sua carreira científica desenvolveu-se em diversas áreas, com especial ênfase em Análise Funcional. O matemático publicou artigos em revistas nacionais e estrangeiras, e é autor do livro *Análise Real*. Interessa-se ainda por História da Matemática, e participa no projeto de publicação das obras de Pedro Nunes. Durante a sua carreira, Dias Agudo exerceu diversos cargos administrativos de grande relevo. Foi diretor da Faculdade de Ciências de Lisboa (1973 e 1974), presidente da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (1974-1976) e presidente do Instituto Nacional de Investigação Científica (1980-1983). Eleito tesoureiro da Academia das Ciências de Lisboa em 1979, exerceu o cargo por mandatos sucessivos. Durante vários anos, representou a Academia junto da Comissão Nacional de Matemática, em ligação com a União Matemática Internacional. Fez parte do conselho executivo da Assembleia Geral da Fundação Europeia de Ciência e do Comité de Finanças da Assembleia Geral do International Council for Science (ISCU). O matemático era ainda membro da The New York Academy of Sciences, da Academia Scientiarum et Artium Europaea e sócio honorário da Sociedade Portuguesa de Matemática, entre outras sociedades científicas.

UM **DIA** COM A **MATEMÁTICA 2019**

No dia 8 de julho, decorrá o 2.º encontro "Um Dia com a Matemática", no Colégio Luís António Verney, na Universidade de Évora. Este encontro, destinado a alunos do Ensino Secundário, tem como objetivos estimular e desenvolver o interesse pela matemática, em particular pela investigação; dar a conhecer novas áreas da matemática e as suas aplicações noutras áreas do saber, bem como promover o reconhecimento da importância da matemática no nosso quotidiano. Serão abordados temas como Matemática e Testes de Gravidez, Internet e Redes de Telecomunicações, Da Geometria aos Números Imaginários, entre outros. O DIAMAT é organizado pelo Departamento de Matemática da Universidade de Évora e tem o apoio do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações e da Delegação Regional do Sul e Ilhas da Sociedade Portuguesa de Matemática. Consulte o programa em *http://www.diamat2019.uevora.pt/*.

AULA ABERTA – BOAS PRÁTICAS NA **ESCOLA** E **SALA DE AULA**

Decorreu no passado dia 16 de março, na Sala 1 da Fundação Calouste Gulbenkian, em Lisboa, uma sessão de apresentação da 3ª fase do Projeto Aula Aberta – Boas Práticas na Escola e Sala de Aula, desenvolvido pela Sociedade Portuguesa de Matemática em parceria com a Fundação Calouste Gulbenkian. Esta iniciativa, direcionada para o Ensino Secundário, visa a divulgação das melhores práticas educativas desenvolvidas pelas escolas portuguesas. Estiveram presentes no evento vários estabelecimentos de ensino, públicos e privados, que foram selecionados a partir dos recentes indicadores oficiais divulgados pela Direção-Geral de Estatísticas da Educação.

MATEMÁTICOS PORTUGUESES PELO **MUNDO**

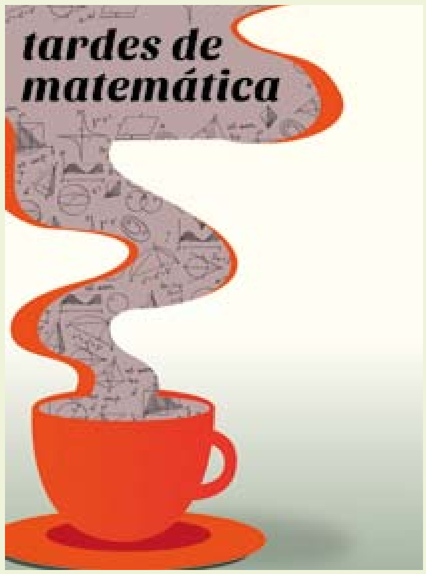
"Matemáticos Portugueses pelo Mundo" é uma série de conferências bianual que tem como intuito reunir a diáspora de matemáticos portugueses espalhados pelo mundo. O objetivo é divulgar a investigação de ponta realizada pelos mesmos, promovendo-se novas colaborações e sinergias entre a comunidade matemática de língua portuguesa. Em 2019, esta conferência terá lugar no Departamento de Matemática da Universidade do Porto, de 24 a 26 de junho. Com palestrantes com um largo espectro de experiências e em diferentes fases das suas carreiras, vindos de todos os cantos do planeta, a conferência cobrirá uma ampla variedade de temas, entre os quais se incluem: Álgebra, Análise, Sistemas Dinâmicos, Geometria, Teoria de Números e Estatística. Todos os interessados em Matemática são bem-vindos. Todas as informações estão disponíveis no site *https://cmup.fc.up.pt/matematicos/*.

2.º CAMPEONATO DE MULTIPLI LEVA VENCEDORES À DISNEY

A 2.ª Edição do campeonato vai acontecer no dia 14 de junho de 2019, em Leiria, nas instalações da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria. A competição destina-se a alunos dos 3.º, 4.º, 5.º e 6.º anos do Ensino Básico. As inscrições decorrerão de 1 a 30 de abril em *http://campeonato.multipli.pt/inscricoes/*. Cada escola apenas poderá inscrever um aluno por ano de ensino. Este ano os vencedores de cada categoria irão ganhar uma viagem até à Disneyland Paris. O Instituto Politécnico de Leiria (IPLeiria) em parceria com a Alfiii, com o apoio da Associação de Professores de Matemática (APM) e da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) promove anualmente, desde 2018, o Campeonato Nacional Multipli, cujos objetivos são potenciar o desenvolvimento do pensamento lógico e dos conhecimentos relativos à tabuada, fomentar o interesse dos alunos pela Matemática e estimular a componente lúdica ao longo do processo de ensino-aprendizagem.

"A MAGIA DO PRIMEIRO ALGARISMO" NA FNAC COLOMBO

Jorge Buescu, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e ex-presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, apresenta a última Tarde de Matemática do ciclo de Lisboa no próximo dia 6 de abril, na Fnac Colombo. Com início marcado para as 17h00, "A magia do primeiro algarismo" é o tema em debate nesta Tarde de Matemática. Será esclarecido um estranho fenómeno que levou mais de um século a esclarecer, e que é hoje um teorema no cruzamento de vários ramos da Matemática e é utilizado no combate à fraude fiscal. Venha conhecer a magia! As Tardes de Matemática foram criadas pela Sociedade Portuguesa de Matemática em 2001, para dar resposta à necessidade de divulgar esta disciplina e de mostrar como a matemática está presente em tudo. Este ano as tardes de Matemática estão a decorrer em Lisboa, Braga e Coimbra. Veja toda a programação de 2019 em *https://www.spm.pt/tardes_matematica_2019*.



Nota aos leitores

No artigo "Ainda a definição de limite no Ensino Secundário" de António Bivar (publicado na *Gazeta de Matemática* nº 186), a referência bibliográfica [11] não inclui, por lapso, todos os autores. A referência correta deveria ser a seguinte:

Silva, J.C.; Pinto, J.; Machado, V. *Manual NiuAleph* 12, vol. 3

http://niualeph.eu/download/niualeph12/manual/niualeph12_manual_vol3_v01.pdf (acedido a 27/8/2018)

Fabio Chalub
Vice-Presidente SPM
chalub@fct.unl.pt

O ANO QUE PASSOU

2018 foi um grande ano para a matemática portuguesa. Partindo das atividades da SPM ao longo deste ano, mostramos como matemática é parte de uma atividade global e nunca um ponto isolado

No dia 16 de novembro passado, Betül Tanbay, a primeira mulher a presidir a Sociedade de Matemática da Turquia, e vice-presidente da Sociedade Matemática Europeia (EMS), foi presa. A acusação era a de "tentar derrubar o Governo", devido ao seu envolvimento nos protestos que tomaram o país em 2013.

Este facto gerou um ultrage generalizado entre matemáticos de várias matizes. Uma acusação deste porte vinda de um governo que não é conhecido pelos seus pendores democráticos, muito pelo contrário, já é em si fonte de desconfiança. Vendo, além disto, o seu trabalho desenvolvido em prol da matemática, particularmente na Turquia, a credibilidade da acusação torna-se infinitesimal.

Em menos de 48 horas, todos os detidos naquele dia acabaram por ser soltos.

No entanto, não podemos deixar de tirar a lição de como nós, matemáticos, somos parte de uma sociedade muito maior. Não podemos acreditar que o nosso trabalho é "neutro" nem que a nossa luta pelo desenvolvimento da sociedade se faz sem atritos.

Desta forma, é com orgulho que faço notar que a SPM foi das primeiras sociedades a nível mundial a divulgar o ocorrido e a se juntar a uma corrente de solidariedade transnacional, que foi muito além dos cientistas. Será sempre muito difícil saber se este foi o motivo da rápida soltura. No entanto, vale a pergunta: qual seria a opção?

Mas, nem só de dissabores se faz esta coluna. O ano 2018 foi daqueles em que a visibilidade da matemática portuguesa subiu um nível com a indicação de diversos colegas para cargos de direção na EMS. O anterior presidente da SPM, Jorge Buescu, é membro da Comissão Executiva da EMS, e também termina neste ano a sua posição como membro da Comissão para a Promoção da Perceção Pública da Matemática. Nesta comissão, junta-se ainda o conhecido Rogério "Isto é Matemática" Martins. Pedro Freitas iniciou em 2018 o mandato como membro da Comissão de Ética, enquanto eu mesmo sou membro da Comissão de Matemática Aplicada. Uma delegação deste monte mostra como a Europa está a reconhecer a nossa qualidade.

Outro dos factos marcantes de 2018 foi a realização em Lisboa da Conferência de Biologia Matemática e Teórica, coorganizada pela SPM. Mais de 600 cientistas de todo mundo estiveram em Portugal para uma das mais importantes conferências da especialidade. É importante notar que a mesma nos foi atribuída no auge de uma severa crise económica. Mesmo assim, a EMS juntou-se à Sociedade Europeia para a Biologia Matemática e Teórica, tendo confiança na competência da SPM para sediar tão importante encontro. Isto jamais seria feito se não se acreditasse na capacidade de recuperação e superação da comunidade científica nacional e do próprio País. Numa escala muito menor, mas não menos importante, continuámos com a série de Encontros Ibéricos em Matemática, coorganizada pela SPM e pela sua congénere, a Real Sociedade de Matemática Espanhola, já na sua sétima edição.

Desta vez, encontrámo-nos em Évora, para debater três áreas: o *Big Data*, a Análise Harmónica, e a Biologia Matemática. Ainda tivemos o Encontro Nacional, desta feita em Bragança, mostrando não só a centralidade da investigação para a atual direção, como o desejo de a levar às diferentes regiões do País.

Como é insistentemente dito, a SPM tem várias frentes. A investigação é certamente uma delas, mas não podemos limitar-nos a esta. Afinal, como mostra a história inicial desta Carta da Direção, não vivemos numa ilha, isolada do resto. Não haverá SPM sem uma interação grande com toda a sociedade. Por isso, a importância de estarmos nos debates sobre o ensino e a educação, a realização das olimpíadas, a promoção da cultura científica, incluindo em língua nacional – uma posição onde a *Gazeta de Matemática* tem um lugar de inegável destaque.

Este esforço em prol da matemática não se faz sem apoios. O primeiro e maior de todos vem dos nossos sócios: estudantes, investigadores, professores, amigos da matemática em geral. Mas não se faz também sem suporte institucionais: empresas, fundações e, está claro, o próprio Governo.

Em 2017, a SPM preparou a sua candidatura a lei do mecenato científico, algo que permitirá a todos os nossos apoiantes descontar o valor doado nos seus impostos. O Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, cumpriu rapidamente o seu papel e reconheceu o caráter científico da nossa sociedade. Desde então, aguardamos o despacho do Ministério das Finanças. Será que alguém tem o telefone do Centeno?

Saudações a todos!

Fabio Chalub

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2019

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3º esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM ***WWW.SPM.PT***

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA