

N. 0188

# Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXX | Jul. 2019 | 4,20€

## Instrumento Matemático - O Sextante

Alzira Faria

CANTO DÉLFICO

*João Filipe Queiró*

Zeta de Dois

APANHADOS NA REDE

*José Carlos Santos*

Da Lógica à Física

NA LINHA DE FRENTE

*Fabio Chalub*

O Ano de Todas as Eleições



5-6

SEPTEMBER  
2019

INTERNATIONAL WORKSHOP ON

# DIFFERENTIAL EQUATIONS

ON THE OCCASION OF  
LUIS SANCHEZ'S 70TH BIRTHDAY

**Alberto Cabada**  
Universidade de Santiago de Compostela

**João Paulo Dias**  
Universidade de Lisboa

**Jean Mawhin**  
Université Catholique de Louvain

**Rafael Ortega**  
Universidad de Granada

**Carlos Rocha**  
Universidade de Lisboa

**Fabio Zanolin**  
Università degli Studi di Udine

PLENARY  
SPEAKERS

ORGANISING  
COMMITTEE

**Maria do Rosário Grossinho** (ISEG-ULisboa)

**Carlota Rebelo** (Ciências-ULisboa)

**José Maria Gomes** (FCT-UNL)

**Ricardo Enguiça** (ISEL-IPL)

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA  
UNIVERSIDADE DE LISBOA, PORTUGAL

<http://diffsanchez70.campus.ciencias.ulisboa.pt>

[diffsanchez70@fc.ul.pt](mailto:diffsanchez70@fc.ul.pt)

**FCT**  
Fundação  
para a Ciência  
e a Tecnologia

**C**  
Ciências  
ULisboa

**FEUC**  
LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

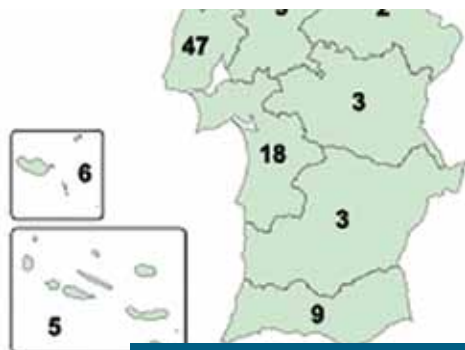
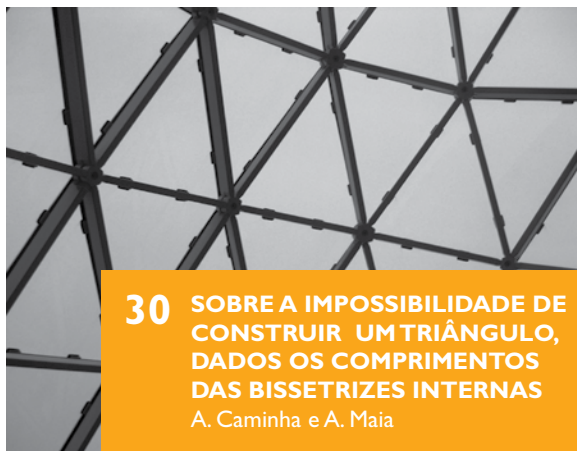
**FCT**  
FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE LISBOA



**ISEL**  
INSTITUTO POLITÉCNICO  
DE LISBOA

**CMAF.10**  
**CEMAPRE**  
Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica

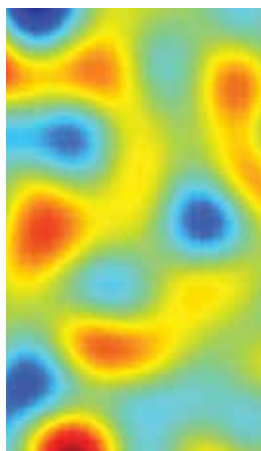
**spm**  
SOCIEDADE  
PORTUGUESA DE MATEMÁTICA



**09** NA LINHA DE FRENTE  
O Ano de Todas as Eleições



**36** CONVERSA COM...  
Hugo Messias



**21** PT-MATHS-IN  
A Matemática na Previsão da Criminalidade

- 02 EDITORIAL** | *Silvia Barbeiro*
- 03 RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*  
Os Problemas do Reino Unido
- 05 CANTO DÉLFICO** | *João Filipe Queiró*  
Zeta de Dois
- 09 NA LINHA DE FRENTE** | *Fabio Chalub*  
O Ano de Todas as Eleições  
*artigo de capa*
- 12 INSTRUMENTO MATEMÁTICO – O SEXTANTE**  
*Alzira Faria*
- 18 APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*  
Da Lógica à Física
- 21 PT-MATHS-IN** | *Adérito Araújo e Manuel Cruz*  
A Matemática na Previsão da Criminalidade
- 29 BARTOON** | *Luis Afonso*
- 30 SOBRE A IMPOSSIBILIDADE DE CONSTRUIR UM TRIÂNGULO, DADOS OS COMPRIMENTOS DAS BISSETRIZES INTERNAS**  
*A. Caminha e A. Maia*
- 35 MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*  
Definir o Tempo
- 36 CONVERSA COM...** | *Gonçalo Morais*  
Hugo Messias
- 42 NOTÍCIAS**
- 51 CARTAS DA DIREÇÃO** | *João Araújo*  
Tempos Difíceis

## HONORES MUTANT MORES

Perguntam-me com frequência se a igualdade de género é uma realidade na matemática.



SÍLVIA BARBEIRO  
Universidade  
de Coimbra  
silvia@mat.uc.pt

A primeira Medalha Fields foi entregue em 1936, mas até 2014 nenhuma mulher tinha recebido esta distinção. A iraniana Maryam Mirzakhani, que faleceu precocemente com apenas 40 anos em 2017, foi até agora a única mulher a ganhar uma Medalha Fields. Este prémio, cujo nome homenageia o matemático canadiano John Charles Fields, é considerado uma das maiores honras que um matemático pode receber. Desde 1950 é concedido a cada quatro anos e premeia dois, três ou quatro matemáticos com menos de 40 anos de idade. Dos 60 laureados até hoje, 59 são homens.

No passado dia 19 de março, a Academia Norueguesa das Ciências e das Letras anunciou ao público que o Prémio Abel, um dos mais prestigiados prémios no campo da matemática, distinguiria a cientista norte-americana Karen Keskulla Uhlenbeck. Pela primeira vez, foi galardoada uma mulher. Além do reconhecimento, o prémio tem o valor monetário de seis milhões de coroas norueguesas (cerca de 619 mil euros). O Prémio Abel, criado em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel, é concedido anualmente desde 2003 para destacar avanços importantes na matemática. Dos 20 laureados, 19 são homens.

O reconhecimento profissional e os prémios deveriam ser alheios à condição e ao género. Essa é a minha experiência pessoal. A nível profissional, não me recordo de haver sido discriminada pelo facto de ser mulher. Contudo, a disparidade dos números leva-me naturalmente a pensar que a igualdade de oportunidades ainda não é uma realidade.

Se, por um lado, relatórios recentes da OCDE destacam positivamente Portugal pela percentagem de mulheres

com formação universitária em áreas STEM (acrónimo de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática), por outro lado, revelam que as mulheres têm menos oportunidades de carreira do que os homens e com as diferenças salariais entre géneros para o mesmo tipo de trabalho a persistirem. Há ainda um caminho a percorrer para a concretização da igualdade de género.

Nos próximos dias 22 a 24 de julho vai decorrer na Caparica o primeiro congresso em Portugal da série *Women in Mathematics Meeting*. Este encontro tem o apoio da Associação *European Women in Mathematics* e da Sociedade Portuguesa de Matemática. A motivação para a realização da conferência prende-se com o facto de em Portugal, como em muitos outros países, as posições de topo nas universidades, e também os painéis de oradores convidados em conferências nacionais e internacionais, incluírem muito poucas mulheres. É necessário incentivar um maior número de alunas de matemática a prosseguirem os estudos de doutoramento e a liderarem projetos de investigação. A conferência, além de dar visibilidade ao trabalho científico de mulheres matemáticas, constitui também um fórum de discussão sobre a realidade nacional no que diz respeito às questões de igualdade de género na carreira científica.

As notícias de atribuição de prémios a mulheres que fazem descobertas excecionais parecem ser acolhidas com grande satisfação por toda a comunidade matemática. Se isto contribuir para nos tornarmos uma comunidade mais solidária e inspiradora, sei que estaremos no trilho certo. A minha convicção reporta ao título deste editorial: os êxitos mudam os costumes.



JORGE NUNO SILVA  
Universidade  
de Lisboa

[jnsilva@cal.berkeley.edu](mailto:jnsilva@cal.berkeley.edu)

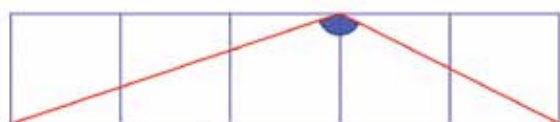
## OS PROBLEMAS DO REINO UNIDO

The UK Mathematics Trust (UKMT) publicou um curioso livro de problemas. Transparece nesta obra o facto da instituição ter a seu cargo a organização de competições matemáticas de diversos níveis, do elementar ao olímpico. É com curiosidade e prazer que percorremos estes problemas, um para cada dia do ano.

No prefácio, Marcus du Sautoy realça, como muitos outros antes dele, a importância de um bom professor no percurso escolar de cada um, que promova o gosto pela matemática. Felizmente, o seu curto texto contempla ainda uma referência, incontornável, a Martin Gardner e à tradição dos problemas e quebra-cabeças. O bom professor de Sautoy apresentou-lhe as colunas do *Scientific American* de Gardner. Sorte a sua, e sorte a nossa ao obtermos agora este livro inspirado no maior dos divulgadores que a matemática conheceu.

Do livro, *The Ultimate Mathematical Challenge* (Harper Collins 2018), retirámos algumas questões para os nossos leitores.

**QUANTO MEDE ESTE ÂNGULO?** Cinco quadrados de lado unitário formam o retângulo ilustrado. Quanto mede o ângulo assinalado?



**QUANTA GENTE?** Quando a Laura entrou num dado bar, onde estavam já algumas pessoas, a idade média subiu 4 anos. O Manuel entrou de seguida, tendo a média subido mais 3 anos.

Quantas pessoas estavam inicialmente no bar?

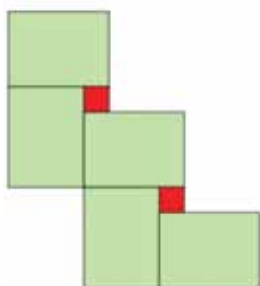


SÓ INTEIROS? Considere a sucessão numérica  $(x_n)$  definida por

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( 3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4} \right) \quad (n \geq 0).$$

Mostre que  $(x_n)$  é uma sucessão crescente de números naturais.

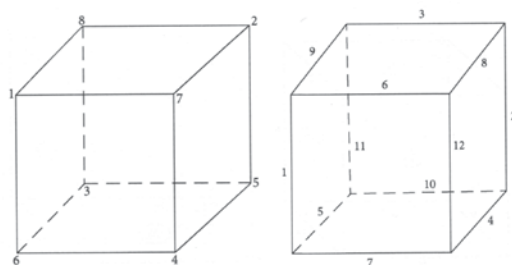
QUE PERCENTAGEM? A figura ilustra uma pavimentação do plano por retângulos verdes (cada um com lados de 8 e 6 cm) e quadrados vermelhos. Quando o plano estiver todo coberto, qual é sua percentagem que está sob os quadrados?



Sobre as questões do número anterior:

O CASINO DAS DIFERENÇAS: O cálculo do valor esperado permite-nos concluir que o jogo é justo, não beneficia a Casa nem o jogador.

ETIQUETAR UM CUBO: Eis duas soluções possíveis (há mais).



O ANIVERSÁRIO DO MANUEL: O facto de o Alex ter a certeza de que a Laura não sabe a data do aniversário permite eliminar 31 de março e 11 de julho, portanto podemos também eliminar estes meses. A réplica da Laura permite descartar o dia 27, pelo que estamos reduzidos a 30 de agosto, e 8 ou 29 de dezembro. Agora o facto de o Alex ficar a saber a data certa permite-nos concluir que o mês terá de ser agosto. Em resumo: 30 de agosto é a data de aniversário do Manuel.

SALTITONA: Seja  $a$  a probabilidade de a partícula ser absorvida em  $x = -1$  e  $b$  a de ser absorvida em  $x = 2$ . Temos  $a + b = 1$  e considerando a probabilidade de a partícula saltar para  $x = 2$ , tendo saltado antes para  $x = 1$ , concluímos que  $a = 2b$ , donde  $b = 1/3$ .

25 e 26  
outubro  
2019

# VI Feira da Matemática

Dia 25  
especial  
escolas  
10h-17h

Dia 26  
público  
geral  
11h-18h

entrada livre  
e participação gratuita  
em todas as atividades

## Marque na sua agenda!

Museu Nacional  
de História Natural  
e da Ciência

Informações e marcações  
geral@museus.ulisboa.pt  
213 921 808

**U LISBOA**

UNIVERSIDADE  
DE LISBOA

MUSEU NACIONAL DE HISTÓRIA  
NATURAL E DA CIÊNCIA

**APM**  
Associação  
de Matemática

**Ludus**  
Gathering & Gaming

**spm**  
Sociedade Portuguesa  
de Matemática

**FEUC**  
Faculdade de Ciências  
da Universidade de Coimbra

**APDIO**  
Associação Portuguesa  
de Didáctica da Matemática

**MPT**  
Matemática  
Portuguesa

## ZETA DE DOIS

Qual é a soma dos inversos dos quadrados perfeitos?

JOÃO FILIPE  
QUEIRO  
Universidade  
de Coimbra  
jfqueiro@mat.uc.pt

### I. INTRODUÇÃO

Um dos assuntos mais interessantes que são estudados no 1.º ano do Ensino Superior são as séries. A descoberta das somas com um número infinito de parcelas é sempre um momento de fascínio. Umhas somas dão um resultado – são as séries *convergentes* –, outras não – são as séries *divergentes*.

A definição de série convergente é muito natural: se queremos que a soma

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

tenha um resultado, o mais óbvio é exigir que a sucessão das *somas parciais*

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

tenha limite, que será por definição a *soma* da série dada.

O estudo dos limites de sucessões surge portanto como um pré-requisito para o estudo da convergência de séries. Historicamente não foi assim. As séries são um objecto matemático que surgiu antes das sucessões, pela sua aparição natural em questões de Análise, e esta precedência atravessou todo o século XVIII.

A distinção entre séries convergentes e séries divergentes leva a um estudo pormenorizado de *critérios* de convergência, com aplicação a variados tipos de séries. Há

muitos critérios, alguns com enunciados subtis. Durante o seu estudo, apercebemo-nos de que investigar se uma série é ou não convergente é uma questão distinta da de calcular a sua soma. Na verdade, há numerosos exemplos de séries que conseguimos provar que são convergentes sem que saibamos achar a sua soma.

Dir-se-á que este é um falso problema: se a série  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  for convergente, o cálculo de alguns termos da sucessão  $S_n$  das somas parciais dará uma ideia do valor da soma, ainda que esse valor seja aproximado. Isto é verdade, ainda que se ponha o problema da *velocidade da convergência*: dadas duas séries convergentes, pode ser enorme a diferença entre o número de termos de  $S_n$  que temos de considerar nas duas para obter, digamos, três casas decimais estáveis.

Por exemplo, no caso da série

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

basta somar sete parcelas para obter

$$2,71805\dots$$

e as primeiras três casas decimais já estabilizaram. A soma da série é

$$2,7182818284\dots$$

um número a que se costuma chamar  $e$ .

Compare-se esta situação com a da série

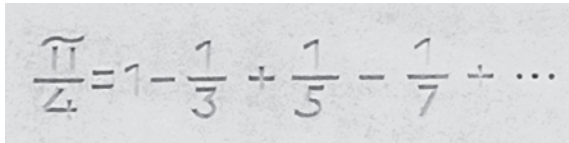
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

a chamada *série harmónica alternada*. É simples mostrar que é convergente. Mas, ao somar 1000 parcelas, só se consegue estabilizar as casas decimais 0,69. A soma da série é

$$0,6931471806\dots$$

São muito interessantes os casos em que, para uma série dada que se sabe que é convergente, se consegue achar um valor exacto para a sua soma, relacionando-a com alguma função ou alguma constante conhecida. Por exemplo, a soma da série harmónica alternada é  $\log(2)$ .

Outro exemplo curioso em que a convergência é muito lenta surge nos baixos-relevos da entrada do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra:



## 2. AS SÉRIES DE DIRICHLET

Neste artigo vamos olhar para as séries da forma

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots,$$

às vezes chamadas *séries de Dirichlet*. Aqui  $\alpha$  designa um número real. Se  $\alpha = 1$  obtemos a *série harmónica*, que facilmente se vê que é divergente. O mesmo acontece se  $\alpha < 1$ . Mas para  $\alpha > 1$  pode ver-se de várias maneiras que a série converge. Qual será a sua soma?

O interesse despertado por este tipo de séries levou Riemann, no século XIX, a definir uma função, denotada por  $\zeta$ , precisamente por essa soma:

$$\zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots$$

(Esta função define-se mesmo para valores complexos de  $\alpha$ , o que conduz a questões muito interessantes, mas não vamos entrar nisso aqui.)

Nas décadas de 30 e 40 do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) dedicou vários trabalhos ao cálculo de  $\zeta(\alpha)$  para valores inteiros pares de  $\alpha$ . No caso de  $\alpha = 2$  o interesse pelo assunto era grande e já vinha do século anterior. A série dos inversos dos quadrados

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

é um objecto natural de estudo. A sua convergência é lenta. Antes de Euler, Daniel Bernoulli deu  $8/5$  como valor aproximado para a soma e Goldbach afirmou que a soma está entre 1,64 e 1,66.

Euler começou por calcular valores aproximados para a soma, usando um método engenhoso em 1731 para chegar à aproximação 1,644934. Em 1732, com um novo método (a hoje chamada *fórmula de Euler-Maclaurin*), chegou a 1,64493406684822643647.

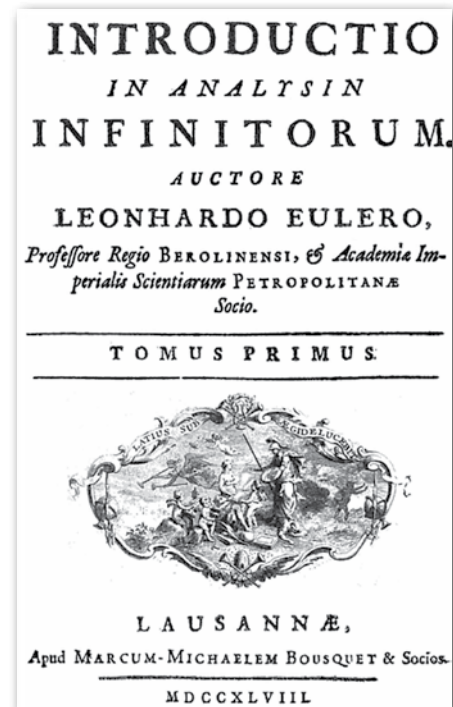
## 3. A SOMA EXACTA DA SÉRIE

Em 1734, Euler escreveu a Daniel Bernoulli comunicando-lhe que tinha descoberto o valor exacto da soma da série:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Após ter apresentado o resultado numa comunicação, veio a publicá-lo em 1740 [5] e voltou ao assunto por várias vezes mais tarde (ver, por exemplo, [2]). Esta foi a primeira descoberta de Euler que lhe trouxe reputação internacional.

O que vamos fazer é expor o argumento de Euler tal como aparece no livro *Introductio in analysin infinitorum* [6], de 1748, do qual se pode dizer que marca o início da análise matemática como estudo de funções, em vez de curvas.





No Capítulo 9, Euler começa por tratar a questão da factorização de polinómios, relacionando-a de forma óbvia com as raízes desses polinómios: um número  $p/q$  é raiz de um polinómio  $f(z)$  se e só se  $p - qz$  for factor de  $f(z)$ . Depois de algumas considerações gerais, que incluem o caso de raízes imaginárias, Euler exhibe factorizações explícitas de alguns polinómios especiais.

Depois, sem qualquer transição, afirma: "Esta resolução em factores pode também aplicar-se às séries infinitas." Começa pela série da exponencial e faz vários cálculos em que figura "um número infinito  $i$ ". Exemplo de uma das suas fórmulas:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i.$$

Factoriza a função  $e^z - 1$  e a seguir faz o mesmo para as funções seno e co-seno e seno e co-seno hiperbólicos, usando a sua relação com a função exponencial. Por exemplo, como os zeros da função seno são  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ , tomando  $p = 1$  e  $q = \pm 1/(k\pi)$  para os sucessivos valores naturais de  $k$ , deverá ter-se

$$\begin{aligned} \text{sen } z &= z \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \dots \end{aligned}$$

onde no segundo membro temos um produto infinito. Daqui tira-se

$$\text{sen } z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \dots$$

No capítulo 10, Euler aplica as factorizações encontradas ao cálculo das somas de algumas séries. Começa por observar que se se tiver uma igualdade do tipo

$$\begin{aligned} 1 + A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + D\xi^4 + \dots &= \\ = (1 + \alpha\xi)(1 + \beta\xi)(1 + \gamma\xi)(1 + \delta\xi) \dots \end{aligned}$$

deverá ter-se

$$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots$$

Isto é óbvio no caso de somas e produtos finitos, mas Euler afirma que se mantém verdadeiro no caso de somas e produtos infinitos.

Igualando agora a série do seno

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

ao produto infinito visto, chegamos a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots &= \\ = \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

ou, pondo  $z^2 = \xi$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\xi}{3!} + \frac{\xi^2}{5!} - \frac{\xi^3}{7!} + \dots &= \\ = \left(1 - \frac{\xi}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\xi}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\xi}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\xi}{16\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

Usando a observação acima sobre coeficientes de séries chegamos imediatamente a

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

#### 4. OBSERVAÇÕES ADICIONAIS

O problema com a engenhosa demonstração de Euler é que os processos infinitários em meados do século XVIII não estavam ainda bem definidos e fundamentados. Euler usa manipulações formais – e mesmo números infinitos e infinitamente pequenos – como se estivesse a trabalhar com somas, produtos e números finitos. Como em geral acontece com matemáticos do mais alto nível, vale a pena estudar os raciocínios de Euler, mesmo que não resistam à exigência dos dias de hoje, porque em geral podem ser transformados em demonstrações completamente rigorosas. O leitor interessado nas obras de Euler tem à sua disposição o excelente arquivo [7].

A fundamentação dos processos infinitários só veio mais tarde. A este propósito, é interessante recordar que a primeira definição rigorosa de convergência de uma série foi apresentada por um português, José Anastácio da Cunha, em [3]. Isto foi observado pela primeira vez em 1940 por Vicente Gonçalves [8]. Duas referências mais recentes são [10] e [11].

Com o mesmo tipo de técnica Euler obtém as somas das séries dos inversos das potências de expoente par, escrevendo explicitamente as primeiras:

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945}.$$

$$\zeta(8) = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450}.$$

$$\zeta(10) = 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \dots = \frac{\pi^{10}}{93555} \cdot$$

E a seguir reescreve os coeficientes das potências de  $\pi$  de uma forma que, em notação moderna, permite escrever as somas assim:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

onde os  $B_{2k}$  são os números de Bernoulli:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \dots$$

Hoje são conhecidas outras demonstrações desta igualdade. Uma muito recente, redigida por um estudante português, pode ser vista em [12]. É totalmente elementar e próxima do estilo matemático de Euler.

O passo decisivo no raciocínio de Euler é a expressão do seno como um produto infinito. Só no século XIX foi integralmente justificada. Uma prova elementar pode ser vista em [4].

E quanto aos expoentes ímpares? Embora Euler tenha feito algumas observações sobre o caso, nunca conseguiu obter uma expressão para a soma dessas séries. Nem ele nem ninguém. De facto, extraordinariamente, só há cerca de 40 anos se conseguiu provar que  $\zeta(3)$ , com valor aproximado 1,202056903..., é um número irracional (ver [1], [9]).

## REFERÊNCIAS

- [1] Roger Apéry, *Irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$* , Astérisque 61 (1979), 11-13.
- [2] Raymond Ayoub, "Euler and the zeta function", *The American Mathematical Monthly* 81 (1974), 1067-1086.

[3] José Anastácio da Cunha, *Principios Mathematicos*, Lisboa (1790). Reprodução facsimilada, Univ. Coimbra (1987).

[4] W. F. Eberlein, "On Euler's infinite product for the sine", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 58 (1977), 147-151.

[5] Leonhard Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1740), 123-134.

[6] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748.

[7] The Euler Archive, <http://eulerarchive.maa.org/>

[8] J. Vicente Gonçalves, *Análise do Livro VIII dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha*, Actas do Congresso do Mundo Português XII (1940), 123-140.

[9] Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of  $\zeta(3)$ . An informal report", *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979), 195-203.

[10] J. F. Queiró, "José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner", *The Mathematical Intelligencer* 10 (1988), 38-43.

[11] J. F. Queiró, "José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois", *Matemática Universitária* (Soc. Brasileira de Matemática), 14 (1992), 5-27. Reproduzido em Boletim da SPM n.º 29 (1994), 1-18.

[12] Pedro Ribeiro, "Another proof of the famous formula for the zeta function at positive even integers", *Amer. Math. Monthly* 125 (2018), 839-841.



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Visite-nos em <https://clube.spm.pt>





FABIO CHALUB  
Universidade  
Nova de Lisboa  
chalub@fct.unl.pt

## O ANO DE TODAS AS ELEIÇÕES

Em 2019, muitas eleições serão realizadas: europeias, legislativas, regionais... De todos os assuntos em que a matemática tem um papel fundamental, poucos são tão relevantes como o estudo das eleições: desde como desenhar o mapa do país, escolher os representantes e modelar o funcionamento do legislativo. Veremos aqui uma pequena amostra destes estudos.

Há tantos modelos eleitorais quanto países. Mesmo entre os países consensualmente considerados democráticos, os modelos são muito distintos. A razão é simples: não há nenhuma forma de eleger um governo que tenha todas as características desejáveis. A situação é a de um cobertor curto: quando se cobre a cabeça, os pés ficam de fora.

Vamos então construir uma democracia representativa a partir do nada, e apresentar a ementa de opções. Em cada passo, como veremos, a matemática terá um papel fundamental: não para dizer o que deve ser feito, mas quais as consequências expectáveis de cada opção. A decisão final – ou seja, a escolha do modelo exato – será eminentemente política.

Começamos por dividir o país em círculos eleitorais. Pode até mesmo ser apenas um, como é feito na eleição para Presidente ou nas eleições para o Parlamento Europeu. No entanto, o mais comum é o país ser dividido em diversos círculos, ver figura 1. A primeira pergunta que devemos fazer é: devem os círculos ser construídos de forma mais ou menos arbitrária, de modo a terem todos aproximadamente o mesmo tamanho, ou devem corresponder a divisões já existentes, baseadas na História das populações envolvidas ou na geografia da região?

No primeiro caso, que ocorre nas eleições parlamentares norte-americanas, inglesas e francesas, são desenhados círculos que elegem apenas um representante. Desta forma, é necessário que estes sejam equilibrados em relação

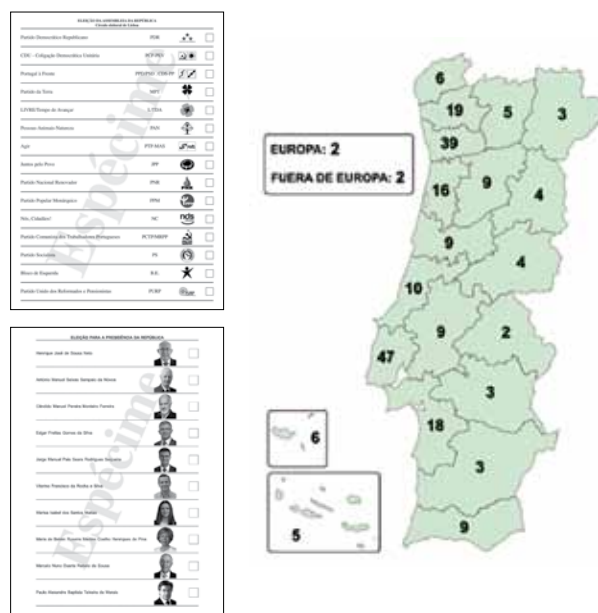


Figura 1. À esquerda, em cima: O boletim de voto para Presidente da República: há apenas um círculo (o país), elege-se apenas o vencedor, definido em sistema de duas voltas, com maioria simples na segunda volta. À esquerda, em baixo: boletim para a Assembleia da República. **Fonte:** Comissão Nacional de Eleições. À direita, divide-se o país em vários círculos eleitorais, cada um elege um certo número de representantes. **Fonte:** Wikimedia Commons. O voto é numa lista ordenada de nomes, referida pelo nome de um partido político, ou um nome inventado com este propósito específico. Elegem-se os primeiros e cada lista, de acordo com o número de assentos atribuídos ao distrito e utilizando o método de d'Hondt.

ao número de eleitores registados ou mesmo em relação à população. Como estes mudam periodicamente, é necessário, de tempo em tempos, proceder à reorganização dos distritos. Nos EUA, onde isto é feito por políticos, as comissões partidárias que propõem os novos mapas incluem um grande número de matemáticos, que tentam maximizar a probabilidade de um certo partido ter maioria absoluta (e não necessariamente maximizar o número de eleitos). Este processo, conhecido como *Gerrymandering*, é um grave problema da democracia representativa norte-americana. Já discutimos esta questão na Gazeta 160. No Reino Unido e em França, isto é feito por órgãos técnicos independentes, que, por mais falhas que tenham, são bem considerados nos seus países.

Uma outra pergunta que tem de ser respondida é: como desenhar o processo eleitoral de forma a termos um eleito que melhor represente a vontade da população? É claro que, desta forma, a pergunta não é clara, mas mesmo assim tem que ser respondida. A opção mais utilizada é eleger quem tiver mais votos numa ronda em que todos se apresentam a votos ("maioria simples"). Caso ninguém chegue a um certo valor de corte (frequentemente 50% dos votos válidos, mas com algumas subtilidades), realiza-se uma segunda volta apenas com os mais votados. Nesta, aplica-se o conceito de maioria simples.

Vejamos de forma simples como este método pode dar resultados indesejáveis (o exemplo, assim como praticamente toda a discussão deste artigo, é adaptado de [1]). Considere um procedimento eleitoral simples, com 25 eleitores e 4 candidatos: A, B, C e D. Para cada grupo de eleitores, colocamos as suas preferências em ordem decrescente, de cima para baixo:

Tabela 1

Número de eleitores	5	7	4	3	3	3
Preferências	A	B	A	C	D	D
	C	D	D	D	C	C
	D	A	C	B	A	B
	B	C	B	A	B	A

Note que, numa eleição por maioria simples, A é eleito com 9 votos, contra 7 de B, 6 de D e 3 de C. Numa possível segunda volta, A perderia para B por 12 a 13. O mais interessante, no entanto é outro fenómeno. Veja que se D enfrentasse isoladamente qualquer outro candidato, então seria este o preferido: 16 a 9 contra A, 18 a 7 ao enfrentar B e, finalmente 17 a 8 no combate direto com C. D é conhecido como *vencedor de Condorcet*, em homenagem ao

matemático que primeiro percebeu esta situação, ao estudar os sistemas eleitorais vindos da Revolução Francesa, o início de uma ideia simples: um homem, um voto. Esta situação, que parece exótica, ocorreu em 2012 na pátria de Condorcet, onde François Bayrou ficou em quinto lugar na primeira volta, mas as sondagens indicavam que ganharia todos os possíveis segundos turnos [2]. Ver figura 2.

Um mecanismo utilizado, por exemplo, para escolher a sede olímpica ou em alguns concursos académicos, é de fazer várias iterações, onde, em cada uma, se elimina o que tiver menos votos. Neste exemplo, começa-se por eliminar C, a seguir os seus votos são transferidos integralmente para D. Elimina-se B e finalmente D é declarado o vencedor.

Em Espanha e no Brasil, os círculos eleitorais para o parlamento nacional são dados pelas unidades administrativas, inferiores ao Estado nacional, superiores aos municípios. Grosso modo, no primeiro caso, são as *províncias*, no segundo, os *estados*. Para as eleições da Assembleia da República, os círculos são os distritos (mais regiões autónomas e exterior), que não têm a autonomia dos exemplos anteriores mas existem de forma independente do processo eleitoral. Nas eleições presidenciais norte-americanas, são os estados mais o distrito de Colúmbia, caso já tratado na Gazeta 181, e não mais falaremos aqui. O ponto importante é que estes círculos têm características muito distintas, e portanto o número de eleitos por cada um deve ser diferente. A questão que se põe é: como atribuir assentos parlamentares de forma proporcional?

Esta atribuição pode ser baseada na população, nos eleitores, ou mesmo nos votantes (uma maior abstenção pode resultar num menor número de eleitos, como na Alemanha).



Figura 2. Marquês de Condorcet (1743-1794), Jean Charles Borda (1733-1799) e Victor d'Hondt (1841-1901). Três matemáticos que se dedicaram à compreensão dos problemas advindos dos processos eleitorais. Nenhuma solução é perfeitamente satisfatória. O *método de Borda*, utilizado em processos com poucos votantes, não foi explicado neste texto. Fonte: Wikimedia Commons.

Tabela 2

Número de assentos	1	2	3	4	5	6	7	8
Lista A	100.000	50.000	33.333	25.000	20.000	16.666	14.286	12.500
Lista B	80.000	40.000	26.666	20.000	16.000	13.333	11.428	10.000
Lista C	30.000	15.000	10.000	7.500	6.000	5.000	4.286	3.750
Lista D	20.000	10.000	6.666	5.000	4.000	3.333	2.857	2.500

Em Portugal, assim como em muitos países europeus, usa-se o *método de d'Hondt*, batizado em homenagem ao matemático e jurista belga Victor D'Hondt.

A ideia é apresentarem-se a votos listas ordenadas de candidatos; cada eleitor escolhe uma lista. O número de votos será convertido em assentos no Parlamento. Suponha, apenas para facilitar a descrição, que uma dada lista quer comprar  $n$  assentos utilizando como moedas os  $V$  votos recebidos. Assim, esta lista poderá pagar  $V/n$  por cada assento. A ideia é que o preço de cada lugar no Parlamento será definido de forma a que todos os assentos sejam vendidos pelo maior preço possível. O preço tem de ser o mesmo para todas as listas.

O exemplo abaixo foi retirado da Wikipedia [3]. Neste, quatro listas foram a votos, A, B, C e D, obtendo 100 000, 80 000, 30 000 e 20 000 votos, respetivamente, na disputa de 8 lugares. Na tabela 2, indicamos quanto estariam dispostas a pagar por  $n$  assentos.

Se cada lugar custasse 50 mil votos, então apenas 3 seriam vendidos: 2 para a lista A, um para a B. Para vender 8 lugares, é preciso descer o preço até 25 mil votos. O resultado será a atribuição de 4 lugares à lista A, enquanto as outras terão 3, 1 e 0 assentos parlamentares, respetivamente.

Variantes destes métodos, por vezes chamadas método de Sainte-Laguë, são utilizadas pela Alemanha (que atribui parte às eleições em lista e parte em círculos uninominais) e pela Suécia (que divide por fatores não inteiros de assentos para dificultar a entrada de partidos com poucos votos).

No Brasil, usa-se o *método dos restos*, criado pelo político norte-americano Alexander Hamilton. Este foi apenas brevemente utilizado nos EUA, por uma característica matemática que não foi notada inicialmente: um maior Parlamento (ou seja, mais cadeiras em disputa), mesmo mantido o resultado eleitoral, pode resultar num pior resultado para algumas listas. Isto ficou conhecido como *paradoxo do Alabama*, em que este estado teria uma diminuição da representação após um aumento do tamanho da *House of Representatives* [4].

Outros métodos também são utilizados, cada um com as suas vantagens e desvantagens. Nenhum é perfeito – e isto é o teorema de Balinski-Young, que fica para outro artigo.

## REFERÊNCIAS

- [1] Antonio Morena Verdejo, Adela M<sup>a</sup> Villegas Escobar. *Matemáticas Electorales*. Colección Miradas Matemáticas. Los Libros de la Catarata, 2017.
- [2] Rémi Peyre. "Et le vainqueur du second tour est ... Le critère de Condorcet". <https://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html?lang=fr>
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Hondt\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Hondt_method)
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Appportionment\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Appportionment_paradox)

## ERRATA:

O artigo "À tous les temps, À tous les peuples" publicado na *Gazeta* n.º 187 continha alguns erros e algumas imprecisões. Para minha sorte, e também evidentemente de quantos leitores por cá houver, a *Gazeta* tem um público informado e atento: o Olivier Pellegrino, do Instituto Português da Qualidade, e a sua colega Sílvia Gentil mandaram-me um e-mail com um longo rol de pontos que merecem reparo. O mais importante de todos – e eu deveria chumbar por isto – é uma insistente confusão no texto entre peso e massa. Apesar da linguagem mais relaxada da divulgação científica, este é um erro imperdoável. O quilograma é uma medida de massa, ponto final.

Num outro momento infeliz, o artigo refere que "Em 1960, a definição de metro foi alterada para a distância entre duas riscas em uma certa barra metálica." De facto, esta definição foi introduzida em finais do séc. XIX; em 1960 ela foi substituída por um múltiplo bem definido do comprimento de onda de uma radiação específica, abandonando a definição via objeto físico.

Há mais algumas notas, como corrigir "mol" para "mole", "luminosidade" para "intensidade luminosa", acrescentar o "n" final de Boltzmann e alguns outros de cariz mais específico.

Que sorte para todos nós termos leitores como o Oliver, a quem deixo meus sinceros agradecimentos.



## INSTRUMENTO MATEMÁTICO – O SEXTANTE

ALZIRA FARIA

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

[aff@isep.ipp.pt](mailto:aff@isep.ipp.pt)

## 1. INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento tecnológico a navegação, pela sua facilidade e pela sua fiabilidade, quase nos fez esquecer o difícil percurso de descoberta e aperfeiçoamento dos instrumentos usados pelos pioneiros da arte de navegar.

Navegar, no ar ou no mar, é um desafio a cada momento e requer que o navegador obtenha uma resposta rápida e precisa para encontrar a sua posição sobre a superfície da Terra.

Os instrumentos náuticos, como o astrolábio, o quadrante e o sextante, são uma peça fundamental para a navegação e, ao longo dos tempos, foram sendo cada vez mais aperfeiçoados, permitindo uma navegação mais longa e segura.

Inicialmente, a navegação era feita por estimativa do navegador e, antes de os instrumentos científicos serem usados para medir altitudes, a altura da Estrela Polar acima do horizonte era estimada através do uso de mão e dedos. Esta técnica foi usada pelos árabes e seguida, no início do século XV, pelos pilotos chineses [4].

Ao longo dos tempos foram surgindo vários instrumentos, facilmente transportáveis e elaborados de diferentes formas, mas cujo objetivo comum é medir ângulos entre astros ou entre astros e o horizonte. O astrolábio foi um dos primeiros instrumentos usados pelos marinheiros. No entanto, com a pretensão de fazer uma navegação puramente astronómica, houve a necessidade de inventar os instrumentos de reflexão, como é exemplo o sextante.

A descoberta deste simples e importante instrumento deve-se a Isaac Newton que, em 1700, enviou a Edmund Halley, primeiro astrónomo do Observatório Real de

Os instrumentos náuticos são uma peça fundamental para permitir uma navegação segura. Com o objetivo de fazer uma navegação puramente astronómica surge, em 1700, a invenção do sextante por Isaac Newton. O funcionamento do sextante é baseado num princípio de Ótica Geométrica elementar e pretendem-se apresentar os princípios do instrumento fazendo uso da Geometria.

Greenwich, uma carta com a descrição de um instrumento que media alturas, munido de espelhos. O instrumento apresentava o princípio ótico dos modernos sextantes náuticos. A carta foi encontrada no diário de Edmund Halley mas só foi publicada em 1742 [4, 34], já após a morte de Newton e Halley, na revista *Philosophical Transactions* na biblioteca de Oxford, a Bodleian.

Durante 42 anos, outros instrumentos foram construídos e logo deram importantes aplicações práticas. O inglês John Hadley, a 13 de maio de 1731 [4], apresentou um instrumento, numa reunião da Royal Society, em tudo semelhante ao sextante de Newton mas que na verdade era um octante que, devido à dupla reflexão, media ângulos até  $90^0$ . Outros nomes ligados ao instrumento foram Thomas Godfray, de Filadélfia, e John Bradley, em Londres. Os dois inventores, em 1744, receberam um prémio da Royal Society, no valor de 200 libras. Os seus trabalhos foram considerados um caso de invenções independentes e simultâneas, embora provavelmente tenha havido uma diferença de alguns meses [1].

O instrumento foi testado com sucesso no mar, mas só muito mais tarde os navegadores substituíram instrumentos como o astrolábio ou a balestilha pelo sextante.

## 2. O SEXTANTE

O sextante é um instrumento que se utiliza para medir o ângulo entre as direções segundo as quais se veem dois objetos afastados (dois astros, um astro e o horizonte, etc.) [1]. Baseia-se no princípio de Ótica Geométrica elementar de que, se um raio de luz é refletido de dois espelhos sucessivamente, fazendo entre si um ângulo  $\alpha$  e sendo o plano de incidência perpendicular à linha de interseção dos espelhos, o ângulo do raio incidente e do segundo raio refletido é igual ao dobro do ângulo dos espelhos,  $2\alpha$ .

No esquema da figura 1, podemos observar a composição de um sextante. Vemos um setor circular (madeira ou metal), com uma estrutura variável com o modelo, que tem por objetivo manter a rigidez do setor e a planificação de uma das faces. Designamos este setor por limbo,  $C$ . O setor circular  $C$  está graduado e é unido por duas hastes radiais  $A$  e  $B$  e por uma plataforma que contém o centro do setor. Podemos ainda ver uma régua móvel (madeira ou metal)  $I$ , que se move sobre o setor circular, munida de uma extremidade recortada e com uma graduação em correspondência com a graduação do setor circular.

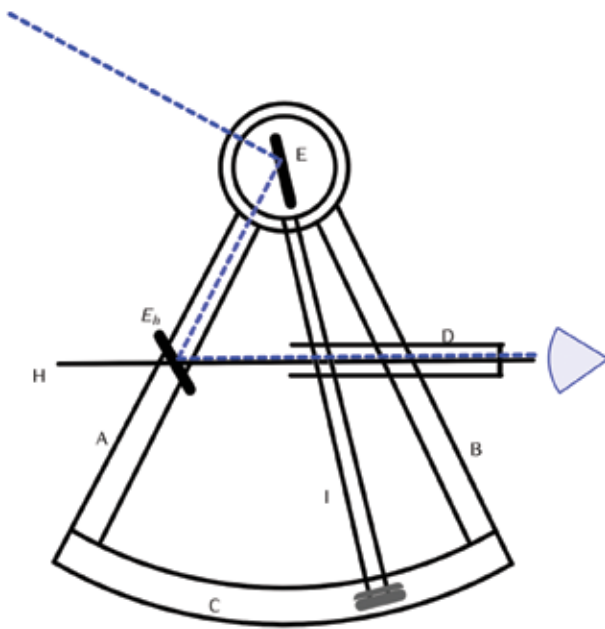


Figura 1. Sextante – esquema.

Na plataforma está um espelho,  $E$ , que por meio de parafusos apropriados, permite colocar a face espelhada perpendicular ao plano do setor circular. Um segundo espelho,  $E_h$ , está numa das hastes radiais que também é ajustável de forma a que a face espelhada esteja perpendicular ao plano do setor circular e paralela à face do espelho  $E$ , quando a régua está alinhada com o zero no setor circular  $C$ . Na outra haste radial encontra-se um tubo (telescópio),  $D$ , que permite a observação do objeto terrestre (horizonte,  $H$ ). Junto aos espelhos existem filtros que podem, ou não, ser necessários para interpor os raios solares. O jogo de espelhos, o movimento da régua sobre o setor circular aliado aos ajustes necessários, facilita-nos a leitura do ângulo entre o astro e o horizonte.

Como já foi referido, Newton apresenta o funcionamento do sextante usando uma abordagem ótica. No esquema da figura 2 vamos explicar os princípios do instrumento fazendo uso da Geometria. Estamos a supor que o sextante está alinhado de forma a que o raio de luz que sai do horizonte atravessa o espelho de horizonte em direção ao observador, e o raio de luz que sai do corpo celeste, objeto de medição, seja refletido pelo espelho  $E$ . Podemos observar que o raio de luz que sai do corpo celeste segue o trajeto representado a vermelho, sendo refletido nos espelhos situados em  $E$  e  $E_h$ , até que chega ao observador  $D$ . O raio de luz que sai do horizonte vai direto ao observador,

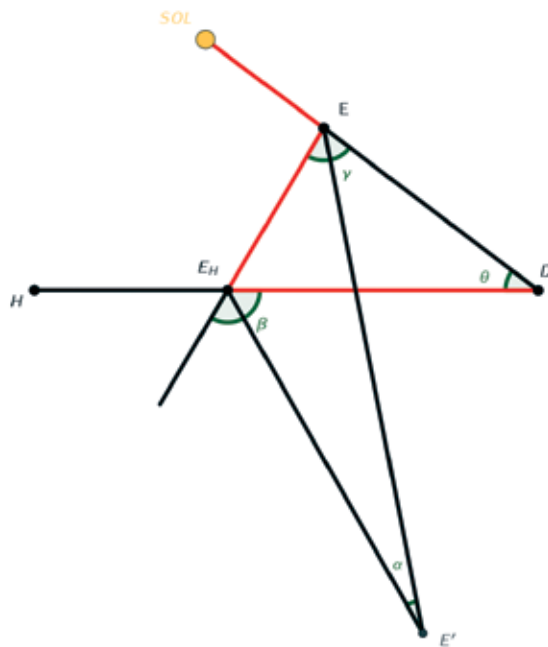


Figura 2. Esquema.

uma vez que atravessa diretamente o espelho de horizonte (que é translúcido). Definimos a altura do corpo celeste sobre o horizonte como o ângulo de elevação  $\theta$ .

Considerando o triângulo  $EE_hD$ , vemos que

$$180^\circ = \theta + \gamma + (180^\circ - \beta) \Leftrightarrow \theta = \beta - \gamma.$$

Recordemos que o ângulo de incidência num espelho é igual ao ângulo de reflexão. Resulta daqui que as retas que contêm os espelhos  $E$  e  $E_h$  são, respetivamente, as bissetrizes dos ângulos  $\gamma$  e  $\beta$ . Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelos espelhos. Do triângulo  $EE_hE'$ , temos que

$$180^\circ = \alpha + \frac{\gamma}{2} + \left( (180^\circ - \beta) + \frac{\beta}{2} \right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Resulta que o ângulo de elevação é o dobro do ângulo formado pelos dois espelhos,  $\theta = 2\alpha$ .

Determinado o ângulo de elevação  $\theta$ , é possível determinar a latitude e a longitude do local onde foi feita a leitura.

Considerando que o astro em questão é o Sol, reconhecemos que ele se encontra no zénite (instante em que se encontra sobre a nossa cabeça) quando a sua altura (ângulo  $\theta$ , entre o horizonte e a direção do Sol) for igual a  $90^\circ$ . Nesse caso, a latitude do local é igual à declinação do Sol (ângulo entre a linha que liga o centro do Sol ao centro da Terra e o plano do equador). No entanto, nem sempre isso é possível, uma vez que o Sol não pode ser observado no



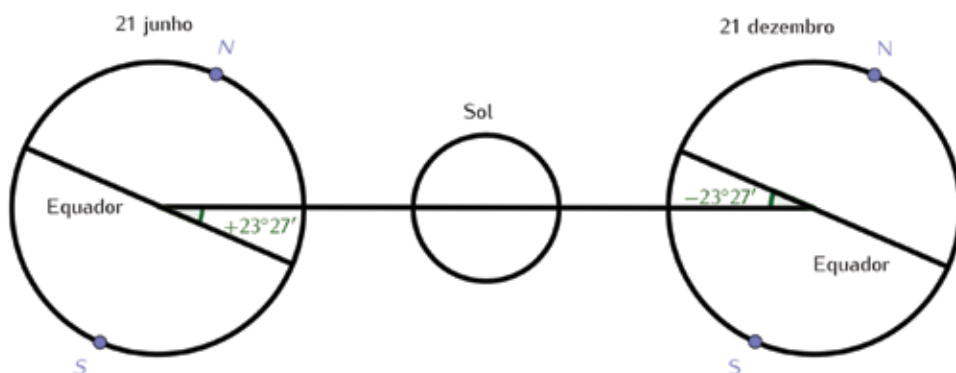


Figura 3. Declinação solar.

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1	-23,06	-17,34	-7,88	4,24	14,83	21,95	23,18	18,22	8,57	-2,87	-14,19	-21,69
2	-22,98	-17,05	-7,50	4,63	15,13	22,09	23,11	17,97	8,21	-3,25	-14,51	-21,85
3	-22,89	-16,76	-7,12	5,01	15,43	22,22	23,04	17,72	7,85	-3,64	-14,83	-22,00
4	-22,80	-16,47	-6,73	5,40	15,73	22,34	22,96	17,46	7,48	-4,03	-15,14	-22,14
5	-22,70	-16,17	-6,35	5,78	16,02	22,46	22,88	17,19	7,11	-4,42	-15,46	-22,27

(...)

Figura 4. Tabela de declinação

zênite em todos os locais, sendo então necessário consultar tabelas que nos dão a sua declinação em função do tempo.

Como referido, há locais para os quais o Sol nunca está no zênite, que são todos os que se encontram a latitudes inferiores a  $-23^{\circ}27'$  ou superiores a  $+23^{\circ}27'$ . O mesmo é dizer que o Sol só poderá estar no zênite para locais entre aquelas duas latitudes. A razão para isso deve-se à inclinação do eixo de rotação da Terra relativamente ao plano da sua órbita em torno do Sol, que é de  $23^{\circ}27'$ , e por isso, durante o ano, a declinação solar oscila de  $+23^{\circ}27'$ , em junho, até  $-23^{\circ}27'$ , em dezembro (figura 3).

Uma vez que a posição do Sol num mesmo horário muda gradualmente a cada dia do ano, fizeram-se as tabelas de declinação solar (figura 4) que nos auxiliam no cálculo correto da latitude.

Podemos então concluir que a latitude  $\phi$  é dada pela soma da declinação do Sol  $\delta$ , com a sua distância zenital  $\zeta$ , sendo  $\zeta = 90^{\circ} - \theta$  (figura 5). Assim, a latitude é dada pela equação

$$\phi = \zeta + \delta = 90^{\circ} - \theta + \delta.$$

A declinação  $\delta$  pode ser positiva se obtida em locais situados no Hemisfério Norte ou negativa se obtida em locais situados no Hemisfério Sul.

Para determinar a longitude, precisamos de uma posição inicial natural. Essa posição foi convencionada ser o

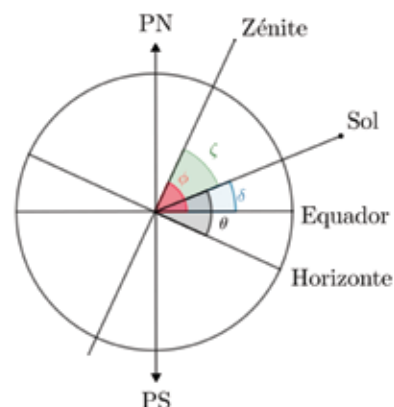


Figura 5. Projeção no plano meridiano [2].

Meridiano de Greenwich ou Meridiano Principal (passa sobre a localidade de Greenwich, no Observatório Real, nos arredores de Londres, Reino Unido) e divide o globo terrestre em Ocidente e Oriente.

A longitude pode ser calculada fazendo a diferença entre a hora local e a hora de Greenwich. Como o dia tem 24 horas e uma circunferência tem  $360^{\circ}$ , a Terra move-se em relação ao Sol a uma taxa de  $15^{\circ}$  por hora ( $360^{\circ}/24 = 15^{\circ}$  por hora), ou seja, cada hora de movimento do Sol (de Leste para Oeste) equivale a  $15^{\circ}$  de longitude.

A longitude é dada por: (hora local - hora de Greenwich)  $\times 15$ .

### 3. CONCLUSÃO

Os progressos da Álgebra e a introdução da Geometria Analítica criaram condições que permitiram a resolução de inúmeros problemas matemáticos, astronómicos e físicos. Desde o século XVI que a navegação suscitou o aparecimento de grandes avanços, tanto a nível prático, com observações usando instrumentos óticos, como teórico. As longas viagens no oceano exigiam novos métodos de cálculo de posições e rotas que tinham uma forte componente matemática, envolvendo Geometria e Astronomia. O sextante é um bom exemplo de uma aplicação prática de distâncias em que podem ver-se aliadas estes dois conceitos. Com este instrumento, a determinação da latitude ficou mais simples, uma vez que a medição do ângulo entre o horizonte e o corpo celeste se tornou mais precisa. Inclusive, vários melhoramentos foram introduzidos, como por exemplo, a substituição de régua graduada (representada por *I*) por um *nónio*. O *nónio* tinha sido inventado em 1542 pelo português Pedro Nunes [1].

Mais tarde, em 1919 [3], Gago Coutinho, marinheiro com prática de fazer observações astronómicas e levantamentos topográficos e pioneiro da navegação aérea de longo curso, pensou em introduzir a navegação astronómica na aeronáutica. Para isso, utilizou instrumentos como o cronómetro e inventou um horizonte artificial para o sextante, uma vez que não é possível observar o horizonte do mar a grande altitude.

O sextante é um instrumento de grande fiabilidade, de tal forma que foi utilizado no projeto Apollo inaugurado na década de 1960, que tinha como objetivo levar um homem à Lua e trazê-lo de volta em segurança. O sistema de navegação foi idealizado de raiz e os astronautas usaram periodicamente um sextante para fazer o alinhamento do sistema usado e para verificar a exatidão dos dados de rastreamento baseados em terra.

### 4. REFERÊNCIAS

[1] Álvaro R. Machado, 1944, *Sextante: Descoberta de Newton*. Modificação de Gago Coutinho, Coimbra Editora, Lda.

[2] Jorge Paulo Maurício de Carvalho, 1999, *O Sextante*, Associação Portuguesa para o Ensino da Astronomia

[3] Manuel dos Reis, Armando Cortesão, 1970, *Gago Coutinho Geógrafo*, Agrupamento de Estudos de Cartografia Antiga, Coimbra

[4] W. F. J. Mörzer Bruyns, 2009, *Sextants at Greenwich, a Catalogue of the Mariner's Quadrants, Mariner's Astrolabes, Cross-staffs, Backstaffs, Octants, Sextants, Quintants, Reflecting Circles, and Artificial Horizons in the National Maritime Museum, Greenwich*, Oxford University Press and the National Maritime Museum

#### Agradecimentos:

O meu agradecimento pelas sugestões e pelo contributo enriquecedor do meu orientador, Professor José Carlos Santos.

#### SOBRE A AUTORA

**Alzira Fernanda Mesquita Costa Faria**, professora adjunta do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto e aluna de Doutoramento em Ensino e Divulgação das Ciências na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, na área científica de Divulgação das Ciências.

# PREMI

# PRIZE



Il·lustració: Manuel del Arco

## 15.000 €

Publicació de la monografia guanyadora a la sèrie Progress in Mathematics de Birkhäuser.

Publication of the winning monograph in Birkhäuser series Progress in Mathematics.

# FERRAN SUNYER I BALAGUER

# 2020

**PREMI INTERNACIONAL  
D'INVESTIGACIÓ MATEMÀTICA**

### **BASES**

Premi ofert a una monografia matemàtica de caràcter expositiu que presenti els darrers desenvolupaments d'una àrea activa en recerca. El nom del guanyador serà anunciat a Barcelona l'abril de 2020.

### **TERMINI**

29 de novembre de 2019 a les 13 hores.

**INTERNATIONAL  
MATHEMATICAL RESEARCH PRIZE**

### **CONDITIONS**

Prize awarded for a mathematical monograph in an expository nature presenting the latest developments in an active area of research. The name of the prize-winner will be announced in Barcelona in April, 2020.

### **DEADLINE**

November 29, 2019 at 1pm.

<http://www.ffsb.cat>

**f FSB**  
Fundació Ferran Sunyer i Balaguer





JOSÉ CARLOS SANTOS  
Universidade  
do Porto  
[jcsantos@fc.up.pt](mailto:jcsantos@fc.up.pt)

## DA LÓGICA À FÍSICA

Os teoremas da incompletude de Gödel podem ser vistos como um exemplo acabado de Matemática Pura, sem ligação a qualquer área fora da matemática. Mas descobriu-se recentemente que têm consequências ligadas à Mecânica Quântica.

### OS TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Os teoremas da incompletude de Gödel contam-se entre as descobertas matemáticas mais famosas do século XX. Publicados em 1931, estes teoremas revelam as limitações inerentes a qualquer tentativa de formalizar a matemática (e, mais especificamente, a Aritmética) a partir de um sistema de axiomas.

Um conceito central para se compreender estes teoremas é o de *indecidibilidade*. Consideremos um ramo da matemática, tal como, por exemplo, a Aritmética. Agora consideremos uma axiomática para esse ramo da matemática. No caso da Aritmética, a axiomática mais frequentemente empregue são os axiomas de Peano.<sup>1</sup> Finalmente, consideremos uma proposição  $P$  desse ramo, tal como, por exemplo: o produto de quaisquer dois números naturais



consecutivos é um número par. Uma questão natural neste contexto é: é ou não possível deduzir dos axiomas em questão que a proposição  $P$  é verdadeira ou, em alternativa, que é falsa? Se for possível, dizemos que a proposição é *decidível*; caso contrário, que é *indecidível*.

Há proposições aritméticas que são indecidíveis face aos axiomas de Peano. Por exemplo, o matemático inglês Reuben Goodstein definiu uma família de sucessões de inteiros não negativos e provou que, para cada uma delas, todos os termos da sucessão acabam por ser 0 a partir de certa altura. Mas não se pode provar este resultado (nem a sua negação) a partir dos axiomas de Peano.<sup>2</sup> Gödel provou que isto não pode ser visto como um defeito dos axiomas de Peano, no sentido de que, para *qualquer* axiomática da Aritmética, haverá sempre proposições indecidíveis... a menos que a axiomática seja inconsistente (ou seja, conduza a resultados contrários), caso em que *qualquer* proposição (bem como a respetiva negação) poderá ser deduzida desses axiomas.

### INCOMPLETUDE E FÍSICA

Naturalmente, este tipo de resultados é um exemplo acabado de Matemática Pura. Mas poderão ter algum interesse fora da matemática? Conta-se (veja-se [1, cap.3], por exemplo) que, uma vez, o físico norte-americano John Archibald Wheeler foi ao gabinete de Gödel no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, e perguntou-lhe se havia alguma relação entre os teoremas da incompletude e o Princípio da Incerteza de Heisenberg. Gödel ficou furioso com a pergunta a pôs Wheeler fora do seu gabinete. É uma história engraçada... e quase sem qualquer base factual. O que aconteceu<sup>3</sup> foi que, num simpósio, Wheeler fez

aquela pergunta a Gödel e este não se mostrou interessado no assunto. Um ano mais tarde, num *cocktail*, Wheeler perguntou a Gödel porque é que não estava interessado no Princípio da Incerteza e, pela resposta que obteve, ficou com a impressão de que Einstein lhe tinha feito uma lavagem ao cérebro, que teve como efeito eliminar de Gödel qualquer interesse em Mecânica Quântica.<sup>4</sup>

Mas eis que, em 2015, foi provado que um problema de Física, que tem origem na Mecânica Quântica, é indecidível; veja-se [2]. O problema tem a ver com a própria origem da Mecânica Quântica: em 1900, Max Planck propôs que, para uma onda eletromagnética com uma frequência dada, nem todas as energias são possíveis, como se julgava até então. Em particular, existe uma lacuna entre a energia 0 e a menor energia possível. Essa menor energia possível passou a ser designada por um *quantum* de energia.

Gradualmente, foram surgindo problemas importantes na Física e na matemática ligados à existência ou não de uma lacuna para uma teoria física dada. Existe mesmo um prémio de um milhão de dólares para quem conseguir resolver um destes problemas: o problema da existência e da lacuna de massa de Yang-Mills.<sup>5</sup>

Não é claro à partida que o conceito de decidibilidade tenha importância para a Física, mas em 1974 Georg Kreisel (veja-se [3]), da Universidade de Stanford, fez notar que provar-se que um problema de Física é indecidível tem consequências práticas computacionais.<sup>6</sup>

O que foi provado em 2015 foi que, para uma família de tais problemas, não há (nem pode haver) nenhum algoritmo que permita decidir se existe ou não uma tal lacuna. É claro que uma reação natural à demonstração de que um problema não tem solução é a de que se trata de um resultado inteiramente negativo. Mas não é assim. Como disse, numa entrevista, um dos autores do artigo:<sup>7</sup>

No entanto, nem tudo são más notícias. Este problema não pode ser resolvido em geral porque, a este nível, os modelos exibem um comportamento extremamente bizarro que basicamente condena ao fracasso qualquer tentativa de o analisar. Mas este comportamento bizarro também prevê uma Física nova e muito bizarra que nunca foi vista anteriormente. Por exemplo, os nossos resultados mostram que acrescentar uma única partícula a uma grande porção de matéria pode, por maior que esta seja, alterar dramaticamente as suas propriedades. Uma nova Física deste tipo é frequentemente explorada tecnologicamente mais tarde.

## CONCLUSÃO

Não se pode afirmar de nenhum enunciado matemático, por mais isolado que possa parecer de tudo o que seja exterior à matemática, que nunca poderá ter aplicações científicas. Os teoremas da incompletude de Gödel são um exemplo disso.

## REFERÊNCIAS

- [1] John D. Barrow, *New Theories of Everything* (2.<sup>a</sup> edição), Oxford University Press, 2008
- [2] Toby S. Cubitt, David Perez-Garcia e Michael M. Wolf, “Undecidability of the spectral gap”, *Nature*, **528** (2015), pp. 207–211
- [3] Georg Kreisel, “A notion of mechanistic theory”, *Synthese*, **29** (1974), pp. 11–26.

---

<sup>1</sup> <http://mathworld.wolfram.com/PeanosAxioms.html>

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein%27s_theorem)

<sup>3</sup> <https://www.youtube.com/watch?v=YlutbiPjVg>

<sup>4</sup> <https://www.youtube.com/watch?v=rZXcVkuUqTkU>

<sup>5</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Yang%27s\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Yang%27s_problem)

<sup>6</sup> Para se saber mais sobre as ideias de Kreisel e sobre como estão ligadas à descoberta concreta mencionada neste artigo, veja -se *Why some physicists are excited about the undecidability of the spectral gap problem and why should we*, de Vladik Kreinovich: [https://digitalcommons.utep.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2163&context=cs\\_techrep](https://digitalcommons.utep.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2163&context=cs_techrep)

<sup>7</sup> <https://m.phys.org/news/2015-12-quantum-physics-problem-unsolvable-godel.html>

# Gazeta de Atemática

## TABELA DE PUBLICIDADE 2019

### CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

### CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

### CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

[imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

### ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)



Margem de corte: 4 mm

### LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPÉ
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.

AUTORES

ADÉRITO ARAÚJO  
CMUC,  
Universidade  
de Coimbra  
[alma@mat.uc.pt](mailto:alma@mat.uc.pt)

MANUEL CRUZ  
LEMA, Instituto  
Superior de  
Engenharia  
do Porto  
[mbc@isep.ipp.pt](mailto:mbc@isep.ipp.pt)

## A MATEMÁTICA NA PREVISÃO DA CRIMINALIDADE

Os assaltos a residências e a espaços comerciais constituem uma das principais preocupações das forças de segurança nas grandes zonas urbanas. A criação de modelos matemáticos que permitam simular a dinâmica associada a estes assaltos pode ser muito útil para o desenvolvimento de medidas eficazes para o controlo do crime.

### I. MOTIVAÇÃO

Tem havido um interesse crescente no uso de ferramentas matemáticas para obter informações sobre as leis que regem a atividade criminosa. São hoje muitos os investigadores com formação em diferentes áreas da matemática, da física e das ciências dos dados que dedicam grande parte da sua investigação à modelação e à simulação do crime, nas suas mais diversas vertentes. Neste artigo, vamos focar a nossa atenção num modelo diferencial para o estudo particular do problema dos assaltos a edifícios em zonas urbanas.

O acesso a dados reais relativos a atividades criminosas é crucial para a simulação e a validação dos modelos matemáticos. Na figura 1 pode verificar-se que a simples análise da distribuição dos assaltos a residências e edifícios comerciais registados numa dada região ao longo do tem-

po permite reconhecer algumas tendências e características importantes associadas a este tipo de criminalidade. Nos gráficos exibidos nessa figura distinguem-se claramente os efeitos da sazonalidade, sendo que os mesmos são distintos consoante a tipologia de edifício assaltado. Notemos, por exemplo, que na região analisada os assaltos a edifícios comerciais são mais frequentes ao final do dia e que o mês de setembro é particularmente calmo.

Além desta análise temporal, existe também uma componente relacionada com a dispersão espacial da criminalidade que merece ser considerada. Neste artigo vamos focar-nos, essencialmente, nessa característica espacial que iremos tratar com base nalgumas experiências efetuadas. Em concreto, vamos apresentar um modelo matemático que permite explicar quais as circunstâncias favoráveis ao aparecimento de zonas de elevado risco criminal (ou zonas

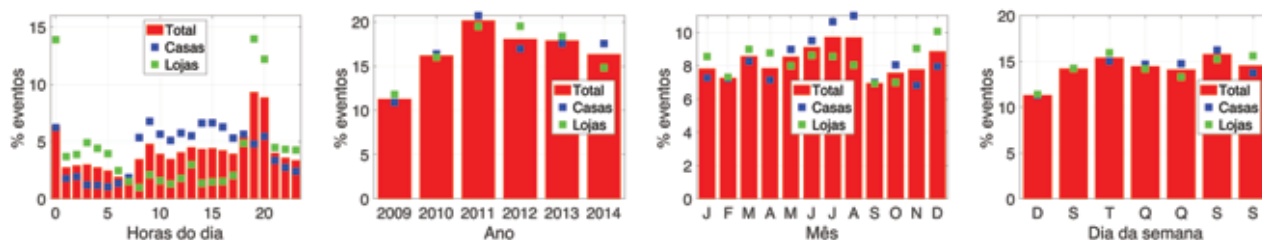


Figura 1. Frequência relativa de assaltos a residências e a espaços comerciais numa determinada região.



Figura 2. Zonas quentes de criminalidade em Baltimore, EUA, julho 2009. Fonte: <https://blog.spotcrime.com/2009/07/crime-heat-maps-shootings-baltimore.html>. [Acedido a 20 de maio de 2019].

quentes, do inglês *hotspots*), isto é, zonas onde a probabilidade de ocorrer um assalto é substancialmente mais elevada que nas suas vizinhanças. A existência destas zonas, como se pode ver na figura 2, corresponde a uma distribuição assimétrica da criminalidade no território.

Sabe-se que existem dois tipos de factores sociológicos que têm um papel importante na formação de padrões assimétricos de criminalidade associada a assaltos em zonas urbanas [5]. O primeiro é o chamado fenómeno de *revitimização*, que se refere ao risco aumentado de vitimização repetida, não apenas no local onde já tinha sido registada uma ocorrência, mas também em locais próximos e por um determinado período de tempo. O segundo é o chamando *efeito de janela partida*, que corresponde a uma teoria criminológica que defende que sinais visíveis de crime, comportamento anti-social ou de desobediência civil criam um ambiente urbano que encoraja mais crimes e mais desordem, nomeadamente crimes violentos.

O efeito da revitimização pode ser constatado na análise da Figura 3, onde é comparado o intervalo de tempo entre duas ocorrências (assaltos a residências) consecutivas em três blocos residenciais de uma determinada zona urbana. Nos 30 dias subsequentes à primeira ocorrência, verificam-se diversas repetições cuja existência se encontra muito acima do valor previsto teoricamente, caso existisse independência entre as ocorrências.

A literatura da especialidade revela a existência de vários tipos de modelos matemáticos que permitem explicar as condições que favorecem a formação de zonas de maior risco criminal: modelos diferenciais; modelos assentes na teoria dos jogos; modelos estatísticos; modelos de inteligência artificial, entre outros. No nosso estudo, optámos por considerar o modelo diferencial proposto, em 2008, por Martin Short, Andrea Bertozzi e seus colaboradores, modelo esse construído a partir de um modelo probabilístico discreto [5]. Nesse primeiro artigo, os autores estudaram a existência e a estabilidade de padrões localizados de atividade criminal e, posteriormente, em [6] e [7], aperfeiçoaram o modelo de forma a incluir outras funcionalidades como, por exemplo, o efeito concreto do policiamento.

Neste artigo vamos apresentar o modelo descrito em [5] e dar conta de algumas das suas características e potencialidades mais interessantes. Começaremos por descrever o modelo discreto, onde os imóveis são representados por nós de uma rede retangular e os criminosos por agentes que se movimentam nessa rede de acordo com regras definidas à custa do nível de atratividade do local onde os imóveis se encontram. Posteriormente, consideraremos o modelo diferencial contínuo, obtido à custa do modelo discreto, onde, genericamente, se diminui a granularidade da malha e se considera que os assaltantes estão distribuídos espacialmente de acordo com funções de distribuição. Esse modelo será descrito por um sistema de equações diferen-

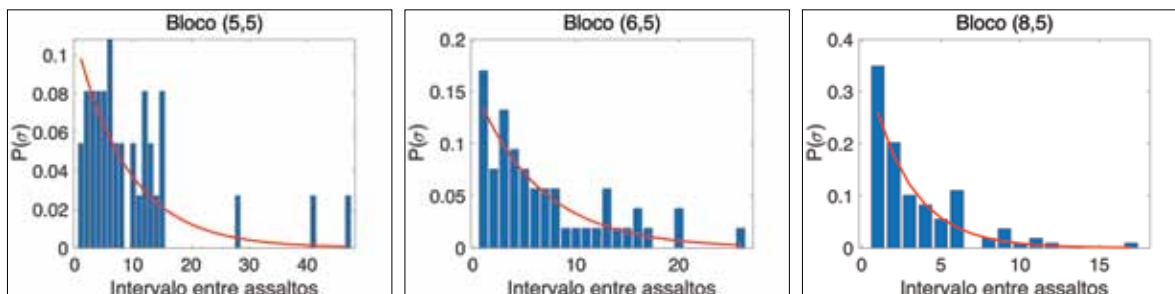


Figura 3. Revitimização: probabilidade de recorrência com independência vs real. Período de tempo em que o risco de revitimização é relevante.



ciais do tipo difusão-reação e irá permitir analisar a evolução da densidade de criminosos e da atratividade dos locais, tanto no espaço como no tempo.

## 2. MODELO DISCRETO

Suponhamos que as residências de uma determinada zona urbana se encontram localizadas nos nós de uma rede bidimensional. Por uma questão de simplicidade, vamos considerar que essa rede é retangular e uniforme, de espaçamento constante  $h$ .

Cada residência é descrita pelas suas coordenadas  $x = (x_1, x_2)$  na rede e por um parâmetro  $A(x, t)$  que representa, para cada instante de tempo  $t$ , a atratividade do local onde a residência se encontra. Este parâmetro pretende ser uma medida da percepção que os assaltantes têm da atratividade do local  $x$ , percepção essa que pode variar ao longo do tempo devido a vários fatores. Vamos considerar

$$A(x, t) = A^0(x) + B(x, t),$$

onde  $A^0$  representa a componente da atratividade que não varia com o tempo e  $B$  a componente dinâmica associada a fenómenos sociológicos como aqueles que foram descritos na secção anterior.

Os assaltantes movimentam-se na rede em intervalos de tempo discretos (vamos considerar  $dt$  como sendo a unidade de tempo) e, em cada local, optam por uma de entre duas situações: ou assaltam a residência que aí se encontra ou se deslocam para uma das residências vizinhas. A probabilidade de o criminoso assaltar a residência localizada em  $x$  no intervalo de tempo definido pelos instantes  $t$  e  $t + dt$  é dada por

$$p_a(x, t) = 1 - e^{-A(x, t)dt}.$$

Se o edifício localizado em  $x$  for assaltado, iremos assumir que o assaltante irá desfrutar do proveito dos bens saqueados, abstendo-se de cometer novos assaltos nos tempos mais próximos. Assim, no nosso modelo, se o criminoso consumir um assalto, é removido da rede. Para simular o regresso dos assaltantes à atividade, iremos considerar que cada local da rede irá gerar assaltantes a uma taxa  $\Gamma$ .

Se, por algum motivo, o criminoso que se encontra em  $x$  decidir não assaltar esse local no intervalo de tempo considerado, ele move-se para um dos outros  $z$  vizinhos – em geral, os 4 pontos da malha (em cima, em baixo, à esquerda ou à direita) – adjacentes à sua localização atual. Este movimento será tratado no modelo como um movimento aleatório enviesado no sentido das áreas de

maior atratividade. A probabilidade de o assaltante, estando em  $x$ , escolher um vizinho  $x'$  para assaltar é proporcional a  $A(x', t)$  e é dada por

$$p_m(x', t; x) = \frac{A(x', t)}{\sum_{x'' \sim x} A(x'', t)}, \quad (1)$$

onde a notação  $x'' \sim x$  indica que  $x''$  é vizinho de  $x$ . Este carácter local do comportamento dos assaltantes é justificado pelo facto (conhecido das autoridades policiais [5]) de que, especialmente na questão dos assaltos a residências, os criminosos tendem a assaltar numa vizinhança dos seus locais de residência ou dos locais que normalmente frequentam. A título de exemplo e segundo um estudo efetuado recentemente, no Rio de Janeiro a maioria dos detidos cometeu o crime num corredor de deslocamento de até 12 km entre o local da residência e a ocorrência do delito [2].

Como vimos, atratividade de um local  $x$  num instante  $t$  pode ser definida como a soma de uma componente estática, mas não é necessariamente constante,  $A^0(x)$  com uma componente dinâmica  $B(x, t)$ . Para estudar o comportamento dessa componente dinâmica, começemos por notar que, de acordo com o fenómeno da revitimização, a atratividade de um local aumenta sempre que um assalto ocorre nesse local. Se representarmos por  $n(x, t)$  o número de assaltantes esperados em  $x$  no instante  $t$ , a componente dinâmica da atratividade,  $B(x, t)$ , é aumentada por uma quantidade  $\theta n(x, t)p_a(x, t)$ , com  $\theta$  um parâmetro positivo, uma vez que  $n(x, t)p_a(x, t)$  representa o número de assaltos previsto para esse local e nesse instante.

Além disso, quando um local  $x$  é muito atrativo a sua segurança diminui e essa insegurança é propagada à vizinhança, de acordo com o fenómeno de janela partida descrito na secção anterior. Assim, além do efeito da revitimização, a atratividade dos locais vizinhos também aumenta, por difusão, depois de um assalto bem-sucedido em  $x$ .

O modelo discreto que tem em conta os fenómenos que acabámos de descrever pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} B(x, t + dt) &= \\ &= \left( (1 - \eta)B(x, t) + \frac{\eta}{z} \sum_{x' \sim x} B(x', t) \right) (1 - \omega dt) + \theta n(x, t)p_a(x, t), \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $n(x, t)$  representa o número de assaltantes esperados no local  $x$  e no instante  $t$ ,  $\eta \in [0, 1]$  é um parâmetro que permite controlar a influência da vizinhança na atratividade,  $z$  é o número de vizinhos,  $\theta$  um parâmetro que controla o efeito de revitimização e  $\omega$  o parâmetro correspondente ao decaimento exponencial da atratividade ao longo do

tempo. O termo  $1/z \sum_{x' \sim x} B(x', t)$  surge para representar a influência dos vizinhos na atratividade do local. Se usarmos a notação

$$\Delta_h B(x, t) = \frac{1}{h^2} \left( \sum_{x' \sim x} B(x', t) - zB(x, t) \right),$$

a equação (2) pode ser reescrita na forma

$$B(x, t + dt) = \left( B(x, t) + \frac{\eta h^2}{z} \Delta_h B(x, t) \right) (1 - \omega dt) + \theta n(x, t) p_a(x, t), \quad (3)$$

A figura 4 esquematiza a dinâmica da atratividade no modelo discreto considerado. Cada local da cidade é caracterizado pela sua atratividade que é constituída por

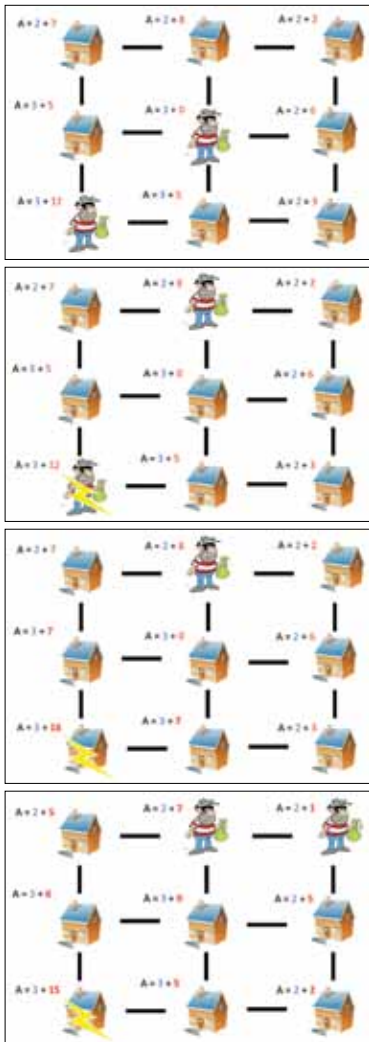


Figura 4. Modelo discreto: variação da atratividade na presença de assaltos.

duas componentes: uma componente estática (a azul) e uma componente dinâmica (a vermelho). Os assaltantes movem-se de forma aleatória, mas com um movimento enviesado de acordo com os alvos mais atrativos. Após cometerem um assalto num local atrativo, são removidos. A atratividade dos locais aumenta após um assalto e, além disso, difunde-se pelos locais vizinhos e decai se nesse local não ocorre nenhum assalto.

Para concluir o modelo discreto, falta definir a equação que traduz a dinâmica dos assaltantes. Motivado pelo lucro, um assaltante apenas chega ao local  $x$  se esse local for o mais atrativo de entre os seus vizinhos. Assim, o ladrão move-se para  $x$  se não assaltar o vizinho  $x'$  (o que acontece com a probabilidade  $1 - p_a(x', t)$ ) e  $x$  for suficientemente atrativo. Por outro lado, um assaltante que se encontra em  $x$  move-se para  $x'$  na vizinhança com uma probabilidade  $p_m(x', t; x)$  dada por (1). Podemos então dizer que o número de criminosos em  $x$  no intervalo de tempo  $[t, t + dt]$  é dado por

$$n(x, t + dt) = \sum_{x' \sim x} n(x', t) p_m(x', t; x) (1 - p_a(x', t)) + \Gamma dt, \quad (4)$$

onde  $\Gamma$  representa a taxa a que os assaltantes são gerados. Tal como foi feito para (3), esta equação também poderia ser escrita à custa do operador discreto  $\Delta_h$  mas a sua dedução é mais complicada e, por isso mesmo, será omitida.

As equações (3)–(4) constituem um modelo discreto para descrever a dinâmica da atratividade e do número de assaltantes. De notar que este sistema se encontra em equilíbrio quando todos os nós da malha tiverem a mesma atratividade  $\bar{A} = A^0 + \bar{B}$  e o mesmo número de assaltantes  $\bar{n}$ . Esses valores de equilíbrio podem ser obtidos algebricamente de (3)–(4) e são dados por

$$\bar{B} = \theta \Gamma / \omega, \quad \bar{n} = \Gamma / (1 - \bar{p}_a), \quad (5)$$

com  $\bar{p}_a = 1 - e^{-\bar{A} dt}$ .

### 3. MODELO DIFERENCIAL

O modelo diferencial é deduzido a partir das premissas estabelecidas para o modelo discreto. Começemos por converter  $n(x, t)$  numa densidade  $\rho(x, t)$ , simplesmente dividindo por  $h^2$ , sendo  $h$  o espaçamento da malha. Para obter a equação diferencial para a componente dinâmica da atratividade, subtraímos  $B(x, t)$  em ambos os membros de (4) e dividimos a equação por  $dt$ . Diminuindo o espaçamento da malha, isto é, tomando o limite quando  $dt$  e  $h$  tendem para zero, e impondo as restrições de  $h^2/dt = D$  (constante) e  $\theta dt = \epsilon$  (também constante), obtemos a se-

guinte equação para a componente dinâmica da versão contínua da atratividade

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta D}{z} \Delta B - \omega B + \epsilon D \rho A.$$

Para obter a equação para  $\rho$ , procedemos de forma idêntica. Subtraindo  $n(x, t)$  em ambos os membros de (4), redefinindo a expressão em termos da nova variável  $\rho$ , dividindo por  $dt$ , tomando o limite quando  $dt$  e  $h$  tendem para zero com as restrições já apresentadas e definindo  $\gamma = \Gamma/h^2$ , obtemos a equação para a densidade de criminosos dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{D}{z} \nabla \cdot \left( \nabla \rho - \frac{2\rho}{A} \nabla A \right) - \rho A + \gamma.$$

Essas equações são, usualmente, definidas num domínio retangular  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e para um intervalo de tempo  $[0, T]$ , com  $T > 0$ . Se efetuarmos uma conveniente mudança de variáveis e escalonamento (ver [5]), e considerarmos a situação em que  $A^0$  é constante em  $\Omega$ , as equações para a densidade de criminosos e a atratividade do meio podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \nabla \rho - \frac{2\rho}{A} \nabla A \right) - \rho A + \bar{B}, \text{ em } \Omega \times (0, T), \quad (6)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \Delta A + \rho A - A + A^0, \text{ em } \Omega \times (0, T), \quad (7)$$

onde  $\bar{B} = \bar{A} - A^0$  é dado por (5) ou, o que é equivalente  $\bar{B} = \epsilon D \gamma / w$ . Para o modelo ficar completo, é necessário introduzir condições iniciais e de fronteira. No nosso estudo consideramos condições de fronteira de Neumann homogêneas, o que corresponde a considerar que o domínio  $\Omega$  é isolado.

Notemos que o problema diferencial obtido inclui menos parâmetros do que o modelo discreto, mas garante uma evolução espaciotemporal semelhante. Além disso, partilha ingredientes essenciais com o célebre modelo de Keller-Segel [3], introduzido em 1971 para descrever o movimento de bactérias induzido por substâncias químicas. Aqui, o papel das bactérias é desempenhado pelos criminosos e o das substâncias químicas pela atratividade.

O primeiro termo, em (6), corresponde a uma difusão de criminosos e a um movimento segundo o gradiente da atratividade, com velocidade inversamente proporcional à atratividade local. Esse movimento condicionado pela atratividade representa a tendência de os criminosos se moverem para locais com maior atratividade, tal como as

bactérias, no modelo de Keller-Segel, se movimentam no sentido dos gradientes das substâncias químicas. Na mesma equação,  $\bar{B}$  (que depende de  $\gamma$ ) corresponde à taxa de adição de criminosos e  $-\rho A$  equivale à remoção de criminosos ao interagirem com a atratividade. Relativamente à equação (7) para a atratividade, o primeiro termo corresponde à difusão para a vizinhança, com coeficiente de difusão  $\eta$ . A atratividade vai reduzindo, com valor base  $A^0$ . O termo  $\rho A$  representa a interação com os criminosos que, neste caso, faz aumentar a atratividade.

#### 4. INSTABILIDADE DE TURING E A FORMAÇÃO DE PADRÕES

Para perceber influência dos parâmetros que definem o modelo –  $A^0$ ,  $\bar{B}$  e  $\eta$  – na dinâmica da densidade de assaltantes e na atratividade em cada local, vamos começar por considerar um exemplo numérico resultante da aplicação de um método de diferenças finitas semi-implícito na resolução do problema adimensional (6)–(7), com condições de fronteira de Neumann homogêneas

Consideremos uma malha de espaçamento uniforme  $h = 0,2$  num quadrado  $\Omega = (0, 8)^2$  e uma medida de passo temporal  $dt = h^2$ . Sejam  $A^0 = 0,5$ ,  $\bar{A} = 2$ , o que corresponde a  $\bar{B} = \bar{A} - A^0 = 1,5$ , e  $\eta = 0,064$  os parâmetros que definem o sistema diferencial. Como condição inicial, vamos considerar uma perturbação do estado de equilíbrio

$$\bar{A} = A^0 + \bar{B}, \quad \bar{\rho} = \frac{\bar{B}}{A^0 + \bar{B}} \quad (8)$$

dada por

$$A(x, 0) = \bar{A} + \delta_A(x), \quad \rho(x, 0) = \bar{\rho},$$

com  $\delta_A(x)$  um valor aleatório em  $(0, 10^{-3})$ , para todo o  $x \in \Omega$ .

Na figura 5 pode ver-se que este conjunto de parâmetros conduziu à formação de um padrão na distribuição espacial da atratividade (os resultados obtidos para a distribuição da densidade de assaltantes foram semelhantes). No entanto, existem escolhas diferentes dos valores dos parâmetros que fazem com que a solução, ao fim de um certo tempo, seja uniforme em todo o domínio.

A questão que se coloca é: para que valores dos parâmetros pequenas perturbações do estado de equilíbrio conduzem à formação de padrões espaciais? A resposta foi dada por Alan Turing, em 1952, mostrando que é possível uma solução de sistema diferencial tender para um estado de equilíbrio homogêneo na ausência de difusão e tender para um estado de equilíbrio não homogêneo, chamado

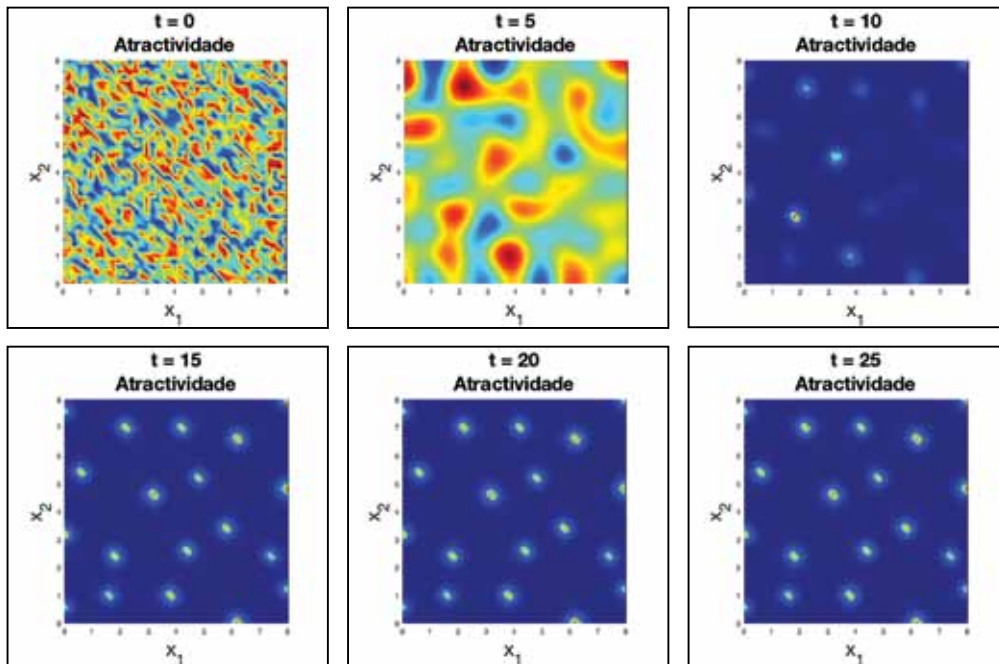


Figura 5. Taxa de crescimento  $\sigma$  para os parâmetros do modelo dados no exemplo numérico.

padrão, quando adicionamos a difusão ao sistema [8]. Este efeito destabilizador da difusão é o que caracteriza a chamada instabilidade de Turing.

Em termos matemáticos, dizemos que o sistema de difusão-reação apresenta uma instabilidade de Turing quando um estado de equilíbrio estável na ausência de difusão se torna instável na presença de difusão. No caso do nosso modelo diferencial (6)–(7), iremos começar por mostrar que o estado de equilíbrio  $(\bar{A}, \bar{\rho})$ , dado por (8), é linearmente estável na ausência de difusão e que, para uma determinada escolha de parâmetros, se torna instável quando se adiciona a difusão.

Para provar que  $(\bar{A}, \bar{\rho})$  é linearmente estável na ausência de difusão, basta provar que todos os valores próprios de

$$L = \begin{bmatrix} -1 - \bar{\rho} & \bar{A} \\ -\bar{\rho} & -\bar{A} \end{bmatrix}$$

têm parte real negativa ou, o que é equivalente, que o traço de  $L$  é negativo e o seu determinante é positivo. Como, no nosso caso,  $\bar{A}, \bar{\rho} > 0$ , temos que  $\text{tr}(L) = -1 - \bar{\rho} - \bar{A} < 0$  e  $\det(L) = \bar{A}(1 + \bar{\rho}) + \bar{\rho}\bar{A} > 0$ , o que permite concluir que o estado de equilíbrio (8) é sempre estável, qualquer que seja a escolha dos parâmetros.  $\$$

Queremos agora determinar as condições a impor aos parâmetros de forma a garantir que o estado de equilíbrio

se torna instável na presença da difusão. Para isso, vamos examinar o comportamento de soluções do modelo (6)–(7) que resultam das seguintes perturbações do estado de equilíbrio

$$A(x, t) = \bar{A} + \delta_A e^{\sigma t + ik \cdot x}, \quad \rho(x, t) = \bar{\rho} + \delta_\rho e^{\sigma t + ik \cdot x},$$

onde  $\sigma$  é o fator de crescimento,  $k = (k_1, k_2)$  é o chamado vetor de onda,  $k \cdot x = k_1 x_1 + k_2 x_2$ ,  $i$  é a unidade imaginária e  $\delta_A, \delta_\rho$  são valores reais positivos pequenos. Substituindo no modelo diferencial, obtemos o sistema linearizado

$$J_k \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\eta|k|^2 - 1 - \bar{\rho} & \bar{A} \\ -\bar{\rho} & -|k|^2 - \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix},$$

onde  $|k|$  é o comprimento do vetor de onda, designado por número de onda, e  $J_k$  a matrix jacobiana. Para que  $(\bar{A}, \bar{\rho})$  seja instável na presença de difusão e, conseqüentemente, estarmos na presença de uma instabilidade de Turing do sistema, os valores do fator de crescimento  $\sigma$  terão de ter parte real positiva. Atendendo, a equação característica do sistema linearizado é dada por

$$\sigma^2 - \text{tr}(J_k)\sigma + \det(J_k) = 0,$$

temos que

$$\sigma = \frac{1}{2} \left( \text{tr}(J_k) \pm \sqrt{\text{tr}(J_k)^2 - 4 \det(J_k)} \right).$$

Como  $\text{tr}(J_k) < 0$ , para garantir que  $\sigma$  tenha parte real positiva, temos de considerar

$$\det(J_k) < 0 \Leftrightarrow \eta|k|^4 - (3\bar{\rho} - \eta\bar{A} - 1)|k|^2 + \bar{A} < 0.$$

Esta desigualdade deve ser verificada, pelo menos, para uma banda finita de números de onda e apenas se os parâmetros do sistema são tais que

$$(3\bar{\rho} - \eta\bar{A} - 1)^2 - 4\eta\bar{A} > 0. \quad (9)$$

Esta inequação dá-nos, assim, um critério para determinar os valores dos parâmetros do modelo que garantem a formação de padrões. Por exemplo, se substituirmos os valores usados no exemplo numérico em (9), obtemos

$$(3 \times 0,75 - 0,064 \times 2 - 1)^2 - 4 \times 0,064 \times 2 > 0.$$

Na figura 6 apresenta-se o valor da taxa de crescimento  $\sigma$  para os valores dos parâmetros dados no exemplo numérico anterior. Como se pode ver, a parte imaginária do fator de crescimento  $\sigma$  é diferente de zero apenas para os

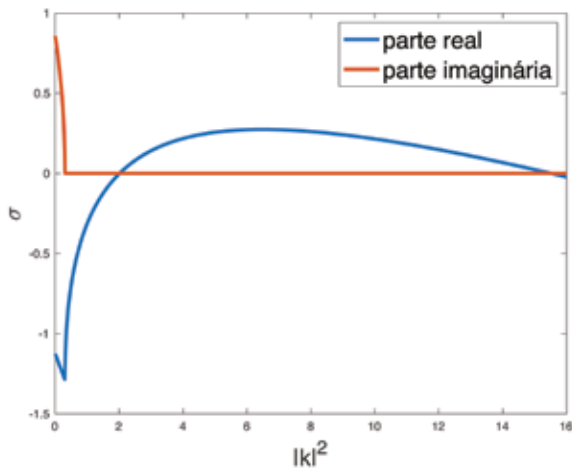


Figura 6. Taxa de crescimento  $\sigma$  em função do quadrado do comprimento de onda para os parâmetros usado no exemplo numérico.

números de onda para os quais a parte real de  $\sigma$  é negativa, indicando que não há oscilações crescentes no sistema. A parte real do fator de crescimento é positiva numa banda finita de números de onda, o que permite concluir que essa escolha de parâmetros pode corresponder à formação de padrões espaciais da criminalidade.

## 5. COMENTÁRIOS FINAIS

Com este artigo pretendemos mostrar a importância da matemática na área da criminologia através da apresentação de um modelo simplificado que permite identificar situações que favoreçam o aparecimento dos chamados *hotspots*, isto é, zonas de elevado risco criminal. Esse modelo necessita, para a sua implementação e parametrização efetiva, de ser alimentado por uma quantidade considerável de dados recolhidos em tempo quase real, que se poderão enquadrar na definição de *Big Data*. Com recurso às diversas tecnologias disponíveis atualmente, esta recolha poderá ser efetuada sem muita dificuldade.

A adequabilidade e a aderência do modelo à realidade tem sido muitas vezes medida através de indicadores que se acredita fornecerem uma medida indireta da qualidade do modelo (*proxies*). No contexto da criminologia – e não apenas no problema dos assaltos a residências ou espaços comerciais – um dos *proxies* habituais refere-se ao aumento do número de detenções por unidade de policiamento. Se em termos matemáticos este procedimento se pode enquadrar no processo habitual de modelação, já do ponto de vista social e humano a sua aplicação pode afetar alguns equilíbrios existentes e tornar-se uma ferramenta de desigualdade.

Fruto do grande investimento em licenças de *software* comercial, o recurso a métricas que correspondam ao aumento do número de detenções por unidade de policiamento tem sido usado com muita frequência. Este processo tem sido reportado nalgumas cidades dos Estados Unidos e poderá induzir, segundo alguns autores, um efeito nefasto a longo prazo. Segundo [4], as forças de segurança podem tender a policiar com maior frequência zonas mais problemáticas das cidades, focando a sua atenção em crimes de menor gravidade, aumentando dessa forma o número de detenções, o que terá como resultado natural uma maior eficiência em termos do *proxy* utilizado. Ao mesmo tempo, o modelo tenderá a identificar essas zonas como *hotspots*, mantendo ou aumentando o policiamento, retroalimentando assim este processo. Este facto colocará os habitantes de zonas problemáticas sob uma vigilância mais apertada. Assim sendo, a probabilidade de serem fiscalizados (numa operação stop, por exemplo) ou autuados por crimes menores aumenta. Como consequência, e comparativamente com habitantes de outras zonas mais favorecidas socialmente, os habitantes daquelas zonas terão um tratamento desigual, pois a vigilância tenderá a ser menos frequente nas zonas mais favorecidas. Adicionalmente, a junção de outros fatores como as habilitações literárias ou

o poder económico poderá agravar ainda a mais a possibilidade de aqueles habitantes serem bem-sucedidos e evoluírem socialmente, apenas pelo facto de viverem ou frequentarem zonas problemáticas. Naturalmente, aquelas zonas tornam-se menos apetecíveis, tornando-se um foco considerado problemático pela sociedade em geral, aumentando dessa forma o fosso entre as diversas classes sociais e discriminando as pessoas que lá vivem com base no local onde nasceram ou que habitam. Assim, e segundo [4], o fosso social é agravado, não pela utilização do modelo matemático em si, mas pela aplicação de *proxies* que distorcem o objetivo inicial do modelo e que o retroalimentam contribuindo para aquele tipo de assimetrias. Cabe também aos matemáticos, enquanto cidadãos empenhados na promoção do desenvolvimento e do bem-estar, o dever de alertar para possíveis distorções das ferramentas que ajudam a criar.

O campo, relativamente recente, da aplicação da matemática, da física teórica e doutras ciências às áreas da criminologia é por vezes referido como *NetCrime* ou *DataCrime* [1]. O *IV Symposium on the Structure and Mobility of Crime* (<https://netcrime.weebly.com>), realizado em Vermont no corrente ano e que reuniu diversos trabalhos nesta área, é um exemplo dos diversos encontros que se realizam sobre o tema.

## 6. REFERÊNCIAS

- [1] B.R. Cunha, "Networks, data and crime", ECMI blog, <https://ecmiindmath.org/2019/05/20/networks-data-and-crime/>, 2019. [Acedido a 20 de Maio de 2019]
- [2] Fundação Getúlio Vargas, "Os deslocamentos do crime", <http://dapp.fgv.br/wp-content/uploads/2018/01/OS-DESLOCAMENTOS-DO-CRIME-1.pdf>, 2019. [Acedido a 20 de Maio de 2019]
- [3] E.F. Keller, L.A. Segel. "Model for chemotaxis". *Journal of Theoretical Biology*, 30:225--234, 1971.
- [4] C. O'Neil, *Weapons of Math Destruction*, Penguin Books, 2017.
- [5] M.B. Short, M.R. D'Orsogna, V. Pasour, P.J Brantingham, G. Tita, A. Bertozzi, A. Chayes. *Statistical models of criminal behavior*. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18:1249-1267, 2008.
- [6] M.B. Short, A. Bertozzi, P.J Brantingham, G. Tita. *Dissipation and displacement of hotspots in reaction-diffusion models of crime*. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 107:3961--3965, 2010.
- [7] M.B. Short, A. Bertozzi, P.J Brantingham, G. Tita. *Non-linear patterns in urban crime: Hotspots, bifurcations, and suppression*. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 9(2):462-483, 2010.
- [8] A.M. Turing. *The chemical basis of morphogenesis*. *Biological Sciences*, 237:37--72, 1952.

Coordenação do espaço PT-MATHS-IN:  
Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, [pt-maths-in@spm.pt](mailto:pt-maths-in@spm.pt)



LOJA  
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)



Publicado originalmente no jornal Público, em 29/05/2019. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

## FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

**Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra

EDITORES:

**Ana Cristina Moreira Freitas** Universidade do Porto

**Daniel Pinto** Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:

**Adérito Araújo** Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M<sup>o</sup> Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

**Ana Isabel Figueiredo** SPM

REVISÃO:

**Margarida Robalo**

DESIGN:

**Ana Pedro**

IMPRESSÃO:

**Fid'algo – Print Graphic Design**

Rua da Nau Catrineta n 14 2<sup>o</sup> Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

**Alojamento Vivo**

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

**Ana Isabel Figueiredo** SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

**Sociedade Portuguesa de Matemática**

SEDE: Av. República 45, 3<sup>o</sup>Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1250 Exemplares**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**



## SOBRE A IMPOSSIBILIDADE DE CONSTRUIR UM TRIÂNGULO, DADOS OS COMPRIMENTOS DAS BISSETRIZES INTERNAS

A. CAMINHA<sup>a</sup> E A. MAIA<sup>b</sup>

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ<sup>a,b</sup>

[caminha@mat.ufc.br](mailto:caminha@mat.ufc.br)<sup>a</sup> e [alberto.duarte@mat.ufc.br](mailto:alberto.duarte@mat.ufc.br)<sup>b</sup>



## 1. INTRODUÇÃO

Um dos pontos altos de todo curso de Estruturas Algébricas é a solução dos problemas clássicos gregos de construção com régua e compasso, quais sejam, a demonstração das impossibilidades da quadratura de um círculo, da duplicação de um cubo e da trisseção de um ângulo genérico. Usualmente, isto é feito por contradição: por um lado, mostra-se (cf. [6], [7] ou [8], por exemplo) que um número real  $\alpha > 0$  é construtível se, e só se, o grau da extensão de corpos  $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$  for uma potência de 2; por outro, para o primeiro problema a contradição surge da transcendência de  $\pi$ , enquanto para os outros dois problemas ela decorre do facto de que os polinómios minimais de  $\sqrt[3]{2}$  e de  $\cos \frac{\pi}{9}$  têm grau 3.

Nesta curta nota, aplicamos o arcabouço de ideias envolvido na demonstração dos problemas gregos para apresentar uma prova simples para o facto de que é impossível, utilizando um compasso e uma régua sem marcas, construir um triângulo, conhecidos os comprimentos das suas bissetrizes internas, mesmo que o triângulo seja isósceles.

Creditávamos o problema acima ao folclore matemático. Contudo, após a apresentação desta nota a alguns colegas, fomos informados por Samuel B. Feitosa de que ele parece ter sido inicialmente proposto por H. Brocard, em 1875, e respondido (negativamente) por F. Neiss (veja [10]), em 1937, mas não fomos capazes de acessar a sua demonstração. De toda forma, acreditamos que os argumen-

tos aqui reunidos, pela sua simplicidade, compõem uma bela aplicação da teoria, a qual vale a pena ser registada.

De maneira mais precisa, demonstramos neste artigo o seguinte resultado.

**Teorema 1.1.** *De um triângulo  $ABC$ , isósceles de base  $BC$ , conhecemos segmentos de comprimentos  $p$  e  $q$ , respectivamente iguais àqueles das bissetrizes internas relativas aos vértices  $B$  e  $A$ . Se  $q/p$  for um número real transcendente, então não é possível construir  $ABC$  com um compasso e uma régua sem marcas.*

Recordamos que um número real é dito *algébrico* se for raiz de um polinómio não constante e de coeficientes inteiros; do contrário, tal número é denominado *transcendente*. Não é difícil provar (veja o capítulo 1 de [4] ou o exercício 1.4.12 de [1], por exemplo) que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável, isto é, pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais. Uma vez que todo o intervalo aberto da reta real é não enumerável, percebemos imediatamente que o teorema acima estabelece *genericamente* a não construtibilidade de triângulos isósceles.

Por fim, observamos que, dados arbitrariamente três segmentos de reta, sempre existe um triângulo cujas bissetrizes internas têm comprimentos iguais aos comprimentos de tais segmentos; ademais, tal triângulo é único a menos de congruência. Esse resultado foi demonstrado somente em 1994, por P. Mironescu e L. Panaitopol (veja [9]), por meio de um belíssimo argumento envolvendo o Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações.

## 2. ALGEBRIZANDO CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Por completude, ao longo desta secção recordamos brevemente a formalização algébrica das construções com uma régua não graduada e compasso, seguindo essencialmente [6] e [7].

Assumimos que, com uma régua não graduada e um compasso, podemos traçar:

- (i) a reta que passa por dois pontos dados;
- (ii) o círculo com centro num ponto dado e passando por outro ponto também dado.

Assumimos também que todas as construções são realizadas no plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Nesse sentido, dado um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  que contenha pelo menos dois pontos, dizemos que:

**A**presentamos uma prova simples para o facto de que, genericamente, é impossível utilizar um compasso e uma régua sem marcas para construir um triângulo, dados os comprimentos das suas bissetrizes internas, mesmo no caso em que o triângulo seja isósceles.

(i) uma reta é imediatamente construtível a partir de  $S$  se contiver, pelo menos, dois pontos distintos de  $S$ ;

(ii) um círculo é imediatamente construtível a partir de  $S$  se o seu centro e um dos seus pontos pertencerem a  $S$ .

Assim, dizemos que um ponto  $A$  é imediatamente construtível a partir de  $S$  se  $A$  for a interseção entre duas retas, entre uma reta e um círculo ou entre dois círculos imediatamente construtíveis a partir de  $S$ . Portanto, se  $A$  é imediatamente construtível a partir de  $S$ , então as suas coordenadas cartesianas satisfazem um sistema de equações composto por equações de retas ou círculos e, assim sendo, tais coordenadas são raízes de equações polinomiais de graus 1 ou 2, tendo por coeficientes expressões algébricas envolvendo somente coordenadas de pontos de  $S$ .

A partir de agora, sejam  $S_0 = \{(0,0), (1,0)\}$  e, para  $i \geq 1$ , seja  $S_i$  o conjunto dos pontos imediatamente construtíveis a partir de  $S_{i-1}$ . Definimos o conjunto  $\mathcal{C}$  dos pontos construtíveis de  $\mathbb{R}^2$  como

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \geq 0} S_i.$$

Evidentemente, definimos de maneira análoga o conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^2$  construtíveis a partir de um subconjunto  $S$  qualquer de  $\mathbb{R}^2$ .

Não é difícil mostrar que um ponto  $A(a,b)$  é construtível se, e somente se, os pontos  $(a,0)$  e  $(b,0)$  o forem. Isto posto, temos a seguinte

**Definição 2.1.** Um número real  $x$  é construtível se  $x$  for a abscissa de um ponto construtível.

A partir das construções elementares listadas anteriormente, já na Antiguidade Clássica os gregos sabiam realizar, por exemplo, as seguintes construções:

(i) adicionar e subtrair segmentos;

(ii) dividir um segmento dado em  $n$  segmentos congruentes, para  $n \in \mathbb{N}$ ;

(iii) dada uma unidade de medida e segmentos de comprimentos  $a$  e  $b$ , construir segmentos de comprimentos  $ab$  e  $a/b$ .

Portanto, o conjunto dos números construtíveis é um subcorpo de  $\mathbb{R}$  contendo  $\mathbb{Q}$ .

Pelo que fizemos até aqui, um ponto  $A$  é construtível se existirem pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$ , com  $A_1 = (a_1, b_1) = (0,0)$ ,  $A_2 = (a_2, b_2) = (0,1)$ ,  $A_3 = (a_3, b_3), \dots, A_r = (a_r, b_r) = A$  e tais que cada um dos

$A_i$ , para  $3 \leq i \leq r$ , pode ser obtido por meio de construções elementares que envolvam os pontos anteriores a ele na sequência.

Os próximos dois resultados evidenciam a importância desses conceitos preliminares. A fim de que o leitor os aprecie melhor, cumpre recordar (cf. os capítulos 5 de [6] ou [8], por exemplo) alguns factos simples sobre extensões de corpos.

Se  $\mathbb{K}$  é um subcorpo de  $\mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $\mathbb{K}[\alpha]$  (respetivamente  $\mathbb{K}(\alpha)$ ) o menor subanel (respetivamente subcorpo) de  $\mathbb{R}$  contendo  $\mathbb{K}$  e  $\alpha$ . Assim,  $\mathbb{K}[\alpha]$  é o conjunto de todos os números reais da forma

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0, \quad (2.1)$$

com  $n \in \mathbb{Z}_+$  e  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , ao passo que  $\mathbb{K}(\alpha)$  é o conjunto formado pelos quocientes  $\beta/\gamma$ , com  $\beta, \gamma \in \mathbb{K}[\alpha]$ , sendo  $\gamma \neq 0$ .

Se  $\alpha$  é algébrico sobre  $\mathbb{K}$ , isto é, se  $\alpha$  é raiz de um polinómio não nulo de coeficientes em  $\mathbb{K}$ , é possível mostrar que o conjunto dos polinómios em  $\mathbb{K}[X]$  que anulam  $\alpha$  é formado pelos múltiplos de um único polinómio mónico e irredutível  $p_{\alpha|\mathbb{K}} \in \mathbb{K}[X]$ , dito o *polinómio minimal* de  $\alpha$  sobre  $\mathbb{K}$ . Sendo esse o caso, diz-se que a extensão de corpos  $\mathbb{K}(\alpha)|\mathbb{K}$  é finita, e define-se o seu grau, denotado  $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$ , como a dimensão do  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $\mathbb{K}(\alpha)$ ; por fim, prova-se que  $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$  é igual ao grau do polinómio  $p_{\alpha|\mathbb{K}}$ .

**Lemma 2.1.** *Seja  $\mathbb{K}$  um subcorpo de  $\mathbb{R}$  que contém as coordenadas de uma coleção  $S$  de pontos construtíveis de  $\mathbb{R}^2$ , todos com coordenadas em  $\mathbb{K}$ . Se  $A = (\alpha, 0)$  é imediatamente construtível a partir de  $S$ , então  $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] \leq 2$ .*

*Demonstração (esboço).* Conforme observamos anteriormente, o ponto  $A = (\alpha, 0)$  é interseção de duas retas, de uma reta e um círculo ou de dois círculos, determinados a partir de pontos de  $S$ . Também por uma observação anterior,  $\alpha$  é raiz de um polinómio  $f \in \mathbb{K}[X]$ , de grau 1 ou 2; então, sendo  $p_{\alpha|\mathbb{K}}$  o polinómio minimal de  $\alpha$  sobre  $\mathbb{K}$ , temos

$$[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = \partial p_{\alpha|\mathbb{K}} \leq \partial f \leq 2. \quad \square$$

Tendo em vista o lema anterior, a multiplicatividade de graus para extensões finitas de corpos fornece o seguinte resultado fundamental.

**Teorema 2.3.** *Seja  $\mathbb{K}$  um subcorpo de  $\mathbb{R}$  que contém as coordenadas de uma coleção  $S$  de pontos construtíveis de  $\mathbb{R}^2$ , todos com coordenadas em  $\mathbb{K}$ . Se  $A = (\alpha, 0)$  é cons-*

trutível a partir de  $S$ , então  $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$  é uma potência de 2.

*Demonstração (esboço).* A partir das hipóteses, não é difícil mostrar que existem  $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$  tais que, para  $1 \leq i \leq n$ , o número  $\alpha_i$  é imediatamente construtível a partir de  $\mathbb{K}(\alpha_{i-1})$ . Então, a aludida multiplicatividade de graus, juntamente com o lema anterior, fornece

$$[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = \prod_{i=1}^n [\mathbb{K}(\alpha_i) : \mathbb{K}(\alpha_{i-1})] = 2^m,$$

para algum inteiro  $m$  tal que  $0 \leq m \leq n$ .  $\square$

De posse da discussão acima, podemos antecipar, em linhas gerais, os argumentos que levarão à demonstração do Teorema 1.1 analisando brevemente o problema da trisseção de um ângulo (para mais detalhes, veja novamente os capítulos 5 de [6] ou [8]): se fosse possível construir com um compasso e uma régua sem marcas um ângulo de  $20^\circ$  (ou, de outra forma, se fosse possível trissectar um ângulo de  $60^\circ$ ), pode-se mostrar que o número  $\cos 20^\circ$  seria construtível a partir de  $\mathbb{Q}$ . Contudo, um pouco de Trigonometria fornece a igualdade

$$8 \cos^3 20^\circ - 6 \cos 20^\circ - 1 = 0,$$

de sorte que o polinómio minimal de  $\cos 20^\circ$  sobre  $\mathbb{Q}$  é (o polinómio irreduzível)  $\frac{1}{8}(8X^3 - 6X - 1)$ . Assim,

$$[\mathbb{Q}(\cos 20^\circ) : \mathbb{Q}] = 3,$$

que não é uma potência de 2, de sorte que chegamos a uma contradição.

### 3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1

#### 3.1. A parte geométrica

Consideremos um triângulo  $ABC$ , isósceles de base  $BC$ , e denotamos por  $AM$  e  $BP$  duas das suas bissetrizes internas (veja a figura 1).

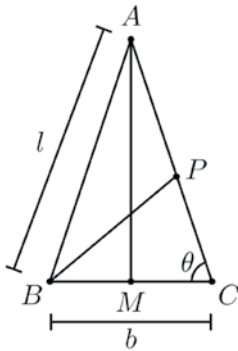


Figura 1. Um triângulo isósceles e duas das suas bissetrizes internas.

Assumimos que os comprimentos  $p$  de  $BP$  e  $q$  de  $AM$  são conhecidos, e fazemos  $AB = AC = l$  e  $BC = b$ . Uma vez que  $AM$  também é altura e mediana de  $ABC$ , temos  $\cos \theta = \frac{b}{2l}$ , também, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $ACM$ , obtemos  $l^2 - \frac{b^2}{4} = q^2$  ou, o que é o mesmo,

$$(2l + b)(2l - b) = 4q^2. \quad (3.1)$$

Com respeito à bissetriz interna  $BP$ , o Teorema da Bissetriz Interna (cf. capítulo 4 de [3], por exemplo) fornece  $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{BC}$  ou, denotando  $CP = x$ ,  $\frac{l-x}{x} = \frac{l}{b}$ . Resolvendo para  $x$ , temos  $CP = x = \frac{bl}{b+l}$ . Então, aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo  $BPC$ , vem que

$$\begin{aligned} p^2 &= b^2 + x^2 - 2bx \cos \theta \\ &= b^2 + \left(\frac{bl}{b+l}\right)^2 - 2b\left(\frac{bl}{b+l}\right) \cdot \frac{b}{2l} \\ &= \frac{b^2l(b+2l)}{(b+l)^2}. \end{aligned}$$

Esta última relação, juntamente com (3.1), dá facilmente

$$\frac{b^2l}{2l-b} = \frac{p^2(b+l)^2}{4q^2}.$$

#### 3.2. A parte algébrica

Multiplicando a última igualdade acima em  $\times$  e utilizando um pouco de álgebra elementar, obtemos

$$2p^2l^3 + 3p^2bl^2 - 4q^2b^2l - p^2b^3 = 0;$$

dividindo ambos os membros por  $b^3$ , podemos escrever

$$2p^2\left(\frac{l}{b}\right)^3 + 3p^2\left(\frac{l}{b}\right)^2 - 4q^2\left(\frac{l}{b}\right) - p^2 = 0.$$

A fim de simplificar a notação nos argumentos subsequentes, podemos supor  $p = 1$ . Realmente, pensando em  $p$  e  $q$  como os comprimentos de dois segmentos dados no papel (e, portanto, transportáveis com o auxílio da régua e do compasso), podemos impor o comprimento  $p$  como unidade de medida ao longo dos eixos do sistema cartesiano fixado.

Desse modo, concluímos que  $\frac{l}{b}$  é uma raiz do polinómio de terceiro grau

$$f(X) = 2X^3 + 3X^2 - 4q^2X - 1. \quad (3.2)$$

Agora, estabeleçamos a irreduzibilidade de  $f$  em  $\mathbb{Q}(q)[X]$ , para todo o número real  $q > 0$  transcendente.

Sendo  $q$  transcendente, pode-se mostrar que  $\mathbb{Q}[q]$  é essencialmente idêntico a um anel de polinómios  $\mathbb{Q}[Y]$ ; formalmente, diz-se que  $\mathbb{Q}[q]$  e  $\mathbb{Q}[Y]$  são *isomorfos*, o que é denotado escrevendo-se  $\mathbb{Q}[q] \simeq \mathbb{Q}[Y]$ . Então,  $\mathbb{Q}[q] \neq \mathbb{Q}(q)$ , mas, por outro lado,  $\mathbb{Q}[q]$  é um domínio de

fatoração única. Dessa forma, um teorema clássico de Gauss (conhecido como o Lema de Gauss – veja o Teorema 4.3.1 de [8] e a discussão subsequente, por exemplo) garante que  $f$  será irredutível em  $\mathbb{Q}(q)[X]$  se o for em  $\mathbb{Q}[q][X]$ .

Por sua vez, se tal não sucedesse,  $f$  teria uma raiz  $\alpha \in \mathbb{Q}(q)$ , e existiriam  $g(X), h(X) \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$  tais que  $\alpha = \frac{g(q)}{h(q)}$ . Nesse caso, o critério de pesquisa de raízes de  $f$  pertencentes ao corpo de frações do domínio de fatoração única  $\mathbb{Q}[q]$  (veja, por exemplo, a Seção 2.2 de [5] ou o problema 2.9.1 de [2]), juntamente com (3.2), permite concluir que  $g(q) \mid 1$  e  $h(q) \mid 2$  em  $\mathbb{Q}[q]$ . Mas, como  $\mathbb{Q}[q] \simeq \mathbb{Q}[Y]$ , isso garante que  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Então, novamente por (3.2), temos

$$q^2 = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 1}{4\alpha} \in \mathbb{Q}, \quad (3.3)$$

um absurdo.

Por fim, argumentando por contradição, suponha que seja possível utilizar um compasso e uma régua sem marcas para construir o triângulo  $ABC$ , conhecidos os comprimentos  $p = 1$  e  $q$ , com  $q > 0$  transcendente. Recordando a discussão da seção anterior, isto significa que existe uma sequência finita de construções elementares que nos permite obter o comprimento  $\frac{1}{b} = \frac{1}{b}$  (uma vez que estamos assumindo  $p = 1$ ). De outra maneira,  $\frac{1}{b}$  é construtível a partir de  $\mathbb{Q}(p, q) = \mathbb{Q}(q)$ , de forma que, pelo Teorema 2.3, o grau  $[\mathbb{Q}(q)(1/b) : \mathbb{Q}(q)]$  deve ser uma potência de 2. Contudo, uma vez que  $f$  é irredutível em  $\mathbb{Q}(q)[X]$ , temos

$$[\mathbb{Q}(q)(1/b) : \mathbb{Q}(q)] = \partial_{1/b|\mathbb{Q}(q)} = \partial f = 3,$$

uma contradição.

**Observação 3.1.** Defina  $\mathbb{Z}[q]$  como o conjunto das expressões como em (2.1), com  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_i \in \mathbb{Z}$  para  $0 \leq i \leq n$ . A demonstração do Teorema 1.1 ainda funciona, sem alterações, se  $q > 0$  for tal que  $\mathbb{Z}[q]$  é um domínio de fatoração única e [consoante (3.3)]  $q^2$  não é racional. Uma vez que não nos foi possível exibir exemplos simples dessa situação com  $q > 0$  algébrico, optamos por nos restringir ao caso em que  $q$  é transcendente. De todo o modo, uma análise mais detalhada do caso em que  $q$  é algébrico levaria-nos rapidamente ao reino da Teoria Algébrica dos Números e tornaria a nossa exposição muitíssimo menos elementar.

## REFERÊNCIAS

[1] S. Abbott. *Understanding Analysis*, segunda edição. Nova Iorque, Springer, 2016.

[2] R. Ash. *Basic Abstract Algebra*, primeira edição. Mineola, Dover, 2007.

[3] A. Caminha. *An Excursion Through Elementary Mathematics, Volume II: Euclidean Geometry*. Cham, Springer, 2018.

[4] D. G. de Figueiredo. *Números Irracionais e Transcendentes*, terceira edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[5] A. Garcia e Y. Lequain. *Elementos de Álgebra*, sexta edição. Projeto Euclides, IMPA, 2015.

[6] A. Golçalves. *Introdução à Álgebra*, quinta edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[7] C. R. Hadlock. *Field Theory and its Classical Problems*. Washington, MAA, 1978.

[8] I. N. Herstein. *Topics in Algebra*. New York, John Wiley & Sons, 1975.

[9] P. Minorescu e L. Panaitopol. “The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths”. *Amer. Math. Monthly* 101 (1994), 58-60.

[10] F. Neiss. “Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden”. *J. Reine Angew. Math.* 177 (1937), 129-133.

Os autores gostariam de agradecer ao revisor pelas valiosas observações.

### SOBRE OS AUTORES

**Antônio Caminha** é professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, em Fortaleza, Brasil, desde 2004. Integra o grupo de Geometria Diferencial, concentrando as suas investigações em temas ligados a estruturas geométricas em variedades riemannianas e lorentzianas. Publicou vários artigos de pesquisa e orientou diversos alunos de mestrado e doutorado. É autor da coleção *An Excursion Through Elementary Mathematics*, publicada pela Springer Nature e dedicada às Olimpíadas de Matemática.

**Alberto Maia** é professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, em Fortaleza, Brasil, desde 2007. Integra o grupo de Álgebra, concentrando as suas investigações em temas ligados à Álgebra Comutativa e à Geometria de Curvas Algébricas.



NUNO CAMARNEIRO  
Universidade  
de Aveiro  
nfc@ua.pt

## DEFINIR O TEMPO

O tempo perguntou ao tempo quanto tempo o tempo tem, o tempo respondeu ao tempo que o tempo tem tanto tempo quanto tempo o tempo tem. Esta lengalenga foi, para muitos, a primeira abordagem a uma questão antiga, provavelmente tão antiga quanto a humanidade.

**P**rocuro no Houaiss a definição da palavra “tempo” e obtenho:

*Duração relativa das coisas que cria no ser humano a ideia de presente, passado e futuro; período contínuo no qual os eventos se sucedem.*

Insisto com o dicionário e procuro “duração”:

*Acto, processo ou efeito de durar, continuidade indefinida de tempo.*

Insisto, vou à procura da palavra “período”, eis o que surge:

*Tempo que transcorre entre duas datas ou dois acontecimentos*

Não há forma de escapar, definimos o tempo a partir da noção de tempo, é uma serpente que morde a cauda, o “ou-robros”, cuja primeira representação conhecida data de 14 B.C., no túmulo de Tutancámon.

O tempo é o tempo, uma tautologia sem remédio. Ou não? São célebres as palavras de Santo Agostinho a esse propósito:

*Que é, pois, o tempo? Se ninguém me pergunta, eu sei; mas se quiser explicar a quem indaga, já não sei. Contudo, afirmo com certeza e sei que, se nada passasse, não haveria tempo passado; que se não houvesse os acontecimentos, não haveria tempo futuro; e que se nada existisse agora, não haveria tempo presente.*

O tempo é memória, experiência e expectativa, será isso, Santo Agostinho?

Outros tentaram pensar “fora da caixa”, o físico Richard Feynman:

*O tempo é o que acontece quando nada mais acontece.*

O também físico John Wheeler:

*O tempo é a forma da Natureza impedir que aconteça tudo de uma vez.*

O escritor Jorge Luís Borges:

*O tempo é a substância de que sou feito.*

Ou o nosso Bernardo Soares:

*Ouçó cair o tempo, gota a gota, e nenhuma gota que cai se ouve cair.*

Todas dizem, sem muito explicar, o tempo escapa-nos, por entre os dedos e os dias, por entre as palavras e até as fórmulas. Há quem o tente negar, como o físico inglês Julian Barbour que, em 1999, publicou o livro “The End of Time”, onde tenta reformular a física eliminando a variável tempo.

Einstein trocou-nos as voltas e entreteve-se a contrair e a distender o tempo de acordo com os campos gravíticos e a velocidade a que nos movemos, descreveu-o como uma outra dimensão, uma parte de um contínuo espaço-tempo, mas haveremos de lá voltar.

O conceito permanece obscuro, ou pelo menos difícil. Conhecemos o tempo, mas não o sabemos explicar. Será coisa humana ou autónoma? Existirá tempo para lá da nossa percepção e mortalidade?

A ciência, avessa ao mistério, trata-o com uma letra minúscula, “t”, e define o segundo como “a duração de 9192631770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de cézio-133”. É muito sofisticado, mas pouco satisfatório.

Por ora, vamos fazendo como Agostinho, agarrados a uma resposta que não podemos dar se alguém nos perguntar.

## GONÇALO MORAIS CONVERSA COM HUGO MESSIAS

Muitos de nós sentimos algures nas nossas vidas o fascínio da observação astronómica. Alguns fazem disso vida. Esse é o caso do Hugo Messias, doutorado em Física pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Faz parte da equipa que conseguiu pela primeira vez *fotografar* um buraco negro, acontecimento celebrado a 10 de abril de 2019. Este é um resumo da conversa que tivemos acerca do seu trabalho e do fascínio primordial que ainda hoje sente pela Astrofísica.



GONÇALO MORAIS  
Instituto Superior de  
Engenharia, Lisboa  
[gmorais@adm.isel.pt](mailto:gmorais@adm.isel.pt)

**GONÇALO** Tu começaste a estudar Física aqui na Faculdade de Ciências...

**HUGO** Sim, fiz a licenciatura em Física pré-Bolonha, ou seja, quatro anos, os primeiros dois de Física e os restantes na especialização de Astronomia e Astrofísica. No ano em que poderia iniciar o mestrado na mesma área, este não abriu. Nesse momento não me passou pela cabeça ir para fora, para poder continuar os meus estudos. Uma das razões para isso foi terem-me informado de que poderia começar diretamente o doutoramento, apesar de ter terminado o curso com média de 15 e não com média de 16, que era a condição para o poder fazer. Tentei mesmo assim seguir esta via e tive um ano de interregno entre o final do curso, a faculdade ter-me aceitado como aluno de doutoramento e a bolsa da FCT ter sido disponibilizada. Terminei em 2011 e fui para Concepción, no Chile, para trabalhar na universidade local, mas já com fundos do ALMA (Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array) CONICYT.

**GONÇALO** Podes explicar um pouco qual a organização do ALMA? Sei que se trata de um consórcio...

**HUGO** No caso do ALMA, é um consórcio de vários consórcios. No Chile está a maior área coletora de luz, cerca de 60% da área mundial.

**GONÇALO** Certamente que o Chile não foi escolhido ao acaso...

**HUGO** O Norte do Chile está entre os dois mil e os cinco mil metros de altitude e tens menos água na atmosfera...

**GONÇALO** Apesar de estares relativamente perto do mar...

**HUGO** Sim, é verdade. Mas há zonas muito secas porque as nuvens que vêm do mar sobem a primeira cordilheira e, ao descerem, chove. Quando sobem novamente, já têm menos quantidade de água. Repetindo este processo

sucessivamente, consegues obter uma zona muito seca, mesmo estando relativamente perto do mar. O único problema que o ALMA tem com humidade é quando ela vem da Amazónia, sobretudo em fevereiro, em pleno verão, que é quando chove mais.

O ALMA são quatro parceiros: o Chile, como país anfitrião; a Europa, através do consórcio European South Observatory, formado por 16 países europeus, entre os quais está incluído Portugal; um consórcio da América do Norte, formado pelos Estados Unidos da América e pelo Canadá e com uma participação de Taiwan através de um instrumento; e um consórcio asiático formado pelo Japão, a Coreia do Sul e Taiwan. Pelo que recorde, no início, a ideia partiu do consórcio norte-americano e asiático. Quando o Japão estava prestes a desistir, a Europa apareceu e tornou tudo possível.

**GONÇALO** Financeiramente?

**HUGO** Em primeiro lugar, financeiramente e, posteriormente, também com uma componente tecnológica. O que se passa é que cada antena no ALMA tem espaço para dez tímpanos ou recetores, estando neste momento instalados apenas oito. Estes recetores provêm dos vários consórcios.

**GONÇALO** É preciso esclarecer que estamos a falar, não dos habituais telescópios óticos, mas de rádio telescópios.

**HUGO** Sim, no ALMA estamos a falar de rádio telescópios. São 66 antenas espalhadas pelo planalto a cinco mil metros de altitude.

**GONÇALO** Num planalto...

**HUGO** Sim, num planalto a perder de vista. Nós operamos o telescópio a três mil metros de altitude. De facto, dois mil noventa e qualquer coisa, porque são normas americanas e são medidas em pés. A segurança do trabalho obriga a que estejamos em permanência abaixo dessa cota. Acima dessa marca incorremos em problemas derivados de trabalharmos em altitude e complicaria todo o processo de monitorização do estado de saúde dos trabalhadores. Os meus colegas que têm de ir lá acima são obrigados a passar por uma bateria de testes.

**GONÇALO** Tu nunca vais lá acima?

**HUGO** Eu não precisaria de ir lá acima, mas vou algumas vezes por diversão ou para acompanhar pessoas que nunca tiveram oportunidade de visitar as antenas.

**GONÇALO** E há algum telescópio ótico nesse planalto?

**HUGO** Um telescópio ótico não necessita de estar a altitudes tão altas. A razão é simples: nós conseguimos aquecer a água no micro-ondas porque a água absorve a radiação. Da mesma maneira, a água que existe na atmosfera também vai absorver esta radiação.

No caso dos telescópios óticos a perturbação da atmosfera verifica-se por outra razão. O cintilar das estrelas deve-se quase totalmente à turbulência atmosférica. Neste momento está a ser instalado um telescópio de infravermelho próximo/infravermelho médio.

**GONÇALO** Mas o Hubble é um telescópio ótico...



HUGO Ótico e infravermelho próximo. Existe uma forma de corrigir a turbulência da atmosfera. Basicamente, com um laser excitas um átomo na alta atmosfera e consegues medir a turbulência. Com essa medida vais movendo o espelho para corrigires a turbulência. A isto chama-se ótica adaptativa.

GONÇALO Mas nós conseguimos discernir estrelas individuais em galáxias fora da nossa...

HUGO Conseguimos visualizar estrelas gigantes na galáxia de Andrómeda e nas nuvens de Magalhães...

GONÇALO Estamos a falar de distâncias absurdas...

HUGO A galáxia de Andrómeda fica a 2.5 milhões de anos luz o que cosmológicamente não é nada. (Risos)

GONÇALO A perturbação total de uma observação desse tipo deve ser gigantesca!

HUGO Em primeiro lugar existe a turbulência gerada pelas estrelas da nossa própria galáxia. Depois existem poeiras e perturbações magnéticas, entre outras. A isto dá-se o nome de perturbação de primeiro plano. Opticamente Andrómeda tem o tamanho da Lua, pelo que, através dos mapas que existem destas perturbações podemos fazer uma correcção até um certo limite.

GONÇALO Isso é um aspecto interessante, porque quando eu espreitei os teus artigos, percebi que grande parte do trabalho de um astrofísico é tratamento de uma quantidade enorme de dados...

HUGO Sim, tem muito tratamento estatístico. Quando dizemos que uma galáxia tem uma certa massa, estamos a assumir uma série de pressupostos. Em primeiro lugar a função inicial de massa, ou seja, quantas estrelas se formaram, de entre todas as variantes possíveis...

GONÇALO Ou seja, estás a dizer que pode haver muita massa que está dentro da galáxia mas que não formou estrelas...

HUGO Exactamente... Quando estudo uma galáxia tenho de ter a noção que a massa estelar tem uma incerteza de um factor dois ou três, caso em que já é algo muito bom.

GONÇALO Ou seja, a massa pode ser duas ou três vezes maior! Em escalas colossais...

HUGO Sim, na nossa galáxia estamos a falar de  $10^{11}$ .

GONÇALO Um dos conceitos mais interessantes é o de matéria negra. Podias explicar o que é?

HUGO Matéria negra é tudo o que não é matéria bariónica [risos]! Ou seja, simplificando, é tudo o que não forma estrelas, planetas, átomos, nós, seres vivos...

GONÇALO Mas é algo que existe mesmo ou é apenas um conceito que é usado para explicar os erros dos modelos?

HUGO Há pessoas que tentam explicar matéria escura através de correções nas equações. Há, de facto, uma teoria bem estabelecida, designada por  $\Lambda$ -Cold Dark Matter ( $\Lambda$ -CDM), que dá uma separação de contribuições. Tens, em primeiro lugar, a parte da *energia escura*, que é uma força gravítica repulsiva. O que é? Ninguém sabe! Tens, em segundo lugar, a *matéria escura*. O que é? Ninguém sabe! Por fim, tens 5% de tudo que é matéria bariónica, que é o que nós observamos.

GONÇALO Isso é uma coisa fabulosa!

HUGO Sim! Energia escura e matéria escura são representações da nossa ignorância. Mas, apesar disso, como se comporta de uma maneira gravítica e não interage quimicamente, conseguimos descrevê-la matematicamente, ou seja, só tens de te preocupar com as equações da gravitação...

GONÇALO É só massa...

HUGO Isso mesmo...

GONÇALO Não tem magnetismo...

HUGO Em princípio, não. Outras pessoas investigam as consequências de esta matéria escura ser composta por neutrinos, por partículas muito massivas mas que interagem pouco. Estas consequências deveriam ser observadas de uma determinada forma, por exemplo, através de uma transição muito energética nos raios X.

GONÇALO Algo que achei extraordinário nos teus traba-



lhos é terem um aspeto prático exuberante. Andas mesmo à procura das coisas...

HUGO Às vezes, sim. Outras vezes, há pessoas que dizem que segundo a teoria vigente estas galáxias não deveriam existir, porque com tal potencial gravítico deveria haver muito mais gás a entrar para dentro da galáxia e deveria haver uma maior taxa de formação de estrelas...

GONÇALO Desculpa interromper-te mas isso é outro ponto interessante, o facto de não se observar. A escala de tempo a que estas transformações ocorrem é gigante quando comparada com a escala de tempo humana.

HUGO Tudo se baseia no facto de a luz ter uma velocidade finita. Ou seja, estás a observar a Lua há um segundo, o Sol há oito minutos. A primeira coisa que fazemos é estabelecer uma banda temporal que categoriza temporalmente o que observamos. De seguida, categorizo a população de galáxias em tempo, ou seja, *look-back time*, e em termos de massa. Assim consigo para cada tipo de galáxia, com um determinado tipo de massa, observar a diferentes escalas de tempo.

GONÇALO Ou seja, fazes uma amostragem...

HUGO Sim, e aí entra a *variação cósmica*, que é eu olhar para um ponto do Universo e fazer uma contagem. Esta



contagem varia consoante o ponto para onde eu olho. Quando observamos uma galáxia e ela contradiz o modelo, temos de perceber se é um problema da parte teórica ou um problema da observação.

Existe sempre um problema na parte dos modelos. Voltamos ao que falámos há pouco, acerca do grau de incerteza. Quando o que observas está na cauda da distribuição, terás de ter uma amostra maior para que o que observas seja mais provável de acontecer. Por exemplo, para certas observações de buracos negros supermassivos, a estimativa da massa pode ter um fator de incerteza de seis.

GONÇALO Falemos então de buracos negros e do trabalho que desenvolveste no ALMA. Porquê apontar para aquele buraco negro em particular? Existem vários buracos negros identificados, certo?

HUGO Sim, existe o *Sloan Digital Sky Survey Quasar Catalog* (SDSS), que, como o próprio nome indica, é um catálogo de quasares...

GONÇALO O que é um quasar?

HUGO Um quasar é *quasi-stellar object*, ou seja, um buraco negro tão massivo que a radiação que sai dele é mais intensa do que a da própria galáxia. Como estão muito longe, quando foram observados pela primeira vez pensou-se que seriam estrelas. Só quando se olhou para o espectro é que se percebeu que eram, de facto, galáxias. Daí o nome. No SDSS estão catalogados mais de meio milhão de quasars.

GONÇALO Mas existem buracos negros que não são quasares...

HUGO Sim, os quasares do SDSS são quasares que descobriste através de uma cor muito brilhante no ótico e no ultravioleta, não sendo por isso obscurecidos por poeira. Hoje sabe-se que muita da acreção feita pelos buracos negros acontece quando há muita poeira na galáxia. E estes não são observáveis da mesma forma que os do SDSS. Isto implica que há muitos mais que ainda estão por descobrir.

GONÇALO E o que vocês em particular fotografaram? Se bem que aquilo não é uma fotografia, mas sim uma reconstrução, certo?



**HUGO** Sim! A ideia vem do final dos anos noventa. Deram-se conta de que se tivéssemos um telescópio do tamanho da Terra e observássemos num determinado comprimento de onda, conseguiríamos ver este anel de lente gravitacional e a sombra no meio que era a indicação do buraco negro supermassivo.

Faltava depois escolher o buraco negro. Uma das hipóteses era o que está no centro da nossa galáxia, porque está perto. Quando se observaram as galáxias mais próximas, percebeu-se que o melhor candidato seria o da M87<sup>1</sup>.

**GONÇALO** E como é que conseguiram obter um telescópio do tamanho da Terra? E, já agora, porquê a necessidade de terem um telescópio tão grande?

**HUGO** Em primeiro lugar, quanto maior for a antena, maior será a abertura. Em segundo lugar, estes objetos estão tão longe que é como se estivessem no infinito...

**GONÇALO** Ou seja, estás a regular o teu telescópio para ter qualquer coisa como a distância hiperfocal, é como na fotografia normal...

**HUGO** Sim, mas o que separa da fotografia usual é o facto de as distâncias serem enormes. Como fisicamente é impossível construir um telescópio do tamanho da Terra,

o que se faz é interferometria. Exemplificando, ao colocares estações em vários pontos da Terra, observando um mesmo ponto no céu simultaneamente, recibes esta radiação, gravas tanto a intensidade como a fase da mesma. Depois existem correladores que recebem os vários sinais e juntam-nos todos.

Um interferómetro é algo que se pode explicar através de um exemplo do qual algumas pessoas não gostam muito: tens duas orelhas cujos tímpanos captam sinais que são processados pelo cérebro.

**GONÇALO** Daí teres referido que as antenas têm tímpanos...

**HUGO** Exatamente! Por isso é que quando estás a falar com uma pessoa, estás a falar de frente para ela, de modo a que os tímpanos estejam à mesma distância do emissor. A isto chama-se estar em fase. Neste caso, as ondas estão em processo construtivo. No caso de estarem desfasadas estão em processo destrutivo porque vão perturbar-se.

**GONÇALO** Mas à distância que nós estamos dos objetos que estamos a observar, não é como se os sensores estivessem todos em fase?

**HUGO** Não porque estás a captar o sinal numa banda

em que a distância entre os recetores já é significativa. No caso das nossas observações, e por causa da frequência que estamos a usar, temos de quantificar as diferenças das distâncias que a radiação percorreu até aos diferentes recetores com um erro inferior a 1mm.

Uma vez tendo conseguido isto, conseguimos descrever a morfologia do objeto que estamos a observar. A distância neste caso só é importante para conseguir corrigir o desfasamento entre as várias ondas.

**GONÇALO** Mas, do ponto de vista teórico, essa correlação entre as ondas já a podias fazer há muito tempo...

**HUGO** Sim, para comprimentos de onda maiores, ou seja, com precisão menor. Uma das coisas de que precisas, por exemplo, é que os detetores funcionem a uma temperatura suficientemente baixa para que a radiação por eles emitida não interfira com a radiação captada. No caso do ALMA, os recetores funcionam a 15K, 8K e a 4K...

**GONÇALO** Ou seja, tão baixo como 269 graus negativos...

**HUGO** Depois necessitas de um relógio altamente preciso para conseguires colocar os vários sinais em fase. São relógios que se atrasam um segundo a cada vinte milhões de anos.

**GONÇALO** Isso que descreveste parece o problema da longitude a uma escala cósmica.

**HUGO** Sim, e por isso eu digo que isto foi um feito também do ponto de vista tecnológico. Não direi da mesma magnitude do feito necessário para captar as ondas gravitacionais, em que foi criado um observatório totalmente novo para tentar descobrir uma coisa que ninguém sabia se existia ou não, a uma escala menor do que um átomo.

**GONÇALO** E qual a tua participação em todo este projeto? Imagino que seja uma equipa gigantesca.

**HUGO** O artigo é assinado por mais de 200 pessoas. Foi publicado no dia 10 de abril, num número especial do *The Astrophysical Journal Letters*<sup>2</sup> totalmente dedicado a esta descoberta, no mesmo dia da apresentação pública dos resultados.

A minha participação iniciou-se em janeiro de 2017 e passou por estar no terreno a calibrar as várias antenas para seguir o programa de observações estabelecido. O

problema que surge pelo facto de estarmos a usar muitas antenas faz com que esta calibração tenha de ser feita *in vivo*.

**GONÇALO** Uma última questão prende-se com a parte tecnológica do projeto. Uma coisa é discutir ciência, outra coisa é tecnologia. Num projeto destes existe muito conhecimento tecnológico que é transmitido entre as várias partes envolvidas...

**HUGO** Sim e não. Tudo é gerido em pezinhos de lã. Por exemplo, aquando da construção das antenas, o pavilhão dos Estados Unidos era um pavilhão em que se fosses europeu ou japonês não podias entrar. Só entravam pessoas ligadas a esse consórcio. O mesmo acontecia nos outros consórcios. Havia componentes que eram enviadas já montadas.

Quanto aos recetores, como se trata de uma coisa tão específica para a Astronomia, no fim ganhas muito mais partilhando conhecimento do que se o fechares. Este processo fez com que os recetores do ALMA sejam 25 vezes mais precisos do que o que existia até então. Toda esta tecnologia dos recetores está lá exposta para que todos possam consultar.

**GONÇALO** Hugo, obrigado por te teres disponibilizado para esta conversa.

**HUGO** Obrigado!

---

<sup>1</sup>Galáxia na constelação da Virgem, a 53 milhões de anos-luz da Terra..

<sup>2</sup>Disponível em <https://iopscience.iop.org/issue/2041-8205/87511>.



### A MAIOR ESCOLA DE VERÃO DA SPM

A Escola de Verão 2019 da Sociedade Portuguesa de Matemática (EVSPM2019) teve início na tarde do dia 2 de julho, nas instalações do Agrupamento de Escolas D. Filipa de Lencastre, Lisboa, e prolongou-se até ao dia 5 de julho. Com mais de 200 participantes e pela primeira vez a decorrer numa escola de ensino secundário, a EVSPM2019 foi a maior edição já organizada pela SPM. Foram quatro dias repletos de sessões plenárias, mesas redondas, palestras, cursos e minicursos.

A primeira sessão plenária foi apresentada por Inger Enkvist, da Universidade de Lund na Suécia, sob o tema “Aprender com outros países. Evitar caminhos que levam a maus resultados”, uma análise de desempenho de diferentes países no PISA. No dia 3 de julho, quarta-feira, o especialista em educação Hung-Hsi Wu, da Universidade da Califórnia, Berkeley, falou da importância de definições claras na aprendizagem da Matemática desde os primeiros anos de escolaridade e Nuno Crato, ex-ministro da Educação e professor no Instituto

Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa, discutiu questões sobre o ensino da matemática e os erros cometidos. No dia 4, quinta-feira, Henrique Leitão, Prémio Pessoa 2014 e professor da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa apresentou a palestra “A questão do calendário em Portugal no séc. XVI”. No último dia, 5 de julho, Margarida Carvalho, da Universidade de Montreal, encerrou o evento com a sessão sobre “Teoria dos jogos na prática”.

Na quinta-feira de manhã, houve ainda uma emotiva mesa redonda sobre as Olimpíadas Portuguesas de Matemática, que contou com depoimentos de antigos olímpicos. Todos mencionaram como a participação nas Olimpíadas teve impacto na definição do seu percurso profissional. Participaram nesta mesa redonda a professora Joana Teles, responsável da SPM pelas Olimpíadas Portuguesas de Matemática, o professor António Salgueiro, da Comissão de Problemas, o neurocientista Miguel Castelo Branco, João Pina, CEO da Skima, e Henrique Navas, aluno do Instituto Superior



Técnico e o primeiro aluno a ganhar seis medalhas consecutivas nas Olimpíadas Portuguesas de Matemática. Numa época em que terminou parte do congelamento das carreiras dos professores é de realçar que a Escola de Verão teve duas ações de formação acreditadas como cursos de formação pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua (CCPFC).

Esta edição da EVSPM2019 foi uma organização conjunta da SPM e do Agrupamento de Escolas D. Filipa de Lencastre. Contou ainda com o apoio do Instituto Superior Técnico e do Instituto Nacional de Estatística, que acolheram algumas palestras sobre temas como Censos, Big Data, Estatística e Criptografia.

Destinada a professores do ensino básico e secundário, professores do ensino superior, estudantes e a todos os que gostam de Matemática e que com ela trabalham, a Escola de Verão é um evento que tem por objetivo divulgar novos meios de descoberta da cultura e do conhecimento matemáticos, assim como dar formação específica em certas áreas da Matemática.



## TARDES DE MATEMÁTICA NO MUSEU DA CIÊNCIA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Desde 1987 que a Delegação Regional do Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) tem vindo a desenvolver o projeto “Tardes de Matemática”, em parceria com as escolas da Região Centro. Esta iniciativa tem desempenhado ao longo das últimas três décadas um papel importante na divulgação da Matemática junto dos alunos dos ensinos básico e secundário, envolvendo atualmente mais de 3000 estudantes por ano. A continuidade deste projeto deve-se, de um modo especial, à receptividade e interesse manifestados pelas escolas da Região Centro, à diversidade da oferta das atividades propostas, ao entusiasmo demonstrado pelos alunos e ao envolvimento de professores de todos os níveis de ensino, desde o básico ao superior. Durante o ano de 2019, com o intuito de trazer a comunidade escolar e a sociedade em geral à Universidade de Coimbra (UC) e aos locais onde se “faz” Matemática, o Museu da Ciência da UC associou-se à Delegação Regional do Centro da SPM na organização de Tardes de Matemática. O último ciclo de palestras deste ano decorrerá de setembro a novembro e contará com a presença de três docentes da Universidade de Coimbra. Na primeira palestra, “Jogos e Estratégias”, apresentada por João Gouveia, serão desvendadas as estratégias vencedoras de alguns jogos matemáticos. Maria da Graça Temido, com o tema “Matemática e Futebol”, irá explicar porque é que golos, vitórias, derrotas, apostas e odds fazem parte de um mundo onde a matemática e a imprevisibilidade do futebol se combinam de forma tão bela quanto rigorosa. Na última sessão, “A Magia da Matemática”, Jorge Picado revelará alguns truques matemáticos que ilustram, de forma recreativa, o alcance e a eficácia da álgebra e da sua teoria de códigos, e mostram como a matemática é fascinante e tem mudado o nosso mundo. Veja toda a programação de 2019 em <http://www.museudaciencia.org/>. As Tardes de Matemática decorrem neste formato mais alargado, dirigido ao público em geral, desde 2001, promovidas pela SPM e pelas suas delegações regionais. Pode consultar a programação geral em [https://www.spm.pt/tardes\\_de\\_matematica/](https://www.spm.pt/tardes_de_matematica/). A informação sobre a participação das escolas no projeto Tardes de Matemática na Região Centro pode ser consultada em [https://www.spm.pt/centro/tardes\\_matematica](https://www.spm.pt/centro/tardes_matematica).



### VI FEIRA DA MATEMÁTICA – 25 E 26 DE OUTUBRO

A Sociedade Portuguesa de Matemática alia-se mais um ano ao Museu Nacional de História Natural e da Ciência, em Lisboa, na organização da VI Feira da Matemática, que decorrerá nos dias 25 e 26 de outubro. Tal como em anos anteriores, o primeiro dia é exclusivo para escolas e o segundo está aberto ao público em geral. A pré-inscrição para as escolas deverá ser efetuada até 15 de Setembro. A Feira é de entrada livre e a participação em todas as atividades é gratuita. Mais informações em <https://museus.ulisboa.pt/pt-pt/feira-da-matematica-2019>. Marque na sua agenda!



### **KAREN UHLENBECK É A PRIMEIRA MULHER A CONQUISTAR O PRÊMIO ABEL**

Academia Norueguesa de Ciências e Letras atribuiu terça-feira, 19 de março, o Prêmio Abel a Karen Keskulla Uhlenbeck. Pela primeira vez o galardão, geralmente considerado equivalente ao Nobel da Matemática, foi conquistado por uma mulher. A americana de 76 anos é especialista em equações de derivadas parciais e desde criança que sonhava ser cientista.

De acordo com declarações do presidente da comissão Abel, Hans Munthe-Kaas, Karen Uhlenbeck recebe o Prêmio Abel 2019 pelo seu trabalho fundamental em análise geométrica e teoria de calibre, que transformou dramaticamente o cenário matemático. Afirmou ainda que “as suas teorias revolucionaram a nossa compreensão de superfícies mínimas, como a formada por bolhas de sabão, e problemas de minimização gerais em dimensões mais altas”. Natural de Cleveland, Karen K. Uhlenbeck foi professora da Universidade do Texas, em Austin, até 2014. Hoje, é também uma forte defensora da igualdade de gênero na ciência e na matemática. Uhlenbeck é professora visitante na Universidade de Princeton e professora associada do Instituto de Estudos Avan-

çados (IAS) dos Estados Unidos. É ainda uma das fundadoras do Instituto de Matemática Park City (PCMI) no IAS, que visa formar jovens investigadores e promover a compreensão mútua dos interesses e dos desafios na matemática. Uhlenbeck também é co-fundadora do Programa Women and Mathematics (WAM) do mesmo Instituto, criado em 1993, para recrutar e habilitar mulheres para liderar na investigação matemática em todas as etapas das suas carreiras académicas. Quando Karen K. Uhlenbeck apresentou uma sessão Plenária no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) em Kyoto, no Japão, em 1990, tornou-se na segunda mulher na história a fazê-lo. A primeira foi Emmy Noether em 1932. Para Jim Al-Khalili, da Royal Society Fellow, “o reconhecimento pelo seu trabalho deveria ter sido muito maior, pois o seu trabalho levou a alguns dos avanços mais importantes da matemática nos últimos 40 anos.” O Prêmio Abel foi entregue numa cerimónia oficial em Oslo, no dia 21 de maio, pelo rei da Noruega, Harald V. A matemática recebeu perto de 620 mil euros.

## A SPM TEM TRÊS NOVOS SÓCIOS HONORÁRIOS

A Sociedade Portuguesa de Matemática nomeou três novos sócios honorários durante a sua reunião da Assembleia Geral que decorreu no passado dia 28 de março, no Instituto Superior de Engenharia e Gestão, em Lisboa: Graciano Neves de Oliveira, João Paulo Carvalho Dias e Manuel Leite Arala Chaves.



**Graciano Neves de Oliveira** licenciou-se em Matemática na Universidade de Coimbra em 1961 e veio a doutorar-se na mesma Universidade em 1969 com uma dissertação sobre matrizes estocásticas, depois de passar algum tempo em Oxford. Foi professor nas universidades de Coimbra, Lisboa, Recife e Macau

e construiu uma extensa obra de investigação matemática, em áreas como Álgebra Linear e Multilinear, Problemas Inversos em Teoria das Matrizes e Combinatória. Os seus trabalhos tiveram forte repercussão nacional e internacional. Graciano de Oliveira foi um dos grandes dinamizadores do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. Programas de investigação que lançou continuam a ser estudados e prosseguidos em vários países, tal como em Portugal, podendo encontrar-se rasto da sua influência praticamente em todas as universidades portuguesas. Graciano de Oliveira foi sempre um sócio muito ativo da Sociedade Portuguesa de Matemática. Foi Presidente da Delegação Regional Centro de 1978 a 1980, Secretário Geral de 1986 a 1988 e Presidente de 1996 a 2000. No seu segundo mandato foi um dos responsáveis pelo renascimento da revista "Gazeta de Matemática".



**João Paulo Carvalho Dias** licenciou-se em Ciências Matemáticas na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa com a classificação final de 18 valores, em 1966. Após a Licenciatura trabalhou sob orientação de José Sebastião e Silva em Análise Funcional e Teoria das Distribuições.

Doutorou-se na Universidade de Paris VI em 1971 (Thèse d'État), enquanto bolseiro da Fundação Calouste Gulbenkian, sob orientação de Jacques-Louis Lions, com a tese intitulada Une classe de problèmes variationnels nonlinéai-

res de type elliptique ou parabolique, tendo obtido menção Très Honorable. Enquanto investigador, João Paulo Carvalho Dias teve um papel fundamental na introdução e no desenvolvimento em Portugal da abordagem moderna das Equações Diferenciais com Derivadas Parciais e suas aplicações. Deve-se-lhe uma vasta lista de publicações científicas de forte impacto internacional (cerca de uma centena) na área das Equações Diferenciais com Derivadas Parciais, assim como a projeção internacional da revista científica *Portugaliae Mathematica*, da qual foi Diretor de 1996 a 2007. Recebeu importantes prémios científicos e foi agraciado, pelo Presidente da República, com o Grau de Grande Oficial da Ordem de Santiago da Espada.



**Manuel Leite Arala** terminou a licenciatura em Ciências Matemáticas, em 1959, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto com 18 valores. De 1959 a 1962 esteve em Paris, na qualidade de bolseiro da Fundação Calouste Gulbenkian, tendo sido orientado pelos professores Henri Cartan

e Jean Cerf. Doutorou-se em 1967 em Ciências Matemáticas na Universidade do Porto com a tese "Secções e isotopias em alguns espaços funcionais", tendo sido aprovado com 19 valores. Toda a sua carreira académica decorreu na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Começou como 2.º assistente em 1962 e foi nomeado Professor Catedrático em 1973. Algumas áreas que têm, ou tiveram, expressão relevante no Departamento de Matemática da FCUP, como as topologias ou, mais tarde, os sistemas dinâmicos, resultaram das sementes iniciais lançadas por Arala Chaves. Foi participante ativo nos órgãos de gestão do Departamento de Matemática ou da Faculdade. As suas intervenções fizeram com que tivesse uma marcante influência na política académica, tanto no período anterior a Abril de 1974, como no período que imediatamente se lhe seguiu. Há mais de vinte anos que Arala Chaves iniciou um projeto na área da divulgação Matemática, tendo criado em 1999 a Associação Atractor, da qual tem sido diretor.



## ALAN TURING É A FIGURA DAS PRÓXIMAS NOTAS DE 50 LIBRAS



O matemático britânico Alan Turing será o rosto da próxima nota de 50 libras, que deverá entrar em circulação no final de 2021.

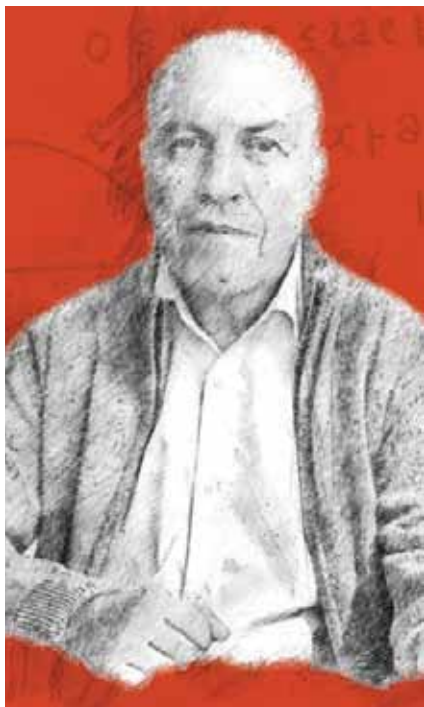
O desenho da nota foi revelado no passado dia 15 de julho pelo Banco de Inglaterra, que já tinha anunciado em 2018 que tinha escolhido a

ciência como tema da nova nota. Foram propostas 989 personalidades, entre as quais estavam Stephen Hawking, Ada Lovelace e Charles Babbage, mas depois de seis semanas de consulta pública Alan Turing foi o escolhido.

Conhecido como “o pai da computação” e pelo seu importante trabalho de descodificação de mensagens nazis durante a II Guerra Mundial, Turing foi também pioneiro no campo da inteligência artificial.

Além da fotografia do matemático e de alguns outros elementos a ele inerentes, a nota contém ainda uma citação de Alan Turing, retirada de uma entrevista dada em 1949 ao jornal britânico The Times: “Isto é apenas um prelúdio do que está para vir, e apenas a sombra do que vai acontecer.

## JANTAR DE HOMENAGEM A LUIS SANCHEZ



No dia 5 de setembro, realizar-se-á um jantar de homenagem a Luís Sanchez, professor catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, por ocasião da sua jubilação. O jantar de homenagem terá lugar no Salão Nobre do Instituto Superior de Economia e Gestão e reunirá os seus colegas, amigos e alunos. Terá início às 19h30 com Welcome Drink no Terraço do Quelhas. O jantar terá o custo de 45 euros e as inscrições deverão ser feitas até 30 de julho, através dos seguintes meios.

Para se inscrever no jantar, dirija-se a:

RODRIGO DE OLIVEIRA MARQUES  
Centro de Matemática,  
Aplicações Fundamentais  
e Investigação Operacional  
Faculdade de Ciências da  
Universidade de Lisboa, C6 -  
Piso 1, sala 6.1.03  
1749-016 Lisboa, Portugal

Ou contacte um dos organizadores:

MARIA DO ROSÁRIO GROSSINHO  
mrg@iseg.ulisboa.pt ;  
CARLOTA REBELO  
mcgoncalves@fc.ul.pt  
JOSÉ MARIA GOMES  
jm.gomes@fct.unl.pt ;  
RICARDO ENGUIÇA  
rroque@adm.isel.pt

Mais informações em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)

## PORTUGAL GANHA UMA MEDALHA DE PRATA E OUTRA DE BRONZE NAS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS

A delegação portuguesa conquistou uma medalha de prata, uma de bronze e quatro menções honrosas nas 60.<sup>as</sup> Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM) que decorreram em Bath, no Reino Unido, de 14 a 21 de julho. Esta é a maior competição internacional de matemática: contou com a participação de 112 países e mais de 600 alunos.

Kevin Pucci, aluno do 12.º ano da Escola Secundária Dr. Júlio Martins em Chaves, e David Nassauer, aluno do 12.º ano da Escola Secundária D. Filipa de Lencastre, em Lisboa, são os alunos que arrecadaram as medalhas. Pedro Costa Dias (12.º ano, Escola Alemã, em Lisboa), Tiago Marques (9.º ano, Colégio Internato Claret, em Pedroso), Rui Wang (11.º ano, Escola Secundária de Tomás Cabreira, em Faro) e João Rocha (11.º ano, Escola Secundária D. Filipa de Lencastre, em Lisboa) conquistaram as menções honrosas. Da comitiva fazem ainda parte Joana Teles da Sociedade Portuguesa de Matemática/Universidade de Coimbra e Rodri-

go Matias da Universidade de Coimbra. A cerimónia de encerramento decorreu no dia 21 de julho.

Portugal participou pela primeira vez nas OIM em 1989 e, desde então, já conquistou três medalhas de ouro (em 2011, 2012 e 2013), cinco de prata, 32 de bronze e 37 menções honrosas. Este ano, no total de todos os países participantes, foram atribuídas 52 medalhas de ouro, 94 de prata e 156 de bronze.

O ciclo das competições internacionais em 2019 fica completo com as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM), que terão lugar no México, em setembro.

A participação de Portugal nestas competições é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a seleção e preparação dos alunos está a cargo do Projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação, a Ciência Viva, o Novo Banco, a Fundação Calouste Gulbenkian e a Pathena apoiam a realização das Olimpíadas.

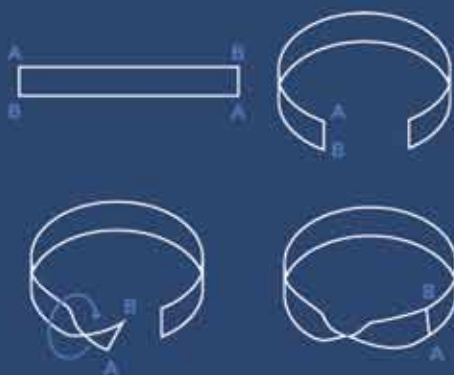


# QUER SER SÓCIO DA SPM?

Veja as vantagens e condições no verso.



CONSTRUA UMA  
BANDA DE MÖBIUS  
COM ESTA PÁGINA



## COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

## JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.  
Contacte-nos!

## VALOR DE QUOTAS 2017:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros  
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

Corporativo: 600 euros

## CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

## VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



## INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq  
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: [spm@spm.pt](mailto:spm@spm.pt)

[www.spm.pt](http://www.spm.pt)

## ESCOLA DE VERÃO DA SOCIEDADE PORTUGUESA

Uma escola ao serviço dos professores.

Pela primeira vez na sua história, a Escola de Verão da SPM realizou-se numa instituição do Ensino Secundário: a Escola Secundária D. Filipa de Lencastre. Pretendeu-se assim marcar a importância que a atual direção atribui ao ensino pré-universitário. Os conteúdos lecionados tradicionalmente nesse nível são naturalmente elementares. Contudo, o seu ensino está muito longe de ser trivial. Basta pensar, por exemplo, nos cerca de 2000 anos que separam Euclides de Newton e de Leibniz, pais do cálculo diferencial, hoje introduzido no 11º ano de escolaridade. Esta longa caminhada intelectual que vem desaguar num conceito estrutural da matemática moderna mostra bem a complexidade do tema e o quão difícil parece ser à partida formar alunos que dominem adequadamente as suas ideias-chave após uns meros 11 anos de estudos.

O ensino da matemática é, por natureza, um assunto polémico e pouco consensual. É frequentemente palco de inflamados conflitos de opiniões, expressos com uma convicção que parece até ser independente do nível de domínio que cada um tem desta disciplina, em termos da sua estrutura abstrata ou das suas verdadeiras aplicações ao mundo real. A SPM, enquanto sociedade científica, tem a obrigação de acompanhar a investigação moderna e mainstream sobre o tema. É inegável o papel cada vez mais central que a Psicologia Cognitiva e as Neurociências têm desempenhado na compreensão do que são os fenómenos de aprendizagem e de como essa compreensão pode ajudar os professores de todos os níveis a melhorarem as suas práticas. Uma parte da EVSPM debruçou-se sobre estes te-

mas. Na sessão Ensino e aprendizagem escolar: currículo, mitos e dados de investigação Joana Rato (CIIS-Universidade Católica), Helena Damião e Isabel Festas (Faculdade de Psicologia e Ciências de Educação da Universidade de Coimbra) fizeram o ponto sobre vários aspetos fulcrais deste debate: o que separa, em educação, um mito de um facto bem estabelecido, a multiplicidade das estruturas cerebrais envolvidas nos processos criativos, os modelos de Mayer & Alexander (2011) que delineiam as etapas a percorrer para uma aprendizagem com compreensão (por oposição à aprendizagem dita mecânica ou à aprendizagem dita parcial), os recentes trabalhos de Cowan (2008) sobre a forma como se relacionam os diferentes tipos de memória (memória de curto prazo, de trabalho e de longo prazo) ou a Teoria da Carga Cognitiva de Tricot & Sweller (2014). Esta sessão, tal como a palestra proferida por Nuno Crato (Universidade de Lisboa) - Sucesso Escolar Real, com ferramentas do século XXI - fez ainda um importante recapitulativo dos resultados de Geary (1995) e de Kirshner (2006) na área da psicologia evolutiva moderna. O conhecimento destes autores fornece sérias pistas sobre a forma mais eficaz de organizar o ensino da matemática. É fundamental integrar estes conhecimentos, sob pena de continuarmos a repetir ad nauseam slogans sem significado tangível que minaram os documentos curriculares nacionais no final do século XX, e que, muito infelizmente, parecem estar de regresso.

A EVSPM contou também com oradores internacionais de grande relevo. O Professor Hung-Hsi Wu, da Universi-

dade da Califórnia-Berkeley, falou aos professores da importância da introdução de definições precisas, ilustrando este aspeto com o ensino das frações no 1º ciclo. O seu livro Compreender os Números na Matemática Escolar, já traduzido para português, constitui uma importante obra para a estante de qualquer professor de matemática do Ensino Básico. A abordagem proposta, em tudo semelhante à que figura no Programa e Metas Curriculares, tem-se afirmado internacionalmente como uma séria alternativa à grosseira metodologia “holística”, que tem levado, em muitos países, a sérias dificuldades na compreensão e na operacionalização do conceito de fração. Inger Enkvist, professora emérita da Universidade de Lung, apresentou a comunicação Aprender de outros países. Evitar caminhos que aportam malos resultados, uma análise dos resultados de diferentes países nos testes internacionais PISA. Por exemplo, o atual declínio dos resultados obtidos pela Finlândia, depois de ter sido apontada como país-modelo, é um sério aviso para Portugal quanto à pertinência das reformas atualmente em curso no nosso país.

Entre muitas outras atividades, a EVSPM contou ainda com uma palestra de Henrique Leitão versando sobre os problemas matemáticos inerentes à conciliação dos calendários solar e lunar, fator-chave na implementação do calendário gregoriano em 1582. A matemática Margarida Carvalho (U. Montreal) - galardoada com o Prémio de Me-

lhor Tese de Doutoramento Europeia - proferiu uma palestra de divulgação sobre o trabalho que desenvolve no quadro da Teoria de Jogos e da otimização das redes internacionais de doação de rins. Foi apresentado por Jorge Nuno Silva (Universidade de Lisboa/Ludus) o Dominório, o novo jogo do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, que a SPM muito se orgulha de coorganizar desde a sua 1ª edição. Aconteceu ainda uma sessão dedicada ao Projeto da SPM Aula Aberta, financiado pela Fundação Calouste Gulbenkian e que se propõe divulgar as práticas levadas a cabo pelas escolas com melhores resultados a nível nacional, e a apresentação dos Círculos Matemáticos da SPM, um projeto que pretende, entre outros objetivos, favorecer o desenvolvimento cognitivo dos alunos através de um plano de ação estruturado e ordenado.

Na manhã do último dia, a Escola de Verão foi acolhida no Instituto Superior Técnico e no Instituto Nacional de Estatística, no que constituiu a maior visita de sempre de um grupo de professores a esta instituição. Aproveito para agradecer ao IST e ao INE todo o apoio e a dedicação que mobilizaram para fazer destas visitas um enorme êxito.

Ao todo, estiveram presentes quase 200 professores, que nos seus relatórios muito têm vindo a elogiar esta iniciativa. Trata-se de um incentivo fundamental para a direção da SPM, na sua missão de servir a matemática que se ensina, investiga e divulga em Portugal.

**SUPERTMATIK**  
Campeonatos escolares 2019/20

CÁLCULO MENTAL  
MATEMÁTICA  
LÍNGUA PORTUGUESA  
INGLÊS  
FRANCÊS  
ESPAÑHOL  
CIÊNCIAS NATURAIS  
ASTRONOMIA  
FÍSICA E QUÍMICA  
CRISTIANISMO  
HISTÓRIA DE PORTUGAL  
GEOGRAFIA

...E DESPORTO

2019/20  
CAMPEONATOS ESCOLARES  
1-9º ANOS

Inscrições em 31 JAN 2020 eudactica.com

ENSINO BÁSICO  
Participa!

# M Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

## POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: [gazeta@spm.pt](mailto:gazeta@spm.pt).

## ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2019

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17,5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para [imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

[www.spm.pt](http://www.spm.pt)

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

[www.gazeta.spm.pt](http://www.gazeta.spm.pt)

VISITE A LOJA SPM EM [WWW.SPM.PT](http://WWW.SPM.PT)

