N. 0189

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXX | Nov. 2019 | 4,20€

Poesia Permutativa: Matemática da Sextina

Poul G. Hjorth

Algoritmos Genéticos e Otimização

José Ricardo Potier de Oliveira

O Problema Isoperimétrico em Ação

José Luiz Pastore Mello

14 DE MARÇO

DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA

14 de março de 2020 será oficialmente o primeiro Dia Internacional da Matemática.

Todos os anos, a 14 de março, todos os países serão convidados a participar em atividades para estudantes e para o público em geral em escolas, museus, bibliotecas e outros espaços.

O Dia Internacional da Matemática é uma celebração mundial.

www.idm314.org

INTERNATIONAL DAY OF
MATHEMATICS
MARCH 14

ÍNDICE

24 ALGORITMOS GENÉTICOS E OTIMIZAÇÃO
José Ricardo Potier de Oliveira

36 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EM AÇÃO

35 MATEMÁTICA E LITERATURA
Cem Biliões de Poemas

42 CONVERSA COM...
Irene Fonseca

EDITORIAL

SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

OS QUADROS DE GIZ

Os matemáticos têm uma característica peculiar: uma predileção pelos quadros de giz.

A imagem de um matemático famoso ao pé de um quadro negro de giz preenchido com fórmulas e esquemas ou a escrever nele é simplesmente icónica.

A fotógrafa Jessica Wynne, professora do Instituto de Tecnologia da Moda de Nova Iorque, desenvolveu um projeto chamado *Do Not Erase*. Nesse trabalho, Jessica Wynne fotografou quadros de institutos e universidades espalhados pelo mundo, documentando os números, símbolos e modelos desenhados por matemáticos em quadros de giz. As fotografias captam os processos de pensamento e de inspiração. A aparência do giz no quadro é muito bela e contém camadas de significado. A série de fotografias será publicada num livro editado pela Princeton University Press, cujo lançamento está previsto para 2020. Entre as fotografias escolhidas para a divulgação do projeto *Do Not Erase* encontra-se a de um quadro escrito pelo matemático português André Neves quando se encontrava a trabalhar na Universidade de Princeton.

Há muitas histórias sobre a devoção dos matemáticos pelos quadros de giz. Conta-se que quando a fábrica Hagoromo Stationery, em Nagoya, Japão, responsável pela manufatura do giz Fulltouch considerado por muitos o melhor giz do mundo, anunciou que iria descontinuar o seu fabrico, matemáticos de diversos países compraram stock suficiente para lhes durar toda a carreira. Tão famoso é o giz entre os profissionais de matemática, que é acompanhado pela sua própria lenda: é impossível escrever um falso teorema com ele. Mas não se preocupem se ainda não encheram os armários com o giz Fulltouch. Há uma réstia de esperança! A Hagoromo vendeu a fórmula a outra empresa e o giz continua a ser fabricado.

A preferência por quadros de giz será só uma questão de tradição? Ouvi noutro dia uma explicação interessante: é por causa do clique, clique que o giz faz quando se escreve. O barulho é muito mais forte do que seria o de qualquer outro instrumento de escrita. E, como resultado, é muito mais difícil interromper alguém que esteja a escrever num quadro negro do que, por exemplo, alguém que escreva com um marcador num quadro branco. E isso leva a um fluxo mais longo de pensamentos, o que é importante em matemática. Trata-se de uma possibilidade, mas talvez não seja o único fator.

Outro aspeto que talvez seja relevante é que os quadros de giz permitem ver várias camadas. Quando apagamos um quadro, dificilmente desaparece completamente o que estava escrito antes. O que à primeira vista parece uma desvantagem pode ser importante no processo de investigação matemática. Podemos, por exemplo, escrever uma equação e depois modificá-la para explorarmos uma nova ideia, mas, visualmente, ainda ficam sinais daquilo que serviu de base e que continua a ser fonte de inspiração.

A verdade é que, por alguma razão, a generalidade dos matemáticos, eu incluída, gosta muito dos quadros de giz. Desde os tempos de estudante que me sinto fascinada pelos enormes quadros dos anfiteatros do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, que são duplos para fazermos subir o quadro que ficou cheio e simultaneamente trazermos para a altura da mão o outro quadro para ser reescrito.

Boas escritas e boas leituras!

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

GIRAR SEM CAIR

Num cone de revolução, rodando em torno do seu eixo vertical, existe uma geratriz tubular sem atrito com uma bola lá dentro (ver figura 1). O que acontece a essa bola?

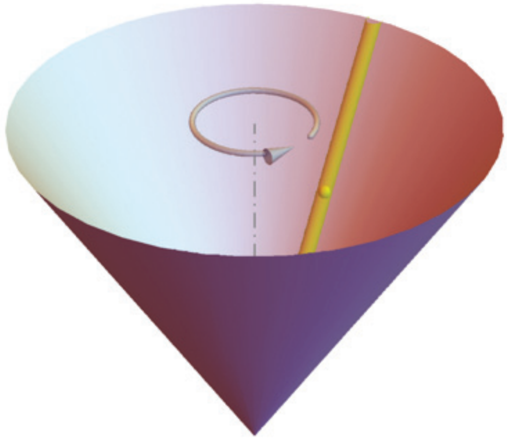


Figura 1.

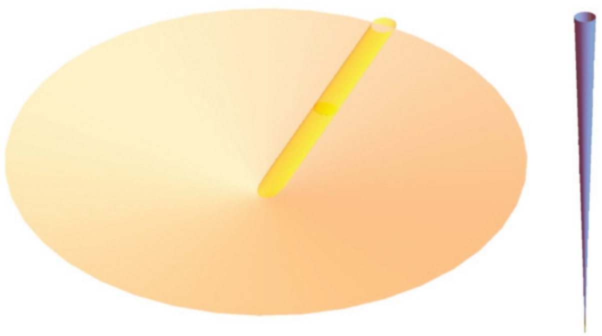


Figura 2.

Na figura 2 estão representadas duas situações extremas, cujo desfecho é previsível: na primeira, o cone tem uma abertura enorme, quase vindo a identificar-se com o plano, e na segunda, o cone tem uma abertura muito pequena, quase identificando-se com a linha vertical, que é o eixo de rotação. Conjeturamos naturalmente que no primeiro caso a ação da gravidade é diminuta e qualquer pequena giração será suficiente para provocar o afastamento da bola relativamente ao eixo de rotação, e no segundo caso será o oposto: mesmo para rotações rápidas e posições não próximas do vértice do cone, é plausível a queda da bola sob o efeito da gravidade. Para tornarmos mais precisas estas afirmações, vamos considerar o caso geral, designando por α o ângulo da geratriz com o eixo do cone e identificando a bola a um ponto dessa, onde se concentra a massa m. Interessa-nos calcular as componentes, segundo a direção dessa geratriz, de duas forças nele atuando: a força da gravidade e a força devida à giração. A primeira componente não depende do ponto na geratriz, mas apenas da abertura do cone (ver figura 3, página seguinte), sendo o seu valor $-\, mg \cos \alpha$; e a segunda é dada por $mx\omega^2 \operatorname{sen} \alpha$, onde o símbolo x representa a distância do ponto ao eixo e ω a velocidade angular com que o cone gira. O sentido positivo foi escolhido como o correspondente a um maior afastamento do ponto de massa m do vértice. A figura 4 representa os gráficos das duas funções (da gravidade em vermelho e de giração em azul) e da sua soma (em verde) quando variamos a distância x. Note-se que a função soma só se anula uma vez e, portanto, há uma única posição do ponto de massa m em que a força resultante é nula, ponto esse dependente da abertura do cone e da velocidade angular de rotação[1]. À direita desse ponto, o movimento é para fora e à esquerda predomina a ação da gravidade. O ponto é, pois, de equilíbrio instável: pontos próximos dessa posição tendem a afastar-se dela. Na figura 4 está também representada, a traço mais grosso, uma geratriz, com indicação do seu ângulo α com a vertical; as cores usadas distinguem o sentido da resultante das componentes da força segundo a direção dessa geratriz. Na figura 5 estão representados gráficos que dão os valores da distância do ponto de equilíbrio ao eixo, na parte da esquerda em função da abertura do cone para vários valores da velocidade angular, e na da direita em função da velocidade angular para vários valores da abertura.

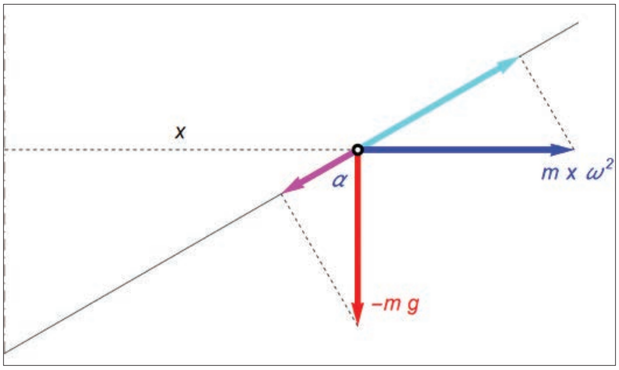


Figura 3.

Como fazemos se quisermos encontrar um modelo semelhante a este, em que continue a haver apenas um ponto de equilíbrio, mas em que esse ponto seja estável?

Consideremos uma curva como a representada na figura 6 e a superfície de revolução gerada por essa curva, quando ela roda em torno do eixo representado na figura. Obtemos, em vez do cone, a superfície representada na figura 7.

Neste exemplo, é essencial considerar um ponto movendo-se dentro de um tubo com a forma da curva geratriz da superfície[2]. Observemos que essa rotação, juntamente com a ação da gravidade, começa por ter uma resultante (segundo a direção da tangente) num sentido crescente; no entanto, a partir do ponto da curva com tangente vertical, tanto a gravidade como a ação de rotação têm componentes segundo a tangente, ambas com o mesmo sentido (contrário ao de partida).

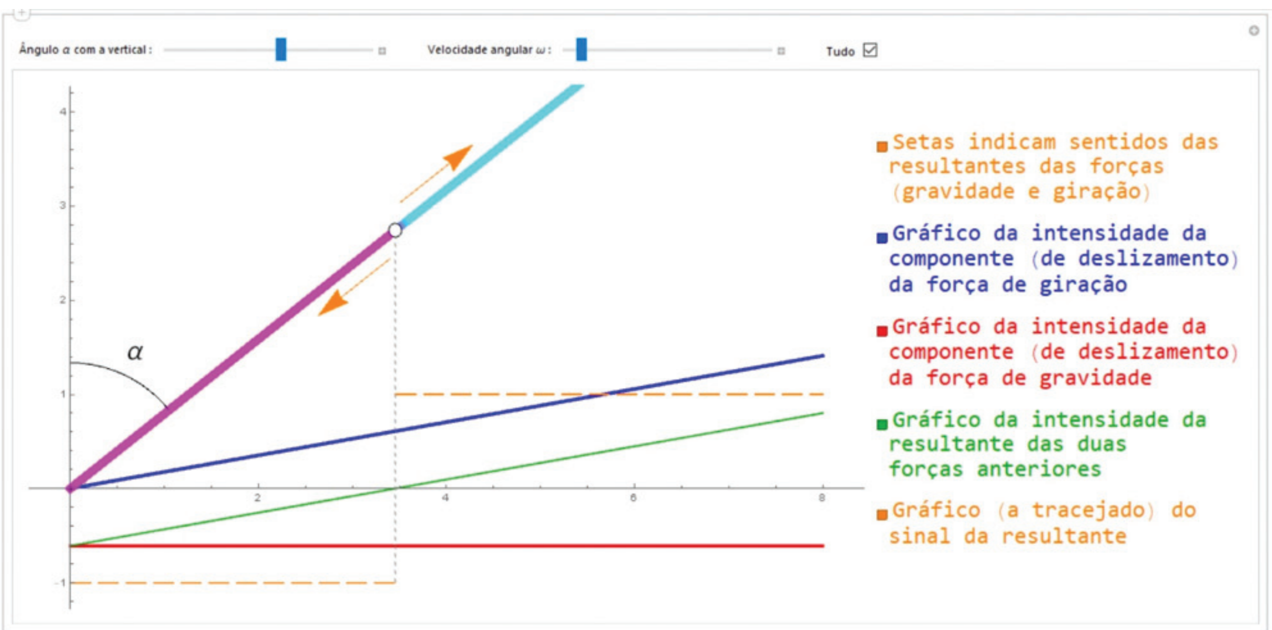


Figura 4.

Na figura 8 estão representados com as cores análogas às da figura 4 os gráficos das novas funções e uma geratriz, e o único ponto de equilíbrio (para uma rotação não nula) é, agora, estável.

Vamos ver o que sucede se nos restringirmos a curvas que "não voltem para trás", em particular curvas que não tenham dois pontos diferentes numa mesma vertical. Para tal, substituímos a geratriz retilínea do cone por uma curva levemente ondulada (figura 9). O leitor poderá em [1] escolher a amplitude da ondulação e a respetiva frequência. Neste novo exemplo, há dois pontos de equilíbrio.

[1] Em [1] o leitor poderá utilizar um CDF para mudar os valores dos parâmetros e observar as alteraçoes provocadas.

[2] Um ponto na posição indicada na figura 6, com uma pequena velocidade de rotação, cairia sob a ação da gravidade, descolando-se da superfície, se não estivesse obrigado a permanecer no tubo representado nessa figura.

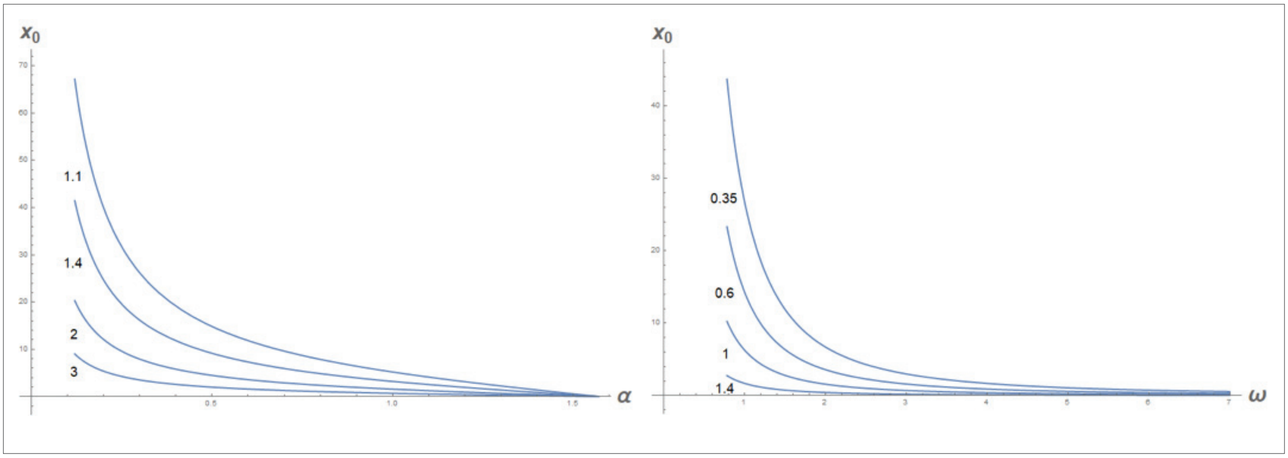


Figura 5.

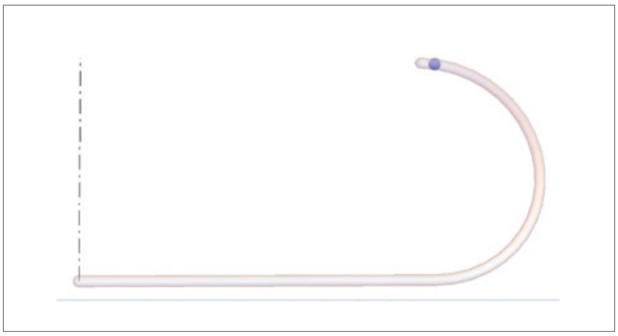


Figura 6.

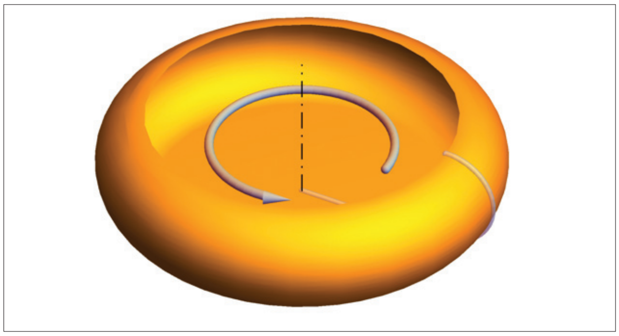


Figura 7.

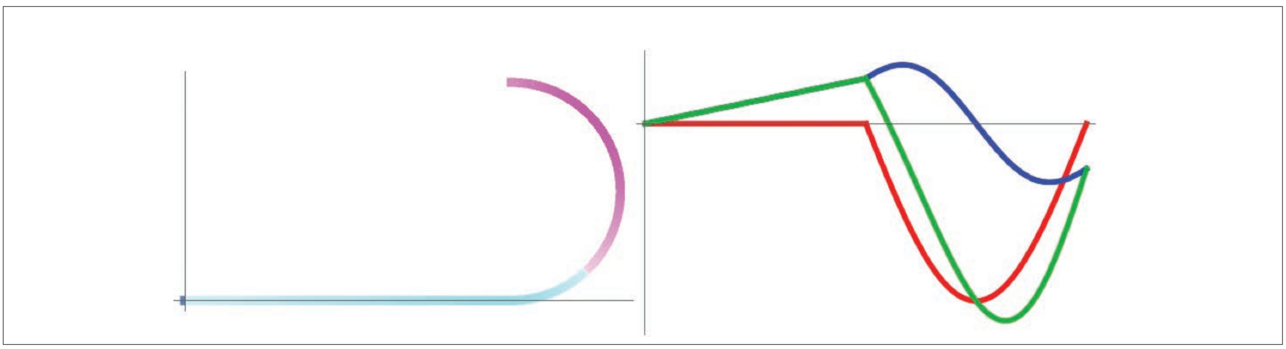


Figura 8.

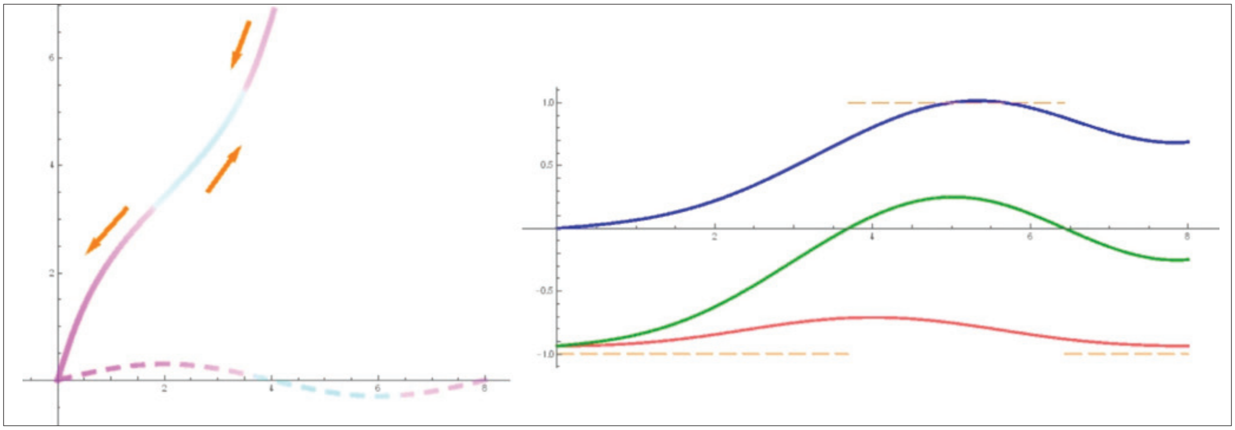


Figura 9.

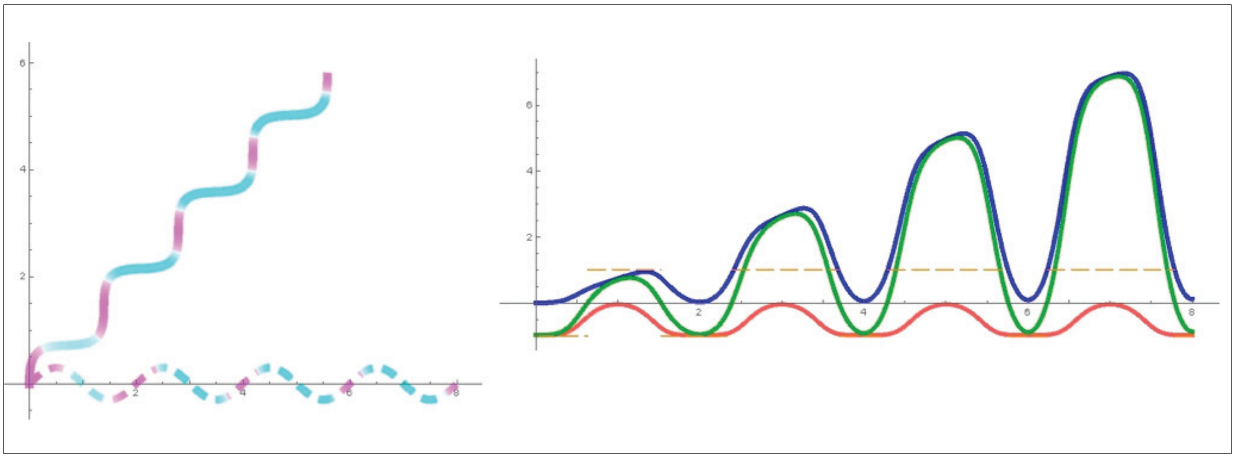


Figura 10.

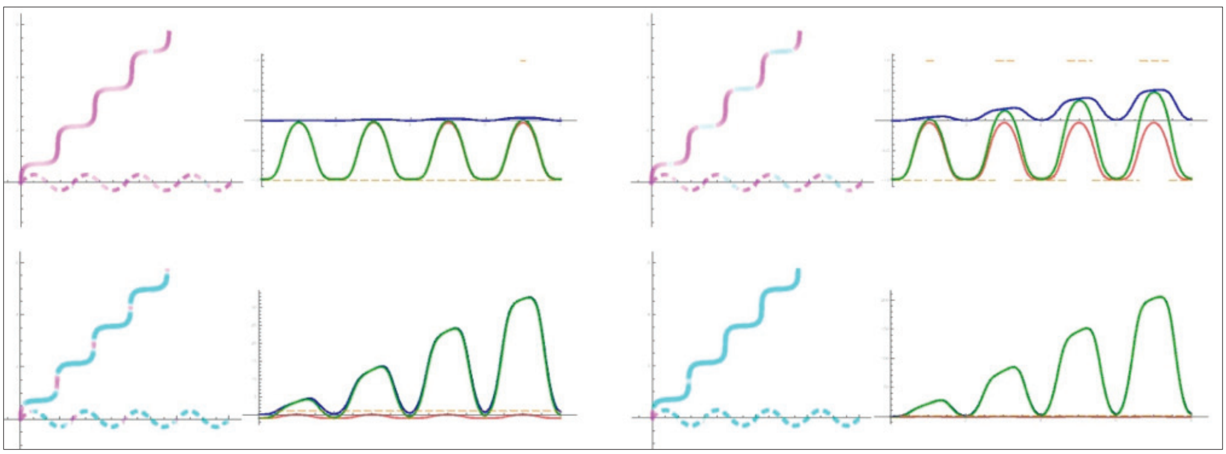


Figura 11.

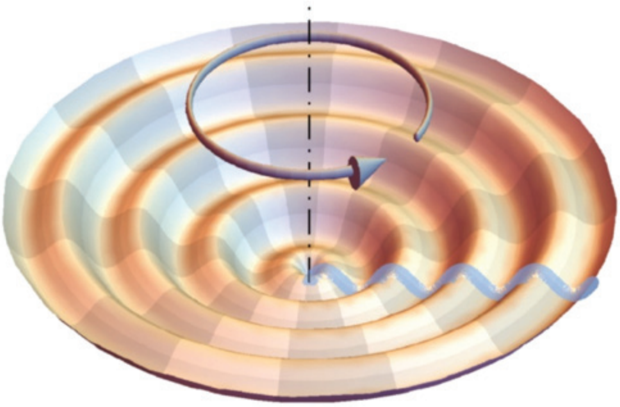


Figura 12.

Notemos que há um intervalo no qual o sinal da resultante (gráfico a verde) é positivo, sendo negativo à esquerda e à direita dele. Isso é traduzido na figura à esquerda pelas cores da geratriz nas diferentes regiões e pelas setas. A observação dessas setas permite detetar a natureza diferente dos equilíbrios correspondentes aos dois pontos de mudança de cor: enquanto no primeiro, pontos próximos tendem a afastar-se (equilíbrio instável), no segundo, pontos próximos tendem a aproximar-se (equilíbrio estável). Escolhendo um modelo análogo, mas usando uma curva com maior número de ondulações (ver figura 10), é possível aumentar o número de pontos de equilíbrio (estáveis e instáveis). O quadro da figura 11 ilustra o comportamento do mesmo cone ondulado girando a diferentes velocidades angulares (por ordem crescente): 0.3, 1, 8, 20, tendo a velocidade angular ilustrada na figura 10 o valor de 3.7. E finalmente a figura 12 mostra a superfície de revolução gerada pela curva ondulada.

Observemos que na geratriz da figura 10 há alternadamente patamares mais próximos da horizontal e escarpas íngremes mais próximas da vertical. Nas escarpas o efeito da força giratória é fortemente diminuído e nos patamares diminui o da gravidade. No exemplo em causa, para a velocidade angular envolvida, o sentido da força resultante muda no início e no fim das escarpas, e um equilíbrio é estável no início e instável no fim de cada escarpa.

Como nota final, mencionamos uma situação que se encontra com frequência e que está fortemente relacionada com o tema deste texto. Quando uma estrada é inclinada para dentro numa curva, o piso tem localmente a forma de um tronco de cone. E o ângulo com a vertical é planeado por quem projeta a estrada de forma a ter em conta o raio da curva (distância ao eixo) e a velocidade média prevista. O condutor que seguir a essa velocidade percorre uma zona de equilíbrio (instável, como vimos). Para outras velocidades, há que contar com as correções laterais devidas ao atrito entre pneus e estrada... (atrito esse que não foi contemplado no modelo do texto e que, aliás, é variável, por exemplo, com a chuva).

REFERÊNCIAS

[1] *https://www.atractor.pt/mat/girarsemcair*

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

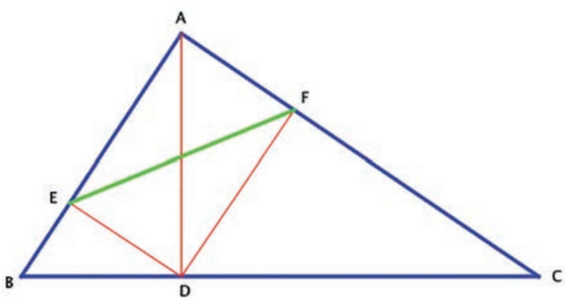
MAIS PROBLEMAS DO REINO UNIDO

A nossa última coluna foi inspirada num livro de problemas recente, *The Ultimate Mathematical Challenge* (Harper Collins 2018), editado por The UK Mathematics Trust (UKMT). Além de ainda andarmos maravilhados com a obra, essa coluna motivou invulgar participação dos seus leitores, o que muito nos alegrou. Assim, continuamos hoje com mais algumas questões dessa interessantíssima coleção.

Como a compilação de problemas é vasta, variamos nos temas abordados.

A nossa escolha caiu hoje sobre um problema de geometria, dois de combinatória e outro sobre números.

INVARIÂNCIA: Dado um triângulo acutângulo ABC, baixando uma altura, encontramos um ponto D na base do triângulo. Por D tracemos perpendiculares sobre os outros dois lados, obtendo assim os pontos E e F. Mostre que o comprimento do segmento EF independe do vértice a partir do qual se traçou a altura.



DANÇA DAS CADEIRAS: Há n cadeiras à volta de uma mesa redonda. Há n pessoas que vão chegar consecutivamente e sentar-se. A primeira escolhe o seu lugar como quiser. A partir daqui, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, a $(k+1)$-ésima pessoa senta-se k lugares à direita da k-ésima pessoa. Para que valores de n é que este procedimento funciona sem constrangimentos?

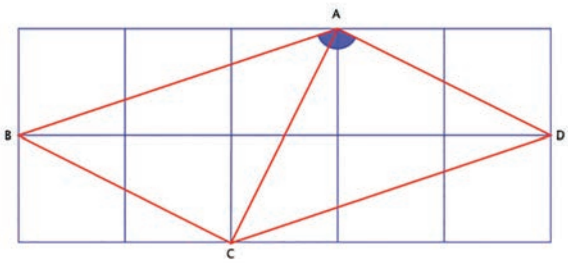
MUITOS RESTOS: a Laura divide 365 sucessivamente por 1, 2, 3, ..., 365 e soma todos os restos. O Manuel, por sua vez, divide 366 por 1, 2, 3, ..., 366 e soma todos os restos obtidos. Quem conseguiu soma maior?

DESCOBRIR A COMBINAÇÃO: Um aloquete de código usa uma combinação de três dígitos de 0 a 9. Sempre que, quando se faz uma tentativa que tem, pelo menos, um dígito certo (no lugar certo), o aloquete, que fala, diz "Quente!". Se a tentativa não contiver nenhum dígito correto (na posição certa), o cadeado grita "Frio!". Por exemplo, se a combinação correta for 014, as tentativas 099 e 014 originam ambas a resposta "Quente!", enquanto que a tentativa 140 obtém um grito de "Frio!".

De quantas tentativas se precisa para ter a certeza de descobrir a combinação correta, qualquer que ela seja?

Sobre as questões do número anterior:

QUANTO MEDE ESTE ÂNGULO? Estendamos a figura de acordo com a ilustração abaixo.

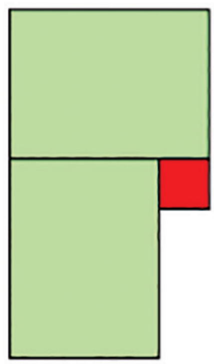


O triângulo ACD é isósceles e retângulo, portanto $\angle ADC = 45°$. Temos então, notando que $ABCD$ é um paralelogramo, $2\angle BAD = 360 - 90$, donde $\angle BAD = 135°$.

QUANTA GENTE? Quando a Laura entrou num dado bar, onde estavam já algumas pessoas, a idade média subiu 4 anos. O seu irmão gémeo, o Manuel, entrou de seguida, tendo a média subido mais 3 anos. Quantas pessoas estavam inicialmente no bar? A resposta é 6, mas no enunciado faltava a menção ao parentesco entre os protagonistas. Os nossos leitores assíduos Pedrosa Santos, Luís Madureira, Manuel Araújo e Adérito Araújo tiveram a gentileza de nos alertar para esse lapso.

SÓ INTEIROS? É fácil constatar que $x_1 = 2$ e $x_{n+1} > 3/2(x_n)$ para $n > 2$, portanto a sucessão é crescente. Como o nosso leitor Luís Madureira notou, tem-se, para $n > 1$, $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$, donde se conclui que os valores são todos inteiros.

QUE PERCENTAGEM? Basta calcular a percentagem a que corresponde o quadrado na configuração abaixo, que pode ser considerada geradora da pavimentação.



Um cálculo simples mostra que a peça tem área 100 e o quadrado tem área 4, portanto a percentagem é 4%.

POESIA PERMUTATIVA: MATEMÁTICA DA SEXTINA

Poul G. Hjorth
Universidade Técnica da Dinamarca
pghj@dtu.dk

TRADUÇÃO DE **NATÁLIA BEBIANO**, Universidade de Coimbra, bebiano@mat.uc.pt

Matemática e poesia são frequentemente vistas como expressões complementares do intelecto humano. Há, no entanto, casos em que a poesia se submete voluntariamente a regras matemáticas e a matemática envolve-a com a sua beleza singular. Neste artigo, as teorias do caos e dos grupos de permutações intervêm na análise de uma forma medieval de poesia muito difícil do ponto de vista formal.

1. POESIA SINTAXIAL

Consideremos as duas primeiras estrofes de um poema [2] do grande poeta Luís Vaz de Camões (1524-1580).

Foge-me pouco a pouco a curta vida
(se por caso é verdade que inda vivo);
vai-se-me o breve tempo d'ante os olhos;
choro pelo passado e quando falo,
se me passam os dias passo a passo,
vai-se-me, enfim, a idade e fica a pena.

Que maneira tão áspera de pena!
Que nunca a hora viu tão longa vida
em que possa do mal mover-se um passo.
Que mais me monta ser morto que vivo?
Para que choro, enfim? Para que falo,
se lograr-me não pude de meus olhos?

Além de palavras "saltitantes", podemos observar duas coisas: (1) não há um padrão particular de rima, e (2) as palavras finais dos seis versos da primeira estrofe ocorrem de novo como palavras finais na segunda estrofe, mas numa ordem diferente da da primeira estrofe.

Considerando apenas as palavras finais de cada verso, a sequência de palavras (*vida, vivo, olhos, falo, passo, pena) foi permutada originando a sequência (pena, vida, passo, vivo, falo, olhos*), ou simbolicamente 1, 2, 3, 4, 5, 6 deu origem a 6, 1, 5, 2, 4, 3.

Nas estrofes seguintes do poema, a mesma permutação é usada novamente, passando o 2 a 3, o 3 a 4, o 4 a 5, e o 5 a 6. Se se aplicasse a permutação às palavras finais da sexta estrofe, chegar-se-ia à mesma sequência de palavras finais da estrofe 1. Assim, a permutação é um *ciclo* de ordem seis do grupo de permutação S_6.

Este padrão é um exemplo de uma forma particular de poesia conhecida como *sextina* [5, 8]. Uma sextina tem 6 estrofes cada uma com 6 versos. A regra acima para a permutação das palavras finais de cada verso deve ser seguida em cada nova estrofe até à sexta[1].

Matematicamente, a permutação utilizada é descrita de forma compacta com a notação de ciclo

$$(1, 2, 4, 5, 3, 6).$$

Uma forma mais visual e muitas vezes usada para representar a permutação é a mnemónica que a figura 1 ilustra.

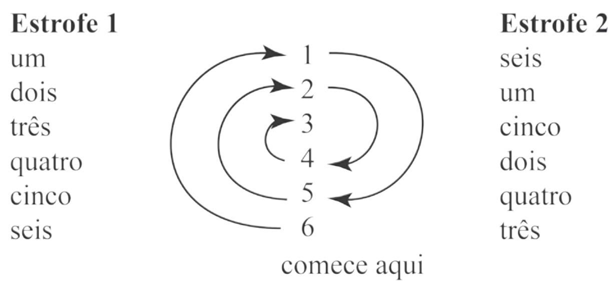


Figura 1. Mostrando como encontrar a ordem das palavras finais ao passar para uma nova estrofe. Aqui "um" até "seis" representam as palavras finais usadas na estrofe, e os números de 1 a 6 representam a posição dentro desta. A ilustração espiral encontrada em vários manuais de poesia, por exemplo [5, 8], parece um pouco confusa, pois não apresenta de facto a permutação. O ponto importante é que o arranjo na estrofe subsequente encontra-se seguindo a espiral, começando em 6.

[1] Além das seis estrofes, o formato sextina termina com a chamada coda: uma sétima estrofe que contém apenas três versos. Todas as palavras finais devem ser usadas dentro da coda, duas em cada verso.
Algumas versões da sextina exigem uma ordem estrita para o posicionamento das palavras finais dentro da sétima estrofe:

... 5 ... 2
... 3 ... 4
... 1 ... 6

É como um passo final da dança num tempo duas vezes mais rápido. A coda é uma parte crucial da sextina, mas porque não é diretamente usada na permutação das palavras de estrofe para estrofe vamos ignorar a coda nos argumentos matemáticos..

Schimel [6] descreve a permutação da sextina como:

> "... uma *dança* [7], com cada estrofe representando uma sequência de passos. Cada estrofe é baseada na que diretamente a precede, segundo a regra: última, primeira, penúltima, segunda, antepenúltima, terceira."

A figura 2 ilustra uma visão mais dinâmica do processo.

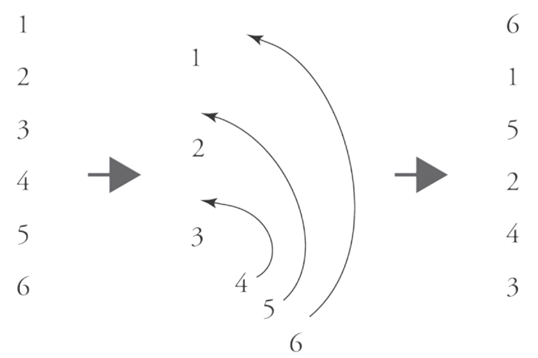


Figura 2. Uma representação da "dança" da sextina. As três primeiras posições movem-se para baixo e abrem, e as restantes três posições, por ordem inversa, sobem para os espaços abertos entre as três primeiras.

2. ORIGENS

Os estudiosos continuam a debater as origens precisas da sextina, o porquê do volume de poemas compostos de sextilhas entre os séculos XI e XIII. A invenção é comummente atribuída ao gigante literário do início do século XIII Arnaut Daniel no seu poema *O firme intento que em mim entra*, na tradução portuguesa de Augusto de Campos. Na época, o seu virtuosismo poético era incontestável e a sextina era um desafio deliberado para tornar a poesia amorosa tão difícil quanto possível, obrigando o poeta a utilizar um padrão de palavras repetidas e, em simultâneo, a cativar a atenção da noiva.

Sextinas bem compostas podem fazer parecer a repetição totalmente necessária à narrativa em desenvolvimento, de acordo com a visão convencional, ou podem enfatizar cada palavra final deliberadamente para dar realce à estrutura. Exemplos modernos do padrão incluem *The Painter,* de John Ashbery e Paul Muldoon, na extraordinária obra *Yarrow*. Existem várias revistas literárias modernas como a *McSweeneys* em São Francisco que, em tempos, publicava propositadamente sextinas para afastar os poetas amadores. Mencionar a palavra "sextina" em qualquer oficina de poesia pode provocar um calafrio aos participantes, dada a sua complexidade. Uma antologia recente [1] contém uma ampla gama de variações sobre o tema, incluindo mesmo *cartoons*.

3. QUESTÕES MATEMÁTICAS

A sextina deve o nome às seis palavras finais que ocorrem em seis arranjos diferentes dos versos, regidos por um procedimento permutacional estrito que determina cada novo arranjo.

Tal procedimento vale para qualquer número natural m? Se a resposta for negativa, então para que números m valerá? Existem infinitos números desses?

Podemos descrever a permutação da sextina como uma aplicação do seguinte modo: Seja m o número de versos e seja n a palavra final da n-ésima linha do verso p. Então a palavra n deve terminar o verso da estrofe $(p+1)$ conforme a regra

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq \left[\frac{m}{2}\right] \\ 2m+1-2n & \text{se } \left[\frac{m}{2}\right] < n \leq m \end{cases}, \tag{1}$$

onde m é o número de versos numa estrofe e $[\cdot]$ representa a parte inteira do número. Assim, para $m = 6$ temos

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 6, \quad 4 \mapsto 5, \quad 5 \mapsto 3, \quad 6 \mapsto 1, \tag{2}$$

conforme na figura (1).

Para uma sextina funcionar corretamente, cada uma das palavras finais deve ter retorno no final do verso n de cada estrofe, para $n = 1, 2, \ldots m$. Tal realmente ocorre se $m = 6$ como mostra a tabela 1 e o poema apresentado neste artigo ilustra. Aqui, cada palavra final ocupa uma vez cada posição e cada verso dentro de uma estrofe tem cada palavra final precisamente uma vez durante o poema. Se se construísse um sétimo sexteto de acordo com a regra (1), então a ordem das palavras finais seria idêntica à da primeira estrofe. Assim, a permutação é um ciclo de comprimento seis.

A construção funciona claramente para $m = 6$. Um teste simples, no entanto, mostra que algo está errado se $m = 7$, ou $m = 8$, *vide* tabelas 2 e 3 respetivamente.

Estritamente falando, devemos sempre escolher um número par para m, de modo a que haja uma coda de comprimento $m/2$ com cada verso contendo duas palavras finais. Mas, para fins matemáticos, vamos ignorar esta restrição.

estrofe	um	dois	três	quatro	cinco	seis
verso 1	1	6	3	5	4	2
verso 2	2	1	6	3	5	4
verso 3	3	5	4	2	1	6
verso 4	4	2	1	6	3	5
verso 5	5	4	2	1	6	3
verso 6	6	3	5	4	2	1

Tabela 1. Posição das palavras finais de cada verso nas seis estrofes de uma sextina de estrofes de seis versos. O número 1 representa a palavra que termina o primeiro verso da primeira estrofe, 2 representa a palavra que termina o segundo verso da primeira estrofe, etc. A palavra final do primeiro verso move-se para o segundo verso, a palavra final do segundo verso move-se para o quarto verso, e assim por diante.

estrofe	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete
verso 1	1	7	4	2	1	7	4
verso 2	2	1	7	4	2	1	7
verso 3	3	6	3	3	3	6	3
verso 4	4	2	1	7	4	2	1
verso 5	5	5	5	5	5	5	5
verso 6	6	3	6	3	6	3	6
verso 7	7	4	2	1	7	4	2

Tabela 2. Semelhante à tabela 1, mas para $m = 7$. Note-se que o quinto verso de cada estrofe termina sempre com a mesma palavra. Ou seja, o número 5 é um ponto fixo da regra (1). Também os sexto e terceiro versos compartilham as mesmas duas palavras repetidamente (6, 3). É um ciclo de dois períodos de (1).

estrofe	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito
verso 1	1	8	4	2	1	8	4	2
verso 2	2	1	8	4	2	1	8	4
verso 3	3	7	5	6	3	7	5	6
verso 4	4	2	1	8	4	2	1	8
verso 5	5	6	3	7	5	6	3	7
verso 6	6	3	7	5	6	3	7	5
verso 7	7	5	6	3	7	5	6	3
verso 8	8	4	2	1	8	4	2	1

Tabela 3. Semelhante à tabela 1 mas para $m = 8$. De notar que o padrão se repete na quinta estrofe, de modo que a palavra no fim do primeiro verso da primeira estrofe só termina o primeiro, o segundo, o quarto e o oitavo versos de qualquer estrofe subsequente, nunca o terceiro, o quinto, o sexto ou o sétimo. De facto, (1, 8, 4, 2) é um período do ciclo de quatro elementos da regra (1), como o é (3, 7, 5, 6).

4. A IMPORTÂNCIA DE SER CÍCLICO

Chamamos a m **número sextina** se a permutação representada em (1) no conjunto de m inteiros tiver um período mínimo de m.

Resultados básicos da teoria do grupo simétrico garantem que qualquer elemento do grupo S_n tem uma única representação mínima em termos de ciclos disjuntos.

Tomemos a permutação (1) com $m = 6$, conforme descrito em (2) e na tabela 1. Como já mencionado, uma maneira mais compacta de escrever é olhando para a órbita da posição da primeira palavra final após cada aplicação sucessiva da permutação, veja-se a figura 3.

Ou seja, seguindo as setas em redor do círculo da figura 3, vemos que a primeira palavra final da primeira estrofe se torna a segunda palavra final da segunda estrofe, a quarta palavra final da terceira estrofe, a quinta palavra final da quarta, e assim por diante. A representação circular também permite encontrar a órbita de qualquer outra palavra final. Por exemplo, para ver o que acontece com a terceira palavra final da primeira estrofe, começamos com o número 3 no mostrador do relógio e seguimos as flechas seis vezes. Então, na segunda estrofe, essa palavra termina o sexto verso; termina também o primeiro verso da terceira estrofe, e assim por diante. Em notação mais compacta, temos

$$(1, 2, 4, 5, 3, 6),$$

onde os parênteses significam "e repita". O motivo pelo qual $m = 6$ é um número sextina é que existe uma repre-

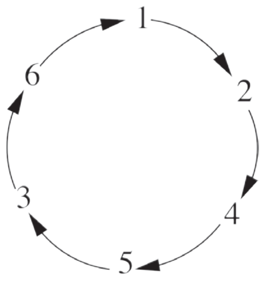


Figura 3. A órbita das palavras finais para uma sextina de comprimento $m = 6$.

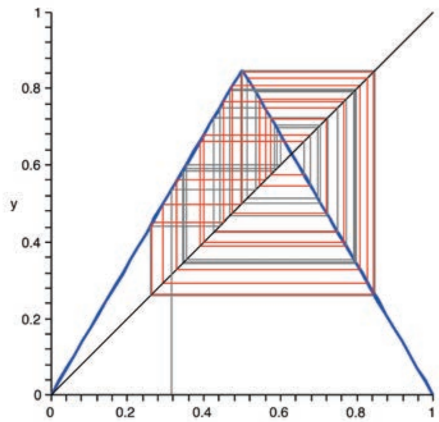


Figura 4. Construção da dinâmica da aplicação tenda através do chamado processo de teia de aranha. Aqui *y* é substituído na unidade seguinte de tempo, pelo seu valor obtido pela fórmula em (3). Esse valor é considerado o próximo valor de *y* na mesma fórmula, e assim sucessivamente. Este processo de *feedback* é representado como a reflexão do valor da imagem de um determinado valor de *y* na linha a 45º.

Tabela 4. Estrutura do ciclo da permutação sextina para os primeiros valores de *m*.

m	representação cíclica	*m* é um número sextina?
1	(1)	sim
2	(12)	sim
3	(123)	sim
4	(123) (4)	não
5	(12435)	sim
6	(124356)	**sim**
7	(1247) (36) (5)	não
8	(1248) (3657)	não

sentação do efeito da transformação (1) em termos de um único ciclo. Se tentarmos o mesmo por $m = 7$, com base nas informações da tabela 2, vemos que a permutação é agora escrita na forma

$$(1, 2, 4, 7)\ (3, 6)\ (5)$$

que possui três ciclos disjuntos. As palavras finais dos versos um, dois, quatro e sete são permutadas conforme o seu ciclo, os versos três e seis trocam palavras finais entre estrofes sucessivas, enquanto o quinto verso termina sempre com a mesma palavra.

Da mesma forma, para $m = 8$, temos

$$(1, 2, 4, 8)\ (3, 6, 5, 7)$$

dois 4-ciclos e, por exemplo, para $m = 12$, temos

$$(1, 2, 4, 8, 9, 7, 11, 3, 6, 12)\ (5,10)$$

um ciclo de 10 elementos e um ciclo de 2.

Assim, estabelecemos um critério para um número natural m ser um número sextina: que a permutação (1) possa ser expressa como um único ciclo de comprimento m. A tabela 4 elenca a representação do ciclo para os primeiros números m. Observe-se que não há um padrão óbvio que determine que valores m levam a um único m-ciclo. É precisamente esse padrão que pretendemos descobrir no resto deste artigo.

5. CAOS POÉTICO

A equação (1) pode ser representada como um sistema dinâmico discreto atuando nos primeiros m inteiros. Tomando $y = 2n/(2m+1)$, mostra-se que a iteração repetida de (1) é equivalente à dinâmica da **aplicação tenda** para $y \in [0, 1]$:

$$y \mapsto \begin{cases} 2y & \text{se } y \leq 1/2, \\ 2 - 2y & \text{se } 1/2 < y \leq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Em vez dos números inteiros de 1 a m, temos agora os pontos $2j/(2m+1), j = 1, \cdots m$ distribuídos entre 0 e 1. Para qualquer valor de m, chamaremos a esses pontos **pontos sextina**.

A dinâmica do mapa é representada graficamente na figura 5. Para maior precisão, esta é a aplicação tenda com inclinação 2, que faz parte da família geral de aplicações tenda

$$y \mapsto \begin{cases} \mu y & \text{se } y \leq 1/2, \\ \mu(1-y) & \text{se } 1/2 < y \leq 1, \end{cases} \tag{4}$$

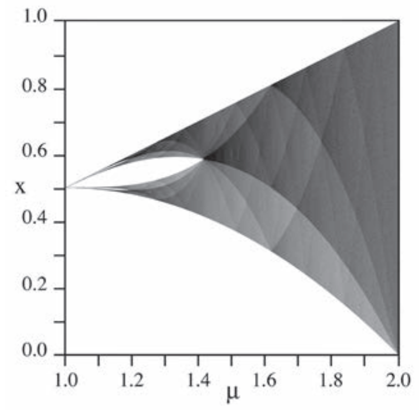


Figura 5. Diagrama de bifurcação mostrando pontos no atrator da aplicação tenda (4) por $0 \leq \mu \leq 2$. Para $\mu = 1$, existe apenas um único ponto de atração.

com inclinação $\mu > 0$ [4]. Uma análise simples mostra que se $\mu < 1$, o ponto fixo $x = 0$ é o único atrator do sistema. Em particular, todas as condições iniciais convergirão para $x = 0$ por iteração repetida de (4). Se $\mu = 1$, todos os pontos com $y \leq 1/2$ são pontos fixos deste sistema dinâmico.

Quando $\mu > 1$, as coisas ficam bem interessantes. Veja-se a figura 5. De facto, entre os mapas caóticos, a aplicação tenda é muito especial por causa do ponto anguloso em $y = 1/2$. À medida que μ aumenta para 1, a dinâmica torna-se imediatamente caótica. Ainda existem dois pontos fixos, $y = 0$ e $y = \mu/(\mu + 1)$, mas ambos são instáveis. Para $1 < \mu < \sqrt{2}$, o atrator do mapa divide-se em dois subintervalos disjuntos de (0,1). As condições iniciais arbitrárias são atraídas para esses dois subintervalos dentro dos quais há um ciclo caótico de pontos. Para $\sqrt{2} \leq \mu \leq 2$ os intervalos disjuntos começam a sobrepor-se.

Para $\mu = 2$, como sucede no mapa de sextina, o caos é completo. Ou seja, quase todas as condições iniciais fazem parte do conjunto caótico e cada região do conjunto caótico é visitada com igual probabilidade. A partir de alguns valores arbitrários de y no intervalo (0,1) e iterando repetidamente a fórmula (3), obtemos uma sequência infinita de valores de y que nunca se repete. A sequência eventualmente visita valores arbitrariamente próximos de *cada* valor de y no intervalo [0,1]. Além disso, não há pontos que comecem nesse intervalo e dele se afastem.

Incorporada dentro do caos, no entanto, há uma infinidade (numerável) de órbitas periódicas instáveis com todos os períodos possíveis. Em particular, todas as condições iniciais racionais de (3) estão em órbitas periódicas. Para verificar que assim é, note-se que se uma condição inicial $y = p/q$ para números inteiros p e q, então todas as imagens deste ponto devem ser expressas como uma fração r/q para certo inteiro r. Além disso, o mapa leva o intervalo da unidade para si próprio, portanto, $0 \leq r \leq q$. Como existem apenas $q + 1$ dessas frações, esta deve ser uma órbita periódica de período no máximo $q + 1$. Em particular, estamos interessados no caso de que $q = N$ para ímpares $N = 2m + 1$ e pares $p = 2n$ para alguns $n \leq m$.

A questão que devemos abordar então é: qual é a imagem sob a iteração repetida de (3) da condição inicial específica $y = 2/(2m + 1)$, para cada número inteiro ímpar $2m + 1$? Se essa órbita tiver um período mínimo m, então temos que m é um número sextina. A única outra possibilidade é que essa condição inicial esteja numa órbita periódica com um período mais baixo q. Então, parece que devemos procurar condições para a existência de órbitas periódicas de (3) (e, portanto, de (1)) de período arbitrário $q \leq m$.

6. CONDIÇÕES PARA CICLOS

O exemplo na tabela 2 acima mostra que $m = 7$ não é um número sextina porque existe um ponto fixo (um 1-ciclo) e um 2-ciclo. Além disso, na tabela 3, $m = 8$ não é um número de sextina porque a permutação é decomposta em dois 4-ciclos disjuntos. Portanto, para caracterizar que números *não* são números sextina, precisamos de considerar condições para uma posição j $(0 < j \leq m)$ para fazer parte de um ciclo de período q, para $q \leq m$.

Consideremos primeiro o caso de um ponto fixo. O ponto fixo para o mapa está na interseção entre o mapa e a linha $x = y$, e (não considerando o ponto fixo trivial $x = 0$ que não é relevante aqui) ocorre em $x = 2/3$. Se um dos pontos de m sextina, $x_j = 2j/(2m + 1), j = 1, \cdots, m$ coincide com o valor $x = 2/3$, ocorrerá um ciclo e o número m (se diferente de 1) não será um número sextina. Isso vai acontecer para todos os números m de modo que

$$\frac{2j}{2m+1} = \frac{2}{3}$$

ou

$$3|(2m+1)$$

e é obviamente o caso de $m = 7$.

Se estudarmos a condição para 2 ciclos, precisamos de encontrar os locais para pontos de período-2 da aplicação tenda. Esses pontos estão localizados onde o mapa *repetido duas vezes* cruza a linha $x = y$, ou seja, em $x = 2/5, 2/3, 4/5$, veja –se a figura 6. Para os pontos sextina coincidirem com

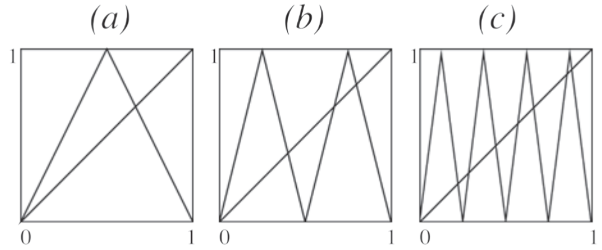


Figura 6. Localização dos pontos de (a) período-1 (ponto fixo), (b) período-2 e (c) período-3 para o mapa é a abcissa da interseção entre tendas repetidas e a linha $y = x$.

esses valores, verificamos que além de $3|(2m+1)$ também:

$$\frac{2j}{2m+1} = \frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{2j}{2m+1} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{2j}{2m+1} = \frac{4}{5}.$$

A condição do meio, dá-nos $3|(2m+1)$ (porque uma órbita de período 1 é também uma órbita de período 2) mas agora temos de excluir

$$5|(2m+1)$$

para evitar órbitas de período 2, assim esta condição evita que m (se diferente de 2) seja um número sextina. Para $m = 7$ temos simultaneamente um 1-ciclo e um 2-ciclo, visto que 3 e 5 são ambos fatores de $(2m+1)$.

3-ciclos ocorrem (ver figura 6) nos $2^3 - 1$ valores $x = 2/9, 2/7, 4/9, 4/7, 6/9, 6/7, 8/9$, e coincidirão com os valores de sextina $7|(2m+1)$ ou $9|(2m+1)$.

Continuando desta forma, descobrimos que:

Proposição 1. *Os pontos q-ciclo estão localizados em*

$$x = \frac{2}{2^q+1}, \frac{2}{2^q-1}, \frac{4}{2^q+1}, \frac{4}{2^q-1}, \ldots, \frac{2k}{2^q-1}, \ldots,$$

$$\ldots, \frac{2^q-2}{2^q+1}, \frac{2^q-2}{2^q-1}, \frac{2^q}{2^q+1} \qquad \square$$

No total, existem $2^q - 1$ desses pontos.

Se existe um j tal que uma das sextinas leva $x = 2j/(2m+1)$ a coincidir com um ponto q-ciclo, a permutação de sextina contém um q-ciclo.

Isso acontece quando $\exists j, k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, ..m$ e $k = 1, ..2^{m-1}$ de modo que

$$\frac{2j}{2m+1} = \frac{2k}{2^q \pm 1}$$

ou

$$k(2m+1) = j(2^q \pm 1).$$

A condição necessária de existência de pelo menos um q-ciclo ($q \le m$) para uma permutação de sextina acima de m encontra-se na seguinte

Proposição 2. *Para qualquer número ímpar $2m+1$, deve haver um número $q \le m$ tal que $(2m+1)|(2^q \pm 1)$.* $\square$

Agora estamos em posição de determinar as condições necessárias e suficientes para que um número m seja um número sextina. O primeiro ponto de sextina ($j = 1$) deve fazer parte de um m-ciclo que o leva a todas as outras posições, ou seja, o m-ciclo não é causado por sucessivos q-ciclos em que q é um fator de m:

Teorema 1. *Um número m é um número sextina se e somente se $(2m+1)|(2^m \pm 1)$ e $(2m+1) \nmid (2^q \pm 1)$ para qualquer q que seja um fator de m.* $\square$

O corolário a seguir fornece um pouco mais de informação.

Corolário 1. *Seja $2m+1$ um número primo que divide $2^m \pm 1$. Se m também é primo, então m é um número sextina.*

Demonstração. O corolário resulta imediatamente do teorema 1, já que se m é primo, os seus únicos fatores são 1 e m.

7. DISCUSSÃO

A descrição acima dos números de sextina é de alguma forma pouco satisfatória. Baseia-se na fatorização de grandes primos da forma $2^m \pm 1$. Como é sabido, essa fatorização pode ser uma tarefa computacional complexa. De facto, a abordagem por força bruta de simplesmente deixar que os números conduzam uma dança [7], ou seja, *iterando o mapa m vezes e verificando se isso origina um m-ciclo*, fornece um método muito mais rápido (ordem m) de decidir se m é um número sextina.

Há, talvez, uma lição a tirar daqui. Somos educados a acreditar que o entendimento completo de um subconjunto dos números naturais é alcançado apenas quando temos uma fórmula fechada, uma única equação para descrever os membros do conjunto. Isso certamente estava na mente de alguns dos autores de [3] quando decidiram descobrir que números são números de sextina.

Como se vê, a propriedade definidora mais simples dos números de sextina é aparentemente a própria permutação de sextina; essa é uma caracterização algorítmica e não uma fórmula fechada, da mesma maneira que os números primos (e primos gémeos, etc.) parecem permitir apenas uma descrição algorítmica, não uma fórmula fechada. É possível que, em certo sentido, isso seja típico; que devemos considerar algoritmos a norma, e fórmulas fechadas, exceções milagrosas.

Usando o algoritmo, é uma tarefa computacional direta descobrir todos os números sextina menores do que um certo inteiro positivo. Aqui, por exemplo, está uma lista de todos os números de sextina até $m = 200$:

1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 14, 18, 23, 26, 29, 30, 33, 35, 39, 41, 50, 51, 53, 65, 69, 74, 81, 83, 86, 89, 90, 95, 98, 99, 105, 113, 119, 131, 134, 135, 146, 155, 158, 173, 174, 179, 183, 186, 189, 191, 194

A caracterização algorítmica, ou a verificação direta, ou a descrita neste artigo, tem obviamente uma desvantagem em comparação com uma fórmula fechada: ela não nos diz imediatamente se existem infinitos números de sextina. Esta questão ainda está em aberto.

REFERÊNCIAS

[1] *The Incredible Sestina Anthology.* D. Nesteor, (Editor), Write Bloody Publishing, USA (2013), ISBN: 978-1938912-36-9.

[2] *Rimas by Luís de Camões*. Editor: Álvaro Júlio da Costa Pimpão. Coimbra: Acta Universitatis Conimbrigensis (1953), 460.

[3] A. Champneys, P. G. Hjorth, H. Mann, *The Numbers Lead a Dance, Non-Linear Partial Differential Equations, Mathematical Physics, and Stochastic Analysis*. EMS Congress Reports (2018) (55-71), ISBN 978-3-03719-186-6.

[4] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Cambridge, Mass: Addison-Wesley (1989)

[5] S. Fry, *The Ode Less Travelled: Unlocking the Poet Within.* London: Arrow (2007).

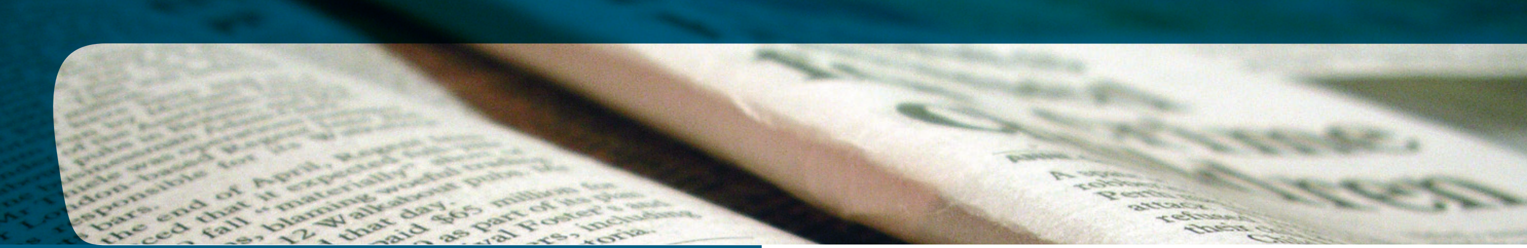
[6] L. Schimel, *Poetic license: some thoughts on sestinas. Writing-World.com* published online at *www.writing-world.com/poetry/schimel4.shtml* accessed 20/09/2016 (2001).

[7] Sting: *Shape of My Heart*, on *Ten Summoner's Tales*, copyright 1993 UMG Recordings, Inc.

[8] C. B. Whitlow and M. Krysi, *Obsession: Sestinas in the Twenty-First Century*. Dartmouth College Press (2014).

SOBRE O AUTOR

Poul G. Hjorth é professor de Matemática Aplicada na Universidade Técnica da Dinamarca (DTU). Estudou na Universidade de Copenhaga e na Universidade da Califórnia, San Diego. É também investigador em Sistemas Dinâmicos e em Matemática Industrial.



Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

O MEU GALO É BOM CANTOR

Um casal de reformados mudou-se de cidade à procura da tão sonhada tranquilidade. Mas um galo na vizinhança não os deixava dormir. Será que os protagonistas de um dos mais exóticos processos da justiça francesa nos podem inspirar a falar de matemática?

Em 2017, um casal de recém-reformados franceses resolveu gozar a vida de uma cidade pequena. Mudou-se, por isso, para uma casa que tinham comprado há alguns anos, já a pensar numa reforma tranquila. Mas a vizinhança não era o que esperavam. Ao seu lado estava o galo Maurice.

E o galo cócóricó!

Inconformados com a impossibilidade de gozarem uma reforma cercados pelo silêncio, procuraram os tribunais. Afinal a vila de Saint-Pierre-d'Oléron, na ilha de Oléron, não é uma região rural. E eles haviam chegado primeiro. O que o avino lá fazia? Quem o levou para lá? Queriam que o silenciassem. Como? Nunca esclareceram [1]. Ver figura 1.

Mas porque cantam os galos?

Para entender esta questão, precisamos de ser apresentados a uma teoria conhecida como "sinalização", que estuda a forma como um animal transmite a outro – ou ao seu grupo – alguma informação.

Há várias razões para querer comunicar. Uma das mais importantes é transmitir aos potenciais adversários a sua própria superioridade. Imagine que dois animais da mesma espécie estejam a disputar um bem indivisível qualquer: pode ser comida, território, fêmeas, tanto faz. Tem de ser indivisível. Se um deles conseguir mostrar que sua superioridade no campo de batalha é tamanha que nem vale a pena pelejar, então terá todo o prémio sem o custo da luta.

Foi o estudo deste tipo de conflito a primeira aplicação da teoria de jogos à Biologia. Esta área da matemá-

Figura 1. A vila de Saint-Pierre d'Oléron. Aqui, quem canta de galo? **Fonte: Wikimedia Commons**

tica foi criada para o estudo das decisões estratégicas e encontrou um campo fértil na economia. Na década de 50, o matemático norte-americano John Nash mostrou que um grupo de pessoas a interagirem umas com as outras, onde cada uma tenta maximizar os seus ganhos, atinge um equilíbrio que hoje leva o seu nome.

Na década de 70, o britânico Jonh Maynard Smith estava a ler um livro que expunha a teoria de jogos. Antes de chegar à parte onde eram discutidos os resultados de Nash, percebeu que tinha em mãos os instrumentos necessários para estudar o conflito animal – e não precisaria de supor nenhum tipo de intencionalidade nas decisões, contrariamente ao seu homónimo norte-americano. Ver figura 2.

É importante notar que o biólogo não estava a tentar criar modelos realísticos, mas apenas a tentar entender porque parecia haver limitações no nível de violência entre indivíduos da mesma espécie. Classicamente, isto era explicado pelo conceito de "bem de grupo". No entanto, àquela altura, com a emergência de uma série de ideias, mais tarde conhecidas genericamente como "genes egoístas", já estava claro que este conceito não tinha fundamento.

Criou, então, uma série de pequenos modelos que mostravam, de forma simples e pedagógica, como alguns fenómenos complexos da biologia evolutiva podiam ser compreendidos a partir da interação dos diversos indivíduos que constituem uma população. O mais conhecido é provavelmente o jogo dos *Pombos e dos Falcões*, onde dois indivíduos da mesma espécie – apesar do nome – escolhem distintos níveis de agressividade. O objetivo é, como explicado anteriormente, modelar a evolução da agressividade intraespecífica no conflito por um bem indivisível. O *Falcão* luta até o fim; o *Pombo* abandona o ringue assim que percebe que o oponente está disposto a escalar a briga. Veja [2].

Fazendo algumas hipóteses sobre o valor do que está em disputa e o custo da luta, a população evolui em direção a um equilíbrio dado por um estado misto, em que alguns indivíduos mais agressivos coexistem com outros mais passivos. Mais haverá do primeiro, quanto maior for o ganho do vitorioso e menor os danos causados pela pugna.

Claro que, feito um primeiro modelo, podemos progressivamente introduzir doses de realismo. Muitos combates na Natureza incluem uma fase ritualística, onde os animais gritam, estudam-se, exibem suas *armas* (por exemplo, os chifres). Se, durante esta fase, estiver claro quem será o vitorioso, então a própria luta torna-se desnecessária. É melhor entregar a bolsa e ficar com a vida.

Em termos matemáticos, isto é modelado considerando, além das possibilidades anteriores, o tipo *Assessor*: este assessa (avalia) as capacidades do adversário e tenta chegar a uma conclusão sobre se vale a pena lutar ou não. Incluindo esta possibilidade no modelo e supondo que em cada possível embate o *Assessor* decide se se irá engajar ou não na luta com base nalguma observação das características do oponente, então prova-se que este eliminará da Natureza, com a sua estratégia mais eficiente, tanto os *Pombos* quanto os *Falcões*.

E o que são estas características? Dependendo da espécie, o peso é um excelente preditor do futuro vitorioso. Nos alces, o tamanho do chifre indica sobre quem recaem as apostas: o dono dos maiores cornos tende a ganhar a luta. Um estudo sobre os carneiros de Dall

Figura 2. O biólogo inglês John Maynard Smith, o primeiro a perceber a importância da teoria de jogos para o estudo da evolução biológica, e o carneiro de Dall, cujo comportamento – pelo menos no que se refere aos conflitos – se enquadra perfeitamente nesta teoria.

Figura 3. Explicar a beleza e a falta de funcionalidades da cauda de pavão requer um pouco mais de teoria do que o usual. Um animal desnutrido não a consegue produzir. Uma cauda como a da foto mostra saúde e serve como atrativo sexual, gerando o seu dono um maior número de descendentes.

(*Ovis dalli*) mostrou que a variabilidade do tamanho dos chifres é maior que a variabilidade do tamanho do próprio carneiro (ou seja, não é uma simples função do tamanho do bicho), que os chifres são sempre exibidos antes de um confronto e que a probabilidade de um embate diminui quando a diferença do tamanho dos chifres aumenta. Exatamente o que diz a teoria.

Não é a única forma de sinalização. Outro exemplo importante é o do tamanho da cauda do pavão. Somente um animal que já resolveu seus problemas básicos (arranjar alimento, defender o território, combater parasitas) tem recursos em abundância para investir em frondosas caudas. Assim, as fêmeas são informadas da qualidade genética daquele macho em particular. Nada muito diferente das expetativas de quem resolve comprar um carro topo de gama, diga-se. O fenómeno natural que permite a geração das caudas do pavão é a *seleção sexual*: a propagação de características não diretamente ligadas à sobrevivência devido à preferência reprodutiva dos parceiros. Ver figura 3.

E o canto do galo? Sabe-se que os galos não gastam muita energia para cantar, o que elimina a possibilidade de ser uma demonstração de força, pois seria suscetível de fraudes – uma boa sinalização tem de ser cara [3]. Cantam devido a um relógio interno (e não pela observação do nascer do sol) e os machos dominantes cantam primeiro; seguem-se, respeitosamente, outros tenores [4]. O primeiro a cantar está a definir o seu território, mas não consegue traduzir a sua dominância em maior reprodução [5].

Por outras palavras: o puzzle não está fechado. Ainda não é totalmente claro porque a Natureza resolveu conspirar contra o casal de reformados que só queria o seu canto de paz e tranquilidade.

Por falar nisso, aquele certamente não foi o mais difícil processo da História da justiça francesa. Mesmo assim, dezenas de milhares de pessoas assinaram a petição "Sauvez Maurice le coq Oléronnais". Finalmente, no verão de 2019 foi dado o veredito: o galo pode cantar, afinal é o que eles fazem. Os queixosos tiveram de pagar uma multa: quem mandou cantar de galo contra Maurice?

REFERÊNCIAS

[1] *The victory of Maurice the rooster is a win for the rural life in France*. France 24, 05/09/2019. *https://www.france24.com/en/20190905-france-maurice-rooster-oleron-fesseau-biron-andrieux*

[2] J. Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982.

[3] A. G. Horn, M. L. Leonard, and D. M. Weary, D. M. "Oxygen consumption during crowing by roosters: talk is cheap". Anim. Behav., 50:1171-1175, 1995.

[4] Tsuyoshi Shimmura, Shosei Ohashi, Takashi Yoshimura. *The highest-ranking rooster has priority to announce the break of dawn*. Scientific Reports, 5:11683, 2015.

[5] D. R. Wilson and C. S. Evans *Female fowl (Gallus gallus) do not prefer alarm-calling males*. Behaviour Vol. 147, nº. 4 (Abril de 2010), pp. 525-552

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A CONJETURA DE COLLATZ

A conjetura de Collatz é um dos mais famosos problemas em aberto da matemática. E os matemáticos têm estado ativos a investigá-la. Vamos ver alguns resultados que têm sido obtidos sobre este assunto.

A CONJETURA

Se n for um número natural, seja

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n/2 & \text{se } n \text{ for par;} \end{cases}$$

é claro que $f(n)$ também é um número natural. Consideremos o seguinte problema: dado um número natural n, se formos calculando $f(n)$, $f\big(f(n)\big)$ e assim por diante, o que é que obtemos? Para vermos alguns exemplos, vai ser usada a seguinte notação: sempre que se escrever $a \mapsto b$, o que isto significa é que $b = f(a)$.

Vamos então começar com $n = 1$. Neste caso, temos

$$1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

e, naturalmente, agora entra-se em ciclo. Ou seja, vamos sempre obter os números 4, 2 e 1, por esta ordem. Obtemos basicamente a mesma coisa se começarmos com 2 ou com 4.

Se começarmos com 3, obtemos:

$$3 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1.$$

E, se começarmos com 7, obtemos

$$7 \mapsto 22 \mapsto 11 \mapsto 34 \mapsto 17 \mapsto 52 \mapsto 26 \mapsto 13 \mapsto \\ \mapsto 40 \mapsto 20 \mapsto 10 \mapsto 5 \mapsto 16 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1.$$

Este padrão parece repetir-se: seja qual for o n inicial que tomemos, acabamos sempre por ir parar a 1. Será que é sempre assim? A afirmação de que isto, de facto, acontece sempre é conhecida por *conjetura de Collatz*, cujo nome tem origem num matemático alemão, Lothar Collatz (1910–1990), que pensou em problemas deste tipo na década de 1930, embora não seja certo se ele foi o primeiro a pensar neste problema em particular.[1] O problema só se tornou conhecido a partir de 1950; veja-se [4] para mais detalhes. A página de Eric Roosendaal sobre a conjetura de Collatz também merece ser consultada.[2]

Como a palavra «conjetura» sugere, o problema está em aberto. E é considerado muito difícil. Paul Erdös afirmou que «a matemática talvez não esteja pronta para estes problemas» e Jeffrey C. Lagarias, o autor de [4], é da opinião de que «este é um problema extraordinariamente difícil, completamente fora do alcance da matemática atual».

O QUE É QUE JÁ SE SABE?

Quando um problema está em aberto, os matemáticos que pensam nele tentam as mais diversas abordagens. Podem pensar, por exemplo, em fazer simulações por computador, tentar resolver problemas semelhantes, estudar casos particulares, e assim por diante. Vamos ver alguns resultados que têm sido obtidos relativamente à conjetura de Collatz.

É claro que este problema se presta a ser estudado por meio de computadores. E este estudo permitiu constatar que a conjetura é verdadeira para qualquer número natural com menos de 20 algarismos. Naturalmente, isto tende a levar as pessoas a pensar que a conjetura é verdadeira, mas há exemplos de outras conjeturas relativamente às quais se conseguiu provar que são válidas para todos os números até um valor muito grande mas para as quais acabou por ser possível provar que não se verificam sempre.

Ao descrever-se a conjetura de Collatz, foi mencionado o ciclo $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Haverá outros ciclos? Se houver, a conjetura será falsa, claro. Pois bem: sabe-se que, caso haja mais algum ciclo, terá de ter, no mínimo, 338 466 909 números![3] Em 1995, o já mencionado Jeffrey C. Lagarias provou, juntamente com um colega, David Applegate, que, se m for um número natural suficientemente grande, então o conjunto dos números naturais $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ para os quais a conjetura de Collatz é válida tem mais do que $m^{0,81}$ elementos; veja-se [1]. Oito anos mais tarde, o mesmo Lagarias provou, juntamente com outro colega, Ilia Krasikov, que o mesmo acontece se se usar $m^{0,84}$ em vez de $m^{0,81}$; veja-se [3]. Estes resultados permitem concluir que, mesmo que a conjetura não seja válida em geral, é válida para a maior parte dos números naturais.

Para continuar, convém introduzir uma notação apropriada. Se $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\{n, f(n), f(f(n)), \ldots\} \tag{1}$$

é um conjunto não vazio de números naturais e, portanto, tem um elemento mínimo, o qual vai ser representado por $\mathrm{Col}_{\min}(n)$. Com esta notação, a conjetura de Collatz afirma que se tem sempre $\mathrm{Col}_{\min}(n) = 1$ e é fácil ver que a conjetura é verdadeira se se conseguir provar que se tem $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n$ para cada número natural n maior do que 1. Note-se que, como n pertence ao conjunto (1), é claro que $\mathrm{Col}_{\min}(n) \leqslant n$. De facto, se n é um número natural par, $f(n) = n/2 < n$ e, portanto, em metade dos casos o conjunto (1) contém algum elemento menor do que n, ou seja, $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n$. Acontece que Riho Terras provou em [5] que para quase todos os números naturais (num sentido preciso), $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n$. Dezoito anos mais tarde, Ivan Korec provou algo mais forte: para quase todos os números naturais, $\mathrm{Col}_{\min}(n) < n^{0,8}$; veja-se [2].


Foto: Alyssa Bierce/UCLA

Recentemente, Terence Tao[4] (*foto ao lado*) publicou uma demonstração de que, se f for qualquer função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, então $\mathrm{Col}_{\min}(n) < f(n)$ para quase todos os números naturais. Aqui, o significado de «quase todos» também tem um sentido preciso, embora distinto do sentido dado por Terras.

Todos estes resultados apontam no mesmo sentido: a conjetura de Collatz é válida para uma grande proporção do conjunto dos números naturais.

QUE IMPACTO PARA O FUTURO?

Em que é que estes resultados poderão ajudar a dar origem a uma eventual demonstração da conjetura? Provavelmente pouco. A experiência histórica mostra que este tipo de resultados parciais geralmente tem pouco a ver com a resolução final do problema. Mas é um erro pôr-se ênfase nisto. Como o próprio Terence Tao fez notar,[5] é contraprodutivo que um matemático aposte unicamente em tentar resolver grandes problemas em aberto. Um dos objetivos da pesquisa em matemática consiste em ir expandindo os conhecimentos de que já dispomos e os resultados atrás mencionados enquadram-se nisto.

REFERÊNCIAS

[1] D. Applegate; J. C. Lagarias, *Density bounds for the 3x+1 problem. II. Krasikov inequalities*, Math. Comp. 64 (1995), no. 209, 427–438

[2] Ivan Korec, *A density estimate for the 3x+1 problem*, Math. Slovaca 44 (1994), nº.1, 85–89

[3] I. Krasikov; J. C. Lagarias, *Bounds for the 3x+1 problem using difference inequalities*, Acta Arith. 109 (2003), nº.3, 237–258

[4] J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem*, American Mathematical Society (2010)

[5] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. 30 (1976), nº. 3, 241–252

1 Podem ser vistas as recordações de Collatz sobre o início do seu envolvimento neste problema em *http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/goodies/ubersetzung/html/ubersetzung.html*

2 *http://www.ericr.nl/wondrous/*

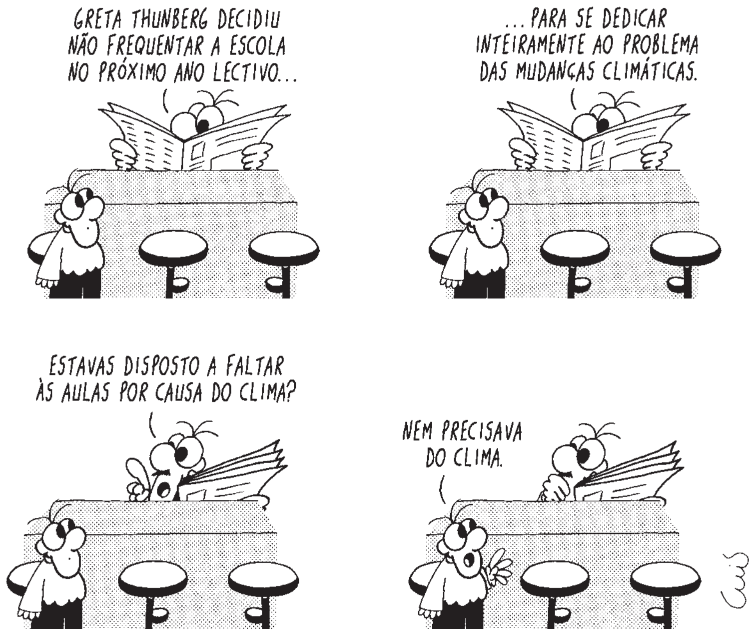
3 *http://www.ericr.nl/wondrous/cycles.html*

4 *https://terrytao.wordpress.com/2019/09/10/almost-all-collatz-orbits-attain-almost-bounded-values/*

5 *https://terrytao.wordpress.com/career-advice/dont-prematurely-obsess-on-a-single-big-problem-or-big-theory/*

BARTOON

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 06/09/2019. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Ana Cristina Moreira Freitas Universidade do Porto
Daniel Pinto Universidade de Coimbra

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **Humberto Bortolossi** Universidade Federal Fluminense, Brasil • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **José Francisco Rodrigues** Universidade de Lisboa • **José Miguel Rodrigues de Sousa** Agrupamento de Escolas de Mangualde • **Lina Fonseca** Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo • **Manuel Domingos Cadete** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Paulo Correia** Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal • **Peregrino Costa** Universidade de S. Tomé e Príncipe, São Tomé e Príncipe • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
Fid'algo – Print Graphic Design
Rua da Nau Catrineta n 14 2º Dtr 1990-186 Lisboa

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

ALGORITMOS GENÉTICOS E OTIMIZAÇÃO

José Ricardo Potier de Oliveira

aposentado pelo Instituto de Pesquisas da Marinha, Brasil

jricpotier@gmail.com

INTRODUÇÃO

Otimização é um conhecido ramo da matemática cujo objetivo é encontrar valores de parâmetros, que definem uma função que modela um problema, e de modo a que esta função atinja o seu valor máximo, ou mínimo, dependendo da natureza do problema. A otimização é muito útil em diferentes campos de atuação humana, como economia, transportes, logística, produção e vários outros. O clássico problema do caixeiro viajante é um exemplo típico de aplicação de otimização. Neste caso, tenta-se achar a melhor rota para um caixeiro viajante percorrer um certo número de cidades, sem passar duas vezes pela mesma, e voltando ao ponto de partida. Problemas de otimização vão-se tornando cada vez mais complexos à medida que se aumenta a complexidade da função objetivo, bem como o número de parâmetros, a verosimilhança da não linearidade da função objetivo e a existência de restrições no problema. Para tais casos o uso de Algoritmos Genéticos (AGs) tem levado a resultados excelentes.

Os AGs foram introduzidos por John H. Holland [1] e David E. Goldberg [2], e constituem métodos de busca inspirados nos mecanismos naturais de seleção, adaptação e evolução de populações de seres vivos, procurando atingir uma solução ótima para o problema proposto.

Numa breve (e incompleta) taxonomia dos métodos de otimização podemos classificá-los em métodos determinísticos e métodos probabilísticos. Dentro dos métodos probabilísticos encontramos os Algoritmos Evolutivos ou Evolucionários, estando os AGs nesta última classe.

> Algoritmos Genéticos são uma poderosa ferramenta na abordagem de problemas complexos de otimização, envolvendo muitas variáveis, parâmetros e restrições.

A INSPIRAÇÃO NA NATUREZA

Na Natureza os indivíduos com melhor adaptação ao ambiente são, geralmente, os que sobrevivem por mais tempo *(seleção natural)*, conseguindo reproduzir-se. A reprodução entre dois indivíduos que sobreviveram à seleção natural faz com que o material genético de ambos se misture, gerando descendentes com características de ambos os progenitores. Esta mistura (ou *cruzamento*) entre melhores indivíduos traz a tendência para que as novas gerações apresentem, cada vez mais, indivíduos mais bem adaptados do que os de gerações anteriores. De forma esporádica, com uma frequência muito pequena, uma *mutação* genética pode ocorrer em poucos indivíduos de uma geração para outra. Esta mutação pode levar a um salto na evolução, produzindo um indivíduo superior, com mais chances de sobreviver à seleção natural, e que vai transmitir as suas características genéticas à próxima geração. Também pode ocorrer que a mutação produza um indivíduo pior, que muito provavelmente será eliminado na etapa da seleção natural. Desta forma, repetindo por séculos as etapas de seleção, cruzamento e mutação, a Natureza promove uma constante melhoria na capacidade de adaptação e sobrevivência dos indivíduos de uma espécie.

DA INSPIRAÇÃO BIOLÓGICA PARA O ALGORITMO

O AG básico vai adotar a mesma estratégia evolutiva que a mãe Natureza, e vai trabalhar com operadores *seleção*, *cruzamento* e *mutação*. Partimos de um conjunto inicial de possíveis “soluções” (ou soluções-candidatas) do nosso problema, geradas aleatoriamente, que representam uma população inicial, sendo cada uma destas soluções-candidatas um indivíduo da população inicial. Cada um destes indivíduos será representado por uma estrutura de dados, que será denominada de *cromossoma*. Para exemplificar, vamos considerar um problema simples (que obviamente não necessita de ser resolvido por AG), como o de encontrar o mínimo da função

$$f(x) = x^4 - \frac{13}{2}x^3 + \frac{203}{16}x^2 - \frac{257}{32}x + \frac{85}{16}.$$

Vamos admitir, *a priori*, que a solução x_{min} se encontra no intervalo [0, 4], e que pretendemos que a mesma tenha precisão de três casas decimais. Assim, teremos 4001 valores que podem ser a solução procurada. É claro que este é um problema simples, e testar todas as possibilidades não levaria muito tempo para um computador. Mas este exemplo serve para outro propósito: mostrar como representar cada indivíduo da população, para trabalhar mais facilmente as etapas seguintes: cruzamento e mutação. Vamos associar a cada valor do conjunto onde sabemos que está a solução do problema, com a precisão requerida, uma palavra binária com 12 bits ($2^{12} = 4096$), cobrindo toda a faixa de valores. Assim, os valores binários vão representar diretamente as possibilidades de solução, pois 000000000000=0 e 111111111111=4095. Seguidamente geremos aleatoriamente uma população inicial com seis indivíduos (correspondentes a seis valores de x). Deve-se destacar que, dependendo do problema, muitas outras formas de representação binária são possíveis (e mesmo não binária). O gráfico da função e a população inicial podem ser vistos na figura 1. A representação binária de cada um dos seis indivíduos da população inicial são os valores de x dos pontos no gráfico, e equivalem a um cromossoma na comparação com o processo biológico.

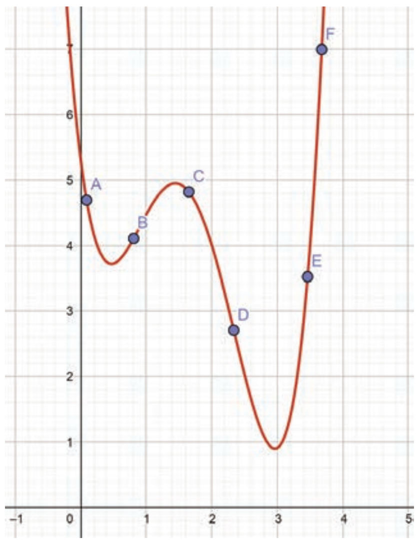


Figura 1. Gráfico da função objetivo e população inicial.

SELEÇÃO

Neste ponto, precisamos de estabelecer a "aptidão" de cada indivíduo em resolver o problema. Neste exemplo simples é claro que os indivíduos mais "aptos" são os que fornecem os menores valores de $f(x)$, já que procuramos o seu mínimo. Então, a própria $f(x)$ também nos serve como função aptidão (função objetivo). No entanto, em problemas mais complexos, estabelecer uma função aptidão adequada é um passo importante que depende da habilidade em representar o problema.

Observando-se o gráfico, podemos ver que os três menores valores de $f(x)$ são dados pelos pontos B, D e E. O processo seguinte é a seleção destes três indivíduos e o descarte de A, C e F, por serem os menos aptos. Na prática, não conhecemos a forma da função objetivo, e são técnicas e algoritmos típicos em AGs que realizarão a seleção (torneio, roleta, etc.). No entanto, estes não serão apresentados aqui, pois é mais apropriado fazê-los num curso sobre AGs, devido à extensão do assunto. Sendo assim, vamos apenas admitir que algum algoritmo selecionou as três melhores soluções entre as disponíveis na população inicial.

CRUZAMENTO

O próximo passo é fazer com que os indivíduos mais aptos se cruzem entre si, para criar uma nova geração de indivíduos que, teoricamente, podem ser mais aptos. Esta etapa é simples quando utilizamos cromossomas binários: sorteia-se uma posição de corte para um par de cromossomas (*pais*) e trocamos as suas partes, como demonstrado na Figura 2. Desta forma, podemos, por exemplo, cruzar B com D, B com E e D com E, sorteando pontos de corte para cada par de cromossomas e gerando três novos indivíduos (*filhos*) para substituir os eliminados.

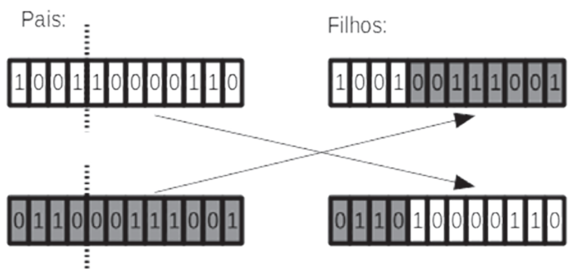


Figura 2. Operação Cruzamento.

MUTAÇÃO

O passo seguinte é realizar a mutação de alguns bits, como mostrado na figura 3, nos indivíduos da população, escolhidos aleatoriamente com uma pequena probabilidade (tipicamente entre 0,1% e 5%). Assim, no nosso exemplo, com seis indivíduos com 12 bits cada, teremos $12 \times 6 = 72$ bits. Se usarmos uma probabilidade de 4% de ocorrência de mutação, teremos aproximadamente 3 bits ($0,04 \times 72 = 2,88$), que terão os seus valores invertidos, considerando toda a população.

Após este passo, voltamos aos passos de avaliação desta população, seleção dos indivíduos mais aptos, cruzamento e mutação, até que algum critério de término seja satisfeito. Resumidamente, o AG básico é representado como:

- Início
- Iniciar população
- **Avaliar** indivíduos da população
- Repetir
    - **Selecionar** indivíduos para reprodução
    - Executar **cruzamento**
    - Executar **mutação**
    - **Avaliar** indivíduos da população
- Até
- Critério de parada satisfeito
- Fim

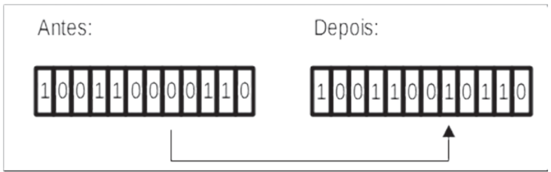


Figura 3. Operação Mutação.

CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS SOBRE UM MODELO PARA ESTRATÉGIAS DE COMBATE

A definição de uma função objetivo que avaliará as soluções-candidatas, a representação dos dados do problema em forma de cromossomas, bem como possíveis estratégias e algoritmos para executar as operações de seleção, cruzamento e mutação são parte essencial da aplicação de AGs, e podem ter várias formas. Novamente, tais matérias não serão detalhadas aqui, por ser mais apropriado fazê-lo num curso mais completo sobre AGs. Aqui faremos apenas a ilustração de alguns aspetos práticos através de um exemplo que é apresentado com detalhe em [3]. O problema consiste em criar a simulação de uma estratégia (solução) de combate ótima, de uma força naval aliada contra outra inimiga. A força inimiga vai apresentar um número arbitrário e fixo de navios e seus armamentos, e a estratégia de combate é definir quantos e quais navios da frota aliada enviar para combate. A complexidade do problema consiste no facto de que cada força possui um conjunto de armamentos: a frota aliada possui até nove navios, com 1 a 5 armas por navio, cada arma com uma probabilidade de acertar o alvo em função da distância, um custo financeiro por arma efetivamente utilizada, e um risco envolvido, devido à capacidade de reação da frota adversária. A função objetivo, *MoE*, (do inglês *Measure of Effectiveness*) foi idealizada refletindo estas três considerações e a solução ótima é encontrar a combinação de quantos navios, e que armas utilizar e a que distância permanecer. Existe um cálculo de a probabilidade do navio acertar o seu alvo em função da distância a que ele se encontra, denominado $MoE_{AcProbDamage}$, cálculo adaptado de [4], que deve ser maximizado. Uma segunda parte da função objetivo é denominada MoE_{AcCost}, a qual estima o custo financeiro relativo de cada arma usada na estratégia (que deve ser minimizada), e uma terceira parte avalia o risco que representa aquela estratégia, MoE_{Risk}, devido à capacidade de reação do inimigo (que deve ser minimizada). A função objetivo a ser maximizada é, então, definida como:

$$MoE = MoE_{AcProbDamage} + (1 - MoE_{AcCost}) + (1 - MoE_{Risk}).$$

Neste problema, a população inicial era de 100 indivíduos. Cada possível solução (cromossoma) para o problema considera um número diferente de navios da força aliada, com seus armamentos, e a diferentes distâncias da frota inimiga. Essa forma de representação leva-nos a ter cromossomas de tamanho variável, uma interessante possibilidade dos AGs que demonstra a sua versatilidade na busca de soluções, como representado na figura 4, em que é mostrada a forma de executar o cruzamento. Evidentemente são necessários algoritmos que impeçam algumas combinações que não podem ser permitidas.

A mutação, nesta forma de representação, pode ser simplesmente a troca de um navio do cromossoma por outro que não está presente.

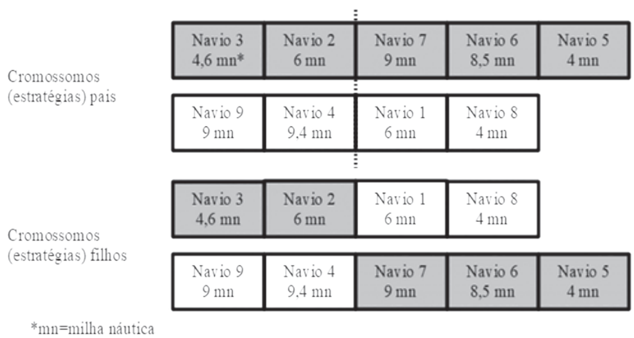


Figura 4. Cruzamento implementado em [3].

Tabela 1. Soluções em [3]

Navio	Cenário 1		Cenário 2		Cenário 3	
	Selecionado	Distância	Selecionado	Distância	Selecionado	Distância
1	Sim	0,3 mn	Não	-	Não	-
2	Sim	1,8 mn	Não	-	Não	-
3	Sim	0,3 mn	Sim	13,87 mn	Sim	33,83 mn
4	Sim	0,24 mn	Sim	0,22 mn	Sim	0,06 mn
5	Sim	0,15 mn	Sim	0,76 mn	Sim	0,09 mn
6	Sim	0,05 mn	Sim	0,49 mn	Sim	1,62 mn
7	Sim	0,15 mn	Sim	0,73 mn	Sim	0,2 mn
8	Sim	1,31 mn	Sim	0,19 mn	Sim	1,06 mn
9	Sim	1,98 mn	Sim	0,17 mn	Não	-

Os testes realizados em [3] consideraram três cenários, sempre com a frota aliada dispondo de até nove navios, com as características descritas anteriormente. No cenário 1, a força inimiga apresenta-se com uma frota com poderio igual ao total da frota aliada. O resultado do algoritmo determina o envio da frota aliada completa, especificando as distâncias a serem mantidas. No cenário 2, a frota inimiga apresenta-se com quatro dos seus navios com maior poderio. No último cenário, a frota inimiga apresenta-se também com quatro navios, porém de menor poderio bélico. Os resultados são sintetizados na tabela 1.

Um especialista militar foi convidado a resolver os mesmos cenários, e os resultados foram compatíveis com os obtidos com o AG ([3]).

INTERPRETAÇÃO DO FUNCIONAMENTO E VULNERABILIDADES DOS AGS

A função aptidão projetada para o problema representa uma superfície em $\mathbb{R}^n$, repleta de vales e picos, a partir da qual se procura encontrar um pico (ou vale, dependendo do problema) que seja uma solução satisfatória. Satisfatória, pois nem sempre é ótima, uma vez que existem muitos máximos (ou mínimos) locais nesta superfície, e o AG não nos garante que o máximo (ou mínimo) global foi atingido.

Em problemas mais complexos, com muitas variáveis e parâmetros, com caraterísticas não lineares, restrições, objetivos múltiplos, grandes espaços de busca, etc., a visualização de gráficos como o da figura 1 não é possível, devido à complexidade e à dimensionalidade da superfície em $\mathbb{R}^n$, e técnicas matemáticas clássicas são difíceis de ser utilizadas. Nestes casos, o emprego do AG tem-se mostrado muito eficaz na resolução destes problemas.

Os indivíduos de cada geração são pontos pertencentes a esta superfície, espalhados aleatoriamente por ela, e que serão avaliados quanto ao seu grau de validade como solução (função aptidão). A seleção elimina pontos que não apresentam resultados satisfatórios e mantém os outros para a etapa de cruzamento, quando se espera que a combinação de dois indivíduos selecionados venha a produzir outro que esteja mais próximo do resultado procurado (máximo ou mínimo). A mutação representa um salto aleatório na superfície de busca, que pode levar a regiões até então não exploradas da mesma. Tais características colocam os AGs como métodos de busca probabilística, porém com uma ação direcionada, não caracterizando uma procura completamente aleatória.

É preciso, no entanto, ressaltar alguns factos quanto à utilização dos AGs e problemas relacionados: a escolha do tamanho da população, das taxas de mutação e cruzamento, do ponto de corte dos cromossomas pais, e outras características de projeto dos AGs são escolhas que seguem muito mais o empirismo e a intuição do projetista do que regras determinísticas. Más escolhas podem levar o algoritmo a problemas de convergência (lentidão ou convergência prematura sem atingir resultado satisfatório). O tamanho da população, por exemplo, deve ser compatível com a superfície de busca. Poucos indivíduos podem não ser representativos do espaço de busca, e o algoritmo pode convergir para um mínimo local não satisfatório. Por outro lado, muitos indivíduos podem tornar o algoritmo lento. Taxas altas de mutação podem levar a perda de bons indivíduos, taxas baixas podem deixar regiões da superfície de busca sem serem exploradas. Em suma, a utilização de AGs pode ter de passar por experiências e ajustes até se encontrar a solução satisfatória, mas ainda assim é um método bastante eficaz na solução de problemas complexos de otimização.

REFERÊNCIAS

[1] Holland, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT Press, 1975.

[2] Goldberg, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.

[3] Rangel, P., Oliveira, J. R. Potier, Carvalho, J. G., Lima, B. S. L. P., Guimarães, S. *A Fuzzy Evolutionary Simulation Model (FESModel) for Fleet Combat Strategies*. GECCO 2013. Proceedings of the 15th annual conference companion on Genetic and evolutionary computation, 2013.

[4] Wagner, D. H. *Naval Operations Analisys*. Naval Institute Press, 1999.

SOBRE O AUTOR

José Ricardo Potier de Oliveira é engenheiro eletrónico, e possui mestrado em Processamento de Sinais pela COPPE/UFRJ. É aposentado pelo Instituto de Pesquisas da Marinha, órgão da Marinha do Brasil, onde trabalhou com o desenvolvimento de sistemas navais e processamento de radar. Foi também professor da Universidade Santa Úrsula e da Faculdade Cenecista da Ilha do Governador, no Rio de Janeiro, Brasil.

AUTOR

André Gonçalo Dias Pereira

Universidade de Coimbra

andreper@fd.uc.pt

O MÉDICO-ROBÔ E OS DESAFIOS PARA O DIREITO DA SAÚDE: ENTRE O ALGORITMO E A EMPATIA

A antiga profissão de médico pode estar a viver as últimas décadas da sua existência, sendo substituído por outra forma de prestação de cuidados de saúde, em que o potencial da Inteligência Artificial (IA) para ganhar terreno nessa área da sociedade se afigura imenso.

O DIREITO DA SAÚDE ESTÁ EM GRANDE TRANSFORMAÇÃO!

Aos temas clássicos, ainda e sempre polémicos, como (1) a responsabilidade em saúde (civil, penal, ou administrativa), (2) os direitos dos pacientes, designadamente o consentimento informado, o sigilo médico, a regulação do processo clínico, a proteção de dados pessoais, (3) a organização do sistema de saúde e o direito hospitalar, juntam-se agora no Direito da Saúde temas como, (1) o envelhecimento e os direitos das pessoas com incapacidade, 2) a sustentabilidade dos sistema de saúde e seu financiamento, (3) a proibição de transformar o corpo humano ou as suas partes, enquanto tais, numa fonte de lucro e (4) todas as temáticas do fim de vida: cuidados paliativos, eutanásia, distanásia, entre outros.

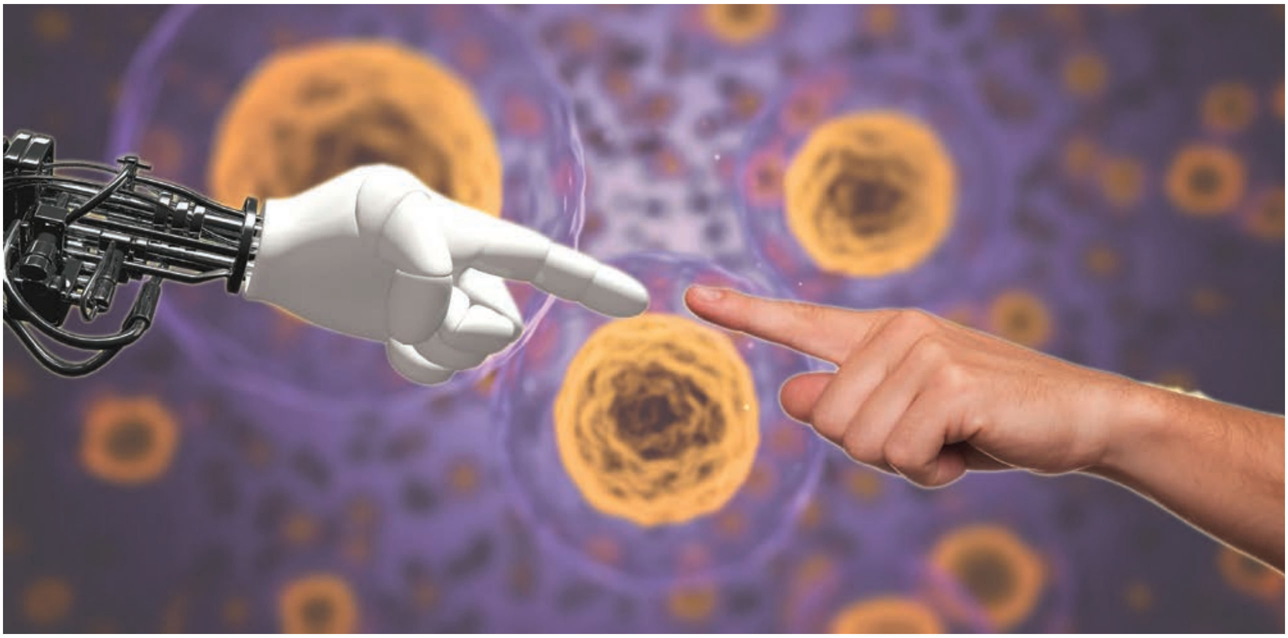
De todos, as dinâmicas que – a meu ver – mais vêm revolucionar o pensamento em torno desta área do Direito e da Bioética são os desafio dos big data, da digitalização, da robotização e da inteligência artificial na medicina. Dinâmicas nas quais a matemática está profundamente envolvida, em conexão com a genética e a bioinformática, abrindo campo à terapia génica e à medicina personalizada.

Vêm-se identificando[1] várias áreas como determinantes da medicina do futuro. Destacamos aqui os temas relativos à inteligência artificial, ao processo clínico eletrónico, aos medicamentos personalizados, ao atendimento personalizado e à medicina preditiva. A interação entre a genética, os *big data* e a inteligência artificial afigura-se colossal e irá transformar o mundo da prestação de cuidados de saúde!

Cuidados de saúde e big data são os principais tópicos de pesquisa científica e investimento financeiro nos últimos anos, beneficiando de grandes investimentos das grandes indústrias monopolistas ou oligopolistas da informática, e acredita-se que aumentem significativamente no futuro próximo, não só por razões de crescimento de mercado, mas também com base em pressupostos filosóficos de radical transformação, que passam pela estreita ligação entre os líderes da economia digital e o pensamento filosófico denominado de trans-humanismo ou pós-humanismo, de que se destacam nomes como os de David Pearce, Nick Bostrom, Max More, David Wood e José Luís Cordeiro.

Esta evolução acarreta riscos na transformação da prestação de cuidados de saúde ao ponto de podermos questionar se a continuidade de muitos profissionais de

[1] Cf. o *Portal da Telemedicina* identifica os seguintes vetores: 1) Telemedicina, 2) Inteligência artificial, 3) Internet das Coisas (IoT), 4) Monitoramento remoto e em tempo real, 5) Prontuário eletrónico, 6) Robótica em cirurgias, 7) Biônica e impressões 3D, 8) Intercâmbio de informações em cidades inteligentes, 9) Medicamentos personalizados, 10) Atendimento personalizado, 11) Medicina preditiva.



saúde pode estar em causa. Pensemos no caso paralelo das agências de viagem. Hoje, muitos de nós compram os seus bilhetes de avião e mesmo programas de turismo através da internet, dispensando o contacto humano. No futuro, uma aplicação ou um site especializado, na área médica, poderá fazer-nos prescindir de consultas presenciais ou mesmo por telemedicina? Grandes empresas da área da informática e das tecnologias da informação estão interessadas em desenvolver esses serviços! Assim, imaginar um confronto entre a máquina (IA e robótica) e os seres humanos não é ficção científica (Gerd Leonhard), em especial na área ou no mercado da saúde!

A medicina é assim desafiada pelas ciências da computação e pela economia digital. A matemática desempenha um papel de liderança nesta quarta revolução industrial que também afeta as principais atividades intelectuais tradicionais, como medicina e enfermagem.

Perante este quadro de desenvolvimento tecnológico e esta mutação das relações humanas e das relações humano-máquina, as reflexões ética e jurídica estão considerando várias questões: a proteção de dados e a privacidade, incluindo das informações genéticas, bem como o direito de manter uma interface humana em situações vulneráveis que surgem de doenças.

Estas transformações inserem-se na "Quarta Revolução Industrial", termo cunhado por Klaus Schwab, presidente executivo do Fórum Económico Mundial, que aponta para "mudanças radicais e desafios resultantes das tecnologias emergentes (novas biotecnologias, inteligência artificial, computação quântica, etc.) e as suas consequências sociais e políticas." Acrescenta que "os avanços nas neurotecnologias e nas biotecnologias já nos obrigam a questionar o que significa ser humano..." Mas destaca que todos podem e devem ter uma palavra a dizer sobre a forma como as novas tecnologias os influenciam. (...) e receia que "sistemas facciosos venham a acentuar as desigualdades e a pôr em causa os direitos das pessoas de todos os países [1].

Assim, o debate público e democrático é imperativo e urgente. Como afirmou Stephen Hawking: «Um mundo em que apenas uma superelite reduzidíssima fosse capaz de compreender a ciência e a tecnologia avançadas e as suas aplicações seria, do meu ponto de vista, um mundo perigoso e limitado.»

E, digamos desde já: a luta que se nos depara é pelo direito a manter relações humanas![2]

No plano normativo internacional podemos elencar alguns documentos, designadamente: o Conselho da Europa conseguiu a aprovação por dezenas de Estados da Convenção dos Direitos Humanos e a Biomedicina (1997).

A UNESCO aprovou a *Declaração Universal sobre o Genoma Humano e os Direitos Humanos* (1997) e a *Declaração Internacional sobre os Dados Genéticos Humanos* (2004).

A Organização Mundial de Saúde emitiu recentemente a "*WHO guideline recommendations on digital interventions for health system strengthening*" (2019).

A Lei de Bases da Saúde aprovada em julho de 2019[3] prevê na sua Base 11 (Saúde e genómica) as seguintes normas:

> "O Estado reconhece a importância da genómica no âmbito da saúde pública, devendo a lei regular a genómica para fins terapêuticos, a realização de testes e o conhecimento de base de dados para prestação de cuidados de saúde e investigação, no respeito dos seguintes princípios:
>
> a) Dignidade e direitos de todas as pessoas, independentemente das suas características genéticas;
>
> b) Consentimento livre e esclarecido em matéria de testes genómicos preditivos, realizados em contexto de saúde e precedidos do indispensável aconselhamento genético;
>
> c) Confidencialidade dos dados genómicos associados a uma pessoa identificável;
>
> d) Não discriminação injustificada, com base nas características genéticas da pessoa, em particular se associadas a doença ou deficiência;
>
> e) Liberdade de investigação científica na área da genómica, atenta a sua importância para a melhoria da saúde dos indivíduos e da Humanidade;
>
> f) Ampla divulgação dos conhecimentos disponíveis na área da genómica e promoção do seu intercâmbio a nível nacional e internacional."

Esta Base é, em regra, de aplaudir. Mas este apelo final à "promoção (!) do intercâmbio a nível internacional"... de informação genética pode merecer críticas por parte daqueles que se preocupam com a soberania nacional e a proteção dos direitos humanos dos cidadãos nacionais, face às determinadas investidas das indústrias da bioinformática e dos *big data*. Compete ao legislador, às administrações de saúde e às comissões de ética zelar para que este "petróleo do século XXI" – os dados de saúde (máxime genéticos) – não seja exportado numa relação de neocolonialismo.

O tratamento como *big data* da informação disponível no processo clínico eletrónico, acompanhando a revolução genética leva à revolução da bioinformática. O zénite do debate está em torno da chamada medicina personalizada. Trata-se de um novo modelo de medicina que analisa em pormenor o fenótipo e o genótipo de cada indivíduo com o objetivo de definir uma apropriada estratégia terapêutica e o momento certo de a introduzir e, ainda, de identificar as doenças para que este está predisposto e o momento útil e a forma de as prevenir ou minorar.

A medicina de precisão apresenta como vantagens: (1) identificar doenças mais cedo (diagnóstico preciso), (2) reduzir os encargos do tratamento e (3) adequar o tratamento ao doente (farmacogenómica). Com efeito, vivemos ainda no tempo da "imprecisão na terapêutica" [2]; estima-se que em elevadas percentagens os medicamentos não produzam os efeitos desejados aquando da prescrição.

Por outro lado, esta medicina de precisão tem consequências sociais, no plano da saúde pública, sendo expectável uma maior capacidade de identificação de risco de patologias em pessoas saudáveis, o que conduz: (1) a um critério individual e mais precoce, (2) à promoção de estilos de vida adequados (mesmo para combate a doenças comuns) e (3) ao não aparecimento de nova patologia ou esta patologia será minorada pelo início correto da terapêutica. Todas estas vantagens têm um preço: a exigência do cumprimento de normas por parte do individuo irá aumentar, ou seja, enfrentamos o desafio de uma sociedade cada vez mais medicalizada. Alguns, como o filósofo português Manuel Curado, [3] de forma provocadora, relembram os riscos do "projeto totalitário" (!) da "saúde para todos, em todas as idades", que os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável apregoam (objetivo 3), riscos de apagamento da autonomia e da individualidade da pessoa humana, livre e responsável.

No plano da genética clínica, a tendência será a existência de um critério alargado de realização de exames complementares de diagnóstico. Os riscos desses exames genéticos de largo espetro são o surgimento de efeitos colaterais indesejáveis em exames sem interesse clínico, os efeitos secundários (psicológicos e físicos) da realização de múltiplos exames e o aumento da maleficência e da perda de autonomia.

No plano societário, esta medicina de precisão deve ser vista com muita cautela, pois pode conduzir a uma iniquidade em relação aos gastos de saúde e à falta de preparação psicológica das populações para receberem informações impostas sobre riscos de futura doença com consequências totalmente imprevisíveis.

---

[2] "A defesa de relacionamentos humanos será um dos principais desafios da bioética nas próximas décadas!" (Michael Cook, BioEdge)

[3] Lei n.º 97/2019, de 4 de setembro.

Assim sendo, na linha do que ensina a Professora Heloísa Santos, devemos apostar na: (1) educação da população, em particular na área da Genómica, mas com a maior urgência, preparar, desde já: a) os Técnicos de saúde (apoio pedagógico por médicos geneticistas); b) Legisladores e políticos; (2) Criação duma Comissão Nacional de Avaliação das vantagens da medicina personalizada, que não poderá abdicar na sua composição da presença de médicos, nomeadamente de saúde pública e geneticistas clínicos na sua composição: (3) Prévia avaliação criteriosa da capacidade, inclusive financeira, de cada país, em participar de imediato neste experimental e dispendioso modelo de medicina. [4]

Com efeito, a informação genética tem características especiais: ela é involuntária, indestrutível, permanente, imutável, familiar e pré-sintomática. Donde, o acesso à informação genética coloque vários riscos para os direitos humanos.

1) A **discriminação injustificada** dos portadores de determinadas variações deve ser impedida, pois pode privar certas pessoas do acesso a direitos fundamentais, à educação, ao trabalho, à habitação, a constituir família, apenas por razões de probabilidades de vir a desenvolver doenças genéticas, privando assim a sociedade de beneficiar do contributo de muitos de nós e afastando da "comunidade" tantos de nós. Nesse sentido, a Lei n.º 12/2005, de 26 de janeiro, regula a informação genética pessoal e à informação de saúde e prevê no n.º 1 do artigo 11.º: "1 − Ninguém pode ser prejudicado, sob qualquer forma, em função da presença de doença genética ou em função do seu património genético," além de prever certas proibições relativas ao uso de testes genéticos nas áreas dos seguros (art. 12.º) do trabalho (art. 13.º) e da adoção (14.º). Os riscos de discriminação são hoje já sentidos em alguns sistemas de saúde em que se aplicam estimativas de anos de vida ajustados pela qualidade, afetando os tratamentos que são cobertos e orientando as decisões de contratação, empréstimo ou seguro de saúde.

2) A **confidencialidade** assume ainda maior importância num tempo em que a informação clínica é entregue a sistemas informáticos expostos a grandes riscos de ataques por parte de empresas de *big data*, que usam a nossa informação como o petróleo do século XXI, donde o reforço das precauções e a proteção dos dados pessoais assume extrema relevância atualmente. Por isso, a União Europeia produziu o Regulamento Geral de Proteção de Dados[4] e entre nós, foi recentemente publicada a Lei n.º 58/2019, de 8 de agosto, que procura compatibilizar a organização jurídica nacional com o novo Regulamento de Proteção de Dados. A regulação e a proteção dos biobancos assume uma especial importância neste tempo de investigações na área da bioinformática.[5]

3) A medicina personalizada apresenta o risco de **eliminar a autonomia**, ainda mesmo em tempos pré-sintomáticos, pois os sistemas de informática digital vão dar regras de conduta e orientações preventivas, ao nível dos estilos de vida e a medicação preventiva, ao qual o cidadão terá dificuldade de resistir. E numa fase sintomática, o elevado grau de fiabilidade do tratamento aconselhado reduz a margem de tratamentos alternativos ou mesmo de uma "razoável" recusa de tratamentos.

4) Também o **direito a não saber** sairá provavelmente prejudicado, pois a capacidade de antecipar problemas clínicos futuros e a disponibilização de informação ao paciente, sem lhe dar a hipótese de querer saber e de querer não saber, colocam esse direito em causa.

5) Por fim, antevemos que a medicina personalizada acentue a **desigualdade de acesso**, potencie o alto custo da medicina, sendo mais um fator de perturbação do princípio da justiça no acesso aos cuidados de saúde. Esta medicina é muito cara e os sistemas de saúde não estão em condições de os oferecer de forma universal.

UMA MEDICINA MAIS PERSONALIZADA!

Perante este quadro, o que se exige dos profissionais de saúde e dos médicos? Mais humanismo!

Urge reconstruir uma relação médico-doente com base na empatia. A empatia é a capacidade de entender ou sentir o que outra pessoa está experimentando dentro do seu quadro de referência, ou seja, a capacidade de se colocar na posição de outrem.

Os médicos devem recuperar a velha arte de cuidar e curar. O consentimento informado assume-se como o instrumento moderno privilegiado para o reforço desse elo dialógico. Mais do que medicina personalizada, precisamos de medicina humanizada, o que nos levanta um conjunto de interrogações: (1) Teremos o direito ao contacto humano, designadamente perante a robotização da medicina e a telemedicina? (2) Estará garantido o direito à confidencialidade dos dados médicos e o direito a não saber? (3) O direito a um futuro aberto e à autodeterminação, num quadro de abundância de informação genética e de *big data* que conseguem dar respostas a perguntas ainda não formuladas?

Neste âmbito destaca-se o enunciado pelo Parlamento Europeu das regras europeias de direito civil em robótica, *http://www.europarl.europa.eu/doceo/document/TA-8-2017-0051_PT.html?redirect*. Em concreto, sobre os **robôs de assistência**, escreve-se:

> "Destaca que o contacto humano é um dos aspetos fundamentais do cuidado humano; considera que substituir o fator humano por robôs pode desumanizar as práticas de assistência.
>
> Sobre os robôs médicos, sublinha a relevância da formação e da preparação adequadas para médicos e prestadores de cuidados, a fim de assegurar o mais elevado nível possível de competência profissional, bem como proteger a saúde dos doentes.
>
> Este primeiro documento europeu precisará de aprofundamento e de aperfeiçoamento. Mas uma linha de força se destaca da sua redação: o direito a manter contactos humanos!
>
> Nesta mesma linha de preocupações, acompanhamos, o futurologista Gerd Leonhard [5], que propõe «cinco [novos] direitos humanos básicos (...) para integrar um futuro Manifesto de Ética Digital:
>
> 1. O direito de permanecer natural, ou seja, biológico [… existir num estado não aumentado…]
> 2. O direito de ser ineficiente se e quando tal definir a nossa humanidade [… podermos escolher ser mais lentos…]
> 3. O direito a desligar [… da conectividade, de "desaparecer" da rede…]
> 4. O direito a ser anónimo [… termos a opção de não sermos identificados e localizados…]
> 5. O direito a empregar ou envolver pessoas em vez de máquinas [… empresas e empregadores não serem prejudicados se quiserem utilizar pessoas…] »"

EMPATIA PRECISA-SE!

O *Admirável Mundo Novo* que temos o privilégio de viver nestas gerações de 2020-2050 oferece-nos instrumentos extraordinários de disseminação do conhecimento e das possibilidades de prestação de cuidados de saúde em terras mais distantes, através da telemedicina, a custos mais baixos em muitos diagnósticos, com recurso à inteligência artificial, e da prevenção da doença em larga escala, graças à bioinformática e à medicina personalizada. Mas esta nova medicina digital – realçámos neste texto – coloca fortes riscos de iniquidade no acesso à medicina (de precisão) e, em geral, pode conduzir à violência de uma medicina sem rosto humano e sem empatia. Urge assim garantir que os centros de decisão não serão apoderados pelos senhores da economia digital!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] SCHWAB, Klaus, *Moldando a Quarta revolução industrial*, Prefácio 2018.

[2] SCHORK, Nicolas J., "Time for one-person trials", *Nature,* 30 de abril de 2015, 520,610.

[3] Cf. CURADO, Manuel; FERREIRA, Ana; PEREIRA, André (Coord.), *Vanguardas da Responsabilidade: Direito, Neurociências e Inteligência Artificial*, Coimbra, Petrony, 2019.

[4] SANTOS, Heloísa; PEREIRA, André, *Genética para Todos – de Mendel à Revolução Genómica do Século XXI – a prática, a ética, as leis e a sociedade*, Lisboa, Gradiva, 2019.

[5]LEONHARDT, Gerd, *Tecnologia versus Humanidade - o confronto futuro entre a Máquina e o Homem*, Gradiva, 2019.

Nota sobre o Autor

André Gonçalo Dias Pereira, professor da Faculdade de Direito da Universidade de Coimbra; diretor do Centro de Direito Biomédico; membro do Conselho Nacional de Ética para as Ciências da Vida (desde 2015), governor da Associação Mundial de Direito Médico (2012-2016); fellow do European Centre on Tort and Insurance Law.

Coordenação do espaço PT-MATHS-IN:
Paula Amaral, Universidade Nova de Lisboa, *pt-maths-in@ spm.pt*.

NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

CEM BILIÕES DE POEMAS

A primeira crónica desta rubrica foi dedicada ao grupo literário OuLiPo (*Ouvroir de Littérature Potentielle*), criado em França em 1960, e que se dedicava a explorar a relação entre matemática e criação literária. Hoje volto a ele para falar de uma obra de Raymond Queneau, membro do dito grupo.

A obra tem por título *Cent Mille Milliards de Poèmes*, no original, e poderíamos traduzi-lo por *Cem Biliões de Poemas*. Trata-se de um curioso livro composto por dez sonetos clássicos (duas estrofes de quatro versos e outras duas de três versos) em rima "a b a b / a b a b / c c d / e e d", e, até aqui, nada de especial. A sua originalidade consiste no facto de cada verso estar impresso numa tira de papel distinta que pode assim ser combinada com todas as outras, mantendo a mesma posição e consequentemente a métrica e a rima. Caso não haja repetição de versos na mesma posição, o número de poemas possíveis pode ser calculado através da fórmula dos arranjos completos de dez, 14 a 14:

$$^{10}A_{14} = 10^{14} = 100\,000\,000\,000\,000 \text{ poemas.}$$

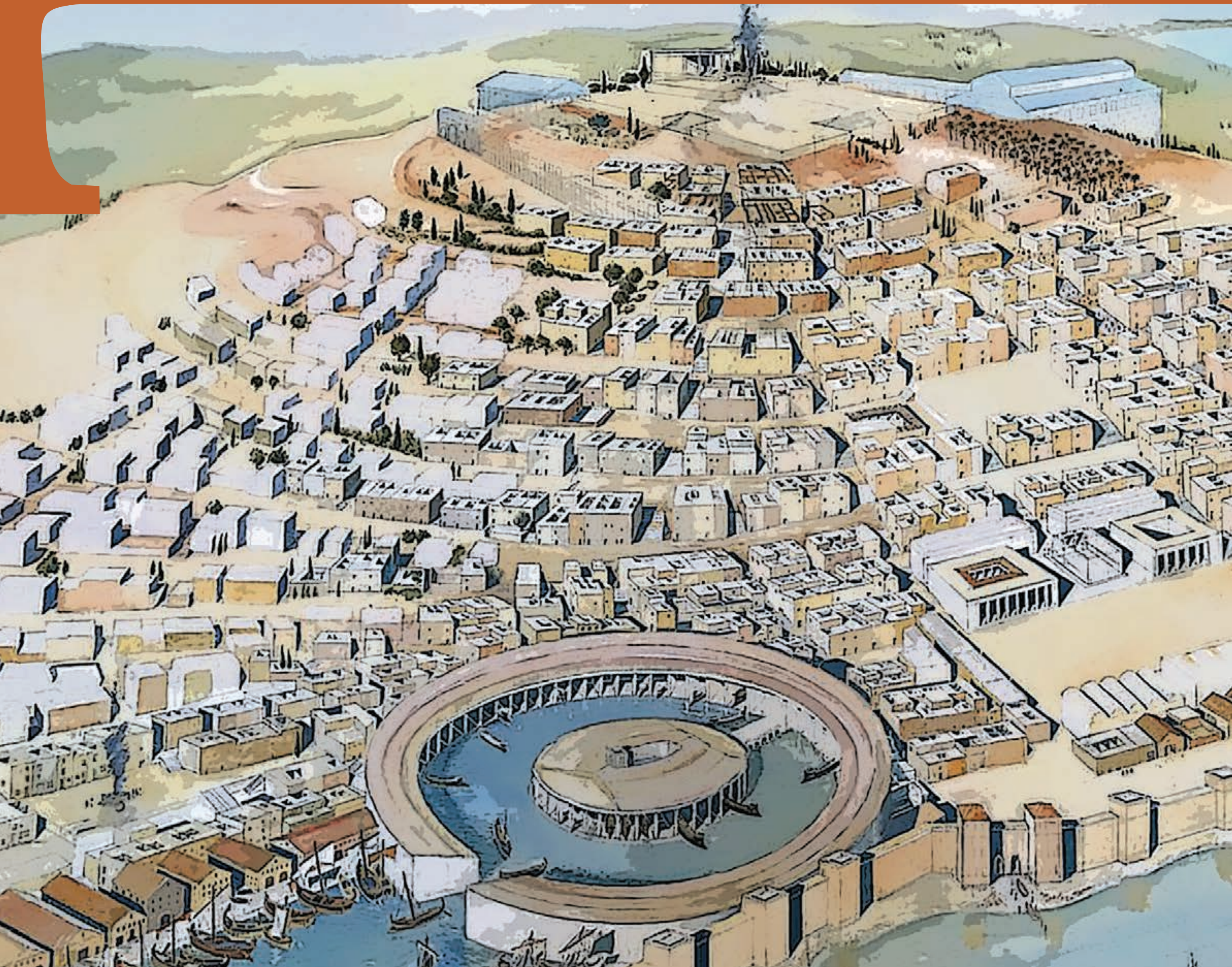
Cent Mille Milliards de Poèmes. **Fonte da foto:** *https://www.flickr.com/photos/thomasguest/3597995774*

Confesso não ter lido o livro, apenas alguns exemplos de poemas reproduzidos na internet, mas, na verdade, dificilmente alguém o poderá ter lido, já que, se estimarmos cerca de um minuto para a leitura de cada soneto, precisaríamos de aproximadamente 190 258 751 anos para completar este livro infernal (isto sem qualquer pausa ou tempo de sono).

Conta-se que Raymond Queneau terá sentido algumas dificuldades a meio do livro e se socorreu da ajuda de François Le Lionnais, engenheiro químico, escritor e também ele membro do OuLiPo. Não sei se a ajuda foi de ordem matemática ou poética, mas provavelmente Raymond precisava de alguém com quem partilhar tamanho abismo.

Vem-me à memória *A Biblioteca de Babel*, de Jorge Luis Borges, de que também aqui falei. Um lugar imaginário, mirífico, onde, por simples combinação das letras do alfabeto e dos espaços entre elas, estariam ali guardados todos os livros já escritos e também todos os livros por escrever.

Ao que sei, a obra de Raymond Queneau ainda não se encontra traduzida em português. Haverá algum poeta matemático ou matemático poeta que se arrisque em tal demanda?



O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EM AÇÃO

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz - Brasil/SP
jlpmello@uol.com.br

"As desigualdades podem ser mais interessantes do que as identidades. Eu não conheço muitas coisas mais belas e perfeitas do que uma desigualdade matemática absoluta."

Fernando Codá, matemático brasileiro,
em entrevista para *Notices/AMS*, fev./2016.

1. A LENDA DE CARTAGO

No épico Eneida do século I A.C. o poeta Virgílio conta-nos sobre a fundação de Cartago. Segundo a lenda, a rainha fenícia Elissa, que depois passa a chamar-se Dido, foge do seu irmão Pigmaleão, que havia mandado matar o seu marido por cobiça, embarcando num navio que a leva até ao norte de África. Lá chegada, Dido resolve ficar e formar a sua nova pátria negociando com o rei Jarbas a compra de terras. De acordo com o que ficou acertado, ela só poderia comprar a quantidade de terras que conseguisse cercar usando a pele de um único boi. A esperta Dido cortou e emendou várias tiras do couro formando um extenso cordame. Já que o seu interesse era o de cercar a maior extensão possível de terras, Dido ordenou que usassem o cordame cercando a colina de Birsa em forma de semicírculo. Com o tempo, a cidade expandiu-se, transformando-se em Cartago. As ruínas que restaram de Cartago estão localizadas atualmente nos arredores da cidade de Túnis, na Tunísia.

Não sabemos se tal lenda retrata os factos como realmente aconteceram, mas é curioso observar que o problema da busca da forma plana que maximiza a área para certo perímetro é de natureza matemática e provavelmente tão antigo quanto a lenda de Cartago. Tal problema recebe o nome de isoperimétrico.

Da geometria diferencial às equações diferenciais parciais, não faltam exemplos de desdobramentos do problema isoperimétrico. Mas e na matemática escolar, há espaço para ele?

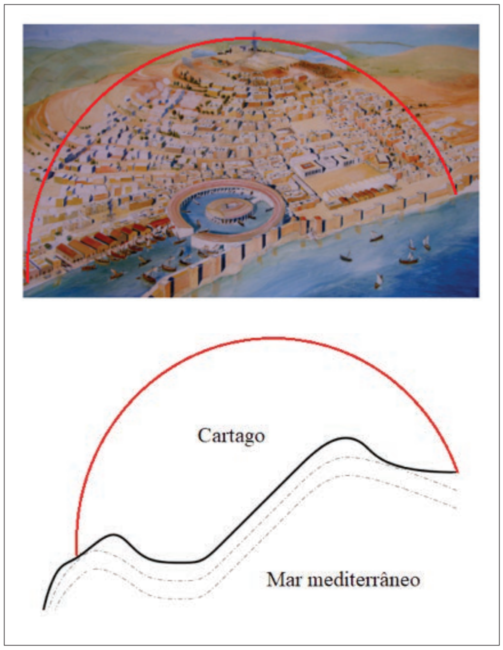


Figura 1. Representação aproximadamente semicircular do contorno da cidade de Cartago.

Figura 2. Ruinas de Cartago.

Figura 3.

2. O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

O problema isoperimétrico no plano é considerado um dos clássicos mais importantes da matemática, com desdobramentos em inúmeras áreas de investigação. O seu enunciado diz o seguinte:

> *Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, de entre todas as curvas do plano de comprimento L, aquela que engloba a maior área.*

Esta forma do enunciado, também chamada de primal, possui versão equivalente, chamada dual. A solução do problema primal está completamente determinada pela do seu dual, e vice-versa. O enunciado dual do problema isoperimétrico diz o seguinte:

> *Dada uma área $A > 0$, encontrar, de entre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.*

A solução do problema isoperimétrico afirma que a relação entre L e A sempre será expressa pela desigualdade $4\pi A \leq L^2$, sendo que a igualdade ocorrerá quando a curva fechada for um círculo. Desse resultado decorre o facto de que polígonos convexos de perímetro L sempre terão área menor do que a de um círculo de circunferência L. Também vem daí a conclusão de que tal círculo será a curva fechada de maior área possível de entre todas as curvas fechadas de comprimento L.

3. O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO E A DIVISÃO ÓTIMA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

É bem conhecido o resultado de que a mediana de um triângulo tem a propriedade de o dividir em dois triângulos com a mesma área, mas será que a mediana é o segmento de reta mais curto a cumprir tal propriedade? Analisaremos esse problema num triângulo equilátero EDF, de lado 1, com P e Q sendo pontos de lados distintos desse triângulo, como indica a figura 4. Interessa-nos encontrar a menor medida $PQ = z$ na comparação das situações em que $\overline{PQ}$ divide a área do triângulo ao meio.

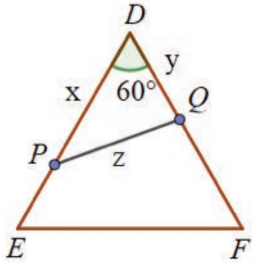


Figura 4.

Como $\overline{PQ}$ divide a área de EDF ao meio, então o triângulo DPQ e o quadrilátero $EPQF$ possuem áreas iguais $\sqrt{3}/8$, o que permite concluir que:

$$\frac{x \times y \times \operatorname{sen} 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ ou seja } xy = \frac{1}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos em DPQ, teremos:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \times \cos 60°,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2},$$

$$\text{o que implica em } z^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}.$$

Agora usaremos um truque algébrico útil. Somando e subtraindo $2xy$ do lado esquerdo da última igualdade, teremos:

$$z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{2} + 2xy,$$

$$z^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } z = \sqrt{(x-y)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Observe agora que o valor mínimo de z ocorrerá quando x=y, caso em que $\overline{PQ}$ será paralelo a $\overline{EF}$ e z terá comprimento igual a $\sqrt{2}/2$. Mais algumas contas e concluímos facilmente que, na situação ótima, o triângulo DPQ será equilátero, com $x = y = z = \sqrt{2}/2$.

Como cada mediana de EDF $(x = 1, y = 1/2)$ mede $\sqrt{3}/2$, que é um número maior do que $\sqrt{2}/2$, fica agora evidente que há um segmento menor do que a mediana que atende as condições do problema. Por simetria rotacional observa-se a existência de dois outros segmentos congruentes a $\overline{PQ}$ que também resolvem o problema. São eles: $\overline{P'Q'}$ e $\overline{P''Q''}$, como mostra a figura 5.

Outro curioso resultado que também pode ser demonstrado em relação à figura 5 é o de que os três segmentos traçados decompõem o triângulo EDF em três losangos congruentes, três trapézios isósceles congruentes e um triângulo equilátero. Tente demonstrar.

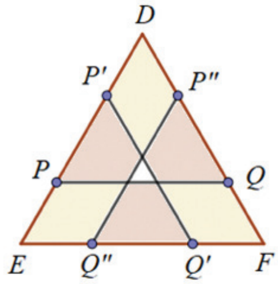


Figura 5.

Resolvido o problema com o uso de segmentos de reta, é natural que nos interesse saber se tal segmento, de comprimento $\sqrt{2}/2$, é a menor linha possível que divide a área do triângulo *EDF* ao meio. Surpreendentemente a menor linha não é um segmento de reta, mas sim uma curva, que encontraremos com a ajuda do problema isoperimétrico dual.

O problema será analisado por meio da investigação de três casos. No caso A, a curva une dois lados distintos do triângulo; no caso B, a curva começa e termina no mesmo lado do triângulo; e, no caso C, a curva não toca nenhum dos lados do triângulo, como mostra a figura 6.

Nos casos A e B, juntando-se adequadamente seis e dois triângulos idênticos, respetivamente, as linhas transformam-se em curvas fechadas contidas no interior de um hexágono regular e de um losango. De acordo com a solução dual do problema isoperimétrico, de entre todas as curvas com a mesma área da curva formada, a de menor perímetro sempre será uma circunferência, como mostra a figura 7.

Resta-nos calcular e comparar as medidas de $1/6$ da circunferência do caso A, $1/2$ da circunferência do caso B e a circunferência inteira do caso C. O menor dos três comprimentos indicará a curva mais curta que resolve o nosso problema. As contas a seguir indicam que o caso A é o vencedor.

Caso A:

Temos $\pi r^2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}}$.

O comprimento de $1/6$ da circunferência será

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{27}{\pi^2}} \approx 0,673.$$

Caso B:

Temos $\pi r^2 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}}$.

O comprimento de meia circunferência será

$$\frac{1}{2} \times 2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{\pi^2}} \approx 1,166.$$

Caso C:

Temos $\pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4\pi^2}}$.

O comprimento da circunferência será

$$2\pi \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4\pi^2}} \approx 1,649.$$

Na figura 8, temos

$$PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 > \text{med}\left(\widehat{MN}\right) \approx 0,673,$$

sendo que o arco de circunferência $\widehat{MN}$ é a menor curva que divide a área do triângulo *EDF* ao meio.

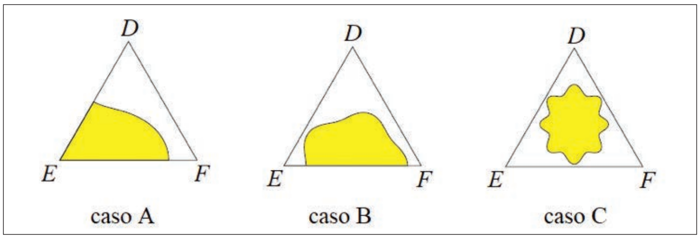


Figura 6.

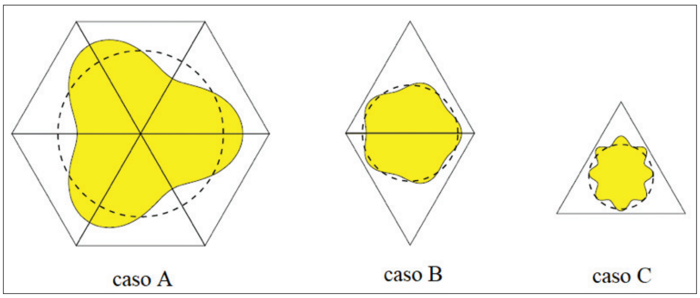


Figura 7.

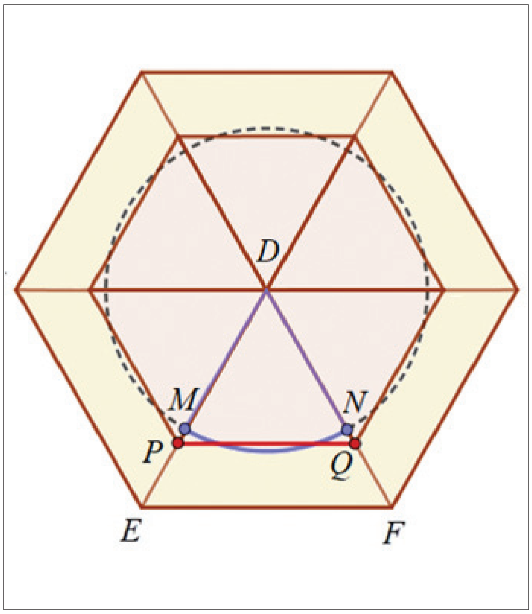


Figura 8.

4. A DIVISÃO ÓTIMA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓSCELES

Analisaremos agora um triângulo isósceles ABC, de catetos $AC = BC = 1$ e hipotenusa $AB = \sqrt{2}$. Novamente, o objetivo será encontrar o comprimento do menor segmento de reta que divide a área do triângulo ao meio e, em seguida, da menor linha que divide a área de ABC ao meio.

Na investigação do menor segmento de reta, analisaremos o caso A, em que os pontos P e Q pertencem à hipotenusa e a um cateto do triângulo, e o caso B, em que os pontos P' e Q' pertencem aos catetos do triângulo, como indica a figura 9.

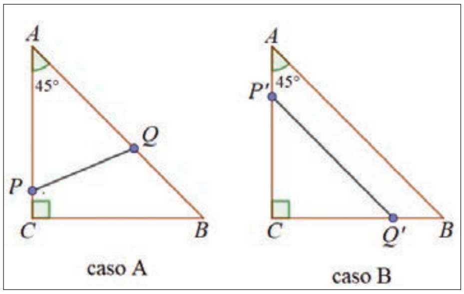


Figura 9.

Seguindo os mesmos passos da investigação feita no triângulo equilátero, começaremos pelo cálculo do comprimento de $\overline{PQ}$:

$$\frac{x \times y \times \operatorname{sen} 45^\circ}{2} = \frac{1}{4}, \text{ ou seja, } x \times y = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \times x \times y \times \cos 45^\circ,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 1,$$

$$z^2 = x^2 - 2xy + y^2 - 1 + 2xy,$$

$$z^2 = (x-y)^2 + \sqrt{2} - 1, \text{ ou seja, } z = \sqrt{(x-y)^2 + \sqrt{2} - 1}.$$

O valor mínimo de z ocorre quando $x = y$ e, nesse caso, teremos

$$x = y = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} \text{ e } z = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 0,644.$$

No caso do comprimento de $\overline{P'Q'}$, observamos da área do triângulo $CP'Q'$ que

$$\frac{x' \times y'}{2} = \frac{1}{4}, \text{ ou seja, que } x'y' + = \frac{1}{2}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $CP'Q'$, teremos:

$$(z')^2 = (x')^2 + (y')^2,$$

$$(z')^2 = (x')^2 - 2x'y' + (y')^2 + 2x'y', \text{ ou seja,}$$

$$z' = \sqrt{(x'-y')^2 + 1}.$$

O menor valor de z' ocorrerá quando $x' = y' = \sqrt{2}/2$ e, portanto, quando $z' = 1$.

Concluímos, agora, que o menor segmento de reta que divide a área do triângulo ao meio liga a hipotenusa e um cateto do triângulo, e tem comprimento aproximado de 0,644.

Finalizando a discussão, novamente recorreremos à ajuda da solução do problema isoperimétrico dual para encontrar a linha de comprimento mínimo. Analisaremos apenas os casos A e B, em que as curvas tocam dois lados do triângulo. Os casos em que elas tocam apenas um ou nenhum dos lados seguem raciocínio análogo e resultarão em comprimentos maiores do que o caso B, que é a solução ótima do problema.

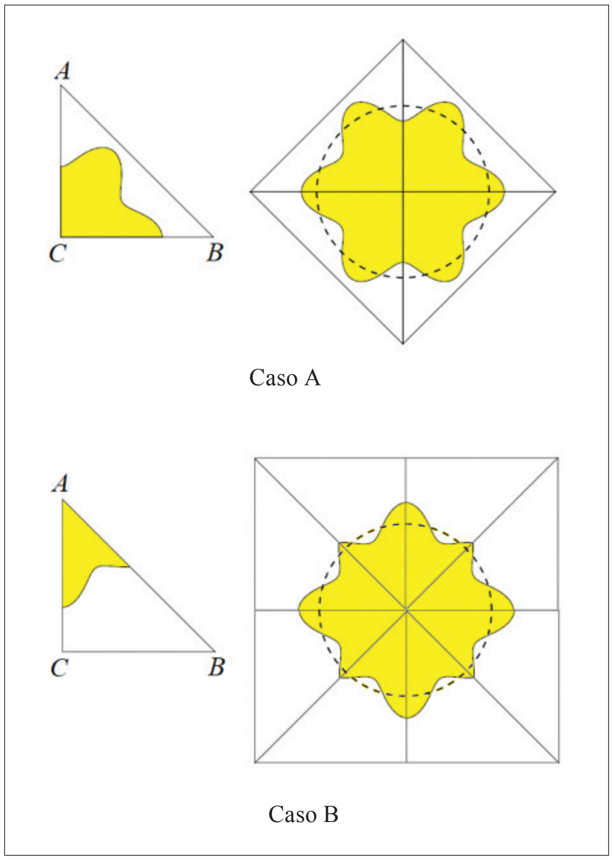


Figura 10.

Caso A:

Temos $\pi r^2 = 4 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$.

O comprimento de $1/4$ da circunferência será

$$\frac{1}{4} \times 2\pi \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 0,886.$$

Caso B:

Temos $\pi r^2 = 8 \times \frac{1}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}$.

O comprimento de $1/8$ da circunferência será

$$\frac{1}{8} \times 2\pi \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 0,627.$$

Na figura 11, temos

$$PQ = \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0,644 > \text{med}\left(\widehat{MN}\right) \approx 0,627,$$

sendo que o arco de circunferência $\widehat{MN}$ é a menor curva que divide a área do triângulo CAB ao meio.

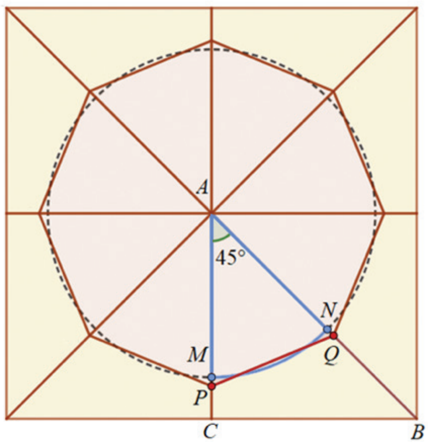


Figura 11.

Leitores interessados em explorar as inúmeras subtilezas, demonstrações e aplicações do problema isoperimétrico encontrarão excelente material de consulta nas referências [1] e [2]. E viva o poderoso problema isoperimétrico, também na matemática escolar!

REFERÊNCIAS

[1] KLASER, P. K., TELICHEVESKY, M. "O problema isoperimétrico". IV Colóquio de Matemática da Região Sul, Rio Grande/RS, FURG, 2016. Disponível em: *https://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/wp-content/uploads/sites/4/2016/04/Minicurso_Problema_Isoperimetrico.pdf*

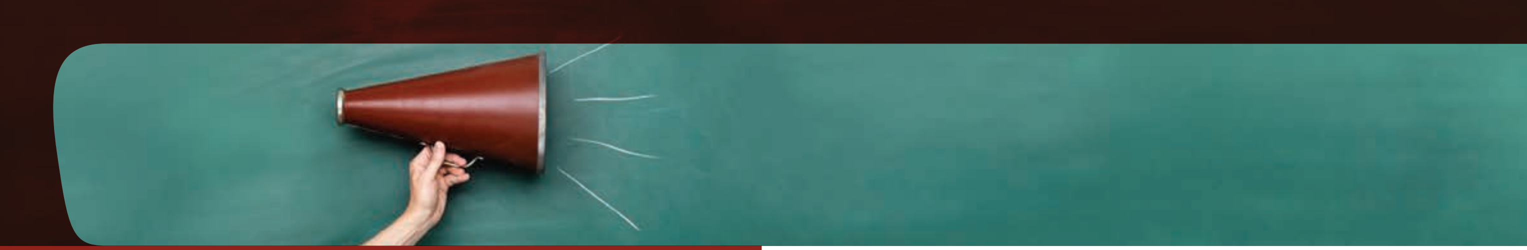
[2] NIVEN, I. *Maxima and Minima without Calculus*. The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 6, MAA, 1981.

[3] POLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning - vol. I/II*. Martino Fine Books, Eastford, Connecticut, 2014.

[4] SILVA, J. N. "Matemática e assuntos divertidos". *Gazeta de Matemática*, n.º 182/183, julho e novembro de 2017, Portugal, SPM. Disponível em: *http://gazeta.spm.pt/arquivo*

SOBRE O AUTOR

José Luiz Pastore Mello, licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (www.ime.usp.br), mestre e doutor em Ensino de Matemática pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (www4.fe.usp.br). Professor de Matemática do Colégio Santa Cruz (www.santacruz.g12.br), em São Paulo, Brasil. Membro do conselho editorial da *Revista do Professor de Matemática* (rpm.org.br), editada pela Sociedade Brasileira de Matemática (www.sbm.org.br).



Gonçalo Morais
Instituto Superior de Engenharia, Lisboa
gmorais@adm.isel.pt

GONÇALO MORAIS CONVERSA COM

IRENE FONSECA

Irene Fonseca é *Kavćić-Moura University Professor of Mathematics* da Universidade de Carnegie-Mellon e diretora do *Center for Nonlinear Analysis* da mesma Universidade. Foi presidente da *Society for Industrial and Applied Mathematics* e é atualmente membro do comité que procede à nomeação dos laureados do Prémio Abel. Investigadora prolífica, passou pelas Belas-Artes antes de ir para a Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Fica o resumo da nossa conversa.

GONÇALO Queria, em primeiro lugar, agradecer-lhe a disponibilidade em conceder-me esta entrevista. No entanto, parece-me difícil conseguir condensar a sua carreira numa conversa de uma hora...

IRENE FONSECA Bem, vamos tentar... Certamente que conseguimos falar de várias coisas.

GONÇALO Em 1973 acabou os estudos secundários...

IRENE FONSECA Exatamente. Nesse ano fui para a Escola de Belas-Artes. Isto foi um compromisso porque eu queria ser pintora, desde pequenina adorava desenhar em qualquer pedaço de papel, nas margens dos jornais, onde quer que fosse. Eu sou a mais nova de três irmãs e o meu pai sempre quis que uma de nós fosse para matemática. Ele era oficial de Marinha e morreu almirante. No tempo em que ele entrou para a Marinha, antes de se ir para a Escola Naval, eles tinham de passar pela Escola Politécnica para fazer a matemática. O meu pai gostou imenso de matemática, que naquela altura era dada pelo Vicente Gonçalves. Embora ele tenha ido para a Marinha, ficou sempre com o bichinho da matemática. Como as minhas duas irmãs mais velhas não se convenceram, fiquei eu como última esperança.

Na altura, eu não gostava nada de matemática e não tinha jeito, talento, aptidão ou qualquer outra coisa que lhe queira chamar. O meu pai não me deixou ir para Pintura e encontrámos um compromisso, que foi Arquitetura. Por um lado, tem uma parte mais quantitativa, por outro lado, tem também uma parte que é arte. Acabei então por ir para as Belas-Artes que era ali no Chiado...

GONÇALO Onde ainda é hoje.

IRENE FONSECA Comecei a estudar Arquitetura em outubro de 1973 e veio o 25 de Abril em 1974. Naquele dia, saí de casa para ir para as aulas e achei muito estranho porque estava tudo muito calmo. Não havia autocarros. Eu vivia no Restelo. Acabei por fazer o caminho a pé e

cheguei lá às nove da manhã, quando um contínuo me diz que tinha havido uma revolução qualquer e que estava a passar na rádio ou na televisão.

O que é certo é que acabei por fazer novamente o caminho para casa a pé. Desci a Rua do Alecrim até cá abaixo, ao Cais do Sodré. Aí vi tanques, mas toda a gente com um ar muito calmo. Cheguei a casa e o meu pai já não estava lá, porque, sendo oficial de Marinha, já tinha sido mobilizado. Foi só aí é que me apercebi do que é que se estava a passar.

A Escola de Belas-Artes fechou, assim como fecharam muitas outras universidades. No ano letivo seguinte, de 1974/75, permaneceu fechada. Tinha entretanto encontrado uma amiga na Escola de Belas-Artes, que é hoje professora da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e os nossos pais eram por sua vez também amigos. Eles fizeram um complôt para nos convencerem a ir para Matemática. Como o curso de Matemática não tinha fechado, a ideia era nós irmos para Matemática até as Belas-Artes abrirem e então regressaríamos para Arquitetura.

Em outubro de 1975, fui então para Matemática, que na altura eram cinco anos. Fui com muita relutância porque não era de todo uma área de que gostasse nem era algo onde quisesse ficar. Entretanto, aconteceu uma coisa engraçada, porque no início eu não ia muito às aulas nem me interessava muito, mas a meio do semestre havia as frequências. Essa minha amiga foi lá para casa e durante duas semanas estudámos imenso e, à medida que íamos estudando, íamos compreendendo melhor, o que fazia com que gostássemos mais e com que tivéssemos mais vontade de estudar.

Os exames correram muito bem, tive 20 a tudo, e a partir daí os professores começaram a interessar-se mais por mim e eu comecei a interessar-me mais pelas matérias. Quando a Escola de Belas-Artes abriu, eu já estava tão inserida na matemática que nem pensei em voltar. Ou seja, a paixão pela matemática nasceu e cresceu ao longo do meu curso.

GONÇALO Mas nesses primeiros anos ainda se vivia um período conturbado na faculdade...

IRENE FONSECA A situação era perfeitamente caótica. Comecei por ter aulas na Escola Politécnica, no antigo Colégio dos Nobres, que entretanto ardeu. Mudámos para um local sem condições nenhumas, perto da Praça da Alegria, perto do Parque Mayer, que tinha sido pensado para ser um prédio de residências, já por si mal feito, e não para ter em salas exíguas 20 pessoas. Depois mudaram-nos para a 24 de Julho, onde finalizei o meu curso. Mas mesmo quando estávamos na Politécnica, tínhamos aulas em algumas salas sem condições nenhumas.

Por outro lado, naquela altura, os exames faziam-se em conjunto, que era uma coisa extraordinária, havia 20 pessoas a fazerem o mesmo exame à volta de uma mesa, em discussões de quatro ou cinco horas. Eu nunca me meti nisso. Fiz sempre o meu exame sossegada no meu canto.

GONÇALO Ou seja, havia a opção de se fazer um percurso mais normal...

IRENE FONSECA Havia perfeitamente. Quem quisesse, fazia o exame sozinho ao lado de pessoas que estavam a fazer o exame em conjunto.

GONÇALO Sei que as notas depois eram votadas...

IRENE FONSECA Disso já não me lembro, mas era capaz. Como não estava metida nisso, não sei muito bem. Acabei o meu curso em 1980 e o meu mentor, o Professor João Paulo Carvalho Dias, convenceu-me a fazer o doutoramento. Naquela altura, os doutoramentos em matemática faziam-se em França porque não havia doutoramentos em matemática em Portugal. Por isso, ir para fora era obrigatório. Então grande parte ia para França e, mais especificamente para Paris, porque na altura havia bolsas do Estado francês. Havia uns quantos casos que foram fazer para Inglaterra, Warwick e Imperial College, e muito poucos para Itália.

Apesar de ter entrado no doutoramento em Paris, nessa altura o meu primo Luís Magalhães e o meu cunhado Manuel Ricou, que eram amigos de infância desde o Colégio Militar, e ambos engenheiros eletrotécnicos do Técnico mas que gostavam muito de matemática, como não estavam na Universidade de Lisboa, não sabiam que *tinham* de ir para Paris e decidiram ir para os Estados Unidos. Julgo não estar enganada ao dizer que foram os primeiros doutoramentos em matemática por portugueses nos Estados Unidos, o meu primo em Brown e o meu cunhado no Minnesota. Eles é que me convenceram a não ir para Paris.

Assim, em 1981, porque a minha irmã e o meu cunhado estavam no Minnesota, decidi ir para Minneapolis fazer o doutoramento. Passados uns anos, o Luís Magalhães foi lá fazer um *post-doc* pelo que, durante um período, estávamos lá todos.

GONÇALO Passar de Lisboa para Minneapolis é uma mudança radical...

IRENE FONSECA É um choque! A primeira coisa é a neve. Eu só tinha visto um bocado de neve meio derretida na Serra da Estrela. Em Minneapolis começa a nevar no fim de outubro e antes do fim de março não acaba. Por outro lado, também tudo era novidade. Um sistema diferente, oportunidades diferentes, um sistema curioso porque, como ainda hoje acontece, os doutoramentos tinham dois anos de cursos, enquanto que quando se ia para França começava-se logo a trabalhar na tese. Eu gostei muito dessa fase. Em 1985, acabei o meu doutoramento.

GONÇALO Propondo-lhe um exercício impossível, acha que o facto de ter ido fazer o seu doutoramento nos Estados Unidos e não ter ido para França foi algo determinante na sua carreira?

IRENE FONSECA Sim, acho que sim! Eu acho que as oportunidades que tive nos Estados Unidos teria com muita dificuldade em França. Há exceções, claro está. Conheço pessoas, algumas mulheres, que tendo feito o doutoramento em França, vieram a ter posições de destaque em orgãos de decisão de política científica.

GONÇALO Essa diferença é fácil de explicar?

IRENE FONSECA São dois sistemas completamente diferentes. Nos Estados Unidos cada pessoa é a sua carreira. A carreira começa com *Assistant Professor* e chegar ao topo da carreira só depende de mim e não se há vagas, ou se precisamos que alguém morra ou se reforme para podermos subir. Se amanhã demonstrar um teorema excecional posso ser promovida a *Full-Professor* em vinte e quatro horas. Há uma sensação de que os limites sou eu que os imponho. Claro que este quadro depende essencialmente da universidade em que estamos. No meu caso, estamos a falar de uma universidade privada, essencialmente ligada à investigação, muito dependente dos financiamentos que se tem. Nesse sentido, há uma grande pressão, mas o reverso da medalha é que *the sky is the limit*.

Claro que também temos uma parte letiva, mas do princípio de maio ao fim de agosto é por nossa conta. Não tenho de corrigir cinquenta mil exames, não há primeira, segunda e terceira épocas. Lá há uma época e acabou. Não passa, faz outra vez a cadeira. Os alunos e os *post-docs* ajudam na correção dos exames. Ou seja, é um sistema muito diferente do que se passa aqui e que eu acho que funciona muito bem.

GONÇALO Voltando um bocadinho atrás, falemos desses dois anos em Paris...

IRENE FONSECA Esses dois anos em Paris foram essencialmente por razões familiares. No fim do doutoramento, na primavera de 1985, casei-me com o pai dos meus filhos, Luc Tartar, matemático eminente, muito mais sénior do que eu, e que na altura era catedrático em Paris. Na altura, julgámos que era mais fácil irmos todos para Paris e tentar arranjar lá emprego. Tive um contrato de *post-doc* e não me senti muito bem acolhida. Senti-me como a mulher do Luc Tartar que estava a tentar tirar emprego aos homens, que foi algo que me foi dito. Isto era devastador para quem fez um doutoramento durante não sei quantos anos e que gosta daquilo que faz. Atenção que isto não se passava ao nível dos meus colegas nem dos grupos com que trabalhei, porque aí sempre fui muito bem acolhida. Falo ao nível burocrático e administrativo. Aí foi um perfeito desastre.

GONÇALO O facto de ser portuguesa em Paris terá contribuído para isso?

IRENE FONSECA Não sei. Julgo que era algo mais ligado ao facto de eu ser casada com um professor catedrático em Paris e que por isso não precisava daquele emprego. Por isso, logo quando calhou, pelo facto de estar um bocado dececionada e, por transitividade, o meu marido também, quando surgiu oportunidade fomos para os Estados Unidos.

Houve várias possibilidades, mas acabámos por ir para Carnegie-Mellon, porque, em primeiro lugar, era uma universidade privada e, em segundo, tinha um grupo em matemática que estava a tentar crescer para as nossas áreas.

GONÇALO Nessa altura, Carnegie-Mellon era já conhecida essencialmente pela investigação em *Computer Science*...

IRENE FONSECA Não, era essencialmente conhecida pelo trabalho desenvolvido na Mecânica dos Meios Contínuos. A *Computer Science,* que hoje é o nosso forte, talvez o número um do mundo, certamente nos Estados Unidos, era um departamento dentro do Mellon College of Science, que tinha também a Matemática, a Física, a Química e a Biologia. Ou seja, em 1987 era um departamento, que passados uns anos, porque se tinha tornado um elefante, passou a ser um *college*, com vários departamentos.

Na altura em que fomos para Carnegie-Mellon, o grupo de Mecânica dos Meios Contínuos estava a expandir-se na direção das equações às derivadas parciais. Estou lá há 32 anos.

GONÇALO Sei que está ligada, para lá da investigação, a vários aspetos mais organizacionais da Matemática...

IRENE FONSECA Neste momento estou envolvida num comité da IMU (International Math Union), que é dirigido pelo Terry Tao, em que estamos a rever todas as secções do IMU, Álgebra, Topologia e todas as outras, e que já estão um bocadinho datadas. Posso dar-lhe uma novidade em primeira mão: uma das áreas que existiam, e que se chamava, Estatística e Probabilidades vai passar a chamar-se *Statistics and Data Science*. O mundo de hoje não é o mundo de há 20 anos.

GONÇALO E quantas pessoas fazem parte deste comité?

IRENE FONSECA Somos, no total, 14 pessoas.

GONÇALO Outra das organizações com a qual tem uma relação forte, digamos assim, é a SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics). A primeira entrevista que eu fiz na *Gazeta*, foi precisamente com o Professor Gilbert Strang, que tem um carinho enorme pela SIAM. Uma das coisas que ele me referiu foi de ter sentido, a certa altura, a necessidade de haver uma matemática mais relacionada, até do ponto de vista cultural, com as aplicações.

IRENE FONSECA A SIAM surgiu exatamente da necessidade de encontrar um espaço para a Matemática Aplicada ligada ao Governo, isto é, ligada aos laboratórios do Governo, como o laboratório de Los Alamos, a NASA, por exemplo, e ligada à indústria. A SIAM é uma associação onde os membros pagam quotas, exatamente como a AMS e a Sociedade Portuguesa de Matemática, mas que tem funções variadíssimas.

Por um lado, tem a parte das publicações muito importante como veículo de exposição para investigação ligada à indústria e às aplicações, passando também pela publicação de livros dentro do mesmo âmbito.

Por outro lado, tem também a parte da organização de conferências, em que existe a conferência anual, os chamados *activity groups* dentro das várias áreas, que são a partição dos interesses dentro da SIAM. Neste momento, eu sou a chair do grupo das EDPs, que terá a sua conferência anual em dezembro na Califórnia. Para lá disso, faço parte dos grupos de *Mathematical Aspects of Materials Science* e de *Imaging Science*. Os encontros destas comunidades são fundamentais para que se saiba com exatidão em que ponto está a fronteira do conhecimento.

Um terceiro aspeto fundamental da atividade da SIAM prende-se com o *lobby* científico, sobretudo nos Estados Unidos. Já há vários anos, faço parte do *Committee on Science Policy*, que para lá de todas as outras atividades, na primavera vamos dois dias ao Congresso *educar* os nossos congressistas, aquilo a que nós chamamos *Hill days.* Temos uma firma que nos educa e que tem as ligações necessárias, de maneira que eles dizem-nos com que congressistas é que vamos falar, este do North Dakota, aquele da Califórnia, aquele outro da Florida, e por aí fora. Nós vamos lá fazer o trabalho que eu acho que é importante, que é explicar aos membros do Congresso de que forma foram e serão usados os fundos do *National Science Foundation*. Estamos a falar em todos os anos de uma quantia que ronda os seis biliões de dólares.

GONÇALO Fazer com que a mensagem passe, falando com congressistas com perspetivas tão diferentes, não deve ser fácil...

IRENE FONSECA Não é nada fácil. Eu já não sei há quantos anos ando nestas andanças, mas deve ser há mais de dez anos. Isto é um processo. Este comité é bastante grande, com mais de 20 pessoas. Temos uma primeira reunião em outubro com a dificuldade de tanto os membros do Congresso, como os membros do Governo que estão este ano possivelmente não estarão lá para o ano. Por isso, os interesses não serão os mesmos. Este ano falar de *environment,* nem pensar! Ou então temos de falar de outra maneira. Quando temos essa reunião em Louisburg, nos *headquarters* da empresa que nos apoia, mesmo por trás do *Capitol Hill*, é uma *reversed side visit*, em que os elementos de topo dos vários programas de financiamento da ciência, NSF, DARPA e demais, nos explicam de que forma estão a pensar organizar o orçamento para o próximo ano e com que objetivos. Depois pegamos nessa mensagem e vamos ao Congresso, porque uma agência federal não pode fazer *lobbying*, pois está proibida. Nós também não o vamos fazer, vamos apenas ter uma conversa, como privados com todo o interesse em falar com os congressistas e com os respetivos *staffs*, que são no fundo quem redige as leis, e vamos explicar o que se passa nas universidades.

GONÇALO Num Congresso em que muitos congressistas têm uma visão muito relutante em relação à ciência...

IRENE FONSECA Completamente! Até porque nós sabemos que para este estado o clima é muito importante, enquanto que para aquele a agricultura é muito importante. Ter conhecimento dos interesses dos constituintes representados por cada um dos congressistas é fundamental para fazer passar a mensagem.

GONÇALO Outro dos comités em que participa é o do Prémio Abel...

IRENE FONSECA É de facto uma coisa extraordinária, com uma grande responsabilidade, onde estou muito feliz, porque tanto no ano passado como este ano escolhemos laureados fantásticos, tendo este ano o prémio sido atribuído pela primeira vez a uma mulher, à Karen Uhlenbeck.

O processo decorre da seguinte maneira. Um comité muito pequeno com quatro pessoas mais o *chair*, que é um norueguês que pertence ou que tem ligação com a Academia das Ciências, tem três reuniões. A primeira é em outubro, em Oslo. Começamos com 150 nomeações. As nomeações podem aparecer de várias maneiras, quer por pessoas ligadas à Academia, quer por departamentos, quer por associações. Filtramos estes para um conjunto à volta de 30, numa reunião virtual que tem lugar em dezembro, daí passamos para cinco, numa reunião presencial em janeiro. Nesta reunião, antigos laureados e membros do comité fazem palestras durante um dia. No dois dias seguintes, os membros do comité têm então a reunião em que dos cinco passamos para um nome. Mantém-se o absoluto segredo até março, salvo erro 22 de março, data em que o laureado recebe um telefonema às quatro da manhã ou às cinco da manhã porque depois, às onze da manhã da Noruega, a Academia das Ciências da Noruega anuncia o nome do vencedor. Quando o nome é anunciado, já o laureado foi informado e já aceitou.

Em maio há a cerimónia de entrega do prémio em Oslo. E digo-lhe que é uma coisa absolutamente extraordinária, pois a cidade fica paralizada por causa de um prémio em matemática. As avenidas ficam cheias de pendentes sobre o laureado, os jornais reservam as páginas centrais para o assunto. As mais altas individualidades estão presentes, por todos os lados existem acontecimentos culturais. É extraordinário o destaque que eles dão a um assunto destes. Quando entrei para o comité, foi dito que quando viesse cá em maio, a cidade estaria em festa e eu não acreditei até acontecer.

GONÇALO Mudando um pouco de assunto, e porque estamos numa conferência em que se procura valorizar o papel das mulheres na matemática, qual é a sua perspetiva sobre o assunto, até porque já referiu algo relacionado com a sua experiência passada.

IRENE FONSECA Para lá do que descrevi, julgo que também há o reverso da medalha. Quando somos mulheres e capazes, somos chamadas para tudo e é preciso saber dizer que não, sobretudo hoje em dia, em que há uma maior perceção da disparidade da participação das mulheres. Julgo que em Portugal as coisas não são tão más. Basta ver a lista de professoras catedráticas e o número de alunas de doutoramento. Nos Estados Unidos, se houver 30% de mulheres, eu diria que é bom.

Quando se é eleito presidente da SIAM, num período de quatro anos, somos *president elected*, *present president* e *past president*. No ano que antecedeu a minha passagem a presidente, ou seja, em que era *president elected*, julgo que houve apenas uma mulher que foi distinguida com o título de *fellow*. Quando fui *president*, criei um comité com pessoas com grande estatuto dentro da comunidade da SIAM, passando inclusive por antigos presidentes, cuja missão era olhar à sua volta e, caso se justificasse, alertar os vários departamentos para procederem a nomeações para *fellow*. A verdade é que no ano seguinte obtivemos 30%, que é um número aceitável, isto para não se cair no outro extremo e não perder qualidade.

GONÇALO Professora, muito obrigado pela sua disponibilidade.

IRENE FONSECA Tive todo o gosto.

QUATRO PERGUNTAS A ANA CASIMIRO

A PROPÓSITO DO 1^{ST} MEETING FOR *WOMEN MATHEMATICIANS IN PORTUGAL*

ENTREVISTA DE GONÇALO MORAIS
Instituto Superior de Engenharia
gmorais@adm.isel.pt

Nos passados dias 22, 23 e 24 de julho teve lugar a conferência denominada *1st Meeting for Women Mathematicians in Portugal (WM²)*, no campus da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica. Com um programa de interesses não limitados a uma determinada área da matemática, com um conjunto de oradores prestigiado, tentou-se dar visibilidade ao que melhor se faz em matemática no feminino. Paralelamente, decorreu uma discussão sobre a descriminação de género no caso da matemática. Falámos com Ana Casimiro que, juntamente com Marta Faias, Magda Rebelo e Manuel Silva, formou a comissão organizadora deste evento, com o intuito de perceber melhor os objetivos da mesma.

DE ONDE SURGIU A IDEIA DE REALIZAR ESTA CONFERÊNCIA?

Eu já tinha visto conferências semelhantes noutros países da Europa e nos Estados Unidos, tendo eu própria participado em dois desses encontros. Isto naturalmente, ao ver a situação muito queixosa das minhas colegas lá fora, levou-me a refletir sobre a situação em Portugal. Os problemas andam sempre muito à volta de as mulheres se sentirem preteridas em relação aos homens e terem muitos problemas em conseguirem conciliar as suas carreiras com a vida familiar. Como consequência, pareceu-me interessante fazer algo semelhante em Portugal e tentar perceber se a situação aqui é diferente da de outros sítios. Para isso vamos ter amanhã um painel de discussão para perceber este problema. A Margarida Mendes Lopes e a Sofia Castro fizeram um levantamento que foi publicado no *Boletim da SPM* e aparentemente a situação em Portugal, quando comparada com o que se passa noutros países, não é assim tão má.

NO DIA A DIA, ESSA DIFERENÇA ENTRE HOMENS E MULHERES É PERCETÍVEL DE QUE FORMA?

Se nós olharmos, por exemplo, para as sociedades de matemática em Portugal, como a Sociedade Portuguesa de Matemática ou o CIM, vemos que os presidentes e a direcção costumam ser homens. Claro que uma mulher se sente descriminada perante isto.

QUAL O IMPACTO QUE PRETENDEM TER COM ESTA CONFERÊNCIA?

O maior objetivo é chamar a atenção para o que acontece em relação a este problema, de modo a que a sociedade comece a refletir sobre esta temática, para ver se há diferenças ou não e, caso haja, qual a forma de agir para as ultrapassar.

EU, DEPOIS DE TER ENTREVISTADO A PATRÍCIA GONÇALVES, DEI-ME CONTA DA DISPARIDADE ENTRE O NÚMERO DE ENTREVISTAS A HOMENS E A MULHERES QUE EU TINHA REALIZADO. ESSA DESCRIMINAÇÃO É ALGO QUE JULGO QUE NÃO É FEITO DE UM MODO CONSCIENTE. SERÁ ASSIM?

Sim, ouvia noutro dia alguém dizer que quando tu vês um homem ou eu vejo uma mulher, vemos algo com que nos identificamos mais. Da mesma forma, como tu paraste para pensar, é isso que nós pretendemos que mais pessoas façam. É mesmo essa chamada de alerta.

PORTUGAL CONQUISTA DUAS **MEDALHAS DE PRATA** E DUAS DE **BRONZE** NAS **OLIMPÍADAS** DE **MATEMÁTICA** DA **CPLP**

A 9ª edição das Olimpíadas de Matemática da CPLP (OMCPLP) decorreram de 3 a 8 de novembro em Nova Friburgo, região serrana do Rio de Janeiro, com a equipa portuguesa a conquistar duas medalhas de prata e duas de bronze. Leonardo Tavares (Escola Secundária Dona Filipa de Lencastre, Lisboa, 10º ano) e Pedro Antunes (Colégio Bartolomeu Dias, Santa Iria de Azoia, 11º ano) são os responsáveis pelas medalhas de prata, Tiago Mourão (Escola Secundária de Santa Maria da Feira, 10º ano) e Eduardo Guerreiro (Escola Secundária João de Deus, Faro, 10º ano) conquistaram as duas medalhas de bronze.

A delegação portuguesa é composta por seis elementos: quatro alunos, o professor Daniel Pinto e o tutor da equipa, João Santos.

A cerimónia de encerramento das OMCPLP teve lugar a 7 de novembro, no Country Clube de Nova Friburgo. O evento contou com a presença do cônsul de Cabo Verde. As provas da competição foram realizadas nos dias 5 e 6 de novembro, de manhã.

Este ano, as Olimpíadas da CPLP deveriam ter decorrido em Moçambique, mas devido aos graves danos causados pela passagem do ciclone Idai não foi possível.

COLÓQUIO BENTO DE JESUS CARAÇA E O **PROJETO COSMOS**

Realiza-se no dia 18 de novembro o Colóquio Bento de Jesus Caraça e o Projeto Cosmos: ontem e hoje, no Museu Nacional de História Natural e da Ciência, em Lisboa. Com um conjunto de palestrantes conhecedores do Projeto Cosmos, o colóquio procura discutir não apenas a importância do projeto no seu tempo, mas também a sua atualidade. Na sessão de encerramento, o evento contará com a presença de João Caraça, filho de Bento de Jesus Caraça.

O colóquio pretende analisar o que foi o grande Projeto Biblioteca Cosmos. De 1941 a 1948, ano do falecimento de Bento de Jesus Caraça, foram publicados 114 títulos desta coleção, alguns deles múltiplos, com uma tiragem extraordinária para a época, quase 7000 exemplares por livro. Era grande a variedade de temas abordados, repartidos por sete séries: Ciências e Técnicas, Artes e Letras, Filosofia e Religiões, Povos e Civilizações, Biografias, Epopeias Humanas e Problemas do Nosso Tempo. O objetivo desta coleção, expresso pelo seu criador, era o de "prestar reais serviços aos seus leitores e, através deles, a uma causa pela qual lutavam há muitos anos: a criação de uma mentalidade livre e de tonalidade científica entre os cidadãos portugueses".

Organizado pela Associação Bento de Jesus Caraça (ABJC), este colóquio faz parte da agenda da associação para o ano de 2019, na qual se incluiu também realização de um colóquio no Museu de Ciência de Coimbra, a 4 de maio de 2019, que teve como tema Bento de Jesus Caraça e a Atualidade da Cultura Integral, a publicação de uma fotobiografia que está a ser elaborada e a organização de um debate entre os membros da associação sobre o atual sistema educativo e a apresentação das ideias gerais sobre um sistema educativo.

O Professor Bento de Jesus Caraça (1901-1947) foi uma das mais importantes personalidades portuguesas do séc. XX, com um trabalho ímpar nos planos cívico, cultural, social e científico. Apesar das restrições à sua ação colocadas pela ditadura salazarista, a sua obra foi sempre divulgada e tem sido ao longo dos anos regularmente citada e estudada.

A Associação Bento de Jesus Caraça (ABJC) foi constituída em 2018 por um grupo de cidadãos que pensou que o que tem vindo a ser feito ao longo dos anos, sendo meritório, não explora na totalidade o pensamento e a obra de Bento de Jesus Caraça. No sentido de poder contribuir para corrigir o défice informativo que existe sobre esta figura ímpar da cultura portuguesa, foi fundada esta associação.

"Achamos que é necessário, por um lado, continuar o trabalho do passado, nalguns pontos dando-lhe um cunho um pouco mais abrangente, e explorando outros que ainda não foram analisados, e, por outro, sentimos ser nossa obrigação salientar a atualidade dos valores que orientaram a vida de Bento de Jesus Caraça de um modo que seja motivante para as novas gerações. Queremos uma associação que seja interveniente na sociedade portuguesa.", afirma Luís Saraiva, presidente da direção da ABJC.

Deste modo, a Associação Bento de Jesus Caraça definiu por objetivo principal da sua atividade dar a conhecer a obra de Bento de Jesus Caraça em todas as suas facetas e promover a discussão em torno das suas ideias.

PSPDE VIII

A oitava edição do Encontro sobre Sistemas de Partículas e PDEs (PSPDE VIII) irá realizar-se no Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, de 2 a 6 de dezembro de 2019.

A ideia do encontro é reunir investigadores de duas áreas diferentes da matemática, sistemas de partículas e equações de derivadas parciais, e apresentar resultados científicos recentes em ambas as áreas. O evento conta com mais de 20 palestrantes convidados, minicursos e sessões para apresentação de posters.

O PSPDE VIII é uma organização conjunta da Universidade de Lisboa, da Universidade do Minho e da Universidade de Nice. A comissão organizadora é composta por Cédric Bernardin (Universidade de Nice), Maria Conceição Carvalho (CMAF-CIO, Universidade de Lisboa), Patrícia Gonçalves (CAMGSD, Universidade de Lisboa) e Ana Jacinta Soares (CMAT, Universidade do Minho).

CAMINHADA MATEMÁTICA ISEP

O Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) realizou uma Caminhada Matemática, no dia 12 de outubro, em simultâneo com várias cidades europeias. Porto, Santander (Espanha), Lyon (França), Frankfurt (Alemanha) e Nitra (Eslováquia) percorreram ao mesmo tempo um "trilho matemático" na sua cidade.

No Porto, a caminhada teve início na entrada principal dos Jardins do Palácio de Cristal. Para participar bastava ter um smartphone (e não ter medo de fazer contas!). O programa MoMaTrE (Mobile Math Trails in Europe) inserido no âmbito do #ErasmusDays, existe desde 2017 e reúne organizações de vários países europeus que cooperam no desenvolvimento e na divulgação da app MathCityMap, uma aplicação que permite que o utilizador faça um trilho matemático ao ar livre, usando apenas o seu smartphone. O objetivo é promover a aproximação da matemática ensinada numa sala de aula à matemática aplicada à vida real e tem como desígnio contribuir para a motivação e o sucesso escolar na disciplina de matemática.

A Caminha da Matemática do Porto é uma iniciativa do Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) em colaboração com a Câmara Municipal do Porto. A organização da caminhada esteve a cargo de investigadores do LEMA (Laboratório de Engenharia Matemática), docentes do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Engenharia do Porto e membros do projeto MoMaTrE.

MUSEU DE CÁLCULO INTERATIVO INAUGURADO EM **CASTELFIORENTINO**

A cidade de Castelfiorentino, na região da Toscana, inaugurou no dia 9 de novembro um museu dedicado totalmente à matemática, o Museu de Cálculo Interativo.
Com três salas temáticas, a exposição mostrará a história das antigas máquinas de cálculo até aos atuais computadores, a formação do teorema de Pitágoras e os sólidos geométricos.
O museu é uma criação de Renato Verdiani, ex-professor de matemática da escola secundária de Pontormo, em Empoli. "Sou apaixonado pela história do cálculo e montei uma coleção discreta que agora estará disponível para estudantes e turistas. O objetivo é fazer com que os jovens entendam que o Homem é um inventor e que alcançámos o computador por um caminho que começa com a História do Homem", disse Verdiani.

O museu foi criado com as contribuições do projeto 'La Strada dei Mestieri que o município de Castelfiorentino promoveu na área de financiamento, obtido com concurso suburbano.

DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA 2020

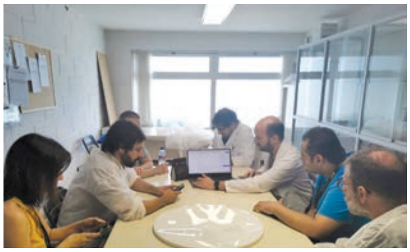
Nos próximos dias 27 e 28 de novembro terá lugar a 40ª Assembleia Geral da UNESCO, onde será discutida a proclamação de um dia especial para celebrar a matemática em todas as suas formas. Se a moção for aprovada – e tudo leva a crer que seja – o dia 14 de março de 2020 será oficialmente o primeiro Dia Internacional da Matemática (https://www.idm314.org). Todos os anos, a IMU (União Internacional de Matemática) irá escolher um tema e dinamizar atividades um pouco por todo o mundo. Para 2020, o tema será "A matemática está em toda a parte".
A SPM associou-se a este projeto desde a primeira hora, numa altura em que ainda parecia distante a possibilidade de a UNESCO vir a oficializar um dia internacional da matemática, tendo desempenhado um papel muito ativo no seu desenvolvimento.
A SPM convida todas as escolas que estejam envolvidas numa qualquer celebração ligada à matemática a, no próximo dia 14 de março, preencherem o formulário disponível em www.spm.pt, permitindo assim criar um mapa mundial das diferentes atividades agendadas.

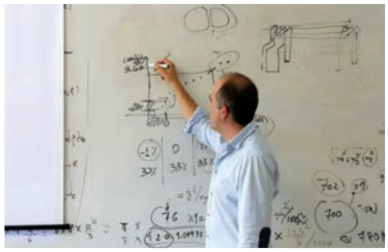
INTERNATIONAL DAY OF MATHEMATICS MARCH 14

EUROPEAN STUDY GROUP WITH INDUSTRY 155

Dentro de um panorama global onde a matemática tem vindo a obter cada vez mais projeção em contexto industrial, Portugal tem organizado diversas iniciativas de promoção e sensibilização para a área da Matemática Industrial. Exemplo disso são os workshops anuais organizados pela Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação (PT-MATHS-IN). Paralelamente, esta rede tem promovido anualmente e em parceria com o Consórcio Europeu da Matemática na Indústria (ECMI) as edições portuguesas dos European Study Group with Industry (ESGI). Estes fóruns, dedicados à transferência de conhecimento, reúnem académicos, investigadores e quadros das empresas para estudar e ajudar a resolver desafios reais provenientes da indústria.
Em Portugal, o formato escolhido tem privilegiado a itinerância do evento, como demonstra o facto de as edições realizadas nos cinco últimos anos terem sido organizadas em diversas instituições de Ensino Superior: Lisboa (ESGI101 – UNL), Guimarães (ESGI109 – UM), Porto (ESGI 119 – IPP), Aveiro (ESGI 127 – UA) e Barreiro (ESGI 140 – IPS).
Foi sob este auspício que teve lugar, pelo 13º ano consecutivo no nosso país, a 155ª edição destes encontros europeus. Esta edição, que decorreu em Leiria de 1 a 5 de julho de 2019, foi organizada pelo Centro para o Desenvolvimento Rápido e Sustentado do Produto (CDRSP) e pelo Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria e contou com cerca de 50 participantes representando quase duas dezenas de instituições.
Do ponto de vista do desenvolvimento do tecido empresarial, esta iniciativa internacional estabeleceu uma ponte de transferência de tecnologia entre a matemática e a indústria, tendo proporcionado um elevado grau de satisfação por parte das empresas envolvidas, que pretendem continuar a explorar este tipo de colaboração.
Nesta edição foram introduzidos dois eventos preparatórios ao ESGI155, que se realizaram no CDRSP (Marinha Grande). O FromAcademy, que decorreu a 28 de novembro de 2018, teve como objetivo dar a conhecer o formato de um ESGI e o tipo de problemas aí abordados. Os oradores convidados (essencialmente professores do Ensino Superior) apresentaram alguns dos problemas em que estiveram envolvidos, em edições anteriores, permitindo assim aos participantes (académicos e empresários) compreender melhor o âmbito do evento. Posteriormente, a 3 de abril, realizou-se no CDRSP o evento preESGI FromIndustry, onde os empresários tiveram a oportunidade de apresentar problemas reais em que a matemática poderia assumir o papel principal na resolução de cada um dos diferentes desafios.
Para o ESGI155 foram selecionados quatro problemas de diferentes empresas. Durante uma semana, constituíram-se quatro grupos internacionais de investigadores, na sua maioria matemáticos, que se dedicaram intensamente à procura de soluções. O evento terminou com a apresentação de uma proposta de solução para cada um dos desafios. Os quatro problemas abordados estão descritos de seguida:

1. Problema proposto pela empresa Fravizel: Um bloco de pedra é conduzido a uma máquina de britagem pneumática equipada com uma cabeça de martelo





móvel, com o objetivo de o partir em pedaços mais pequenos. Após cada impacto do martelo, a pedra resultante é analisada em termos da área dos fragmentos obtidos. Se um fragmento tiver uma área maior do que um valor máximo preestabelecido, o martelo deve mover-se no sentido de acertar novamente na pedra para a partir em fragmentos mais pequenos. O desafio proposto é o de otimizar o processo de britagem, minimizando o tempo necessário para que o martelo mude de posição entre dois impactos e de forma a que o bloco de pedra seja integralmente britado em pequenos pedaços.

2. Problema proposto pela empresa Moldetipo Group: O processo de moldação por injeção de plástico é amplamente usado na atual indústria de transformação. Neste processo, o sistema de refrigeração, constituído por canais de refrigeração, desempenha um papel crucial pois afeta significativamente a taxa de produção e a qualidade da peça plástica. Para reduzir o tempo do ciclo e controlar a distribuição uniforme da temperatura, é necessário criar canais de refrigeração conformes à geometria das peças a injetar. O desafio é criar um modelo matemático para a geração automática de canais de refrigeração no molde, otimizados para garantir uma taxa de transferência de calor máxima permitindo diminuir o ciclo de produção e não comprometendo a qualidade final da peça.

3. Problema proposto pela empresa Poço – Equipamentos Industriais: O desafio consiste em desenvolver um modelo matemático que permita calcular, de uma forma transparente, o valor variável das contribuições que cada empresa deve pagar para a Segurança Social, tendo em conta a sua contribuição para o valor acrescentado dos diferentes produtos produzidos. O modelo desenvolvido não deve alterar o valor final (que é atualmente calculado considerando apenas os salários globais) mas deve distinguir as empresas que agregam valor aos produtos produzidos e contribuem para melhorar a competitividade e a produtividade não só das empresas portuguesas, mas também de Portugal.

4. Problema proposto pela empresa Vipex: A Vipex produz uma peça circular de grandes dimensões (tampa de contentores) que, segundo os resultados do software comercial de simulação reológica amplamente utilizado, são impossíveis de injetar de acordo com os parâmetros que a empresa está a utilizar. O desafio consiste em compreender a diferença existente entre os resultados numéricos e os resultados experimentais.

Nota: Este texto foi elaborado pelos membros da Comissão Organizadora do ESGI155,
Conceição Nogueira, Fernando Sebastião e Paula Pascoal-Faria.

Isabel Hormigo
Agrupamento de Escolas Dona Filipa de Lencastre em Lisboa

Joana Teles
Universidade de Coimbra

CAMPOS DA MATEMÁTICA

Experiência única com jovens talentosos de São Tomé e Príncipe que terá continuidade.

À imagem de inúmeras atividades de desenvolvimento do ensino da matemática, a atual direção da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) tem na sua ambiciosa agenda desenvolver o protocolo que a Fundação Calouste Gulbenkian (FCG) connosco estabeleceu para organização e realização de ações de promoção, formação e sensibilização dos jovens em Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa (PALOP) para a matemática.

Considerando a experiência da SPM em atividades de fomento da aprendizagem de qualidade em matemática, a FCG estabeleceu este protocolo de colaboração com vista a concretizarmos no Programa Gulbenkian Parcerias para o Desenvolvimento projetos que nos PALOP possam contribuir para o aumento da qualidade do ensino da matemática.

Foi neste âmbito e na qualidade de responsáveis científico-pedagógicos que organizámos e desenvolvemos o Campos da Matemática FCG em S. Tomé e Príncipe. Contámos para a sua concretização com o empenho e o apoio local da sociedade congénere – Sociedade Santomense de Matemática –, com a qual a SPM tem um acordo científico, em particular nesta ação, de conseguirmos atingir os objetivos estabelecidos pela FCG – para que os jovens talentosos em matemática deste país possam vir a alcançar o seu pleno potencial.

O Campos, que decorreu entre os dias 2 e 13 de setembro, todas as manhãs, em sessões das 8h às 13h, contou com 39 alunos de oito escolas, a iniciarem o 10.º ano de escolaridade, selecionados de um conjunto de 268 alunos com classificação superior a 14 valores, contando também com o envolvimento dos professores santomenses.

No decorrer do Campos da Matemática o nosso trabalho norteou-se sempre pelo princípio de revisitar os vários conteúdos dos currículos do Ensino Básico, propiciando aos alunos conhecimentos mais profundos, situações e problematizações que permitissem aprofundar os vários conteúdos dos currículos do Ensino Básico, o que inequivocamente motivou os alunos a quererem saber mais. Em conjunto, concretizámos um programa que possibilitou, passo a passo, a construção da compreensão que permitiu aos alunos estabelecerem relações e formularem generalizações, resolverem problemas, comunicarem com rigor raciocínios, resolverem situações práticas em atividades de campo, o que nos possibilitou aferir os seus progressos.

As nossas expectativas foram superadas, sessão a sessão, o grande empenho, esforço e trabalho responsável foi visível nos 39 alunos participantes. A continuidade deste trabalho com este grupo de alunos, que está pensado para os próximos dois anos, prevê-se frutuoso e motivador.

Após a realização deste Campos da Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian, com o primeiro dos três grupos que estão previstos acompanharmos durante cinco anos, estamos certos de que o projeto da FCG poderá ser decisivo no futuro destes jovens santomenses, o que será gratificante para nós e para todos os envolvidos.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt***.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2020

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR