GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO V **N.º 19** MAIO-1944

SUMÁRIO

Os teoremas de Netto e de Lüroth e o conceito de dimensão, por *J. Albuquerque*

Astronomia

Irregularidades do movimento de rotação da Terra, por *António Perestrello Botelheiro*

Pedagogia

Sôbre o treino de estudo dos nossos professores, por *Hugo B. Ribeiro*

Sôbre o ensino da matemática no curso liceal, por *António Augusto Lopes*

Algumas considerações, por *António dos Santos Almeida*

Nota, por *Bento Caraça*

Conselhos aos estudantes da Escola Politécnica Federal de Zürich

Temas de Estudo

Lógica matemática — Indicações bibliográficas, por *Bernardino Barros Machado*

Antologia

O valor social da investigação científica, por *Ruy Luís Gomes*

Movimento Matemático

Movimento matemático espanhol — Centro de Estudos Matemáticos Aplicados à Economia — Junta de Investigação Matemática, etc.

Matemáticas Elementares

Pontos de exames de aptidão às Escolas Superiores

Matemáticas Superiores

Pontos de exames de freqüência

Problemas propostos — Boletim Bibliográfico, etc.

NÚMERO AVULSO: ESC. 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO
J. da Silva Paulo

ADMINISTRADOR
Orlando M. Rodrigues

TESOUREIRO
J. de Oliveira Campos

CORRESPONDÊNCIA PARA Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO V-N.º 19 GAZETA DE MATEMATICA MAIO - 1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Os teoremas de Netto e de Lüroth e o conceito de dimensão

por **J. Albuquerque**

(bolseiro em Roma do I. A. C.)

A história de um conceito começa sem dúvida quando êsse conceito é apenas uma noção intuïtiva; as causas da formação dessa noção, os objectos ou os fenómenos naturais que a originaram, o modo como nasceu e tomou corpo, a maneira como resistiu a possiveis esquecimentos e como passou a fazer parte de um património, as relações desde então sempre moventes com os conceitos e noções que já existiam, são sem dúvida a prèistória do conceito, quási sempre misteriosa para nós homens de hoje.

A história de um conceito é necessária porque é conhecendo-a que o homem pode voluntàriamente enriquecê-la e até certo ponto orientá-la, sendo e não sendo escravo dessa história. A história de um conceito é necessária sôbre tudo ao investigador porque tentará adivinhar as leis da evolução dêsse conceito e tentará aplicá-las nos seus esforços de generalização e criação.

Infelizmente para cada conceito falta fazer a respectiva história.

Não é numa conferência ou num artigo que se pode fazer a história de um conceito, geralmente longa e susceptível de preencher o programa de um curso universitário.

Se vamos aqui falar do conceito de dimensão de um espaço, é apenas para em linhas muito largas dizermos qualquer coisa da sua evolução para finalmente nos fixarmos nos teoremas de *Netto* e de *Lüroth* e chamar a atenção dos leitores da «Gazeta de Matemática» para um dos problemas mais interessantes das matemáticas modernas.

A noção intuïtiva de número de dimensões de um espaço durante muito tempo esteve apoiada nas seguintes considerações: sôbre a recta só se podem medir comprimentos, e portanto a recta tem uma dimensão; no plano podem fazer-se medições de comprimentos e larguras, e portanto o plano tem duas dimensões; no espaço euclideano podem fazer-se medições de comprimentos larguras e alturas, e então o espaço euclideano tem três dimensões.

Aos segmentos, áreas planas e volumes eram também atribuídas respectivamente, uma, duas e três dimensões.

Certamente que uma noção intuïtiva como esta, dava ocasião a grandes discussões filosóficas, altamente apreciadas pelos contemporâneos mas absolutamente improductivas. Os matemáticos não procuravam aprofundar esta noção e evitavam falar nela.

Descartes introduzindo as coordenadas veio criar a possibilidade de uma modificação, e essa modificação deu-se, aparecendo uma primeira definição de número de dimensões de um espaço: o número de dimensões de um espaço era precisamente o número 1, 2 ou 3 de coordenadas necessárias para definir a posição de um ponto do espaço.

Em seguida os físicos alargaram a noção de número de dimensões com a necessidade de considerar sistemas em que os pontos não só dependiam das coordenadas que lhes fixavam a posição no espaço, mas ainda de outras grandezas físicas tais como o tempo, a pressão ou a temperatura. A posição do ponto era pois determinada por valores das coordenadas e por valores de grandezas físicas; o elemento do sistema era determinado pelos valores de certos parâmetros numéricos e tais parâmetros perdiam o caracter de uma distância, que as coordenadas tinham, e eram apenas índices numéricos, podendo cada parâmetro ser substituído por uma função dêsse parâmetro.

Chegàmos assim a uma segunda definição de número de dimensões de um espaço: o número de dimensões de um espaço era então o número de parâmetros necessário e suficiente para determinar a posição de um ponto do espaço.

Vê-se que a noção de número de dimensões de um espaço sofria uma evolução e passava a uma fase mais larga, acompanhando uma evolução paralela da noção de espaço.

A confiança dos matemáticos nesta segunda definição era ilimitada e durante anos se manteve até ser abalada por uma sacudidela brutal dada por um matemático de génio.

A descoberta fundamental de *Georg Cantor* estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os pontos de um quadrado e os pontos de um segmento, entre os pontos de um plano e os pontos de uma recta, vinha deitar por terra sem piedade aquela definição.

A genial obra de *Cantor* está perfeitamente enquadrada numa época em que os filósofos revolucionaram o mundo, quebrando como vidro conceitos milenários, criando novas leis do pensamento que lhes permitiram evidenciar a fragilidade das coisas estabelecidas. E *Cantor* teve contra si a massa reaccionária dos matemáticos seus contemporâneos.

Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos é uma lei que a cada elemento de um dos dois conjuntos faz corresponder um e um só elemento do outro, e inversamente. Então poderia determinar-se a posição de um ponto M do plano pela posição do ponto m da recta que se lhe fazia corresponder. A posição do ponto M do plano era determinada por um só parâmetro, a abscissa do ponto m correspondente.

A intuïção levava a conceder ao plano uma nobresa superior à da recta, e a correspondência de Cantor negava essa nobresa, nivelando de um modo brutal os dois espaços. E era de aceitar como um facto um tal nivelamento.

Mas se a conclusão que Cantor impunha, tinha o mérito de destruir o que na intuïção impedia um progresso, tal conclusão destruia igualmente tudo o que na mesma intuïção poderia levar a ultrapassá-la.

Era necessário abandonar a segunda definição e substituí-la por uma outra que a contivesse e que simultâneamente tomasse em consideração a observação de Cantor.

Notou-se então que na correspondência biunívoca entre o plano e a recta, se um ponto de um dêles variasse com regularidade em relação à organização topológica do conjunto, o outro ponto que lhe correspondia não respeitava a topologia do seu espaço e «entregava-se a uma dança louca» executando um movimento formado de saltos bruscos e sem continuïdade.

A noção de continuïdade vinha assim facilitar a síntese, conciliando a nossa intuïção, as aspirações secretas da nossa estructura de matemáticos, com a fria, desumana, mas justa e precisa observação de *Cantor*.

Neto (1899) demonstra que é impossível estabelecer uma correspondência biunívoca e bicontínua entre os pontos de um quadrado e os pontos de um segmento.

Lüroth (1907) demonstra que é impossível estabelecer uma correspondência biunívoca e bicontínua entre os pontos do plano e os pontos da recta, entre os pontos do espaço e os pontos do plano.

O conceito de dimensão entra numa nova fase e a sua história num período áureo.

Conceito e história atravessaram uma crise, crise bela, e é no auge das crises quando tudo parece subverter-se, que nos devemos encher de esperança e olhar a própria crise como uma fôrça tremenda de progresso.

Os resultados de *Netto* e de *Lüroth* domonstravam que o número de dimensões de um espaço, respondendo à nossa intuïção que criava uma diferença fundamental entre o plano e a recta, não podia ser definido considerando sòmente os espaços como cáos de pontos. Punha-se em relêvo o caracter topológico dessa noção.

Em 1909-1910, *Fréchet* dava a sua definição de tipo de dimensão: são do mesmo «tipo de dimensão» todos os conjuntos entre os quais é possível estabelecer uma correspondência biunívoca e bicontínua.

Os tipos de dimensão de *Fréchet* dispõem-se numa escala simplesmente ordenada e contínua; há portanto espaços que não têm um tipo de dimensão inteiro, nem mesmo racional. A definição de *Fréchet* não satisfaz plenamente a intuïção.

O mesmo sucede à teoria de *Hausdorff* (1918) baseada sôbre a noção de medida de um conjunto.

Em 1912, *Poincaré* indicou uma via para a solução do problema, explorada quási imediatamente por *Brouwer, Menger* e *Urysohn*. A definição de Poincaré consiste em permitir passar de um modo topológico de n para $n+1$ dimensões, e daria sòmente dimensões inteiras aproximando-se assim muito da intuïção. Em seguimento destas idéias e já nos nossos dias, estão os resultados das escolas polaca (*Janizewski*, etc.) e francesa (*Bouligand, Ky Fan*, etc.).

¿ Mas de facto o conceito de dimensão é de natureza topológica? Evidentemente que a definição de número de dimensões não pode considerar os espaços como simples colecções de pontos. ¿ Mas não bastará considerá-los ordenados, como uma ordem simples ou com uma ordem dupla?

É neste sentido que a escola americana (*Birkhoff*) tenta hoje uma solução do problema estudando sistemàticamente os sistemas ordenados e as estructuras.

O problema tem mais do que nunca uma extraordinária importância e depois de tão grande impulso como o que sofreu de Cantor perdeu muito da sua velócidade e parece esperar hoje uma nova crise, que lhe virá talvez da física, e que é para desejar seja terrível e fecunda.

Na base de tôdas estas tentativas de resolução encontram-se com notável relêvo os teoremas de *Netto* e *Lüroth*; vamos dar dêstes teoremas uma «demonstração livre», isto é, uma demonstração que expurgàmos de noções estranhas e de complicações inúteis. Quando tal se faz a uma demonstração tornam-se salientes as verdadeiras razões do facto a demonstrar.

Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, como anteriormente dissemos, é uma lei que a cada ponto x de E faz corresponder um ponto $f(x)$ de F de tal modo que se x_1 e x_2 são pontos distintos de E os correspondentes $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são distintos; e inversamente, a cada ponto y de F faz corresponder $f^{-1}(y)$ em E de tal modo que para $y_1 \neq y_2$ se tem $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$.

Temos pois uma transformação f do conjunto E no conjunto F e uma transformação inversa que pode ser representada por f^{-1} e que transforma F em E.

Se os conjuntos E e F estivessem mergulhados em espaços topológicos ou fôssem espaços, cada ponto dêstes conjuntos teria as suas vizinhanças e então poderíamos falar de transformações contínuas ou correspondências contínuas.

Uma transformação f como a anterior será contínua no ponto x do conjunto E se para cada visinhança $V_{f(x)}$ do ponto $f(x)$ existe uma vizinhança V_x de x tal que:

$$f(V_x) \subset V_{f(x)}.$$

A transformação f é contínua em E ou simplesmente contínua se fôr contínua em cada ponto de E. Se a transformação f^{-1} é também contínua então a transformação f diz-se bicontínua.

Uma correspondência biunívoca e bicontínua é uma transformação f unívoca e contínua de E em F tal que a sua inversa f^{-1} é também unívoca e contínua.

Poincaré em 1895 chamou homeomorfismos às transformações biunívocas e bicontínuas; estas transformações formam um grupo.

A topologia ou analysis situs estuda as propriedades dos conjuntos que permanecem invariantes quando se executam homeomorfismos.

A designação de analysis situs é de *Poincaré*, e a designação de topologia é de *Listing* (1847).

Demonstremos agora o teorema de *Netto.*

Teorema de Netto. *Um quadrado não pode ser homeomorfo a um segmento.*

Demonstremos por absurdo. Tomemos um quadrado Q e um segmento S e suponhamos que existe uma correspondência f unívoca e contínua de Q em S tal que f^{-1} é também unívoca e contínua.

Seja (a, b) um segmento de pontos do quadrado Q, que podemos supôr todo formado com pontos interiores ao quadrado o que é possível e permitirá tirar dêste teorema um corolário importante.

A correspondência f dá-nos em particular uma correspondência biunívoca e bicontínua entre o segmento (a, b) e um certo conjunto de S de que conhecemos já dois pontos: os transformados $f(a)$ e $f(b)$. Vamos demostrar antes de mais nada que o intervalo (a, b) é transformado por f no segmento $[f(a), f(b)]$.

Seja com efeito p um ponto de $[f(a), f(b)]$ e suponhamos que nenhum ponto de (a, b) se transforma em p.

Representemos por E o conjunto dos pontos de (a, b) cujos transformados caem em $[f(a), p]$.

Representemos por F o conjunto dos pontos de (a, b) cujos transformados caem em $[p, f(b)]$.

Fàcilmente se vê que: $E+F=(a, b)$ e que $E \cdot F=0$, isto é, os conjuntos E e F são disjuntos e reünidos dão o segmento (a, b).

Tomemos um ponto x de F, portanto com $f(x)$ em $[p, f(b)]$ sendo por hipótese $f(x) \neq p$.

Como f é contínua, a cada visinhança $V_{f(x)}$ de $f(x)$ corresponde uma visinhança V_x de x, cujos pontos são todos transformados em pontos de $V_{f(x)}$. Isto basta para provar que existe uma V_x sem pontos de E e êste resultado é verdadeiro para todo o x de F.

Então o conjunto F não tem pontos de acumulação do conjunto E, e do mesmo modo se demonstraria que E não tem pontos de acumulação de F, o que é impossível porque $E+F$ é o segmento (a, b). Demonstrou-se assim que o transformado do segmento (a, b) é um segmento.

Se tomarmos agora um outro ponto c do quadrado Q fora do segmento (a, b), e que podemos também supor interior ao quadrado, os três segmentos (a, b), (b, c) e (c, a), lados de um triângulo, tranformam-se em segmentos $[f(a), f(b)]$, $[f(b), f(c)]$, $[f(c), f(a)]$ formando um triângulo «achatado» do segmento S, onde encontramos um ponto pertencendo simultâneamente a dois lados do triângulo achatado e que será o transformado de dois pontos distintos do quadrado Q facto em contradição com a biunivocidade de f.

Uma transformação biunívoca e bicontínua entre os pontos do quadrado e do segmento conduz sempre a esta contradição e por isso não existe. *c. q. d.*

Antes de tirar do teorema o corolário que anunciàmos, vejamos uma conseqüência imediata e importante do teorema.

Um conjunto plano homeomorfo a um segmento não pode ter pontos interiores. Esta conseqüência é realmente imediata porque se pode considerar o segmento como o transformado do conjunto plano pelo homeomorfismo, e se o conjunto plano tivesse um ponto interior conteria também um quadrado, visto que uma das famílias admissíveis de visinhanças de um ponto do plano é a família dos quadrados, por exemplo, centrados no ponto. Chama-se arco simples de *Jordan* a um conjunto homeomorfo a um segmento finito, e portanto o arco simples de *Jordan* não tem pontos interiores.

Notemos agora que o facto de se poder tomar o triângulo de vértices a, b, c, da demonstração do teorema com todos os pontos dos seus três lados interiores ao quadrado, permite enunciar imediatamente o seguinte corolário:

Corolário. *O conjunto dos pontos interiores a um quadrado não pode ser homeomorfo ao conjunto dos pontos interiores a um segmento.*

O mesmo raciocínio do teorema, marcha com efeito sem obstáculos até ao fim, demonstrando-nos assim o corolário.

Com êste corolário demonstraremos o teorema de *Lüroth* de que se pode dar o seguinte enunciado:

Teorema de Lüroth. *Não pode existir um homeomorfismo entre o plano e a recta.*

Com efeito, o conjunto dos pontos interiores a um quadrado é homeomorfo ao plano, e o conjunto dos pontos interiores a um segmento é homeomorfo à recta. Então se o plano e a recta fôssem homeomorfos também o seriam os interiores de um quadrado e de um segmento, o que contradiz o corolário. *c. q. d.*

Lüroth demonstrou ainda que *não pode existir um homeomorfismo entre o espaço euclideano e o plano.* A demonstração deste segundo teorema de *Lüroth* é uma generalização da anterior e deixamo-la como exercício aos nossos leitores.

Roma, 24 de Março de 1944.

ASTRONOMIA

IRREGULARIDADES DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA

por ***António Perestrello Botelheiro***

A noção do tempo é uma das que mais têm preocupado o espírito humano. Em constante evolução, a idéia de tempo tem sofrido através das idades duras vicissitudes e sôbre ela se têm escrito, e continuam a escrever, dezenas de livros.

Cada filósofo, desde Heraclito, apresenta uma noção nova e o aspecto que oferece o confronto das idéias expendidas é, por vezes, bastante confuso. Assim, por exemplo, enquanto Kant sustenta a existência subjectiva do tempo, Spencer julga-o inconcebível quer objectiva quer subjectivamente considerado.

Ao astrónomo não é, sem dúvida, indiferente êste debate em que opiniões tão curiosas se entrechocam, e sôbre as quais o bem conhecido *quid est ergo tempus?* de Santo Agostinho paira possìvelmente ainda...

No entanto, o astrónomo não intervem nas discussões sôbre a «essência», sôbre a «natureza íntima» do tempo; como diz Eddington, qualquer que possa ser a natureza do tempo *de jure*, o tempo do astrónomo é o tempo *de facto.* Na verdade êle sabe que pode medir intervalos de tempo e ao aperfeiçoamento dessa medida dedica o melhor do seu esfôrço, convicto de que procedendo desta maneira novos e interessantíssimos horizontes se vão abrindo à ciência, simultâneamente no campo especulativo e no campo da aplicação.

O «padrão» de medida de intervalos de tempo, há muito adoptado, é o movimento de rotação da Terra. Entre as qualidades essenciais a que deve obedecer um bom padrão sobressai a da «permanência»: obedecerá o nosso relógio fundamental a esta característica indispensável para que as suas indicações nos possam merecer confiança?

Creio ter sido em 1752 que a não permanência do nosso padrão de tempo foi pela primeira vez abordada. A Academia das Ciências de Berlim, presidida nessa época pelo francês Maupertuis, instituiu um prémio para galardoar o melhor trabalho que lhe fôsse apresentado em resposta às seguintes preguntas:

— Teve ou não o movimento de rotação da Terra sempre a mesma velocidade?

— Que meios existem para o comprovar?

— No caso de se descobrir alguma irregularidade, qual seria a sua causa?

Entre os trabalhos recebidos pela Academia de Berlim em resposta aos quesitos formulados figurava um no qual, com extraordinária intuïção, era apresentado pela primeira vez o atrito das marés oceânicas como causa retardadora do movimento de rotação da Terra: assinava-o Kant.

O prémio foi atribuído ao trabalho apresentado pelo matemático italiano Paulo Frisi...

Anos e anos decorreram sem que o problema fôsse retomado e só a espaços uma ou outra voz se levantava — como que receosa de fazer desabar o grande edifício tão laboriosamente arquitectado, tal o respeito que infundia a «permanência» dos nosso padrão de tempo.

É só um século depois de Kant ter apresentado, sem bases experimentais que a apoiassem, aquilo a que êle chamou uma «história natural» do céu que Robert Mayer ataca de novo o problema tanto tempo adormecido.

A questão começa a interessar os astrónomos e os trabalhos sôbre êste tema vão-se sucedendo agora: o assunto é tratado sucessivamente por Ferrel, Croll, Delaunay, Adams, Thomson, Darwin...

Mercê de tais cultores a teoria evoluciona incessantemente e atinge nos primeiros anos dêste século, com Simon Newcomb, um extraordinário brilho. Já não restam dúvidas de que o comprimento do dia está continuamente aumentando por efeito do atrito das marés oceânicas!

A técnica das observações aperfeiçoa-se, entretanto, cada vez mais; o êrro médio de uma determinação de tempo diminui de forma contínua desde o século XVI. Assim, êste êrro que era, no período áureo dos descobrimentos portugueses, de dois minutos é hoje de cêrca de doze mil vezes menor, isto é, inferior a uma centésima de segundo.

O atraso do movimento de rotação da Terra devido ao atrito das marés é apenas de um milésimo de segundo por século. Pequeno, embora, êste atrazo envolve um grande dispêndio de energia.

Um cálculo simples mostra que a energia dissipada em calor é de $1{,}5\times10^{19}$ ergs por segundo, ou sejam mais de dois mil milhões de cavalos-vapor!

As medidas efectuadas directamente no sentido de se avaliar a quantidade de energia dissipada pelas marés nas costas e no fundo dos mares, apesar de incompletas e do seu carácter necessàriamente grosseiro, forneceram o número $1{,}1\times10^{19}$ ergs por segundo que concorda bem com aquêle que a teoria indica.

É interessante notar que enquanto nos mares profundos é relativamente pequena a dissipação de energia ela é muito elevada nos mares fechados e de pouca profundidade, como o mar do Norte, a Mancha, etc. Cêrca de dois terços do número encontrado são devidos a um único mar — o de Bering — onde a dissipação de energia é muito forte.

Como as marés oceânicas são um fenómeno regular e constante a perturbação que elas trazem ao movimento de rotação da Terra não teria, se fôsse única, importância de maior: uma fórmula simples nos daria a correcção devida ao atraso do nosso relógio fundamental.

Mas o problema é mais complicado e tem sido, com freqüência, pôsto de uma forma pouco nítida mesmo em trabalhos de responsabilidade.

De facto, além do atraso constante originado pelo atrito das marés oceânicas o movimento de rotação da Terra está sujeito a outras perturbações, a irregularidades imprevisíveis, de causa ainda desconhecida, «saltos» na marcha semelhantes àquêles que são inerentes às melhores pêndulas construídas pelo homem.

Foi a comparação entre as observações das posições dos astros e aquelas que a teoria lhes assinalava que revelou a existência destas irregularidades. Na realidade, a observação mostrava ora um avanço ora um atraso sôbre a teoria; como isto sucedia para todos os astros e duma quantidade proporcional ao respectivo movimento médio na órbita, só uma explicação havia que satisfizesse, salvando ao mesmo tempo o edifício da Mecânica Celeste — a variação do «padrão» de medida.

A importância excepcional do assunto foi magistralmente posta em relêvo por William Brown, o grande impulsionador dêste estudo e «um dos gigantes da Astronomia», como lhe chamou um seu biógrafo.

Para a Lua se voltaram então as atenções gerais, pois é a Lua o astro que é dotado do maior movimento médio diário ($13^\circ{,}2$) e aquêle que, por êsse motivo, nos pode dar uma maior precisão.

A sua teoria, o problema mais difícil de tôda a Mecânica Celeste, foi levada por Brown a um grau de perfeição nunca dantes atingido e dificilmente ultrapassável. Para dar uma idéia, embora ligeira, do seu gigantesco trabalho basta dizer que nas tabelas por êle elaboradas, tabelas que nos dão a posição do nosso satélite em qualquer data com a aproximação de um centésimo de segundo, cêrca de mil e quinhentas perturbações foram calculadas. (Hansen, nas suas tábuas da Lua, tinha considerado apenas trinta perturbações).

No Observatório de Yale começaram, sob a direcção de Brown, a ser reünidas e discutidas tôdas as observações da Lua que podem contribuir para o esclarecimento do problema; entre estas ocupam lugar de destaque as observações de ocultações de estrêlas, pois nelas não intervêm os erros instrumentais. O Observatório da Tapada inclui, desde 1938, no seu plano de trabalhos o estudo das irregularidades do movimento de rotação da Terra; desde aquela data que êle contribui com as suas observações de ocultações para a campanha internacional, e esta colaboração tem neste momento um especial interesse pois a grande maioria dos observatórios europeus está impossibilitada de trabalhar no mesmo sentido.

Graças ao clima, as observações da Tapada ultrapassam já em número as de qualquer outro observatório; sôbre a sua qualidade só diremos que nunca nenhuma observação deixou de ser aproveitada pelo organismo que superintende internacionalmente no assunto.

No quadro abaixo é dado um resumo dos resultados obtidos (em correcções à longitude tabular da Lua) em comparação com os valores determinados pelo serviço internacional:

	Tapada	S. I.
1938	2'',09	1'',88
1939	1'',32	1'',34
1940	0'',96	0'',92
1941	0'',93	—
1942	0'',24	—
1943	0'',20	—

Embora continue a servir para as necessidades da geodesia e da navegação, o nosso padrão de medida de tempo, durante tantos séculos julgado permanente, deixou de merecer confiança aos astrónomos.

Já hoje êle não é empregado no cálculo rigoroso dos eclipses totais do Sol, no estudo das estrêlas duplas espectroscópicas e das variáveis de curto período.

Qual a causa destas irregularidades do nosso padrão de tempo? Haverá possibilidade de o substituirmos por outro mais rigoroso?

A resposta a estas preguntas é de capital importância para a Astronomia; num outro artigo apresentaremos a nossa opinião, numa tentativa para o esclarecimento do problema.

PEDAGOGIA

SOBRE O TREINO DE ESTUDO DOS NOSSOS PROFESSORES

por ***Hugo B. Ribeiro*** **(bolseiro em Zürich do I. A. C.)**

No seu artigo «Algumas reflexões sôbre os exames de aptidão» («Gazeta de Matemática», n.º 17) o prof. Bento Caraça indica-nos resultados dos exames de aptidão na sua escola que podem fornecer elementos para o estudo da coordenação entre os nossos ensinos, secundário e superior, de Matemática. Em conclusão, sublinha como as insuficiências dos candidatos a estes exames revelam falta de espírito crítico e automatismo e apela para um longo debate sôbre esta questão que «envolve muito profundamente o interêsse nacional». Muitos dos nossos professores considerarão, naturalmente, como um simples dever profissional o contribuirem com a sua experiência para se esclarecer, nesta oportunidade, origens e remédios de tais deficiências e, especialmente, para se averiguar da extensão delas. Mas as experiências dos estudantes interessam também no debate. Por isto nos resolvemos a indicar o que segue, com o que não pretendemos senão sublinhar observações oportunas, algumas das quais, já repetidamente foram feitas, mesmo neste jornal [1].

1. Falta de espírito crítico e automatismo em Matemática, aparecem naturalmente juntos e significam ignorância e inconsciência da ignorância, aí, onde o conhecimento não se tem sem exercício aturado da faculdade crítica e com o puro automatismo (talvez porque na utilização, com êxito, dos resultados matemáticos êsse predicado do conhecimento em geral intervem a cada passo). O mal colectivo diagnosticado não resultará, decerto, de deficiências fisiológicas a manifestarem-se em determinadas gerações; mas as suas causas, nem tôdas novas, residem num meio social propício, e parece que se manifestam entre nós, neste momento, mais agudamente. Não podemos esperar que tôdas essas causas se conheçam e fàcilmente possam resolver-se para actuarmos de uma forma progressiva: é também na medida em que soubermos encarar os problemas singulares e, nestes, as causas singulares, que tomamos consciência das relações de interdependência entre estas, que nos fortalecemos para apressarmos a construção de novas relações e, finalmente, da solução aceitável. Isolaremos, aqui, uma, entre as causas próximas, que provàvelmente é decisiva: ¿ Não será normal, entre nós, a impreparação *matemática* dos que ensinam e se destinam a ensinar, Matemática? [2] E, se assim é, ¿ não resulta já, esta normal falta de treino de estudo dos nossos professores, de que só excepcionalmente a Matemática terá sido considerada, entre nós, como um objecto, próprio, independente, de estudo? O que estas interrogações significam, aqui, é o que ràpidamente procuramos explicar no que segue.

2. Na hipótese mais favorável, o nosso, comum, professor de Matemática tem, depois da preparação mate-

[1] Leia-se, por exemplo, o artigo de António Monteiro «O prémio nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira», «Gazeta de Matemática», n.º 15.

[2] Não se põem aqui em questão os esforços individuais dos nossos professores de matemática no sentido da elevação do nível da sua preparação profissional; trata-se sòmente da qualidade de treino que é exigida para a sua profissão.

A Sociedade Portuguesa de Matemática, e especialmente o prof. Bento Caraça, tem procurado reünir informações sôbre a preparação exigida no estrangeiro aos professores de matemática das escolas secundárias. Só agora podem enviar-se à S. P. M. alguns dados, com êste fim, relativos à Suiça. Publicar-se-ão provàvelmente na «Gazeta de Matemática»; e estão em inteiro acôrdo com as impressões que deixamos nêste artigo.

mática que o liceu lhe fornece (preparação compatível com os resultados daqueles exames de aptidão) um treino de estudo numa licenciatura em Ciências Matemáticas (para o ensino no liceu requerem-se, ainda, determinadas leituras e práticas de natureza pedagógica). Examinando agora, *só globalmente,* a estrutura da licenciatura em Ciências Matemáticas (que constitui ainda os nossos estudos oficiais de nível mais elevado) somos levados a concluir que o objecto do estudo é, aí, constituído por certos capítulos da Física clássica e certas técnicas, precisamente: a Mecânica e, especialmente, a Mecânica Celeste, a Astronomia, a Geodesia e o Cálculo das Probabilidades (com os objectivos especiais da Teoria dos erros e da Técnica dos seguros). Com efeito, estes capítulos especiais de aplicações da Matemática formam os escalões da estrutura que deverão abordar-se indispensàvelmente e em último lugar; e as noções pròpriamente matemáticas e certas técnicas gerais de Cálculo (Análise, Geometria) adquirem-se prèviamente (ao mesmo tempo que as de Desenho, as de Física e as de Química) com uma — natural relativamente a tal estrutura — freqüente preocupação dominante, a daqueles escalões finais. Por outro lado, o estudo da Matemática, pròpriamente, ocupa (e assim orientado) aproximadamente metade do tempo escolar, os seminários matemáticos são inexistentes, não fazem parte do plano de estudos, ao passo que trabalhos próprios e de grupo no domínio das aplicações são, por vezes, fomentados.

Encarámos a hipótese mais favorável. O caso dos professores do ensino técnico é ainda mais expressivo: freqüentemente preparam-se êsses com o expresso objectivo de se exercitarem em técnicas especiais, adquirindo, para isso, noções matemáticas e técnicas gerais e especiais de Cálculo. Normalmente, são, para êles, mais reduzidos ainda o tempo de estudo e o domínio dos capítulos abordados em Matemática [3].

Parece, pois, que os nossos professores *de Matemática* não estudam, *normalmente,* Matemática senão na medida em que esta Ciência tem que ver directamente com certas aplicações especiais, certas técnicas, das quais se pode dizer, embora grosseiramente, que não interessam à sua profissão. (Nos liceus normais também não é a Matemática, repetimos, mas a técnica do ensino da Matemática elementar, o objecto das preocupações do futuro professor).

3. Como se sabe, a linha geral do desenvolvimento da Matemática é naturalmente traçada pela do desenvolvimento social e, mais directamente e freqüentemente, a partir das solicitações das técnicas e das ciências a que se aplica de uma forma imediata. Êste facto e o de que a matemática é por sua vez origem de novos problemas e novas soluções no domínio destas mesmas ciências e técnicas não se contradizem. A matemática é, assim, considerada, tanto quanto isso é possível, um objecto de estudo isolado, independente. E onde ela assim não fôr considerada, em primeiro lugar, não só terá o seu desenvolvimento próprio entravado mas ainda limitada a sua aplicabilidade, diminuida a sua qualidade de reveladora da falta de espírito crítico e do automatismo, etc. Os estudos *matemáticos*, mesmo os, aparentemente e momentâneamente, mais afastadas das aplicações ensinam-nos ainda (isto é posto em relêvo com muita felicidade por Eckmann na sua lição sôbre a «idéia de dimensão») sôbre a realidade que é a nossa própria maneira de pensar. E o conhecimento em Matemática não se adquire sem o exercício continuado do estudo, da resolução da curiosidade própria pelo esfôrço próprio, que exigem, se querem ser proveitosos, um treino longo convenientemente dirigido, inicial. [4]

Tudo o que precede legitima agora as seguintes interrogações:

¿É a Matemática considerada, entre nós, normalmente, como uma ciência em desenvolvimento, sôbre a qual há que actuar para a conhecer, e que, embora relacionada com outras actividades, tem problemas próprios exigindo um treino especial e aturado não delimitado (e muito menos normal e estritamente delimitado) pelas ciências e técnicas que ela serve?

¿Êste treino, êstes problemas, são *normalmente* abordados pelos que hão-de ensiná-los?

Os resultados conhecidos dos exames de aptidão («se se pensar que se trata de pessoas à volta dos 18 anos cujo trabalho foi acompanhado por professores durante anos e que se sugeitaram depois com êxito a provas finais de saída...»), a estrutura da nossa licenciatura em ciências matemáticas, o desenvolvimento da investigação matemática, a mumificação corrente, dos nossos cursos, as nossas bibliotecas matemáticas, a história do «Prémio Nacional Doutor Gomes Teixeira», [1] etc., etc., respondem negativamente àquelas interrogações.

Se está, de facto, em causa uma tal oposição entre concepções tão distantes do estudo da Matemática (esta distância fornecerá uma primeira medida do nosso atraso neste campo) a resolução de tal oposição é um problema primário; e, sem ela, são ilusórias, por

---

(3) **No ponto de vista da preparação normal dos professores não se percebe que, como sublinha o prof. Caraça, haja qualquer coisa não certa quando se constata que a percentagem de reprovações de candidatos do ensino técnico seja, em matemática, superior à dos candidatos do ensino liceal.**

(4) **Leia-se sôbre isto o artigo de J. Albuquerque «Duas demonstrações dum mesmo facto» na Gazeta de Matemática, n.º 16.**

longínquas, as posições da maioria dos outros problemas pedagógicos, como os de programas, métodos especiais, etc., etc.

O remédio, para esta causa especial, consistia em, sistemàticamente, fornecer aos futuros e actuais professores uma *preparação capaz* (complementar para os últimos) com a freqüência intensiva de seminários, dos mais diversos níveis, orientados por autênticos estudiosos. Mas parece que não será fácil começar: porque os etudiosos são raros e nem sempre (temos o mais convincente exemplo de que assim é) os que aparecem encontram no nosso meio apoio suficiente mesmo quando o seu desinterêsse, a sua dedicação, o valor do seu exemplo, o seu entusiasmo, a sua acção se mostram, nìtidamente excepcionais. A nossa habitual dispersão das ocupações, das energias está em melhor acôrdo com a idéia, fácil, duma «Matemática» que, simplesmente, serve diversas técnicas rendosas.

SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO LICEAL

por ***António Augusto Lopes***

(Prof. do Liceu Alexandre Herculano, Porto)

O artigo publicado pelo Senhor Dr. Bento Caraça no n.º 17 da «Gazeta de Matemática» sôbre os exames de Aptidão não deixa de interessar os professores do Ensino Secundário e, em particular, os dos liceus. Embora caloiro nas coisas do ensino — matéria onde só se deixa de ser novato ao fim de muitos anos — apresento sôbre o assunto as seguintes considerações:

1 — Não me parecem de muito interêsse os dados fornecidos pelos Exames de Aptidão para o problema da coordenação do ensino secundário com o superior porque, como pode verificar-se pelos pontos saídos nêsses exames, os actuais programas do ensino liceal, na disciplina de Matemática, contêm tôda a matéria exigida para a entrada nas Universidades. De resto, não deve ser exigida matéria diferente da do ensino liceal. O contrário seria, manifestamente, injusto. Por outro lado, mesmo defendendo a tese de as Universidades se destinarem ùnicamente à aquisição de «cultura especial», a situação agravar-se-ia porque, se é certo que a finalidade específica do ensino liceal é dotar os portugueses de uma cultura geral útil para a vida (art. 1.º do dec. 27084 de 14-10-936) — a grande maioria dos alunos que termina o curso liceal pretende ingressar nas Universidades.

2 — A falta de correlação entre o ensino secundário e o superior é manifesta e, pelo que diz respeito ao ensino liceal, resulta de não fazerem parte dos programas algumas matérias essenciais para uma boa iniciação dos cursos superiores. Dessas matérias cito, como as mais requeridas por todos os professores, uma grande parte da Trigonometria Plana, elementos de Geometria Analítica Plana e o estudo elementar das derivadas. A situação torna-se particularmente crítica quando, logo de entrada, os professores universitários expõem as suas lições com base em matérias que os seus novos alunos desconhecem completameute. Por exemplo, na cadeira de Física Geral, professada nas Faculdades de Ciências, desatam a diferenciar e a integrar sem qualquer explicação prévia. Os alunos, pasmados, limitam-se a um simples encolher de ombros. Bem sei, que a Física Geral, no plano de estudos da Faculdade, faz parte do 2.º ano, mas, não é menos verdade que os alunos com destino às Escolas Militares têm que freqüentar aquela cadeira no 1.º ano.

Chegamos, portanto, a esta conclusão: — ou os programas dos liceus são modificados de modo a incluírem as matérias indispensáveis para bem iniciar um curso superior ou então os cursos universitários são feitos de modo a evitar as anomalias actuais.

3 — Quando o Senhor Dr. Bento Caraça nos indica algumas das desastradas respostas apresentadas nos Exames de Aptidão por *alunos vindos do liceu*, eu gostaria que se tivessem empregado antes as palavras *alunos com o curso liceal* já que êles são, pelo menos, de três origens: alunos internos dos liceus, alunos do ensino particular e alunos individuais. Acrescentarei que os alunos individuais freqüentam por conta própria alguma escola particular ou não freqüentam nenhuma e constituem parte importante da grande massa de alunos que nos exames liceais apresentam respostas ainda mais aterradoras do que as citadas no artigo do Senhor Dr. Bento Caraça.

O quadro seguinte é extraído da revista «Liceus de Portugal», boletim da acção educativa do ensino liceal, e apresenta as percentagens das reprovações nos exames de Matemática realizados, em todos os liceus, em três anos consecutivos.

Da observação dêste quadro, salta à vista que, nos exames liceais, o comportamento dos alunos internos é notàvelmente melhor que o dos alunos externos. O mesmo facto é verificado em tôdas as outras disciplinas. A diferença é mesmo muito anormal e não sei que explicação cabal possa ter. Questão de professores? Creio que não. Note-se, contudo, que uma grande parte dos professores do ensino particular não tem a preparação profissional dos professores do liceu e que outra parte é constituída por pessoas para quem umas tantas aulas são maneira de ocupar as horas vagas. Diversidade de métodos? Talvez, mas, como resultado de uma diferença de finalidades. Infelizmente um grande número de escolas particulares não têm o ensino por único e primeiro objectivo, coisa que não pode acontecer nos liceus.

Ao pôr em evidência a diferença anormal verificada nos exames liceais entre alunos internos e externos

ANOS	I Ciclo		II Ciclo		III Ciclo/7.º ano	
	Internos	Externos	Internos	Externos	Internos	Externos
1939–40	9 %	23 %	19 %	45 %	18 %	44 %
1940–41	18 %	35 %	37 %	75 %	43 %	69 %
1941–42	6 %	24 %	24 %	62 %	8 %	32 %

* Não indico os resultados de 1942-43 por ainda não terem sido publicados em «Liceus de Portugal.»

faço-o com a dupla convicção de que o mesmo deve suceder nos exames de Aptidão e que os factos apontados constituem uma das causas do mal muito grave apontado pelo Senhor Dr. Bento Caraça. Um caso interessante: — no ano de 1942-43, época de Julho, um rapaz, aluno interno do liceu, concorreu ao exame de Aptidão para três cursos diferentes (Engenharia, Escolas Militares e Medicina); uma sua irmã, já reprovada no ano anterior, concorreu a Engenharia e Matemática; os resultados deixaram a pequena verdadeiramente desolada com uma dupla reprovação e o rapaz satisfeitíssimo por ter tido três aprovações. Acrescento que o rapaz foi classificado com 12 valores no exame do 7.º ano e a irmã, aluna do ensino particular, tinha obtido 16. Conclusão: — Entendo que a maioria das reprovações nos exames de Aptidão deve pertencer a alunos do ensino particular. Se alguém me demonstrar o contrário, dou a mão à palmatória.

4 — Finalmente, tomo a liberdade de responder negativamente, no que diz respeito ao ensino nos liceus, à pregunta formulada pelo Senhor Dr. Bento Caraça sôbre se os resultados dos exames de Aptidão permitem dizer alguma coisa sôbre o nível do ensino. Respondo negativamente porque considero êsses dados insuficientes em número e qualidade. Eu digo porquê: nos programas do 7.º ano, se os nossos alunos falham durante o ano em questões como as do exame de Aptidão, ficam reprovados, se falham no exame final têm sorte idêntica; no respeitante aos programas dos anos anteriores (principalmente em Trigonometria e Geometria) não está na mão dos professores garantir a necessária revisão nem na dos alunos o fazerem-na no correr do ano lectivo, par não lhes sobejar tempo para isso.

Por via de regra, os alunos fazem as suas revisões à última da hora, depois de terem feito os exames liceais. No entanto as coisas estão melhorando neste aspecto; muitos professores, em regime de salas de estudo, estão preparando os alunos naquelas matérias em que a deficiência é maior.

Se desejamos chegar a alguma conclusão definitiva sôbre o assunto, creio que deve ser adoptado caminho bastante diferente. Por exemplo êste:

a) Estudo crítico dos exercícios realizados nos diversos liceus e em diferentes épocas do ano lectivo, para poder analisar todo o programa.

b) Inquérito junto de professores e alunos sôbre se «nos liceus, é mais difícil realizar o exame em condições de aprovação ou ser admitido a êle?»

c) Estudo crítico do comportamento dos alunos internos, nos exames, em comparação com os alunos externos.

d) Estudo comparativo dos resultados obtidos pelos alunos internos de todos os liceus nos exames de aptidão.

Procedendo desta maneira, creio que será possível esperar esta conclusão: No liceu, nem tudo está bem, mas, as coisas não estão tão mal como o artigo do Sr. Dr. Bento Caraça pode sugerir. Ao lado dos liceus de Sá da Bandeira e João de Deus enfileiram, com honras iguais, muitos outros — para não dizer todos.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

por ***António dos Santos Almeida***

Na «Gazeta de Matemática» n.º 17, de Novembro de 1943, apresenta o Professor Dr. Bento de Jesus Caraça um artigo subordinado ao título «Algumas reflexões sôbre os exames de aptidão».

Nesse artigo diz-se que as considerações feitas são baseadas nos resultados dos exames de aptidão ao Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, e, por deles se tratar é que tomo a liberdade de usar da faculdade que é conferida no referido trabalho para apresentar algumas sugestões e conclusões, parte delas resultantes do corpo daquele artigo, e outras da experiência.

Pretende o Prof. Bento Caraça provar que o ensino da matemática nos cursos médios (liceu e ensino técnico) contém «qualquer coisa que não está certo», e que os alunos provenientes do ensino técnico médio dão uma maior percentagem de reprovações nos exames de aptidão ao I. S. C. E. F. do que aquilo que seria de esperar, dado o facto de se tratar de cursos especializados.

Não vou fornecer dados estatísticos calculados matemàticamente, mas apenas apresentar factos verificados.

1 — Quando pretende demonstrar que o ensino técnico médio fornece resultados desoladores nos exames de aptidão, o Prof. Bento Caraça apresenta-nos alguns exemplos de respostas dadas naqueles exames, indicando entre parêntesis a procedência dos candidatos.

Poderia à primeira vista supor-se que estas respostas disparatadas foram dadas por candidatos do ensino técnico, pelo menos na sua maioria. Mas não. De nove dessas respostas citadas como exemplos justificativos, sete são de candidatos provenientes do Liceu.

Ora isto, como é óbvio, não justifica a conclusão a que o Prof. Bento Caraça chegou.

2 — Mas não fiquemos por aqui. Há mais e muito importante.

Se fizermos um estudo comparativo dos programas de matemáticas dos liceus e ensino técnico com o do exame de aptidão chegaremos a uma conclusão que poderá fornecer-nos elementos orientadores, elementos estes que podem resumir-se em poucas palavras, mas que não dispensam a elas um ainda que pequeno comentário: «Os programas dos exames de aptidão estão organizados num nível superior aos dos liceus e ensino técnico médio».

Efectivamente assim é. Mas poderá dizer-se que aquêle programa contém as noções consideradas indispensáveis ao ingresso no I. S. C. E. F.

Encaremos agora a questão doutra forma.

O I. S. C. E. F. não é exclusivamente uma escola superior de matemáticas (embora nos seus cursos estejam incluídas quatro cadeiras de matemática) por isso que já existe de há muitos anos a licenciatura em matemáticas nas Faculdades de Ciências. Se partirmos desta verdade e verificarmos que no I. S. C. E. F. existem quatro secções, das quais apenas duas inserem matemáticas, que a função a desempenhar pelos seus diplomados é essencialmente económica e que a preparação dos actuários (que são em número diminuto) poderia ficar adstricta à licenciatura em matemáticas, concluiremos que o desenvolvimento e a importância atribuídos àquelas cadeiras no I. S. C. E. F. são errados.

A partirmos desta conclusão, que não é apenas pessoal, chegaremos a uma outra, idêntica: «que a exigência tal como existe para os exames de aptidão é também desmedida» (isto sem contar com a diferença de nível dos programas acima citada).

Mas prossigamos, analisando as provas dos exames de aptidão.

3 — Diz o Prof. Bento Caraça que se nota na maioria dos candidatos um completo alheamento pela verosimilhança dos resultados dos problemas propostos.

Como poderão os candidatos revestir-se de calma necessária para analisar o problema, se lhes são apresentados seis pontos, dos quais pelo menos três são charadas, e ainda que dêstes êle terá que resolver quatro (entre os quais está incluída uma charada como obrigatória) e tudo no reduzido espaço de tempo de duas horas?

Evidentemente que esta pregunta poderá ter duas respostas: ou que o tempo é pouco para prestação da prova, ou que os pontos são inadequados ao fim em vista.

Pois a mim afigura-se-me que ambas as respostas são apropriadas, porque não só devemos contar com a preocupação do candidato em prestar uma prova que lhe permita ser admitido, como também devemos concordar que não é ocasião propícia para resolver charadas, demais a mais com tempo marcado para apresentar uma solução, que se exige seja exacta.

Prossigamos ainda.

4 — A questão tal como foi apresentada envolve ainda os resultados obtidos nos preparatórios sob dois aspectos:

1.º — porque se o candidato, obteve aprovação no exame liceal ou no ensino técnico médio, a qual lhe é dada só quando o aluno demonstrou ter cumprido o respectivo programa, vem mais uma vez provar que o do exame de aptidão se encontra num nível superior;

2.º — porque a lei não diz que para a classificação dos pontos dos exames de aptidão sejam tomados em consideração os resultados obtidos nos preparatórios, mas que das duas provas prestadas seja considerada a melhor.

Certamente se poderá dizer quanto ao primeiro aspecto da questão, haver alunos que, vindos de qualquer das procedências (liceu e ensino técnico), obtêm aprovação. Mas a isto respondo eu informando o Prof. Bento Caraça que, para prestar prova de matemática no exame de aptidão, é necessário que o candidato se prepare durante um ano, só ou com um explicador (quando a sua situação financeira o permita) num programa diferente daquele que estudou.

5. — Apresentados os pontos capitais, resta-me para finalizar, fazer uma consideração de carácter pedagógico, visto que aquêle artigo também abordou esta questão.

O Prof. Bento Caraça faz uma apreciação sôbre as condições pedagógicas dos professores do ensino médio, mas não se lembra que nas suas aulas deu no prazo de um mês (o que corresponde a 12 lições) o primeiro volume das suas «Lições de Álgebra e Análise».

NOTA

Publicaram-se na íntegra as respostas ao nosso artigo do n.º 17 da «Gazeta». Se é verdade que o debate não foi tão largo como desejavamos (alguns pontos ficaram ainda no escuro) a verdade é que foram levantadas algumas questões de grande importância cujo estudo aprofundado pode ser do maior interêsse. No próximo número farei um resumo das opiniões dadas e das questões levantadas e darei sôbre algumas a minha opinião.

Mas há uma das respostas — a do sr. António dos Santos Almeida — a que quero fazer referência desde já, para não ter depois que me ocupar dela ao lado das outras. A meu ver, poderia esta ter sido uma das interessantes e das mais importantes se o seu autor, em vez de se colocar no ponto de vista polémico do ataque pessoal, tivesse preferido dar-nos objectivamente o ponto de vista de *um candidato* (se erro considerando o sr. Santos Almeida como um candidato, é o tom da sua carta que me leva a êsse êrro). O desejo do ataque pessoal obscureceu completamente aos olhos do sr. Santos Almeida as verdadeiras perspectivas da questão, levando-o a fazer um amontoado de inexactidões e injustiças que vai desde a afirmação de que «os programas dos exames de aptidão estão organizados num nível superior aos dos liceus e ensino técnico médio» (tôda a gente sabe que não existe programa dos exames de aptidão e que êstes são feitos sôbre a matéria do liceu, exclusivamente) até à afirmação final do seu artigo que é ridìculamente falsa e só pode ser feita por quem de todo ignore aquilo de que fala.

Isto passando pela apreciação pitoresca das *charadas*. Evidentemente que o *grau charadístico* duma questão depende daquele que tem de a apreciar... e, para um analfabeto, uma página da Cartilha Maternal é sem dúvida uma charada...

Há uma parte do artigo do sr. Santos Almeida que tem à primeira vista um ar mais sério — aquela em que discute o papel e extensão da cultura matemática numa Escola Superior de Economia. Infelizmente, os seus argumentos, que estariam bem nos tempos da *economia lírica*, estão agora atrazados de algumas dezenas de anos. E é, afinal, esta a parte mais desoladora do seu artigo. Porque se tivessemos de julgar, por êste exemplo, da mentalidade da nossa juventude estudantil perderiamos a esperança de ter de deixar andar eternamente *na cauda* de tudo quanto se diz, faz e pensa no resto do mundo.

Bento Caraça

CONSELHOS AOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA

Conselhos aos Estudantes da Secção de Matemática e Física da Escola Politecnica Federal de Zürich (1)

A. Estrutura e objectivo final dos estudos.

O plano de estudos da secção IX da E. T. H é organizado de modo que permite por intermédio da duração mínima de 8 semestres de estudo exigidos pelo seu regulamento — uma formação tão universal quanto possível em Matemática e Física. Só nos dois primeirot semestres (para alguns cursos também no 3.º semestre) o ensino dos estudantes da nossa secção é comum ao dos engenheiros; daí por diante desenvolve-se com inteira independência. O pêso principal do estudo poderá dirigir-se ou para a Matemática ou então para a Física.

A finatidade de estudo é a aquisição do diploma em Matemática ou Física (com indicação particular sôbre a capacidade para o ensino nas escolas superiores), o qual pela sua validade federal e pela amplidão das suas bases permite o recrutamento do seu possuïdor em todo o território da federação e no estrangeiro. O exame de diploma, a propósito do qual aconselhamos a leitura do «regulamento de diploma», é diferente para os candidatos das direcções matemática e física; êle não se estende só a ambos os ramos principais, mas requere ainda demonstração de conhecimentos num outro ramo que poderá, dentro de várias

(1) A nossa correspondente em Zürich Maria do Pilar Ribeiro enviou à Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática a presente tradução que a «Gazeta de Matemática» apresenta desde já aos seus leitores.

possibilidades, ser livremente escolhido pelo candidato. Àqueles estudantes que queiram dedicar-se ao professorado recomenda-se que adquiram, com base num exame especial, indicações sôbre a sua formação e capacidade pedagógicas.

B. **Conselhos garais sôbre o estudo.**

1. *Matemática.* A dificuldade principal do estudo da Matemática reside em que a compreensão perfeita das verdades matemáticas pressupõe uma capacidade de abstracção em alto grau. É desaconselhável o estudo, àqueles que não possam assimilar com uma certa facilidade as lições, transformando-as em intuïções claras e em conceitos puros e exactos. De resto, o estudo desenvolve com o hábito resta capacidade até ao grau necessário; e por isto não se pode começar pelos fundamentos, últimos, da Matemática mas sim pelo meio. Quando, a partir daqui, se erige o edifício da ciência, é sempre necessário ao mesmo tempo, assentar mais profundamente as bases. Em ambas as direcções o aluno prosseguirá a sua tarefa.

Uma outra separação, não menos necessária, é entre o *conhecimento especial* dos problemas particulares concretos e sua solução até ao resultado numérico, por um lado, e as intuïções gerais e idéias por outro lado. Os novos pontos de vista gerais, progressivos, encontram-se em Matemática, sempre em relação com problemas concretos; sem relação com os resultados particulares em que se confirmam eles são esquemas vazios. E por outro lado o conhecimento especial é matéria morta, quande êle se não liga a um todo unificado.

Durante todo o estudo controla-se, por meio da aplicação de teoremas de matemática a exemplos e pela resolução de *problemas,* se se apreendeu completamente o conteúdo. *Só quem é por si próprio capaz, pode verdadeiramente compreender o que os outros tenham dito:* não se pode deixar difundir dentro de nós um conteúdo espiritual duma maneira puramente passiva. Para nos movermos livremente no mundo do pensamento matemático é indispensável o domínio da técnica do cálculo; os primeiros semestres do estudo são os mais favoráveis, para exercitarem fundamentalmente nisto. Todavia tome-se cautela perante as aplicações maquinalmente realizadas; em cada caso deve o uso das fórmulas ser acompanhado da clara recordação do seu significado!

O aluno não espere que se lhe ofereça nas lições tôda a espécie de conhecimentos necessárias à sua cultura. A palavra falada é precisamente apropriadada para implantar novas idéias no espírito do ouvinte e levá-las, aí, a um sucessivo desenvolvimento; os *livros* dão a exposição sistemática fechada. O manejamento da *literatura matemática* é, por isto uma parte muito importante do estudo. Para esta parte do estudo servem a rica *biblioteca da E. T. H.,* a *sala de leitura* e a *biblioteca do seminário.* Também quanto à leitura são a meditação pessoal e a execução (executar só cálculos e construções com significado) indispensáveis a uma receptividade frutífera. Na leitura, fará bem o estudante, principalmente nos primeiros semestres, em se deixar *aconselhar pelos professores;* êles diligenciarão também auxiliá-lo nas suas dificuldades. Porém o estudante não peça que a cada passo lhe desembaracem o caminho; o êrro e a sua ultrapassagem por esfôrço próprio é mais útil do que a verdade aceite sem custo.

O serviço de ensino, orientado pelos professores, traduz-se em *lições, exercícios e seminários.* Enquanto que as lições proporcionam o assunto do ensino, servem os exercícios nos graus mais elevados (aproximadamente a partir do 5.º semestre) e o seminário ao fomento da actividade científica própria. Pôr-se-ão problemas e dar-se-ão indicações para a descoberta própria dos mais simples resultados matemáticos. Ou procuram-se memórias originais para conferências àcêrca das quais o estudante dá notícia; aqui devem pôr-se em relêvo, a partir do revestimento das fórmulas, a substância, as idéias fundamentais, a estrutura dos conceitos e demonstrações matemáticas. Dos assuntos tratados no seminário resultam, em regra, os temas dos trabalhos de diploma.

2. *Física.*

. . . .

3. *Ramos afins.* A matemática e a física estão em estreita conexão com outros domínios da ciência; pelo menos num dêles deve o estudante familiarizar-se teórica e pràticamente. Em primeiro lugar aparece a *Astronomia* como de igual importância para os matemáticos e para os físicos (visto que as escolas médias os encarregam ordinàriamente do ensino da Astronomia). A *mecânica superior,* estreitamente entrelaçada com os domínios clássicos e modernos da Matemática e da Física, tem sempre interêsse para ambas as direcções. A *análise prática* conduz a seguir as idéias matemáticas até aos métodos numéricos mais seguros e mais cómodos e é de importância na técnica. À *matemática de seguros e ao cálculo das probabilidades,* que facilitam o caminho para uma profissão prática, não deixarão os alunos da nossa secção de procura dedicar-se. As aplicações da física ramificam-se profundamente dentro da técnica; um domínio muito tratado é o da *técnica de alta freqüência.* A *química* interessa directamente ao físico, visto que os novos desenvolvimentos da física trouxeram consigo um contacto cada vez mais amplo, mesmo uma compenetração da química e da física. A *mineralogia geral* é de importância para os físicos em face da significação dos cristais,

para a estrutura da matéria e para obtenção e verificaço das suas leis elementares; para o matemático é ela o exemplo duma morfologia dominada pelo ponto de vista da teoria dos grupos. A *geodosia* é um dos ramos mais importantes da matemática aplicada. Independentemente dos ramos à escôlha devia o estudante duma escola superior técnica tomar a peito conhecer as aplicações técnicas junto dos colegas da secção de engenharia. De maior significação prática tornou-se hoje a física técnica, cujo estudo contém importantes possibilidades. Êle é realizado no E. T. H. no *Instituto de Física Técnica* e sua *secção para investigação industrial,* onde também existem possibilidades de manifestação para os jóvens físicos. A todos é de aconselhar a participação regular num curso *pedagógico-prático* (lições e exercícios); os semestres médios de estudo são para isso os mais cómodos. Os grandes problemas do conhecimento que a matemática e a física propõem, constituem para os trabalhadores nestas ciências a passagem natural para a *filosofia.* Finalmente abrem-se aos estudantes da E. T. H. na «secção dos cursos livres» lições e exercícios de todos os domínios do conhecimento. Contudo, não deve o estudante sobrecarregar o seu plano de estudos e deve reservar tempo para o *estudo próprio.*

C. O programa normal de estudos.

No que respeita a lições e exercícios distinguem-se:

I. *As lições introdutórias* e a prática para principiantes que ocupam aproximadamente os três primeiros semestres. São fundamentalmente constituídas por:

Calculo diferencial e integral. Mediante pequenas lições de introdução à teoria das funções, destinadas em primeiro lugar, aos estudantes da nossa secção, deve dar-se ao rigor dos conceitos o lugar que êle tem nos fundamentos, mas naturalmente de modo que estas lições basilares, indicadas também para os engenheiros, não fiquem demasiadamente pesadas.

As lições de *mecânica* por um lado, de *física geral* por outro lado constituem o fundamento para o estudo das ciências exactas. Um instrumento matemático indispensável à física é a *análise vectorial,* que os estudantes devem aprender, particularmente nas lições sôbre geometria descriptiva e vectorial e *aplicações da matemática.*

As geometrias descriptiva, vectorial, analítica e projectiva constituem a introdução ao estudo da geometria superior. O último dêstes cursos pode ser pôsto de lado pelos físicos, não porém o de geometria analítica no qual se encontra em primeiro lugar a álgebra linear e quadrática. Em lugar da geometria projectiva há, para os físicos, uma lição de introdução à química.

II. *O corpo de lições a manter regularmente* em que são expostas teorias matemáticas e físicas clássicas fundamentais e, em primeiro lugar:

a) na direcção matemática:

Álgebra e teoria dos números.

Teoria das funções.

Teoria das superfícies (geometria infinitesimal).

A teoria das funções complexas é o núcleo de tôda a análise; ela ensina-se em regra em duas partes.

b) na direcção da física:

. . . .

Estas lições principais constituem um ciclo de 4 semestres.

III. *As lições especiais* com conteúdo variável, que sai fora das necessidades indispensáveis às aplicações; a sua escôlha é livre, de maneira que o estudante deixar-se-á guiar pelo seu interêsse pessoal. O corpo das lições constitue, em geral, aquilo que se pressupõe conhecido para a compreensão das lições especiais correspondentes. Indicam-se alguns assuntos principais de tais lições:

a) na direcção matemática:

Equações diferenciais, capítulos especiais sôbre funções analíticas de uma ou de mais variáveis, teoria dos grupos (teoria de Galois), corpos de números algébricos, teoria analítica dos números, cálculo das variações, teoria do potencial, desenvolvimento em série e condições nos limites em física matemática, séries de Fourier, equações integrais, curvas e superfícies algébricas, geometria n-dimensional, representação conforme, axiomática da geometria, geometria não euclideana, topologia, teoria dos conjuntos.

b) na direcção da física:

. . . .

IV. *Práticas.*

V. *Lições e práticas dos cursos à escôlha* (lições especiais entre parêntesis):

Astronomia — lições: astronomia geral, prática de astronomia, em especial a determinação das coordenadas geográficas, introdução à astrofísica, (determinação das órbitas dos corpos celestes, capítulos especiais de astrofísica); prática: exercícios sôbre observações astronómicas (no semestre de verão) e cálculos astronómicos (no semestre de inverno).

Mecânica Superior — lições: capítulos escolhidos de mecânica, de conteúdo variável, (domínio da dinâmica [mecânica III], mecânica analítica, mecânica celeste, lições avançadas de resistência de materiais, hidrodinâmica); prática: exercícios e seminário de mecânica.

Análise Prática — lições: métodos gráficos, instrumentos matemáticos e máquinas de calcular, nomografia, métodos numéricos; prática — ligada com as lições.

Matemática de Seguros e Cálculo das Probabilidades — lições: cálculo das probabilidades (com complementos ou capítulos especiais), matemática de seguros com introdução e capítulos especiais, teoria do risco; prática—ligada com as lições, seminário de matemática de seguros, repetições.

TÉCNICA DE ALTA FREQÜÊNCIA.

. . . .

QUÍMICA:

. . . .

MINERALOGIA GERAL:

. . . .

GEODESIA — lições—técnica de medições, cálculo de compensações pelo método dos mínimos quadrados; práticas--exercícios de medições.

D. Objectivo do ensino.

a) Na *matemática* pura: o que os estudantes da direcção matemática, sôbre quaisquer circunstâncias, deverão atingir, pode resumir-se, pouco mais ou menos, como segue:

(Análise). Compreensão da edificação do domínio numérico, em particular das grandezas irracionais e imaginárias, assim como dos fundamentos rigorosos da análise. Noções fundamentais do cálculo diferencial e integral; domínio técnico do cálculo. Teoria das funções duma variável complexa, sua relação com a teoria do potencial e com as tranformações conformes. Os métodos especiais mais simples de integração no domínio das equações diferenciais e construção geral das soluções (teoremas de existência.)

(Álgebra). Teoria da divisibilidade no domínio dos números inteiros e das funções inteiras. Funções simétricas com aplicações à resolução algébrica das equações. Conceitos fundamentais da teoria dos grupos e da teoria dos corpos algébricos. Teoria das congruências incluindo a lei da reciprocidade quadrática.

(Geometria). Compreensão completa da relação entre a geometria por um lado, a álgebra e a análise por outro lado, por intermédio da noção de coordenadas, assim como dos grupos de transformações mais importantes, nomeadamente o métrico, o afim, o projectivo, o da geometria conforme e o da analisis situs. Os métodos mais importantes de transformações geométricas. Fórmulas fundamentais da geometria analítica euclideana. Conhecimento da edificação da geometria projectiva, sua formulação sintética e analítica. Geometria infinitesimal (curvas planas e torsas, teoria da curvatura das superfícies, geometria sôbre uma superfície); axiomática, geometria não euclideana.

b) Na física:

. . . .

E. Promoções.—Sociedades científicas.

Raramente as circunstâncias de vida ambiente permitirão a um jóvem dedicar-se exclusivamente à investigação científica; na maior parte das vezes quererão voltar ao estudo por inclinação própria, por fôrça do ensino ou por outra necessidade de ordem prática. Não obstante, deve, quem tenha tocado em matéria para um trabalho científico próprio, desejar concluir os seus estudos com a promoção a doutor. Junto da E. T. H. oferece-se aos licenciados a possibilidade desta conclusão, com os numerosos lugares de assistentes. Uma possibilidade semelhante oferecem as colocações provisórias nas escolas de cantão suíças ou os lugares de professor auxiliar nas escolas médias de Zürich.

As oportunidades para a continuidade da orientação científica encontram-se nas sociedades científicas.

Ao lado do *colóquio de física* há também (não indicado no programa) um *colóquio de matemática*.

A *Sociedade Física de Zürich* mantém regularmente secções nas quais os estudantes têm entrada livre. Outras sociedades científicas são:

A Sociedade Suiça de Matemática;

A Sociedade Suiça de Física;

A União Suiça de Matemática de Seguros;

A União dos Professores de Matemática Suíços;

As Sociedades Suiça e Cantonais de Ciências Naturais;

A União Suiça dos Professores do Liceu.

Tôdas estas sociedades acolhem prontamente os jóvens que se interessam pelos seus objectivos. Os estudantes dos semestres superiores fazem bem em visitar estas sociedades, ainda por ocasião das suas reüniões anuais e exposições científicas, para receberem incitações e travar conhecimento pessoal com os indivíduos das profissões a que se destinam.

TEMAS DE ESTUDO

LÓGICA MATEMÁTICA — INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS

por ***Bernardino Barros Machado***

Em 1847 publicou-se em Cambridge «The Mathematical Analysis of Logic» do inglês *George Boole.* Seguiu-se-lhe, «An Investigation of the Laws of Thought», London, 1854. Boole pretendia nestes livros «estabelecer a ciência da Lógica e construir o seu método» a partir «da linguagem simbólica do Cálculo» e «fazer do próprio método a base dum método geral para a aplicação da doutrina matemática das probabilidades».

A aplicação da Matemática à Lógica no intento de formar uma Álgebra ou Estructura da Lógica em que os resultados conhecidos e porventura outros novos que proviessem até mesmo só da exactidão que assim se conseguia, aparecessem como fórmulas matemáticas foi continuada por *C. S. Peirce* (1880), «On the algebra of logic», «Am. Jour», 3, 15-57; (1884), «On the algebra of logic», *ibid.*, 7, 180-202; *E. Schroder* (1890-5), «Algebra der Logik, 3 vols., Leipzig, e outros que adiante citaremos.

Tentava-se a construção dum sistema formal deductivo que abarcasse os processos e métodos lógicos mudáveis e vagamente definidos que eram utilizados nas ciências. Uma parte mais simples desta tarefa foi a composição das proposições para formar outras novas proposições cuja verdade ou falsidade dependia apenas da verdade ou falsidade das proposições componentes. Formou-se o «Cálculo das Proposições». Entre os trabalhos modernos sôbre esta parte da Lógica sobressai o de *Jan Lukasiewicz* e *Alfred Tarski* (1930), Untersuchungen ueber den Aussagenkalkuel «C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie», Classe III, vol. 23, pp. 30-50. Os processos de composição de proposições por negação, disjunção, conjunção e implicação foram todos reduzidos a um único: a negação conjunta, «nem-nem» por *Sheffer*.

As proposições chamadas universais como «todos os homens são mortais» e outras como «alguns homens são loiros» exigiam um formalismo doutra espécie que correspondesse ao uso das palavras «todos» e «alguns». Criou-se para isso a quantificação e foi-se formando o «Cálculo das Funções Proposicionais» ou «Cálculo dos Predicados» com ligação estreita com a teoria dos conjuntos, já que um predicado podia servir para definir um conjunto ou classe: a daqueles elementos a que êle pudesse ser atribuido. A quantificação consiste em colocar uma das variáveis que aparecem na proposição, entre parêntesis antes dela, assinalando assim que a proposição permanece válida qualquer que seja o elemento por que se substitua essa variável. Se ψ representa o predicado «é branco» $\psi(a)$ significa «a é branco» e $(x)\,\psi(x)$ «x é branco qualquer que seja x».

Gottlob Frege, *Richard Dedekind* e *Giuseppe Peano* (vejam-se os trabalhos citados no final) dedicaram-se ao estudo dos fundamentos da Aritmética, e foi a partir das suas contribuïções nêsse campo que pôde ser formulada a tese de que a Aritmética era reductível à Lógica. Consiste esta reducção em que, por definições adequadas em teoria das classes — que é uma parte do Cálculo dos Predicados — se conseguiria construír a noção de número natural. (Veja-se *Bertrand Russell* (1938), «The Principles of Mathematics», 2.ª ed., New York).

Modernamente, com os trabalhos de *Johann von Neumann*, (1925), Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, «Jour. f. d. reine und angew. Math.,» vol. 154, pp. 219-240; — (1927), Zur Hilbertschen Beweistheorie, «Math. Zeitschr.», vol. 26, pp. 1-46) parece possível construir a Aritmética elementar a partir de um sistema de proposições primitivas que definam axiomàticamente as funções proposicionais necessárias em teoria dos conjuntos. Como depois de Dedekind e *George Cantor* os números reais podem construir-se lògicamente a partir dos números naturais, a Matemática viria dêste modo a consistir no estudo de algumas fórmulas especiais do Cálculo dos Predicados: aquelas que constituiam a axiomática da teoria dos conjuntos. Algumas proposições ou sistemas de proposições não primitivas da teoria dos conjuntos axiomatizada poderiam merecer atenção especial: seria o caso das proposições referentes aos conjuntos ordenados, cujos estudo axiomático seria o objecto da Teoria das Estructuras. Outras teorias da mesma categoria seriam a Topologia Geral e a Álgebra Abstracta. Dentro destas novamente haveria sistemas de proposições capazes de ser objecto dum estudo axiomático.

Em todo o estudo lógico é pressuposta a noção de verdade. A sua definição é feita numa outra ciência, a *Semântica*, que trata das relações do formal com o real. Veja-se a êste respeito: *A. Tarski* (1936), Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, «Studia Phil.»; vol. I, (pp. 261-405). Verifica-se que precisamente na teoria dos conjuntos e também na teoria dos números, uma proposição pode ser verdadeira e contudo não se poder demonstrar a partir das proposições primitivas nem ela, nem a sua negação. Veja-se *Kurt Goedel*, Ueber formal unentscheidbare Saetze der «Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. fuer Math. u. Phys., vol. 38 (1931), pp. 173-198 e *Thoralf Skolem* (1941), Sur la portée du théorème de Loewenheim-Skolem, in «Les Entretiens de Zurich sur les Fondements et la Méthode des Sciences Mathématiques», (Zurich). Chama-se então ao sistema de proposições em questão *incompleto*.

Como se vê a Lógica inclui não sòmente as proposições formalmente verdadeiras, mas também proposições àcêrca delas, ou *proposicões sintáticas*. Estas devem igualmente ser formuladas numa linguagem simbólica ou formalismo que pode ser o mesmo das primeiras ou outro diferente. No livro de *David Hilbert* e *Paul Bernays*, (1934-1940), «Grundlagen der Mathematik», zwei Baender, Berlin, as proposições sintáticas são expressas na linguagem vulgar, enquanto que no livro de *W. V. Quine*, «Mathematical Logic», 1940, New York, se usa para elas um formalismo próprio.

É a Lógica Matemática um domínio de investigação em activa formação. Porque não se vê em Portugal como em alguns países do mundo lançár-se os matemáticos novos a trabalhar nêle, parece-me oportuno dar estas indicações esquemáticas aos leitores da «Gazeta» no intuito de despertar talvez nalgum dêles o interêsse por tal assunto e guiá-lo nas primeiras leituras.

Como livros de iniciação cite-se aqui:

Max Black, «The Nature of Mathematics», (A critical survey), London, Kegan Paul.

Bertrand Russel, «The Principles of Mathematics», já citado.

Para um conhecimento mais profundo do assunto servem os livros de Hilbert-Bernays e Quine citados acima.

Pelo seu interêsse histórico cite-se:

Gottlob Frege, «Grundgesetze der Aritmetik», vol. 1 (1893), vol. 2 (1903), Jena.

Richard Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?» 4.ª ed. Brunschwig (1918).

Giuseppe Peano, «Formulaire de Mathématiques», Introduction (1894); vol. 1. (1895); vol. 2. (1897-9) Turin; vol. 3 (1901) Paris; vol. 4 (1902-3); vol. 5 (1905-8) Turin.

ANTOLOGIA

O VALOR SOCIAL DA INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

por ***Ruy Luís Gomes***

(palestra lida ao microfone de Rádio Club Lusitânia em 6 de Maio de 1944)

Todos temos ouvido falar de grandes sábios e das suas descobertas, algumas como a Teoria da Relatividade acessíveis exclusivamente àquêles que possuem uma cultura altamente especializada, outras como o cinema, a radiodifusão, o avião, etc., que pela sua enorme importância prática e ampla utilização são hoje familiares a toda a gente.

Mas todas estas descobertas, embora andem quási sempre associadas ao nome de um matemático, um físico, um químico, um biólogo, etc., não surgiram assim prontas e acabadas, na forma por que as utilizamos e delas beneficiamos, de um único cérebro, por uma intuïção genial, dom superior que só a raros é dado possuir. Se as analisarmos bem, se percorrermos cada uma das étapas fundamentais do seu desenvolvimento, desde uma primeira sugestão ou simples analogia, até à última fase, a da sua industrialização em termos de ser colocada ao alcance de todos nós, então, verificamos que nesse processo colaboraram efectivamente, embora nem sempre se apercebam disso, numerosos investigadores—experimentadores com uma formação técnica altamente diferenciada, professores, operários, simples amadores — numa palavra, todo um mundo de indivíduos que pela sua viva curiosidade, forte poder de imaginação, grande habilidade manual de inquebrantável tenacidade contribuíram com alguma coisa de positivo para aumentar o património científico da humanidade.

Assim, cada descoberta, longe de ser obra de um só, pressupõe, nos diferentes momentos da sua gestação — trabalho de équipe, conjugação de esforços, sentido de solidariedade, subordinação a um plano de conjunto —. E, pelo seu alcance prático, pela sua projecção sôbre a vida de cada um de nós, redunda sempre num enriquecimento das nossas próprias possibilidades de luta pela existência: condicionada pelo meio ambiente em que se realizou é mais tarde um poderoso factor da sua própria transformação.

Uma descoberta é pois uma obra colectiva e de interêsse colectivo — feita por muitos, a todos interessa e dela todos devem poder beneficiar.

À luz destas considerações e colocando-nos sempre dentro do princípio de que a actividade de cada um de nós deve ter como finalidade e como estímulo a melhoria das condições de vida de todos, surge naturalmente a questão de analisar o processo de aumentar o ritmo dessas descobertas.

E a investigação científica, por outras palavras, a técnica das descobertas com o fim de melhorar as condições de vida do homem, transpõe assim a fase actual, de actividade para-universitária, de âmbito restricto e existência precária, para ser uma função inerente a toda a organização — fábrica, laboratório, hospital ou escola onde se faz naturalmente trabalho de équipe e onde o espírito de lucro ou o simples aperfeiçoamento dos serviços é a origem de uma formulação constantemente renovada de problemas de interêsse colectivo.

Entre nós, e mesmo noutros países, quando se fala de investigadores, pensa-se exclusivamente naquêles que, ao lado de uma função principal, a maior parte das vezes no ensino, se dedicam também a pesquisas científicas, no plano da ciência pela ciência, sem qualquer contacto com a realidade; e a investigação científica tem ainda as características de um luxo que as Universidades se permitem sustentar em homenagem a determinadas exigências dos tempos que correm.

Nos países mais progressivos, de ampla industrialização e intensa vida social, como a América, a Alemanha, a Rússia e a Inglaterra, acentua-se, pelo contrário, cada vez mais, uma forte tendência para a organização racional científica da própria investigação científica, subordinando-se ou orientando-se a actividade de cada investigador ou grupo de investigadores, onde quer que eles se encontrem — nas Universidades, nas Academias, na Indústria, etc., para a resolução dos problemas que mais directamente e mais ràpidamente podem concorrer para aumentar o nível de vida de um povo: os problemas de alimentação, desde o melhor aproveitamento da terra e a criação do gado, até à distribuïção e confecção dos alimentos; o problema da habitação, compreendendo o estudo dos materiais e técnicas de construção, a arquitectura, a adaptação ao meio ambiente e à sua função social, etc.; o problema do vestuário, em dependência com o clima de cada país e a actividade de cada um dos seus tipos sociais; o problema da saúde pública, no seu duplo aspecto de profilaxia e tratamento das doenças; o problema dos transportes e da energia, etc.; os problemas da organização do trabalho e de previdência social, etc.

A investigação científica deixa portanto de ser uma actividade mantida com grandes dificuldades e algum artifício num ou noutro estabelecimento de ensino, para se tornar numa função ligada ìntimamente à resolução das questões de ciência pura-Física, Química, Matemática, Biologia, etc.-que surgem naturalmente com os problemas de interêsse social.

E a profissão de investigador perde certos aspectos de diletantismo que ainda hoje tem, para ser uma forma de actividade em tudo análoga à de um médico, um engenheiro, um operário, etc. Podemos até dizer que é o denominador comum a que tôdas as outras se podem efectivamente reduzir.

Em conclusão e no plano nacional, podemos afirmar que:

a investigação científica é hoje um factor essencial de qualquer organização de interêsse colectivo;

a função de investigador tem o carácter de permanência de qualquer outra função de interêsse social e assim deve ser encarada, tanto pelo Estado como pelos particulares;

a ciência pura não se poderá desenvolver em boas condições de continuïdade e eficiência sem entrar em íntima colaboração com a indústria, fornecendo-lhe resultados e recebendo em troca sugestões para novos problemas.

A Universidade não pode justificar a sua existência, a Indústria não pode legitimar os seus lucros, senão na medida em que, factores essenciais da economia da Nação, se tornem elementos activos e conscientes de uma elevação do nível de vida do povo português.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

MOVIMENTO MATEMÁTICO ESPANHOL — I

A Gazeta de Matemática insere no presente número algumas notícias que darão aos seus leitores uma idéia do movimento matemático espanhol contemporâneo.

Indicam-se no n.º 19 alguns dos cursos que durante o ano 1943-44 se realizaram em várias instituïções científicas de Madrid. Esperamos poder nos números seguintes relatar o movimento matemático de outros centros culturais de Espanha. Devem-se ao Prof. Dr. Sixto Rios, nosso colaborador em Madrid, as informações que incluimos.

Fundamentos teóricos de la homogeneidad y semejanza en Física y en Aerodinamica

Curso explicado en la Cátedra de Física de la Fundación Conde de Cartagena por el Profesor R. San Juan

Aplicación de las aproximaciones diofánticas a la resolución de la ecuación funcional $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Casos particulares de Cauchy, Darboux y Rey Pastor. Espacio vectorial de los números reales sobre el cuerpo de los números racionales; soluciones discontinuas. Ecuación $k \cdot f(x+y)=f(x)+f(y)$. Ecuación $k \cdot f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y)$. Ecuaciones funcionales con varias variables; estudio de todos los tipos anteriores con varias variables. Generalización para campos abstractos formados por grupos con la n^a parte de cada elemento.

La noción de homogeidad en Física y en Análisis Matemático. Funciones homogéneas generalizadas; condicional e incondicionalmente homogéneas. Expresión general de la funciones condicionalmente homogéneas con ecuaciones de condición, monomias. Crítica de los resultados.

Teorema fundamental sobre la homogeneidad de una función cuyos valores forman grupo aditivo abeliano con la n^a parte de cada elemento y cuyas relaciones de igualdad y suma se conservan invariantes al multiplicar las variables por factores independientes o ligados. Casos particulares de funciones contínuas o monótonas. Generalización de la teoria para cuerpos abstractos ordenados.

Constantes características y constantes universales; la parte abstracta y la de ciencia natural contenida en Física. Expresión general de las magnitudes escalares derivadas. Grupos de los factores de transformación fundamentales de cada teoría física. Sistemas de invariantes y sizygias. Analogía con el principio de Cayley-Klein. Noción generalizada de sistemas acordes; su tipo más amplio; permanencias de las reglas para sus cambios, interpretación de los coeficientes parásitos como medidas sin dimensión.

Sistemas semejantes; interpretación de los factores de transformación como razones de semejanza; factores de forma; semejanza cinemática y dinâmica clásica y relativista; ley de Newton. Condiciones iniciales suficientes de semejanza. Sistemas semejantes con cantidades comunes; número máximo de constantes universales en cada teoría física; incompatibilidad de la semejanza real; Sistema de Planck; constante de Sommerfeld; leyes de Wien. Modelos navales y aéreos; análisis de las magnitudes comunes en los ensayos.

Teorema de (A. Vaschy-E. Buckingham): Su demostración rigurosa en el caso general de factores de forma. Método dimensional; determinación de la función característica y eficacia del método. Obtención sistemática de los productos cero dimensionales independientes. Aplicaciones aerodinámicas; leyes de Mariotte-Newton; Reynolds-Reyleych; Reech-Froude; Darrieus; Carminchel-Escarde-Ricaud; Sarrau-Beirston-Brooth, etc. Estudio con la temperatura. Aplicaciones físicas a las leyes de Stefan Wien, Kirchhoff, etc. Crítica de las teorías de Straneo y de la escuela norteamericana. Influencia de los factores de forma en el paso de las teorías clásicas a la relativista y de Planck. Interpretación de los coeficientes parásitos como factores de forma.

Circulo de Estudios Científicos de Madrid

Con la colaboración del Instituto Jorge Juan de Matemáticas, y de la Sociedad Matemática Española, se ha fundado el Centro de Estudios Científicos por iniciativa del Profesor José Oñate.

En la primera sesión del Círculo, celebrada en Diciembre de 1943, el Sr. Oñate hizo un resúmen de los trabajos ya iniciados en el Centro de San Sebastián (precursor de éste), y publicados en su Revista y en otras varias, al objecto de que los circulistas pudiesen seguir desarrollando tales trabajos, que se refieren, entre otros, a los asuntos siguientes: Homología correlativa; Representación en el Sistema de planos paralelos; Soluciones infinitas de las ecuaciones; Sucesivas ampliaciones del campo numérico; Teoría de las magnitudes y unidades físicas, etc.

En las otras dos sesiones, celebradas en Febrero y Marzo, se ha proseguido el estudio de las magnitudes escalares y vectoriales, poniendo de manifiesto las numerosas imperfecciones que se notan en los autores, y tratando de corregirlas, con un estudio mas riguroso de los asuntos.

El Profesor Sixto Ríos, propuso un Tema de estudio sobre integrales de Stieltjes, del que se ha encargado un alumno becario del Instituto Jorge Juan.

De un modo general, las finalidades del Círculo son estimular la afición científica y el trabajo personal entre los jóvenes alumnos y exalumnos de las Facultades de Ciencias y Escuelas Especiales, proponiéndoles temas adecuados, sobre Matemática principalmente escolástica, y sus aplicaciones; y al mismo tiempo, contribuir al perfeccionamiento lógico y didáctico de numerosas cuestiones científicas, de las que tienen que enseñar en sus clases los Profesores de las Enseñanzas Superior y Media.

Universidad de Madrid

Ha sido creado el *Seminario de estudios superiores de Física y Matemática* dependiente de la Facultad de Ciencias de Madrid. Está dirigido por el Prof. E. Terradas y forman parte del mismo los Profs. J. Palacios, R. San Juan, R. P. Rafael, Sixto Ríos, J. Balta y E. Román. Celebra un coloquio mensual, dedicándose actualmente a trabajos iniciados por el Prof. E. Terradas sobre Fundamentos de la Teoría de la Elasticidad.

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

En el Instituto Jorge Juan de Matemáticas el Prof. T. R. Bachiller explica un cursillo sobre *Topologia combinatória*.

El Prof. S. Ríos dirige un seminario sobre el *problema de la reordenación de series funcionales y sus aplicaciones*.

Representación analítica de funciones

Indice del curso que explica el Prof. Sixto Ríos en la Cátedra de Matemáticas de la Fundación Conde Cartagena de la R. Academia de Ciencias:

Funciones analíticas.—Desarrollos en series de funciones racionales y polinomios.—Métodos de sumación.—Series de facultades, de Dirichlet, de Lambert, etc.—Sucesiones de funciones analíticas.—Problema general de la representación de funciones analíticas. —Relación con la prolongación analítica.

Funciones reales.—Aproximación lineal de funciones.—Convergencia en media.—Series ortogonales.—Sistemas completos y cerrados.—Espacio de Hilbert. —Desarrollos de Legendre, Tschebyscheff, Haar, etc. —Convergencia y sumabilidad.

Problema general de la representación analítica de funciones reales.

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA APLICADOS À ECONOMIA

Curso elementar de Diferentes Finitas

A convite da «Sociedade Portuguesa de Matemática» e do «Centro de Estudos de Matemática Aplicados à Economia» realizou em princípios de Fevereiro o Sr. Doutor Carlos A. Fernandes Carvalho no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras um conjunto de lições subordinadas ao título acima.

Damos uma resenha dos assuntos tratados:

1.ª lição — Diferenças de uma função. Os operadores Δ e E. Suas propriedades. Cálculo simbólico.

2.ª lição — Funções factoriais. Seu emprêgo na determinação das diferenças de um polinómio.

A análoga da fórmula de Leibnitz. Diferenças de zero. Aplicações das diferenças de zero.

3.ª lição — Interpolação. A fórmula de interpolação polinomial de Newton. Diferenças divididas. Fórmula geral de interpolação de Newton; o termo do resto.

Subdivisão de intervalos.

Fórmula de interpolação polinomial de Lagrange. Processos de obtenção de outras fórmulas de interpolação usando, como exemplo, as fórmulas em zig zag de Gauss de diferenças centrais.

4.ª lição — O operador Δ^{-1}. O problema da somação ou o da determinação das soluções da equação às diferenças $\Delta f(x) = \Phi(x)$. A determinação de soma de séries; exemplos. Somação por partes. Outros métodos de somação utilizando o cálculo simbólico. Equações às diferenças: considerações gerais e comparação com as equações diferenciais usando a equação linear de ordem n de coeficientes constantes.

5.ª lição — Derivação numérica. A relação simbólica $1+\Delta \equiv e^{hD}$. Derivação sucessiva.

Integração numérica: o problema geral, a fórmula de Euler — Maclaurin e a fórmula de Lubbock. Outras aplicações da fórmula de Euler — Maclaurin.

No final de cada lição eram distribuïdas aos ouvintes listas de exercícios propostos cuja resolução era apresentada resumidamente na sessão seguinte.

Curso de Complementos de Análise

Como foi indicado no n.º 18 da «Gazeta de Matemática» realizou-se durante êste ano lectivo no Instituto de Ciências Económicas e Financeiras um curso sôbre certos capítulos de Análise Matemática. Damos adiante a indicação dos assuntos tratados bem como dos respectivos expositores.

Funções Γ e β. Sistemas Ortogonais, pelo Professor Bento Caraça.

A função Γ — 1) definição da função Γ por um integral euleriano de 2.ª espécie e por um produto infinito (Weierstrass). Identidade das duas definições. 2) Propriedades e aplicações.

A função β — 1) Definição. 2) Propriedades; relações com a função Γ; aplicações.

Funções ortogonais (elementos) — 1) Definições; sistemas de funções ortogonais e normais; sistemas completos 2) Ortogonalização. 3) Desenvolvimento duma função em relação a um sistema ortogonal e normal.

Polinómios de Legendre e de Hermite, pelo Assistente A. da Costa Miranda.

Dando continuïdade às lições feitas pelo Professor Dr. Bento Caraça sôbre sistemas ortogonais, mostrou-se como os Polinómios de Legendre e de Hermite se podem obter, a menos de certos factores independentes da variável, por ortogonalização dos sistemas $[U_n = x^n]$ [no intervalo $(-1, +1)$] e $[V_n = k^{2n} x^n \sqrt{e^{-k^2x^2}}]$ [no intervalo $(-\infty, +\infty)$], respectivamente.

Definidos aqueles polinómios por esta via, foram estudadas: Propriedades — valores numéricos essenciais — Equação diferencial e sua aplicação ao cálculo dos coeficientes — Fórmulas de recorrência — desenvolvimento de um polinómio inteiro em x em polinómios de Legendre ou de Hermite — legitimidade do desenvolvimento de uma função em série de polinómios de Legendre ou de Hermite.

Polinómios $Q_n(x)$ — No caso de a variável não ser contínua, mostraram-se as condições a que devem satisfazer polinómios $Q_n(x)$ para que $a_0Q_0(x) + a_1Q_1(x) + \cdots + a_nQ_n(x)$ represente, tão aproximadamente quanto possível, uma função $f(x)$ de que são conhecidos os valores $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$ $(m > n)$ e por forma que os coeficientes a_i sejam independentes do número de polinómios utilizados.

No caso particular de os argumentos x_i variarem em progressão aritmética, apresentou-se a expressão dos polinómios $Q_n(x)$ e deduziram-se as propriedades e relações fundamentais. Na hipótese de a diferença dos argumentos tender para zero, mostrou-se que estes polinómios coïncidem com os polinómios de Legendre.

Polinómios $G_n(x)$ — Quando a variável x toma valores inteiros compreendidos entre $-\infty$ e $+\infty$, os polinómios de Hermite podem ser substituidos por polinómios $G_n(x)$ de que se apresentaram a expressão geral e as propriedades fundamentais.

INTERPOLAÇÃO, pelo Assistente O. Morbey Rodrigues,

1. Representação aproximada duma lei empírica por uma soma trigonométrica de ordem p.

2. Método de Prony para a interpolação por meio de exponenciais.

INTERPOLAÇÃO, pelo Assistente J. Remy Freire.

1) Problema da derivação numérica: a) Caso em que os valores conhecidos constituem progressão aritmética; b) Caso geral.

2) Problema da integração numérica: a) Fórmula de Euler—Maclaurin; b) Fórmula de Gregory.

3) Problema da somação: a) Fórmula de Woolhouse; b) Fórmula de Lubbock.

4) Resolução numérica das equações diferenciais ordinárias: Método de Adams, sua aplicação às equações do 1.º grau, justificação da aplicação do método às equações de qualquer grau.

EQUAÇÕES INTEGRAIS, pelo Professor A. de Mira Fernandes.

I) Equação de Fredholm — Forma limite dum sistema de equações lineares — Análise de Fredholm — Expressão da resolvente como função mèromorfa de λ.

II) Sistema completo de funções características — Género dum parâmetro — Solução da equação homogénea e da não homogénea de 2.ª espécie.

III) Teoria de Volterra — Núcleo resolvente — Fórmula de Liouville-Neumann — Reciprocidade — Núcleos iterados.

IV) Núcleos simétricos — Teorema de Hilbert-Schmidt — Propriedades dos valores próprios — Teorema de Hilbert-Mercer — Série de Fredholm—Redução do caso geral ao caso simétrico—Equação de primeira espécie de Volterra—Relações com a equação diferencial linear.

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Por lamentável esquecimento não foi citada no n.º 18 da nossa revista a adesão à Junta de Investigação Matemática, logo após a sua creação, de Armando Gibert, Augusto Sá da Costa e Hugo B. Ribeiro, bolseiros do I. A. C. em Zürich. No próximo número da Gazeta será relatada detalhadamente a actividade da Junta bem como a do Centro de Estudos Matemáticos do Porto.

CENTRO DE ESTUDOS DE FÍSICA DA F. C. L.

Além das habituais reüniões do Centro onde se expõem e discutem os resultados obtidos nos trabalhos em curso, realizou em fins de Maio o Prof. A. Proca três conferências subordinados aos títulos seguintes:

1) Sur la notion de particule élémentaire, constituant ultime de la matière. 2) Sur une nouvelle particule élémentaire. 3) Quelques remarques sur la notion de temps physique.

São de notar a elegância e clareza de exposição e a elevação com que foram tratados os assuntos indicados.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto — 2 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 2.

1708 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a 0, à equação

$$(x/3+2)^3=(x-1/3)^2-(5x-1)/6\,.$$

R: $\frac{x^3}{27}+\frac{2}{3}x^2+4x+8=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$ *donde* $\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}+\frac{11}{2}x+\frac{139}{18}=0$ *ou* $2x^3-18x^2+297x+417=0$.

1709 — Determine os valores de m que tornem positivo, para qualquer valor de x, o trinómio

$$(m-1)\,x^2+(m+1)\,x-3\,.$$

R: *Devendo ser positivo o coeficiente do 1.º termo e imaginárias as raízes do trinómio,* m *deve satisfazer às condições seguintes:* $m>1$ *e* $(m+1)^2+12\,(m-1)<0$. *Destas relações deduz-se que o problema não tem solução.*

1710 — Defina cone, tronco de cone e cone recto de base circular.

1711 — Determine por logarímos, com 5 algarismos decimais e com a aproximação que estes permitirem, os valores de α que satisfazem à equação

$$\sec^2\alpha=0{,}34562\times\operatorname{sen}133^\circ\,22'\,20''\,.$$

R: *Como é* $|\,0{,}34562\times\operatorname{sen}133^\circ\,22'\,20''\,|<1$, *o problema é impossível.*

1712 — ¿Como verifica qual das fracções $\frac{2743}{2225}$ e $\frac{2753}{2235}$ é maior, atendendo a uma relação simples a que satisfazem os seus têrmos? R: $\frac{2743}{2225} > \frac{2753}{2235}$ *porque uma fracção superior à unidade diminue, quando a ambos os termos se junta o mesmo número, Com efeito,* $\frac{a+\alpha}{b+\alpha} < \frac{a}{b}$ *quando* $\alpha b < \alpha a$ *ou* $b < a$.

1713 — Defina arranjos de 4 objectos, 3 a 3. Forme estes arranjos com as 4 primeiras letras do alfabeto e verifique o seu número pela fórmula respectiva.

1714 — Escreva o 3.º têrmo do desenvolvimento de $(1/3.a\sqrt{x}+a^{-1})^5$ e simplifique-o.
R: $T_3 = \binom{5}{2} a^{-2}\left(\frac{1}{3} a\sqrt{x}\right)^3 = \frac{10}{27} ax\sqrt{x}$.

1715 — ¿Em que consistem os métodos geométricos do problema inverso e das figuras semelhantes? Apliquê-os à resolução do seguinte problema: Sendo dadas sôbre o plano três rectas que se cortam e uma circunferência, inscreva nesta um triângulo com os lados paralelos àquelas. R: *Circunscrevendo uma circunferência ao triângulo* $[A'B'C']$, *determinado pelas* 3 *rectas, basta construir o triângulo* $[ABC]$, *inscrito na circunferência dada e homotético de* $[A'B'C']$ *em relação a* C *(centro de homotetia directa das duas circunferências). Poderíamos obter uma outra solução considerando o centro de homotetia inversa.*

Soluções dos n.ºs 1708 a 1715 de F. Roldão Dias Agudo, aluno do 1.º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Licenciatura em Ciências Geográficas — Outubro de 1943 — Ponto n.º 2.

1716 — Diga quando é que a equação $px+qy=r$ não admite soluções inteiras e quando é que as admite. R: *Não admite se* p *e* q *não sendo primos entre si o seu m. d. c. não dividir* r. *E admite soluções inteiras se* p *e* q *forem primos entre si ou quando o não forem o seu m. d. c. for divisor de* r.

1717 — Qual é a condição necessária e suficiente para que as fracções a/b e ab/d sejam iguais? R: $ad=ab^2$ *ou* $d=b^2$.

1718 — Imagine um cone de revolução. Corte-o por um plano paralelo à base e que passe pelo meio da geratriz. Diga qual é a relação entre a área do cone e a do tronco. R: *O enunciado é pouco rreciso. A relação que pede diz respeito ao cone primitivo e tronco obtido pela truncatura, ou ao cone e tronco em que se decompõe o cone inicial? No primeiro caso será: Área do cone* $\pi r(g+r)$ *se forem* g *e* r *a geratriz e o raio da base do cone. A área do tronco é* $\pi r(g+r)-\pi rg/4+ +\pi r^2/4=\pi r(3g+5r)/4$ *e a razão é* $\pi r(g+r):\pi r(3g+ +5r)/4=4(g+r):(3g+5r)$. *No segundo caso como a área do cone menor é* $\pi r(g+r)/4$ *virá:* $\pi r(g+r)/4: :\pi r(3g+5r)/4=(g+r):(3g+5r)$.

Soluções dos n.ºs 1716 a 1718 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia — 9 de Outubro de 1943 — Ponto n.º 2.

I

1719 — Um lavrador vendeu 30 hectolitros de cereais *(trigo e aveia)* por 1.890$00. O preço total do trigo foi o mesmo que o preço total da aveia e o preço de cada hectolitro de trigo excedeu em 60$00 o preço de cada hectolitro de aveia. ¿Quantos hectolitros de cada cereal vendeu e quais os preços de venda do hectolitro de cada um dos cereais? R: *Designando por* X *o número de hectolitros de trigo vendido e por* Y *o preço em Escudos de cada hectolitro de trigo, o número de hectolitros de aveia será* $30-X$, *e o preço de cada hectolitro de aveia* $Y-60$ *Escudos. Como os valores vendidos são iguais, temos:* $XY=(30-X)(Y-60)= =1890/2$. *Por substituição chega-se à equação:* $2X^2- -123X+945=0$. *Das duas soluções só uma é aproveitável, que é* $X=9$ *e portanto* $Y=105$ Escudos. *O lavrador tinha portanto vendido 9 Hectolitros de trigo a* Escudos 105$00 *e* 21 *Hectolitros de Aveia a* Escudos 45$00.

1720 — Escreva e simplifique o antepenúltimo têrmo do desenvolvimento de $\left(\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{11\cdot a}}-\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}}\right)^{11}$.
R: *Como sabemos, no desenvolvimento de* $(X-A)^m$, *se chamarmos* T_n *ao termo que é precedido por* n *termos é* $T_n=\binom{m}{n}A^n X^{m-n}$. *Neste caso tem-se:* $T_9=\binom{11}{9}$

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}}\right)^9\left(\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{11\,a}}\right)^2=-\frac{11!\times\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{a}}{9!\,2!\,11\,a}= =-5\frac{\sqrt[6]{a^{11}}}{a}=-5\,a^{\frac{5}{6}}.$$

1721 — Dada a equação $x^2+px-2q=0$, determine a relação que deve existir entre p e q para que a razão entre as raízes seja $2/3$. R: *Se designarmos por* x' *e* x'' *as raízes da equação, temos:* $\frac{x'}{x''}=\frac{2}{3}$, $x'+x''= =-p$, e $x'x''=-2q$ *donde, por eliminação de* x' *e* x'', $3p^2+25q=0$. *Se* p *e* q *forem reais e verificarem esta relação (para o que tem de ser* $q<0$*), as raízes serão reais pois o descriminante da equação será positivo, como fàcilmente se verifica.*

II

1722 — Um dos catetos de um triângulo rectângulo mede 12,675 m e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede 10,143 m. Calcule o menor ângulo interno do triângulo. (Utilize logarítmos). R: *Designando por* α *o ângulo oposto ao catéto dado, e atendendo a que a hipotenusa é o diâmetro do círculo circunscrito, temos:* sen $\alpha = \dfrac{12,675}{2\times 10,143}$ *Aplicando logarítmos vem:* log sen α = log. 12,675 + colog. 20,286 = $=\bar{1},795754$ *e* $\alpha = 38^\circ\ 40'\ 9''$.

1723 — Calcule o ângulo α do 4.° quadrante tal que colog $\sqrt[3]{\cos^2\alpha} = 0,040209$. (Utilize logarítmos). R: *Atendendo à definição de cologaritmo, vem:*

$$\log.\ \sqrt[3]{\cos^2\alpha} = \bar{1},959791 \quad mas \quad \log.\ \sqrt[3]{\cos^2\alpha} = \frac{2}{3}\log.\ \cos\alpha \quad logo,\ \log.\ \cos\alpha = \frac{3}{2}\times\bar{1},959791 =$$

$\bar{1},9396865$ donde $\alpha_1 = 29^\circ\ 30'\ 8,6''$ ou, finalmente, $\alpha = 360^\circ - \alpha_1 = 330^\circ\ 29'\ 51'',4$.

1724 — Determine os ângulos x compreendidos entre 0 e 2π radianos que verificam a igualdade $\operatorname{tg}(x+\pi/3) = \operatorname{cotg}(\pi/2-3x)$. R: *É* cotg. $(\pi/2-3x) =$ tg. $3x$ *por serem complementares os ângulos. Então fica* tg. $(\pi/2+x) =$ tg. $3x$ *o que implica os dois ângulos difirirem de* $K\pi$ *radianos* (K *inteiro*). *Então* $3x - (\pi/3+x) = K\pi$ *donde* $x = \pi\left(\dfrac{3K+1}{6}\right)$ *E terá de ser* $0 < \pi\left(\dfrac{3K+1}{6}\right) < 2\pi$ *donde* $-1/3 < K < 11/3$ e $x = \pi/6, 2\pi/3, 7\pi/6, 5\pi/3$.

III

1725 — Calcule o raio interior de um tubo cilíndrico de vidro que, vazio, pesa 90 gramas e pesa 247 gramas quando se lhe introduz uma coluna de 8 centímetros de mercúrio. (Densidade do mercúrio: 13,6; $\pi = 3,14$). R: *Pêso do mercúrio:* $247-90 = 157$ gr. *Volume do mercúrio:* $\dfrac{157}{13,6}$ c c. *Como a coluna tem 8 cm. de altura, vem:* $8\pi R^2 = \dfrac{157}{13,6}$ *donde* $R = \sqrt{\dfrac{157}{8\times 3,14\times 13,6}}$. *Aplicando logarítmos, vem* $R = 0,6779$ cm.

1726 — Demonstre que em qualquer triângulo rectângulo o diâmetro do círculo inscrito é igual ao excesso da soma dos catetos sôbre a hipotenusa. R: *Seja* [A B C] *com* $\hat{A} = 90^\circ$ *o triângulo dado,* E, P e D *os pontos de tangência com a hipotenusa e os catetos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *respectivamente, e* O *o centro da circunferência inscrita. Da figura:* $\overline{BE} = \overline{BP}$, $\overline{EC} = \overline{DC}$ *(tangentes tiradas do mesmo ponto). Logo,* $BP + \overline{DC} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC}$. *E como* [APOD] *é um quadrado,* $\overline{AP} + \overline{AD}$, *que é o excesso de que se fala, é igual a* $\overline{PO} + \overline{OD}$, *que é o valor do diâmetro.*

Soluções dos n.os 1719 a 1726 de José M. S. Arriaga e Cunha, aluno do 1.° ano do Instituto Superior de Agronomia.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras 2 de Agôsto de 1943. — Ponto n.° 2.

ARITMÉTICA

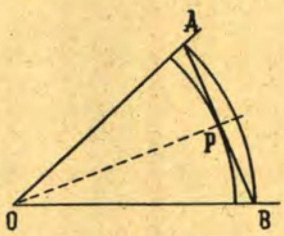
1727 — Decomposição em factores primos; propriedades e aplicações. Dada a decomposição em factores primos do número n: $n = p^a \cdot q^b \cdot r^c$ estude a maneira como varia o número de divisores quando n se multiplica por q/p. R: *Representemos por* N_1 *e* N_2 *respectivamente, o número de divisores de* n *e de* $n\cdot q/p = p^{a-1}\cdot q^{b+1}\cdot r^c$. *Será portanto:* $N_1 = (a+1)(b+1)(c+1)$ *e* $N_2 = a(b+2)(c+1)$. *O número de divisores de* n *variou, em valor absoluto, de* $|N_1 - N_2| = |(c+1)(ab+a+b+1-ab-2a)| = |(c+1)\cdot(b-a+1)|$.

ÁLGEBRA

1728 — Determine os valores reais de x para os quais é real a função $y = \sqrt{(x-1)\ (x-2)\cdot(x-3)}$. R: *Os valores reais de* x *para os quais* y *é real, são os valores reais de* x *que tornem* $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$. *Estudando o sinal dêste produto para os valores:* $x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq x \leq 3$ *e* $x \geq 3$ *concluiremos que apenas satisfazem os valores* $x \geq 3$ e $1 \leq x \leq 2$.

CÁLCULO NUMÉRICO

1729 — Calcule a área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um octógono regular de lado 18,31 metros. R: *Pela figura junta, vê-se que é:* $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi l^2/4$ *em que* $R = \overline{OA}$, $r = \overline{OP}$ *e* $l = AB$.



Portanto: $S = \pi(18,31)^2/4 \rightarrow \log S = 2\log 18,31 + \log\pi + \operatorname{colog} 4 = 2\cdot 1,26269 + 0,49715 + 1,39794 = 2,42047 \rightarrow S = 263,31\ m^2$.

GEOMETRIA PLANA

1730 — Dado um triângulo rectângulo de catetos b e c, localizar sôbre a hipotenusa um ponto M tal que, tirando de M perpendiculares para os catetos, o rectângulo obtido tenha área dada s. Discussão. R: *Considere-se um triângulo rectângulo em* A *e de hipotenusa* $\overline{BC}$. *Seja* M *um ponto sôbre* $\overline{BC}$, P *e* Q *os pés das perpendiculares baixadas de* M *respectivamente sôbre* $\overline{CA} = b$ *e* $\overline{AB} = c$. *Façamos* $\overline{MP} = x$, $\overline{MQ} = y$. *Será pois,* $xy = S$. *Da semelhança dos triângulos* [CPM] *e* [CAB], $b/c = (b-y)/x \rightarrow bx + cy - bc = 0$. *Da primeira equação vem* $y = s/x$ *que substituido na segunda conduz, a* $bx^2 - bcx + cS = 0$, *donde* $x = \frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 4bcS}}{2b}$. *Se* $b^2c^2 - 4bcS > 0 \rightarrow$ $\rightarrow S < bc/4$ *haverá dois pontos* M *satisfazendo ao problema (duas raízes reais e distintas em* x, *por se ter a soma e o produto das raízes positivas). Se* $b^2c^2 - 4bcS = 0 \rightarrow S = bc/4$ *haverá um só ponto* M *que satisfaz ao problema. Não existem soluções quando* $b^2c^2 - 4bcS < 0 \rightarrow S > bc/4$.

GEOMETRIA NO ESPAÇO

1731 — *a)* Superfícies prismática e piramidal; definições e propriedades mais importantes.

1732 — *b)* É dada uma esfera de raio r e nela inscreve-se um cone circular recto cuja altura é dupla do diâmetro da base; calcule a área e o volume dêsse cone e a área da secção nêle produzida por um plano passando pelo centro da esfera e paralelo à base do cone. R: *Chamemos* O *o centro da esfera,* A *o vértice do cone circular recto nela inscrito, cujo diâmetro da base é* $\overline{BC}$ *e de altura* $\overline{AH} = 2\,\overline{BC}$. *Ter-se-á:* $\overline{AH} = r + \overline{OH} = 2\,\overline{BC}$ *e* $r^2 - \overline{OH}^2 = \overline{BC}^2/4$ *ou:* $r^2 - x^2 = \frac{r^2 + x^2 + 2rx}{16}$ *(fazendo* $\overline{OH} = x$*), donde* $17x^2 + 2rx - 15r^2 = 0 \rightarrow x = 15r/17$ *e* $x = -r$ *(solução sem interêsse). Será portanto,* $\overline{AH} = 32r/17$; $\overline{BH} = \overline{BC}/2 = 8r/17$ *e* $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = 8\sqrt{17} \cdot r/17$. *Sendo* R *o raio da base,* g *a geratriz e* h *a altura dum cone circular recto, sabemos ser:* a) *área total,*

$$S = \pi R\,(g + R) = \pi \cdot 8r/17 \cdot (8\sqrt{17}r/17 + 8r/17) =$$
$$= 64\,(1 + \sqrt{17})\,\pi r^2/289\,;$$

b) *volume,* $V = 1/3 \cdot \pi R^2 h = 2048\pi r^3/14 \cdot 739$.

A secção produzida no cone por um plano passando pelo centro da esfera e paralelo à sua base, é uma circunferência. Estas duas circunferências são homotéticas, de razão de homotetia $\overline{AH}/\overline{AO} = 32/17$. *E assim,* $S_1/S_2 = (32/17)^2$ *sendo* S_1 *e* S_2 *respectivamente as áreas dos dois círculos, base do cone e secção plana, donde,* $S_2 = \pi r^2/16$.

TRIGONOMETRIA

1733 — Exprima $\frac{(\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha)^2}{\cos^4 \alpha + \text{sen}^4 \alpha}$ em função de $\text{sen}\, 2\alpha$. R: *A expressão dada pode escrever-se:*

$$\frac{(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)^2\,(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)^2}{(\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)^2 - 2\,\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha} =$$
$$= \frac{(1 - \text{sen}^2 2\alpha)^2}{1 - \frac{\text{sen}^2 2\alpha}{2}} = \frac{2\,(1 - \text{sen}^2 2\alpha)^2}{2 - \text{sen}^2 2\alpha}.$$

Soluções dos n.os 1727 a 1735 de O. Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

CONCURSO PARA ACTUÁRIO DO INSTITUTO NACIONAL DE TRABALHO

Publicam-se seguidamente os problemas saídos nas provas de matemática bem como as suas soluções.

Observa-se que nas soluções publicadas se usam apenas os conhecimentos correspondentes ao programa do concurso publicado na «Gazeta de Matemática».

1.ª prova — 24 de Março de 1944

1.° — Prove que as curvas definidas pela equação: $f(x, y) = k$, onde para cada curva k é constante, não se cruzam.

Supondo as coordenadas referidas a um sistema de eixos rectangulares e considerando:

$$f(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - 1)\,(4x^2 - 4y^2 + 1)$$

determine a curva que separa as regiões do plano para as quais $k > 0$ das regiões nas quais $k < 0$.

Indique o traçado aproximado de tal curva e, no desenho assim executado, marque por meio de sinais $+++$ e $---$ as regiões do plano para as quais respectivamente é $k > 0$ e é $k < 0$, apresentando a correspondente justificação.

Tendo em atenção o desenho executado indique a posição dos pontos em que degeneraram certos ramos das curvas para valores especiais de k completando, quando fôr necessário, a determinação da sua posição pela teoria dos máximos e mínimos aplicada a funções reais de uma variável real. Apresente a configuração aproximada de uma curva que não contenha pontos isolados à qual corresponda um valor negativo de k.

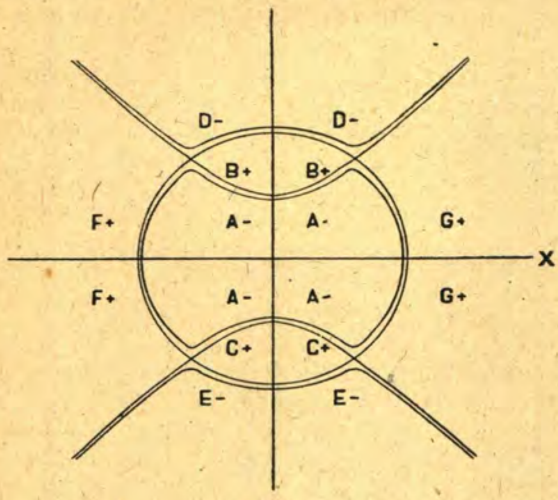
Deduza a equação diferencial a que satisfazem tôdas as curvas e verifique o resultado por integração.

Solução — Se duas das curvas $f(x, y) = k_1$ e $f(x, y) = k_2$ tivessem um ponto comum ter-se-ia: $f(x_1, y_1) = k_1$ e $f(x_1, y_1) = k_2$ donde $k_1 = k_2$ e as curvas não seriam distintas.

A curva que separa as regiões do plano para as quais $k > 0$ daquelas nas quais $k < 0$, é: $(x^2 + y^2 - 1)\,(4x^2 - 4y^2 + 1) = 0$, atendendo à continuïdade de $f(x, y)$.

Tal curva é portanto constituída por uma circunferência de centro na origem e de raio unidade e por uma hipérbole, como a figura indica.

No interior da circunferência tem-se $x^2+y^2-1<0$ e, portanto, no exterior $x^2+y^2-1>0$.



Na região do plano compreendida entre os dois ramos da hipérbole tem-se $4x^2-4y^2+1>0$ (repare-se que na origem $4x^2-4y^2+1=1$).

Da combinação dos sinais dos dois factores resulta que nas regiões A, D e E se tem $k<0$; nas regiões B, C, F e G se tem $k>0$.

Como as curvas se não cruzam, e $f(x,y)$ é uma função contínua, nas regiões B e C haverá ramos de curvas fechados no interior de cada um dos quais existirão os ramos nas mesmas condições e correspondentes aos valores de k superiores ao valor especial de k correspondente ao ramo considerado. Nestas condições haverá, atendendo ao que sucede nas regiões F e G e ao facto de uma recta paralela ao eixo dos XX' não cortar cada curva em mais de quatro pontos, dois ramos nas regiões B e C que degeneram em pontos isolados. Tais pontos estarão evidentemente situados no eixo dos YY' e a sua determinação será feita procurando os valores de y que tornam máxima a função: $k(y)\equiv f(0,y)$, o que conduz a $y_1=0$ (origem), $y_2=\sqrt{5/8}$, $y_3=-\sqrt{5/8}$.

A origem corresponde efectivamente a um mínimo e, para o estudo do caso especial correspondente a esta posição, repare-se que a configuração aproximada de uma curva a que corresponde um valor de k negativo está indicada na figura. Tôdas as curvas para as quais é $k<0$, passam por quatro máximos e quatro mínimos situados sôbre as ordenadas que correspondem aos pontos de intersecção da hipérbole com a circunferência e ainda por dois máximos e dois mínimos situados sôbre YY'.

A origem é um ponto duplo da curva que por ela passa e que corresponde a $k=-1$ e os dois ramos da curva têm neste ponto como tangente o eixos dos XX'. Isto faz supor que para valores de k inferiores a -1 as curvas situadas na região A se decompõem em dois ramos fechados separados e que portanto haverá pontos isolados sôbre o eixo dos XX' que correspondem a mínimos de k, mínimos cujo valor deverá ser inferior a -1.

Efectivamente a função $k(x)\equiv f(x,0)$ passa por mínimos para $x=\pm\sqrt{3/8}$ que, é interessante notar, corresponde à pontos situados sôbre as duas ordenadas acima indicadas e onde, para cada uma das quais, estão situados dois máximos e dois mínimos para as restantes curvas a que corresponde $k<0$. O valor mínimo de k é $-25/16$ inferior a -1 como previsto. A origem é também solução de $k'(x)=0$, fornecendo todavia um máximo, o que podia ser fàcilmente explicado.

Para se obter a equação diferencial a que satisfazem tôdas as curvas bastará derivar ambos os membros da equação $(x^2+y^2-1)(4x^2-4y^2+1)=k$ em ordem a x.

Obter-se-á: $8x^3-3x-8y^3y'+5yy'=0$.

A integração de tal equação é imediata pois que, por separação de variáveis, se tem: $(8y^3-5y)\,dy=(8x^3-3x)\,dx$. Integrando vem: $4y^4-5y^2-4x^4+3x^2=c$, isto é, $(x^2+y^2-1)(4x^2-4y^2+1)=-c-1=k$, fazendo $-c-1=k$, como se pretendia mostrar.

2.º — Escolhe-se um número real maior do que 1 ao acaso.

Convenciona-se que a probabilidade de tal número ficar compreendido entre x e $x+dx$ é $\frac{dx}{x^2}$.

Justifique a legitimidade de tal convenção.

Calcule a probabilidade de que, escolhendo nas mesmas condições dois números, a sua diferença seja inferior a a, e indique o seu valor limite para $a\to\infty$. Explique o resultado.

Calcule, sem o emprêgo de tabelas, com êrro inferior a uma milésima o valor numérico daquela probabilidade para $a=0,1$.

Solução: A legitimidade da convenção resulta de se ter $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=1$. Sejam x e y os dois números.

A probabilidade de que tais números fiquem compreendidos entre x e $x+dx$ e y e $y+dy$ é $dP=2\frac{dx}{x^2}\frac{dy}{x^2}$ notando-se que o factor 2 é empregado para permitir supor sempre no raciocínio que $y>x$. A probabilidade pedida será:

$$(1)\quad P(a)=2\int_1^{\infty}\int_x^{x+a}\frac{dx}{x^2}\cdot\frac{dy}{y^2}=1-\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\log(1+a)\,.$$

Quando $a\to\infty$ tem-se $\dfrac{\log(1+a)}{a^2}\to 0$. Portanto $\lim\limits_{a\to\infty}P(a)=1$. Tal resultado é explicado pelo facto de, quaisquer que sejam os dois números, ser sempre satisfeita a condição do enunciado. Fazendo em (1) $a=0{,}1$ vem: $P=1-20+200\log(1+0{,}1)$.

Ora $\log(1+a)=a-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a^4}{4}+\cdots$ ($|a|\leq 1$) sendo o êrro cometido, desprezando os termos da série a partir duma certa ordem, inferior ao valor absoluto do primeiro termo desprezado.

Então deverá ter-se: $200a^n/n<10^{-3}$ ou $a^n/n<10^{-5}/2$. Ora $a^5/5=10^{-5}/5<10^{-5}/2$ e $a^4/4=10^{-4}/4=10^{-5}/0{,}4>$ $>10^{-5}/2$. Portanto há que considerar os termos do desenvolvimento até $a^4/4$.

Efectuadas as operações obtem-se $P(0,1)=0{,}062$.

2.ª prova — 25 de Março de 1944

1.º — Sabe-se que as condições de Cauchy-Riemann a que satisfazem certas funções de variável complexa são: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial g}{\partial x}$, sendo a função $\Phi(z)=$ $=f(x,y)+ig(x,y)$. Prove que a função $\Phi(z)=e^z z^2$ satisfaz às condições enunciadas.

Solução — Tem-se:

$$\Phi(z)=e^{x+iy}(x+iy)^2=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)(x^2-y^2+2ixy).$$

Portanto

$$f\equiv e^x\left[(x^2-y^2)\cos y-2xy\operatorname{sen} y\right];$$
$$g\equiv e^x\left[2xy\cos y+(x^2-y^2)\operatorname{sen} y\right]$$

logo $\quad\dfrac{\partial f}{\partial x}=f+e^x(2x\cos y-2y\operatorname{sen} y)$;

$$\frac{\partial g}{\partial y}=e^x\left[2x\cos y-2xy\operatorname{sen} y-2y\operatorname{sen} y+(x^2-y^2)\cos y\right]=$$
$$=f+e^x(2x\cos y-2y\operatorname{sen} y)=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Anàlogamente se verificaria que: $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2.º — Um ponto P é lançado ao acaso sôbre uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}=2r$, por forma que é igualmente provável a sua queda em qualquer arco da semi-circunferência de comprimento constante.

Pede-se: *a)* — A probabilidade de que a área do triângulo $[APB]$ seja superior a metade da área do triângulo $[AP_1B]$ a que corresponde a sua área máxima; *b)* O valor médio da área do triângulo $[APB]$.

Solução — *a)* Como os triângulos $[APB]$ têm, qualquer que seja a posição de P, a mesma base, a altura h de $[APB]$ deve ser superior, para satisfazer as condições do enunciado, a $r/2$.

Então o ângulo $A\widehat{O}P$, sendo O o centro da semi-circunferência, deve estar compreendido entre 30° e 150°. Donde o valor da probabilidade pedida $120^\circ/180^\circ=2/3$.

b) Designando por θ o ângulo $A\widehat{O}P$ tem-se que a área do triângulo $[APB]$ é $1/2\cdot 2r\cdot h=r^2\operatorname{sen}\theta$ e o valor médio S é: $S=\displaystyle\int_0^{\pi}r^2\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{\pi}=\frac{2r^2}{\pi}$.

3.º — Sabe-se que $y(x)$ é um polinómio do 3.º grau em x, que toma os valores y_0, y_1 e y_3 nos pontos a, $a+h$ e $a+3h$. Sabendo-se que tal polinómio passa por um ponto de inflexão para $x=a$ e por um máximo para $x=a+h$, determine y_3 expresso em y_0 e y_1.

Solução — Usando a notação das diferenças finitas tem-se $h^2D^2\equiv\Delta^2-\Delta^3+\cdots$. Para o ponto de inflexão ter-se-á, como $D^2\equiv 0$,

$$(1)\qquad \Delta^2 y_0=\Delta^3 y_0,$$

visto o polinómio ser do terceiro grau.

Para o máximo vem: $Dy_1=\left(\Delta-\dfrac{\Delta^2}{2}+\dfrac{\Delta^3}{3}\right)y_1=0$ ou $\left(\Delta-\dfrac{\Delta^2}{2}+\dfrac{\Delta^3}{3}\right)(1+\Delta)\,y_0=0$, isto é:

$$(2)\qquad \Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2}-\frac{\Delta^3 y_0}{6}=0,$$

visto o polinómio ser do 3.º grau.

Substituindo em (2) o resultado dado por (1) vem:

$$(3)\qquad \Delta^2 y_0=\Delta^3 y_0=-3\Delta y_0$$

Ora $y_3=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0$ ou, utilizando a expressão (3): $y_3=y_0+3\Delta y_0-9\Delta y_0-3\Delta y_0=y_0-9\Delta y_0=$ $=10y_0-9y_1$.

4.º — Uma roleta R_k está dividida em k sectores numerados de modo que a probabilidade de saída de um número seja $1/k$.

Um jogador aposta num dos números consecutivamente até perder. Por cada vez, além da primeira, que ganha recebe a quantia a. Pela primeira vez que ganha nada recebe. O jogador joga nestas condições sucessivamente nas roletas $R_2, R_3\cdots R_n$.

¿ Qual deveria ser a sua entrada para que o jôgo fôsse equitativo?

Solução — A esperança matemática correspondente à roleta R_k é: $\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\cdots\right)a=\frac{1}{k(k-1)}a$, visto $k>1$. A entrada total será:

$$E=a\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right].$$

Para somar as $n-1$ parcelas contidas no colchete note-se que: $u_{x+1}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=(x+1)^{(-2)}$. Logo $\Delta^{-1}u_{x+1}=-\frac{1}{x+1}$ e $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\frac{1}{(n-1)n}=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{n-1}=\frac{n-1}{n}$. Portanto $E=a\frac{n-1}{n}$.

Carlos A. F. Carvalho

PONTOS DE EXAME DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra — **2.º Exame de freqüência, 1942-43.**

1734 — Calcular $\lim\limits_{x=1}\frac{1-\cos(1-x^2)^2}{\operatorname{sen}^2(x-1)^2}$.

1735 — Traçar aproximadamente a curva $y=\frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-5)}$ indicando os máximos, mínimos e as assíntotas (Eixos rectangulares).

1736 — Achar a equação geral dos círculos tangentes na origem das coordenadas à recta $y=x$ (Eixos rectangulares).

1737 — Existindo $f'(x)$ em (a,b), pode $f(x)$ ser máxima ou mínima num ponto onde $f'(x)$ se não anule?

1738 — Se a função $f(x)$ tem derivadas de tôdas as ordens no intervalo $(-r,r)$, que é necessário e suficiente para que a possamos desenvolver em série de Mac-Laurin? Conhece alguma condição suficiente de imediata aplicação?

1739 — Qual a equação da normal em $M(a,b)$ à curva $f(x,y)=0$? (Eixos rect.).

1740 — Que razões nos levam a considerar as assíntotas como tangentes?

1741 — Enuncie alguma condição, a verificar por $f'_x(x,y)$ ou $f'_y(x,y)$, que garanta a diferenciabilidade de $f(x,y)$ num ponto fixo $M(a,b)$.

1742 — Como desenvolver ràpidamente em série $1/(2x-3)^2$?

1743 — Conhece algum triângulo notável na parábola?

1744 — Como se justifica a relação $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$?

1745 — Por que construção geométrica se determina, na elipse, o diâmetro conjugado com uma dada direcção?

1746 — Como se obtêm as equações paramétricas da elipse?

1747 — Achar o termo geral do desenvolvimento de $f(x)=\sqrt[3]{8-x^2}$ em série de Mac-Laurin e indicar o intervalo de convergência dêsse desenvolvimento.

1748 — Calcular a distância $D(h,m)$ do ponto $M(x_0+h, f(x_0+h))$ à recta $y-f(x_0)=m(x-x_0)$ e determinar m de forma que $\left[\frac{\partial D(h,m)}{\partial h}\right]_{h=0}=0$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º Exame de freqüência, 1942-43.**

1749 — Calcular o limite de $y=\frac{e^{x^2}-\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$ para $x=0$.

R: $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\operatorname{sen} x}{4\operatorname{sen}^3 x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+\operatorname{sen} x/x}{4\operatorname{sen}x/x.\operatorname{sen}^2 x}=\infty$.

1750 — Estudar a curva $\frac{x^2}{x-1}$ (máximos e mínimos, inflexões e assíntotas). R: *Para* $x>1$ *e* $y>0$; *para* $x<1$, $y<0$. *Quando* $x\to 1$, $y\to\pm\infty$: $x=1$ *é uma assíntota. Para* $x=0$ *é* $y=0$. *Também* $\lim\limits_{x=\infty} y/x=1$ e $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=1$; *a recta* $y=x+1$ *é portanto outra assíntota. De* $y'=x(x-2)/(x-1)^2$ *conclui-se que a função é crescente em* $(-\infty,0)$, *decrescente em* $(0,1)$ e $(1,2)$ *e crescente de novo em* $(1,+\infty)$; *tem portanto um máximo para* $x=0$ *e um mínimo para* $x=2$, *respectivamente* 0 *e* 4. *De* $y''=2/(x-1)^3$ *conclui-se que para* $x<1$ *a curva volta a sua concavidade no sentido* Oy', *para* $x>1$, *no sentido* Oy, *e que tem para* $x=1$ *um ponto de inflexão impróprio. A curva é uma hipérbole.*

1751 — Achar a área da curva precedente no intervalo $(2,3)$. R: *Ponha-se* $\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$. *Então* $Px^2/(x-1)=x^2/2+x+\log(x-1)$

e $A=\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,dx=\frac{7}{2}+\log 2$.

1752 — Achar a diferencial total de $xe^y+2y\cos x$ no ponto $(\pi/2, 0)$. R: *Pondo* $f(x,y)=xe^y+2y\cos x$, *será* $f'_x=e^y-2y\,\text{sen}\,x$, $f'_y=xe^y+2\cos x$ *e* $df=f'_x\,dx+$ $+f'_y\,dy$ *ou* $dx+\pi/2\cdot dy$, *no ponto indicado.*

1753 — Conduzir pela origem uma perpendicular à recta que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(2,0)$. (Eixos rectangulares). R: *O coeficiente angular desta recta é* $-1/2$. *A recta pedida é pois* $y=2x$.

1754 — A que equação satisfazem as coordenadas dos pontos da curva $f(x,y)=0$ onde a tangente é paralela a Oy? (Eixos quaisquer). R: *A equação* $y'_x=\infty$ *isto é a* $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ com $\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$ *ou a* $\frac{\partial f}{\partial x}=\infty$ con $\frac{\partial f}{\partial y}\neq\infty$. *Veja-se, por exemplo,* $y^2+\sqrt[3]{x-1}-4=0$.

1755 — Como se dispõem os diâmetros da parábola? R: *São perpendiculares à directriz.*

1756 — Que representa cada uma das equações $x^2-2x+y^2=0$ e $x^2-y^2=3$ *a)* em eixos rectangulares; *b)* em eixos oblíquos? R: No plano: *A 1.ª representa* a) *uma circunferência,* b) *uma elipse; a 2.ª representa sempre uma hipérbole.* No espaço: *Representam superfícies cilíndricas de geratrizes paralelas a* zz' *cujas directrizes em* xOy *têm por equações, nêsse plano, as equações dadas.*

1757 — Conhece alguma interpretação geométrica da função primitiva duma função contínua? R: *Seja* $Pf(x)=F(x)$. *Se em* (a,b) $f(x)>0$, *e se além disso* $F(a)=0$, *então* $F(b)$ *é a área limitada pela curva* $y=f(x)$, *o eixo dos* xx *e as perpendiculares a êste eixo nos pontos de abcissa* a *e* b *(eixos rectangulares).*

1758 — Qual é a definição geral de cónica a partir dos conceitos de foco e directriz? R: *Uma cónica é o lugar geométrico das posições dum ponto que se move num plano por forma que a razão das distâncias dêsse ponto a um ponto dado (foco) e a uma recta dada (directriz) se mantém constante durante o movimento.*

1759 — Com que proposição se legitima o desenvolvimento de $\text{sen}\,x$ em série, dispensando a discussão do resto da fórmula de Mac-Laurin? R: *São desenvolvíveis em série no intervalo* $(a-k, a+k)$ *tôdas as funções* $f(x)$ *tais que, qualquer que seja* x *nêsse intervalo e qualquer que seja* n *se tenha um número* M, *independente de ambos, para o qual* $|f^{(n)}(x)|\leq M$.

1760 — Que fórmula permite calcular (com qualquer aproximação prefixa) o valor de $\log 6$, conhecido que seja o valor de $\log 5$? R: *A fórmula*

$$\log q=\log q+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)^{2n+1}$$ *ou, nêste caso,*

$$\log 6=\log 5+\frac{2}{11}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{121^n}.$$

1761 — Seja C uma curva plana fechada (uma elipse, por exemplo). Que se entende por área da curva C? R: *Considere-se o plano da curva decomposto em rectângulos não sobrepostos por dois sistemas de rectas. Variando a decomposição, podem obter-se rectângulos constituídos exclusivamente por pontos do interior da curva. A soma das áreas dêsses rectângulos é variável com a decomposição; o conjunto dos seus valores para tôdas as decomposições possíveis é, porém, limitado superiormente. A área da curva é o limite superior dêsse conjunto.*

1762 — Calcular, para $x=1$, a 2.ª derivada da função y de x definida implicitamente, em tôrno do valor $x=1$, pela equação $3x^2-y^3x+5=0$. R: *Tem-se* $y'_x=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}=2/y^2-y/3x$, *que toma para* $x=1$ e $y=2$ *o valor* $-1/6$. *Agora* $y''_{x^2}=-4y'/y^3-1/3\,(y'/x-y/x^2)$ *que para* $x=1$ *toma o valor* $29/36$.

1763 — Achar a envolvente da família de curvas $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2-1=0$. R: *Ponha-se* $f(x,y,\alpha)=$ $=(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2-1$; *será* $f'_\alpha=-2(x-\alpha)-$ $-2(y-\alpha)$. *Pondo* $f'_\alpha=0$ *tem-se* $(y-\alpha)^2=(x-\alpha)^2$ *e* $\alpha=\frac{x+y}{2}$. *A eliminação de* α *dá* $\left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ *ou* $y=x\pm\sqrt{2}$. *A equação dada representa a família das circunferências com centro em* $y=x$ *e raio* 1; *a equação da envolvente mostra que esta é constituída pelas duas tangentes comuns às infinitas circunferências, como se podia esperar.*

Solução dos n.ºs 1749 a 1763 de G. Ramos de Castro

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de freqüência, 1942-43.**

1764 — Estudar a curva $y=e^{-x}\,\text{sen}\,x$ (máximos e mínimos, inflexões e assíntotas).

1765 — Área da curva anterior no intervalo $(0,\pi)$.

1766 — Que valor tem no ponto $x=\infty$ a função que nos mais pontos é igual a $(1+x^2)^{1/x}$?

1767 — Que curva representam as equações $x=a\cos u$ e $y=b\,\text{sen}\,u$ e que significa u geomètricamente?

1768 — Tomando OX como eixo polar e O como polo, escreva em coordenadas polares a equação da recta que passa pelos pontos (0,1) e (1,0).

1769 — Que é parâmetro duma parábola?

1770 — De quantos modos se pode transformar $f(x+h, y+h)-f(x, y)$ pelo teorema dos acréscimos finitos?

1771 — Têm as funções contínuas primitivas? Justifique a resposta.

1772 — Como pode obter o desenvolvimento em série de $\frac{x^2}{1+x}$?

1773 — Que representa a equação $2x^2-3y^2=4$ em coordenadas oblíquas? Que são os eixos coordenados para a curva?

1774 — Como se levanta uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$?

1775 — Em que consiste o teorema de Euler para as funções homogéneas?

1776 — Pode uma função contínua $y=f(x)$ ter máximos e mínimos onde não admite derivada? Porquê?

1777 — Seja P o ponto em que a tangente em $M(x, y)$ à curva $y=f(x)$ encontra o eixo dos XX. Calcular o comprimento do segmento MP, supondo os eixos ortogonais.

1778 — Considerando na curva $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$ negativas as áreas das arcadas de ordenada negativa, calcule o limite para $n=\infty$ da área da curva no intervalo $(0, n\pi)$.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de freqüência — Ponto n.º 1.

1779 — Determinar a, b e c, de modo que a equação $x^3-ax^2+bx+c=0$ admita por raizes a, b e c. R: *As fórmulas de Newton, conduzem a:* $a+b+c=a$, $ab+ac+bc=b$ *e* $abc=-c$.
O sistema admite as duas soluções: 1) $a=c=1$, $b=-1$ *e* 2) $b=c=0$, a *qualquer. A equação proposta revestirá, respectivamente, as formas* $x^3-x^2-x+1=0$, *e* $x^3-ax^2=0$.

1780 — Determinar: *a)* $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{du}{dx}$ sendo $u=x^2+y^2$ e $y=\operatorname{tg} x$. *b)* $\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}$ sendo $V=f(x, y, z)$ e $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $z=t$. R: a) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$ *e* $\frac{du}{dx}=2x+2y\sec^2 x$.
b) $\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$ *e* $\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\operatorname{sen}\theta$.

1781 — Considere-se um conjunto de planos paralelos equìdistantes, em que é 3 a distância de 2 planos consecutivos. Sabendo que um dêsses planos, passa pelo ponto $P(1, 2, -1)$ e é perpendicular à recta $x=y=2z$, determinar a equação dêsse conjunto de planos. R: *Um plano genérico desta família, dista em valor absoluto,* $3k$ *(*k *é variável inteira), do plano indicado no enunciado. A equação dêste plano é pois:*
(1) $x-1+y-2+1/2.(z+1)=0$ *ou* $2x+2y+z-5=0$.
A equação da família de planos paralelos a êste, será: $2x+2y+z+\lambda=0$. *Desta família de planos interessam-nos só aquêles que distam, em valor absoluto, do plano* (1) $3k$ *ou seja aquêles planos para os quais se tem* $3k=(5+\lambda)/\sqrt{9}$ *donde* $\lambda=9k-5$; *a equação da família considerada no problema será pois* $2x+2y+z+9k-5=0$.

1782 — Determinar a e b de modo que a função $y=(a+bx)e^{a+bx}$ admita um mínimo no ponto de abcissa $x=a-3b$ e um ponto de inflexão para $x=a-4b$. Estudar e representar gràficamente a função nêsse caso. Calcular o seu desenvolvimento em série de potências. R: *Tem-se* $y'=(a+1+bx)\,be^{a+bx}$ *e* $y'=0$ *para* $x=-(a+1)/b$ *com* $b\neq 0$ *(o caso* $b=0$ *não apresenta interêsse, por reduzir* y *a constante). A êste valor de* x *corresponde um mínimo por tornar* $y''>0$ *como é fácil verificar.* $y''=(a+2+bx)\cdot b^2 e^{a+bx}\to y''=0$ *para* $x=-(a+2)/b$, *que é a abcissa dum ponto de inflexão por tornar* $y'''\neq 0$.

O problema impõe que seja: $-(a+1)\,b=a-3b$ *e* $-(a+2)/b=a-4b$, *donde* $b=\pm 1$. *A solução* $b=-1$ *conduz a um absurdo e quando* $b=1$ *vem* $a=1$. *A função a estudar é pois* $y=(1+x)\,e^{1+x}$ *com um mínimo no ponto* $(-2, -1/2)$ *e um ponto de inflexão* $(-3, -2/e^2)$. *A função é contínua em todo o domínio da variável* x *real. A curva passa pelos pontos* $(0, e)$ *e* $(-1, 0)$ *sôbre os eixos coordenados. Tem-se:* $y'=(2+x)e^{1+x}$ *e* $y''=(3+x)e^{1+x}$, *portanto* y *é crescente para* $x>-2$, *decrescente para* $x<-2$; *concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas para* $x<-3$ *e concavidade no sentido das ordenadas negativas para* $x<-3$. *Para* $x\to+\infty, y\to+\infty$; *para* $x\to-\infty$, *levantando a indeterminação do tipo* $0\times\infty$, *conclue-se que* $y\to 0$, *sendo portanto o eixo dos* xx, *uma assíntota da curva. O desenvolvimento em série da função é imediato, multiplicando por* $1+x$, *o desenvolvimento em série de* e^z *com* $z=1+x$; *portanto,*

$$y=(1+x)\,e^{1+x}=1+x+(1+x)^2+\frac{(1+x)^3}{2!}+\cdots+\frac{(1+x)^n}{(n+1)!}+\cdots$$

Soluções dos n.os 1779 a 1782 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. C. E. F. — 2.ª prova de freqüência Ordinária — 16-6-943 — 1.ª Cadeira.—(Exame teórico).

1783 — Relações entre os conceitos de monotonicidade, continuïdade e derivada.

1784 — Estudar a função $y=\operatorname{tg} x+1/\operatorname{tg} x$ é representá-la geomètricamente no intervalo $(0, 2\pi)$.

Estudar a sua inversão.

Indicar aqueles intervalos parciais em que:

a) — Se lhe pode aplicar o teorema dos valores compreendidos; *b)* — Se lhe pode aplicar o teorema de Rolle. — Justificações.

CÁLCULO INFINITESIMAL - ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **2.º exame de freqüência, 1942-43** — 2.ª chamada.

1785 — Integrar a equação $x^2 y' + 2x^2 (3x-1) y + x^3 y^2 - 6x^2 + x + 1 = 0$, sabendo que $y = 1/x$ é um integral particular. Determinar a normal no ponto $(1, -5)$ da linha integral que passa por êste ponto. R: *Trata-se de uma equação de Riccati. Pondo* $y = 1/z + 1/x$, *obtem-se a equação linear* $z' - 6xz = x$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é* $z = C_1 e^{3x^2}$; *variando a constante obtém-se* $z = \frac{6Ce^{3x^2} - 1}{6}$, *ou, finalmente,* $y = \frac{6}{6Ce^{3x^2} - 1} + \frac{1}{x}$. *Como* $y'_{(1, -5)} = -1$, *a equação da normal pedida é* $Y + 5 = X - 1$.

1786 — Integrar o sistema $\begin{cases} y' - y - 5z = 0 \\ z' + y + z = 4\cos 2x, \end{cases}$ e determinar o raio de curvatura, na origem, da linha integral que passa por êste ponto. R: *Usando o símbolo* D *fica* $\begin{cases} (D-1)\,y - 5z = 0 \\ y + (D+1)\,z = 4\cos 2x; \end{cases}$ *eliminando* z, *vem* $(D^2 + 4)\,y = 20\cos 2x$, *cujo integral geral e* $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + 5x \operatorname{sen} 2x$; *e, portanto,*

$$z = \frac{2C_2 - C_1}{5}\cos 2x - \frac{2C_1 - C_2}{5}\operatorname{sen} 2x + x\,(2\cos 2x - \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} 2x.$$

Como $\begin{cases} y'_0 = 0 \\ z'_0 = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} y''_0 = 20 \\ z''_0 = -4 \end{cases}$, *vem* $s' = \sqrt{17}$, $A = -80$, $B = 4$, $C = 20$; *então* $R = \frac{17\sqrt{17}}{\sqrt{6816}}$.

1787 — Calcular $\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2x^2+y^2}}$. O domínio D é limitado pela linha $\rho = 1 + \cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ e pelos eixos coordenados. R: *Tem-se, em coordenadas polares* $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$,

$$I = \iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2x^2+y^2}} = \iint_D \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + 1}}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}\,d\theta \int_0^{1+\cos\theta} d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos\theta)}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}\,d\theta = \log\frac{e^{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}-1}.$$

1788 — Sôbre a normal principal em M da linha $x = \frac{\cos 2z}{2}$, $y = \frac{\operatorname{sen} 2z}{2}$, marcar no sentido de $\vec{n}$, um segmento $\overline{MP}$ de comprimento R. Determinar o plano osculador em P da linha lugar dêstes pontos. R: *A linha dada é uma hélice circular, portanto* R *e* T *são constantes. Em notação vectorial teremos* $\overline{P} = \overline{M} + R\overline{n}$; *e a equação do plano osculador em* P *é* $\overline{Q-P} \,\Big|\, \frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2} = 0$. *Atendendo às fórmulas de Frenet, temos* $\frac{d\overline{P}}{ds} = -\frac{R}{T}\overline{b}$, $\frac{d^2P}{ds^2} = -\frac{R}{T}\overline{n}$; *donde* $\frac{d\overline{P}}{ds} \wedge \frac{d^2\overline{P}}{ds^2} = -\frac{R^2}{T^3}\overline{t}$. *A equação do plano osculador em* P *é, então,* $\overline{Q-P} \,|\, \overline{t} = 0$; *trata-se de um plano paralelo ao plano normal em* M *à linha dada.*

Soluções dos n.ºs 1785 a 1788 de A. Pereira Gomes

I. S. T. — Cálculo — **2.º exame de freqüência — 1943**

1789 — Dado o vector $\alpha = a_1 I + a_2 J + a_3 K$, sendo $\begin{cases} a_1 = xyz \\ a_2 = xy + yz \\ a_3 = x + y + z; \end{cases}$ e a esfera de raio 1 e de centro na origem; verificar, para êsse vector e para êsse domínio, o teorema da divergência. Verificar, para um dos hemisférios, o teorema de Stokes.

1790 — Calcular a área do segmento do paraboloide $z = x^2/6 + y^2/10$ que é interior ao cilindro $x^2/9 + y^2/25 = 1$.

1791 — Integrar a equação $x\,(1 - 1^3)\,dy/dx = x^2 + y - 2xy^2$.

1792 — A equação diferencial

$$a^2 yp^2 - 4xp + y = 0 \qquad (p = y')$$

admitirá as rectas $2x = \pm ay$ como soluções singulares?

I. S. T. — Cálculo — **2.º exame de freqüência — 1943**

1793 — Dada um vector α, função dum ponto variável $P(x, y, z)$, discutir a equação $\operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \alpha$ sendo $f(P)$ uma incógnita escalar. Inversamente, dada a função escalar $f(P)$, discutir a mesma equação em relação à incógnita α. As funções $f(P)$ e $\alpha(P)$ podem ser ambas harmónicas?

1794 — Uma curva torsa projecta-se no plano xy segundo a senusoide $y = \operatorname{sen} x$. Determinar a segunda equação da curva, $z = z(x)$, de modo tal que as normais principais sejam paralelas ao plano yz.

1795 — Integrar a equação

$$y\,(1 + p^2)^{1/2} = n\,(x + yp) \qquad (p = y')$$

1796 — Achar a equação diferencial das curvas planas cuja raio de curvatura é igual a n vezes o segmento da normal; e mostrar que ela é sempre integrável quando n é inteiro.

F. C. P. — Análise Superior — **2.º Exame de freqüência, 1942-43.**

1797 — Decompor em fracções simples, segundo o teorema de Mittag-Leffler a função $\frac{1}{e^z-1}$. R: *Os polos da função são:* $0, 2i\pi, 4i\pi, \cdots 2ki\pi, \cdots$ *cujos resíduos respectivos são todos iguais a* 1. $\lim_{z=2ki\pi} e^{-z}=1$. *Teremos:*

$$\frac{1}{e^z-1}=P(z)+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z\pm 2ki\pi}+P_{kr}\right]\cdot$$

Como a série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2ki\pi}\right)^2$ *é convergente será* $r=1$ *e portanto:*

$$\frac{1}{e^z-1}=P(z)+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-2ki\pi}+\frac{1}{z+2ki\pi}+\frac{1}{2ki\pi}-\frac{1}{2ki\pi}\right\}=P(z)+\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+4k^2\pi^2}.$$

1798 — Calcular $\iiint_V x^2y^2\,dx\,dy\,dz$. O volume é limitado pela superfície $4x^2+y^4+\frac{z^4}{16}=1$. R: *Teremos*

$$I=\iiint_V x^2y^2\,dx\,dy\,dz=\frac{2\cdot(1/2)^3}{32}\,\frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/2+1+1)}.$$

Ora $\Gamma(3/2)=1/2.\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)=\pi\sqrt{2}$, $\Gamma(3/2+1+1)=15/8.\sqrt{\pi}$. *Portanto:*

$$I=\frac{1}{128}\,\frac{1/2.\sqrt{2\pi}\,\pi}{15/8.\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2}}{480}\pi.$$

1799 — Calcular $A=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^3-7x-6}}$ em função de I_0, I_1 e J_1.

R: $A=\frac{\sqrt{x^3-7x-6}}{12(x-1)}-\frac{1}{6}J_1-\frac{1}{24}(I_1-I_0)$.

1800 — Calcular $\int_0^i\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ seguindo o caminho seguinte: de 0 a $2-2i$, $y+x=0$; de $2-2i$ a $2+i$, $x-2=0$; de $2+i$ a i, $y-1=0$.

R: $I=\pi-i\int^{1}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\pi+i\log\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Soluções dos n.os 1797 a 1800 de Jayme Rios de Sousa

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta»

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1554 — Resolver a equação biquadrada:

$$[x^2+\sqrt{x}+2x(1+\sqrt{x})]\cdot[x^2+\sqrt{x}(2x-1)]=159600.$$

R: *O 1.º membro da equação proposta pode escrever-se sucessivamente:* $[x^2+\sqrt{x}+2x+2x\sqrt{x}]\,[x^2+2x\sqrt{x}-\sqrt{x}]=[x^2+2x\sqrt{x}+x+x+\sqrt{x}]\,[x^2+2x\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}]=[(x+\sqrt{x})^2+(x+\sqrt{x})]\,[(x+\sqrt{x})^2-(x+\sqrt{x})]=(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2$. *A equação proposta pode pois escrever-se:* $(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2-159600=0$, *donde*

$$x+\sqrt{x}=\pm\sqrt{\frac{1\pm799}{2}}=\begin{cases}\pm 20\\ \pm\sqrt{-399}\end{cases};$$

De $x+\sqrt{x}=20$ *vem* $\sqrt{x}=4$ e $\sqrt{x}=-5$; *De* $x+\sqrt{x}=-20$ *vem* $\sqrt{x}=\frac{1-i\sqrt{79}}{2}$ *e* $\sqrt{x}=\frac{-1-i\sqrt{79}}{2}$; *De* $x+\sqrt{x}=\sqrt{-399}$ *vem* $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{-399}}}{2}$ *e* $\sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{-399}}}{2}$; *De* $x+\sqrt{x}=-\sqrt{399}$ *vem* $\sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{1-4\sqrt{-399}}}{2}$ e $\sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{1-4\sqrt{-399}}}{2}$.

Solução de Paul Richard (de Portalegre)

1704 — Num circulo de centro O, marque-se sôbre o raio $\overline{OA}$, um ponto C; encontrar sôbre a circunferência um ponto P tal que o ângulo $\widehat{OPC}$ seja máximo. R: *Da relação* sen $\widehat{OPC}=\overline{OC}/\overline{OA}$. sen $\widehat{OCP}$ *conclui-se que* sen $\widehat{OPC}$ *é máximo para* $\widehat{OCP}=\pi/2$. *Ora o ângulo* $\widehat{OPC}$, *sendo evidentemente compreendido entre* 0 *e* $\pi/2$, *é máximo ao mesmo tempo que o seu seno.*

Logo, o ponto P *procurado é qualquer das extremidades da corda tirada por* C *perpendicular a* OA.

Soluções de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Adelino da Silva Vieira (de Almada); António A. Guimarães (do Pôrto); António B. Lopes (de Leiria); Edmundo Pedro (de S. Tiago, Cabo Verde); F. Roldão Dias Agudo (de Lisboa); Miguel de Almeida (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

1705 — Demonstrar que se num triângulo, os três ângulos $A, B, C,$ são respectivamente proporcionais aos números 2, 3, 4, tem-se: $\cos A/2=(a+c)/2b$.

R: *Tem-se:* $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}\therefore\dfrac{a+c}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} C}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$ ou $(a+c)/2b=\dfrac{\operatorname{sen}(A+C)/2.\cos(A-C)/2}{\operatorname{sen} B}$ mas, por hipótese: $A/2=B/3=C/4\therefore\dfrac{A+C}{2}=B$ e $\dfrac{A-C}{2}=-\dfrac{A}{2}$, donde $(a+c)\,2b=\cos\left(-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\dfrac{A}{2}$.

Solução de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

Enviaram também soluções correctas: Adelino da Silva Vieira (de Almada); Alberto Paes (de Lisboa); Angel Chain Garcia (Gijon-Espanha); António A. Guimarãis (do Porto); António B. Lopes (de Leiria); F. Roldão Dias Agudo (de Lisboa); Paul Richard (de Portalegre); T. Ferreira Rato (S. Tiago-Cabo Verde).

1706 — Sabendo-se que o número $13xy45z$ é divisível por 792, achar os três algarismos x, y, z. R: *Por ser* $792=\dot{8}$, *será* $13xy45z=\dot{8}$ *e também* $45z=\dot{8}$ *ou* $4\times4+2\times5+z=\dot{8}$ *donde se conclui que* $z=6$. *Por ser* $792=\dot{99}$, *será* $13xy456=\dot{99}$ *ou* $56+y4+3x+1=\dot{99}$, *ou* $56+y4+3x+1=\dot{99}$, *isto é, a soma das classes de dois algarismos em que o número se pode decompor, a partir da direita, é múltipla de 99. A simples inspecção mostra que esta soma não pode atingir* $2\times99=198$, *portanto será* $56+y4+3x+1=99$ *donde se conclui que* $x=8$ *e* $y=0$.

Solução de J. Caeiro Murteira (de Perolivas).

Enviaram também soluções correctas: A da Silva Vieira (de Almada); Alberto Paes (de Lisboa); Angel Chain Garcia (Gijon-Espanha); António A. Guimarãis (do Porto); F. R. Dias Agudo (de Lisboa); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); Paul Richard (de Portalegre); T. Ferreira Rato (de S. Tiago —Cabo Verde).

1707 — Três operários executam em certo prazo uma obra que, dividida igualmente pelos três, tomaria o mesmo tempo a um dêles, menos dois dias a outro e mais três ao terceiro. De quantos dias é o prazo? R: *O problema resolve-se mentalmente. É evidente que o trabalho executado pelo terceiro operário em 3 dias, seria executado pelo segundo em 2. Reconhece-se então que os tempos (expressos em dias) que estes dois operários gastam para executar o seu quinhão da obra, estão na razão de* $3/2$ *e a sua diferença é* 5; *serão nesse caso, os produtos* $3\times5=15$ *e* $2\times5=10$. *Será portanto de* $15-3$ *ou* $10+2$, *isto é, de 12 dias o prazo que se procura.*

Solução de J. Caeiro Murteira (de Perolivas).

Enviaram também soluções correctas: A. da Silva Vieira (de Almada); Alberto Paes (de Lisboa); A. Bernardino Lopes, (de Leiria); F. R. Dias Agudo (de Lisboa); P. Richard (de Portalegre); T. Ferreira Rato (de S. Tiago-Cabo Verde).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

32—FERREIRA NEVES, Francisco—**Elementos de Geometria** para o I, II e III anos dos liceus. 4.ª edição. 1942. Livraria Sá da Costa — Editora. Lisboa. Preço 12$50.

O livro Elementos de Geometria escrito em linguagem clara e acessível tem muito bom aspecto gráfico e é de fácil leitura. Definições e enunciados dos teoremas são correctos. Todo o livro é escrito com o intuito de observar o programa e as suas instruções, como convém a livro que se destina ao ensino liceal, e necessàriamente segue as normas legais fazendo por isso mais verificações do que demonstrações.

O capítulo IV sôbre posição relativa de duas rectas no plano é tratado dum modo francamente experimental, dando indicações e apresentando desenhos das experiências que mostram o paralelismo e a perpendicularidade de rectas. No entanto, e contra as observações do programa, dá algumas demonstrações dedutivas logo a partir do 1.º ano, e não a partir do 3.º, por exemplo no caso da igualdade de triângulos, em que o assunto podia ser tratado por uma forma experimental. No fim de cada capítulo apresenta o autor exercícios de aplicação e revisão bem graduados e nos moldes dos saídos em exames liceais.

J. da Silva Paulo

33—PALMA FERNANDES, António do Nascimento, **Exercícios de Geometria e Álgebra,** para o 4.º ano, 2.ª edição melhorada. Livraria Cruz, Braga, 1943. Preço 8$00,

Êste livro de exercícios tem no início de cada capítulo um breve resumo de matéria teórica, seguido de exercícios com a resolução completa, e do mesmo tipo dêstes apresenta por fim, outros de que se dá sòmente o resultado. Com boa apresentação gráfica e boa orientação pedagógica os exercícios são graduados e até certo ponto originais, não se esquecendo algumas demonstrações de acôrdo com os últimos pontos saídos nos exames liceais. É um livro útil aos alunos e até mesmo aos professores por lhes facilitar sugestões para os seus exercícios.

J. da Silva Paulo

34—DIAZ, J. GALLEGO—**Nociones de Calculo Vectorial — Complementos de Matemáticas** — Manuales Romo—Librería Internacional de Romo, Madrid, 1944, preço 25 pts.

Êste livro de cêrca de 150 páginas é destinado sobretudo a servir de auxiliar na preparação dos candidatos às Escolas Especiais de Engenharia podendo porém servir um público mais largo. É o produto da experiência que o Autor adquiriu de alguns anos de ensino. A par de apontamentos tirados de obras didacticas clássicas encontram-se demonstrações originais.

A 1.ª parte da obra ocupa-se da exposição dos elementos de álgebra vectorial e das suas aplicações à geometria analítica do 1.º grau, que desenvolve. Segue-se a teoria dos momentos e o estudo de algumas funções vectoriais. São vários os complementos: elementos da teoria das funções de variável complexa, algumas propriedades das cónicas, secções cíclicas das quádricas, equações tangenciais das curvas planas, aplicações das coordenadas homogéneas à determinação de assíntotas, planos assintóticos, etc.

Citaremos também uma simples dedução vectorial das fórmulas fundamentais da trigonometria esférica, um método de resolução gráfica da equação do 2.º grau de coeficientes complexos e, finalmente, um artigo sôbre uma projectividade complexa ligada a uma cónica dada, já conhecido dos leitores da «Gazeta de Matemática,» onde foi publicado no n.º 13.

Além dos exercícios propostos que figuram no final do livro há, intercalados no texto, problemas completamente resolvidos que esclarecem e dão idéia das aplicações.

Manuel Zaluar

PUBLICAÇÕES MATEMATICAS RECEBIDAS POR TROCA

NACIONAIS

Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto — N.º 8 — *Introdução ao estudo da noção de função contínua*—por António Monteiro e A. Pereira Gomes.

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral:

Caderno n.º 3 — *Álgebra Moderna — Grupos—(Definições. Regras de Cálculo)*—por José Morgado e Almeida Costa.

Caderno n.º 4—*Álgebra Moderna — Grupos (Homomorfias)*—por José Morgado e Almeida Costa.

Caderno n.º 5 — *Teoria Geral da Medida — Medida à Jordan* — por Laureano Barros.

Caderno n.º 6—*Topologia Geral—Espaços acessíveis de Fréchet*—por António A. Monteiro.

Caderno n.º 7 — *Topologia Geral — Funções contínuas* — por A. Pereira Gomes.

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática—Ano XVI. n.ºs 12-13—1943.

Espanha

Euclides — (Madrid)—Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones—Tomo IV, n.ºs 35, 36, 37 e 38, Janeiro a Abril de 1944.

Roménia

Annales Scientifiques de l'Université de Jassy —1ère section (Mathématiques, Physique, Climie)—Tomos XXV e XXVI, anos 1941 e 1942.

OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros—(Lisboa)—Boletim dos Estudantes de Agronomia—Ano XXVI, n.ºs 4 e 5, 1943.

Revista Polytécnica—(São Paulo) Ano 39.º, n.º 143, Setembro de 1943.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T.—n.ºs 143, 144, 145 e 146—Janeiro a Abril de 1944.

Matemáticas Superiores aplicadas a la Química y a la Física—por Dr. Hugo Sirk, *trad. esp. pelo Prof. Dr. Tomás Batuecas — Manuel Marin,* Ed., Barcelona, 1943.

Teoria monografica escalar y aplicaciones a la astronomia náutica — por Juan Garcia, capitan de corbeta - Libreria Internacional de Romo, Madrid, 1943.

Teoria general de la tabulación escalar y numérica de ecuaciones—Aplicaciones a la Astronomia Náutica—por Juan Garcia, capitan de corbeta —Libreria Internacional de Romo, Madrid, 1944.

Publicações da Embaixada Britânica.

Publicações da Embaixada dos Estados Unidos da América do Norte.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número extraordinário dedicado às

MATEMÁTICAS ELEMENTARES e EXAMES DE APTIDÃO

Foi publicado, em Março de 1944, o n.º 22 da «Gazeta de Matemática», número extraordinário dedicado às Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão, para dêle se poderem utilizar ainda êste ano os candidatos aos exames de aptidão às nossas Escolas Superiores. É inteiramente independente dos outros números da «Gazeta de Matemática.»

Os assinantes da «Gazeta de Matemática» poderão durante o corrente ano (1944) beneficiar duma redução de preço dêste número extraordinário (6$50 em vez de 10$00) que não é incluído na assinatura anual.

●

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Preço de capa por cada número	6$50
Preço de assinatura anual dos quatro números 18 a 21 (Janeiro, Abril, Julho e Outubro).	20$00
Preço de capa do número extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	6$50

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 120$00 (colecção dos 17 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18) ao preço de Esc. 6$50 cada.

A Lógica Matemática e o Ensino Médio com aplicação aos métodos da matemática
por José Sebastião e Silva — Separata dos n.os 5, 6 e 7, Esc. 5$00.

●

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial