

N.0194

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Ano LXXXII | Jul. 2021 | 4,20€

MATEMÁTICA PARA
A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO

A Matemática no Transporte Marítimo: Afetação de Recursos Portuários a Navios

Agostinho Agra

HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

O Compasso Geométrico, Astronómico, Náutico (1595): Raciocinar com as Mãos na "Aula da Esfera" com Francisco da Costa

Samuel Gessner

As Formas dos Números

Daniela Tavares



Assista às sessões plenárias no Canal de Youtube da SPM!

<https://www.youtube.com/user/SPMatematica>

ENCONTRO NACIONAL SPM 2021

80

ANNIVERSARY | TH

spm 80





10 AS FORMAS DOS NÚMEROS

Daniela Tavares

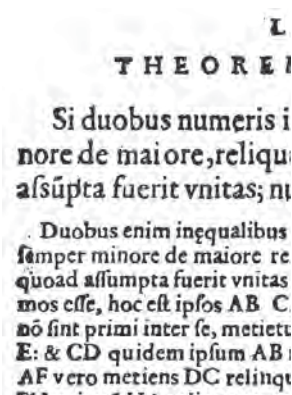


30 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

O compasso geométrico, astronómico, náutico (1595): Raciocinar com as mãos na “Aula da Esfera” com Francisco da Costa



24 AVALIAÇÃO ONLINE PARAMETRIZADA NO ENSINO SUPERIOR DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19



05 CANTO DÉLFICO

Do Algoritmo de Euclides ao Teorema de Quillen-Suslin

- 02 **EDITORIAL** | *Silvia Barbeiro*
O maior desafio
- 03 **RECREIO** | *Jorge Nuno Silva*
Oulipo Avant La Lettre
- 05 **CANTO DÉLFICO** | *João Filipe Queiró*
Do Algoritmo de Euclides ao Teorema de Quillen-Suslin
- 10 **AS FORMAS DOS NÚMEROS**
Daniela Tavares
- 14 **APANHADOS NA REDE** | *José Carlos Santos*
A Origem da Indução Matemática
- 17 **MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO** | *Agostinho Agra*
A Matemática no Transporte Marítimo: Afetação de Recursos Portuários a Navios
- 24 **AVALIAÇÃO ONLINE PARAMETRIZADA NO ENSINO SUPERIOR DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19**
Rui Paiva, Milton Ferreira e Miguel Frade
- 30 **HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA** | *Samuel Gessner*
O Compasso Geométrico, Astronómico, Náutico (1595): Raciocinar com as mãos na “Aula da Esfera” com Francisco da Costa
- 36 **PASSO MAIOR DO QUE A PERNA?**
Miguel de Carvalho
- 41 **MATEMÁTICA E LITERATURA** | *Nuno Camarneiro*
Should We Stay or Should We Go?
- 42 **BARTOON** | *Luis Afonso*
- 43 **NOTÍCIAS**
- 48 **CARTAS DA DIREÇÃO** | *Jorge Milhazes Freitas*
O Encontro Nacional da SPM 2021

O MAIOR DESAFIO

A sustentabilidade do planeta é o maior desafio da nossa sociedade.
A comunidade matemática mobiliza-se para o enfrentar.

A Agenda 2030, ou mais precisamente, o documento “Transformando Nosso Mundo: a Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável”, adotado na Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU) em 2015, é um guia para as ações da comunidade internacional nos próximos anos e responde ao imperativo global para realinhar as trajetórias económicas, sociais e ambientais do mundo, a favor da sustentabilidade do planeta e das gerações presentes e futuras. Os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Agenda 2030 são universais, indivisíveis e baseadas em direitos, correspondendo a uma visão integradora das várias dimensões do desenvolvimento sustentável – económica, social e ambiental, que se interligam entre si nos vários objetivos. Os ODS constituem um plano de ação para as pessoas e para o planeta de forma a promover a paz, a justiça, a proteção do ambiente, a erradicação da pobreza, a defesa da igualdade de género, a garantia do acesso à saúde e educação. Esta agenda é assim uma oportunidade para os países e as suas sociedades adotarem um rumo sustentável, equilibrado e inclusivo.

Os matemáticos anteciparam esta proclamação em 2013, com o ano da Matemática do Planeta Terra (MPT2013). Por todo o mundo, diversas sociedades, associações, universidades, institutos de investigação e fundações, com o apoio da UNESCO e as organizações International Council for Science, International Mathematical Union (IMU) e International Council for Industrial and Applied Mathematics, dedicaram o ano 2013 ao projeto MPT2013. A iniciativa tomou como missão mobilizar a comunidade matemática para os seguintes objetivos: incentivar a investigação na identificação e na resolução de questões fundamentais sobre o Planeta Terra; incentivar educadores de todos os níveis de ensino para comunicar os problemas relacionados com o planeta

Terra; informar o público sobre o papel essencial da matemática para enfrentar os desafios do planeta Terra.

A matemática junta-se a outras ciências básicas no Ano Internacional de Ciências Básicas para o Desenvolvimento Sustentável 2022, promovido pela UNESCO e que tem a IMU como um dos parceiros fundadores. Esta iniciativa, que terá início em 2022 e continuará em 2023, irá centrar-se nas ligações entre as ciências básicas e os ODS. Esta ação visa sensibilizar os decisores políticos e económicos, bem como o público em geral, da importância de considerar as ciências básicas como base das estratégias para a consecução da Agenda 2030. De facto, a compreensão do impacto que os mais de 7,8 mil milhões de pessoas que vivem atualmente no planeta têm no clima, nos ambientes terrestres e ecossistemas aquáticos, e o planeamento de soluções de sucesso para limitar e reduzir esse impacto e melhorar a qualidade de vida a nível global, estarão incontornavelmente ancoradas nas ciências básicas.

Este ano, no dia 14 de março, data designada pela UNESCO como Dia Internacional da Matemática, celebrou-se a beleza e a relevância da matemática sob o tema “Matemática para um Mundo Melhor”, destacando o papel essencial que esta disciplina desempenha no alcance dos ODS da ONU. De geração em geração, está a ser construído um património de conhecimento que é fundamental para enfrentarmos os problemas do nosso tempo e que as gerações vindouras podem usar para resolver os desafios que enfrentarão.

A Agenda 2030 proclama-se como uma “Agenda das pessoas, pelas pessoas e para as pessoas”. Como membros da comunidade matemática e da sociedade civil, não devemos deixar de nos envolver na efetivação e aceleração do processo de implementação da Agenda.



SÍLVIA BARBEIRO
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

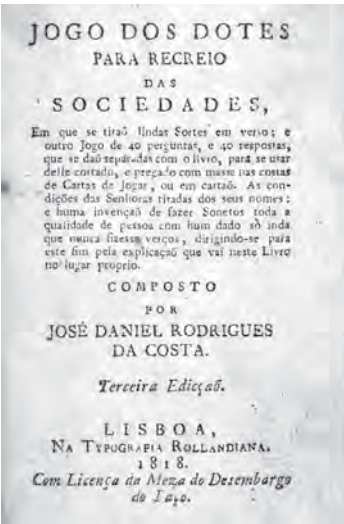
OULIPO AVANT LA LETTRE

José Daniel Rodrigues da Costa (1757-1832) foi um poeta coliponense contemporâneo (e rival) de Bocage. A sua obra é vasta, mas hoje vamos focar-nos numa sua invenção que surge na terceira edição da obra Jogo dos Dotes para Recreio das Sociedades (1818). Trata-se, nas suas palavras, de "uma invenção para qualquer pessoa fazer sonetos, ainda que nunca fizesse versos; e isto com um dado só". Raymond Queneau, quase 150 anos depois, produziu artefacto semelhante, bem mais difundido – Cent mille milliards de poèmes (1961).

Um soneto é formado por duas quadras e dois tercetos, num total de catorze versos. O gadget de José Daniel Costa consiste em lançar um dado cúbico vulgar para cada um dos versos e, de acordo com as pintas que saírem, escolher uma linha de texto de uma base de dados que fornece. Os versos foram planeados de maneira a que, qualquer que seja a combinação aleatória, o poema está bem construído, quanto à forma e ao conteúdo.

A base contém 6 x 14 = 84 versos:

Table with 3 columns of 14 numbered lines of text, representing the base for the sonnet game.



e a correspondência com os valores possíveis do dado é a seguinte:

Table mapping die faces (1-6) to specific lines of the sonnet base (1-84).

Et voilà! Temos uma máquina de produzir sonetos. Basta lançar o dado catorze vezes, um lançamento por cada verso, consultar a tabela acima e usar o texto fornecido. Quantos sonetos podemos formar? Naturalmente, 6^{14} , isto é, mais do que 78 mil milhões de sonetos diferentes!

Raymond Queneau, figura maior do movimento *Oulipo* (*Ouvroir de littérature potentielle*) foi um matemático e escritor que integrou o movimento Oulipo, assim como outros matemáticos e artistas. Regressaremos a este tema num futuro próximo. Por hoje, apresentemos a máquina de produzir sonetos de Queneau. Em vez de um dado, o autor oferece uma escolha de dez versões para cada verso, o que faz com que o seu aparato possa gerar 10^{14} poemas. O livro foi mesmo editado, apesar do aparente paradoxo de, em dez “páginas”, conter cem biliões de sonetos.

Neste momento, estamos a produzir uma materialização da máquina de José Daniel Rodrigues da Costa, que estará disponível ao público em breve e cujos pormenores aqui serão publicitados. O respetivo projeto inclui mais literatura lúdica que, esperamos, será interessante de explorar. Para já, podem contentar-se com uma implementação *online*, cortesia do nosso colega Pedro Freitas (<https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/pjfreitas/sonetos.html>), onde a sorte nos ditou a criação poética que aqui deixamos e que corresponde aos lançamentos do dado 3, 1, 2, 5, 6, 1, 6, 2, 2, 2, 2, 5, 5.

44 Ver finezas, e amor tudo baldado	▼
31 É flagelo de um peito generoso	▼
50 Nem pode ter um dia venturoso	▼
52 Quem para aflição tal foi criado	▼
15 Em fúnebres ideias engolfado	▼
84 Seu tormento se faz mais doloroso	▼
64 E a não ser um socorro portentoso	▼
40 Seu peito rasgará de alucinado	▼
16 Que dignos sois, mortais, de compaixão	▼
25 Todos querem seus gostos promover	▼
47 Mas acertados passos poucos dão	▼
09 Quem sua via alegre quiser ver	▼
81 Não dê nunca a mulheres atenção	▼
74 Que só fugindo evita o padecer	▼

Como exercício para os leitores, aqui deixamos um labirinto do século XVIII. A questão é a seguinte: de quantas formas se consegue ler a frase “Digníssimo Bispo do Porto”?



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Visite-nos em <https://clube.spm.pt>



DO ALGORITMO DE EUCLIDES AO TEOREMA DE QUILLEN-SUSLIN

Uma viagem iniciada no Livro VII dos *Elementos* de Euclides que vai até ao final do século XX.

1. INTRODUÇÃO

O 7.º Livro dos *Elementos* de Euclides, o primeiro dos livros aritméticos da obra, trata das questões de divisibilidade para números naturais. Depois de 22 definições básicas (incluindo número divisor de outro e múltiplo de outro, número primo e números primos entre si), a 1.ª Proposição afirma o seguinte:

Dados dois números diferentes, sendo subtraído o menor do maior e sucessivamente repetido esse processo, se o número que resta nunca dividir o anterior até que reste 1, os números originais são primos entre si.

O que isto quer dizer, em símbolos dos nossos dias, é o seguinte: sejam a e b dois números naturais diferentes. Sem perda de generalidade, podemos supor $a > b$. Proceda-se à seguinte sequência de divisões inteiras:

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ & & \vdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + 1. \end{aligned}$$

Então a e b são primos entre si.

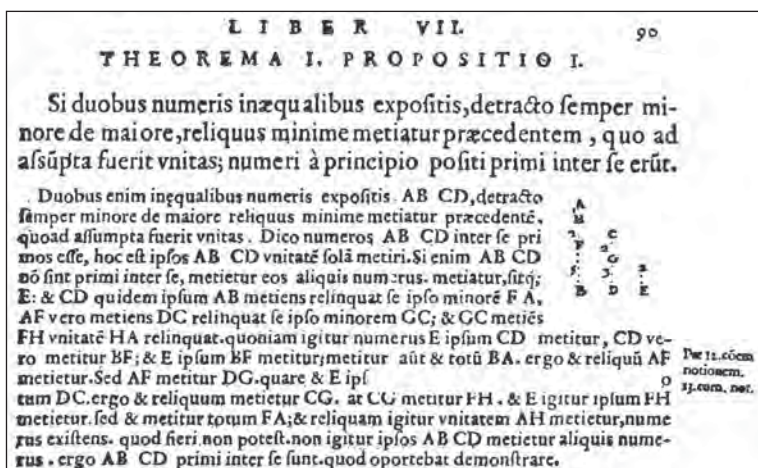


Figura 1. A 1.ª Proposição do 7.º Livro dos *Elementos* de Euclides, na famosa edição latina de Commandino [3].

Para provar esta afirmação, Euclides argumenta assim: se a e b não fossem primos entre si, existiria um divisor comum de a e b , digamos d , maior do que 1. Da primeira das igualdades acima concluímos que d divide o primeiro resto r_1 . Da segunda concluímos então que d divide r_2 . E assim sucessivamente, até concluirmos que d divide 1, o que é impossível. Logo, nenhum número maior do que 1 divide a e b e, portanto, estes números são primos entre si.

A 2.^a Proposição tem, como muitas outras nos *Elementos*, a forma de um problema:

Dados dois números não primos entre si, encontrar o maior dos seus divisores comuns.

A resolução usa um procedimento análogo ao utilizado para provar a 1.^a Proposição. Sejam a e b dois números não primos entre si. Se b dividir a , é um divisor comum de ambos e é manifestamente o maior dos divisores comuns. Se b não dividir a , proceda-se à seguinte sequência de divisões inteiras:

$$\begin{aligned} a &= q_1b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b &= q_2r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_3r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Repetindo este processo, chegar-se-á a um número que divide o anterior, isto é, a uma divisão com resto 0:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k. \end{aligned}$$

Isto porque não se pode chegar a um resto igual a 1, pois nesse caso, pela 1.^a Proposição, a e b seriam primos entre si, contra a hipótese. Por outro lado, os restos não podem permanecer sempre positivos, porque cada um é menor do que o anterior.

Euclides afirma que r_k (o último resto não nulo) é o maior dos divisores comuns de a e b .

Por um lado, r_k é um divisor comum de a e b : da última igualdade vemos que divide r_{k-1} ; da penúltima concluímos então que divide r_{k-2} ; e assim sucessivamente até às primeiras igualdades, que permitem concluir que r_k divide a e b .

Por outro lado, r_k é o maior dos divisores comuns de a e b : se não fosse, existiria um divisor comum de a e b , digamos g , maior do que r_k . Da primeira igualdade concluímos que g divide r_1 ; da segunda, que g divide r_2 ; e

assim sucessivamente, até concluirmos que g divide r_k , o que não pode ser, pois g é maior que r_k .

A este procedimento para encontrar o maior divisor comum chama-se "algoritmo de Euclides".

Na 3.^a Proposição, Euclides resolve o mesmo problema para três números, ficando claro que a técnica utilizada permite achar o maior divisor comum de quantos números se quiser.

Deixemos os *Elementos* e venhamos para os nossos dias. É óbvio que a noção de maior divisor comum pode ser apresentada para quaisquer inteiros a e b não ambos nulos. Usamos a notação $\text{mdc}(a, b)$, e analogamente para mais do que dois números. Registemos algumas propriedades simples:

- ▶ $\text{mdc}(a, 0) = |a|$,
- ▶ $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a) = \text{mdc}(a, -b)$,
- ▶ $\text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{mdc}[\text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n]$.

Uma consequência interessante do algoritmo de Euclides é a seguinte:

Teorema. *Sejam a e b inteiros não ambos nulos e seja d o seu maior divisor comum. Então existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$.*

Demonstração. Podemos supor a e b positivos. Olhemos para as igualdades que escrevemos a propósito da 2.^a Proposição dos *Elementos*. Da penúltima tiramos

$$r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1}.$$

Da antepenúltima sai então que

$$r_k = -q_k r_{k-3} + (1 + q_k q_{k-1}) r_{k-2}.$$

Prosseguindo deste modo, chegamos a uma igualdade da forma $r_k = ax + by$.

Exemplo. Sejam $a = 399$ e $b = 168$. Tem-se

$$\begin{aligned} 399 &= 2 \times 168 + 63 \\ 168 &= 2 \times 63 + 42 \\ 63 &= 1 \times 42 + 21 \\ 42 &= 2 \times 21. \end{aligned}$$

Logo, $\text{mdc}(399, 168) = 21$. Usando os cálculos feitos, tem-se

$$\begin{aligned}
21 &= 63 - 42 \\
&= 63 - (168 - 63 \times 2) \\
&= 63 \times 3 - 168 \\
&= (399 - 168 \times 2) \times 3 - 168 \\
&= 399 \times 3 - 168 \times 7.
\end{aligned}$$

É óbvia a generalização deste resultado para mais do que dois inteiros.

O Teorema que acabámos de descrever costuma ser associado ao nome de Étienne Bézout (1730-1783). De facto, Bézout provou-o não para inteiros mas para polinómios numa variável [1], cuja teoria de divisibilidade é totalmente análoga à dos inteiros. Voltaremos a este assunto adiante.

E aqui chegamos ao tema principal deste artigo.

Da Álgebra Linear elementar recordamos que, dada uma matriz quadrada A e sendo $\text{adj}(A)$ a sua adjunta, vale a igualdade

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I,$$

onde I é a matriz identidade. Daqui sai imediatamente que A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

Suponhamos agora que só nos interessam matrizes inteiras, isto é, matrizes cujos elementos são números inteiros. A igualdade acima continua a ser verdadeira e, se A for inteira, $\text{adj}(A)$ também é e $\det(A)$ é obviamente um número inteiro. Mas agora a condição $\det(A) \neq 0$ já não garante a invertibilidade de A , isto é, que A^{-1} seja também inteira. De facto, tem-se:

Teorema. *Uma matriz inteira A é invertível (mantendo-nos dentro dos inteiros) se e só se $\det(A)$ for um inteiro invertível, isto é, se e só se $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.*

Demonstração. A suficiência é óbvia. Para provar a necessidade, suponhamos que A é invertível. Então A^{-1} é inteira e, portanto, $\det(A^{-1})$ é um número inteiro. Mas $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, que só é inteiro se $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

Vamos finalmente ao problema que nos interessa. Só trabalhamos com matrizes inteiras. Sejam dados dois inteiros a e b quaisquer. Coloquemo-los na primeira linha de uma matriz 2×2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ * & * \end{bmatrix}.$$

A pergunta é: quando é que podemos encontrar dois inteiros, a colocar nas posições indicadas com *, de forma a

obter uma matriz invertível?

A resposta segue de afirmações que já fizemos: tal é possível se e só se a e b forem primos entre si, isto é, se $\text{mdc}(a, b) = 1$. De facto, se a e b forem primos entre si, existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$. Então o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -y & x \end{bmatrix}$$

é igual a 1 e portanto esta matriz é invertível.

Reciprocamente, se for possível completar a linha $[a \ b]$ a uma matriz 2×2 invertível, a e b têm de ser primos entre si: se não fossem, isto é, se tivessem um divisor comum $d > 1$, então essa matriz 2×2 teria o determinante múltiplo de d e portanto não seria invertível.

Exemplo. Como $399 \times 3 - 168 \times 7 = 21$, tem-se $19 \times 3 - 8 \times 7 = 1$ e, portanto, 19 e 8 são primos entre si. A matriz

$$\begin{bmatrix} 19 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

tem determinante 1 e, logo, é invertível. A sua inversa é

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -7 & 19 \end{bmatrix}.$$

Temos assim o Teorema de Bézout – consequência directa do algoritmo de Euclides – reinterpretado como uma afirmação sobre matrizes inteiras: a resposta à questão do completamento a uma matriz invertível de uma linha cujos elementos são primos entre si.

A mesma questão de completamento pode colocar-se para matrizes $n \times n$, com n qualquer, e para linhas arbitrárias. Concretamente, tem-se o seguinte resultado [4]:

Teorema. *Seja n um número natural ≥ 2 . Sejam a_1, a_2, \dots, a_n inteiros quaisquer e seja d o seu maior divisor comum. Então existe uma matriz inteira cuja primeira linha é $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ e cujo determinante é d .*

Demonstração do Teorema. O raciocínio é feito por indução sobre n . O caso $n = 2$ é trivial, sendo consequência imediata da observação feita acima. Suponhamos a afirmação verdadeira para $n - 1$.

Seja A_1 uma matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ com primeira linha $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1}]$ e determinante $d_1 = \text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Como $d = \text{mdc}(d_1, a_n)$, existem inteiros x e y tais que $d_1x + a_ny = d$. Ponhamos

$$A = \begin{bmatrix} & & & a_n \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ & A_1 & & \\ -\frac{a_1 y}{d_1} & \dots & -\frac{a_{n-1} y}{d_1} & x \end{bmatrix}.$$

Então A é uma matriz $n \times n$ inteira e a sua primeira linha é $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$. Se aplicarmos o Teorema de Laplace à última coluna de A , vemos que $\det(A) = d$, como desejado.

Corolário. *Sejam a_1, a_2, \dots, a_n inteiros primos entre si. Então existe uma matriz inteira invertível cuja primeira linha é $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$.*

Todas as afirmações feitas até aqui sobre números inteiros permanecem válidas, com as adaptações óbvias, para o conjunto $\mathbb{K}[t]$ dos polinómios numa variável t com

coeficientes num corpo \mathbb{K} . A observação crucial para esse efeito é que existe, para polinómios, um algoritmo de divisão análogo ao dos inteiros, com a adaptação de que, numa divisão de polinómios, o grau do polinómio resto é inferior ao grau do polinómio divisor.¹

Quanto à afirmação sobre as matrizes invertíveis, ela muda apenas na identificação dos polinómios que têm inverso multiplicativo, que são obviamente os polinómios não nulos de grau 0 (isto é, constantes).

Mas podemos ir ainda mais longe. Se analisarmos a demonstração do último teorema, vemos que, na realidade, para o provarmos não precisamos directamente do algoritmo de Euclides, mas apenas do Teorema de Bézout, isto é, da possibilidade de exprimir o máximo divisor comum dos elementos a_1, a_2, \dots, a_n (inteiros ou polinómios) na forma $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$.

Esta observação sugere que o teorema de completamento permanece válido se trabalharmos com matrizes cujos elementos pertençam a um anel onde seja válido o Teorema de Bézout. Isso é garantido, por exemplo, na classe dos chamados "domínios de ideais principais". Como o nome indica, trata-se de domínios de integridade onde todos os ideais são principais, isto é, são gerados por um único elemento. Se pensarmos em elementos a_1, a_2, \dots, a_n não todos nulos num tal anel, o ideal que eles geram é necessariamente principal. É simples ver que um gerador d desse ideal pode escrever-se na forma $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ e é um máximo divisor comum dos elementos a_1, a_2, \dots, a_n . (Notem-se os artigos indefinidos antes de "gerador" e de "máximo divisor comum"; de facto, neste contexto geral, deixa de haver unicidade, o que de resto já acontecia no caso dos polinómios.)

E para anéis mais gerais, em que o Teorema de Bézout pode falhar? Aqui tudo fica mais difícil. Em 1957, Jean-Pierre Serre, medalha Fields em 1954, conjecturou [7], na linguagem dos módulos, que as coisas se mantêm para anéis de polinómios $\mathbb{K}[t_1, t_2, \dots, t_s]$ em qualquer número s de variáveis² com coeficientes num corpo \mathbb{K} . A conjectura de Serre era a de que, se tivermos elementos a_1, a_2, \dots, a_n primos entre si num tal anel, existe uma matriz invertível no anel com primeira linha $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$.

A conjectura de Serre veio a ser provada em 1976, independentemente, por Daniel Quillen, medalha Fields em 1978 [6], e Andrei Suslin [8]. Uma demonstração simplificada, cabendo em poucas páginas, pode ser encontrada na 3.ª edição do livro *Algebra*, de Serge Lang [5].

Problemas de completamento a matrizes invertíveis sobre variados tipos de anéis são analisados em [2].

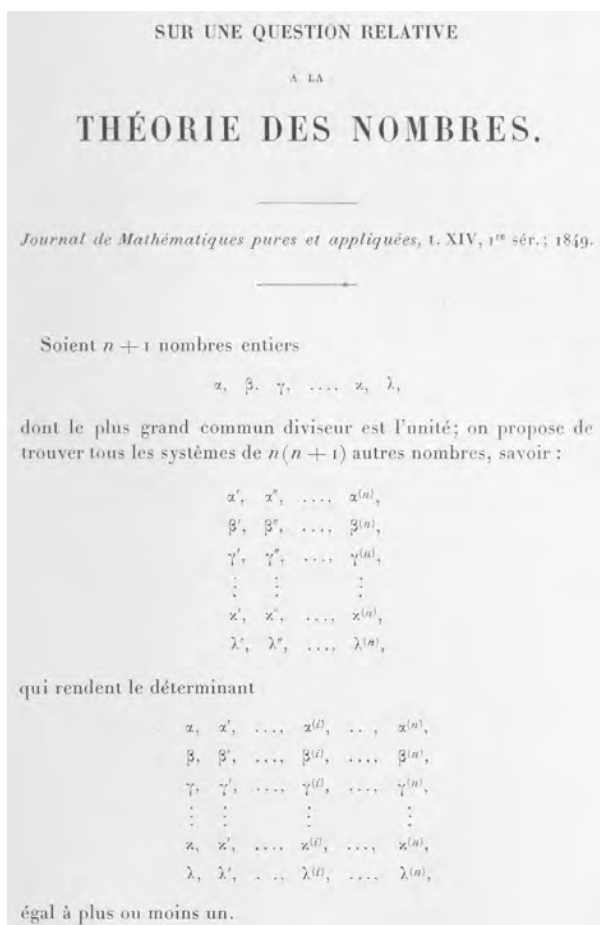


Figura 2. Primeira página de [4].

Agradeço a Thomas J. Laffey a indicação da referência [5].

REFERÊNCIAS

[1] Étienne Bézout, *Théorie Générale des Équations Algébriques*, Paris, Ph.-D. Pierres, 1779.

[2] M. Graça Duffner e Fernando C. Silva, "On the Existence of Unimodular Matrices with a Prescribed Submatrix", *Linear Algebra Appl.* 515 (2017), 321-330.

[3] *Euclidis Elementorum libri XV*, tradução latina de Federico Commandino, Pesaro, Jacobus Chriegher, 1572.

[4] Charles Hermite, Sur une Question Relative à la Théorie des Nombres, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 14 (1849), 21-30.

[5] Serge Lang, *Algebra*, 3.^a edição, Reading, Addison-Wesley, 1993.

[6] Daniel Quillen, "Projective Modules over Polynomial Rings", *Invent. Math.* 36 (1976), 167-171.

[7] Jean-Pierre Serre, *Modules Projectifs et Espaces Fibrés à Fibre Vectorielle*, Paris, Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, Fasc. 2, Exposé 23 (1957/58), 18 pp.

[8] Andrei Suslin, "Projective Modules over Polynomial Rings are Free", *Soviet Math. Dokl.* 17 (1976), 1160-1164.

¹ Tendo em vista esta mudança de contexto, é habitual dizer "máximo divisor comum" em vez de "maior", e defini-lo como um divisor comum que é múltiplo de qualquer outro divisor comum.

² Para $s > 1$, estes anéis já não são de ideais principais. Por exemplo, em $\mathbb{K}[t_1, t_2]$ o ideal gerado por t_1 e t_2 não é principal e o Teorema de Bézout falha.

29 out
30 out
2021

VIII Feira da Matemática

MUHNAC
UNIVERSIDADE
DE LISBOA

Todos os
públicos

**SEXTA FEIRA
29 OUTUBRO**

Dirigido ao
público escolar

**SÁBADO
30 OUTUBRO**

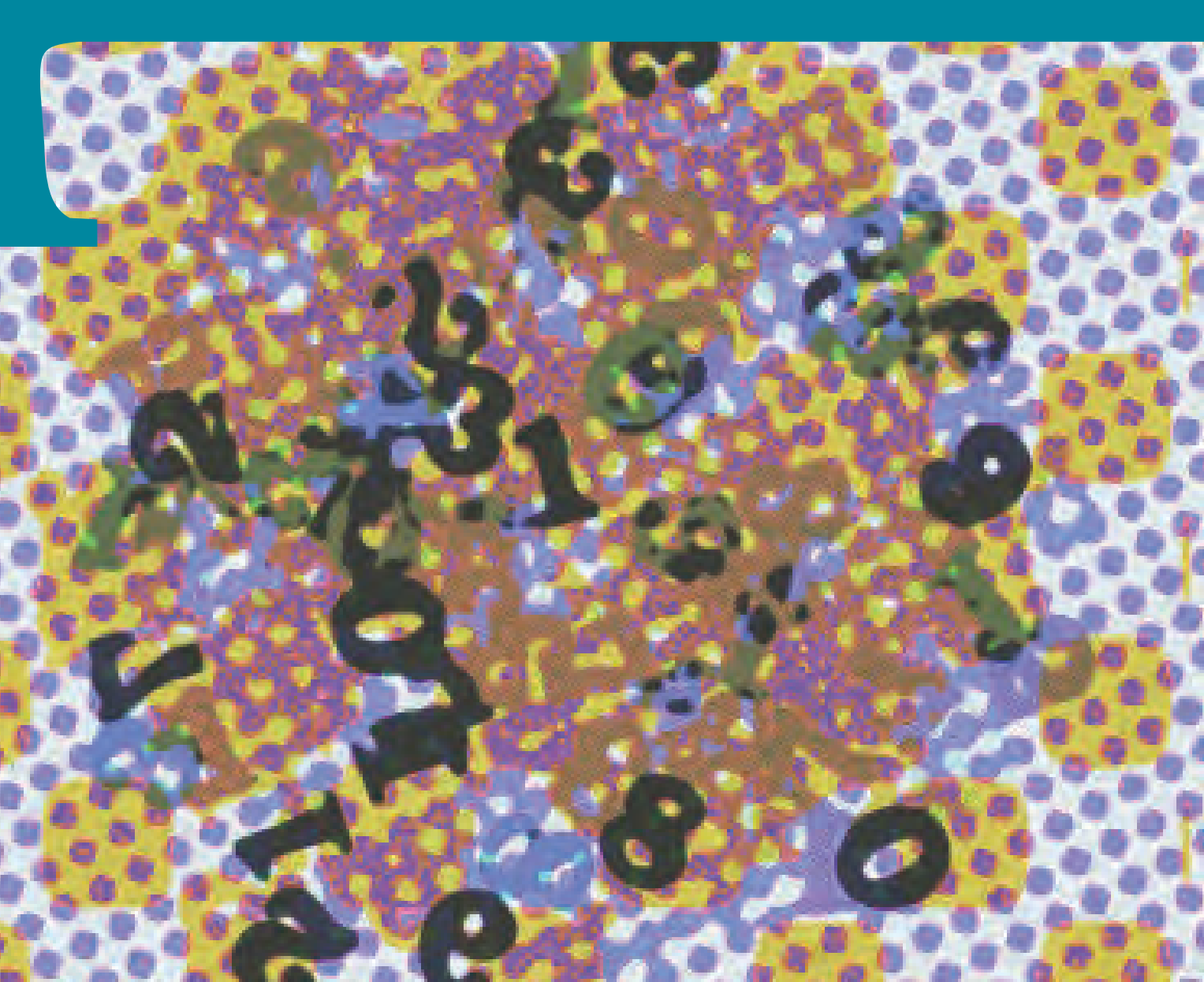
Dirigido a famílias
e público geral

**MARQUE JÁ NA
SUA AGENDA!
PARTICIPAÇÃO GRATUITA**



museus.ulisboa.pt

**Informações e marcações
geral@museus.ulisboa.pt
213 921 808**



AS FORMAS DOS NÚMEROS

DANIELA TAVARES

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

danielatavares97@hotmail.com

Os números têm formas. Bem, pelo menos alguns. Por exemplo, temos números triangulares, quadrados, retangulares, pentagonais, entre outros. Aos números tais que conseguimos formar um polígono regular com o seu respetivo número de pontos dá-se o nome de *números poligonais*.



Figura 1. 3, 4 e 5 são números poligonais.

O estudo destes números começou ainda muito antes de Pitágoras¹. Sabe-se que os babilónios, os indianos e os gregos já teriam demonstrado todos, independentemente o tão conhecido, e assim nomeado, Teorema de Pitágoras, agora tradicionalmente estudado no Ensino Básico. Para ele, o conceito de número poligonal proveio do conceito de gnomo. Um *gnomo* é uma figura composta pela justaposição de figuras com a mesma forma tal que, ao se justapor uma nova dessas figuras, se obtém uma figura com a mesma forma do gnomo original. A imagem seguinte é o exemplo de um gnomo, visto que quando acrescentamos cada conjunto de pontos continuamos a ter um quadrado, mas maior.²

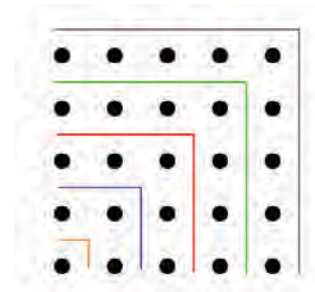


Figura 2. Gnomo.

Este é um argumento geométrico interessante para demonstrar uma propriedade que todos aqueles que conhecem o método de indução já provaram. A propriedade é:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Os números triangulares são um exemplo de números poligonais, sendo o n -ésimo número triangular, T_n , dado por $\frac{n(n+1)}{2}$, como se vê pela justificação dada na figura abaixo – que corresponde à soma dos n primeiros números naturais.



De acordo com este facto, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} T_n + T_n &= (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n) + (n + (n - 1) + \dots + 2 + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + n - 1) + \dots + (n - 1 + 2) + (n + 1) \\ &= (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1). \end{aligned}$$

Logo,

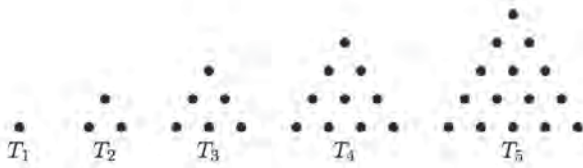
$$2T_n = n(n + 1) \iff T_n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Assim, os cinco primeiros números triangulares são 1, 3, 6, 10 e 15.

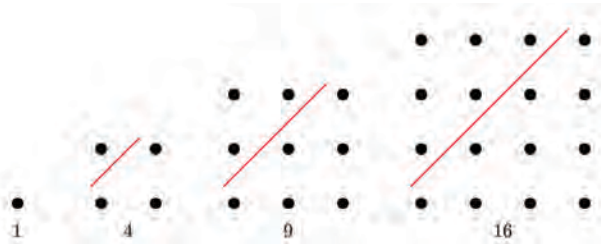
Quando nos pomos sobre os ombros de gigantes, o resultado pode ser incrivelmente belo. É o caso do Teorema dos Números Pentagonais de Euler, que é o teorema a que pretendemos chegar. Para tal, começamos por falar da história dos números com formas, descobertos por Pitágoras (ou talvez não...).

¹ <https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem>, <https://www.ima.umn.edu/press-room/mumford-and-pythagoras-theorem>.

² Para mais informações sobre a história dos números poligonais ver <https://core.ac.uk/download/pdf/77977823.pdf> e <http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/PolyNums.pdf>.



Existe uma relação interessante entre os números triangulares e os números quadrados. De facto, qualquer quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos, ou seja, $Q_n = T_n + T_{n-1}$, em que Q_n é o n -ésimo número quadrado. Esta igualdade também é conhecida como fórmula de Theon e é bastante intuitiva de uma perspetiva geométrica, como se mostra na figura abaixo.



Além disso, não é difícil ver que $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$.

A partir dos números quadrados e triangulares é possível obter os números pentagonais, que são dados pela fórmula $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. Isto é possível, uma vez que $P_n = Q_n + T_{n-1}$. Uma prova geométrica deste facto é dada abaixo:

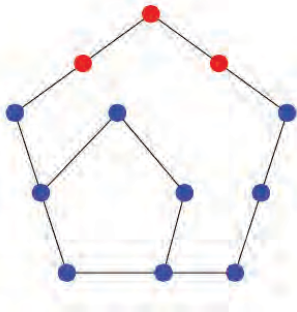
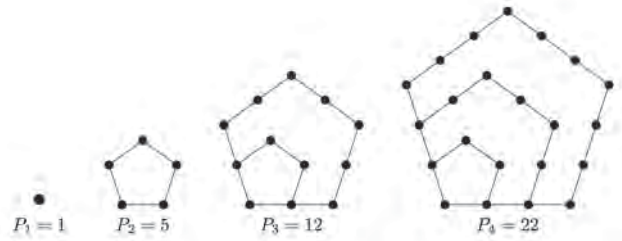


Figura 3. Ilustração da identidade $P_n = Q_n + T_{n-1}$ para o caso $n = 3$.

Assim, conforme anunciado,

$$P_n = Q_n + T_{n-1} = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Deste modo, os primeiros cinco números pentagonais são 1, 5, 12, 22 e 35.



Fermat chegou a conjecturar o número de números poligonais necessário para obter um qualquer número natural. No entanto, foi Cauchy, em 1813, que provou esta conjectura. Hoje, o teorema é designado por alguns por teorema dos números poligonais de Fermat e por outros por teorema dos números poligonais de Cauchy. Este teorema afirma que todo o número natural é a soma de, no máximo, n números n -gonais. Gauss provou o caso particular de todo o número natural poder ser expresso como a soma de três números triangulares. Por exemplo, $13 = 6 + 6 + 1$.

Outro caso também bastante importante historicamente é o teorema dos quatro quadrados de Lagrange, provado em 1770, que afirma que todos os números naturais, maiores do que zero, podem ser obtidos pela soma de, no máximo, quatro números quadrados. Por exemplo, $10 = 4 + 4 + 1 + 1$.

Outro resultado interessante é o de todo o número inteiro positivo poder ser escrito como a soma de dois quadrados e de um número triangular. E mais, todo o número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de dois números triangulares com um número quadrado [3]. Por exemplo, $5 = 1 + 1 + 3 = 3 + 1 + 1$.

Para se compreender melhor a importância dos números poligonais, vamos definir o conceito de partição.

Uma *partição* de um número inteiro (positivo), n , é uma representação de n como uma soma, não ordenada, de inteiros positivos. Seja $p(n)$ o número de partições de um dado n natural, definindo-se também que $p(0) = 1$. Tem-se que, por exemplo, $p(5) = 7$, visto que $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, não havendo qualquer outra forma de decompor $n = 5$ numa soma de números naturais. Cada elemento de cada partição é designado por *parte*. Por exemplo, 4 e 1 são as partes da partição 4+1.

Ainda podemos ir mais longe neste conceito de partição. Definimos $p_d(n)$ como o número de partições de n com partes distintas. Então, $p_d(n) = p_e(n) + p_o(n)$, em que $p_e(n)$ é o número de partições cujo número de partes é par e $p_o(n)$ é o número de partições cujo número de

partes é ímpar. Por exemplo, nas diferentes partições de 5, as partições 4 + 1 e 3 + 2 têm duas partes distintas, pelo que $p_e(5) = 2$. Como $p_d(5)$ é 3 – visto que 5, 4 + 1 e 3 + 2 são as únicas partições de 5 com partes distintas – resulta que $p_o(5) = 1$.

Mas por que se definiram estes conceitos todos? Será que há alguma relação entre as partições e algum dos números já vistos? A resposta é sim. Euler descobriu o que chamamos hoje de Teorema Pentagonal, cujo enunciado é

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{P_n} + x^{P'_n}),$$

sendo que, para todo o n , se tem $P'_n = P_n + n$. Deste modo, para exprimir $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)$ como uma soma, basta utilizar os números P_n . E o que é este P_n ? Isso mesmo, é a sequência dos números pentagonais! Assim,

$$P'_n = \frac{3n^2+n}{2} \text{ e } P_n = \frac{3n^2-n}{2}.$$

Estes números são chamados de números pentagonais generalizados. Consequentemente,

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{P_n} + x^{P'_n}),$$

é equivalente a ter-se

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{\frac{3n^2+n}{2}} + x^{\frac{3n^2-n}{2}}). \quad (1)$$

Ora, se expandirmos o produtório, obtemos $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots$. O que dizer sobre os coeficientes? Nesta série de potências, o coeficiente de x^k é:

$$\begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ não é um número pentagonal generalizado,} \\ (-1)^n, & \text{caso contrário, onde } n \text{ é tal que } k = \frac{3n^2 \pm n}{2}. \end{cases}$$

Por outro lado, o coeficiente de x^k é dado por $p_e(k) - p_o(k)$.³ Mas sendo assim, então podemos concluir que

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n))x^n.$$

Concluimos finalmente que

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(n) - p_o(n))x^n \\ &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1] Cañadas, Agustín; *On Sums of Figurate Numbers by Using Techniques of Poset Representation Theory*

[2] Cañadas, Agustín; *On Sums of Three Squares*

[3] Deza, Elena; Deza, Michel; *Figurate Numbers*. <https://arxiv.org/pdf/0812.0540.pdf>

[4] Bressoud, David M.; *Proofs and Confirmations (The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture)*

[5] Hardy, G.H.; Wright, E.M.; Heath-Brown, D.R.; Silverman, J.H.; *An Introduction to the Theory of Numbers*

[6] S. Wilf, Herbert; *Lectures on Integer Partitions*

[7] Cranston, Dan; *Euler's Pentagonal Number Theorem*

[8] University of St-Andrews, MT5821 *Advanced Combinatorics, Lecture 8*

SOBRE A AUTORA

Daniela Tavares é aluna da Licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Tem especial interesse em Teoria de Números e em História da Matemática.



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A ORIGEM DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Nem os antigos gregos pensaram em tudo nem a Idade Média foi um deserto matemático. Não havia indução matemática na Antiguidade, mas é uma invenção medieval.

As contribuições dos gregos da Antiga Grécia para a matemática são assombrosas. Houve um imenso salto qualitativo (e também quantitativo) entre os conhecimentos que os gregos herdaram de outras culturas (do Egito essencialmente) e aqueles que eles produziram. Uma imensa parte da matemática considerada elementar (e uma parte que não é pequena de matemática não elementar) vem daquele tempo e daquele lugar, isto se incluímos a matemática criada por pessoas de cultura grega a viver fora da Grécia propriamente dita.

No entanto, o princípio da indução matemática não era conhecido na Antiga Grécia e é provavelmente a técnica de demonstração mais empregue que não era conhecida pelos gregos.

Convém deixar claro que há muitas vezes uma grande dose de subjetividade quando se afirma que uma técnica matemática foi introduzida pela primeira vez por uma determinada pessoa. Há certamente demonstrações feitas na Antiga Grécia que podem ser vistas como sendo demonstrações por indução. O exemplo mais conhecido talvez seja a proposição 31 do livro VII dos *Elementos* de Euclides¹ que afirma que qualquer número natural composto tem algum fator primo. A demonstração de Euclides é a seguinte:

- ▶ seja A um número composto;
- ▶ visto que A é composto, tem algum divisor B maior do que 1;

- ▶ se B for primo, não há mais nada a demonstrar;
- ▶ caso contrário, B tem algum divisor C maior do que 1, o qual é necessariamente um divisor de A ;
- ▶ se este processo não desse origem a um número primo, o número A teria uma infinidade de divisores, o que não é possível.

Esta demonstração pode ser ligeiramente modificada, dando origem a uma demonstração baseada no *princípio da boa ordenação*: qualquer conjunto não vazio de números naturais tem um elemento menor ou igual a todos os outros. E uma tal demonstração pode sempre ser convertida numa demonstração feita por *indução forte*: dada uma sucessão $P(1), P(2), P(3), \dots$ de proposições, se:

- ▶ $P(1)$ for verdadeira;
- ▶ para cada $n \in \mathbb{N}$, se as proposições $P(1), P(2), P(3), \dots$ forem verdadeiras, então a proposição $P(n+1)$ também é verdadeira então todas as proposições da sucessão são verdadeiras.

Uma demonstração feita por uma técnica mais próxima daquilo que agora se designa por indução matemática foi feita por Al-Karajī (c. 953 – c. 1029), um matemático e engenheiro persa (veja-se [1, § 9.3.4]), que provou que, para cada número natural n , se tem

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2. \quad (1)$$

De facto, ele provou isto somente para $n = 10$, mas a sua demonstração baseia-se na hipótese que se tem (1) quando $n = 9$ e a mesma ideia aplica-se a qualquer número natural.

A demonstração baseia-se na figura 1. O quadrilátero $[ABCD]$ é um quadrado de lado $1 + 2 + \dots + 10$ (e, portanto, a sua área é $(1 + 2 + \dots + 10)^2$). Além disso, os quadriláteros $[AD'C'B']$ e $[AD''C''B'']$ são quadrados de lados $1 + 2 + \dots + 9$ e $1 + 2 + \dots + 8$ respetivamente. Finalmente, o quadrilátero $[A\hat{D}\hat{C}\hat{B}]$ é um quadrado de lado 1 (note-se que os tamanhos são inconsistentes).

Repare-se que o polígono $[D'DCBB'C']$ (trata-se de um *gnomon*) consiste num quadrado de lado 10 e em dois retângulos idênticos, cada um dos quais tem um lado de comprimento $1 + 2 + \dots + 9$ e um lado de comprimento 10. Logo, a sua área é igual a

$$10^2 + 2 \times 10 \times (1 + 2 + \dots + 9).$$

Mas, como Al-Karajī já sabia, $1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2}$. Logo, a área da figura é igual a $9 \times 10^2 + 10^2$, ou seja, é igual a 10^3 . Mas então o quadrado $[ADCB]$, cuja área é $(1 + 2 + \dots + 10)^2$, é formado por uma região cuja área é 10^3 e por um quadrado cuja área é $(1 + 2 + \dots + 9)^2$; por outras palavras:

$$(1 + 2 + \dots + 10)^2 = 10^3 + (1 + 2 + \dots + 9)^2.$$

E agora pode-se recommençar o processo com a figura $[D'D'C'B''C'']$ e com o quadrado $[AD''C''B'']$ e assim sucessivamente. Prosseguindo deste modo, chega-se ao que se quer provar.

É perfeitamente claro que este argumento pode ser facilmente alterado de modo a dar origem a uma de-

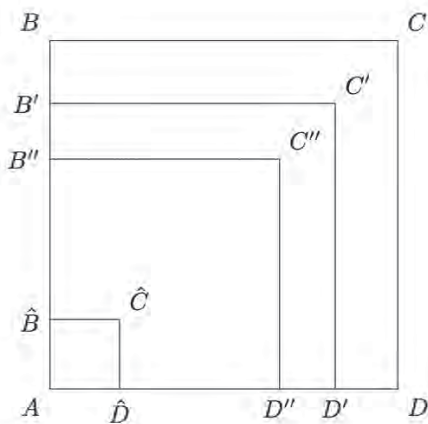


Figura 1.

monstração por indução matemática, tal como a conhecemos hoje. E isto leva a uma pergunta natural: quem foi a primeira pessoa a formalizar este método de demonstração? Se a pergunta fosse posta há um século (veja-se [2], por exemplo), a resposta seria Francesco Maurolico (1494 – 1575), que expôs o método de indução no seu livro *Arithmeticon libri duo* (1575).² E, de facto, este livro é o primeiro texto impresso sobre o tópico. Mas há um manuscrito bastante mais antigo sobre isto, a *Arte de Calcular*, escrito em 1322 por Levi ben Gershon (1288 – 1344), mais conhecido por Gersónides.³ O nome que ele dá a este método é “subindo passo a passo sem fim” e explica que, a fim de demonstrarmos que todas as proposições de sucessão $P(k), P(k + 1), P(k + 2), \dots$ são válidas, faz-se o seguinte:

1. prova-se que sempre que se tem $P(n)$, também se tem $P(n + 1)$ (aquilo que designamos por passo de indução);
2. prova-se que se tem $P(k)$.

Fora o facto de ser usual hoje em dia fazer-se isto pela ordem inversa (o que não altera nada, pois as propriedades anteriores são independentes uma da outra), nada há aqui que não nos seja familiar. E Levi ben Gershon demonstra por este método uma série de enunciados. Por exemplo, seja P_n o número de permutações de um conjunto com n elementos. Levi ben Gershon mostra que $P_{n+1} = (n + 1)P_n$, para cada número natural n , e usa isto para mostrar em seguida por indução que se tem sempre $P_n = n!$. Outro dos resultados que ele demonstra é a igualdade (1), que, como vimos, já fora demonstrada por Al-Karajī.

Convém saber que a *Arte de Calcular* foi apenas uma das muitas obras de Levi ben Gershon, que, além de matemático, era rabino, teólogo e astrónomo. Foi ele quem inventou a balestilha, um instrumento de navegação que foi muito usado na época dos descobrimentos. Levi ben Gershon escrevia somente em hebraico, mas pelo menos dois dos seus textos matemáticos foram traduzidos para latim ainda em vida dele.

Desconhece-se se Francesco Maurolico leu ou não o manuscrito de Levi ben Gershon. O método de indução foi-se espalhando cada vez mais e recebeu o seu nome atual quan-

¹Veja-se <https://mathcs.clarku.edu/djoyce/java/elements/bookVIII/propVII31.html>

²Sobre Maurolico, veja-se <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maurolico>

³Sobre Levi ben Gershon, veja-se <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Levil>

do Augustus de Morgan (1806 – 1871) assim o designou, num artigo publicado em 1838. Curiosamente, o nome que ele de facto aí sugeriu foi “indução sucessiva” mas a certa altura nesse artigo emprega a expressão “indução matemática”, a qual acabou por se tornar o nome do método em questão.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Victor J. Katz, *A. History of Mathematics: An introduction*. 3ª ed., Addison-Wesley, 2009
- [2] Giovanni Vacca, “Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **16** (1909), 70–73



Exposições (ma)temáticas da SPM.

Disponíveis para exibição nas escolas,
bibliotecas ou instituições similares*.

Mais Informações em
www.spm.pt/exposicoes

*A requisição das exposições tem custos de manutenção.

A MATEMÁTICA NO TRANSPORTE MARÍTIMO: AFETAÇÃO DE RECURSOS PORTUÁRIOS A NAVIOS

O transporte marítimo é o principal meio de transporte de mercadorias a nível global. Dadas as suas características específicas, esta forma de transporte levanta problemas logísticos complexos. Neste texto vamos discutir a resolução, com base na modelação matemática, do problema que ocorre nos portos e que integra as decisões de alocação dos navios às várias posições do cais e a otimização das operações de carga/descarga.

1. INTRODUÇÃO

Cerca de 80% do volume do comércio internacional de mercadorias é transportado por via marítima [6]. Esse transporte assume uma importância crucial para certas economias, como em arquipélagos, onde a dependência por esta forma de transporte é quase absoluta. O transporte marítimo integra vários problemas logísticos, desde problemas estratégicos, como a localização de infraestruturas portuárias, a aquisição de navios, etc., a problemas de natureza operacional, como a otimização das operações de carga e descarga.

Estes problemas são, frequentemente, complexos porque integram decisões de natureza diferente e que têm de ser consideradas em simultâneo. Um exemplo clássico é o problema da gestão dos *stocks* e da determinação das rotas dos navios que procedem ao seu abastecimento, quando uma mesma entidade é responsável quer pela gestão dos navios quer pela gestão dos *stocks*. Como exemplos deste problema, veja-se o da gestão e da distribuição de combustíveis em Cabo Verde, descrito em [1], ou o problema da gestão e da distribuição de ração em viveiros de salmão ao longo da costa norueguesa, descrito em [2].

Relativamente aos problemas de logística, o transporte marítimo é uma área em que as abordagens baseadas em modelos matemáticos podem apresentar algumas vantagens:

- i) O montante dos custos nas operações marítimas é muito elevado, pelo que, sempre que possível, é preferível uma abordagem exata para o planeamento que minimize os custos das operações em detrimento das abordagens, ditas heurísticas, que procuram obter rapidamente soluções para o problema comprometendo a qualidade da solução em termos de custos.
- ii) Muitos dos problemas logísticos, embora complexos, são de dimensões razoavelmente pequenas. Por exemplo, em problemas práticos de determinação de rotas, o número de navios num problema de roteamento marítimo (por vezes poucas unidades) é, em geral, bem inferior ao número de camiões em problemas de roteamento terrestre (por vezes dezenas). Como veremos adiante, a

dimensão dos problemas é um fator determinante na possibilidade ou não de recorrer a métodos exatos.

- iii) As operações marítimas (viagens, cargas/descargas) têm durações longas, pelo que o tempo disponível para o planeamento dessas operações é em geral maior do que em muitos outros problemas de logística, podendo, em muitos casos, demorar várias horas ou dias.

Portanto, métodos exatos de otimização baseados em modelos matemáticos, que são essencialmente enumerativos, requerendo tempos de cálculo computacional elevados, não devem ser imediatamente excluídos, como acontece em muitas outras situações práticas em que se pretendem técnicas de otimização bem mais rápidas que forneçam respostas à medida que a informação é recebida.

De entre os vários problemas que ocorrem no transporte marítimo, a gestão das operações portuárias é particularmente importante por fazer a ligação ao transporte terrestre. Aqui vamos abordar o problema da otimização das operações portuárias que integra as decisões de alocação dos navios às posições no cais e as decisões de afetação das gruas aos navios para carga/descarga. Estes dois tipos de decisões estão relacionados, pois quanto maior o tempo de carga/descarga, mais tempo estará o cais ocupado com esse navio. Por outro lado, o número de gruas é limitado pelo que é necessário decidir a que navios vão alocar-se as gruas e durante quanto tempo ficam a operar em cada navio. Este problema é ilustrado na figura 1. O custo diário associado à utilização de um navio é eleva-

do, pelo que se pretende que os navios passem o menor tempo possível nos portos.

O objetivo considerado será, portanto, o de minimizar o tempo total de permanência de um conjunto de navios nos portos.

Vamos ao longo do texto assumir as características do caso de estudo que motivou a abordagem a este problema, mais concretamente, vamos considerar o caso do porto de Aveiro aquando da ocorrência do estágio de mestrado relatado em [5] e do trabalho subsequente que deu origem ao artigo [3].

Usando este problema como motivação, expomos a importância que a teoria tem na modelação matemática para se conseguirem obter soluções, em tempo útil, para problemas práticos.

2. MODELO PARA O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE NAVIOS E DA AFETAÇÃO DE GRUAS

Alguns aspetos práticos e de modelação menos relevantes que tornariam a apresentação do modelo mais longa, como o espaçamento entre navios e tempos de segurança para executar manobras, a impossibilidade de as gruas trocarem de posição nos carris, serão aqui ignorados. Os detalhes podem ser consultados em [3].

Para facilitar a exposição, vamos separar a apresentação do modelo nas duas componentes, a alocação de navios e o escalonamento das gruas.

Alocação de navios

No problema de alocação de navios, a abordagem clássica consiste em considerar um diagrama espaço-tempo.

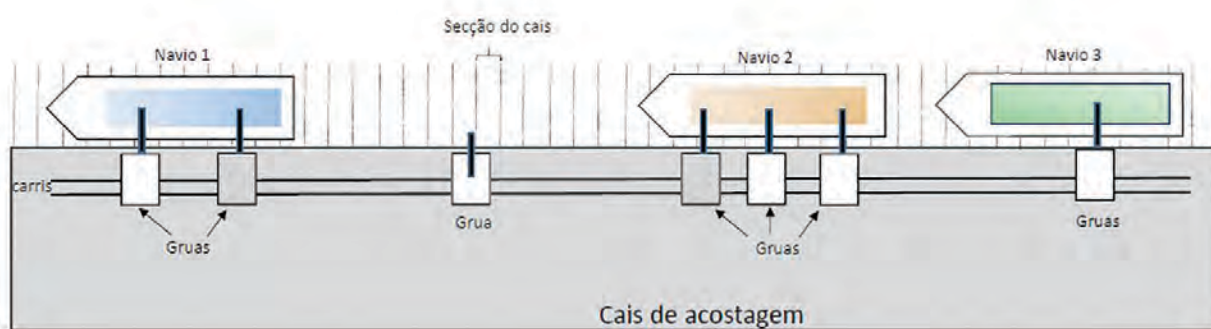


Figura 1. Exemplo das operações num cais, dividido em seções, com três navios e sete gruas (cinco de um tipo e duas de outro tipo), seis delas a operar.

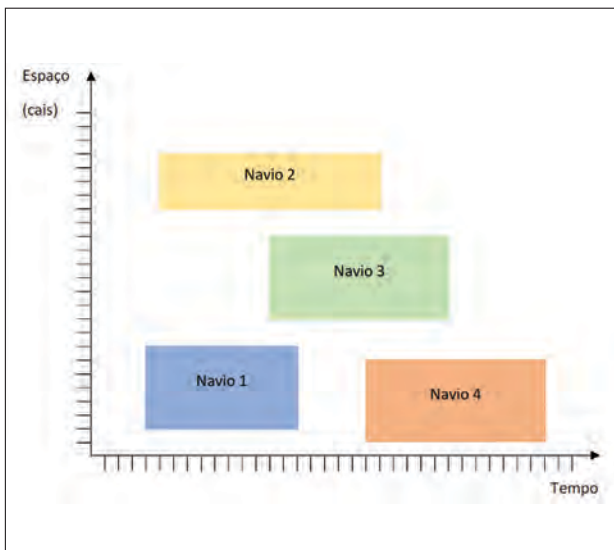


Figura 2. Exemplo da alocação de quatro navios. Os navios 1 e 4 usam algumas secções de cais em comum (há sobreposição no espaço), mas o seu serviço ocorre durante períodos disjuntos. Por outro lado, existe sobreposição temporal entre o serviço dos navios 1, 2, 3, mas estes navios foram alocados a espaços diferentes, isto é, alocados a conjuntos de secções do cais disjuntos.

O cais é dividido em J secções e o horizonte temporal é dividido em P períodos (neste caso horas), ver figura 2.

Consideremos os seguintes conjuntos: $V = \{1, \dots, N\}$ representa o conjunto dos navios; $T = \{0, \dots, P\}$ representa o horizonte temporal, dividido em períodos; e $B = \{0, \dots, J\}$ representa o conjunto das secções em que se encontra dividido o cais.

Seja A_k a hora de chegada do navio $k \in V$ ao porto, e H_k o comprimento do navio $k \in V$ medido em número de secções do cais (arredondado à unidade superior).

Para modelar a posição relativa dos navios no diagrama espaço-tempo, vamos seguir um dos modelos mais utilizados, conhecido por *Relative Position Formulation*. Este modelo (ver [4]) considera, para cada par de navios $k, \ell \in V$, as variáveis binárias $x_{k\ell}$, que assume o valor 1 se o navio ℓ é servido após o navio k ter partido e 0 caso contrário, e $y_{k\ell}$, que é 1 se o navio ℓ é alocado, no cais, a uma posição inferior (em termos das secções representadas no conjunto B) à do navio k e 0 caso contrário.

Para $k \in V$ definimos adicionalmente as seguintes variáveis inteiras: b_k indica a primeira posição no cais ocupada pelo navio k ; t_k indica a hora de início do serviço ao navio k ; e c_k indica a hora a que o navio k abandona o cais.

Além das restrições que indicam o domínio das variáveis

$$x_{k\ell}, y_{k\ell} \in \{0, 1\}, b_k, t_k, c_k \in \mathbb{Z}_0^+,$$

vamos definir as seguintes restrições lineares:

$$x_{\ell k} + x_{k\ell} + y_{\ell k} + y_{k\ell} \geq 1, k, \ell \in V, k < \ell, \quad (2.1)$$

$$x_{\ell k} + x_{k\ell} \leq 1, k, \ell \in V, k < \ell, \quad (2.2)$$

$$y_{\ell k} + y_{k\ell} \leq 1, k, \ell \in V, k < \ell, \quad (2.3)$$

$$t_\ell \geq c_k + (x_{k\ell} - 1)M, k, \ell \in V, k \neq \ell, \quad (2.4)$$

$$b_k \geq b_\ell + H_\ell + (y_{k\ell} - 1)M, k, \ell \in V, k \neq \ell, \quad (2.5)$$

$$t_k \geq A_k, k \in V, \quad (2.6)$$

$$b_k \leq J - H_k, k \in V. \quad (2.7)$$

As restrições (2.1) garantem que, pelo menos, uma das quatro situações tem de ocorrer: ou o navio ℓ é servido após o navio k ($x_{\ell k} = 1$); ou o navio k é servido após o navio ℓ ($x_{k\ell} = 1$); ou o navio ℓ é alocado a uma posição inferior à do navio k ($y_{\ell k} = 1$); ou o navio k é alocado a uma posição inferior à do navio ℓ ($y_{k\ell} = 1$). Deste modo garante-se que não existe sobreposição, simultaneamente, no tempo e no espaço. As restrições (2.2), (2.3) garantem que cada par de variáveis é mutuamente exclusivo (por exemplo, se $x_{k\ell} = 1$ então $x_{\ell k} = 0$). As restrições (2.4) relacionam as variáveis de tempo associadas aos navios $t_\ell, c_k, x_{k\ell}$. M é uma quantidade suficientemente grande. Se $x_{k\ell} = 1$ (o navio k é servido após o navio ℓ), então a restrição fica $t_\ell \geq c_k$, ou seja, a hora de início do serviço ao navio ℓ tem de ser superior à hora a que o navio k abandona o cais. Se $x_{k\ell} = 0$, a restrição fica redundante pois $t_\ell \geq c_k - M$ é implicada por $t_\ell \geq 0$, quando M é suficientemente grande. De forma análoga, as restrições (2.5) relacionam as variáveis de espaço associadas aos navios. As restrições (2.6) garantem que o navio começa a ser servido após chegar ao porto e as restrições (2.7) asseguram que o navio não excede o espaço disponível no cais (J secções).

Escalonamento de guias

No caso prático considerado, as guias têm diferentes capacidades e estão montadas no mesmo par de carris ao longo do cais, ver figura 1, e por isso têm um raio de ação limitado. Um navio pode ser servido simultaneamente por várias guias e estas podem mudar de posição e de navio de um período para o período seguinte, isto é, uma guia pode estar a trabalhar durante uma hora num navio e na hora seguinte estar a trabalhar noutro navio.

Seja $G = \{1, \dots, R\}$ o conjunto das guias. Assumimos que uma guia g pode ser afeta a um navio se o na-

vio está acostado no intervalo de alcance da grua. Esse intervalo é representado, em termos de secções do cais, por $[S_g, E_g]$. Consideremos adicionalmente os seguintes parâmetros: Q_k representa o volume de carga a operar no navio $k \in V$; P_g representa a taxa de processamento da grua $g \in G$ por período. Vamos igualmente considerar para cada $g \in G, k \in V, j \in T$ as seguintes variáveis binárias: z_{gk}^j é 1 se a grua g está afeta ao navio k no período j e 0 caso contrário.

O conjunto de restrições lineares é o seguinte:

$$\sum_{k \in V} z_{gk}^j \leq 1, j \in T, g \in G, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j \in T} \sum_{g \in G} P_g z_{gk}^j \geq Q_k, k \in V, \quad (2.9)$$

$$t_k \leq j z_{gk}^j + (1 - z_{gk}^j) M, j \in T, k \in V, g \in G, \quad (2.10)$$

$$c_k \geq (j + 1) z_{gk}^j, \forall j \in T, k \in V, g \in G, \quad (2.11)$$

$$b_k + H_k \leq E_g z_{gk}^j + (1 - z_{gk}^j) M, j \in T, k \in V, g \in G, \quad (2.12)$$

$$b_k \geq S_g z_{gk}^j, j \in T, k \in V, g \in G. \quad (2.13)$$

As restrições (2.8) asseguram que em cada período cada grua opera, no máximo, um navio. As restrições (2.9) garantem que as gruas afetas ao navio k são suficientes para operar toda a carga do navio. As restrições (2.10) são redundantes se $z_{gk}^j = 0$ e tornam-se activas quando $z_{gk}^j = 1$, garantindo que se a grua g foi afeta ao navio k no período j , isto é, se $z_{gk}^j = 1$, então a hora de início do serviço desse navio tem de ser anterior ou igual a j . As restrições (2.11) asseguram que se uma grua estava a operar o navio k no período j , então este navio apenas pode sair do cais no período $j + 1$ ($c_k \geq j + 1$). As restrições (2.12) e (2.13) asseguram que uma grua pode ser afeta a um navio se e só se esse navio está no alcance da grua.

A função objetivo consiste na minimização da soma das horas de partida de todos os navios:

$$\min \sum_{k \in V} c_k.$$

3. QUANDO A TEORIA ENTRA EM AÇÃO

O modelo de programação linear inteira apresentado na secção anterior pode ser resolvido usando métodos exactos como o *branch-and-bound* cujo objetivo consiste em, iterativamente, particionar o conjunto inicial das soluções admissíveis em subconjuntos, gerando uma árvore de enumeração, em que cada nó da árvore corresponde a um subproblema associado a um dos subconjuntos. A eficiência

deste tipo de métodos depende essencialmente da sua relaxação linear (modelo de programação linear obtido por remoção das restrições que obrigam as variáveis a ser binárias ou inteiras) pois em cada nó da árvore é resolvida a relaxação linear do correspondente subproblema. A dimensão da árvore depende da qualidade do minorante que se obtém ao resolver a relaxação. Quanto melhor o minorante menor vai ser a árvore de enumeração. Por esse motivo é importante desenvolver bons modelos que sejam capazes de fornecer bons minorantes.

Vamos aqui introduzir duas melhorias no modelo anterior que, como veremos posteriormente, têm impacto significativo na resolução do problema.

Modelo discretizado

O modelo apresentado na secção 2 é dos mais utilizados na literatura, contudo, do ponto de vista teórico é um modelo fraco, pois inclui as restrições (2.4) e (2.5) que são restrições de ligação de variáveis inteiras (ou em geral contínuas) com as variáveis binárias. Estas restrições baseiam-se na ideia de considerar a restrição ativa se a variável binária for 1, mas tornam a restrição redundante se a variável binária for 0, daí usar-se, por exemplo, em (2.4) um M elevado. Por esse motivo são também designadas por restrições de *big-M*. Ora, ao realizarmos a relaxação linear de um modelo deste tipo, as variáveis x e y deixam de ser binárias e passam a pertencer ao intervalo $[0,1]$. Neste caso é fácil de ver que se considerarmos, por exemplo, a solução fracionária $x_{lk} = x_{kl} = y_{lk} = y_{kl} = 1/4$, as restrições (2.1), (2.2) e (2.3) são satisfeitas e as restrições (2.4) e (2.5) passarão a ser redundantes na maioria dos casos, ou seja, num modelo linear estamos essencialmente a remover a ligação entre as variáveis binárias de alocação no espaço e no tempo e as variáveis inteiras. Naturalmente, isso origina valores de minorantes muito baixos, próximos de zero. Uma alternativa proposta em [3] é considerar um modelo que discretiza o tempo e o espaço. Vamos apresentar apenas o caso da discretização do tempo, pois a discretização do espaço é análoga.

Consideremos as seguintes variáveis para todo o $k \in V, j \in T$: α_k^j é 1 se o serviço no navio k é iniciado no período j e 0 caso contrário; β_k^j é 1 se o navio k está a ser servido no período j e 0 caso contrário. Assumimos que $\alpha_k^j = \beta_k^j = 0$ quando $k \in V, j \in T, j < A_k$. As variáveis t_k podem agora ser relacionadas com as variáveis α_k^j da seguinte forma:

$$t_k = \sum_{j \in T} j \alpha_k^j, k \in V.$$

O conjunto das desigualdades lineares é o seguinte:

$$c_k \geq (j+1)\beta_k^j, k \in V, j \in T, \quad (3.1)$$

$$\sum_{j \in T} \alpha_k^j = 1, k \in V, \quad (3.2)$$

$$\alpha_k^j \geq \beta_k^j - \beta_k^{j-1}, k \in V, j \in T, j > 1, \quad (3.3)$$

$$\alpha_k^1 \geq \beta_k^1, k \in V, \quad (3.4)$$

$$\alpha_k^j \leq \beta_k^j, k \in V, j \in T, \quad (3.5)$$

$$\alpha_k^j \leq 1 - \beta_k^{j-1}, k \in V, j \in T, j > 1, \quad (3.6)$$

$$x_{kl} + \beta_k^i + \beta_l^j \leq 2, k, l \in V, k \neq l, j, i \in T, i \geq j. \quad (3.7)$$

As restrições (3.1) asseguram que se o navio k está a ser servido no período j , então a hora de partida é, pelo menos, $j+1$. As restrições (3.2) asseguram que o navio k inicia o serviço durante o horizonte temporal. As restrições (3.3) forçam as variáveis α_k^j a ser, pelo menos, 1 se $\beta_k^j = 1$ e $\beta_k^{j-1} = 0$, portanto, se o navio está a ser servido em j mas não estava a ser servido em $j-1$ se $j > 1$ enquanto as restrições (3.4) modelam o caso $j=1$. As restrições (3.5) e (3.6) majoram o valor de α_k^j , obrigando esta variável a ser 0 caso o navio não esteja a ser servido em j ($\beta_k^j = 0$) ou caso o navio esteja já a ser servido em $j-1$ ($\beta_k^{j-1} = 1$). As restrições (3.7) são ativas apenas quando $x_{kl} = 1$. Neste caso, como o navio k é servido antes do navio ℓ , então se o navio ℓ está a ser servido no período j , o navio k não pode ser servido no intervalo $[j, J]$.

O modelo clássico tem a vantagem de ter menos variáveis e restrições do que o modelo discretizado. Portanto, em princípio, resolver a sua relaxação linear será muito mais rápido do que resolver a relaxação linear do modelo discretizado, ou seja, o minorante é nesse caso mais fácil de obter.

Contudo, os minorantes obtidos pelo modelo clássico vão ser piores, isto é, inferiores aos obtidos pelo modelo discretizado gerando extensas árvores de enumeração.

Desigualdades válidas

Outra forma de melhorar um modelo é adicionar restrições que não eliminem nenhuma solução admissível do problema, denominadas de desigualdades válidas. Vamos apresentar aqui um exemplo.

Seja L o número de tipos distintos de gruas (a cada tipo de grua corresponde uma taxa de processamento) e consideremos a partição de G de acordo com o tipo de gruas, ou seja, $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_L$. Para cada navio $k \in V$ a restrição (2.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{t=1}^L P_t' \gamma_{tk} \geq Q_k$$

onde P_t' é a taxa de processamento das gruas de tipo t , e a variável inteira

$$\gamma_{tk} = \sum_{g \in G_t} \sum_{j \in T} z_{gk}^j$$

representa o tempo total (em número de períodos) em que gruas do tipo t estão afetadas ao navio k . No caso em estudo existem dois tipos de gruas a que correspondem duas taxas de processamento, pelo que obtemos o seguinte conjunto:

$$X_K = \left\{ (\gamma_{1k}, \gamma_{2k}) \in \mathbb{Z}^2 \mid P_1 \gamma_{1k} + P_2 \gamma_{2k} \geq Q_k, \gamma_{1k}, \gamma_{2k} \geq 0 \right\}.$$

Desigualdades válidas para X_K podem ser convertidas em desigualdades válidas para o conjunto de soluções admissíveis inicial. As desigualdades válidas mais fortes são as que definem facetas, isto é, as que definem o envolvente convexo do conjunto X_K , denotado por $\text{conv}(X_K)$.

Consideremos o exemplo de um navio (por isso omitiremos o índice k) que tem de descarregar $Q = 2800$ toneladas. Suponhamos que as taxas de processamento são $P_1 = 250$ toneladas/hora e $P_2 = 320$ toneladas/hora. Então $X = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 250\gamma_1 + 320\gamma_2 \geq 2800, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0\}$.

Na figura 3, a tracejado está representado um segmento da reta $250\gamma_1 + 320\gamma_2 = 2800$, e a azul está representado $\text{conv}(X)$ incluindo as três facetas não triviais definidas pelas desigualdades: $\gamma_1 + 2\gamma_2 \geq 12$, $7\gamma_1 + 9\gamma_2 \geq 79$ e $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 9$.

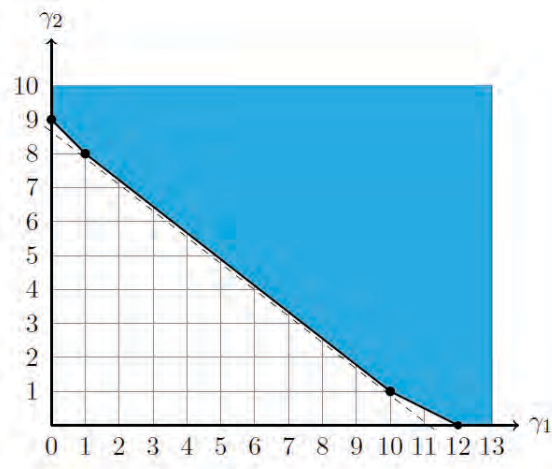


Figura 3. Facetas de $\text{conv}(\{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid 250\gamma_1 + 320\gamma_2 \geq 2800\})$.

4. CASO PRÁTICO: PORTO DE AVEIRO

O problema da alocação de navios que motivou o estudo aqui relatado, descrito em [5], baseou-se no terminal norte, que era o principal terminal polivalente do porto de Aveiro, com 900 metros de comprimento e sete gruas. O cais foi dividido em secções de 25 metros, originando assim um total de 36 secções. As cargas e os comprimentos dos navios considerados foram reais, mas os tempos entre chegadas ao porto foram encurtados de modo a tornar o problema mais difícil (o problema torna-se mais difícil quanto maior a congestão de navios no porto, portanto, quanto mais perto uns dos outros os navios chegarem), pois a previsão era a de que a atividade portuária iria aumentar no futuro. Foram assim criados nove casos de estudo (instâncias) com um número de navios a variar de sete até 15 e um horizonte temporal a variar de 50 até 65 horas.

Para estes nove casos, a diferença do valor dos minorantes obtidos usando as relaxações lineares dos dois modelos foi enorme. Essa diferença é usualmente medida pelo

$$Gap = 100 * \frac{Opt - m}{Opt},$$

onde Opt representa o valor ótimo, e m representa o valor do minorante. Em média o Gap foi de 96,3% no caso do modelo clássico e de apenas 8,4% no caso do modelo discretizado incluindo desigualdades válidas (algumas não discutidas aqui). Utilizando o *software* de otimização Xpress-IVE, com base no modelo clássico, não foi possível resolver até à otimalidade nenhuma das instâncias no tempo limite de uma hora. Contudo, com o modelo discretizado e adicionando desigualdades válidas, foi possível resolver todas as instâncias até à otimalidade, cinco

delas em menos de um minuto e em apenas uma foi necessário usar um pouco mais de dez minutos.

Mesmo usando bons modelos, as abordagens exatas para problemas NP-difíceis têm uma aplicação limitada a problemas reais de dimensões reduzidas, pois são abordagens cujo tempo computacional pode crescer exponencialmente com a dimensão do tamanho da instância em causa. Este é o argumento usualmente empregue por investigadores de outras áreas para justificar que se ignore abordagens baseadas na modelação matemática e se recorra a métodos computacionais heurísticos para resolver problemas práticos.

No nosso caso, para testar dimensões maiores, criou-se artificialmente (mas com base em dados reais de navios) 12 instâncias com o número de navios a variar de 15 a 40 e um horizonte temporal de 168 horas, o que origina instâncias muito maiores do que as da situação real, de modo a garantir que não fosse possível resolver todas as instâncias até à otimalidade. Para obter soluções para estas instâncias recorreu-se a uma *matheuristic*, isto é, uma técnica heurística baseada em modelos matemáticos. Quando as instâncias a resolver são de grande dimensão as *matheuristics* resolvem simplificações do modelo proposto. Para o caso em estudo, foi proposta em [3] uma técnica, denominada *rolling horizon*, que consiste em dividir o horizonte temporal em sub-horizontes e resolver sequencialmente o problema resultante em cada um desses sub-horizontes. Por vezes consideram-se sobreposições dos sub-horizontes. Relativamente aos horizontes já analisados, é usual fixar algumas ou mesmo todas as variáveis aos valores encontrados e relativamente aos horizontes futuros, é usual simplificar, por exemplo, relaxando o valor das variáveis inteiras em vez de as eliminar, ver figura 4.

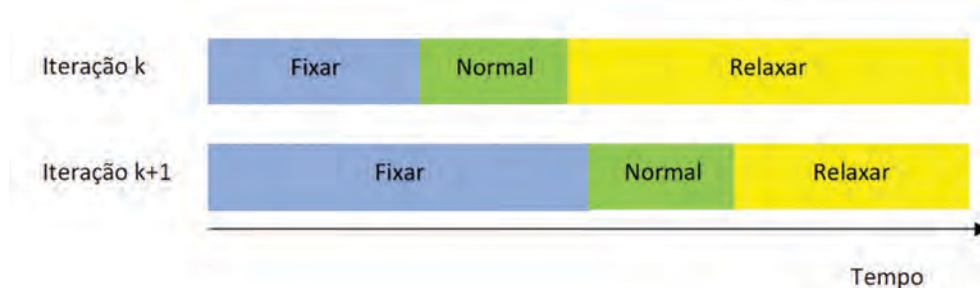


Figura 4. Heurística baseada no rolamento do horizonte temporal, onde numa parte (representada a azul) algumas variáveis são fixas, noutra parte (representada a verde) o modelo fica intacto, e na parte restante (representada a amarelo) o modelo é simplificado, por exemplo, relaxando todas as variáveis.

A *matheuristic* obteve soluções (não necessariamente ótimas) em menos de 10,5 minutos para todas as 12 instâncias e, nos cinco casos em que a solução ótima é conhecida, a heurística obteve essa solução. No caso da alocação de navios, este tipo de heurísticas produz usualmente boas soluções porque, frequentemente, as decisões de alocação de um navio dificilmente têm implicações nas decisões de alocação de outro navio que chega muitos períodos após o primeiro.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

Com este texto pretendemos mostrar uma área em expansão onde a matemática pode desempenhar um papel importante. Além das vantagens financeiras associadas à eficiência no transporte marítimo, convém lembrar que o transporte marítimo desempenha um papel ambiental importante, por ser ainda considerado uma das formas mais ecológicas de transporte, e desempenha um papel social, pois muitas economias dependem quase exclusivamente desta forma de transporte.

Com o problema apresentado pretendemos mostrar a relevância do estudo teórico e o impacto que esse estudo tem na resolução do problema prático. Foi também apresentado um exemplo de uma *matheuristic* para gerar soluções para problemas mais complexos. As *matheuristics* são relativamente recentes, têm tido maior visibilidade ao longo da última década, e vieram permitir que matemáticos sem grande experiência computacional desenvolvam, com alguma facilidade, soluções de boa qualidade para problemas práticos complexos, usando essencialmente modelos matemáticos e um *software* de otimização.

A título mais informal, dois comentários impõem-se relativamente à ligação de abordagens matemáticas a este tipo de problemas de otimização. Do lado científico, é por vezes complicado passar a mensagem da necessidade de analisar os modelos matemáticos junto dos investigadores que usualmente trabalham nos respetivos problemas práticos, e que frequentemente recorrem a abordagens computacionais. Do ponto de vista prático, embora, tal como se mostrou, seja razoavelmente fácil a um matemático implementar soluções para problemas complexos, a incorporação destas técnicas de otimização nas empresas nem sempre é fácil. Por exemplo, há muitas vezes a necessidade de interligar os algoritmos de otimização com os sistemas de informação da empresa. Outra dificuldade prende-se com o recurso a *software* eficiente de otimização para resolver problemas de programação linear inteira. Usualmente este *software* é bastante dispendioso e as ver-

sões mais acessíveis, como o Excel Solver, têm ainda algumas limitações que podem reduzir o impacto das abordagens matemáticas.

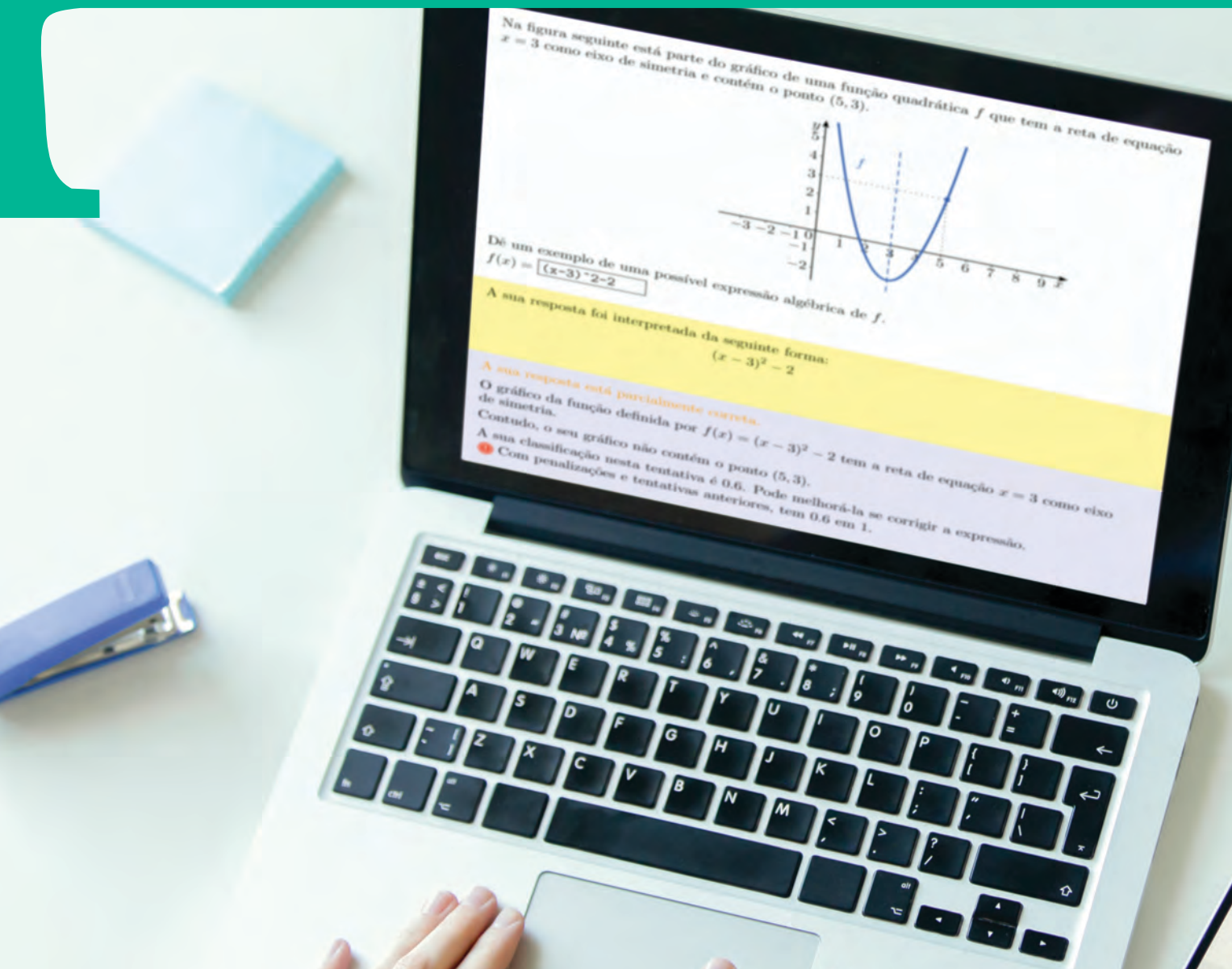
REFERÊNCIAS

- [1] Agra, A., Christiansen, M., Delgado A., "Mixed integer formulations for a short sea fuel oil distribution problem". *Transportation Science*, 47, 108-124, 2013.
- [2] Agra, A., Christiansen, M., Ivarsøy, K.S., Solhaug, I.E., Tomasgard, A., "Combined ship routing and inventory management in the salmon farming industry." *Annals of Operations Research* 253, 799-823, 2017.
- [3] Agra, A., Oliveira M., "MIP approaches for the integrated berth allocation and quay crane assignment and scheduling problem." *European Journal of Operational Research* 264, 138-148, 2018.
- [4] Guan, Y., Cheung R. K., "The berth allocation problem: models and solution methods." *OR Spectrum*, 26, 75-92, 2004.
- [5] Oliveira, M. S., "Porto de Aveiro: Modelos de afetação de recursos aos navios." Tese de Mestrado. Universidade de Aveiro, <http://hdl.handle.net/10773/16797>, 2014.
- [6] UNCTAD. "Review of maritime transport, 2020." United Nations. New York and Geneva, 2020.

Agostinho Agra tem doutoramento em Estatística e Investigação Operacional (especialização em Investigação Operacional) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É Professor Associado com Agregação no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Trabalha em modelos matemáticos de otimização e problemas práticos de Investigação Operacional.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

pt-maths-in@spm.pt



AVALIAÇÃO ONLINE PARAMETRIZADA NO ENSINO SUPERIOR DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19

RUI PAIVA^{1,2,3}, MILTON FERREIRA^{1, 4}, E MIGUEL FRADE^{3,5}

¹ DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DO POLITÉCNICO DE LEIRIA

² CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

³ CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM INFORMÁTICA E COMUNICAÇÕES

⁴ CENTRO DE INVESTIGAÇÃO E DESENVOLVIMENTO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES DA UNIVERSIDADE DE AVEIRO

⁵ DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA DA ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DO POLITÉCNICO DE LEIRIA

rui.paiva@ipleiria.pt, milton.ferreira@ipleiria.pt, milton.ferreira@ipleiria.pt

A adaptação do Ensino Superior às restrições impostas devido à pandemia de Covid-19 implicou a utilização de elementos de avaliação de conhecimentos realizados em regime online. Os testes convencionais de plataformas de ensino e aprendizagem são muito limitados no tipo de perguntas e pouco práticos na criação de diferentes versões das mesmas. Neste artigo descrevemos a experiência de implementação de testes e exames parametrizados na matemática do Ensino Superior durante o período de confinamento.

1. INTRODUÇÃO

O período de confinamento devido à pandemia de Covid-19 teve início oficial em Portugal durante o mês de março de 2020. Os professores viram-se obrigados a, num curto espaço de tempo, familiarizarem-se com as tecnologias do ensino para lecionar, avaliar, entre outras tarefas, em regime à distância. No Ensino Superior, os habituais testes e exames realizados presencialmente tiveram de ser adaptados para a modalidade online em muitas instituições. Câmaras ligadas, exames com várias versões, browsers bloqueados e avaliações orais por videoconferência são algumas das soluções adotadas para mitigar a fraude nas avaliações.

A generalidade das plataformas de ensino e aprendizagem permite a criação de testes online com diversos tipos de perguntas. Na avaliação em matemática as mais apropriadas são as perguntas de escolha múltipla, verdadeiro e falso, listas pendentes com várias alternativas, campos de entrada para introdução de expressões algébricas elementares e perguntas com possibilidade de anexar foto/digitalização da resolução. Em plataformas como o Moodle, a criação de várias versões dos testes e exames

pode ser feita através do trabalhoso processo de cópia e alteração manual das perguntas. A principal dificuldade apontada pelos professores é a implementação de determinados tipos de perguntas de forma adequada nas plataformas de ensino e aprendizagem convencionais.

Neste artigo apresentamos a experiência de implementação de exames de matemática parametrizados numa plataforma associada a um sistema de álgebra computacional (CAS). A proporção de questões que é possível transcrever de exames de matemática em papel para formato eletrónico é próxima de 100%.

2. MÓDULOS INTERATIVOS DE TREINO ONLINE

O MITO – “Módulos Interativos de Treino Online” (<https://mito.ipleiria.pt>) é um projeto de investigação e desenvolvimento do Instituto Politécnico de Leiria (IPL). Foi iniciado em 2010 com o principal objetivo de apoiar as unidades curriculares de matemática lecionadas no ensino presencial e no ensino à distância dos diferentes ciclos de oferta formativa do Ensino Superior através da construção de conteúdos didáticos interativos (Paiva [4]; Paiva, Ferreira, Eusébio e Mendes [6]; Paiva, Ferreira e Frade [5]). Um módulo interativo do MITO é constituído por apontamentos teóricos apoiados por aplicações dinâmicas, vídeos tutoriais e testes do STACK (https://moodle.org/plugins/qtype_stack), um software de avaliação assistida por computador para matemática que possibilita a criação de testes aleatórios com correção e avaliação automáticas (Sangwin [11, 13, 12]).

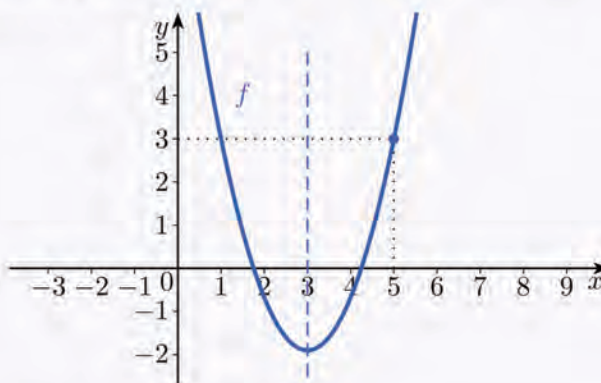
Os utilizadores principais dos conteúdos alojados no MITO são os alunos e professores do Departamento de Matemática (DMAT) da Escola Superior de Tecnologia e Gestão (ESTG) do IPL. Os vídeos tutoriais e os apontamentos teóricos apoiados por aplicações dinâmicas são os conteúdos mais acedidos. Os testes formativos do STACK são acedidos principalmente pelos alunos que realizam avaliação sumativa no MITO.

Para dar uma ideia das vantagens dos testes do STACK relativamente aos testes convencionais de plataformas de ensino e aprendizagem como o Moodle, apresentamos algumas das suas características. No STACK é possível criar questões dependentes de parâmetros definidos pelo autor. Por exemplo, podemos gerar um conjunto de perguntas envolvendo a função $f(x) = a(x - h)^2 + k$ onde $a \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, $h \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Existem, portanto, 294 versões semelhantes, mas não idênticas desta questão. Quando um aluno abre um teste com

cinco perguntas desse tipo, cada pergunta é escolhida entre as versões disponíveis na base de dados. Como resultado, é possível disponibilizar ao aluno, com relativa facilidade, uma quantidade razoável de testes de treino e de avaliação online. No STACK, os alunos podem enviar as suas respostas na forma de uma expressão matemática. Por exemplo, o aluno pode responder a uma pergunta introduzindo um polinómio, uma raiz quadrada, um logaritmo, etc.. Essencialmente, as expressões matemáticas recebidas são avaliadas usando o software livre Maxima (www.maxima.sourceforge.net). Este sistema de álgebra computacional manipula expressões simbólicas e numéricas e permite estabelecer as propriedades matemáticas das respostas dos alunos. Esse recurso é particularmen-

te útil quando a pergunta tem várias respostas corretas. O STACK inclui vários testes de resposta para comparar expressões, um verificador de sintaxe e fornece um feedback relacionado com a resposta do aluno. Este último recurso ajuda a manter a motivação dos alunos e pode facilitar o processo de raciocínio (Harjula, 2008). Na figura 1, apresentamos uma questão do STACK envolvendo a função descrita acima. Esta questão tem infinitas respostas corretas, inclui um gráfico aleatório e exemplifica o feedback formativo que acompanha a resposta. O gráfico aleatório tem 294 versões diferentes correspondentes às variações de a , h e k . Esta característica resulta de uma adaptação do código fonte para Moodle e STACK desenvolvido no âmbito do MITO (Paiva *et al.* [6]).

Na figura seguinte está parte do gráfico de uma função quadrática f que tem a reta de equação $x = 3$ como eixo de simetria e contém o ponto $(5, 3)$.



Dê um exemplo de uma possível expressão algébrica de f .

$$f(x) = \boxed{(x-3)^2-2}$$

A sua resposta foi interpretada da seguinte forma:

$$(x - 3)^2 - 2$$

A sua resposta está parcialmente correta.

O gráfico da função definida por $f(x) = (x - 3)^2 - 2$ tem a reta de equação $x = 3$ como eixo de simetria.

Contudo, o seu gráfico não contém o ponto $(5, 3)$.

A sua classificação nesta tentativa é 0.6. Pode melhorá-la se corrigir a expressão.

🚫 Com penalizações e tentativas anteriores, tem 0.6 em 1.

Figura 1. Pergunta aleatória do STACK

3. UTILIZAÇÃO DO MITO EM AVALIAÇÕES ONLINE

A maioria dos estudos defende que as avaliações online com feedback formativo contribuem para a aprendizagem do aluno e melhoram o seu desempenho no exame final do curso (Varsavsky [14]; Roth, Ivanchenko & Record [9]; Ruokokoski [10]; Rasila, Havola, Majander & Malinen [7]; Angus e Watson [1]; Huisman e Reedijk [2]; Rivera, Ochoa & Perez [8]; Pacheco-Venegas, López & Andrade-Aréchiga [3].). A plataforma do MITO é utilizada para a realização de testes formativos e sumativos e trabalhos de

casa online no DMAT da ESTG do IPL desde 2011 (Paiva [4]; Paiva *et al.* [6]; Paiva *et al.* [5]). A articulação de testes online realizados presencialmente, em laboratórios de informática, com testes presenciais proporciona uma melhoria considerável no envolvimento e no desempenho do aluno (Paiva *et al.* [5]).

Estudos recentes indicam que a transcrição de exames de matemática em papel para formato eletrónico é viável para uma proporção significativa das questões (Sangwin [12]). No 2.º semestre do ano letivo 2019-20 e no 1.º se-

Tabela 1. Dados de algumas avaliações online realizadas no MITO.

Unidade curricular	Curso	Denominação da prova	Peso na nota final	N.º de alunos	Correção automática	Correção manual
Estatística II	Licenciatura em Gestão	Trabalho 2	15%	186	100%	0%
Estatística II	Licenciatura em Gestão	Exame normal	100%	177	44%	56%
Estatística II	Licenciatura em Gestão	Exame de recurso	100%	76	42%	58%
Estatística II	Licenciatura em Gestão	Exame especial	100%	21	44%	56%
Álgebra linear	Licenciatura em Engenharia Informática	Prova escrita 1	35%	353	100%	0%
Fundamentos de Matemática	4 cursos CTeSP	Prova escrita 1	20%	141	80%	20%
Fundamentos de Matemática	4 cursos CTeSP	Prova escrita 2	20%	134	85%	15%
Análise Matemática	Licenciatura em Engenharia Informática	Trabalho escrito	5%	268	100%	0%
Análise Matemática	Licenciatura em Engenharia Informática	Prova 2	10%	250	100%	0%
Análise Matemática	Licenciatura em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores	Prova escrita 1	30%	91	60%	40%
Análise Matemática	Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial	Prova escrita 1	30%	53	60%	40%

mestre de 2020-21, como consequência da pandemia de Covid-19, a utilização do MITO para avaliações sumativas intensificou-se. Foram implementados no MITO testes e exames finais com até 100% de peso na nota final. A totalidade dos alunos de diferentes cursos de licenciatura de engenharia, gestão e cursos TeSP teve enunciados diferentes. Foi possível implementar integralmente as questões dos exames no MITO utilizando perguntas do STACK e itens com *upload* de fotos das resoluções ou campos de entrada de texto.

O processo de implementação de um exame online no MITO envolve as etapas de elaboração de um enunciado de exame convencional, escolha dos parâmetros aleatórios e programação das perguntas. A elaboração do enunciado é feita pelos docentes da disciplina e este é escrito preferencialmente em código LaTeX. As restantes etapas são realizadas pelos docentes membros do projeto MITO e envolvem programação em código Maxima interligado com LaTeX. A tabela 1 apresenta alguns dados relativos a algumas avaliações online realizadas no MITO nos dois últimos semestres. As perguntas com correção automática correspondem às perguntas do STACK, maioritariamente com campo de entrada de respostas na forma algébrica. As perguntas com correção manual incluem campos de escrita de texto ou possibilidade de anexar foto/digitalização da resolução da pergunta. Para facilitar a correção manual deste tipo de perguntas, o professor dispõe de resolução das versões disponibilizadas aos alunos.

4. CUSTOS E BENEFÍCIOS DA CONSTRUÇÃO DE TESTES ONLINE

A programação de perguntas do STACK dependentes de parâmetros é uma tarefa trabalhosa e complexa. Muitas vezes envolve resultados matemáticos mais avançados do que o assunto que se está a avaliar. Por outro lado, requer o domínio dos códigos LaTeX, Maxima, entre outros. Mesmo dispondo de questões modelo, a autonomia necessária para criar perguntas de raiz requer conhecimentos de programação e um investimento considerável de tempo da parte do professor de matemática. Entendemos que estes factos representam o principal obstáculo à utilização do STACK numa instituição. Para mitigar este problema, a Aalto University, na Finlândia, dispõe de dois funcionários com formação em matemática e programação que trabalham exclusivamente na transcrição dos exames em papel para formato eletrónico com perguntas do STACK.

A transcrição de um exame de matemática de 2h30 em

papel para formato eletrónico por um professor experiente no STACK demora, no mínimo, 4h. Como a totalidade ou uma boa parte do exame é corrigida automaticamente, a tarefa compensa quando o exame é realizado por algumas dezenas de alunos. Por outro lado, a aleatoriedade das perguntas permite que sejam reutilizadas em diferentes anos letivos, nomeadamente em minitestos online.

5. CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

Desde o início do confinamento em Portugal, os professores familiarizaram-se de forma considerável com as tecnologias do ensino. Quando a pandemia passar, estamos certos de que muitos dos conhecimentos adquiridos e recursos didáticos elaborados continuarão a ser utilizados nos ensinos Secundário e Superior. Relativamente aos testes sumativos online, poderão também ser realizados presencialmente em laboratórios de informática. A sua articulação com testes escritos convencionais pode melhorar o envolvimento e o desempenho do aluno. O investimento inicial na programação das perguntas com correção automática terá o seu retorno ao fim de dois anos letivos.

O trabalho futuro do projeto MITO inclui o desenvolvimento das parcerias que tem com diversas instituições de Ensino Superior nacionais e estrangeiras e a criação de novas parcerias. Relativamente ao ensino não superior, o ensino da matemática terá, em breve, um novo programa. A eventual aposta nos recursos tecnológicos a que todos os alunos podem aceder livremente não deverá ficar alheia aos testes de treino e de avaliação online.

REFERÊNCIAS

- [1] Angus, S.D.; Watson, J. "Does regular online testing enhance student learning in the numerical sciences? Robust evidence from a large dataset". *British Journal of Educational Technology*, 40(2) (2009), 255-272.
- [2] Huisman, R.; Reedijk, H. E. The impact of individual online tests in addition to group assignments on student learning. *Proceedings of the International Conference on Information Communication Technologies in Education*, 1 (2012), 654-667.
- [3] Pacheco-Venegas, N.D., López, G.; Andrade-Aréchiga, M. "Conceptualization, development and implementation of a web-based system for automatic evaluation of mathematical expressions." *Computers & Education*, 88 (2015), 15-28.

- [4] Paiva, Rui C. "Conteúdos didáticos multimédia, testes e exercícios de treino de Matemática online". *Boletim especial da Sociedade Portuguesa de Matemática* 1 (2011): 119-123.
- [5] Paiva, R.C.; Ferreira, M. S.; Frade, M. M. "Intelligent tutorial system based on personalized system of instruction to teach or remind mathematical concepts". *Journal of Computer Assisted Learning*, 33 4 (2017): 370-381.
- [6] Paiva, R.C.; Ferreira, M. S., Mendes, A. G.,; Eusébio, A. M. J. "Interactive and multimedia contents associated with a system for computer-aided assessment". *Journal of Educational Computing Research*, 52(2) (2015).
- [7] Rasila, A.; Havola, L.; Majander, H.; Malinen, J. "Automatic assessment in engineering mathematics: evaluation of the impact". In *Reflektori 2010: Symposium of engineering education. Teaching and Learning Development Unit.* (2010)
- [8] Rivera, Z.; Ochoa, R.; Perez, B.. Improving Student Results in a Statics Course using a Computer-based Training and Assessment System. Paper presented at IEEE: Frontiers in Education Conference (2013, October 23-26) doi: 10.1109/FIE.2013.6685165.
- [9] Roth, V.; Ivanchenko, V.; Record, N. "Evaluating student response to WeBWorK, a web-based homework delivery and grading system." *Computers & Education*, 50 (2008), 1462-1482.
- [10] Ruokokoski, J. *Automatic assessment in university-level mathematics* (MSc). Finland: Helsinki University of Technology (2009).
- [11] Sangwin, C. "Assessing elementary algebra with STACK". *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 38(8) (2007), 987-1002.
- [12] Sangwin, C. "Automation of mathematics examinations". *Computers & Education*, 94 (2016), 215-227.
- [13] Sangwin, C. *Computer Aided Assessment of Mathematics*. Oxford University Press (2013).
- [14] Varsavsky, C. "Can online weekly quizzes contribute to learning in mathematics?" IN S. C., Chu, W.C., Yang, T.D., Alwis, & K.C., Ang (Ed.), *Proceedings of the 9th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 161-168) (2004). Singapore: ATCM Inc.

SOBRE OS AUTORES

Rui Paiva é professor adjunto no Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Estudou na Universidade de Coimbra e fez doutoramento na Universidade do Porto. É o coordenador do projeto MITO - Módulos Interativos de Treino Online e os seus interesses de investigação são sistemas dinâmicos e tecnologias no ensino da matemática.

Milton Ferreira é professor adjunto no Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Fez a licenciatura e doutoramento na Universidade de Aveiro. É membro do projeto MITO e os seus interesses de investigação são Análise de Clifford, cálculo fracionário e teoria dos girogrupos.

Miguel Frade é professor adjunto no Departamento de Eng. Informática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria. Estudou na Universidade de Coimbra e fez doutoramento na Universidade da Extremadura, Espanha. Colabora no projeto MITO e os seus interesses de investigação são cibersegurança e informática forense.



O COMPASSO GEOMÉTRICO, ASTRONÓMICO, NÁUTICO (1595): RACIOCINAR COM AS MÃOS NA “AULA DA ESFERA” COM FRANCISCO DA COSTA

Apresentar conceitos de matemática vários e difíceis em pouco tempo a um grupo de alunos com pouca preparação teórica, este era o propósito de Francisco da Costa. Na “Aula da Esfera” daquele ano de 1595 já tinha dado a matéria da astronomia e da geografia toda, e precisava de reanimar a atenção dos seus estudantes. Introduziu então na sua aula um instrumento novo, da sua própria invenção, em forma de compasso. Desta maneira mobiliza a intuição mecânica e ótica dos seus alunos para compreender tanto conceitos básicos de geometria como vários outros assuntos importantes de astronomia e de náutica. Apresenta-se no que segue uma amostra deste curso inspirador.

A cultura matemática dos jesuítas tem sido cada vez mais estudada nas últimas décadas. A organização das suas aulas e a importância atribuída à matemática em toda a Europa no currículo dos colégios da Companhia fundada por Inácio de Loyola ficou evidente nos estudos de investigadores como Ugo Baldini e Antonella Romano. Entre nós, o aprofundamento do conhecimento sobre o que se fazia nas ciências matemáticas na Sociedade de Jesus deve-se aos estudos pioneiros de João Pereira Gomes e Luís Albuquerque e, mais recentemente, sobretudo ao mérito de Henrique Leitão e dos seus colaboradores.¹ Quanto mais se analisa o *corpus* dos tratados e notas que originaram das imediações da “Aula da Esfera” associada ao Colégio Jesuíta de Santo Antão, em Lisboa, mais surpresas se desvendam, e desfazem-se os preconceitos que se mantiveram acerca do conservadorismo doutrinário dos padres da Ordem.

O texto intitulado “Compasso geométrico, astronómico e náutico” (1595) do padre Francisco da Costa pertence a este *corpus* importante. A obra deve o seu interesse não somente à circunstância, porventura apenas anedótica, que ele atesta as observações do padre da declinação máxima do Sol com precisão até fracções de minuto de arco. Muito mais significativo é o facto de nos informar sobre os conhecimentos e as leituras matemáticas de um dos primeiros lentes da Aula da Esfera: Francisco da Costa (nasce em Pinhel 1567 e morre em Lisboa de tuberculose em 1604).² Trata-se também do único testemunho e rasto de um compasso de configuração original, instrumento inventado pelo padre (“ordenado” como ele diz e bem) que emerge de um contexto particular. A “Aula da Esfera” por estar aberta e lida em língua vernácula produz um encontro de várias tradições de conhecimento: da cultura matemática prática de construtores de instrumentos, e da

cultura erudita dos professores de formação universitária e eventualmente de ainda outros meios e formações.

Assim, no discurso conciso sobre o compasso, o professor ainda confrontou os seus ouvintes com a vasta produção matemática contemporânea, referindo, de passagem, os livros de Gema Frísio, Cristóforo Clávio, António Magini, Guidobaldo del Monte e o trabalho de Tycho Brahe. Aprende-se que o próprio Padre Francisco determinou, usando um grande quadrante dividido de dez em dez minutos de arco, o valor exato da obliquidade da eclíptica em 1595, chegando a $23^{\circ} 21' 30''$. Ele não se priva de avisar que esse valor variava continuamente e que, por isso, as tábuas de declinação solar tinham de ser reformadas também. Servir-se de um instrumento matemático engenhoso, a saber, do compasso geométrico-astronómico-náutico como forma de apresentar variadas matérias matemáticas era inovador. Aprecia-se então como o professor encarava a sua tarefa, que também era nova: a “Aula da Esfera” tinha iniciado a sua atividade pouco antes (por volta de 1590). Destacava-se por ter ensino em português (em vez do latim, que se usava nas aulas dos jesuítas) a um público composto não apenas por futuros jesuítas mas também, ao que parece, por aprendizes cartógrafos, fazedores de relógios e astrolábios, e talvez pilotos.

Francisco da Costa usa da arte retórica, que era uma das bases da formação dos jesuítas, para cativar os seus ouvintes, e diz na sua introdução que a sua exposição vai ser “fácil” e “breve”:

“Desejando ajudar com nosso trabalho aos curiosos das matemáticas, ordenámos um instrumento no qual com muita facilidade e pouca fábrica, brevemente recompilámos [...] o uso e operações dos mais instrumentos que até ao presente se têm inventado e chegado à nossa notícia. E por tal ser em forma de compasso lhe chamamos compasso geométrico, astronómico e náutico.”
(fol. 97r)

Este pequeno tratado sobre um compasso polivalente original encontra-se inserido num códice hoje conservado na Biblioteca da Ajuda (sigla BA 46-VIII-18), nos fólhos 105v-138r (ou fol. 96v - 129r se seguirmos a foliação em lápis acrescentada posteriormente). Uma pequena nota indica que o compasso foi apresentado aos alunos no seguimento do curso sobre astronomia e geografia no ano de 1595. Estamos perante um documento de autoria e data confirmada, caso que nem sempre se dá com os manuscritos da “Aula da Esfera”. Esta situação favorável permite situar

perfeitamente o compasso e os conceitos e procedimentos referidos no tratado. No entanto não sabemos quem é que conduziu a pluma e registou este curso para a posteridade. Pelas muitas curiosidades na forma fonética de grafar as palavras, fica evidente que quem escreve não lia o latim. As figuras, para as quais foram guardados espaços em muitas das páginas, não foram executadas. Isto coloca logo um problema sério: há poucos indícios sobre a aparência concreta do compasso de Francisco da Costa. Na espera de encontrarmos mais documentos, cumpre-nos tentar reconstituir a forma do instrumento a partir da descrição textual.

CONSTRUÇÃO DE UMA DAS MUITAS ESCALAS DO COMPASSO

A lição de Francisco da Costa começa por uma primeira parte (livro I) que descreve a forma do instrumento e indica a construção das várias escalas que estão inscritas nas suas duas pernas achatadas e equipadas com pínulas. No total, o compasso tem nove escalas, incluindo um relógio solar e outro estelar. Nas quatro outras partes, o texto explica como o compasso serve em questões de geometria (oito proposições), de medições de distâncias (15 proposições), assuntos de astronomia (19 proposições) e por fim também operações de navegação (sete proposições, mas o fim da cópia é abrupta e esta última parte deve ter incluído mais matéria). Dar-se-á aqui a conhecer apenas um excerto do tratado. O documento ainda aguarda um estudo mais completo.

Primeiro, eis as indicações sobre a construção da escala do cosseno na perna direita do compasso. Não é bem assim que Francisco da Costa chama a esta escala, pois o cosseno como nome surgiu só depois, nos anos 1620. Anteriormente, na matemática árabe e medieval usava-se o “seno reto” e o “seno verso”.³ O professor jesuíta evita neste primeiro desenvolvimento todos os tecnicismos e não pronuncia sequer o termo “seno”. Ele refere-se a esta escala como “o quadrante ou astrolábio reduzido ao compasso”.

¹ Cito apenas quatro como exemplo: Bernardo Mota, Bruno Almeida, Nuno Castel-Branco e Luís Ribeiro.

² Em rigor, Francisco da Costa lecionava vários anos na sua função de “lente substituto” de João Delgado. Algumas indicações biográficas e mais bibliografia encontram-se no catálogo de exposição *Sphaera mundi* (Biblioteca Nacional de Portugal: 2008), p. 113.

³ O seno verso, ou “sinus versus” em latim, corresponde à seta do duplo do arco. É igual a $(1 - \text{cosseno})$.

“Proposição 3a. Como se reduzirá o quadrante e astrolábio náutico ao compasso. Lançadas na perna direita as linhas paralelas⁴ pela ordem que fica dada, descrevam-se 2 quadrantes sobre um mesmo lado segundo o comprimento da perna do compasso, do lugar das pínulas até ao centro (como na presente figura se mostra). Dividido um deles em seus 90 graus com toda a exacção possível, passem-se os tais graus ao segundo quadrante e pondo a régua em graus igualmente afastados <dos> pontos *A* e *B*. Notem-se todos os tais graus com linhas subtis no lado *BD*, o qual será o padrão donde se passarão à perna direita do [f. 98v] compasso, começando do lugar da pínula que responde ao ponto *A*. E acabando no centro do compasso onde ficará o n° 90, e assim ficará reduzido o quadrante e o astrolábio náutico ao compasso.” (fol. 98r-98v)

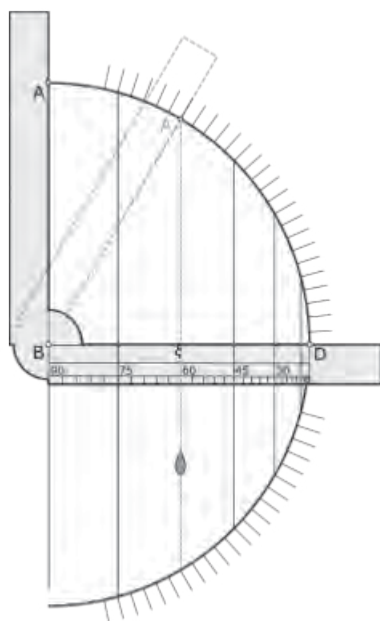


Figura 1. Reconstrução da figura referida na proposição 1.3. Os dois quadrantes foram aqui divididos de três em três graus e não, como a proposição indica, em todos os graus. Para exemplificar o processo descrito, foram traçadas linhas equidistantes de *AB* passando por 15°, 30°, 45° ... graus. A representação do compasso, e a perna esquerda *AB* inclinada com o contorno tracejado certamente não faziam parte da figura prevista para esta proposição. A semirreta em tracejado perpendicular, partindo de *A* representa aqui o fio de prumo que corta a escala *BD* no ponto ζ. Adicionámos estes elementos para uma melhor compreensão. Não são representadas as pínulas, referidas no texto, que estavam situadas nos pontos *A* e *D*.

Não é fácil reconstruir a figura a que o texto faz referência, ainda que o princípio da operação seja claro. Recorremos também ao facto de que, para medir ângulos de altura (sobre o horizonte), o compasso era equipado por um fio de prumo (tracejado na figura reconstruída) caindo da extremidade *A* da perna esquerda. Supõe-se ainda que a perna direita *BD* estivesse numa posição horizontal. Assim, o fio de prumo corta a escala horizontal, indicando o ângulo com que a perna esquerda *BA* está levantada. Deduz-se desta configuração que as divisões desiguais numeradas pelo valor do ângulo (90°, 75°, 60°, 45° ...) estão na distância do cosseno do ângulo indicado, e pode conjecturar-se que a figura prevista teria sido semelhante à figura 1.

Se medirmos as distâncias da ponta *D* para uma divisão da escala, esta corresponde ao “seno verso” do ângulo. Francisco da Costa não explicita esta noção de seno verso. Para já, vai apenas usar a escala, na proposição II.3: ele propõe a medição da altura de um astro sobre o horizonte, exercício básico e conhecido de todos. Todos na assistência tinham noção da importância de medir a altura do Sol ou da estrela polar, quer na astronomia quer na prática da navegação.

UMA DAS MUITAS FUNÇÕES DO COMPASSO: FAZER UMA TÁBUA DE SENOS

Logo a seguir Francisco da Costa insere um parágrafo notável que constitui, na esteira de Pedro Nunes e do seu comentário à Esfera (1537), uma das primeiras menções do termo “seno” num escrito em português.

“Proposição 4a. Como por este instrumento se farão tábuas de senos. Coisa mui necessária ao astrónomo é o conhecimento dos senos pelo muito uso que deles há na Arte que professam, para o qual se têm feito muitas tábuas com muita exacção e certeza, mas não sem prolixidade com números inconvenientes, em que convém que há-de [ser] mui destro quem semelhante empresa tomar, indo pelo modo ordinário. Porém, se este trabalho quiser escusar, sem muito conhecimento de aritmética, fazer semelhantes tábuas, ou sem elas a qualquer hora conhecer qualquer seno, alcançá-lo-á por meio de nosso instrumento, pois sua composição (como consta da proposição 3^a do 1^o livro da sua fábrica) é semelhante à do quadrante que o Padre Clávio no princípio do tratado dos senos aponta, aonde por brevidade nos remetemos; pois,

ao presente não pretendemos mais que tocar de caminho as coisas pressupondo o conhecimento que delas temos dado em nosso curso, principalmente sendo nesta parte as operações as da proposição precedente.” fol. [101r-v]

Esta proposição não passa de uma alusão ao conceito de seno. Ao lermos o trecho, surge a impressão de que o professor se deu conta de que os seus ouvintes nunca tinham ouvido falar desse termo. E com efeito, o copista do texto escreveu da seguinte forma: “Como p[or] este instrum[en]to se farão taboas de signos. Cousa he muy nesseçaria ao Astronimo o c[onhecimen]to dos sinos pello m[ui]to vzo que delles â em a Arte que profissão.”

Na transcrição que está acima modernizou-se a grafia. Mesmo admitindo a ausência de uma ortografia portuguesa estabelecida, fica patente a hesitação de quem es-

creve: o Padre fala em “signos”, ou em “sinos”?

Este, já encaminhado para explicar como se produz uma tábua de senos, parece perceber que está a falar de assuntos demasiado alheios, e de repente muda o rumo ao discurso. Basta-lhe finalmente fazer uma referência ao tratado que precede as tábuas de senos editadas por Clávio.⁵ O grande matemático do *Collegio Romano* apresenta aí o método “intuitivo” de encontrar os valores dos senos retos e versos por via de um grande quadrante (ideal) (figura 2).

Em vez dos 10 milhões de Clávio, consoante a descrição do compasso geométrico, astronómico, náutico, a perna *BD* apresenta uma escala dividida em 60 partes iguais, paralela à que se construiu a partir dos ângulos. Francisco da Costa conteve-se então de dizer que as partes numeradas nessa escala correspondem ao seno do complemento do ângulo indicado (o cosseno), para um “raio” do seno de 60.⁶ Relativamente àquela outra quantidade do chamado “seno verso” corrente na época podia também ter dito o seguinte: o complemento das partes para 60 corresponde ao seno verso do ângulo. Ou recorrendo a equações modernas:

$$B\xi = \text{sen}(90^\circ - \sphericalangle ABD) [= \text{cos}(\sphericalangle ABD)]$$

$$\xi D = \text{sen verso}(\sphericalangle ABD)$$

Sem dúvida, por razões pedagógicas, o matemático não quis confundir os seus ouvintes com estas relações que o teriam levado a uma longa digressão. Mas não se privou de chamar a atenção para a grande importância dos senos em astronomia, e não deixou de mencionar algumas publicações recentes, tal como fez ao longo do seu curso. Nota-se que mencionou exclusivamente autores “modernos”.

A “AULA DA ESFERA” VISTA DE DUAS PERSPETIVAS

Num único documento, neste raro texto sobre o compasso, pode encontrar-se o testemunho duplo de um curso na “Aula da Esfera”. Podemos de facto considerá-lo de duas maneiras e ficamos informados de duas perspeti-

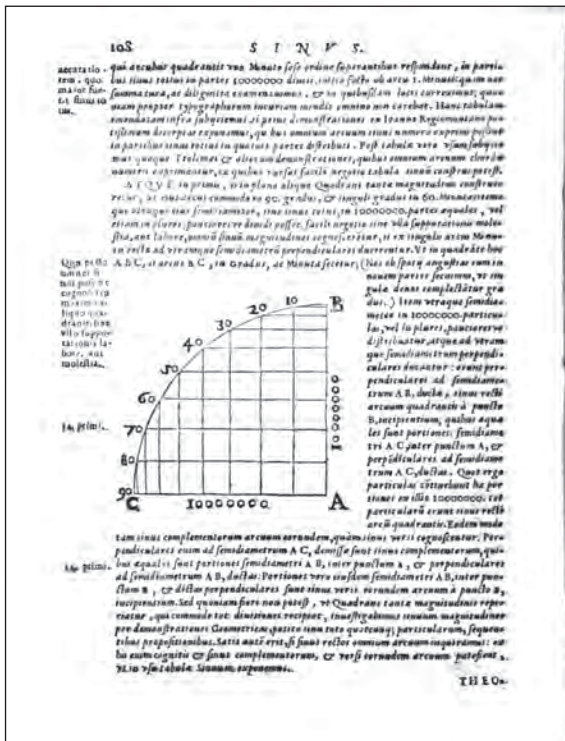


Figura 2. Página a que Francisco da Costa se refere e que se encontra no tratado *Sinus vel semisses rectorum* de Clávio (p. 108), publicado nove anos antes de o padre dar a sua aula. Os lados deste quadrante são subdivididos em 10 000 000 partes iguais, número que corresponde ao “raio” do seno das tábuas de Clávio. As linhas verticais que interseitam CA revelam os valores do seno verso, as linhas horizontais os valores do seno do complemento (cosseno) onde intersectam AB. A figura funciona de forma análoga ao compasso de Francisco da Costa.

⁴ São as linhas que encerram a graduação da escala.

⁵ Cristóforo Clavius, “Sinus vel semisses rectorum in circulo subtensarum”, in *Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri tres ...* (Roma: 1586), p. 98-187.

⁶ O raio do seno (ou “sinus totus”) era tradicionalmente um múltiplo de 60. A partir do século XV surgem tábuas de seno decimais.

vas diferentes sobre esta mesma realidade histórica. A primeira perspetiva é a correspondente ao professor de matemática que concebeu o instrumento e que se mostra bem inspirado a escolher a manipulação “hands-on” de um instrumento para dar as suas explicações. A outra perspetiva corresponde a quem consignou o curto tratado neste códice e escreve com letra clara, angulosa, cheia de abreviaturas.

Francisco da Costa imagina o seu compasso geométrico, astronómico, náutico num momento em que fabricantes de instrumentos começam a produzir compassos polivalentes pela Europa fora. Alcançaram fama os do alemão Christoph Schissler (1555), outros são menos conhecidos como o de Antonio Bianchini de Veneza (1564) ou de Humphrey Cole em Londres (1575). Datam destes anos também os primeiros escritos de matemáticos práticos a apreçoar instrumentos complexos em forma de compasso: do compasso “polímetro” de Muzio Oddi (1583), ao dos irmãos Mordente (1584), do “cosmimètre” de Jacques Chauvet (1585), ao “archimetro” de Ostilio Ricci (1590), ao “sector” descrito por Thomas Hood (1598), e finalmente ao bem conhecido compasso militar de Galileu (1606). É provável que o professor português conhecesse um ou outro destes desenvolvimentos (ele refere um compasso proporcional em Clávio, outro compasso descrito por Guidobaldo del Monte). O compasso do professor da “Aula da Esfera” difere de todos. O que singulariza o instrumento é a seleção das funções que o professor imagina serem de particular interesse para os seus alunos. Ele inclui, portanto, não apenas noções de geometria (triângulos, ângulos, medição de comprimentos e alturas), mas também questões de astronomia e várias proposições relativas à náutica.

O mesmo documento dá-nos conta também do que corresponde ao ponto de vista do aluno que escreve. Não sabemos ao certo quem é que copiou o texto, e se foi um indivíduo que assistiu à “Aula da Esfera”. Mas deduz-se que o texto foi ditado, dada a peculiar grafia das palavras e a confusão frequente entre certos homónimos. Depreende-se também da grafia dos termos mais técnicos e teóricos que o escriba não tinha conhecimento das palavras nem dos conceitos que foi levado a escrever (“sircollo” para círculo, “emteruallo” para intervalo, “semtro” para centro, largura “obsidua” para amplitude “occidua”).

Os alunos eram sem dúvida empenhados e interessados, mas com uma preparação desigual no que diz respeito aos assuntos da matemática. Nota-se que Francisco da Costa capta a benevolência dos ouvintes quando refere o

“enfadamento dos números e da aritmética”. De certeza encontra simpatia quando insiste na importância de instrumentos bem feitos (será que alguns na audiência eram fabricantes ou aprendizes?). Eles entenderiam quando o lente lamenta que muitas vezes não são suficientemente bem feitos. Ao mesmo tempo Francisco da Costa não duvida de que todos estavam habituados a entender prontamente desenhos e configurações complexas, e por isso, apresenta em cadência rápida assuntos variadíssimos, da construção de um arco circular passando por três pontos, dos princípios de ótica para saber se dois navios em movimento se aproximam ou se afastam um do outro, da influência dos diâmetros variáveis do Sol e da Lua nos eclipses, ao comprimento do grau em léguas dependente da latitude, até a uma tábua das marés. Isto permite ter uma ideia dos assuntos que Francisco da Costa considerou serem adequados aos ouvintes da “Aula da Esfera”. Escolha que é reveladora tanto dos conhecimentos do professor como das expectativas dos alunos.

Quero deixar aqui o meu agradecimento aos primeiros leitores deste texto, Bruno Almeida e Pedro Freitas, por terem introduzido as necessárias correções. Todos os restantes erros são da minha responsabilidade.

Samuel Gessner é historiador das ciências com especial interesse pela diversidade das culturas matemáticas da Europa medieval e renascentista. Tem analisado a dinâmica e influência mútua destas culturas que se pode observar em particular no papel dos instrumentos matemáticos e astronómicos. Usa com preferência artefactos da cultura material como fonte primária em conjunto com documentos textuais. Actualmente é investigador auxiliar no CIUHCT (Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia, FCUL, Universidade de Lisboa ULisboa) e editor de book reviews no journal internacional HoST. Anteriormente (2019-2020) integrava o projecto ALFA sobre astronomia Afonsina (Observatoire de Paris) como investigador post-doc. Co-organizou o Oberwolfach workshop “Mathematical Instruments Between Material Artifacts and Ideal Machines” em Dezembro 2017. Proximamente co-organiza a conferência “Equating the Heavens” em Kassel e Dresden, em Agosto 2021, que reunirá alguns grandes especialistas de história da astronomia matemática.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, pjfreitas@fc.ul.pt

PREMI

PRIZE



Il·lustració: Manuel del Arco

15.000 €

Publicació de la monografia guanyadora a la sèrie Progress in Mathematics de Birkhäuser.

Publication of the winning monograph in Birkhäuser series Progress in Mathematics.

FERRAN SUNYER I BALAGUER

2022

PREMI INTERNACIONAL D'INVESTIGACIÓ MATEMÀTICA

BASES

Premi ofert a una monografia matemàtica de caràcter expositiu que presenti els darrers desenvolupaments d'una àrea activa en recerca. El nom del guanyador serà anunciat a Barcelona l'abril de 2022.

TERMINI

3 de desembre de 2021 a les 13 hores (GMT+1).

INTERNATIONAL MATHEMATICAL RESEARCH PRIZE

CONDITIONS

Prize awarded for a mathematical monograph in an expository nature presenting the latest developments in an active area of research. The name of the prize-winner will be announced in Barcelona in April, 2022.

DEADLINE

December 3, 2021 at 1pm (GMT+1).

<http://www.ffsb.cat>

fFSB
fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER





PASSO MAIOR DO QUE A PERNA?

MIGUEL DE CARVALHO

UNIVERSIDADE DE EDIMBURGO

miguel.decarvalho@ed.ac.uk

Há quem diga que “não se pode dar passos maiores do que a perna”, mas a geometria do triângulo isósceles ilustra que afinal essa afirmação não passa de um mito.

A retórica nem sempre é precisa, mas a geometria não mente. Para mostrar que assim é, hoje escrevo sobre a matemática de um provérbio fortemente enraizado na nossa cultura:

“Não se deve dar passos maiores do que a perna.”
Provérbio português

Este provérbio é tipicamente invocado para nos recordar que, quando tomamos decisões, devemos sempre ter em conta restrições, condicionantes ou limitações. Infelizmente, há uma variante menos precisa deste provérbio – que confunde “dever” com “poder” – e que é utilizada não só na gíria mas também por conceituados peritos e até pela nobreza. Todos cometemos gafes, até altas personalidades. Por exemplo, Mário Centeno, ex-ministro das Finanças de Portugal e atual governador do Banco de Portugal, referia-se da seguinte forma às negociações com os professores:

“A ideia é muito simples, de que não podemos dar passos maiores do que a perna...”
Mário Centeno,
Entrevista à RTP

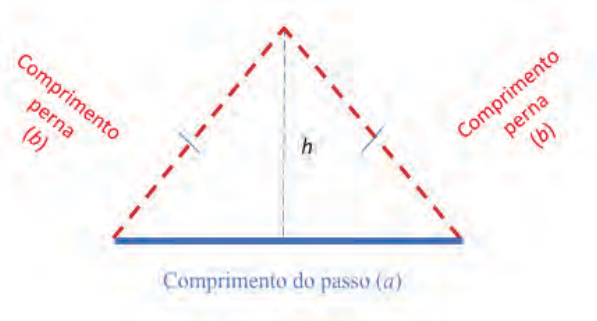
Mas será isso verdade, Doutor Centeno?

Ainda noutro exemplo, Isabel de Herédia, esposa de Duarte Pio de Bragança, referia numa entrevista ao *Diário de Notícias* que:

*“Não se pode dar passos maiores do que a perna.
E faça questão de não ultrapassar os limites.”*

Isabel de Herédia,
DN, 25 de julho de 2015

Há uma grande diferença entre poder e dever. Será que posso dar um passo maior do que a perna? Talvez não deva, mas é de facto possível dar um passo maior do que a perna. E porquê? A figura apresentada em seguida vai ajudar a entender o motivo.



Suponhamos, para simplificar, que um indivíduo tem duas pernas do mesmo comprimento e que caminha num solo plano. Então, a ação “dar um passo” pode ser representada através de um triângulo isósceles – tal como na figura acima – no qual os dois catetos de igual comprimento representam cada uma das pernas, de comprimento b e a medida da base representa o comprimento do passo (a); (ver figura). Do ponto de vista etimológico, a expressão “isósceles” deriva do grego, mais precisamente das palavras *isos* (igual) e *skelos* (perna).

Mas, afinal, qual é o maior passo que se pode dar? Certamente que depende do tamanho da perna. Para responder à questão anterior vamos recordar uma propriedade matemática dos triângulos conhecida como *desigualdade triangular*. Esta desigualdade implica que o comprimento do segmento de reta azul (na figura acima) não pode exceder o comprimento da linha vermelha a tracejado. Em conclusão, de acordo com as condições referidas acima:

O comprimento de um passo não pode exceder duas vezes o comprimento da perna.

Mas então isso significa que é possível dar um passo de medida igual a duas vezes o comprimento da perna? Sim. Trata-se de um caso limite – e nunca veremos ninguém a andar dessa forma – mas que ajuda a entender a razão pela qual é possível dar passos maiores do que a perna. Certamente que o leitor já viu um ginasta a fazer a espargata. A espargata é de facto um passo cujo comprimento corresponde a duas vezes o comprimento da perna. Surpreendido?

A ideia é muito simples, a retórica nem sempre é precisa, mas a geometria não mente!

Não se ~~pode~~ deve dar passos maiores do que a perna!

NOTA: Este artigo faz parte da série Inteligência Popular – uma série matemática a decorrer no YouTube, que ilustra como é que a matemática e a estatística podem ser usadas para explicar conceitos fundamentais de estratégia e risco recorrendo à sabedoria popular. Um vídeo baseado neste artigo está disponível no seguinte link: <https://youtu.be/byPVFV72CCM>. Sugere-se aos interessados que subscrevam o canal!

SOBRE O AUTOR

Miguel de Carvalho é reader em Estatística no Departamento de Matemática da Universidade de Edimburgo. Exerce neste momento as funções de diretor do Centro de Estatística da Universidade de Edimburgo (<https://centreforstatistics.maths.ed.ac.uk/>) e de presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística (<https://spestatistica.pt>). As suas trajetória e investigação foram condecoradas com vários prémios de prestígio internacional na área da Estatística Matemática (ex: Lindley Prize – International Society for Bayesian Analysis) e é ainda editor associado de revistas científicas líderes nessa área, tais como o *Journal of the American Statistical Association* e o *Annals of Applied Statistics*.



LOJA
spm

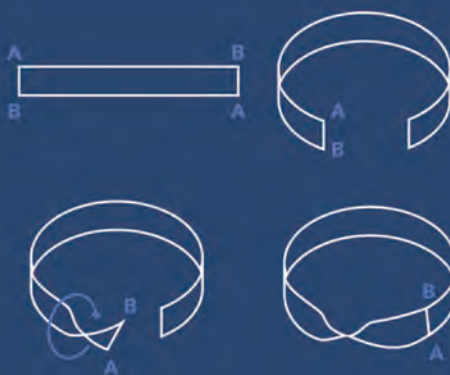
Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt

QUER SER SÓCIO DA SPM?

Veja as vantagens e condições no verso.



CONSTRUA UMA
BANDA DE MÖBIUS
COM ESTA PÁGINA



COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos.
Contacte-nos!

VALOR DE QUOTAS 2021:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

Corporativo: 600 euros

CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º esq
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: spm@spm.pt

www.spm.pt



NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfc@ua.pt

SHOULD WE STAY OR SHOULD WE GO?

Se em vez de gastarem dinheiro a mandar maquinas para Marte se preocupassem em resolver os problemas aqui na Terra...

A frase foi deixada por um leitor anónimo na caixa de comentários de um jornal por ocasião da chegada a Marte do robô *Perseverance*, mas foi corroborada, três meses mais tarde, por Martin Rees, cientista britânico, presidente da Royal Society entre 2005 e 2010 e astrónomo real. Em entrevista ao *Público* a propósito do lançamento da edição portuguesa de *Sobre o Futuro*, o seu mais recente livro, afirma o astrónomo: *É uma ilusão perigosa pensar que podemos escapar dos nossos problemas emigrando em massa para Marte. Não há planeta B para as pessoas normais.*

A questão não é nova, mas a perspectiva cada vez mais próxima de podermos colonizar o planeta vizinho, encorajada pelo sucesso das missões dos últimos anos, e, por outro lado, pela degradação e pela sobre-exploração dos recursos terrestres, tornam-na mais urgente e crítica. Afinal, o que mais convém à espécie, arrumar a casa e garantir a sustentabilidade dos recursos endógenos ou expandir-se para outros planetas procurando multiplicar as hipóteses de sobrevivência e o acesso a outras matérias-primas? Responda quem souber, porque eu não sei.

E os outros seres inteligentes que, se acreditarmos na equação de Drake*, deverão povoar entre 1000 e 100 milhões de planetas só na nossa vizinhança? Que é como quem diz, na nossa galáxia? Que terão essas espécies decidido? Estarão a tentar encontrar solução para os seus aquecimentos globais, a escassez de água e de alimento e

o aumento da poluição? Porque não vemos colónias espalhadas por toda a galáxia? Onde estão as naves espaciais, as estações orbitais, os satélites artificiais e as ondas eletromagnéticas que deveriam emitir de forma voluntária ou involuntária?

A verdade é que ninguém sabe e essa dúvida, essa contradição entre a expectativa de uma galáxia cheia de vida inteligente e a falta de provas da sua existência, deu origem ao “Paradoxo de Fermi”, assim chamado porque, reza a história, o cientista italiano Enrico Fermi terá perguntado, em 1950, numa conversa informal sobre objetos voadores não identificados com o também físico Edward Teller: “Mas, afinal, onde está toda a gente?”

As razões apontadas são muitas e variadas, há quem sugira uma tal diferença entre civilizações que o contacto se torna improvável, que a vida inteligente será muito mais rara do que se possa imaginar, que as distâncias cósmicas são inultrapassáveis ou até, e essa é a hipótese mais assustadora, que todas as civilizações acabam por desenvolver as tecnologias que irão destruí-las (bombas atómicas, inteligência artificial, contaminação ambiental, etc.). Acreditando nesta última hipótese, podemos especular um pouco mais e voltar ao início do texto: em que contexto se destruirão as civilizações? Será a tentar resolver os problemas internos ou a explorar o espaço que as circunda? Responda quem souber, porque eu não sei.

* A EQUAÇÃO DE DRAKE foi proposta em 1960 pelo astrofísico americano Frank Drake e constitui um exercício estatístico para estimar o número de civilizações extraterrestres inteligentes na Via Láctea:

$$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

Em que: **N** é o número de civilizações extraterrestres; **R*** é a taxa de formação de estrelas na nossa galáxia; **f_p** é a fração dessas estrelas que possuem planetas que as orbitam; **n_e** é o número médio de planetas que permitem o desenvolvimento de vida; **f_l** é a fração dos planetas que realmente desenvolvem vida; **f_i** é a fração dos planetas que desenvolvem vida inteligente; **f_c** é a fração dos planetas que desenvolvem vida inteligente e que têm o desejo e os meios para estabelecer comunicação; **L** é o tempo de vida estimado para cada civilização.



BARTOON

LUIS AFONSO



Publicado originalmente no jornal Público, em 05/05/2021. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):

Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:

Daniel Pinto Universidade de Coimbra

Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:

Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. M^a Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Nátália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:

Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:

Margarida Robalo

DESIGN:

Ana Pedro

IMPRESSÃO:

FR Absolut Graphic

Rua Professor Egas Moniz n 38 4^o Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:

Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB

Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO

Sociedade Portuguesa de Matemática

SEDE: Av. República 45, 3^o Esq. 1050-187 Lisboa

Tel.: 217939785 Fax: 217952349 E-mail: spm@spm.pt

NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: <http://gazeta.spm.pt/politica>

TIRAGEM **1250 Exemplos**

ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

PORTUGAL CONQUISTA UMA MEDALHA DE PRATA E DUAS MEDALHAS DE BRONZE NAS IMO2021

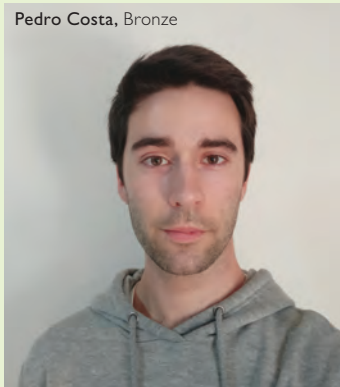
As provas da 62ª edição das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) foram muito exigentes e as pontuações obtidas na competição são a confirmação disso. Apesar da complexidade das provas, a equipa portuguesa teve uma prestação notável, conquistando uma medalha de prata, duas medalhas de bronze e uma menção honrosa. As IMO2021 decorreram online, pelo segundo ano consecutivo, entre 14 e 24 de julho, e contaram com organização da delegação russa. Nos resultados por países, Portugal ficou no lugar 54º em 107 países participantes, à frente de países como a Suécia, a Dinamarca, a Finlândia e Espanha. Os alunos portugueses realizaram a prova no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Tiago Marques conquistou a medalha de prata e ficou na posição 63ª em 619 participantes.

Pedro Costa e Tiago Mourão conquistaram as medalhas de bronze e Pedro Antunes a menção honrosa. Da comitiva portuguesa faziam ainda parte Leonardo Tavares e Marta Gonçalves, alunos da equipa, Joana Teles, chefe de equipa, e João Santos, tutor. Portugal participou pela primeira vez nas IMO em 1989 e, desde então, já conquistou três medalhas de ouro (em 2011, 2012 e 2013), sete de prata, 37 de bronze e 40 menções honrosas. A participação de Portugal nestas competições é organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática, e a seleção e a preparação dos alunos está a cargo do projeto Delfos, do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. O Ministério da Educação, a Ciência Viva, o Novo Banco e a Fundação Calouste Gulbenkian apoiam a realização das Olimpíadas.

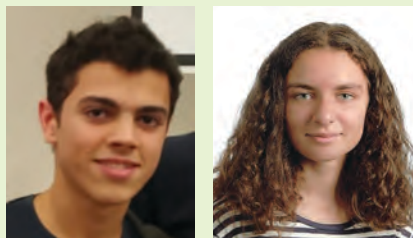
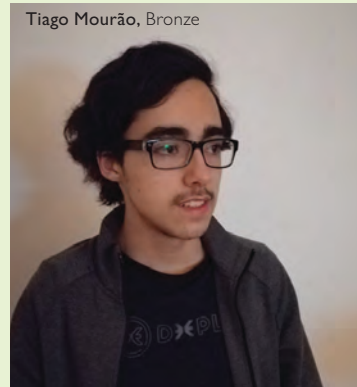
Tiago Marques, Prata



Pedro Costa, Bronze



Tiago Mourão, Bronze



Leonardo Tavares e Marta Gonçalves



Pedro Antunes, M. Honrosa



SPM MAIS PRÓXIMA DA EMS E DA EWM

A Sociedade Europeia de Matemática, EMS (European Mathematical Society, no seu nome original em inglês) representa os matemáticos em toda a Europa. Para além dos membros individuais, congrega cerca de 60 sociedades matemáticas nacionais na Europa, incluindo a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). A EMS promove o desenvolvimento de todos os aspetos da matemática na Europa, desde a investigação às relações da matemática com a sociedade e as instituições europeias. Faz assim a extensão da missão de desenvolvimento do ensino, da investigação e da divulgação da matemática que a SPM tem em Portugal à Europa. Há vários anos que a SPM facilita aos seus sócios a inscrição na EMS. Qualquer sócio pode pedir, através de contacto por email para

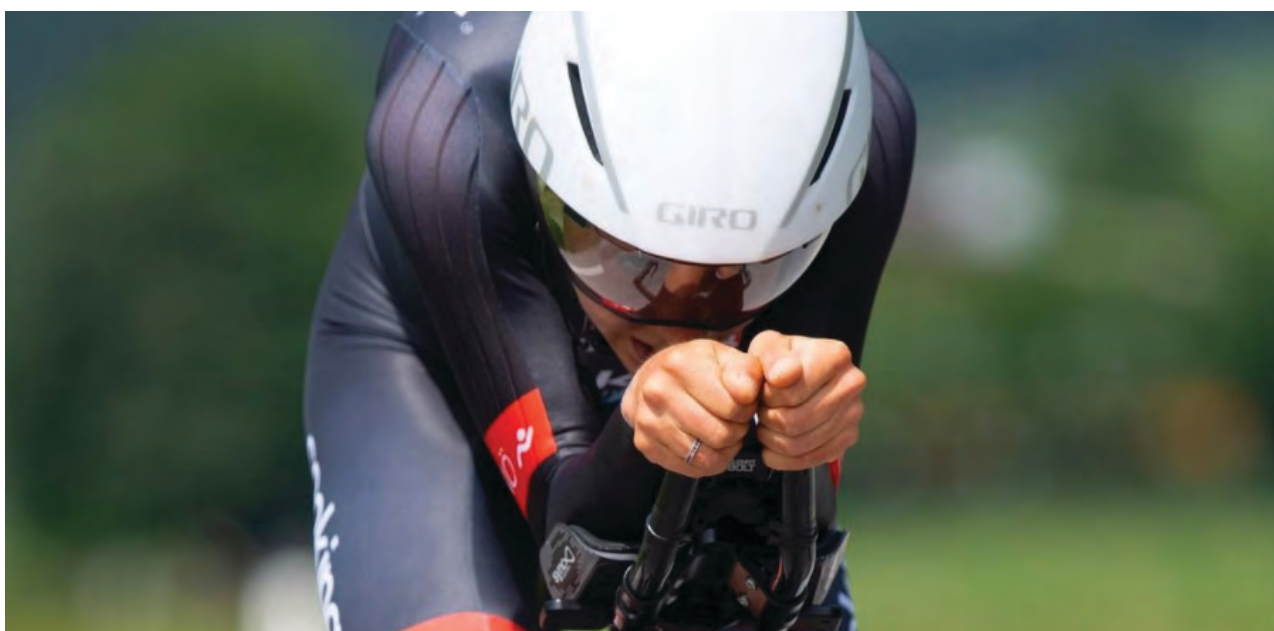
spm@spm.pt, a inscrição na EMS e a agilização do pagamento da quota anual da EMS, fazendo esse pagamento juntamente com a quota anual da SPM.

À semelhança do que já acontece com a EMS, a SPM ficará também mais próxima das Mulheres Matemáticas na Europa, EWM (European Women in Mathematics no nome original). A partir de 2022, qualquer sócio da SPM pode solicitar a sua inscrição na EWM, bastando pedir a respetiva inscrição e a agilização do pagamento da quota anual, juntamente com a da SPM. A EWM é uma associação internacional de mulheres que trabalham na área da matemática na Europa. Tem como objetivo incentivar as mulheres para o estudo da matemática e apoiá-las nas suas carreiras, dando destaque e visibilidade às mulheres matemáticas.

MATEMÁTICA ANNA KIESENHOFER CONQUISTA OURO EM TÓQUIO

A matemática austríaca Anna Kiesenhofer conquistou a medalha de ouro nos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020 no ciclismo de estrada. A sua vitória foi surpreendente, pois não pertence a nenhuma equipa profissional e, por isso, poucos acreditavam na possibilidade de se tornar vencedora. Kiesenhofer cumpriu 137 quilómetros, entre o Parque Musashinomori e o Autódromo Internacional de Fuji, em

3 horas, 52 minutos e 45 segundos, mais de um minuto à frente da campeã mundial de 2019, a holandesa Annemiek van Vleuten. A atleta de 30 anos começou a sua carreira no ciclismo apenas em 2014, depois de se ver obrigada a deixar o triatlo devido a várias lesões. Anna Kiesenhofer trabalha atualmente na Universidade de Lausanne, na Suíça, onde concilia investigação com ensino.



ZBMATH OPEN

A zbMATH Open está a convidar a comunidade matemática a envolver-se no desenvolvimento da base de dados, que é gratuita e de acesso livre desde janeiro de 2021. Neste momento, é possível contribuir respondendo a um questionário online, dando sugestões sobre outras bases de dados com que possam estabelecer ligações, usando os dados disponíveis em projetos ou tornando-se revisor especialista. As avaliações escritas por peritos constituem uma parte essencial e extremamente valiosa do banco de dados. Participe em <https://zbmath.org>.

zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

MATEMATICAST – PODCAST DE MATEMÁTICA PARA CEGOS

Luiza Polloni, professora de Matemática reformada, decidiu criar o podcast Matematicast com o objetivo de favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos a pessoas cegas. A ideia surgiu porque a professora brasileira é também voluntária numa associação de deficientes visuais, a Adervip, em Ribeirão Preto. O Matematicast está disponível nas plataformas Spotify e Deezer.



TABELA DE PUBLICIDADE 2021

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1250

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPE
ÍMPAR:	590€	390€	220€	120€	220€
PAR:	490€	290€	170€	120€	170€

SABIA QUE...

Muito antes de ser uma atleta olímpica, **PATRÍCIA MAMONA** foi uma olímpica da matemática?

Patrícia esteve na final nacional das XX Olimpíadas Portuguesas de Matemática, que decorreram em Portimão, em 2002.



PARABÉNS, PATRÍCIA MAMONA, PELA MEDALHA DE PRATA CONQUISTADA NOS JOGOS OLÍMPICOS DE TÓQUIO 2020!

NOVOS TALENTOS CIENTÍFICOS EM MATEMÁTICA

As candidaturas às Bolsas Novos Talentos Científicos em Matemática, promovidas pela Fundação Calouste Gulbenkian, estarão abertas de 1 de setembro a 8 de outubro de 2021. Podem candidatar-se estudantes com frequência e inscrição num dos três primeiros anos de licenciatura de um curso com uma forte componente em matemática. As bolsas apoiam o prosseguimento dos estudos, no valor 2500 euros, e atividades consideradas relevantes para o desenvolvimento do talento do bolsheiro, no valor de 1500 euros. Saiba mais em: <https://gulbenkian.pt/bolsas-lista/novos-talentos-cientificos>

FINAL NACIONAL DAS OLIMPIADAS EM SETEMBRO



A final nacional das XXXIX Olimpíadas Portuguesas de Matemática teve de ser adiada devido aos constrangimentos provocados pela COVID-19. A competição irá agora decorrer a 11 de setembro, com apenas uma prova, tal como em 2020, e será realizada em cinco locais distintos, de forma a evitar aglomerados. A Universidade do Porto, a Universidade de Coimbra, o Instituto Superior Técnico, em Lisboa, a Universidade do Algarve e a Universidade dos Açores receberão os 90 alunos, selecionados nas primeiras duas eliminatórias. Com idades compreendidas entre os 11 e os 18 anos, os finalistas deverão chegar aos locais indicados 15 minutos antes do início da prova. A todos será fornecido um kit com máscara e álcool gel.

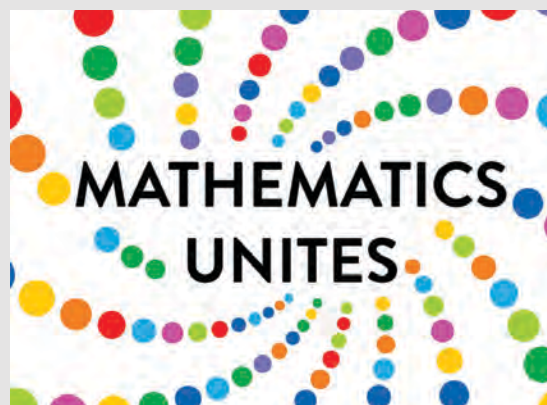
A competição cumprirá todas as normas recomendadas pela Direção-Geral da Saúde, como a prática da etiqueta respiratória e o distanciamento social. Caso algum dos alunos tenha algum sintoma indicador de infeção por COVID-19, não poderá realizar a prova.

Conheça os finalistas em <https://olimpiadas.spm.pt>

IDM 2022: A MATEMÁTICA UNE

Todos os anos o Dia Internacional da Matemática tem um tema diferente, cada novo tema pretende estimular a criatividade e trazer luz às conexões entre matemática e todos os tipos de campos, conceitos e ideias.

O tema do Dia Internacional da Matemática de 2022 é *A Matemática Une* e foi proposto por Yuliya Nesterova, uma estudante de pós-graduação da Universidade de Ottawa no Canadá.



LIVRO INTERATIVO AS AVENTURAS DA MATHINA

A Associação Atractor foi um dos parceiros de um projeto ERASMUS+ que desenvolveu dois repositórios online, disponíveis em <https://mathina.eu>. Os repositórios contêm diversos materiais, dirigidos ao ensino formal e não formal da matemática, através de histórias matemáticas, diversas apps e vários materiais ilustrativos, incluindo filmes, imagens e animações, assim como materiais produzidos especificamente para pais e educadores. Mathina promove o pensamento matemático por meio do desenvolvimento, da implementação e da disseminação de ferramentas educacionais de livre uso e adequadas à era digital. Os materiais contemplam quatro faixas etárias distintas: 4-6, 7-10, 11-14 e 15-19+ anos, e estão disponíveis

gratuitamente. Deste modo, todos podem deixar-se encantar com as aventuras de Mathina, do seu irmão Leo, do feiticeiro e de muitas outras personagens que ajudam a introduzir conceitos e ideias matemáticas através de histórias, desafios e puzzles. Mathina pode ser usada por pais e filhos, para juntos aprenderem de um modo lúdico, por professores como uma ferramenta didática, ou diretamente por jovens ansiosos por aprender mais Matemática.

O Projeto Mathina envolveu, além da Associação Atractor, mais quatro instituições europeias: Bragi Vizualne Komunikacije (SI), Curvilinea Società Cooperativa (IT), Experience Workshop (FI) e Imaginary (DE).



O ENCONTRO NACIONAL DA SPM 2021

Ainda com a pandemia por debelar, as atividades da SPM continuam adaptadas à nova realidade.

Aproveitamos para registar o sucesso de iniciativas como a bolsa de voluntários, a celebração do Dia Internacional da Matemática, a realização dos testes nacionais SPM que ajudam na preparação para os exames nacionais e providenciam uma ferramenta importante para a análise da performance das escolas, ajudando na identificação e na correção de problemas.

No entanto, o foco das atenções incide sobre a organização do Encontro Nacional da SPM 2021, que decorreu em meados de julho. Por força das atuais circunstâncias, o ENSPM realizou-se, pela primeira vez, por videoconferência, exigindo uma plataforma digital apropriada à dimensão do evento para a qual a SPM contou com o apoio de 12 unidades de investigação e do CIM, demonstrando-se, desta feita, o espírito de colaboração e entrelaçada com o propósito de celebrar a matemática.

Estivemos todos envolvidos em efetivar um encontro singular e indelével, capaz de ilustrar a capacidade organizativa e de realização da comunidade matemática portuguesa. O cartaz revelava uma agenda ambiciosa e promissora com 18 oradores convidados de altíssima reputação, incluindo quatro galardoados com a medalha Fields, 65 sessões paralelas cobrindo as mais variadas áreas de investigação matemática, sessões de divulgação, ensino da Matemática e ainda cursos de formação. O evento contou com 700 participantes tendo gerado muitas e interessantes interações.

Termo convidando os que não tiveram oportunidade de assistir a alguma(s) palestra(s) ou que desejem rever alguma comunicação a assistirem às mesmas em diferido, bastando para isso aceder ao site da SPM.



NOTA DOS EDITORES

O artigo Instrumento Matemático - o Sextante, de Alzira Faria, publicado na *Gazeta de Matemática* n.º 188 de julho de 2019, continha imprecisões e omissões. Poderá encontrar a versão revista e corrigida do artigo na ligação <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1513>

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo rela-

cionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: gazeta@spm.pt.

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2021

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página <http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml> informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para imprensa@spm.pt

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA **GAZETA DE MATEMÁTICA**

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM WWW.SPM.PT

