N. 0195

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXII | Nov. 2021 | 4,20€

Os Quaterniões e a Conjetura 1-3-5

António Machiavelo

Conversa com Alberto Elduque

Paulo Saraiva

HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

Pensões de Sobrevivência no Século XIX: Uso de Princípios do Cálculo Actuarial, por Daniel Augusto da Silva

Ana Patrícia Martins

CONCURSO

MATEMÁTICA e ARTE de RUA

A Matemática em União com ...

Desenho para Pintura de um Mural
Alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário

CANDIDATURAS
05/01 a 05/02/2022

APOIOS

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

PAPELARIA MARCIANO

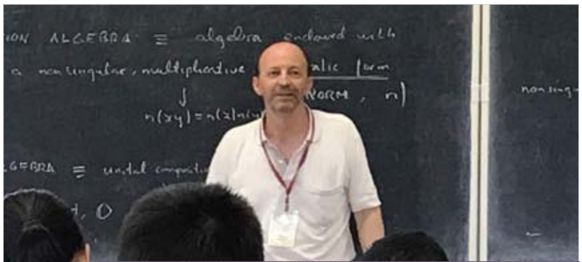
ORGANIZAÇÃO

spm 80 Sociedade Portuguesa de Matemática

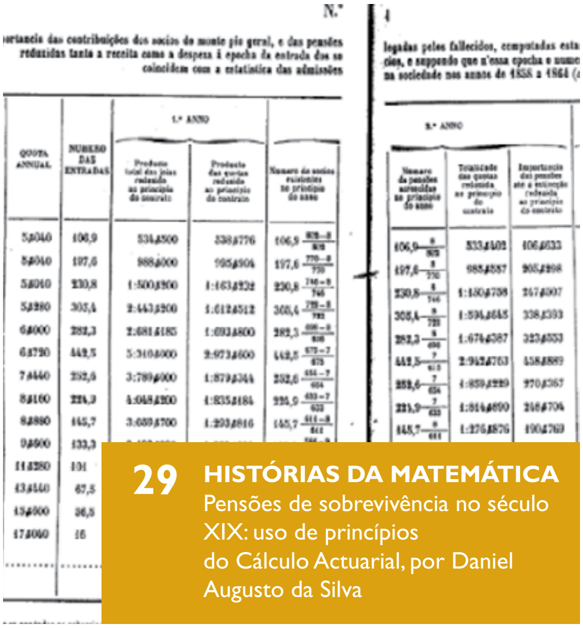
cmuc Centro de Matemática Universidade de Coimbra

dm.uc Departamento de Matemática

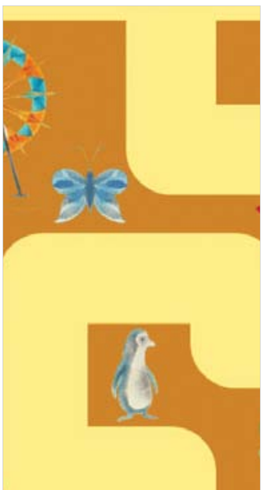
ÍNDICE



34 **CONVERSA COM ALBERTO ELDUQUE** | Paulo Saraiva



29 **HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA**
Pensões de sobrevivência no século XIX: uso de princípios do Cálculo Actuarial, por Daniel Augusto da Silva



03 **ATRACTOR**
Labirintos Digitais

08 **NA LINHA DE FRENTE**
A Ilusão da Lua Torta

Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

UM INVERNO DE INCERTEZAS

No momento em que se verifica um aumento da atividade pandémica, cresce a preocupação com as implicações do ensino remoto na atividade docente, na aprendizagem dos estudantes e no papel social das escolas.

O editorial da *Gazeta de Matemática* nº 192, de novembro de 2020, festejava o início de ano letivo em regime presencial. Hoje vivemos incertezas com cansaço e apreensão.

Este mês de novembro tem trazido alterações às dinâmicas das escolas. Se por um lado muitos estabelecimentos de ensino anunciam o regresso de atividades extracurriculares em modo presencial, como a tão desejada realização da festa de Natal com a presença das famílias dos alunos, por outro lado há um crescendo de turmas em isolamento profilático. Nestes casos há um regresso temporário ao ensino remoto.

Os jornais já anunciam uma provável quinta vaga da pandemia COVID-19. Os modelos matemáticos são usados para simular diversos cenários. Havendo uma grande incerteza sobre alguns dos parâmetros-chave, é necessária uma variedade de suposições diferentes nas simulações para obter uma boa cobertura da escala de possibilidades. Alguns quadros são promissores, outros desanimam.

Numa população como a nossa, que tem uma taxa de vacinação muito elevada, a imunidade proporcionada pela vacina é um fator crucial para a detenção da doença ou a atenuação das suas consequências. Há dados sobre os efeitos a curto prazo das vacinas, mas não se conhece bem a evolução da imunidade a longo prazo. Além disso, ainda não é possível quantificar o aumento da imunidade com a terceira dose de vacina. O comportamento coletivo e a influência das estações do ano são outros fatores que contribuem fortemente para a incerteza.

O retorno ao ensino remoto ou ensino híbrido (uma mistura entre o ensino presencial e o ensino remoto) faz-se acompanhar de muitas preocupações sobre o trabalho dos professores: aumento da carga de trabalho, questões com a privacidade e a proteção de dados, a diluição entre o tempo de trabalho e o tempo de descanso, a avaliação dos alunos.

Há professores que no mesmo dia ora fazem ensino presencial ora ensino remoto, consoante a turma que lecionam, desdobrando-se em estratégias. E isto numa altura em que é necessário implementar planos de recuperação e consolidação das aprendizagens decorrentes dos períodos de suspensão das atividades letivas presenciais dos dois anos letivos anteriores.

Do lado dos alunos há implicações não só na aprendizagem, mas também no desenvolvimento das suas capacidades de socialização e no seu bem-estar emocional. Sabemos que a pandemia e o ensino remoto agravaram desigualdades sociais, que já constituíam o maior desafio para o sistema educativo.

A comunidade matemática tem-se mostrado atenta aos desafios da aprendizagem de Matemática em ensino remoto, sendo prova os muitos estudos e reflexões que têm sido publicados sobre o tema. O impacto negativo dos períodos de confinamento na igualdade de género, nomeadamente em termos de progresso na carreira científica, também tem merecido a atenção na nossa comunidade, como, por exemplo, em várias iniciativas das organizações European Women in Mathematics e Committee for Women in Mathematics.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

LABIRINTOS DIGITAIS

Imagine-se a percorrer um labirinto de que só vê uma imagem ao espelho. Conseguirá interpretar a imagem ao espelho das curvas do caminho e encontrar a saída?

Comecemos por entender como funciona este desafio numa versão digital, através de um módulo interativo desenvolvido pelo Atractor a que o leitor pode aceder em [1]. Um labirinto e a sua imagem num espelho vertical fixado são colocados lado a lado, e um ponto a vermelho representa alguém a entrar no labirinto e a percorrer o trajeto proposto, tentando descobrir a saída sem chocar com as paredes do percurso. É o que ilustra a figura 1, com o labirinto desenhado à esquerda.

Enquanto o ponto vermelho se desloca no labirinto, é traçada em tempo real, à direita, a imagem refletida da trajetória do ponto (veja-se agora a figura 2).

Acontece que, à medida que o ponto vermelho avança no labirinto, este vai-se desvanecendo, e a dado momento deixa mesmo de se ver; à esquerda, fica apenas visível o ponto vermelho. Pelo contrário, à direita, no espelho, as imagens do ponto, do labirinto e do trajeto já percorrido permanecem perfeitamente visíveis.

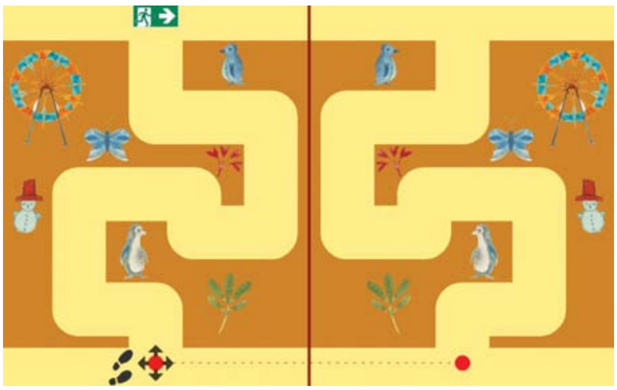


Figura 1.

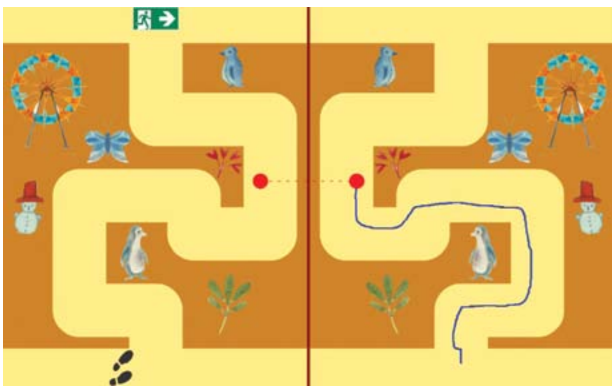


Figura 2.

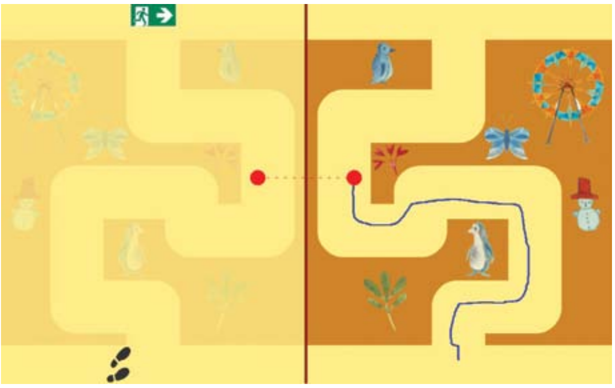


Figura 3.

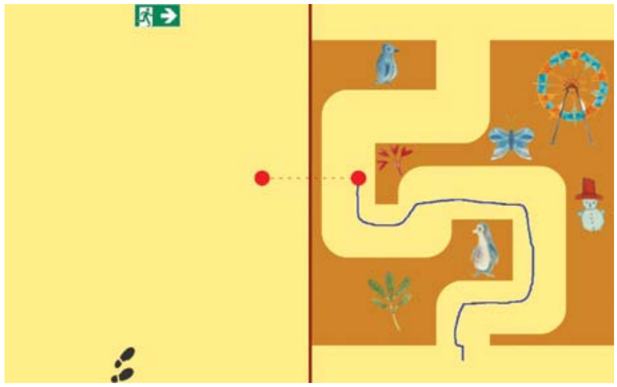


Figura 4.

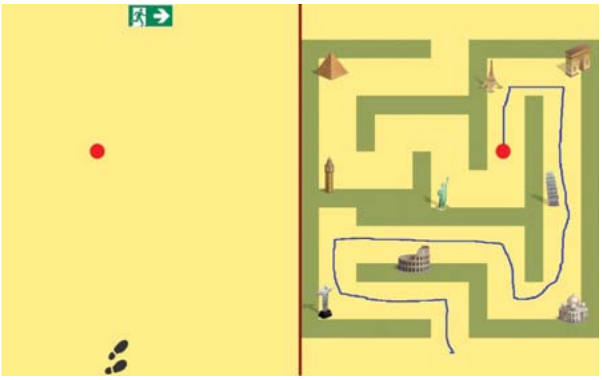


Figura 5.

Figura 6.

Confira esta descrição no exemplo das figuras 3 e 4.

Qual é a dificuldade em nos movimentarmos sob estas restrições? É que, na imagem ao espelho, as noções de direita e esquerda invertem-se. E, por isso, embora a deslocação do ponto vermelho para cima seja também o sentido do movimento do seu refletido no espelho, a manobra de virar à direita passa a ser, na imagem ao espelho, um movimento à esquerda (e reciprocamente).

Para verificar que se entendeu bem como age no plano uma reflexão relativamente a um eixo, e testar a capacidade de pensar, em tempo real, de forma "refletida", o módulo apresenta sequencialmente três labirintos, com dificuldade crescente. As imagens anteriores correspondem à versão mais fácil; a figura 5 mostra a mais difícil.

Tendo em conta que há mais transformações no plano que, sem deformar os objetos, alteram a sua posição, podemos criar outros labirintos com um propósito semelhante ao descrito anteriormente: de uma maneira informal e lúdica, apresentar e experimentar algumas propriedades das reflexões e das rotações, treinando-se ao mesmo tempo a visualização dinâmica das noções de medida, ângulo e orientação no plano. Por exemplo, substituindo a reflexão por uma meia-volta, a imagem da direita representa uma rotação de 180 graus do labirinto em torno de um certo ponto, como mostra o exemplo da figura 6.

Em [2] está disponível a aplicação interativa relativa a este labirinto de meia-volta. A experiência com estes labirintos diversifica-se em [5], endereço que contém um módulo interativo que permite escolher o tipo de labirinto, se está ou não visível em cada momento, se foi refletido ou rodado, e neste caso qual a rotação. As figuras 7 e 8 ilustram a sua utilização.

Estes labirintos, e outro material interativo sobre simetria, fazem parte de uma coleção mais vasta de mó-

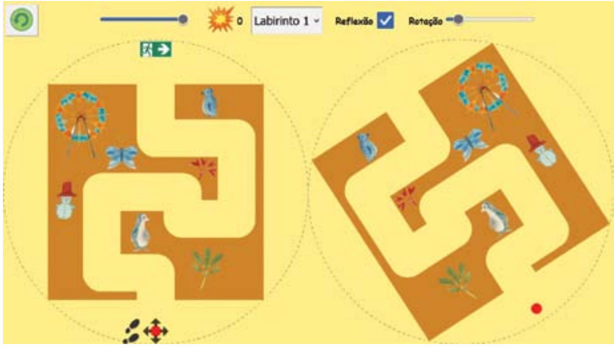


Figura 7.

Figura 8.

dulos elaborados no âmbito de um Projeto Erasmus+, financiado pela Comissão Europeia e intitulado Mathina. Os conteúdos deste projeto propõem atividades para a aprendizagem informal de tópicos de Criptografia, Lógica, Simetria e Visualização Geométrica, contemplando, em cada uma destas áreas, módulos dedicados a quatro faixas etárias (4-6 anos, 7-10 anos, 11-14 anos e 15-19+ anos). Em [3], clicando nas várias opções do menu da página inicial do projeto (que surge no ecrã do utilizador como nas figuras 9 e 10), pode aceder-se a todos estes desafios, e também a um repositório de material de apoio para educadores.

Apostando na comunicação da matemática através de fábulas ou narrativas ficcionadas, um registo raramente usado por divulgadores de ciência, cada um dos jogos do Mathina é acompanhado por um conto escrito especificamente para o projeto. Mais precisamente, para cada uma das temáticas escolhidas, foi redigida uma história por faixa etária e nas várias línguas dos países participantes no projeto, que pode ler em [4].

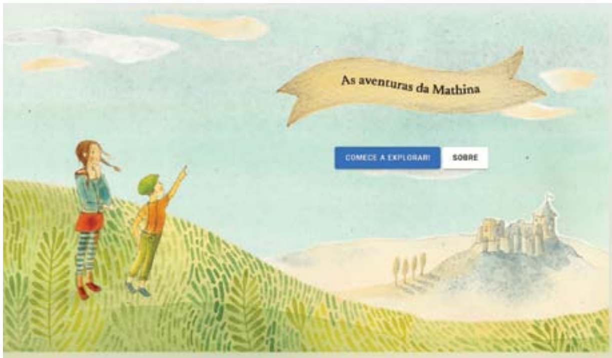


Figura 9.

Figura 10.

REFERÊNCIAS

[1] *https://mathina-hub.netlify.app/pt/story/mathina-the-rossete-game/?actionLink=tg1*

[2] *https://mathina-hub.netlify.app/pt/story/mathina-the-rossete-game/?actionLink=tg2*

[3] *https://www.mathina.eu/pt*

[4] *https://mathina-hub.netlify.app/pt/*

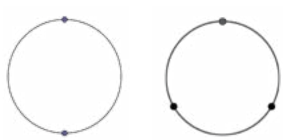
[5] *https://www.atractor.pt/Mathina-extras/labirinto/*

Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

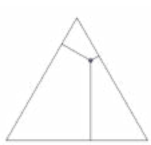
DISTÂNCIAS

A distância entre elementos geométricos é um conceito natural, que se presta a muitas indagações, umas mais profundas, outras mais recreativas. Hoje vamos propor algumas questões relacionadas com a medida do afastamento entre pontos, circunferências, polígonos... Nem todos os problemas propostos são de resolução imediata. Espero que proporcionem entretenimento prolongado aos nossos leitores mais assíduos!

Considere a circunferência unitária. Dois dos seus pontos podem distar, no máximo, a medida do diâmetro, isto é, duas unidades. Cada dois vértices de um triângulo equilátero inscrito distam entre si $\sqrt{3}$. Qual é o maior número de pontos sobre a circunferência unitária tal que qualquer par defina uma distância superior a $\sqrt{2}$?

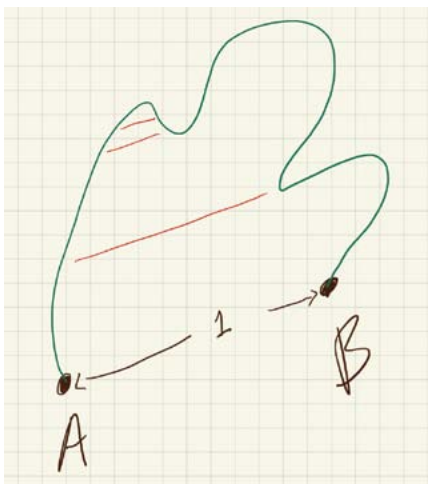


É bem sabido que a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior de um triângulo equilátero aos lados é constante, não depende do ponto em questão. Este resultado é óbvio para outros polígonos, como quadrados e retângulos. Como caracterizar todos os polígonos convexos que gozam desta propriedade?

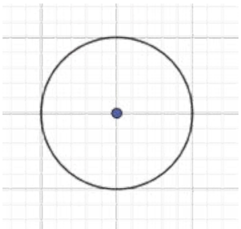


Considere uma curva plana contínua que liga os pontos A e B, à distância 1 um do outro. Que comprimentos poderão assumir as cordas paralelas a AB entre dois pontos da curva?

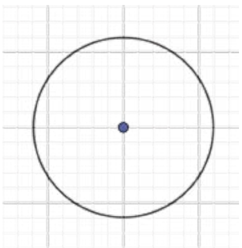
O desafio: mostrar que os comprimentos $\frac{1}{n}$ são todos realizados.



Imagine uma circunferência de raio r, centrada na origem do referencial cartesiano do plano. Pode acontecer ela conter pontos de coordenadas inteiras, por exemplo, se $r = 1$.



Mas também pode suceder o contrário, por exemplo se $r = 1.2$:



Para cada circunferência destas, seja $\delta(r)$ a menor distância de um dos seus pontos a um ponto de coordenadas inteiras.

O desafio: mostrar que $\lim_{r\to\infty} \delta(r) = 0$.

Sobre a questão proposta no número anterior, devo referir aqui, com um agradecimento, a resposta enviada pelo nosso fiel leitor Luís Madureira:

$$\binom{21}{10} = \frac{21!}{11!10!} = 352\,716$$

FABIO CHALUB
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A ILUSÃO DA LUA TORTA

Um olhar atento ao céu é sempre capaz de nos deslumbrar. A Lua, fonte de incontáveis lendas e mistérios, é também a origem de muitas ilusões de ótica. Falaremos hoje de uma ilusão tão persistente quanto desconhecida – e difícil de explicar.

O segundo astro mais brilhante do céu é a Lua. No entanto, esta não produz luz, apenas reflete a luz do Sol. À medida que gira em torno da Terra, a parte da Lua que é iluminada torna-se mais ou menos visível da Terra. Esta é a origem das fases da Lua.

O raciocínio acima é conhecido da generalidade da população, certo? Um corolário óbvio é que a parte iluminada da Lua aponta, sempre, em direção ao Sol. Mas já olhou para o céu para ter certeza de que isto é verdade?

Uma das ilusões de ótica mais persistentes é a "ilusão da Lua torta" (em inglês, *Moon tilt illusion*, também chamada de *Moon terminator ilusion*). O lado brilhante da Lua, pelo menos aparentemente, *não* aponta para o Sol.

Se nunca reparou nisto, espere por um fim de tarde de Lua crescente, com cerca de metade da Lua iluminada, e vá para uma região de vista desobstruída. Algumas horas antes do pôr do Sol, quando Sol e Lua estão presentes no firmamento, olhe para a Lua, verifique a perpendicular da linha que separa a região clara da região escura, e veja se esta irá encontrar o Sol.

Para os amantes das manhãs, o mesmo pode ser feito pouco depois da aurora, num dia de Lua minguante.

Para os apressados, veja a figura 1.

É bastante claro que a linha imaginada no raciocínio acima não se origina no Sol.

Qual será a explicação?

É interessante que não há um consenso bem estabelecido sobre a persistência desta ilusão. No entanto, todas as possíveis explicações, em alguma medida, referem-se ao facto de que tentamos construir uma imagem mental de um mundo tridimensional a partir de imagens bidimensionais.

Figura 1. Foto tirada no verão de 2021, na praia da Torre (Cascais), virada a Sul, cerca de duas horas antes do pôr do Sol, num dia de Lua crescente. Não há manipulação da imagem, exceto pela ampliação da Lua (sem rotação da imagem) e a distorção da imagem dos banhistas. É bastante claro que o lado iluminado não aponta na direção em que o Sol aparenta estar. Modificações pelo autor sobre foto de Alice Chalub, que gentilmente permitiu a publicação.

De facto, aquilo que vemos em cada olho é sempre uma projeção do mundo sobre o fundo dos nossos olhos (retina), e portanto uma imagem bidimensional sobre uma superfície curva. A imagem gerada em cada um dos dois olhos é ligeiramente diferente. Ao olharmos para uma paisagem complexa, os elementos distantes parecerão os mesmos para ambos os olhos, enquanto o que está próximo será ligeiramente diferente. A variação angular da linha de visão de um certo objeto contra um fundo imutável é conhecida como "paralaxe". Pisque os olhos alternadamente e verá que a paralaxe é tão maior quanto mais próximo está o foco de nossa atenção.

Ao tentar interpretar as duas imagens oculares produzindo uma visão de mundo consistente, o que é feito pelo cérebro, temos a perceção das distâncias. Pelo explicado acima, sem recorrer a outros auxílios (como o contexto da imagem) é sempre mais difícil estimar a distância do que está longe do que daquilo que está próximo.

Para distâncias tais como as do Sol ou da Lua, a nossa visão binocular é completamente inútil. Somos incapazes de avaliar, de forma puramente intuitiva, qual destes astros está mais distante.

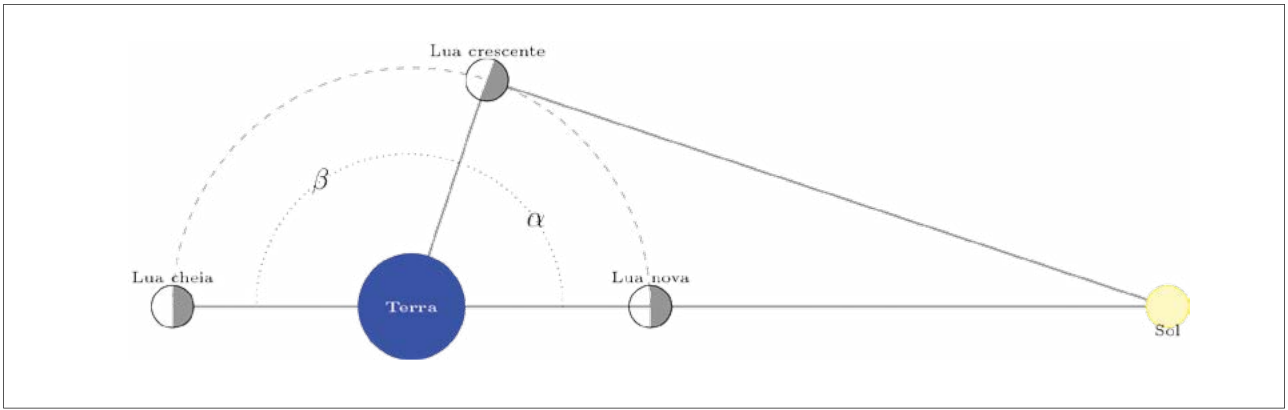
Um pouco de raciocínio geométrico, no entanto, permite-nos concluir que o Sol está muito mais distante do que a Lua. De facto, o intervalo de tempo entre a Lua nova e a Lua crescente é semelhante ao tempo entre esta e a Lua cheia. Supondo que a sua velocidade orbital é uniforme, concluímos que a luz do Sol chega à Terra e à Lua em raios paralelos, mostrando que a distância Terra-Sol é muito maior do que o diâmetro orbital da Lua. Veja a figura 2.

No entanto, outra informação chega ao nosso cérebro com mais força: o facto de que Sol e Lua têm tamanhos aparentes aproximadamente iguais é interpretado como indicativo de que são objetos de mesmo tamanho. Na ausência de paralaxe, esta é a única informação relevante para indicar a distância de um objeto (veja um camião ao longe, e inferimos a distância pelo seu tamanho, supostamente conhecido – quando este é muito maior ou menor do que os camiões que nos são familiares, podemos ser levados a graves erros de inferência). Por esta falta de informação direta das distâncias dos objetos celestes, durante muitos milénios era considerado que os mesmos se moviam numa "abóboda celestial" (ou no "firmamento").

Assim, ao olhar para o céu pensamos que o Sol está numa certa posição do espaço tridimensional quando, na verdade, ele está muito mais longe – mais precisamente, a uma distância cerca de 400 vezes superior à distância Terra-Lua. Ao colocar mentalmente o Sol no seu devido lugar, o estranho efeito da Lua *torta* desaparece. O lado iluminado aponta para um *Sol verdadeiro* muito atrás do que imaginamos ver (o *sol fantasma* da figura 3).

No entanto, tal como a diferença aparente de tamanho da Lua no horizonte e no zénite, a ilusão persiste. Afinal, linhas retas no espaço sideral não são necessariamente vistas como linhas retas no céu; como dito, vemos apenas uma projeção bidimensional da realidade tridimensional. Veja o interessante vídeo [1] para perceber como as linhas retas são interpretadas com dificuldade na ausência de contexto; aliás, este vídeo inclui explicações sobre o assunto deste artigo.

Figura 2. O facto de que o tempo necessário entre uma lua nova e a lua crescente subsequente e entre esta e a lua cheia são comparáveis indica que os ângulos α e β são muito próximos. Assim, concluímos que o Sol está muito mais distante da Terra do que a Lua.



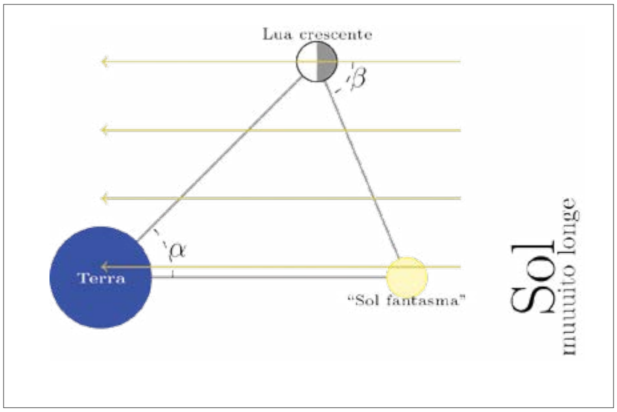


Figura 3. O Sol está muito mais distante da Terra do que a Lua, mas não conseguimos avaliar esta diferença com precisão. De facto, como os seus tamanhos aparentes são semelhantes, é natural imaginar que as suas distâncias são de ordens de grandeza parecidas. Imaginamos o Sol onde ele de facto não está. A diferença entre a direção real de incidência dos raios de Sol sobre a Lua e a direção expectável no desenho acima é $\beta = \frac{\pi-\alpha}{2}$, onde α é a distância angular entre as posições aparentes do Sol e da Lua; este não é o ângulo de inclinação da Lua, em relação à linha reta que a une ao Sol!

A explicação apresentada aqui é baseada em [2], mas o leitor interessado deve consultar também [3, 4, 5].

A Lua é cheia de mistérios!

REFERÊNCIAS

[1] *The Moon Terminator Illusion*, by V Sauce, h*ttps://youtu.be/Y2gTSjoEExc (em 1/9/2021).*

[2] M V Berry, *The squint Moon and the witch ball*, New J. Phys. 17 (2015) 060201.

[3] Georg Glaeser and Karlheinz Schott, *Geometric Considerations About Seemingly Wrong Tilt of Crescent Moon*, KoG (Croatian Soc. Geom. Graph.) 13 (2009), 19-26.

[4] A. K. Myers-Beaghton, A. L. Myers, *The Moon Tilt Illusion*, KoG (Croatian Soc. Geom. Graph.) 18 (2014), 53-59.

[5] Schölkopf B. *The Moon Tilt Illusion*. Perception. 1998;27(10):1229-1232. doi:10.1068/p271229

Alfredo Costa
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

O TEOREMA DE MONSKY

Pode um quadrado ser dividido num número ímpar de triângulos com áreas iguais? Este problema foi resolvido em 1970. A respectiva demonstração é sedutora.

1. INTRODUÇÃO

É fácil dividir um quadrado num qualquer número par de triângulos de áreas iguais: para obtermos $2n$ tais triângulos, podemos por exemplo dividir uma das diagonais em n segmentos de igual comprimento e unirmos as extremidades dos segmentos aos vértices da outra diagonal.

Surge a questão: é possível dividir um quadrado num número ímpar de triângulos de áreas iguais? A resposta a este problema é o Teorema de Monsky, datado de 1970 [6].

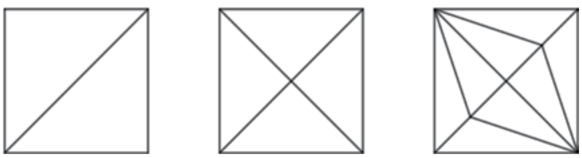


Figura 1. Dividindo um quadrado num número par de triângulos de áreas iguais.

As origens do Teorema de Monsky são curiosas, desde logo por não serem remotas. Em 1965, Fred Richman, na Universidade do Novo México em Las Cruces, considerou incluir este problema num exame de mestrado, até ter desistido desse intento ao constatar que não era capaz de resolvê-lo! Richman mencionou o problema ao seu colega John Thomas, tendo este obtido alguns resultados parciais que publicou em 1968 [9]. Nas palavras de Thomas, "o referee[1] pensava que o problema era bastante fácil (embora não fosse capaz de o resolver) e que era provavelmente bastante conhecido (embora não encontrasse referência para ele)".

Dois anos depois, em 1970, surge a demonstração completa de Monsky. É uma prova sedutora: resolve o que aparenta ser um problema simples da Geometria Euclidiana com ferramentas da matemática do século XX, aliando combinatória (via Lema de Sperner) com ideias da teoria dos números e da álgebra avançada moderna (via valorações p-ádicas).

Teorema (Monsky). *Não é possível dividir um quadrado num número ímpar de triângulos com áreas iguais.*

Figura 2. Paul Monsky.[2]

[1] Refere-se ao matemático anónimo que analisou o artigo a pedido do corpo editorial da revista em que o submeteu para publicação.

[2] By Schmid, Renate – *https://opc.mfo.de/detail?photo_id=11637*, CC BY-SA 2.0 de, *https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18315985*

2. O LEMA DE SPERNER

Temos usado as palavras *divisão*, *dividir* num contexto geométrico... Vamos preferir o termo *dissecação* em desfavor de *divisão*, dado que este tem um pendor mais aritmético. Definimos formalmente uma *dissecação* de um polígono p como sendo uma família finita de triângulos cuja reunião é p e cujos interiores são disjuntos dois a dois. Um *triângulo da dissecação* será um dos triângulos dessa família. Uma dissecação de p diz-se *simplicial* se a intersecção das fronteiras de dois triângulos que a constituem for vazia, um vértice em comum, ou um lado comum.

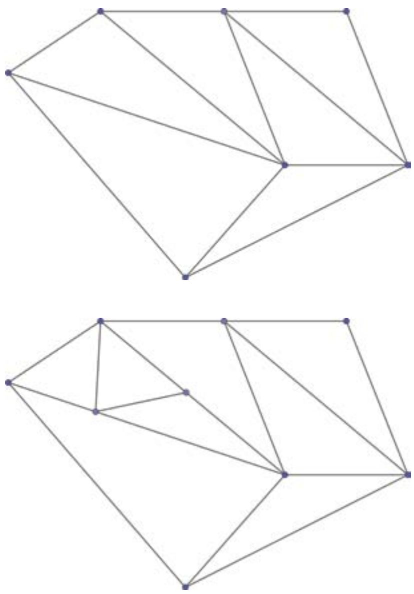


Figura 3. Dissecação simplicial e dissecação não simplicial.

Vamos etiquetar cada vértice num polígono P com uma de três etiquetas A, B ou C. Dizemos que um segmento é *completo* se as suas extremidades forem respectivamente etiquetadas com as etiquetas A e B, ou B e A. Note-se que estamos a atribuir uma ordem às etiquetas: A, B, C. Finalmente, dizemos que o polígono P é *completo* se tem um número ímpar de lados completos. Por exemplo, o hexágono na figura 4 é completo, pois tem três lados completos.

Assim, um triângulo é completo se e só se as três etiquetas A, B e C surgem nos vértices.

Dada uma dissecação de um polígono, vamos querer etiquetar todos os vértices de todos os triângulos que surgem na dissecação. O Lema de Sperner garante que

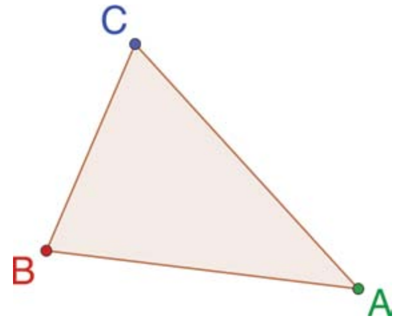


Figura 4. Hexágono completo.

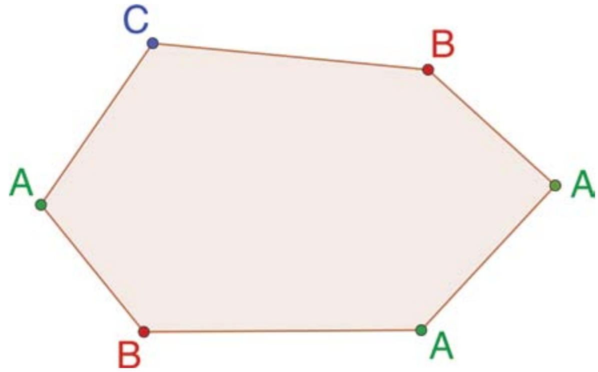


Figura 5. Triângulo completo.

se um triângulo é completo, e se os vértices de cada lado do triângulo não recebem mais do que dois tipos de etiqueta, então numa sua qualquer dissecação simplicial pelo menos um dos triângulos da dissecação é completo.

O Lema de Sperner, datado de 1928 e da autoria do matemático alemão Emanuel Sperner, tem como aplicação mais famosa a sua utilização na demonstração habitualmente preferida do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o qual nos diz que qualquer função contínua de um disco fechado nele próprio contém algum ponto fixo.

O Lema de Sperner também é usado na demonstração do Teorema de Monsky. Bom, na verdade precisamos de uma sua variação, caso não queiramos uma demonstração válida apenas para dissecações simpliciais. A seguinte versão "não simplicial" vem com um preço: exigimos que na dissecação não seja possível termos três vértices colineares com etiquetas todas distintas.

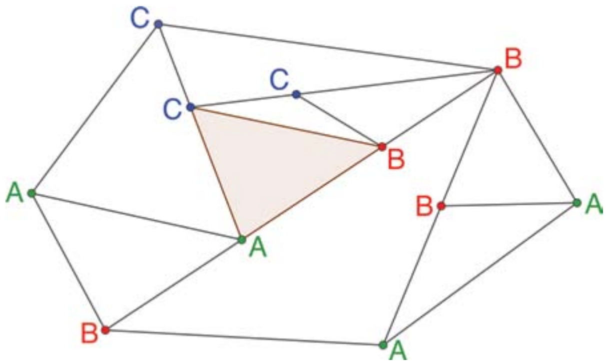


Figura 6. Lema de Sperner não simplicial.

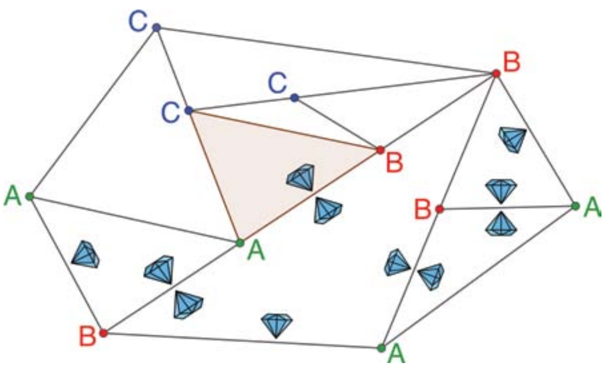


Figura 7. Demonstração do Lema de Sperner não simplicial.

Lema (Lema de Sperner, versão não simplicial). *Consideremos num polígono uma dissecação cujos vértices são marcados por uma das etiquetas A, B ou C; os vértices colineares não recebem mais do que dois tipos de etiquetas. Se o polígono for completo, então pelo menos um dos triângulos da dissecação é completo.*

Note-se que se na figura 6 trocámos a etiqueta B no triângulo a cheio por C, então deixámos de ter qualquer triângulo completo.

A demonstração dá-nos mais do que necessitamos, informando-nos de que o número de lados completos do polígono é ímpar se e só se o número de triângulos completos na dissecação é ímpar.

Prova do Lema de Sperner não simplicial. Em cada triângulo da dissecação, coloquemos um diamante junto de cada segmento na sua fronteira que seja completo (cf. figura 7). A partir do facto de que cada lado do triângulo não recebe mais do que duas etiquetas, deduz-se que um (lado de um) triângulo é completo se e só se tem um número ímpar de diamantes. Portanto, o número de diamantes tem a mesma paridade que o número de triângulos completos.

Contemos os diamantes de outro modo. Junto de cada segmento completo no interior do polígono, há dois diamantes; junto de cada segmento completo na fronteira do polígono, só há um diamante; como cada lado não recebe mais do que duas etiquetas, cada lado completo do polígono tem um número ímpar de diamantes. Assim, o número de diamantes tem a mesma paridade que o número de lados completos do polígono.

Com estas duas formas de contar os diamantes, concluímos que o número de lados completos do polígono tem a mesma paridade que o número de triângulos completos na dissecação. □

3. VALORAÇÕES p-ÁDICAS

Mudemos de ambiente. Seja p um número primo. Denote-se por $v_p(n)$ o maior natural k tal que p^k divide n, onde n é um qualquer inteiro. A função v_p "mede a divisibilidade" de n por p. Por exemplo, temos $v_5(75) = 2$, $v_2(40) = 3$ e $v_2(75) = 0$. Note-se que esta definição faz sentido mesmo quando n é negativo, tendo-se $v_p(n) = v_p(-n)$.

E que valor $v_p(0)$ tem? Como p^k divide 0 qualquer que seja o natural k, podemos dizer que $v_p(0)$ é infinito, escrevendo $v_p(0) = \infty$. Vamos considerar o conjunto $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, convencionando que $\infty > x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, com as habituais regras aritméticas da álgebra dos limites.

Qual é o próximo passo? Estender v_p a $\mathbb{Q}$, mas de modo a continuarmos com a propriedade

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

A única forma de o fazer é, para quaisquer inteiros a, b tais que $b \neq 0$, definirmos

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b).$$

Esta definição também preserva a propriedade

$$v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

que, quando x, y são inteiros, exprime que sempre que p^k divide x e y, então p^k também divide $x+y$. Note-se que $v_p(x^{-1}) = v_p(1) - v_p(x) = -v_p(x)$. Podemos continuar a dizer que v_p "mede a divisibilidade" por p de um qualquer número racional. Vejamos dois exemplos que ajudam a interiorizar esta afirmação:

$$v_2\left(\frac{1}{2}\right) = v_2(2^{-1}) = -1,$$

$$v_5\left(\frac{11}{100}\right) = v_5\left(5^{-2}\frac{11}{4}\right) = -2.$$

O leitor pode ainda não saber que um *corpo* de números reais é um conjunto $\mathbb{K}$ de números reais contendo 0 e 1 que é fechado para a subtracção e a divisão (isto é, $\mathbb{K}$ é tal que $a, b \in \mathbb{K}$ implica $a - b \in \mathbb{K}$, e $a, b \in \mathbb{K}$ com $b \neq 0$ implica $ab^{-1} \in \mathbb{K}$). O menor corpo de números reais que contém os inteiros é o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais.

Abstraindo as propriedades de v_p, definimos uma *valoração* em $\mathbb{K}$ como sendo uma função $v\colon \mathbb{K} \to \widehat{\mathbb{R}}$ tal que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, se tem:

- $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,
- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.

Destas propriedades deduz-se facilmente que $v(1) = 0$, $v(-x) = v(x)$ e que:

- $v(x) < v(y) \Rightarrow v(x) = v(x + y)$.

A extensão de v_p a $\mathbb{Q}$, introduzida atrás, é uma valoração no corpo dos racionais, que se denomina *valoração p-ádica*.

Estamos preparados para introduzir o seguinte resultado crucial.

Teorema. (Teorema da Extensão das Valorações) *Seja v uma valoração num corpo $\mathbb{K}$ de números reais. Então v pode ser estendida a uma valoração definida em $\mathbb{R}$.*

Portanto, podemos estender a valoração $v_p\colon \mathbb{Q} \to \widehat{\mathbb{R}}$ a todos os números reais. A demonstração da existência de uma tal extensão é difícil [2]. É de mencionar que a demonstração garante a existência de uma infinidade de extensões de $v_p\colon \mathbb{Q} \to \widehat{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{R}$. Na ausência de ambiguidade, denota-se qualquer uma dessas extensões também por v_p. A valoração $v_p\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ é portanto a valoração p-ádica nos números reais.

Ainda em $\mathbb{R}$, mantém-se em boa medida a intuição de que v_p mede a divisibilidade por p. Por exemplo, temos $v_2(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{3}$, uma vez que $1 = v_2(2) = v_2((\sqrt[3]{2})^3) = 3v_2(\sqrt[3]{2})$. Note-se que $\sqrt[3]{2}$ é um número *algébrico* (i.e., é uma raiz de um polinómio de coeficientes racionais). Em contraste, se x é um número real *transcendente* (i.e., não é algébrico) e y é um qualquer número real, então a extensão v_p pode ser escolhida de modo a termos $v_p(x) = y$.

4. A DEMONSTRAÇÃO DE MONSKY

A demonstração do Teorema de Monsky alia o Lema de Sperner com as valorações 2-ádicas.

Seja p um primo. A cada valoração v definida em $\mathbb{R}$ vamos associar a seguinte partição de $\mathbb{R}^2$:

$$S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_p(x) > 0 \text{ e } v_p(y) > 0\}$$
$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_p(x) \leq 0 \text{ e } v_p(y) \geq v_p(x)\}$$
$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_p(x) > v_p(y) \text{ e } v_p(y) \leq 0\}$$

Na falta de uma representação geométrica para S_i, podemos observar que se $\vartheta\colon \mathbb{R}^2 \to \widehat{\mathbb{R}^2}$ for a função $\vartheta(x, y) = (v_p(x), v_p(y))$, então os conjuntos

$$T_0 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X > 0 \text{ e } Y > 0\}$$
$$T_1 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X \leq 0 \text{ e } Y \geq X\}$$
$$T_2 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X > Y \text{ e } Y \leq 0\}$$

satisfazem $S_i = \vartheta^{-1}(T_i)$ e formam uma partição de $\widehat{\mathbb{R}}^2$ que admite a representação gráfica na figura 8.

A etiquetagem de Monsky é aquela em que se atribui as etiquetas A, B e C respectivamente aos pontos de S_0, S_1 e S_2.

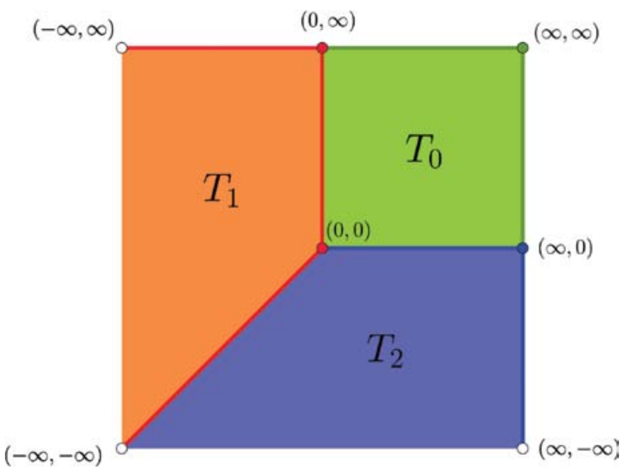


Figura 8. Partição de $\widehat{\mathbb{R}}^2$.

O lema seguinte diz-nos que as translações segundo vectores de S_0 não alteram as etiquetas de Monsky.

Lema. *Se $Q_0 \in S_0$ e $P_i \in S_i$, então $P_i - Q_0 \in S_i$.*

Prova. Recordemos que $v_p(-x) = v_p(x)$ e que $v_p(x) < v_p(y) \Rightarrow v_p(x) = v_p(x \pm y)$.

Façamos $P_i = (x_i, y_i)$ e $Q_0 = (a, b)$. Comecemos pelo caso $i = 0$. Temos

$$v_p(x_0 - a_0) \geq \min\{v_p(x_0), v_p(a_0)\} > 0$$

e, analogamente, $v_p(y_0 - b_0) > 0$, pelo que $P_0 - Q_0 \in S_0$.

Passemos ao caso $i = 1$. Neste caso, temos $v_p(x_1) \leq 0 < v_p(a_0)$, pelo que $v_p(x_1 - a_0) = v_p(x_1) \leq 0$.

Por outro lado, deduzimos de $v_p(y_1) \geq v_p(x_1)$ e $v_p(x_1) \leq 0 < v_p(b_0)$ que

$$\begin{aligned} v_p(y_1 - b_0) &\geq \min\{v_p(y_1), v_p(b_0)\} \\ &\geq v_p(x_1) = v_p(x_1 - a_0). \end{aligned}$$

Concluímos que $P_1 - Q_0 \in S_1$. Analogamente se prova que $P_2 - Q_0 \in S_2$. □

No que se segue, denotamos por Área(P) a área de um polígono P.

Proposição. *Seja T um triângulo completo, relativamente à etiquetagem de Monsky. Então temos $v_p(\text{Área}(T)) \leq -v_p(2)$.*

Prova. Por hipótese, T tem vértices (x_i, y_i) tais que $(x_i, y_i) \in S_i$ (onde $0 \leq i \leq 2$). Pelo lema anterior, a translação associada ao vector $(-x_0, -y_0) \in S_0$ não altera as etiquetas. E como também preserva as áreas, podemos supor que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Então temos

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - y_1 x_2|,$$

pelo que

$$\begin{aligned} v_p(\text{Área}(T)) &= v_p\left(\frac{1}{2}\right) + v_p(|x_1 y_2 - y_1 x_2|) \\ &= -v_p(2) + v_p(x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned}$$

Uma vez que $(x_1, y_1) \in S_1$ e $(x_2, y_2) \in S_2$, temos

$$\begin{aligned} v_p(x_1 y_2) &= v_p(x_1) + v_p(y_2) \\ &< v_p(y_1) + v_p(x_2) = v_p(y_1 x_2). \end{aligned}$$

Recordemos que $v_p(x_1 y_2) < v_p(y_1 x_2)$ implica que $v_p(x_1 y_2 - y_1 x_2) = v_p(x_1 y_2)$, pelo que

$$v_p(\text{Área}(T)) = -v_p(2) + v_p(x_1 y_2).$$

Ora de $(x_1, y_1) \in S_1$ e $(x_2, y_2) \in S_2$, resulta logo que $v_p(x_1 y_2) = v_p(x_1) + v_p(y_2)$ não é positivo. □

Corolário. *Cada recta de $\mathbb{R}^2$ recebe no máximo duas das etiquetas de Monsky.*

Prova. Se o corolário fosse falso, então existiria um triângulo T de área zero e completo relativamente à etiquetagem de Monsky. Pela proposição anterior, teríamos $v_p(0) \leq -v_p(2)$, o que é absurdo, uma vez que $v_p(0) = \infty$. □

Designamos por *m-equidissecação* uma dissecação em m triângulos de áreas iguais.

Corolário. *Se o polígono P admitir alguma m-equidissecção que inclui algum triângulo completo relativamente à etiquetagem de Monsky, então $v_p(m) \geq v_p(2 \cdot \text{Área}(P))$.*

Prova. Se T for um triângulo da m-equidissecção, então Área(P) = Área$(T) \cdot m$ e

$$\begin{aligned} v_p(2 \cdot \text{Área}(P)) &= v_p(2) + v_p(\text{Área}(P)) \\ &= v_p(2) + v_p(\text{Área}(T)) + v_p(m) \\ &\leq v_p(m), \end{aligned}$$

graças à proposição anterior sobre triângulos completos. □

Prova do Teorema de Monsky. Suponhamos que o quadrado P admite uma m-equidissecação. Podemos supor que os vértices de P são (0,0), (1,0), (0,1) e (1,1). Como $v_2(0) = \infty$ e $v_2(1) = 0$, o quadrado P é completo relativamente à etiquetagem de Monsky associada ao primo $p = 2$ (cf. figura 9).

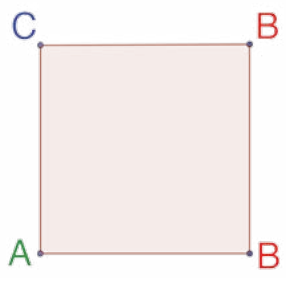


Figura 9. Etiquetagem quando $p = 2$.

Recordando que cada recta recebe no máximo duas etiquetas, deduzimos da versão não simplicial do Lema de Sperner que na dissecação existe algum triângulo completo. Aplicando o último corolário, vemos que $v_2(m) \geq v_2(2) = 1$, ou seja, m é par. □

5. CONCLUSÃO

O *espectro* de um polígono P é o conjunto dos m tais que P admite uma m-equidissecação. O Teorema de Monsky diz-nos que o espectro do quadrado consiste nos números positivos pares.

O método aqui exposto é o único conhecido para demonstrar o Teorema de Monsky. Elaine Kasimatis [5] aplicou-o para provar que se $n \geq 5$, então o espectro de um polígono regular de n lados é o conjunto dos múltiplos positivos de n. Kasimatis usou uma generalização ainda mais poderosa do Lema do Sperner, onde se tem em conta a orientação dos segmentos completos.

Como exemplo adicional, e como exercício, propomos ao leitor o seguinte desafio:

Problema. *Sejam x um real positivo e $T(x)$ o trapézio de vértices (0,0), (0,1), (x,1) e (1,0). Mostre que se $x = \frac{r}{s}$ com r, s inteiros positivos primos entre si, então o espectro de $T(x)$ consiste nos múltiplos de $r+s$; e mostre que se x é transcendente, então o espectro de $T(x)$ é vazio.*

Note-se que se $x = 1$, então temos o Teorema de Monsky. A solução deste problema deve-se a Elaine Kasimatis e Sherman Stein [4].

Continuam as investigações sobre equidissecações, com problemas interessantes em aberto. Vejam-se, por exemplo, os artigos [3, 7].

Avisamos que na literatura se opta frequentemente por uma outra perspectiva sobre v_p, trabalhando-se no seu lugar com a *norma p-ádica*, definida por $\|x\|_p = p^{-v_p(x,y)}$. Valorações nos complexos também são consideradas.

O quinto capítulo de [8] oferece uma boa introdução ao método de Monsky e às suas aplicações, contendo uma solução do desafio proposto ao leitor. O capítulo 22 de [1] é de agradável leitura, e lá encontramos um atalho que permite substituir o Teorema da Extensão das Valorações por um resultado mais débil, não se escapando ainda assim às ideias fundamentais de Monsky.

REFERÊNCIAS

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. P*roofs from THE BOOK. Including illustrations by Karl H. Hofmann.* Berlin: Springer, 2018.

[2] Antonio J. Engler and Alexander Prestel. *Valued fields*. Berlin: Springer, 2005.

[3] Charles H. Jepsen and Paul Monsky. "Constructing equidissections for certain classes of trapezoids". *Discrete Math.*, 308(23):5672-5681, 2008.

[4] Elaine A. Kasimatis and Sherman K. Stein. "Equidissections of polygons". *Discrete Math.*, 85(3):281-294, 1990.

[5] Elaine A. Kasimatis. "Dissections of regular polygons into triangles of equal areas". *Discrete Comput. Geom.*, 4(4):375-381, 1989.

[6] Paul Monsky. "On dividing a square into triangles". *Am. Math. Mon.*, 77:161-164, 1970.

[7] Daniil Rudenko. "On equidissection of balanced polygons". *J. Math. Sci., New York*, 190(3):486-495, 2013.

[8] Sherman K. Stein and Sándor Szabó. *Algebra and tiling: homomorphisms in the service of geometry,* volume 25. Washington, DC: MAA, 1994.

[9] John Thomas. "A dissection problem". *Math. Mag.*, 41:187-190, 1968.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

O HOMICIDA MATEMÁTICO

É aqui dada a conhecer a história de Christopher Havens, um homicida condenado que nunca terminou o Ensino Secundário, mas que conseguiu começar a fazer pesquisa em Teoria dos Números a partir da prisão.

Não há muitos casos de matemáticos que se tornaram homicidas, embora haja alguns, como André Bloch (veja-se [2]) ou Ted Kaczynski, o *Unabomber*[1]. Este texto é sobre algo que deve ser bastante mais raro: o caso de um homicida que se torna matemático.

O homicida em questão chama-se Christopher Havens e está, desde 2011, a cumprir, numa prisão de alta segurança do estado de Washington, nos Estados Unidos, uma pena de 25 anos de prisão por um homicídio ligado a tráfico de metanfetaminas (tanto Havens como a sua vítima eram traficantes).[2] Antes de ter sido preso, Havens era um drogado desprovido de ambições, objetivos na vida ou futuro. Isto nas próprias palavras dele.[3] Pouco depois de ter começado a cumprir a pena, agrediu outro prisioneiro, o que teve como resultado vários meses de prisão solitária. Aí, para se entreter, começou a fazer sudokus. Por outro lado, apercebeu-se de um prisioneiro, que ele conhecia apenas por "senhor G.", que tinha um trabalho que consistia em fazer entregas a outros prisioneiros. Um dia, ao aperceber-se de que o senhor G. estava a passar junto à sua cela, Havens perguntou-lhe o que é que ele entregava aos outros. Não teve resposta, mas no dia seguinte recebeu do senhor G. um envelope, entregue através do postigo que havia junto à base da porta da cela. E o que havia nesse pacote eram problemas matemáticos.

À partida, dificilmente poderia parecer que Havens era a pessoa certa para receber problemas matemáticos na sua cela. Nunca concluíra o Ensino Secundário, mesmo quando o frequentava faltava a muitas aulas e, devido ao uso de drogas, as memórias que tinha da adolescência estavam bastante enevoadas. Por outro lado, tinha sido um aluno acima da média a Matemática no Ensino Básico, ao ponto de os professores lhe pedirem para ajudar os colegas mais fracos. Como já estava a fartar-se do sudoku, dedicou-se aos problemas que o senhor G. lhe forneceu. E começou a ganhar-lhe o gosto.

Os problemas eram muito básicos e consistiam sobretudo em questões sobre Álgebra. Por outro lado, as resoluções eram corrigidas, o que deu a Havens a oportunidade de ir melhorando no que fazia. Ao fim de algum tempo, perguntou ao senhor G. se tinha problemas mais avançados. Este não só não tinha como, ao fim de algum tempo, passou a Havens um bilhete que dizia "Sr. Havens, ultrapassou as minhas capacidades. Boa sorte."

---

[1] *The Unabomber: https://www.fbi.gov/history/famous-cases/unabomber*

[2] Veja-se **A. C. Shiltom**, *This Inmate Used Solitary Confinement to Learn Math. Now He's Solving the World's Hardest Equations*, *https://www.popularmechanics.com/science/math/a34887986/chris-havens-math-inmate/* e **Evelyn Lamb**, *A Self-Taught Math Genius Wrote This Riddle While Serving Time in Prison. Can You Solve It?*, *https://www.popularmechanics.com/science/math/a35520893/havens-math-horizons-problem/*. Veja-se também o vídeo *From* meth to math no *YouTube https://www.youtube.com/watch?v=TzphFo3vF30*

[3] Isto pode ser ouvido a ser dito pelo próprio em *https://www.doc.wa.gov/news/2017/03172017.htm*

Havens resolveu então aprender mais Matemática. Começou por pedir à mãe que lhe enviasse um livro de Trigonometria. Seguiu-se, ao fim de algumas semanas, o pedido de um livro de Análise Real. À medida que o tempo passava, ia pedindo livros de nível cada vez mais avançado. Quando pediu à mãe que lhe arranjasse um livro sobre funções hipergeométricas confluentes,[4] a mãe teve de lhe pedir que soletrasse o título.

Também ficou claro para Havens que, por mais que os livros ajudassem, ele precisava de ter alguém com quem trocar correspondência sobre Matemática. E, para tal, escreveu a um dos editores da revista *Annals of Mathematics* dizendo, entre outras coisas,

> "Estou a estudar por mim próprio e é frequente ficar bloqueado num problema por longos períodos de tempo. Há alguém com quem possa corresponder-me? Não há professores aqui, o que me leva a gastar centenas de dólares em livros que podem ter ou não ter a ajuda de que necessito."

Este editor passou a carta a um casal de matemáticos, Luisella Caire e Umberto Cerruti (docentes, respetivamente, do Instituto Politécnico de Turim e da Universidade de Turim), que começaram a trocar correspondência com Havens (veja-se [1]).[5]

Entretanto, outros prisioneiros começaram a deixar-se contagiar pelo entusiasmo de Havens pela Matemática. Havens começou a dar lições aos outros e formaram um grupo com o objetivo de resolver problemas da revista *Math Horizons*. Em 2015, Havens enviou a Gary Gordon, o editor da secção de problemas daquela revista, a solução de um problema que tinha ali sido publicado. Gordon apercebeu-se de que o autor daquela solução não tivera uma educação matemática convencional, o que não o impediu de chegar a uma solução correta.

Recentemente (veja-se [5]), o próprio Havens publicou um problema na *Math Horizons*:

> Qual é o menor número natural n tal que $1729n^2+1$é um quadrado perfeito?

O número 1729 não foi escolhido ao acaso. É retirado de uma famosa história que envolve os matemáticos G. H. Hardy e Srinivasa Ramanujan. Ramanujan estava então internado num hospital e Hardy foi visitá-lo, tendo-lhe dito que o táxi que o levara até lá tinha aquele número, acrescentando que se tratava de um número particularmente desinteressante. Ramanujan respondeu-lhe que, pelo contrário, se tratava de um número muito interessante, por ser o menor número natural que se pode exprimir como soma de dois cubos de duas maneiras diferentes ($1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$).

Uma equação do tipo $m^2 - an^2 = 1$, onde a é um número natural que não é um quadrado perfeito (é o caso de 1729) e onde só estamos interessados em soluções inteiras (as chamadas equações diofantinas) é conhecida por "equação de Pell" e já foram abordadas nesta rubrica (veja-se [4]). O problema proposto por Havens é então o seguinte: de todas as soluções da equação de Pell $m^2 - 1729n^2 = 1$, qual é aquela para a qual o número n é o menor possível? Já há séculos que se sabe como resolver estas equações. Mas uma coisa é saber resolver e outra é levar os cálculos até ao fim. E, no caso do problema proposto por Havens, há mesmo muitos cálculos a levar a cabo. Já agora: a resposta é 1 072 885 712 316.

O algoritmo usualmente empregue para resolver uma equação de Pell está ligado a frações contínuas. Uma fração contínua é uma expressão do género

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},$$

onde a_0 é um inteiro e cada a_k, com $k > 0$, é um número natural. Qualquer número real pode ser expresso desta forma. Por exemplo,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}$$

e

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}};$$

em ambos as casos, a sucessão dos a_k continua da maneira que os seus primeiros termos sugerem. O método de resolução da equação de Pell $m^2 - an^2 = 1$ atrás mencionado está ligado à fração contínua de $\sqrt{a}$, que, no caso em que $a = 1729$, começa por

$$41+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}}}$$

mas aqui os primeiros termos enganam, isto é, o padrão não é tão simples quanto o sugerido; por exemplo, $a_{10} = 8$ e $a_{13} = a_{17} = 27$. Havens ficou fascinado com as frações contínuas e afirmou "Para mim, uma fração contínua é o coração de um número irracional".

Mas Havens fez bastante mais do que aprender matemática e resolver problemas da *Math Horizons*. Quando Umberto Cerruti começou a corresponder-se com Havens, enviou-lhe um problema. A resposta foi muito longa e continha uma fórmula bastante complexa. Cerruti introduziu a fórmula num computador e verificou que estava correta. Enviou então a Havens um novo problema. Desta vez, tratava-se de um problema em aberto relativo a frações contínuas, no qual o próprio Cerruti estava a trabalhar. O resultado final desta colaboração foi um artigo [3] que foi publicado em 2020.

Havens está ciente de que ainda irá passar muitos anos na prisão. Mas já fez saber que uma das primeiras coisas que tenciona fazer após sair de lá é juntar-se à comunidade matemática e assistir a uma palestra. Esperemos que consiga alcançar este objetivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Luisella Caire, Umberto Cerruti, Gary Gordon, "Pi Day behind bars", *Math Horizons*, 26(1), pp. 24–25, 2018

[2] Henri Cartan, Jacqueline Ferrand, "The case of André Bloch", *The Mathematical Intelligencer*, 10, pp. 23–26, 1988

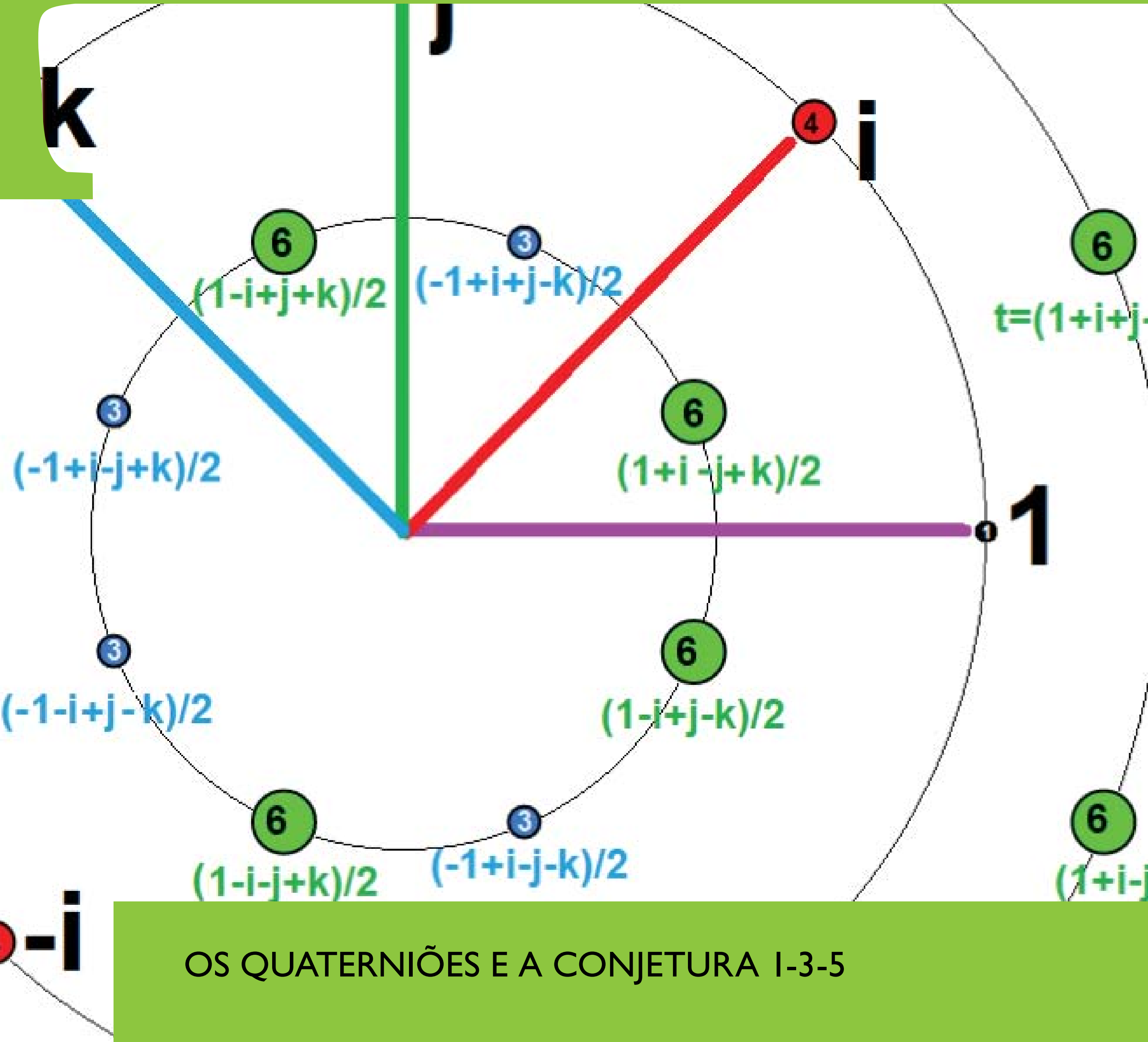
[3] Christopher Havens, Stefano Barbero, Umberto Cerruti et al., "Linear fractional transformations and nonlinear leaping convergents of some continued fractions", *Research in Number Theory*, 6(11), 2020

[4] António Machiavelo, "A equação que nunca foi de Pell", *Gazeta de Matemática*, 171, pp. 17–19

[5] "The Playground", *Math Horizons*, 29(1), pp. 30–33, 2021

[4] A. B. Olde Daalhuis, *Confluent Hypergeometric Functions*, *https://dlmf.nist.gov/13*

[5] Veja-se também *An inmate's love for math leads to new discoveries*, por Marta Cerruti, filha do casal em questão: *https://theconversation.com/an-inmates-love-for-math-leads-to-new-discoveries-130123*



OS QUATERNIÕES E A CONJETURA 1-3-5

António Machiavelo
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

Dá-se aqui uma súmula das ideias subjacentes à demonstração recentemente publicada pelo autor e por Nikolaos Tsopanidis, completada com a ajuda de Rogério Reis, da conjetura 1-3-5, anunciada em 2016 por Zhi-Wei Sun, demonstração essa que usa uma aritmética um pouco exótica em subconjuntos especiais dos quaterniões, que se expõe aqui assumindo que o leitor nada sabe destes assuntos.

1. HISTÓRIA DO PROBLEMA

A *Aritmética* de Diofanto de Alexandria, matemático grego do século III, é uma obra que teve uma enorme influência no desenvolvimento da Teoria de Números a partir do século XVII. Consistindo numa sequência de problemas sobre números racionais e respetivas soluções, sabe-se que era formada originalmente por 13 "livros" – usualmente assim chamados, mas que seria mais apropriado apelidar de capítulos –, mas só seis desses "livros" eram conhecidos[1] quando, em 1621, Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581--1638), matemático, poeta e tradutor francês, edita e publica esses "livros" da *Aritmética*. A edição de Bachet continha o texto grego original, uma tradução para latim e extensos comentários feitos pelo próprio Bachet. Num desses comentários faz notar que na resolução dos problemas 29 e 30 do livro IV, Diofanto parece pressupor que qualquer número natural (de facto, qualquer número racional positivo) pode ser escrito como uma soma de quatro ou menos quadrados, i.e. números da forma n^2 para algum $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Bachet refere que verificou que assim é, de facto, para todos os números até 325 e que gostaria de ver uma demonstração de que é sempre verdade (cf. [20, p.30] e [5, p.188]).

Não se sabe exatamente quando Pierre de Fermat, o famoso magistrado e matemático francês do século XVII, adquiriu uma cópia dessa edição de Bachet, mas é claro da sua correspondência que em 1636 Fermat não só a tinha estudado cuidadosamente, como tinha feito algumas descobertas em Teoria de Números inspiradas nos problemas de Diofanto e nos comentários de Bachet (ver o volume 2 de [17], em particular a carta de Fermat a Mersenne datada de 2 de setembro de 1636, na p. 57). E pouco depois, ainda em 1636, numa carta a Marin Mersenne escrita em setembro ou outubro desse mesmo ano [17, Vol. 2, p. 65], Fermat escreve que descobriu uma proposição pulquérrima: que todo o número é a soma de um, dois ou três números triangulares[2]; de um, dois ou quatro números quadrados; de um, dois, três, quatro ou cinco números pentagonais, *et eo continuo in infinitu progressu*, ou seja, e assim sucessivamente.

Fermat irá repetir esta mesma afirmação, e que está na posse de uma sua demonstração, em cartas a Blaise Pascal, em 1654 [17, vol. 2, pp. 312-313], e a Kenelm Digby, em 1658 [17, vol. 2, pp. 404]. A Pierre de Carcavi, em 1659 [17, vol. 2, pp. 433], menciona apenas que tem uma prova por "descida infinita" de que todo o número natural é uma soma de não mais de quatro quadrados. Fermat menciona algures que pensa escrever um tratado de Teoria de Números em que expõe os seus métodos e este resultado em particular, mas infelizmente nunca o chegou a fazer, desconhecendo-se a demonstração que Fermat teria deste seu belíssimo resultado.

Leonhard Euler, por volta de 1730, toma conhecimento dos trabalhos de Fermat em Teoria de Números e, em particular, fica impressionado com a afirmação de que todo o número é uma soma de, no máximo, k números k-gonais ($k \geq 3$), nomeadamente, que todo o número natural é uma soma de, no máximo, quatro quadrados (ver [20, p. 173]). Aceitando o número 0 como um número k-gonal, para todo $k \geq 3$, podemos remover a frase "no máximo" das proposições anteriores, tornando o seu enunciado mais curto, o que faremos daqui em diante.

Euler irá tentar obter uma demonstração do caso dos quadrados, descobrindo pelo caminho alguns resultados parciais, por si só interessantes, como o produto de duas somas de quatro quadrados ser ainda uma soma de quatro quadrados; todo o número primo divide uma soma da quatro quadrados; que é suficiente mostrar que todo o primo é uma soma de quatro quadrados de números racionais para deduzir o resultado pretendido. Mas Euler não consegue chegar a uma demonstração, tendo esta sido obtida, em 1772, por Lagrange, com base no trabalho de Euler sobre somas de dois quadrados. Num artigo apre-

[1] Entretanto foram descobertos mais quatro "livros" em 1968, por Fuat Sezgin, numa biblioteca do Irão.

[2] Ver [13] para uma descrição do que são os números poligonais.

sentado à Academia de Petersburgo a 21 de setembro de 1772 e publicada na *Nova Acta Eruditorum* em 1773, Euler, depois de congratular Lagrange pelo seu sucesso, fornece uma demonstração mais simples (ver [20, p. 228] e [11] para mais detalhes).

O caso dos números triangulares viria a ser demonstrado por Gauss, a 10 de julho de 1796. A data precisa é aqui conhecida, pois Gauss escreveu nesse dia num seu pequeno diário a seguinte frase, curta mas expressiva: EYPHKA! $num = \Delta + \Delta + \Delta$. A demonstração viria a ser incluída na sua obra seminal *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada em 1801. Em 1798 Legendre publica, em [8], uma demonstração de que um número natural é uma soma de três quadrados se e só se não for da forma $4^a(8b+7)$.

Finalmente, em 1813, Cauchy observa que este resultado de Legendre é equivalente à proposição de que todo o natural é uma soma de três triangulares e demonstra o caso geral do teorema dos números poligonais [1, pp. 320-353]. No seu artigo, Cauchy mostra um pequeno refinamento do teorema dos quatro quadrados, nomeadamente que se k é um número par qualquer e s um outro número par tal que $\sqrt{3k} - 1 < s < \sqrt{4k}$, então é sempre possível encontrar $t, u, v, w \in \mathbb{Z}$ tais que se tem, simultaneamente:

$$\begin{cases} k = t^2 + u^2 + v^2 + w^2 \\ s = t + u + v + w, \end{cases} \qquad (1)$$

a menos que $k - \left(\frac{s}{2}\right)^2$ seja da forma $4^a(8b+7)$ [1, Théorème III, p. 326]. Um pouco mais à frente Cauchy mostra que se k é um número ímpar arbitrário e $\sqrt{3k-2} - 1 < s < \sqrt{4k}$, então o sistema (1) tem solução [1, Théorème IV, p. 329]. Estes resultados foram depois refinados e as demonstrações um pouco simplificadas por Legendre (ver [9, pp. 331-356]) e ainda dão origem a artigos de investigação – ver [16].

Em 2016, o matemático chinês Zhi-Wei Sun (孙智伟) considera vários refinamentos do resultado de Fermat-Lagrange sobre somas de quatro quadrados e, a 9 de abril de 2016, conjetura que todo o número inteiro não-negativo $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ pode ser escrito com uma soma de quatro quadrados $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ $(x, y, z, w \in \mathbb{N}_0)$ de tal forma que $x + 3y + 5z$ é ainda um quadrado perfeito (ver *http://maths.nju.edu.cn/~zwsun/1-3-5-Conj.pdf*). Sun dá a esta conjetura o nome de *Conjetura 1-3-5*, por estes serem os coeficientes da forma linear que se exige ser um quadrado. A 4 de dezembro de 2016, Sun anuncia na *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS, *https://oeis.org*), na entrada relativa à sequência com a etiqueta A271518, que Qing-Hu Hou (侯 庆虎), da Universidade de Tianjin, verificou a validade da conjetura 1-3-5 para todos os números até 10^9. A 17 de fevereiro de 2017 é anunciado, na mesma página, que Qing-Hu Hou terminou a verificação da validade da conjetura até 10^{10}.

A conjetura 1-3-5 viria a ser publicada em [18] (Conjecture 4.3i, p. 184), juntamente com várias outras do mesmo género. Nesse mesmo artigo, Sun oferece uma recompensa de US$1350 pela primeira demonstração completa desta sua conjetura (ver Remark 4.3, pp.184-185).

Em agosto de 2018, eu e Nikolaos Tsopanidis, na altura meu aluno de doutoramento, iniciámos um ataque à conjetura 1-3-5 usando aritmética de quaterniões, uma abordagem que viria a ser eventualmente bem-sucedida no final de 2019, em grande parte graças à grande persistência do Nikolaos. A nossa demonstração tem duas partes: na primeira, [14], mostrámos que a conjetura é válida para números suficientemente grandes, mais precisamente maiores do que $10^4/(\sqrt[4]{35} - \sqrt[4]{34})^4 \simeq 1.051 \times 10^{11}$; a segunda, [15], consiste numa série de estratagemas, alguns sugeridos pelo próprio Zhi-Wei Sun, que conduziram à verificação de que é verdadeira para todos os números naturais até aí, o que foi feito com a imprescindível ajuda do meu colega Rogério Reis, do Departamento de Ciência de Computadores da Faculdade de Ciências do Porto.

Dar-se-á aqui uma ideia do que são os quaterniões e de algumas das suas propriedades aritméticas, dando-se depois um esboço da demonstração da conjetura 1-3-5.

2. OS QUATERNIÕES

Os quaterniões foram introduzidos pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton em 1843, e posteriomente descritos em [4], após uma longa busca de uma estrutura algébrica no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ que fosse análoga à estrutura algébrica no plano $\mathbb{R}^2$ fornecida pelos números complexos. Na altura era já bem percebida a relação profunda e profícua entre propriedades algébricas dos números complexos e a geometria do plano, e Hamilton ambicionava descobrir uma estrutura análoga em $\mathbb{R}^3$ que capturasse a geometria do espaço, e que pudesse até ser útil para facilitar a resolução de problemas de mecânica. Vir-se-ia a descobrir que tal estrutura em $\mathbb{R}^3$ simplesmente não existe, e Hamilton eventualmente apercebeu-se de que é necessária uma quarta dimensão, ou seja, existe uma estrutura algébrica em $\mathbb{R}^4$ que tem em si embutida alguma da geometria do espaço quadridimensional. Os pontos de $\mathbb{R}^4$, quando este está munido dessa estrutura, são apelidados de *quaterniões* e, na realidade, estes vieram a ser úteis para efetuar cálculos envolvendo rotações tridimensionais, tendo sido, mais recentemente, amplamente usados em computação gráfica tridimensional.

Recordemos que os números complexos constituem uma estrutura algébrica em $\mathbb{R}^2$ em que se identifica o ponto (1,0) com o número 1 e se denota o ponto (0,1) pelo símbolo i, o que conduz à identificação do ponto (a, b) com a expressão $a+bi$, sendo a estrutura algébrica destas expressões dada por uma soma que corresponde diretamente à soma de vetores e por uma multiplicação que prolonga a multiplicação de números reais e que é completamente determinada pela relação $i^2=-1$ e pela exigência de se manterem válidas as propriedades usuais, como a associatividade, a comutatividade e a distributividade relativamente à soma. O conjunto $\mathbb{R}^2$ munido destas duas operações denota-se por $\mathbb{C}$, *o corpo dos números complexos*, e é fácil ver que a multiplicação por i corresponde à rotação em torno da origem de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido direto.

Analogamente, os quaterniões fornecem uma estrutura algébrica a $\mathbb{R}^4$ em que o ponto (a, b, c, d) é identificado com a expressão $a+bi+cj+dk$, sendo a soma dada pela soma usual de vetores e a multiplicação fica completamente determinada pelas relações

$$\begin{gathered} i^2=j^2=k^2=-1 \\ ij=k=-ji \end{gathered}$$

e pelas exigências de ser: associativa; distributiva relativamente à soma; os números reais, identificados com os pontos com as três últimas coordenadas nulas, comutarem com todos os quaterniões. Ao conjunto $\mathbb{R}^4$ munido destas duas operações chama-se *o anel de divisão dos quaterniões*, que se denota por $\mathbb{H}$. A diferença entre um "corpo" e um "anel de divisão" é que, nestes últimos, a multiplicação não necessita de ser comutativa. E no caso dos quaterniões não o é, pois $ij \neq ji$, por exemplo. De facto, mostra-se que não é possível munir $\mathbb{R}^4$ de uma estrutura de corpo, sendo, em certo sentido os quaterniões o melhor que se pode obter em dimensão quatro (ver [3], Cap. 8, §2).

Dado um quaternião

$$\alpha=a_0+a_1i+a_2j+a_3k \quad (a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}),$$

o seu *conjugado* é o quaternião

$$\bar{\alpha}=a_0-a_1i-a_2j-a_3k;$$

a sua *parte real*, denotada $\Re(\alpha)$, é o número $a_0=\frac{1}{2}(\alpha+\bar{\alpha})$; a sua *parte vetorial*, $\mathcal{V}(\alpha)$, o quaternião $a_1i+a_2j+a_3k=\frac{1}{2}(\alpha-\bar{\alpha})$. Um quaternião é apelidado de *puro* quando a sua parte real é nula.

É fácil verificar que se tem:

$$\begin{aligned}(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(b_0+b_1i+b_2j+b_3k) = \\ &= (a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)+ \\ &+ (a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)\,i \\ &+ (a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1)\,j \\ &+ (a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0)\,k. \end{aligned} \tag{2}$$

Se designarmos por $\alpha\cdot\beta$ o produto interno dos quaterniões α e β vistos como elementos de $\mathbb{R}^4$, resulta de (2) que

$$\Re(\alpha\beta)=\alpha\cdot\bar{\beta}. \tag{3}$$

É também fácil de ver que

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\bar{\alpha}. \tag{4}$$

(Note-se a troca na ordem dos fatores).

Finalmente, neste rol de definições, há ainda que mencionar a noção de *norma* de um quaternião α, que é o número real não-negativo $\mathrm{N}(\alpha)=\alpha\bar{\alpha}$ (a razão de não termos aqui a usual raiz quadrada é porque é muito útil, no contexto aritmético, que este número seja um inteiro quando as coordenadas do quaternião são todas números inteiros). Grande parte da relevância aritmética desta aplicação $\mathrm{N}:\mathbb{H}\to\mathbb{R}_0^+$ advém do facto de ser multiplicativa, i.e. $\mathrm{N}(\alpha\beta)=\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta)$, para todos os $\alpha,\beta\in\mathbb{H}$, algo de que se deduz facilmente de (4). Note-se ainda que se tem (algo que o leitor poderá verificar como exercício):

$$\mathrm{N}(\alpha)=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

uma soma de quatro quadrados!

3. ARITMÉTICA NOS QUATERNIÕES E SOMAS DE QUATRO QUADRADOS

Um subconjunto dos quaterniões que é natural esperar que tenha algum interesse estudar do ponto de vista aritmético é o conjunto dos chamados *inteiros de Lipschitz*, constituído pelos quaterniões de coordenadas inteiras, ou seja:

$$\mathcal{L}=\{a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}:a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}.$$

Este conjunto é fechado para a soma e para o produto, ou seja a soma e o produto de dois quaisquer seus elementos ainda é um seu elemento, dando origem ao que se designa por *anel*, que é, grosso modo, um conjunto munido de duas operações satisfazendo as propriedades usuais exceto a existência de inversos multiplicativos para todos os seus elementos não-nulos. Este anel foi extensamente estudado por Rudolf Lipschitz, tendo este publicado em 1886 um longo artigo, [12], onde, a propósito do estudo das transformações lineares que deixam a forma quadrática $x^2+y^2+z^2$ invariante, exibe várias propriedades aritmeticamente interessantes deste anel.

Em 1896, Hurwitz publica um artigo, [6], posteriormente expandido numa monografia, [7], publicada em 1919, onde mostra que há um anel dentro dos quaterniões que é um pouco mais interessante em termos aritméticos, a que agora se chama o *anel dos inteiros de Hurwitz*, nomeadamente:

$$\mathcal{H}=\mathcal{L}\cup\left\{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}i+\frac{c}{2}j+\frac{d}{2}k\in\mathbb{H}:a,b,c,d\in\mathbb{Z}\text{ e são todos ímpares}\right\}.$$

Ou seja, os elementos de $\mathcal{H}$ são os quaterniões cujas coordenadas ou são todas inteiras, ou todas metades de números inteiros ímpares. Observe-se que a norma de um inteiro de Hurwitz é um inteiro não-negativo, pois o quadrado de um número ímpar tem a forma $4n+1$, o que implica que a soma dos quadrados de quatro números ímpares é um número divisível por 4.

Em ambos os anéis $\mathcal{L}$ e $\mathcal{H}$ define-se a noção de quaternião *primo* como sendo um quaternião cuja norma é um número primo de $\mathbb{N}$. Neste contexto, e para desfazer qualquer possível confusão, é usual apelidar de *primo racional* um número primo de $\mathbb{N}$. Por exemplo, $1+i+j+2k$ é um quaternião primo, pois a sua norma é o primo racional 7. Num qualquer anel A (pense em $A=\mathbb{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, por exemplo) define-se a noção de *divisibilidade* estipulando que $a\in A$ divide $b\in A$ (à esquerda, por exemplo) se existir algum elemento $q\in A$ tal que $b=aq$; define-se *unidade* como sendo um elemento com inverso multiplicativo, ou seja, $u\in A$ é uma unidade se existir $v\in A$ tal que $uv=vu=1$, o elemento neutro da multiplicação. O conjunto de todas as unidades de um anel A é denotado por A^*. As unidades são os elementos "aritmeticamente neutros", pois dividem todos os elementos do anel (tanto à esquerda como à direita), como é fácil ver. No caso dos inteiros de Lipschitz e de Hurwitz não é difícil ver que u é uma unidade se e só se $\mathrm{N}(u)=1$, e que se tem:

$$\mathcal{L}^*=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\},$$

$$\mathcal{H}^*=\mathcal{L}^*\cup\left\{\frac{\pm1\pm i\pm j\pm k}{2}\right\}.$$

Em particular, $\mathcal{L}$ tem oito unidades, enquanto que $\mathcal{H}$ tem 24.

Dois elementos de um anel dizem-se *associados* se um for igual ao outro vezes uma unidade. Isto implica que têm exatamente os mesmos múltiplos, o que os torna aritmeticamente equivalentes. Um facto importante é que todo o quaternião de Hurwitz tem um associado à esquerda e um outro à direita que é um inteiro de Lipschitz. Isto torna possível, muitas vezes, mostrar a existência de um quaternião de coordenadas inteiras tendo uma certa propriedade aritmética deduzindo primeiro que há um quaternião de Hurwitz nas mesmas condições, o que é mais fácil por $\mathcal{H}$ ser mais "bem-comportado", como veremos já de seguida.

A razão de o anel dos inteiros de Hurwitz ser um pouco mais interessante e mais bem "comportado" do que o de Lipschitz reside no facto de em $\mathcal{H}$ haver uma divisão com resto, ou melhor, duas, uma à esquerda e outra à direita – uma pequena excentricidade que advém de a multiplicação de quaterniões não ser comutativa. Isto significa o seguinte. Dados $\alpha,\beta\in\mathcal{H}$, existem $\gamma,\rho\in\mathcal{H}$ tais que $\alpha=\beta\gamma+\rho$ com $\mathrm{N}(\rho)<\mathrm{N}(\beta)$, ou seja, um quociente (neste caso à direita) e um resto que é menor, em termos da norma, do que o divisor. Há também, claro, um quociente à esquerda e um resto correspondente. Estes quocientes e restos não são, em geral, únicos e os esquerdos podem ser completamente distintos dos direitos, mas a existência destas divisões com resto permite mostrar que o conjunto das combinações lineares (esquerdas ou direitas), com coeficientes em $\mathcal{H}$, de um número finito de elementos de $\mathcal{H}$ é igual ao conjunto dos múltiplos (esquerdos ou direitos) de um único elemento. Ou seja, por exemplo,

Proposição 1. *Dados $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathcal{H}$, existe $\gamma\in\mathcal{H}$ tal que*

$$\{z_1\alpha_1+z_2\alpha_2+\cdots+z_n\alpha_n:z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathcal{H}\}=\{z\gamma:z\in\mathcal{H}\}.$$

Um tal quaternião γ é, de certo modo, um máximo divisor comum dos α_i.

Este resultado permite dar uma demonstração relativamente simples e conceptual do teorema de Fermat-Lagrange de que todo o número natural é uma soma de quatro quadrados, de que damos aqui um esboço, deixando os detalhes como exercícios para o leitor interessado. Pela multiplicatividade da norma referida no último parágrafo da secção anterior, basta mostrar que todo o número primo é uma tal soma. Seja, pois, p um qualquer número primo racional e seja S o conjunto dos quadrados módulo p (i.e. dos restos dos quadrados quando divididos por p). Como a aplicação $x\mapsto x^2$ dos restos módulo p neles próprios é tal que um qualquer resto não-nulo módulo p tem zero ou duas pré-imagens, resulta que $|S|=1+\frac{p-1}{2}=\frac{p+1}{2}$. Seja S' o conjunto dos restos[3] dos elementos da forma $-1-x$ com $x\in S$. É claro que $|S'|=\frac{p+1}{2}$. Ora, como há apenas p restos distintos, resulta que S e S' não podem ser disjuntos. Isto implica que existem $a,b\in\mathbb{N}_0$, com $a,b\leq\frac{p-1}{2}$, tais que a^2 e $-1-b^2$ dão o mesmo resto quando divididos por p, ou seja, p divide a^2+b^2+1, número este que é menor do que p^2.

Considere-se agora o quaternião $\alpha = a+bi+j$. Como foi mencionado acima, existe algum $\gamma \in \mathcal{H}$ tal que $\{z_1 p + z_2\alpha : z_1, z_2 \in \mathcal{H}\} = \{z\gamma : z \in \mathcal{H}\}$. Mas então, em particular, $p = \delta\gamma$ e $\alpha = \epsilon\gamma$, para alguns $\delta, \epsilon \in \mathcal{H}$, de onde se deduz que $\mathrm{N}(\gamma)$ divide p^2 e divide $\mathrm{N}(\alpha)$. Daqui resulta que $\mathrm{N}(\gamma)$ é igual a 1 ou p. Mas, $\gamma = \zeta p + \eta\alpha$, para alguns $\zeta, \eta \in \mathcal{H}$, donde é relativamente fácil deduzir que γ não pode ser uma unidade e, portanto, $\mathrm{N}(\gamma) = p$. Substituindo, se necessário, γ por um seu associando em $\mathcal{L}$, concluímos que p é uma soma de quatro quadrados, como queríamos mostrar.

A Proposição 1 pode também ser usada de um modo muito eficaz para deduzir uma espécie de fatorização única para inteiros de Hurwitz *primitivos*, i.e., que não são múltiplos de um inteiro racional:

Teorema 1 (Lipschitz-Hurwitz). *Seja $\alpha \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}^*$ primitivo. Para cada fatorização de $\mathrm{N}(\alpha)$ num produto de primos racionais, $\mathrm{N}(\alpha) = p_1 p_2 \cdots p_{\ell-1} p_\ell$, há uma fatorização*

$$\alpha = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{\ell-1} \pi_\ell$$

num produto de primos de Hurwitz de tal modo que $\mathrm{N}(\pi_t) = p_t$, para $t = 1, 2, \ldots, \ell$. Diz-se que esta fatorização de α é modelada na fatorização correspondente de $\mathrm{N}(\alpha)$.

Além disso, qualquer outra fatorização de α modelada na mesma fatorização de $\mathrm{N}(\alpha)$ tem necessariamente a forma

$$\alpha = \pi_1 u_1 \cdot u_1^{-1} \pi_2 u_2 \cdot u_2^{-1} \pi_3 u_3 \cdot \cdots \cdot u_{\ell-2}^{-1} \pi_{\ell-1} u_{\ell-1} \cdot u_{\ell-1}^{-1} \pi_\ell,$$

onde $u_t \in^*$ para $t = 1, 2, \ldots, \ell-1$.

Este resultado pode ser resumido dizendo-se que a fatorização modelada numa dada fatorização da norma de um inteiro de Hurwitz primitivo é única a menos de *migração de unidades* [2, Cap. 5]. Para o que se segue é importante observar que a parte da existência de fatorizações modeladas em fatorizações da norma se aplica a inteiros de Hurwitz arbitrários, e não apenas aos primitivos, e que se aplica ainda a inteiros de Lipschitz, obtendo-se fatorizações destes em primos de Lipschitz.

4. A ESTRATÉGIA DA DEMONSTRAÇÃO DA CONJETURA 1-3-5

Recorde-se que a conjetura 1-3-5 preconiza a existência, para cada $m \in \mathbb{N}$, de quatro inteiros não-negativos $x, y, z, t \in \mathbb{N}_0$ tais que:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2 &= m \\ x+3y+5z &= \text{quadrado perfeito.} \end{cases}$$

A primeira ideia subjacente ao ataque à conjetura 1-3-5 consiste em procurar descrever as soluções inteiras (i.e. em $\mathbb{Z}$) do sistema acima, do seguinte modo. Pondo $\gamma = x+yi+zj+tk \in \mathcal{L}$ e $\zeta = a+bi+cj+dk \in \mathcal{L}$, tem-se que o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2 &= m \\ ax+by+cz+dt &= n^2, \end{cases}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, é equivalente a

$$\begin{cases} \mathrm{N}(\gamma) &= m \\ \zeta \cdot \gamma &= n^2, \end{cases} \tag{5}$$

que, por (3), é o mesmo que

$$\begin{cases} \mathrm{N}(\gamma) &= m \\ \Re(\zeta\bar{\gamma}) &= n^2. \end{cases} \tag{6}$$

Agora, se pusermos $\delta = \zeta\bar{\gamma}$, a última igualdade é equivalente a dizer que $\delta = n^2 + Ai + Bj + Ck$, para alguns $A, B, C \in \mathbb{Z}$, enquanto a penúltima igualdade, dada a última, é equivalente a $\mathrm{N}(\zeta)m - n^4 = A^2+B^2+C^2$.

Portanto, para o sistema (5) ter solução é necessário que se tenha

$$n \leq \sqrt[4]{m\,\mathrm{N}(\zeta)}, \tag{7}$$

assim como, pelo teorema de Gauss-Legendre sobre somas de três quadrados, que

$$m\,\mathrm{N}(\zeta) - n^4 \text{ não seja da forma } 4^r(8s+7)\text{, com r,s} \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Reciprocamente, se estas duas condições, (7) e (8), forem satisfeitas, então existem $A, B, C \in \mathbb{Z}$ tais que $m\,\mathrm{N}(\zeta) - n^4 = A^2+B^2+C^2$. Pondo $\delta = n^2+Ai+Bj+Ck$, e uma vez que $\mathrm{N}(\delta) = \mathrm{N}(\zeta)m$, da existência de fatorizações modeladas em fatorizações da norma (Teorema 1 e parágrafo seguinte), vem que existem $\xi, \gamma \in \mathcal{L}$ tais que $\delta = \xi\bar{\gamma}$, $\mathrm{N}(\xi) = \mathrm{N}(\zeta)$ e $\mathrm{N}(\gamma) = m$. Resulta daqui que γ é uma solução do sistema (6) onde em vez de ζ está um quaternião, ξ, que tem a mesma norma que ζ. Isto mostra o resultado seguinte.

---

[3] Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, o quociente e o resto da divisão de a por b são, respetivamente, os únicos números $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{N}_0$ tais que $a = bq + r$ e $r < b$. Isto faz com que, por exemplo, o resto da divisão de -7 por 3 seja 2, sendo o quociente -3.

Proposição 2. *Sejam* $m, n, \ell \in \mathbb{N}$ *tais que* $n \leq \sqrt[4]{m\ell}$ *e* $m\ell - n^4$ *não é da forma* $4^r(8s+7)$. *Então, para alguns* $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ *tais que* $a^2+b^2+c^2+d^2 = \ell$, *o sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2 &= m \\ ax+by+cz+dt &= n^2 \end{cases}$$

tem soluções inteiras.

Como se sabe que os números que têm exatamente uma decomposição como soma de quatro quadrados, a menos de troca de parcelas, são: 1, 3, 5, 7, 11, 15, 23, $4^s r$ com $s \geq 0$ e $r \in \{2, 6, 14\}$ [10], resulta que se $a^2+b^2+c^2+d^2 = \ell$ for um destes números, então o sistema (5) tem soluções inteiras desde que m e n satisfaçam as hipóteses desta última proposição.

A dificuldade com a conjetura 1-3-5 reside no facto de $35 = 1^2+3^2+5^2$ ter uma outra decomposição como soma de quatro quadrados, nomeadamente $1+3^2+3^2+4^2$, sendo estas as únicas duas decomposições a menos da ordem das parcelas. Os argumentos apresentados acima permitem pois concluir apenas o seguinte.

Proposição 3. *Sejam* $n, m \in \mathbb{N}$ *tais que* $n \leq \sqrt[4]{35\,m}$ *e* $35m - n^4$ *não é da forma* $4^r(8s+7)$. *Então, pelo menos um dos dois sistemas seguintes tem soluções em números inteiros:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2 &= m \\ x+3y+5z &= n^2, \end{cases} \tag{1-3-5}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2 &= m \\ x+3y+3z+4t &= n^2. \end{cases} \tag{1-3-3-4}$$

A segunda ideia é tentar encontrar uma solução do sistema (1-3-5) a partir de uma solução do sistema (1-3-3-4) usando as observações seguintes.

Fixemos, de agora em diante, $\alpha = 1+3i+5j$ e $\beta = 1+3i+3j+4k$. Dados dois quaterniões ζ e ξ, vamos usar a notação $\zeta \sim \xi$ quando estes dois quaterniões têm as mesmas coordenadas a menos de sinal e permutação das coordenadas. Por exemplo, $3-5j+k \sim \alpha$ e $4-3i-j+3k \sim \beta$. Repare-se que se tivermos uma solução γ de (6) com $\zeta \sim \alpha$, então trocando convenientemente a ordem e os sinais das coordenadas de γ, obtém-se uma solução, em inteiros, do sistema (1-3-5).

Suponhamos agora que temos uma solução do sistema (1-3-3-4) dada por $\gamma \in \mathcal{L}$ com $\mathrm{N}(\gamma) = m$ e $\Re(\beta\bar{\gamma}) = n^2$. Não é difícil ver que, para um qualquer $\rho \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, se tem:

$$\Re(\rho^{-1}\beta\bar{\gamma}\rho) = \Re(\beta\bar{\gamma}) \quad \text{e} \quad \mathrm{N}(\rho^{-1}\gamma\rho) = \mathrm{N}(\gamma).$$

Como, para um qualquer $\sigma \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$,

$$\rho^{-1}\beta\bar{\gamma}\rho = (\rho^{-1}\beta\sigma)\,(\sigma^{-1}\bar{\gamma}\rho),$$

vê-se assim que se conseguirmos encontrar $\rho, \sigma \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ com $\mathrm{N}(\rho) = \mathrm{N}(\sigma)$ e tais que $\rho^{-1}\beta\sigma \sim \alpha$ e $\sigma^{-1}\bar{\gamma}\rho \in \mathcal{L}$, então de uma solução γ do sistema (1-3-3-4) consegue-se derivar uma solução do sistema (1-3-5).

Foi esta parte da demonstração da conjetura 1-3-5, mostrar a existência de tais inteiros de Lipschitz, ρ e σ, que deu mais trabalho. O que se fez foi considerar para ρ todos os quatro primos não-associados de norma 3, os seis primos não-associados de norma 5 e os oito primos não-associados de norma 7. Para cada um desses quaterniões ρ determina-se σ com $\mathrm{N}(\sigma) = \mathrm{N}(\rho)$ e tal que

$$\beta\rho = \sigma\delta, \text{ para algum } \rho \text{ com } \mathrm{N}(\delta) = \mathrm{N}(\beta) = \mathrm{N}(\alpha) = 35.$$

Isto é feito usando as técnicas que estão na base da demonstração do teorema da fatorização de Lipschitz-Hurwitz acima mencionado.

Quando acontece que se tem $\delta \sim \alpha$, obtém-se assim uma solução do sistema (1-3-5) à custa de uma solução do sistema (1-3-3-4), desde que a condição $\rho^{-1}\bar{\gamma}\sigma \in \mathcal{L}$ seja satisfeita, o que corresponde, como mostrámos em [14], a ser satisfeita uma certa congruência módulo $\mathrm{N}(\rho)$; quando $\delta \sim \beta$, obtém-se uma outra solução do sistema (1-3-3-4) que, viemos a descobrir, vem a dar uma solução do sistema (1-3-5) quando se usa, a partir dela, um ρ novo para um outro primo. Mais especificamente, quando não se obtém uma solução do sistema (1-3-5) usando um primo de norma 3, a solução do sistema (1-3-3-4) que se obtém pode dar uma solução do sistema (1-3-5) quando se usa agora um primo de norma 5, e se ainda não der, então um primo de norma 7 consegue finalmente resolver o problema. Quem quiser poderá ver os detalhes em [14].

Com tudo isto conseguiu-se mostrar um resultado que é mais preciso do que a conjetura 1-3-5, mas para soluções inteiras, nomeadamente:

Teorema 2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $35m - n^4$ é não-negativo e não é da forma $4^r(8s+7)$ $(r, s \in \mathbb{N}_0)$. Então o sistema (1-3-5) tem soluções inteiras sempre que:

i) m é um múltiplo por 3 e $\mathrm{mdc}(n, 15) = 1$.

ii) m é da forma $3\ell + 1$ e n é um múltiplo de 3 não divisível por 5.

iii) m é da forma $3\ell + 2$ e $\mathrm{mdc}(n, 105) = 1$.

Para mostrar a existência de uma solução em inteiros do sistema (1-3-5) há agora que, para um dado $m \in \mathbb{N}$, mostrar que existe um $n \in \mathbb{N}$ com $n \leq \sqrt[4]{35m}$ tal que: $35m - n^4$ não é da forma $4^r(8s+7)$ $(r, s \in \mathbb{N}_0)$ e uma das condições i), ii) ou iii) do resultado anterior é satisfeita. Isto foi feito mostrando que se tivermos dez números consecutivos, então um deles satisfaz as condições pretendidas.

Para resolver o problema inicial, que requere soluções não-negativas, mostrou-se que é suficiente garantir que o intervalo $[\sqrt[4]{34m}, \sqrt[4]{35m}]$ tenha, pelo menos, dez naturais consecutivos. É fácil ver que isto é equivalente a exigir que se tenha

$$m \geq \left(\frac{10}{\sqrt[4]{35} - \sqrt[4]{34}} \right)^4 \simeq 105103560126,8026.$$

Na altura, a conjetura estava verificada até ao número 10^{10}. Precisávamos, pois, de ir "um pouco" mais além: até $1,051 \times 10^{11}$, o que corresponde a verificar mais de dez vezes a quantidade de números previamente verificados!

Zhi-Wei Sun incentivou-nos a levar a cabo a verificação numérica, tendo dado várias ideias para o fazer de um modo eficaz. Em primeiro lugar mostrou que o nosso limite inicial, que era de cerca de $1,3 \times 10^{13}$, podia ser reduzido a algo como $2,18 \times 10^{11}$, tendo nós posteriormente reduzido um pouco mais, até ao número acima mencionado. Adicionalmente, Sun sugeriu que usássemos uma outra sua conjetura, 4.9(ii) de [19], que é mais forte do que a conjetura 1-3-5 e consiste no seguinte:

Conjetura (Zhi-Wei Sun). *Todo o número natural pode ser escrito na forma $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ com $x, y, z, t \in \mathbb{N}_0$ tais que $x + 3y + 5z$ é um quadrado e, adicionalmente, verifica-se pelo menos uma das três condições seguintes: x é três vezes um quadrado, ou y é um quadrado, ou z é um quadrado.*

O uso desta conjetura, e o facto de ser verdadeira, como viemos a comprovar, até $1,051 \times 10^{11}$, foi instrumental no sucesso do ataque computacional, pois reduz, em muito, a procura de uma representação de um número na soma de quatro quadrados com a característica pretendida.

Rogério Reis escreveu um programa em *C*, muito eficiente e que pode ser fatiado em pedaços a serem distribuídos por vários computadores, que foi, então, usado para verificar esta conjetura de Sun para todos os números até ao limite pretendido. Pelo caminho foram também usadas outras observações que foram sendo descobertas quando se testou o programa. O leitor interessado poderá ver todos os detalhes, assim como o código de próprio programa, em [15].

Várias experiências feitas durante a verificação da conjetura até $1,051 \times 10^{11}$ conduziram a uma forma mais precisa da conjetura de Sun que acabamos de referir, nomeadamente:

Conjetura. *Todo o número $m \in \mathbb{N}$ que não é um múltiplo de 16, com a exceção de 31, 43, 111, 151, 168, 200, 248, 263, 319, 456, 479, 871, 1752, 1864, 3544, pode ser representado como uma soma de quatro quadrados, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, com $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ tais que $x + 3y + 5z$ é um quadrado e x é três vezes um quadrado ou y é um quadrado. Além disso, para $m > 14\,485\,001\,848$, há uma representação com $x \in \{0, 3\}$ ou $y \in \{0, 1\}$. Adicionalmente, após este limite e ignorando os múltiplos de 16, a densidade dos números que têm uma representação com $x = 0$ ou $y = 0$ é $\frac{5}{6}$.*

Até ao momento, não fazemos ideia de como abordar esta conjetura.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A demonstração que foi feita da conjetura 1-3-5 levanta algumas questões que vale a pena considerar.

Em primeiro lugar, é um pouco surpreendente que a "proposição 1-3-3-4", nomeadamente que todo o natural se possa escrever na forma $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ com $x, y, z, t \in \mathbb{N}_0$ tais que $x + 3y + 3z + 4t$ seja um quadrado perfeito, não é verdadeira: os números 3, 4, 7, 8, 22, 23, 31, 42, 61, 95, 148, 157 e 376 não admitem uma tal representação. Cálculos que fizemos parecem sugerir que, exceto estes 13 números e os seus múltiplos obtidos por multiplicação por potências de 16, todos os outros números naturais admitem uma representação desse tipo. Seria interessante perceber o que está por detrás desta diferença entre o caso 1-3-5 e o caso 1-3-3-4.

Em segundo lugar, seria muito interessante fornecer uma abordagem mais conceptual à parte da demonstração onde se usam primos quaterniónicos de norma 3, 5 e 7, onde tudo acabou por funcionar muito bem, mas sem que se perceba a razão profunda, que estou convencido de existir, para tudo dar certo. Parece-me que deve haver uma série de propriedades escondidas por detrás do método que utilizámos e a sua descoberta poderia permitir atacar outras conjeturas análogas, nomeadamente a "conjetura 24" de Sun (ver OEIS A281976 e [19, Conjecture 4.7(i)]):

todo $m \in \mathbb{N}$ pode ser escrito na forma $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ com $x, y, z, t \in \mathbb{N}_0$ de modo a que x e $x + 24y$ sejam ambos quadrados perfeitos. Sun oferece US$2400 pela primeira demonstração. Será que esta conjetura pode ser atacada por um método semelhante ao que usámos para a conjetura 1-3-5? Aqui $\mathrm{N}(1 + 24i) = 577$ e há, a menos de ordem e sinais, 21 quaterniões de Lipschitz de norma 577, o que torna a nossa abordagem impraticável, a menos que se encontrem as tais propriedades escondidas que acabo de mencionar.

REFERÊNCIAS

[1] *Œuvres Complètes D'Augustin Cauchy*, IIe Série, Tome VI, Gauthiers-Villars, 1887.

[2] J. H. Conway, D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*, A K Peters/CRC Press, 2003.

[3] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Numbers*, Springer, 1991.

[4] William R. Hamilton, *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra*, Philosophical Magazine, 1844-1850 (em várias partes). Disponível em linha no endereço: *https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/OnQuat*.

[5] Thomas Heath, *Diophantus of Alexandria: a Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge at the University Press, 2nd edition, 1910.

[6] Adolf Hurwitz, "Uber die Zahlentheorie der Quaternionen", *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu G öttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, (1896) 313-340.

[7] Adolf Hurwitz, *Vorlesungen Űber die Zahlentheorie der Quaternionen*, Springer-Verlag, 1919.

[8] Adrien-Marie Legendre, *Essai sur la Théorie des Nombres*, Duprat, 1798.

[9] Adrien-Marie Legendre, *Théorie des Nombres*, Troisième Édition, Tome II, Firmin Didot Frères, 1830.

[10] D. H. Lehmer, "On the Partition of Numbers into Squares", *American Mathematical Monthly* 55 (1948) 476-481.

[11] Franz Lemmermeyer, "Euler, Goldbach, and 'Fermat's Theorem'", *Elemente der Mathematik* 65 (2010) 144-153.

[12] Rudolf Lipschitz, "Recherches sur la Transformation par des Substitutions Réelles d'une Somme de Deux ou de Trois Carrés en Elle-même", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4e série, tome 2 (1886) 373-440.

[13] António Machiavelo, "A Forma dos Números", *Gazeta de Matemática* 152 (2007) 38-39.

[14] António Machiavelo, Nikolaos Tsopanidis, "Zhi-Wei Sun's 1-3-5 Conjecture and Variations", *Journal of Number Theory* 22 (2021) 1-20.

[15] António Machiavelo, Rogério Reis, Nikolaos Tsopanidis, "Report on Zhi-Wei Sun's 1-3-5 Conjecture and Some of Its Refinements", *Journal of Number Theory* 22 (2021) 21-29.

[16] Melvyn B. Nathanson, "A Short Proof of Cauchy's Polygonal Number Theorem", *Proceedings of the American Mathematical Society* 99(1) (1987) 22-24.

[17] Paul Tennery e Charles Henri (editores), *Œuvres de Fermat*, Gauthiers-Villars et Fils, 1891, 1894, 1896 e 1912 (quatro volumes e um suplemento).

[18] Zhi-Wei Sun, "Refining Lagrange's Four-Square Theorem", *Journal of Number Theory* 175 (2017) 167-190.

[19] Zhi-Wei Sun, "Restricted Sums of Four-Squares", *International Journal of Number Theory* 15(9) (2019) 1863-1893.

[20] André Weil, *Number Theory: An approach through History from Hammurapi to Legendre*, Springer Science+Business Media, 2001.

SOBRE O AUTOR

António Machiavelo é professor auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto e membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto. Trabalha em Teoria de Números, Combinatória Analítica e Criptografia, tendo também fortes interesses em História e Filosofia da Matemática. Gosta de praticar malabarismo, jogar xadrez, aprender línguas e escabichar bons livros.

Ana Patrícia Martins
ESEV, Instituto Politécnico de Viseu; CIUHCT, Universidade de Lisboa
anapatmartins@gmail.com

PENSÕES DE SOBREVIVÊNCIA NO SÉCULO XIX: USO DE PRINCÍPIOS DO CÁLCULO ACTUARIAL, POR DANIEL AUGUSTO DA SILVA

A assistência proporcionada pelos montepios de sobrevivência portugueses, na forma de pensões a favor dos herdeiros dos seus sócios, após falecerem, assumia, no século XIX, importância inegável do ponto de vista da previdência social, numa época em que o Estado não cumpria essa função. A fundamentação científica dos planos de pensões era essencial para garantir a prosperidade dessas associações de socorros mútuos e os contributos do matemático Daniel da Silva, na década de 1860, constituem novidade nesse campo.

Até ao primeiro quartel do século XX, os montepios de sobrevivência portugueses não tinham os seus planos de pensões (ditas *de sobrevivência*) organizados segundo os princípios da Ciência Actuarial. A regra básica — *encargos presentes e futuros devem ser saldados pela receita provável* — não foi acautelada na construção desses planos.[1] De facto, já nas primeiras associações, criadas em finais do século XVIII, os valores de contribuições (pagas pelos sócios, subscritores do plano) e pensões legadas não dependiam da idade do beneficiário, de tal modo que contribuiriam com iguais importâncias os membros que, por exemplo, tivessem como beneficiárias uma idosa mãe, cuja pensão poucos anos duraria, ou uma jovem esposa, com perspectiva de vida longa. Acrescia o facto de a maioria dos planos permitir grande variedade de beneficiários (não definidos no momento de entrada) e transmissão de pensões.[2] Semelhantes características impossibilitavam a previsão de encargos futuros e a determinação da receita necessária para os cumprir. O princípio filantrópico, próprio das associações mutualistas, estará na base de tal permissividade. O desconhecimento dos princípios em que se deveria fundar essa forma de assistência conduziu os fundadores dessas instituições a aprovar semelhantes planos, situação que perdurou durante o século XIX.

Do ponto de vista matemático, os conceitos envolvidos na construção de tabelas de contribuições e de pensões não são avançados. O cálculo de anuidades vida combina o uso de juros compostos (compreendidos e aplicados já na Idade Média) com a teoria de probabilidades aplicadas à vida humana, expressa em tábuas de mortalidade (devendo-se a Edmund Halley o primeiro contributo — em texto de 1693, usa a sua tábua de mortalidade da cidade de Breslaw para definição do preço de uma anuidade vida).[3] Na sua forma mais simples, a teoria necessária para fundamentar fundos de pensões foi estabelecida por Abraham de Moivre, em *Annuities upon Lives* (1725), sendo que nos inícios do século XIX existiam inúmeros tratados sobre anuidades vida e seguros vida, com destaque para os britânicos. (Com efeito, a historiografia destaca autores britânicos na fundação da Ciência Actuarial e seus desenvolvimentos nos séculos XVII a XIX, sendo também britânicas as primeiras sociedades fundadas sobre bases científicas.)

Para as instituições portuguesas, o uso dessa teoria estava dificultado pela falta de estatísticas de mortalidade da população que fossem credíveis. A escolha de uma tábua de mortalidade estrangeira que pudesse ser adoptada para a elaboração das tabelas de contribuições e de pensões era, portanto, tarefa difícil. A partir de 1864, os censos populacionais passam a realizar-se segundo orientações do *Congrès International de Statistique*, o que possibilitou recolhas estatísticas mais fiáveis. (As mesmas dificuldades se observaram em instituições estrangeiras similares — inicialmente, a inexistência de estatísticas e a dificuldade na definição de planos de assistência. Ainda, a descrença na autoridade dos actuários, que se prolongou para lá da institucionalização da profissão.)

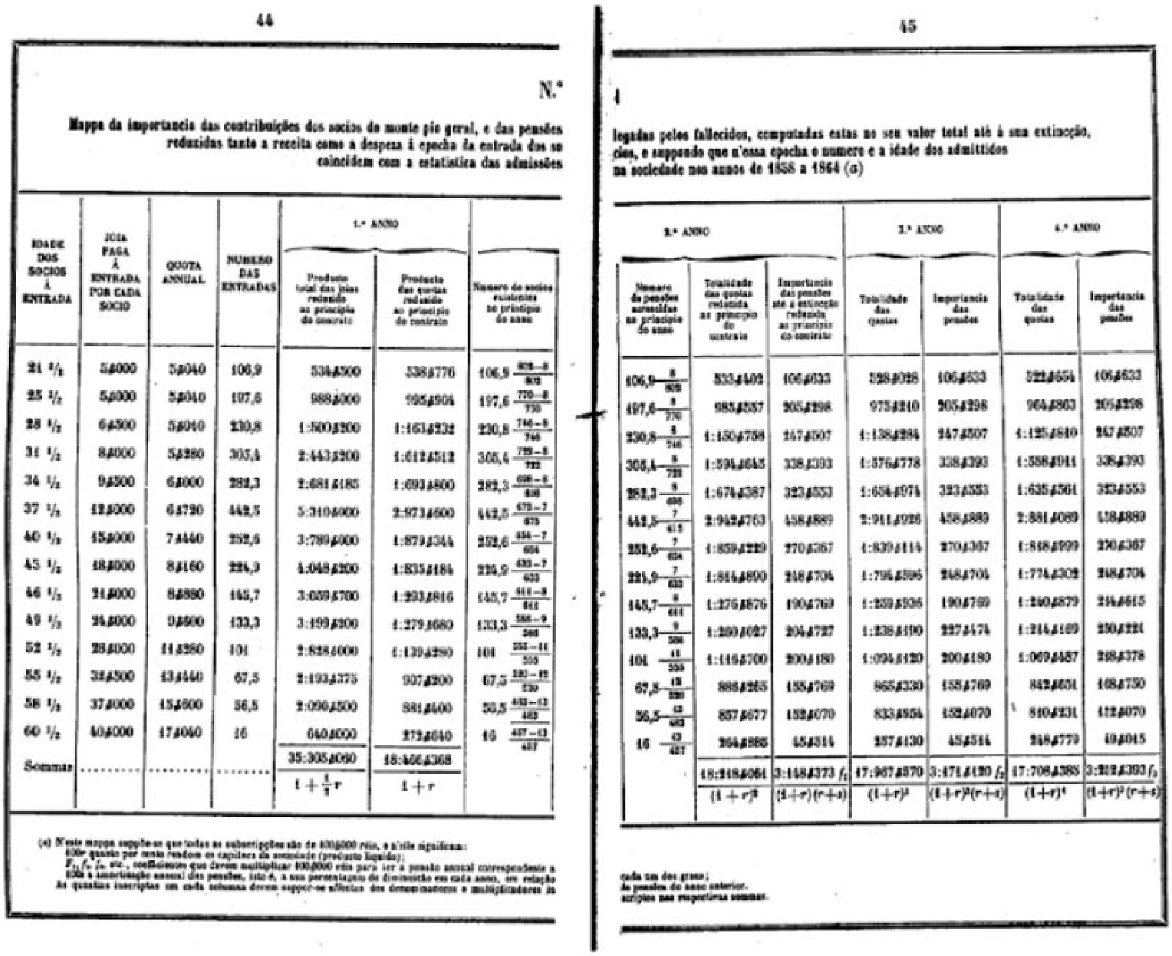
Daniel da Silva investigou, numa segunda fase da sua produção científica, temáticas menos exigentes do ponto de vista científico. Iniciou o estudo da viabilidade de planos de pensões em montepios de sobrevivência (assuntos actualmente classificados na área do Cálculo Actuarial) quando ingressou no Montepio Geral (MPG), na década de 1860, após tomar consciência da sua instabilidade financeira. Não sendo pessoa abastada, a protecção contra infortúnios e a garantia de que, após falecer, os seus herdeiros (esposa e filho, nascido em 1866) teriam futuro desafogado, do ponto de vista financeiro, seriam asseguradas pela sua afiliação a montepios desse tipo, razão pela qual possamos reconhecer o empenho nessa análise. Estudou o plano de pensões do MPG, por iniciativa própria, e os de outros montepios da mesma espécie, no âmbito de uma comissão oficial, nomeada em 1866, para estudar a prosperidade das associações de socorros mútuos e aconselhar o governo sobre formas de garantir o seu progresso, também segundo directrizes do *Congrès International de Statistique*. Em termos de textos publicados, contabilizam-se dois extensos relatórios sobre o plano do MPG e dois artigos de maior abrangência, publicados pela Academia das Ciências de Lisboa, de que era sócio de mérito. Prosseguimos com uma perspectiva geral dos seus contributos, com mais pormenor no primeiro texto que compôs, *O presente e o futuro do Monte Pio Geral*.

Conhecia a teoria necessária para a organização científica dos fundos de pensões dos montepios de sobrevivência portugueses, mas estava consciente de que não estavam reunidas as condições para a sua aplicação. Procedeu ao que actualmente (e, à data, já no Reino Unido) se denomina de avaliação actuarial do plano de pensões do MPG (a determinação de um valor actuarial das responsabilidades existentes e das contribuições necessárias para a sua exequibilidade). O método que concebeu, adaptado às características do plano e estatísticas existentes (listas anuais de membros admitidos, respectivas idades e capitais subscritos; valores anuais de pensões, mas não listas de beneficiários, nem suas idades), é baseado na avaliação de risco colectivo e faz uso de conceitos básicos da teoria de anuidades vida, presentes em textos clássicos, e de Cálculo Financeiro. Considerou como modelo o grupo de sócios admitidos em certo período (1858–1864), para o qual determinou valores de contribuições e pensões, até que todos falecessem, supondo que a mortalidade seguia a tábua de Déparcieux (ponderou imprecisões daí decorrentes e supôs que um cenário mais favorável assumia por essa tábua "acusar uma lei de mortalidade menos rápida" do que a mortalidade da população portuguesa.) ([7], 38). Nas opções tomadas nessa modelação aumentou despesas e diminuiu receitas e justificou essa atitude preventiva, a qual está em linha com práticas actuariais actuais que aconselham a adopção de uma postura mais pessimista do que optimista. A sistematização dos cálculos é feita em extenso mapa, de 13 páginas (fig. 1).

As contribuições anuais relativas a cada uma das idades representativas do grupo modelo de sócios (dos 21.5 aos 60.5 anos) são as parcelas da fórmula de uma *anuidade unitária sobre uma vida A*, até ao seu falecimento:

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a'}{1+r}+\frac{a''}{(1+r)^2}+\dots\right],$$

onde a designa o número total de indivíduos com a idade de A; a', a'', ... os números de indivíduos vivos com mais 1, 2, ... anos do que A e r a taxa de juro anual (média aritmética das taxas observadas), somas essas afectas de um factor, o capital subscrito correspondente a cada idade. Os números anuais de associados, para cada idade, obtêm-se da adaptação da tábua de mortalidade a idades intermédias



44

N.º

Mappa da importancia das contribuições dos socios do monte pio geral, e das pensões reduzidas tanto a receita como a despeza á epocha da entrada dos so coincidem com a estatistica das admissões

IDADE DOS SOCIOS Á ENTRADA	JOIA PAGA Á ENTRADA POR CADA SOCIO	QUOTA ANNUAL	NUMERO DAS ENTRADAS	1.º ANNO Producto total das joias reduzido ao principio do contrato	Producto das quotas reduzido ao principio do contrato	Numero de socios existentes no principio do anno
21 ½	5$000	5$040	106,9	534$500	538$776	106,9 (809−8)/809
25 ½	5$000	5$040	197,6	988$000	995$904	197,6 (770−8)/770
28 ½	6$500	5$040	230,8	1:500$200	1:163$232	230,8 (746−8)/746
31 ½	8$000	5$280	305,4	2:443$200	1:612$512	305,4 (722−8)/722
34 ½	9$500	6$000	282,3	2:681$185	1:693$800	282,3 (698−8)/698
37 ½	12$000	6$720	442,5	5:310$000	2:973$600	442,5 (675−7)/675
40 ½	15$000	7$440	252,6	3:789$000	1:879$344	252,6 (654−7)/654
43 ½	18$000	8$160	224,9	4:048$200	1:835$184	224,9 (633−7)/633
46 ½	21$000	8$880	145,7	3:059$700	1:293$816	145,7 (611−8)/611
49 ½	24$000	9$600	133,3	3:199$200	1:279$680	133,3 (586−9)/586
52 ½	28$000	11$280	101	2:828$000	1:139$280	101 (555−11)/555
55 ½	32$500	13$440	67,5	2:193$375	907$200	67,5 (530−12)/530
58 ½	37$000	15$600	56,5	2:090$500	881$400	56,5 (483−12)/483
60 ½	40$000	17$040	16	640$000	272$640	16 (427−12)/427
Sommas	....	....	....	35:305$060	18:466$368	
				$1+\frac{1}{2}r$	$1+r$	

(a) N'este mappa suppõe-se que todas as subscripções são de 100$000 réis, e n'elle significam: ... 100r quanto por cento rendem os capitaes da sociedade (producto liquido); f_1, f_2, f_3 etc., coefficientes que devem multiplicar 100$000 réis para ter a pensão annual correspondente a ... a amortisação annual das pensões, isto é, a sua percentagem de diminuição em cada anno, em relação ... As quantias inscriptas em cada columna devem suppor-se affectas dos denominadores e multiplicadores ...

45

legadas pelos fallecidos, computadas estas no seu valor total até á sua extincção, cios, e suppondo que n'essa epocha o numero e a idade dos admittidos na sociedade nos annos de 1858 a 1864 (a)

2.º ANNO Numero de pensões accrescidas no principio do anno	Totalidade das quotas reduzida ao principio do contrato	Importancia das pensões até á extincção reduzida ao principio do contrato	3.º ANNO Totalidade das quotas	Importancia das pensões	4.º ANNO Totalidade das quotas	Importancia das pensões
106,9 − 8/809	533$402	106$633	528$028	106$633	522$654	106$633
197,6 − 8/770	985$557	205$298	975$210	205$298	964$863	205$298
230,8 − 8/746	1:150$758	247$507	1:138$284	247$507	1:125$810	247$507
305,4 − 8/722	1:594$645	338$393	1:576$778	338$393	1:558$911	338$393
282,3 − 8/698	1:674$387	323$553	1:654$974	323$553	1:635$561	323$553
442,5 − 7/675	2:942$763	458$889	2:911$926	458$889	2:881$089	458$889
252,6 − 7/654	1:859$229	270$367	1:839$114	270$367	1:818$999	270$367
224,9 − 7/633	1:814$890	248$704	1:794$596	248$704	1:774$302	248$704
145,7 − 8/611	1:276$876	190$769	1:259$936	190$769	1:240$879	214$615
133,3 − 9/586	1:260$027	204$727	1:238$190	227$474	1:214$169	250$221
101 − 11/555	1:116$700	200$180	1:094$120	200$180	1:069$487	218$378
67,5 − 12/530	886$265	155$769	865$330	155$769	842$651	168$750
56,5 − 12/483	857$677	152$070	833$954	152$070	810$231	152$070
16 − 12/427	264$888	45$514	257$130	45$514	248$779	49$015
	18:218$061	3:148$373 f_1	17:967$870	3:171$120 f_2	17:708$385	3:212$393 f_3
	$(1+r)^2$	$(1+r)(r+s)$	$(1+r)^3$	$(1+r)^2(r+s)$	$(1+r)^4$	$(1+r)^3(r+s)$

cada um dos grau; ... da pensões do anno anterior. ... scriptas nas respectivas sommas.

Figura 1: Primeira página do mapa de receitas e despesas do plano de pensões do MPG (1858–1864) ([7], 44–45).

— usando interpolação linear, considerou uma distribuição uniforme do número de mortes entre idades inteiras (prática actuarial usual).[4] Para a determinação dos valores das pensões, reconhece: "era necessário, em rigor, saber o número de anos que cada uma delas provavelmente deve durar."([7], 13). Não dispondo desses dados, elaborou um método assente no conceito de amortização anual das pensões (razão entre a diminuição que as pensões, pagas em cada ano, sofre no ano seguinte e as pensões pagas nesse ano) e, da hipótese de equilíbrio entre receitas e despesas relativas ao grupo modelo de sócios, obteve o valor necessário para esse factor, que compara com a média aritmética dos valores observados no mesmo período. Dessa forma concluiu a inviabilidade do plano. Propôs medidas que minimizavam a incorrecta fundamentação, maiorita-

[1] Em linguagem actuarial actual, dir-se-ia que não se observou a equação de financiamento geral: *valor actual do fundo + valor actuarial das contribuições futuras = valor actuarial dos benefícios futuros*.

[2] No Montepio Geral (o mais próspero desses montepios, que serviu de modelo para vários outros), as contribuições dependiam do capital subscrito pelo sócio e da sua idade no momento da subscrição; as pensões eram função do número de anos contributivos e do capital subscrito. Essa forma não sofreu consideráveis alterações desde a fundação em 1840 até à década de 1920. Como beneficiários eram permitidos viúva, filhos, pai, mãe, irmãs do sócio ou, inclusive, não familiares, por ele designados, havendo cessação de direitos por casamento, maioridade ou emprego dos pensionistas.

[3] *Anuidade/renda sobre a vida humana* (ou simplesmente *anuidade vida*) é uma sucessão de pagamentos equidistantes, garantindo um benefício periódico, que se prolonga enquanto o grupo de vidas de que depende não se extingue. A venda de anuidades vida pelos Estados era prática comum desde a Idade Média, como forma de aumentar receitas.

riamente ao nível das pensões legadas, evitando a bancarrota da instituição.

A receptividade das suas propostas, por parte da generalidade dos associados, foi bastante reduzida, inclusive com manifestações questionando a sua honestidade e a sua integridade. A dificuldade em lidar com a previsão de acontecimentos futuros dependentes da probabilidade da vida justifica a relutância em aceitar medidas preventivas que reduzissem direitos considerados adquiridos (o legar de uma pensão de valor estipulado aquando da entrada na instituição, contra o pagamento de valor também definido à entrada), numa época em que a instituição apresentava saldo avultado. (Tais instituições teriam, naturalmente, reduzido número de sócios falecidos nos primeiros anos de existência, avolumando-se a receita e sendo diminuta a despesa com pensionistas). A sua escrita é pontuada com frequentes considerações sobre princípios mutualistas.

Produziu investigações mais gerais sobre montepios de sobrevivência, que usou para aperfeiçoar o primeiro relatório sobre o MPG, em *Das condições economicas indispensaveis á existencia do Monte Pio Geral* (onde usou estatísticas da sociedade desde a sua fundação, em 1840). Em [6], expõe um método para determinação do valor da amortização anual média das pensões, fazendo uso de conceitos de Cálculo Financeiro e Teoria dos Números. Condições essenciais são fixadas para esse valor médio, "1.º a existencia d'um grande numero de socios; 2.º constancia d'esse numero; 3.º constancia da media das edades dos socios; e finalmente 4.º constancia da media das suas contribuições annuaes" ([6], 176). Implicitamente, assume-se uma forma da lei dos grandes números e a existência de uma população estacionária (que seria ideal do ponto de vista actuarial, pelo facto de as probabilidades de vida deduzidas de qualquer tábua de mortalidade serem precisas), mas que no MPG não ocorria (não só a associação não era exclusiva de grupos populacionais/profissionais específicos, mas também a admissão era facultativa).[5] Em [8], efectuou um estudo comparativo da população portuguesa com o intuito de fundamentar a escolha de apropriadas tábuas de mortalidade estrangeiras a serem usadas por associações portuguesas na construção das suas tabelas. Recorre a estatísticas de duas instituições que havia compilado (do MPG e do Montepio Geral de Marinha), estatísticas oficiais e estatísticas estrangeiras apresentadas por especialistas.[6] Esse texto é também um contributo no campo dos estudos demográficos em Portugal, o único do género publicado no século XIX.

A importância dos contributos de Daniel da Silva na área do Cálculo Actuarial reside no facto de representarem uma novidade na constituição, sobre bases científicas, dos planos de pensões de montepios de sobrevivência portugueses, contribuindo para o seu progresso e zelando pelo futuro das famílias que dependessem desse tipo de assistência. (No caso do MPG, a adopção de parte das medidas que aconselhou foi reconhecida como fundamental para salvar a instituição da bancarrota.) A sua repercussão não está documentada. Apesar de os seus métodos poderem ser adaptados a outras instituições, a necessidade de estatísticas de cada montepio (quando não havia práticas assíduas de recolha estatística) e a enormidade de cálculos necessários poderiam limitar o seu uso. De qualquer forma, as medidas que aconselha nos seus textos, e os valores de referência que obtém, poderiam servir de modelo para instituições similares ao MPG, como, aliás, recomenda.

A sua actividade no MPG evidencia-nos quem foi exercendo as funções de actuário em Portugal, em época anterior à institucionalização da profissão e à formação em Actuariado.[7] Até 1917, ano em que é criada uma Secção de Actuariado no MPG, contam-se matemáticos, comercialistas, professores de instituições de ensino superior ou de institutos industriais e comerciais, todos eles afiliados na instituição. A todos foi comum a dificuldade em fazer valer a autoridade da ciência.

O seu investimento ilustra habilidade e predisposição para mobilizar capacidades intelectuais no estudo de áreas das Ciências Aplicadas. Além do domínio de conhecimentos matemáticos, possuía características morais indispensáveis ao exercício da função de actuário — entre elas, integridade. Também, um apurado sentido de justiça, que, ao serviço duma associação mutualista, assume inquestionável utilidade e valor: "Não procurámos pois com cautelosa attenuação de phrase occultar uma parte das nossas convicções, persuadidos de que «meia verdade é uma mentira completa»." ([7], *advertência*).

Texto redigido sem observância do Novo Acordo Ortográfico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Martins, Ana Patrícia. "Daniel Augusto da Silva e o Cálculo Actuarial". Tese de doutoramento em História e Filosofia das Ciências: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2013.

[2] Martins, Ana Patrícia. "Bicentenário do nascimento

de Daniel Augusto da Silva". *Anais do Clube Militar Naval CXLIV*, Julho–Dezembro de 2014: 689–707.

[3] Martins, Ana Patrícia. "Subsídios para uma tábua portuguesa de mortalidade — o contributo de Daniel Augusto da Silva". *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* 76 (suplemento), Dezembro de 2018: 187-189.

[4] Martins, Ana Patrícia. "An overview on actuarial calculus in Portugal until the late 19th century". *Historia Mathematica* 51, 2020: 49–90. *https://doi.org/10.1016/j.hm*.2020.01.001

[5] Martins, Ana Patrícia. "Contributos para a história do actuariado em Portugal anterior à fundação do Instituto dos Actuários Portugueses". In *Para a História do Atuariado em Portugal*, 23-69, Lisboa: Instituto dos Atuários Portugueses, 2020.

[6] Silva, Daniel Augusto da. "Amortização annual media das pensões nos principaes montepios de sobrevivência portuguezes". *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes I* (III), Agosto de 1867): 175–187.

[7] Silva, Daniel Augusto da. *O presente e o futuro do Monte Pio Geral.* Lisboa: Imprensa Nacional, 1868.

[8] Silva, Daniel Augusto da. "Contribuições para o estudo comparativo do movimento da população em Portugal". *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes* II (VIII), Dezembro de 1869: 255–306.

[9] Silva, Daniel Augusto da. D*as condições economicas indispensaveis á existencia do Monte Pio Geral.* Lisboa: Imprensa Nacional, 1870.

Ana Patrícia Martins é licenciada em Matemática e doutorada em História e Filosofia das Ciências, professora adjunta da Escola Superior de Educação de Viseu. É investigadora em História da Matemática, com especial interesse pela História da Ciência Actuarial nos séculos XVIII e XIX. É membro do Conselho Geral do Seminário Nacional de História da Matemática e do Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia (CIUHCT).

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*

[4] (em notação actual) Por exemplo, o número de indivíduos com 21.5 anos vivos após um ano, é dado por $\frac{l_{21.5}-d_{21.5}}{l_{21.5}}$, onde $l_{21.5} = \frac{l_{21}+l_{22}}{2}$ é o número de pessoas com 21.5 anos e $d_{21.5} = \frac{d_{2}1+d_{2}2}{2}$ é o número dessas pessoas que faleceu passado um ano. Esse quociente é afecto do factor *número de admissões*, a seguir explicado. Podendo os membros subscrever diferentes capitais aquando da sua inscrição, em múltiplos de 100$000 réis, o *número de admissões* é considerado igual à quantidade desses múltiplos, passando a não haver distinção entre eles.

[5] Considera-se estacionária uma população que não varia o número de indivíduos (total e por idades), ao longo do tempo.

[6] Hubbard, Déparcieux, Quételet, Duvillard, Montferrand, Kersseboom, Süssmilch, Wargentin, Muret, Halley, Farr, Milne e Finlaison.

[7] A primeira associação profissional é criada em 1926, a Associação de Actuários Portugueses; o ensino de assuntos em Actuariado iniciou-se, em Lisboa, no 3.º quartel do século XIX no Instituto Industrial e Comercial de Lisboa, no *Curso Superior de Comércio.*

CONVERSA COM
ALBERTO ELDUQUE

Paulo Saraiva

Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Centro de Matemática da Universidade de Coimbra

psaraiva@fe.uc.pt

Professor catedrático de Álgebra do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Saragoça, Espanha, Alberto Elduque é mundialmente reconhecido no campo das Álgebras Não Associativas. Licenciou-se e doutorou-se em Ciências Matemáticas pela Universidade de Saragoça, em 1982 e 1984, respetivamente. É académico numerário da Real Academia de Ciencias de Zaragoza desde 2006. Foi professor convidado nas universidades de Metz e Pau (França), Wisconsin-Madison (EUA) e Newfoundland (Canadá), tendo colecionado colaborações científicas com mais de três dezenas de matemáticos, de mais de uma dezena de países, entre os quais se destacam os nomes de Georgia Benkart, S. Okubo e Hyo Myung. Trata-se de uma pessoa com visível gosto pela conversa e que afirma sentir-se em Portugal como em casa. Este é um excerto da longa conversa que estabelecemos em torno de vários assuntos do seu interesse.

PAULO SARAIVA Começo por te perguntar em que momento da tua formação nasceu o interesse pela Matemática e, dentro desta, pela Álgebra e pelas Álgebras Não Associativas.

ALBERTO ELDUQUE Em criança sempre gostei de Matemática. Naquela altura, nem sequer supunha que se podia estudar apenas Matemática. Sou o primeiro da minha família que frequentou a universidade. Eu não conhecia o mundo universitário e nem sequer imaginava vir a frequentá-lo. Soube muito tarde que se podia fazer apenas Matemática e, mesmo então, nos últimos anos do Ensino Secundário hesitei entre Física e Matemática. Lembro-me de um episódio que me levou a decidir-me pela Matemática. Uma vez, perguntei à professora de Física por que razão, em alguns raciocínios, às vezes se podiam desprezar certas quantidades e noutros não. E a resposta foi "Porque sim!". E isso empurrou-me para a Matemática. Entendi que havia mais rigor na Matemática. Talvez tivesse sido diferente se fosse com outro professor ou outra professora, mas isso foi importante. Depois, quando comecei a carreira de Matemática, também não estava consciente dessa divisão em Álgebra, Análise e Geometria, mas comecei a gostar desde o princípio do rigor e da elegância da Álgebra. E depois, o facto de serem Álgebras Não Associativas, isso é já circunstancial: era aquilo em que trabalhava o meu orientador de tese.

PAULO SARAIVA Santos Gonzalez…

ALBERTO ELDUQUE Sim… o qual escolhi porque gostei dele enquanto meu professor, sem saber nada. Em todas as decisões que tomei no meu percurso houve, portanto, uma dose de acaso.

PAULO SARAIVA É curioso que a opção tenha resultado de uma resposta insatisfatória.

ALBERTO ELDUQUE No final, a decisão estava entre a Física e a Matemática. Gosto de ambas e este episódio foi o que me empurrou para a Matemática.

PAULO SARAIVA Pelo facto de teres alcançado um Primeiro Prémio na Olimpiada Matemática Española, conseguiste então uma bolsa para frequência universitária. Para mim, isto é uma novidade. Em Portugal, não é assim. Há prémios, mas depois não há uma consequência a nível universitário. Ainda hoje é assim em Espanha?

Junto à escultura *Creación*, representando os anéis de Borromeo na forma de quadrados (Edifício da Matemática da U. de Saragoça).

ALBERTO ELDUQUE Não, agora é a mesma coisa que em Portugal: há prémios, mas não há bolsas. Mas, naquela época, os três primeiros classificados de cada distrito universitário recebiam uma bolsa para estudar Matemática. Se seguissem outro curso, não havia bolsa. Naquela altura, os distritos universitários eram maiores do que agora. O de Saragoça tinha seis províncias em vez das três atuais, o que sucede porque todas as Autonomias têm universidades. Em cada ano, havia cerca de 30 bolsas em toda a Espanha devido à Olimpíada de Matemática, a única que então existia. Em 1977 decorreu a 14.ª edição e quando começou a haver outras olimpíadas e mais prémios, as bolsas desapareceram. Creio que duraram até aos anos '80.

PAULO SARAIVA Ao licenciares-te, obtiveste o Prémio Nacional de Conclusão de Estudos e, mais adiante, concluíste o doutoramento em escassos dois anos. Como foram estes tempos, esta evolução vertiginosa na tua formação académica? Já tinhas as coisas encaminhadas durante a licenciatura e depois tudo se tornou mais fácil?

ALBERTO ELDUQUE Por várias razões, durante os cinco anos da licenciatura estudei imenso, mas desfrutando. Fui uma pessoa feliz desde o primeiro dia em que entrei na primeira sala tão grande, que para mim era algo… Uau! Fantástico! E gostava de tudo o que aprendíamos. Não conhecia ninguém, o que me obrigou a fazer novos amigos, um amplo grupo de amigos. Como detalhe curioso, estou casado com a rapariga que se sentava atrás de mim no primeiro ano. A maioria dos meus professores eram estupendos. O tema proposto pelo meu orientador, o estudo das álgebras de Malcev com determinadas propriedades, deu frutos muito rapidamente, pelo que a conclusão da tese em dois anos foi uma questão de sorte. Depois acabei por não me dedicar muito a esse tema, mas levou-me a ter de estudar coisas relacionadas com os octoniões e, depois, a minha vida prosseguiu relacionada com os octoniões durante uns tempos. Foi um tema no qual desde muito cedo obtivemos resultados, o que me permitiu concluir o doutoramento em pouco tempo. Mas isso não significa nada.

PAULO SARAIVA Bom, mas o facto de teres recebido um Prémio Nacional de Conclusão de Estudos terá tido a sua importância como impulso para o doutoramento e a tua carreira futura.

ALBERTO ELDUQUE Sim, foi importante. Sempre é um reconhecimento. Mas tive a sorte de ter uns companheiros muito brilhantes. Éramos um grupo muito forte, com uma competição sã, pois continuamos a ser muito amigos. Não sei como é em Portugal, mas em Espanha há um sistema de quotas, de modo que a nota máxima apenas pode ser atingida por 5% dos alunos. Sobretudo nas disciplinas opcionais, em áreas mais puras, nos últimos anos do curso, só havia uma "matrícula de honor" (a nota máxima). Por este motivo, vários companheiros muito brilhantes não conseguiram atingir tal classificação. Apesar disso, continuamos a ser muito amigos. Tive a sorte de ter um grupo no qual aprendíamos muito uns com os outros. Digo sempre aos meus alunos que se aprende mais trabalhando com os companheiros do que com o professor. É importante ter um grupo e o meu era fantástico. Na passada sexta-feira, visitei a Universidade de Pamplona (Navarra) porque um desses companheiros, Esteban Induráin, catedrático de Análise Matemática, dava a lição inaugural de 2021/22 naquela universidade. Ali estivemos quatro dos colegas de licenciatura, porque foi um orgulho para todos que um de nós estivesse dando a lição inaugural, e fê-lo muito bem!

PAULO SARAIVA Entrando um pouco no campo das Álgebras Não Associativas, sem detalhar demasiado, que tipo de problemas se estuda nesta área?

ALBERTO ELDUQUE Bom, trata-se de um campo muito amplo (como todos…). Digamos que a variedade mais notável das Álgebras Não Associativas é a das álgebras de Lie (e a das superálgebras de Lie no mundo "super", com a supersimetria), e a origem dessa variedade são as álgebras tangentes, as álgebras infinitesimais dos grupos de Lie, e aí está o princípio de tudo. Os grupos de Lie ou os seus análogos sobre corpos arbitrários (grupos algébricos ou esquemas-grupo) medem as simetrias de qualquer tipo que podemos encontrar em determinadas situações na Geometria, na Física. Por vezes o estudo do grupo de Lie é complicado, porque o grupo é um objeto não linear, que além disso é uma variedade diferenciável ou uma variedade algébrica, segundo o contexto em que nos situemos. Para o estudar, podemos passar ao nível infinitesimal no qual temos um espaço vetorial com uma operação e podemos utilizar todas as potencialidades e a simplicidade da Álgebra Linear. Isto faz com que as álgebras de Lie sejam tão importantes, uma vez que permitem estudar as simetrias utilizando outras técnicas.
A outra variedade mais importante são as álgebras de Jordan, cuja origem se situa na Mecânica Quântica, numa tentativa de encontrar modelos para a álgebra dos observáveis distintos ao dos operadores autoadjuntos num espaço de Hilbert. Como resultado dessa tentativa no contexto da Mecânica Quântica, apenas surgiu uma álgebra excecional – as álgebras de Albert – distinta das que já eram conhecidas, mas que depois demonstrou ser muito importante na hora de coordenar determinadas geometrias e trabalhar com estas. Por outro lado, muitas das coisas que faço têm que ver com os octoniões, a primeira álgebra não associativa (surgida a meio do séc. XIX, antes mesmo das álgebras de Lie e até das álgebras de matrizes), a qual é um objeto excecional, relacionado com uma quantidade enorme de situações excecionais, na Álgebra, na Geometria, na Matemática Discreta.

PAULO SARAIVA Acabaste por responder parcialmente a uma pergunta que ia fazer-te, que é a de saber que aplicações tem a teoria das Álgebras Não Associativas. Referiste aplicações à Física no seio da Mecânica Quântica, e também sei que na Genética são conhecidas algumas aplicações. Embora se saiba que a maioria dos algebristas não estuda estes assuntos com o propósito das aplicações, queres falar algo sobre esta vertente?

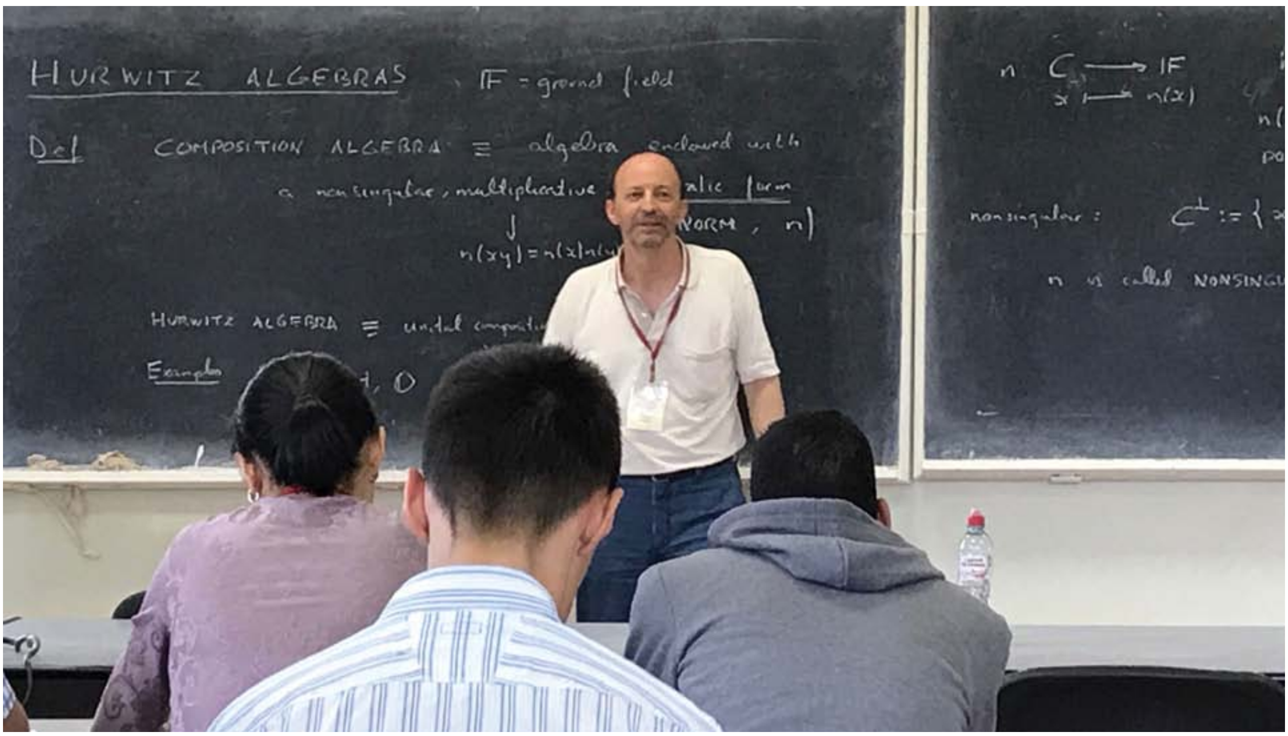
ALBERTO ELDUQUE Primeiramente, devo dizer-te que sou um matemático puro e que investi pouco nas aplicações. No entanto, colaborei com alguns físicos (principalmente com S. Okubo), mas essencialmente em coisas muito teóricas. Lembro-me de ter feito um artigo especificando aquilo de que necessitavam uns colegas de Geometria Diferencial para decompor tensores relativamente à ação do grupo unitário. Foram eles que me perguntaram se havia uma teoria por detrás que os ajudasse a decompor tais tensores. Descobri a teoria, mas para eles tal forma de proceder era demasiado abstrata e preferiam utilizar uns métodos mais *ad-hoc*, que lhes permitiam ir resolvendo os problemas em cada caso. Então, nunca chegaram a utilizar uma teoria que eu fiz para eles! Por vezes é complicado.
Em Genética e em questões de Biologia, há uma série de álgebras – álgebras báricas, álgebras de evolução – que estão relacionadas, mas creio que aqui ainda não foram suficientemente bem exploradas as aplicações, porque é difícil. Por vezes, falamos linguagens diferentes.
Dito isto, acredito que nós, os matemáticos, devemos estar abertos a colaborar com outros grupos porque daí até podem resultar boas ideias para as nossas pesquisas. Creio que Ian Stewart terá dito que a Matemática Pura é

útil quase a despeito de si própria. No meu caso, é mesmo assim: não me guio por possíveis aplicações, mas mais por questões que poderíamos qualificar como estéticas. “Isto é muito bonito. Quero saber como funciona!” Mas, se alguém vier com algum problema de aplicações suscetível de merecer o nosso contributo, devemos estar abertos.

PAULO SARAIVA Olhando para a vasta panóplia de famílias de álgebras dentro das Álgebras Não Associativas, estabelecendo uma analogia, fica-se com a ideia de que temos à disposição um conjunto de “praias” e que em cada uma delas é possível construir um “castelo de areia” com determinadas ferramentas e “brincar” de certa maneira. Juntamos outra ferramenta (ou substituímo-la) e de repente já estamos noutra “praia”, porventura ali mesmo ao lado. Vamos ver o que é interessante fazer nesta “nova praia”. A que se deve esta variedade de famílias de álgebras e como saber quais são interessantes, aquelas que vale a pena estudar? Ou para ti esse problema não se coloca?

ALBERTO ELDUQUE Saber a que dedicar-se é muito importante. E, sim, é verdade que se estão a definir muitas coisas e nem todas têm de ser interessantes. No meu trabalho, é importante que as álgebras que se estudam tenham uma simetria razoável. Primeiro, porque é isso que faz com que seja possível estudá-las e essa simetria é útil depois, porque vai ajudar-nos a relacioná-las com grupos (de Lie, ou algébricos), que podem aparecer em outros pontos e que podem ajudar-nos a relacionar tais álgebras com outras. De facto, as variedades que se estudam nas Álgebras Não Associativas têm em grande parte a sua origem em temas de Física Teórica ou de Geometria e isso faz com que sejam interessantes. Pode acontecer que um algebrista, por algum motivo, se decida a criar uma nova variedade de álgebras. Quando depois “ganham vida” por si mesmas, então já se consegue desenvolver toda uma teoria que por vezes regressa ao campo original e por vezes ruma a outros sítios. Quando se começou com as álgebras de Jordan não se pensou na sua relação com álgebras de Lie excecionais ou com superálgebras de Lie e, no entanto, o seu desenvolvimento levou à conclusão de que estas álgebras permitiam coordenar certas álgebras ou superálgebras. Deve estar-se atento a todas essas relações que possam surgir.

PAULO SARAIVA Dentre as tuas colaborações internacionais, destaco aquelas com Georgia Benkart, Susumu Okubo e Myung. Queres recordar alguma destas ou outra em especial?



ALBERTO ELDUQUE Todas as que referiste! No meu primeiro congresso internacional, fui com o meu orientador e com Consuelo Martínez aos EUA. Era a primeira vez que cruzávamos o Atlântico. Tivemos a enorme sorte de, nesse congresso, termos conhecido Marshall Osborn, Georgia Benkart, Hyo C. Myung e S. Okubo. Não começámos logo a colaborar (o primeiro a visitar-nos foi Osborn e ensinou-nos muitas coisas sobre álgebras de Lie), mas recordo perfeitamente que, ao entrarmos (atrasados, por problemas com a organização) durante a comunicação de Georgia Benkart, o impacto foi como "amor à primeira vista"! Que bem explica! Que profundidade! Que cuidado com os detalhes, com a atenção ao público, com o que está a entender e o que não. E acabou por se converter num modelo a seguir, para mim, ainda estudante de doutoramento. Colaborei com ela mais tarde, durante um ano sabático. Fui com toda a família a Wisconsin e colaborámos de maneira fantástica. Aprendi muito com ela.

Com Myung, comecei a colaborar antes, a partir de 1987, 1988. Myung converteu-se numa espécie de segundo mentor, o qual podia consultar sobre tudo e não apenas sobre problemas de matemática, mas também sobre problemas de organização e de como proceder em muitos casos.

E com Okubo, que é a pessoa com quem mais trabalhei nos primeiros anos, a colaboração foi, por um lado, mais difícil, porque as linguagens que por vezes falávamos eram diferentes, mas também porque Okubo, um físico-matemático, tinha uma formidável visão da Matemática. Era capaz de fazer uns cálculos com tensores… que eu precisava de ver de outra maneira para os compreender. Normalmente, eu era capaz de os traduzir para uma linguagem matematicamente mais elegante (para mim), ainda que isso se tornasse pior para ele. Mas havia vezes em que não. Foi graças a essa capacidade de fazer cálculos com tensores, que tinha índices subindo e baixando, que obtivemos resultados. Acabou por ser uma colaboração de outro tipo, mais epistolar, e com tempo para cada um digerir a maneira de pensar do outro.

Posteriormente, colaborei muito bem com todos os meus orientandos de doutoramento. Ultimamente, M. Kotchetov é um colaborador com o qual me complemento muito bem desde há vários anos.

Bom, cada um destes colaboradores é um mundo, à semelhança dos alunos de doutoramento! Não há dois iguais. Mas foi muito importante que nesse primeiro congresso internacional tivéssemos conhecido as pessoas que referi, com as quais aprendemos muitíssimo. E para a matemática que depois viemos a desenvolver foram fundamentais esses contactos.

PAULO SARAIVA Já orientaste cerca de dez alunos de doutoramento, entre os quais Helena Albuquerque (Universidade de Coimbra) e Isabel Cunha (Universidade da Beira Interior), em coorientação. Entendes que é hoje em dia mais difícil atrair estudantes de doutoramento para a tua área de investigação, por comparação com áreas aplicadas ou com outras que estão mais na moda?

ALBERTO ELDUQUE Sim, é. Nos últimos anos, este modo de proceder do *publish or perish* – e já não apenas isto, mas *publish in first quartile journals or perish* – está a matar-nos no que à matemática fundamental diz respeito. Trata-se de algo que, quando temos reuniões com políticos, a sua reação quando conversam entre eles deve ser algo do tipo "Mas este de onde é que saiu?" Porque a mentalidade predominante para avaliar tudo é a mentalidade experimental, um mundo em que há equipas muito alargadas, no qual todos colaboram e todos publicam. Claro, um teorema matemático sai da mente de uma pessoa, de repente pode "acender-se uma lâmpada" ou pode resultar de conversas entre dois ou três. Mas não resulta da colaboração de oito ou nove. Pode acontecer, em algumas áreas da Matemática isso poderá ser mais normal, mas na matemática mais fundamental isso é mais difícil. E aí não podemos competir. Por exemplo, o que referiste sobre os prémios, já há muitos anos que nenhum aluno doutorado em áreas da matemática fundamental recebe o prémio extraordinário de doutoramento pela Universidade de Saragoça, porque tudo se baseia no número de artigos publicados até à defesa da tese. Não é o mesmo um químico experimental ou um matemático que trata determinados problemas em grupo e com forte componente computacional, que um problema de Topologia Algébrica, ou de Álgebras Não Associativas, pelo que sim, é um problema.

Hoje em dia, para os nossos alunos é mais difícil obter bolsas; para nós mesmos é mais difícil obter bolsas para as equipas de trabalho. Recebemos recentemente um relatório de uma candidatura a financiamento ao nosso governo regional para o grupo de Álgebra e Geometria da Universidade de Saragoça. Os três avaliadores fizeram finca-pé de que não fazíamos transferência de conhecimento para as empresas, pelo que estamos mais mal avaliados do que muitos grupos cuja qualidade é menor. Assim, iremos receber menos dinheiro porque fazemos

Com Helena Albuquerque e Saïd Benayadi, Coimbra (2019)

Alberto Elduque e Fernando de la Cueva, organizadores do *Taller de Talento Matemático*, recebendo o prémio Savirón.

matemática fundamental. Por outro lado, dito tudo isto, creio que desfrutamos muito mais do que muitos cientistas experimentais. Isto é vocacional! Aqui, dedicamo-nos a isto porque gostamos e há que explorar este facto.

PAULO SARAIVA Um dos maiores desafios que os professores do ensino universitário têm, sobretudo os que lecionam o primeiro ano, é o chamado salto do Ensino Secundário para o Ensino Superior. Os alunos não estão habituados a um certo rigor, mas antes a receitas, e muitos parecem não estar habituados a pensar. Tendo já refletido sobre isto, queres partilhar algumas ideias connosco?

ALBERTO ELDUQUE Durante muitos anos ensinei Teoria de Galois, mas nos últimos quatro anos tenho lecionado a alunos da licenciatura em Biotecnologia. Tenho-me deparado com alunos, bons alunos, com boas notas de acesso, mas sem uma apreciação clara da Matemática. Nos últimos anos do Ensino Secundário – e isto é um autêntico cancro – os alunos dedicam-se a preparar-se para os exames de acesso à universidade. Então, os alunos aprendem receitas para seguir os estudos e não aprendem a raciocinar, o que para mim é muito grave. Na disciplina que leciono, com três horas semanais durante o semestre, o programa inclui cálculo de uma e várias variáveis, derivação e integração, alguma álgebra linear e equações diferenciais. Há alunos que, na maioria dos casos, seguiram receitas. O meu ponto de vista é que tenho de os ensinar a raciocinar, o que me leva a perguntar-lhes coisas que não se limitem à aplicação de receitas e isso custa-lhes muito (a uns mais do que a outros), o que é um problema. Pelo menos aqui em Espanha a Sociedade de Professores de Matemática de Ensino Secundário está a exercer uma certa pressão para tentar alterar o exame de acesso às universidades, porque se se mudar o tipo de perguntas, imediatamente terá de ser modificada a maneira de pensar. O razoável seria inverter este processo: primeiro alterar a maneira de explicar e depois mudar os exames de acesso. Mas isso seria mais difícil. Mas vamos ver… E, portanto, o salto que se produz do último ano do Ensino Secundário para o primeiro da universidade hoje em dia é enorme.

PAULO SARAIVA E depois há alunos de tal modo formatados que acontece aquela pergunta fatal "E isto sai no exame?" Parece que apenas estão dispostos a aprender um assunto se tiverem a certeza de que sai no exame.

ALBERTO ELDUQUE Eu incentivo-os muito a participar, mas há alguns alunos que apenas perguntam isso "E se me perguntares isso no exame, que devo responder"? É um problema! Mas vamos ver se, gradualmente, conseguimos alterar o exame como primeira medida, e a partir daí alterar o modo de ensino da Matemática. Há pouco tempo, pediram-me que fizesse uma comunicação aos professores do Ensino Secundário, justamente acerca deste assunto da transição para o ensino universitário. O que acontece é que os professores que assistem a estas palestras já estão convencidos da necessidade de fazer uma alteração. O problema são os professores que não se preocupam e não assistem a este tipo de comunicações. Há que ver como chegar a estes.

PAULO SARAIVA És presidente da Associação Taller de Talento Matemático de Aragón, a qual foi reconhecida em 2015 com a atribuição de um prémio nacional de divulgação científica em 2015. Em que consistem estas oficinas?

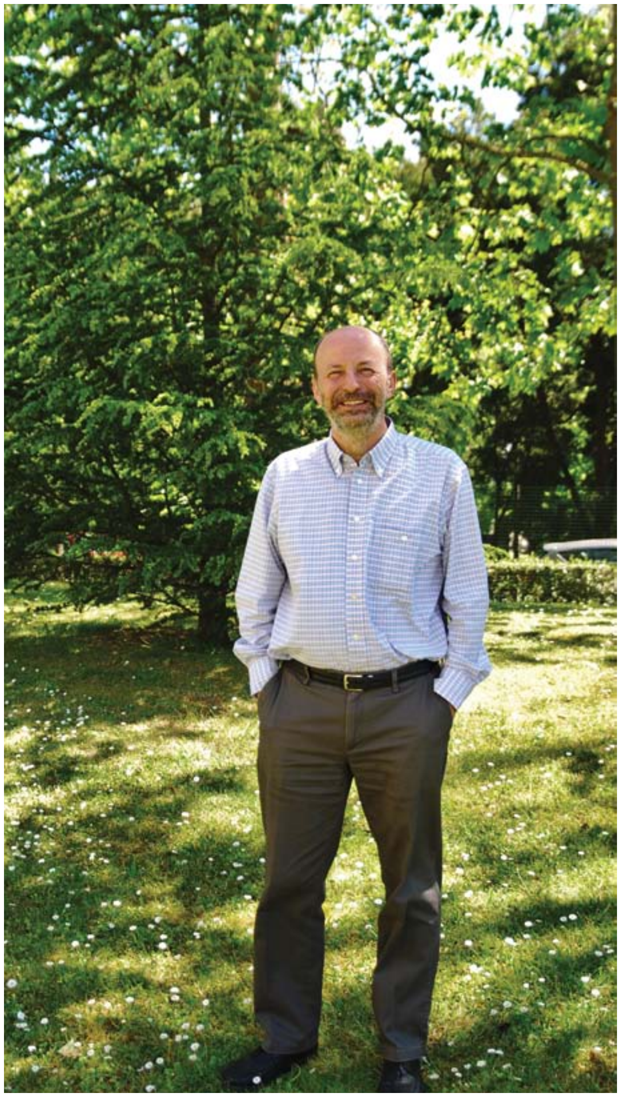
ALBERTO ELDUQUE Ouve-se dizer "Presidente da Associação" e pode parecer que se trata de uma organização enorme! Somos dois a dirigir esta associação. O meu parceiro Fernando de la Cueva, que foi colega de licenciatura e do serviço militar, é professor do Ensino Secundário. Encontrámo-nos após muitos anos sem nos vermos. Ele era um dos professores do Ensino Secundário que acreditavam que havia que fazer algo para mudar a maneira como a Matemática era lecionada. Para poder fazer algo, havia que legalizar a situação, e para tal teve de se criar uma associação sem fins lucrativos, com estatutos e estrutura diretiva. O que fazemos é algo simples (embora com a pandemia levemos um ano sem fazer atividades, mas esperamos voltar a elas): de duas em duas semanas, juntamos alunos dos 14 aos 18 anos em salas de matemática da universidade e fazemos atividades, cujo tipo depende um pouco dos professores voluntários que conseguimos mobilizar. Há alguns anos, conseguimos a colaboração de um professor de Matemática que fazia atividades de música e matemática. Há atividades de "magia matemática". Há atividades mais "normais", por exemplo, de resolução de problemas, outra de problemas das Olimpíadas de Matemática. Permitimos então que rapazes e raparigas que gostem de Matemática possam ter esta atividade extra. A diferença relativamente ao que se está a fazer noutros sítios é que nós não aplicamos uma prova de entrada; não queremos apanhar os que já "funcionam muito bem", mas todos os que queiram vir. O que acontece é que, no princípio do curso, temos as salas cheias de gente, número que vai diminuindo até cerca de metade no final.

PAULO SARAIVA Pode não ser este o objetivo, mas alguns destes alunos seguem Matemática no Ensino Superior?

ALBERTO ELDUQUE Sim, muitos! E, de facto, estamos muito contentes por termos alunos provenientes de sítios que estão a mais de 100 km de Saragoça. E falando com os seus pais, estes dizem-nos que, para os seus filhos, cada uma destas sextas-feiras é um dia em que se sentem alegres por poderem vir. Há de facto pais que nos referem que os seus filhos estão a descobrir de verdade o gosto pela Matemática.

PAULO SARAIVA A propósito do Taller, referiste há pouco uma das consequências da pandemia nesta atividade. Em termos de ensino e investigação, que avaliação fazes deste período, que na realidade ainda não terminou?

ALBERTO ELDUQUE Com os nossos alunos, temos de lhes transmitir conhecimentos, mas também uma certa paixão por aquilo que fazemos. Agora passámos a transmiti-los de outra maneira e tivemos de aprender a utilizar o Zoom ou ferramentas análogas. Evidentemente, é melhor a atividade presencial, e sobretudo com alunos que estão a começar, pelo que dizíamos antes: aprende-se tanto dos professores como entre alunos. Aqui, na Faculdade de Ciências, no ano letivo passado decidiu-se que os primeiros anos iriam decorrer presencialmente, tendo sido reservadas as salas maiores. Eu lecionei na Aula Magna (sala onde se defendem as teses doutorais), com capacidade para 400 alunos, e os pouco mais de 80 puderam sentar-se com o devido distanciamento de segurança. Mas as práticas computacionais tiveram de ser feitas *online*, cada um em sua casa.
Os encontros científicos passaram a fazer-se *online*. As agências que nos financiam ter-se-ão dado conta de que é muito mais barato financiar um congresso *online*, pelo que será mais difícil no futuro fazer congressos presenciais, apesar de, em matemática, a interação pessoal continuar a ser muito importante. O que disse antes sobre Benkart, Osborn, Myung, Okubo, a possibilidade de os conhecer pessoalmente, se tivesse sido um congresso *online*, provavelmente não teríamos interagido tanto. Por outro lado, graças à pandemia, passámos a ter a grande



vantagem de assistir a muitos seminários no mundo que anteriormente apenas decorriam presencialmente. Agora são híbridos, e podemos assistir a comunicações de professores fantásticos em todo o mundo. Creio que temos de aproveitar as coisas boas que a pandemia trouxe e, tanto quanto possível, tentar voltar ao modo presencial.

PAULO SARAIVA Fui atraído no teu curriculum por dois projetos de inovação educacional intitulados *Recursos para la enseñanza de las matemáticas para alumnos con discapacidad: formación segun el modelo de Singapur e Aprendiendo a aprender matemáticas: ¿qué nos enseñan los niños con discapacidad intelectual?* Podes explicar-nos em que consistiram estes projetos?

ALBERTO ELDUQUE Ambos são consequência do Taller de Talento Matemático. Uma das professoras voluntárias, Elena Gil, é mãe de um menino com síndrome de Down. À medida que o seu filho foi crescendo, ela foi-se preocupando com o modo de lhe ensinar Matemática. Assim, foi ela que me levou, a mim e a outras pessoas, a pensar em como fazer as coisas. No fim, a Elena Gil acabou por fazer uma tese doutoral sobre este tema.

PAULO SARAIVA Elena é professora? Investigadora?

ALBERTO ELDUQUE Elena é professora de um centro de Ensino Secundário e também colabora com a universidade, onde é professora dos futuros docentes do Ensino Básico.
Normalmente, ao acedermos à Matemática, a primeira coisa de que temos memória é de termos aprendido a contar e a somar. E isto é difícil para alunos com incapacidades. No entanto, a geometria elementar euclidiana atrai-os bastante, e são capazes de construir mentalmente relações de umas coisas com outras e de entender questões de congruência, de semelhança e tudo isso. Uma das conclusões destes projetos é que, com estes alunos, deveríamos alterar o programa começando por geometria, e não pela aritmética, para apenas chegar a esta pouco a pouco. A questão que se coloca é a de saber se isto é também válido para alunos sem incapacidades, se não deveríamos dar mais destaque à geometria do que o que se está a fazer e, pouco a pouco, ir introduzindo a aritmética. Nas questões de geometria, Elena é capaz de colocar exemplos interessantes e, na verdade, há questões muito bonitas. Estes meninos, ainda que seja apenas pela cor, pelas formas, pela beleza intrínseca, essas simetrias que uns apreciam de uma forma, eles apreciam-nas à sua maneira, ao passo que o número é mais abstrato. E isto faz com que vão adquirindo uma certa segurança e autonomia de modo a manipular certos objetos e ir progredindo. Tudo isto é interessante, mas devo dizer que a minha participação é muito limitada. Apesar disso, a Elena ainda me acha útil no projeto, de modo que, naquilo em que possa dar a minha opinião, continuarei a fazê-lo.

PAULO SARAIVA Obrigado por esta agradável conversa.

ALBERTO ELDUQUE De nada! Devo dizer que, desde que comecei a orientar a Helena Albuquerque e passei a visitar Portugal, me sinto neste país como se estivesse em casa. Adoro Portugal e os portugueses, e tenho muito gosto em visitar-vos e em colaborar convosco.

PAULO SARAIVA E nós também temos muito gosto em receber-te, seja em Coimbra, na Covilhã ou no Porto. Serás sempre bem-vindo.[1]

SOBRE O AUTOR

Paulo Saraiva é professor auxiliar da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, onde costuma lecionar Cálculo aos alunos do primeiro ano de Economia. É investigador do Grupo de Álgebra e Combinatória do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. Licenciou-se em Matemática (Ramo de Formação Educacional) em 1992 e concluiu em 1996 o Mestrado em Matemática (Especialização em Ensino), em ambos os casos, pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Concluiu o Doutoramento em Economia, na área de Economia Matemática e Modelos Econométricos, pela Universidade de Coimbra em 2004.

[1] Em julho de 2020, teria decorrido em Coimbra, no DMUC, o NAART II, *Non-Associative Algebras and Related Topics II*, encontro científico dedicado nesta edição a Alberto Elduque, por ocasião do seu 60º aniversário. Por razões que todos conhecemos, este evento teve de ser adiado, estando previsto para 18-22 de julho de 2022. Uma boa ocasião para revermos Alberto Elduque. Presencialmente!

NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

A HIPÓTESE DA SIMULAÇÃO

Uma hipótese que está muito longe de ser uma teoria, mas que nos faz pensar se somos autores ou meras personagens!

O mais recente romance do escritor francês Hervé Le Tellier, *A Anomalia*, publicado em Portugal pela Editorial Presença, foi vencedor do prémio Goncourt em 2020 e é uma proposta literária tão original quanto bem-sucedida. Hervé pertence ao grupo literário Oulipo (Ouvroir de Littérature Potentielle), de que já aqui falei, e, como outros membros do mesmo grupo (Georges Perec, Italo Calvino ou Raymond Queneau), tem por hábito incorporar elementos lúdicos e instrumentos matemáticos ou linguísticos nas suas obras: cálculo combinatório, lipogramas, palíndromos, ambigramas, etc.

A premissa do romance assenta num acontecimento particular – um avião que atravessa uma tempestade violenta mas que acaba por aterrar em segurança – que se duplica em dois tempos distintos e que leva também à existência duplicada da tripulação e dos passageiros envolvidos. Assim que a "anomalia" é notada, diversos organismos governamentais, militares, religiosos e científicos começam a trabalhar numa explicação do fenómeno.

Sem desvendar demasiado da história, a certo momento parece surgir um consenso em torno da "hipótese da simulação", que sugere que a realidade tal como a conhecemos não é mais do que uma simulação computadorizada tão sofisticada que se tornaria indiscernível da realidade percecionada pelos seres humanos. Esta hipótese, que está ainda muito longe de ser uma teoria, foi popularizada pelo filósofo Nick Bostrom em 2003 e tem ganhado tração tanto no meio académico como na cultura popular, muito graças aos avanços tecnológicos na inteligência artificial e na realidade virtual. Sugiro a leitura do artigo original (*https://www.simulation-argument.com/simulation.html*) em que a proposta é escorada por algum cálculo probabilístico, mas também a revisitação da filosofia do grego Anaxarco (380-320 a.C.) ou de Mónimo de Siracusa (séc. IV a.C.), que comparavam a realidade a uma pintura ou às impressões vividas durante um sonho ou a loucura; ou ainda a anedota que conta que o crítico inglês Samuel Johnson terá respondido à teoria do filósofo irlandês George Berkeley de que nada era real pontapeando uma pedra e afirmando "assim eu a refuto".

Talvez os nossos cérebros superdesenvolvidos criem eles próprios esta "angústia da realidade", a vertigem da criação e os meios tecnológicos ao nosso dispor fazem de nós criadores de novas realidades, mas também possíveis vítimas de outros iguais ou superiores a nós. A pergunta final é muito literária e talvez estivesse na mente de Hervé Le Tellier ao escrever este livro: Afinal somos autores ou meras personagens? Haverá diferença entre uma coisa e a outra?

Miguel de Carvalho
School of Mathematics, University of Edinburgh
Miguel.deCarvalho@ed.ac.uk

ESPELHO MEU, ESPELHO MEU: HÁ ALGUÉM QUE GASTE MAIS POR MÊS DO QUE EU?

As estatísticas de finanças pessoais são fundamentais tanto para bancos e consultores financeiros como para os seus clientes. Neste artigo faço um apanhado de um método estatístico que desenvolvi recentemente em colaboração com colegas e que foi motivado por uma questão colocada por uma empresa da fintech:

> *"Como é que comparo estatisticamente as despesas de um dos utilizadores da nossa plataforma com as de outros que ganham aproximadamente o mesmo?"*

A metodologia desenvolvida envolve uma extensão do conceito de regressão não paramétrica através de métodos de núcleo na qual o regressor é censurado.

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

A Estatística desempenha um papel fundamental na resolução de problemas reais com os quais são confrontados diariamente várias entidades, tais como, empresas, reguladores, e outros institutos da área económica. O facto de que a mesma metodologia estatística (ex: regressão, teste de hipóteses, máxima verosimilhança) possa ser aplicada recorrentemente para resolver problemas de distintas áreas científicas – tais como climatologia, economia, geologia, medicina, etc. – demonstra a transversalidade e a riqueza da Estatística. Não é portanto surpreendente que a pesquisa científica por novas metodologias estatísticas seja assim uma área extremamente ativa de investigação.

Esta nota resume a análise de um problema de consultoria com o qual fui confrontado no âmbito de uma *comparação estatística indivíduo-grupo*; ou seja, um problema em que o objetivo é comparar estatisticamente um indivíduo *versus* um grupo de indivíduos "semelhantes" num sentido a detalhar em seguida. Uma versão ingénua da questão que motivou esta investigação é referida acima no resumo; a nossa solução para uma versão mais complexa do problema levou à publicação de um artigo no *Journal of the Operational Research Society* [1] e esta nota é baseada nesse artigo.

Uma das primeiras etapas em qualquer problema de consultoria é entender exatamente qual é o problema com que se confronta o cliente. Quando me reuni com o cliente pela primeira vez, o cliente não chegou com o problema formulado como um problema de comparação estatística indivíduo-grupo até porque essa é terminologia que eu próprio desenvolvi em colaboração com os meus coautores. O cliente chegou com uma base de dados enorme, recorria a jargão da *fintech* que não dominávamos e o meu primeiro objetivo foi converter as suas necessidades numa questão simples, como a questão que enuncio no resumo desta nota. De modo grosseiro, a *fintech* é uma área emergente que recorre ao uso de tecnologias e técnicas inteligentes de automação para desenvolver novas ferramentas e serviços financeiros.

Há questões de consultoria que podem ser resolvidas recorrendo a metodologias estatísticas que já são conhecidas; outras questões requerem um tratamento mais sofisticado e podem levar ao desenvolvimento de novas técnicas. Em seguida, introduzo os métodos que foram desenvolvidos para dar uma resposta às questões do cliente; do ponto de vista conceptual, a nossa abordagem tem algumas ligações com o chamado *F-baricentro* do intervalo *(a, b*] [4], o qual é definido como

$$b_F = \mathrm{E}\{X \mid X \in (a, b]\}, \tag{1.1}$$

onde se supõe que a variável aleatória X tem valor esperado $\mathrm{E}(X) < \infty$ e que a sua função de distribuição, $F(x) = P(X \leq x)$, é estritamente crescente.

2. METODOLOGIAS DESENVOLVIDAS

2.1 Valor médio comparativo - versão estática

Definição e contexto

O foco da abordagem é semelhante ao contexto de regressão, no sentido em que há que considerar uma resposta (Y) e um regressor (X); sejam $X_0 = x_0$ e $Y_0 = y_0$ os valores fixos de um indivíduo de referência. Embora definamos em seguida o *valor médio comparativo* como um conceito geral, no contexto aplicado de interesse:

- Y representa uma despesa e X denota um rendimento.
- o "indivíduo de referência" é um utilizador de uma plataforma financeira.

O objetivo é comparar o indivíduo de referência com indivíduos semelhantes, ou seja, indivíduos caracterizados por uma covariável X contida numa bola com raio $\delta > 0$ centrada em x_0, $B_\delta(x_0)$; para facilitar a exposição consideremos em seguida apenas um regressor por forma que $B_\delta(x_0) \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. O *valor médio comparativo* (de nível $\delta > 0$) é definido como

$$\mu_\delta = \mathrm{E}\{Y \mid X \in B_\delta(x_0)\}.^1 \tag{2.1}$$

Se $\delta \to 0$, obtemos o valor esperado condicional $\mathrm{E}(Y|X = x_0)$ o qual é a base do modelo de regressão linear simples. Conforme se pode ver na equação (2.1), o valor médio comparativo é semelhante ao F-baricentro definido em (1.1), mas envolve duas variáveis aleatórias *(X, Y)*.

Inferência

Em seguida discuto um estimador empírico para o valor médio comparativo. Suponhamos que existem $n + 1$ indivíduos na nossa plataforma e que estão disponíveis os seguintes dados $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$, além dos dados do indivíduo de referência, (x_0, y_0). Definimos a *média amostral comparativa* (de nível $\delta > 0$) como

$$\hat{\mu}_\delta = \frac{1}{k} \sum_{i \in A_\delta} Y_i, \tag{2.2}$$

onde $A_\delta = \{i : X_i \in B_\delta(x_0)\}$ será designado por *janela de comparação* e $k \equiv k_{n,\delta} = |A_\delta|$ denota o seu cardinal. Suponhamos que

$$1.\ \lim_{\delta \to 0} k = |A_0| \quad 2.\ \lim_{\delta \to \infty} k = n + 1 \quad 3.\ \lim_{n \to \infty} k = \infty.$$

Com estas hipóteses, a média amostral comparativa tem as seguintes propriedades

$$1.\ \lim_{\delta \to 0} \hat{\mu}_\delta = y_0, \text{ q.c.} \qquad 2.\ \lim_{\delta \to \infty} \hat{\mu}_\delta = \bar{Y}, \text{ q.c.}$$

$$3.\ {}_\delta \underset{\mathrm{p}}{\to} \mu_\delta, \text{ com } n \to \infty, \text{ para } \delta > 0, \tag{2.3}$$

onde "q.c." significa "quase certamente" (ou seja, com probabilidade 1) e "$\underset{\mathrm{p}}{\to}$" denota a convergência em probabilidade; a definição destes limites estocásticos pode ser encontrada, por exemplo, em [6].

Em seguida vamos considerar a extensão destas ferramentas para um contexto dinâmico.

2.2 Valor médio comparativo - versão dinâmica

Definição e contexto

Para captar a trajetória temporal do valor médio comparativo ao longo do tempo, desenvolvemos agora uma versão dinâmica. Sejam $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ processos estocásticos e sejam $\{X_{0,t} = x_{0,t}\}$ e $\{Y_{0,t} = y_{0,t}\}$ os valores fixos do indivíduo de referência. O *valor médio comparativo dinâmico* é uma extensão trivial de (2.1) e é definido como

$$\mu_{\delta,t} = \mathrm{E}\{Y_t \mid X_t \in B_\delta(x_{0,t})\}. \tag{2.4}$$

Inferência

Seja $n_t + 1$ o número total de indivíduos no período t e sejam

$$\{X_{i,1}, Y_{i,1}\}_{i=0}^{n_1}, \ldots, \{X_{i,T}, Y_{i,T}\}_{i=0}^{n_T}$$

os dados de interesse (ou seja, rendimento e despesa). O estimador empírico de (2.4) é

$$_{\delta,t} = \frac{1}{k_t} \sum_{i \in A_{\delta,t}} Y_{i,t} \qquad (2.5)$$

onde $A_{\delta,t} = \{i : X_{i,t} \in B_\delta(x_{0,t})\}$e $k_t = |A_{\delta,t}|$; o estimador definido na equação (2.4) será aqui designado por *média amostral comparativa dinâmica* (de nível $\delta > 0$). Trivialmente, o estimador $\hat{\mu}_{\delta,t}$ verifica as seguintes propriedades

$$1.\ \lim_{\delta \to 0} \hat{\mu}_{\delta,t} = y_{0,t}, \text{ q.c.} \quad 2.\ \lim_{\delta \to \infty} \hat{\mu}_{\delta,t} = \bar{Y}_t, \text{ q.c.}$$
$$3.\ \ _{\delta,t} \underset{p}{\to} \mu_{\delta,t}, \text{ com } n_t \to \infty, \text{ para } \delta > 0, \qquad (2.6)$$

onde $\bar{Y}_t = 1/n_t \sum_{i=1}^{n_t} Y_{i,t}$, se considerarmos uma versão dinâmica das hipóteses enunciadas na secção 2.1, ou seja,

$$1. \lim_{\delta \to 0} k_t = |A_{0,t}| \quad 2. \lim_{\delta \to \infty} k_t = n_t + 1 \quad 3. \lim_{n_t \to \infty} k_t = \infty.$$

Suavização

O estimador empírico introduzido na equação (2.5) não é "suave" ao longo do tempo e portanto nesta secção construímos um método para suavizar o comportamento de (2.5); para o efeito, recorremos a métodos de regressão polinomial local [3], os quais correspondem essencialmente a versões locais de métodos de regressão padrão. Recorremos a uma abordagem não paramétrica para visualizar a média amostral comparativa por forma a que seja mais fácil avaliar tendências ao longo do tempo; a suavização visa assim permitir que os resultados sejam mais intuitivos e fáceis de entender por parte de um utilizador.

O modelo de regressão não paramétrico é definido através da relação $\mu_{\delta,t} = m_t(\delta) + \varepsilon_t$, onde ε_t é variável erro independente e identicamente distribuída com $\mathrm{E}\{\varepsilon_t\} = 0$ e $\mathrm{var}\{\varepsilon_t\} = \sigma^2$. A função $m_t(\delta)$ pode ser estimada da seguinte forma

$$\hat{m}_t(\delta) = \frac{\sum_{i=1}^{T} K_h(t-i)\hat{\mu}_{\delta,i}}{\sum_{i=1}^{T} K_h(t-i)}. \qquad (2.7)$$

Na equação (2.7), $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$, é K uma função de núcleo e $h > 0$ é um parâmetro de suavização (largura de banda) [8]. A largura de banda $h = h_T$ é uma sequência tal que $h \to 0$ e $hT \to \infty$, quando $T \to \infty$. Em termos práticos, a escolha do núcleo tem pouco impacto nas estimativas; no entanto, a escolha da largura de banda é importante pois uma escolha inapropriada pode levar ou a uma suavização excessiva ou insuficiente.

3. CASO REAL

3.1 Descrição do conjunto de dados

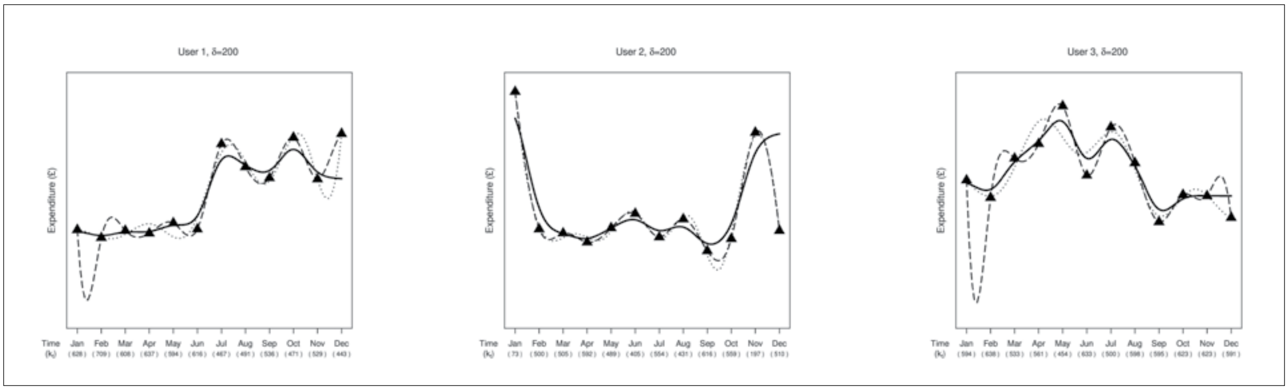
Vamos agora ilustrar a aplicação das metodologias desenvolvidas; para o efeito, vamos considerar três indivíduos de referência – ou seja, três utilizadores de uma plataforma financeira que implementa os métodos da secção 2 – e vamos comparar as suas despesas com as de indivíduos com rendimentos semelhantes. Os dados foram disponibilizados por um provedor de serviços financeiros (Money Dashboard, *www.moneydashboard.com*). Usando a metodologia da secção 2, um utilizador da plataforma tem a possibilidade de comparar as suas despesas ($\{y_{0t}\}$) com as de indivíduos que ganhem $\pm £\delta$ que esse mesmo utilizador por mês. Os dados a que tivemos acesso para implementar as ferramentas desenvolvidas consistem em rendimentos $X_{i,t}$ e despesas mensais $Y_{i,t}$, em libras (£), para o utilizador i no mês t durante o ano de 2017; tivemos acesso ao perfil de 10 689 utilizadores.

3.2 Análise de dados

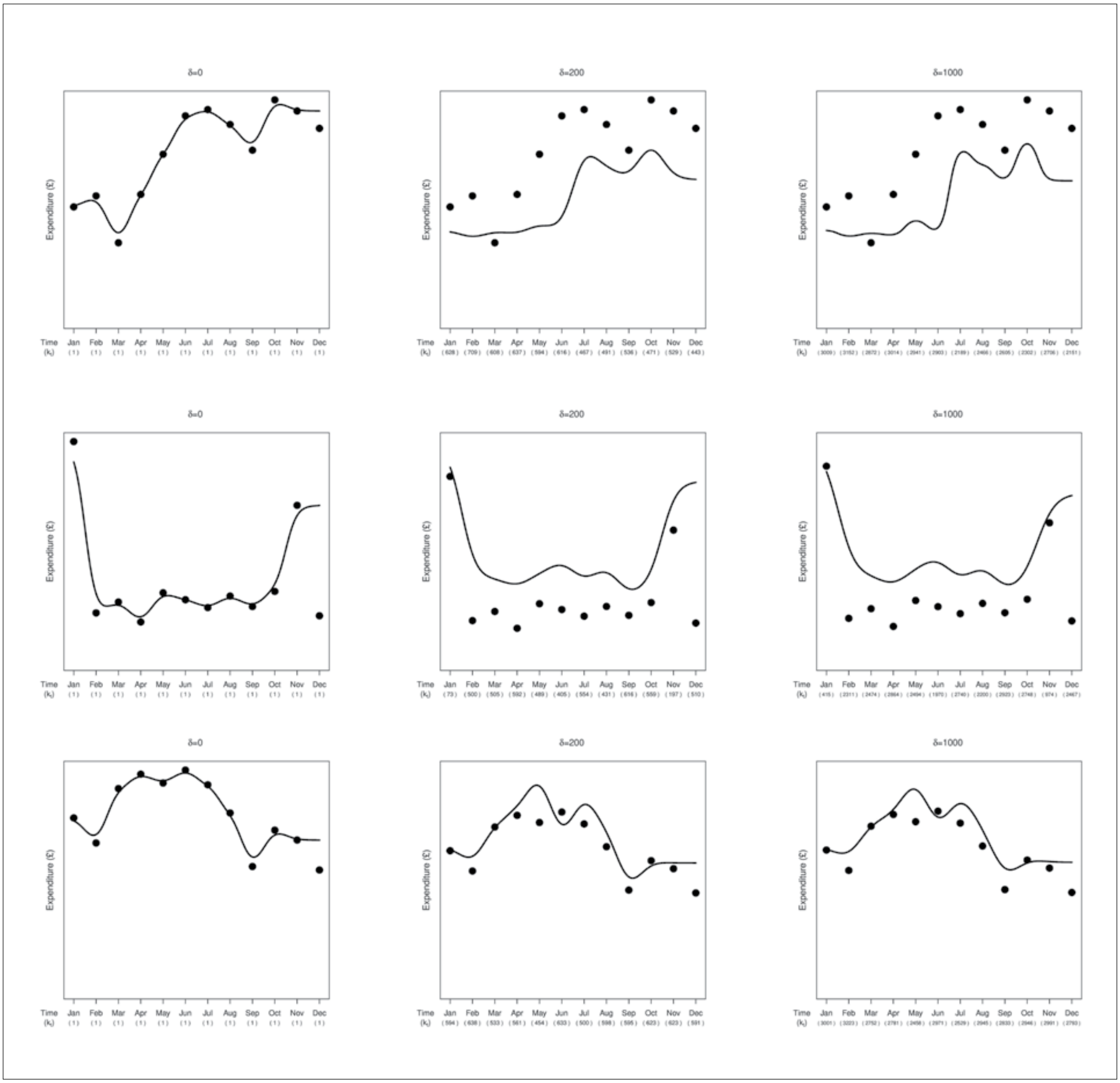
Na figura 1 represento a despesa média amostral comparativa dinâmica (2.5) e a sua versão suavizada (2.7) para três utilizadores distintos, considerando $\delta = £200$; devido a motivos de confidencialidade, não tenho permissão para revelar os valores de y na figura 1. Para comparação, apresento ainda na figura 1 a suavização média amostral comparativa dinâmica que seria obtida através de processos Gaussianos [5] e P-splines [2]; os resultos obtidos com os diferentes métodos de suavização são essencialmente equivalentes. O valor de δ foi escolhido por forma a permitir que os pares de comparação tivessem rendimentos semelhantes aos do indivíduo de referência. Conforme pode ser visto na figura 1, a suavização permite rastrear de uma forma intuitiva para um utilizador a dinâmica das despesas médias comparativas ao longo do tempo.

Na figura 2, contrastamos a despesa média comparativa dinâmica (2.7) com a despesa dos {indivíduos de referência para três valores diferentes de δ. Para ilustrar como podem ser interpretados os resultados obtidos, vamos concentrar a análise no caso $\delta = £200$. A despesa média comparativa dinâmica (2.7) representa a despesa média dos utilizadores na faixa do rendimento do utilizador de referência $\pm£200$. Os pontos na figura 2 representam as despesas dos utilizadores de referência em cada mês de 2017. Podemos notar como os três utilizadors de referência diferem consideravelmente em termos das suas despesas mensais. Com exceção de março, o utilizador 1 gasta

[1] Todas as comparações nesta nota baseadas em (2.1) são para $\delta > 0$ com $f_X(x) = \mathrm{d}F_X/\mathrm{d}x > 0$ para todo o $x \in B_\delta(x_0)$; a extensão para o caso assimétrico, $B_{\delta_1,\delta_2}(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ é imediata mas torna a notação mais pesada.



User 1, δ=200
User 2, δ=200
User 3, δ=200
Expenditure (£)
Time
(k_j)
Jan Feb Mar Apr May Jun Jul Aug Sep Oct Nov Dec



δ=0
δ=200
δ=1000
Expenditure (£)
Time
(k_j)
Jan Feb Mar Apr May Jun Jul Aug Sep Oct Nov Dec

◀Figura 1. Despesa média comparativa dinâmica suavizada: A despesa média comparativa dinâmica (2.5) é representada usando triângulos (▲) e a sua versão suavizada é representada através de uma linha sólida (núcleo, (2.7)), tracejada (processo Gaussiano) e pontilhada (P-spline). O eixo do x representa o tempo e contém ainda informação sobre o número de indivíduos na janela de comparação, k_t.

◀Figura 2. Despesa média comparativa dinâmica suavizada para diferentes janelas de comparação. A despesa média comparativa dinâmica suavizada (2.7) é representada através de uma linha sólida; os pontos (•) representam as despesas mensais de cada utilizador de referência, $y_{0,t}$. O eixo do x representa o tempo e contém ainda informação sobre o número de indivíduos na janela de comparação, k_t. Cada coluna corresponde a uma janela de comparação distinta.

consistentemente mais do que a média de utilizadors com o mesmo rendimento $\pm$£200. O caso oposto é o do utilizador 2, que tende a gastar menos do que a média de utilizadores com rendimentos semelhantes; as exceções são janeiro e novembro, quando os gastos deste utilizador estão alinhados com os dos seus pares. Finalmente as despesas do utilizador 3 estão alinhadas com as da média dos seus pares, com desvios excecionais em fevereiro, setembro e dezembro de 2017.

A análise da figura 2, permite fornecer conselho aos respetivos utilizadores sobre as suas finanças pessoais. Por exemplo, como o utilizador 1 tende a gastar consistentemente mais dinheiro do que os seus pares com rendimento semelhante, o utilizador pode ser considerado em risco de problemas financeiros imediatos ou futuros; pode-se assim fornecer conselhos sobre como reduzir gastos. O utilizador 2, que gasta consistentemente menos do que seus pares com um rendimento semelhante, poderia receber dicas sobre onde investir as suas poupanças. Finalmente, os consultores, ou a própria plataforma, podem ainda enviar avisos ou recomendações ao utilizador 3 se os seus gastos se desviarem substancialmente da média de outros clientes com rendimentos semelhantes.

COMENTÁRIOS FINAIS

A comparação de grupos é um assunto amplamente estudado do ponto de vista estatístico, por exemplo, através de um teste de hipóteses – o qual é introduzido em qualquer curso introdutório de Estatística. Esta nota aborda um problema relacionado mas muito menos estudado do ponto de vista estatístico: a comparação estatística entre um indivíduo *versus* um grupo de comparação.

O método desenvolvido permite comparar numa plataforma financeira as despesas de um utilizador com as de pares que auferem aproximadamente o mesmo rendimento; o método proposto permite aos clientes de uma empresa de *fintech* responderem a questões tais como

> *"Será que gasto muito por mês em comparação com indivídiduos que ganham $\pm\delta$ do que eu?"*

Por último, é importante destacar que ainda que o método tenha sido motivado por um problema no âmbito da *fintech*, a sua generalidade metodológica permite-lhe abordar questões de outras áreas, tais como por exemplo:

> *"Será que a minha frequência cardíaca é elevada em comparação com indivídiduos com $\pm\delta$ anos do que eu?"*

REFERÊNCIAS

[1] Svetloksak, de Carvalho, M., Calabrese R. "Subject--to-group statistical comparison for open banking-type data". *Journal of the Operational Research Society*, 2021, in press.

[2] Eilers, P. H., & Marx, B.D. "Flexible smoothing with B-splines and penalties." *Statistical Science*, 11(2), 89-102, 1996.

[3] Fan, J. *Local Polynomial Modelling and its Applications*. London: Chapman & Hall, 1996.

[4] Hill, T., & Monticino, M. (1998). "Constructions of random distributions via sequential barycenters". *The Annals of Statistics*, 26(4), 1242-1253, 1998.

[5] Rasmussen, C.E., & Williams, C. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, MA: MIT Press, 2006.

[6] Van der Vaart, A.*Asymptotic Statistics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[7] Ventura, C., Pestana, D., Ivette Gomes, M., Pestana, P., Glossário de Termos Estatísticos, Lisboa: Instituto Nacional de Estatística, 2013.

[8] Wand, M. P. *Kernel Smoothing*. London: Chapman & Hall, 1995.

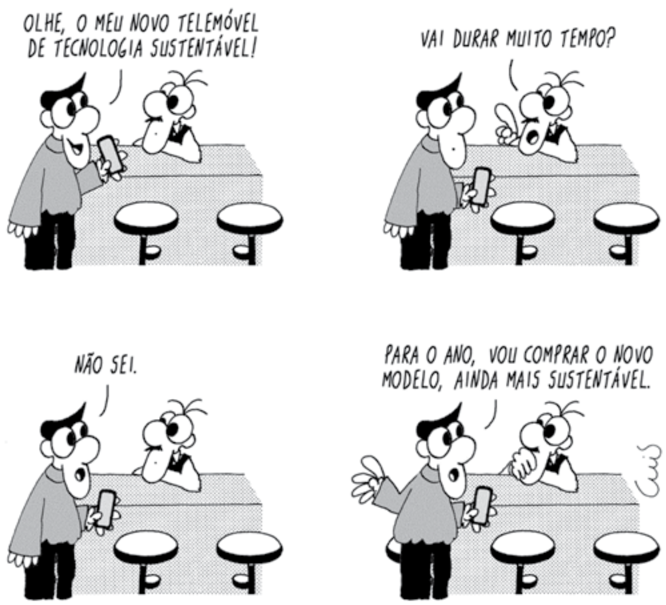
Nota sobre a tradução de termos técnicos: Os termos técnicos são traduzidos seguindo sempre que possível o Glossário Estatístico Inglês - Português da Sociedade Portuguesa de Estatística (*https://www.spestatistica.pt/glossario)* e o Glossário de Termos Estatísticos da autoria de [7].

Miguel de Carvalho é *reader* em Estatística no Departamento de Matemática da Universidade de Edimburgo. Exerce neste momento as funções de Diretor do Centro de Estatística da Universidade de Edimburgo (*https://centreforstatistics.maths.ed.ac.uk/*) e de Presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística (*https://spestatistica.pt*). A sua trajetória e investigação foram condecoradas com vários prémios de prestígio internacional na área da Estatística Matemática (ex: *Lindley Prize - International Society for Bayesian Analysis*) e é ainda editor associado de revistas científicas líderes nessa área, tais como o *Journal of the American Statistical Association* e o *Annals of Applied Statistics*. Para subscrever o canal YouTube de Miguel de Carvalho por favor clicar em *https://www.youtube.com/c/MigueldeCarvalho80*

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

pt-maths-in@spm.pt

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 18/09/2021. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETORA (EDITORA-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

JUNTE A SUA QUOTA DA EUROPEAN WOMEN IN MATHS À DA SPM

Tal como acontece com a quota da European Mathematical Society, a partir de agora pode pagar a sua quota da European Women in Maths (EWM) juntamente com a quota de sócio SPM. Para isso basta que envie um e-mail para spm@spm.pt a informar que pretende fazer a junção do pagamento das quotas.

A EWM é uma associação internacional de mulheres que trabalham na área da matemática na Europa. Fundada em 1986, a European Women in Maths tem várias centenas de membros e coordenadores em 33 países europeus e disponibiliza três tipos de quota: Low Fees, Standard Fees e High Fees. Consulte toda a informação em *europeanwomeninmaths.org*

CONCURSO MATEMÁTICA E ARTE DE RUA

Fazer matemática requer imaginação, criatividade, muito trabalho, rigor e espírito crítico.

O concurso Matemática e Arte de Rua pretende aliar a imaginação e o espírito criativo dos jovens ao seu interesse pela matemática, apresentando ideias matemáticas através do desenho de um mural. Os participantes deverão escolher um assunto e mostrar a sua relação com a matemática, esse assunto irá completar o tema do concurso A Matemática em União com ...

As candidaturas estão abertas entre 5 de janeiro e 5 de fevereiro de 2022.

O concurso, organizado pela Delegação Regional do Centro da Sociedade Portuguesa de Matemática, pelo Centro de Matemática da Universidade de Coimbra e pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, tem duas categorias: a Categoria A para alunos do 3º ciclo do Ensino Básico e a Categoria B para alunos do Ensino Secundário. A participação deverá ser feita em grupo, sendo que cada grupo pode ter no máximo três alunos e tem de ser supervisionado por um professor. Saiba mais em: *https://ucpages.uc.pt/cmuc/mat-arte-rua/# quem-pode-concorrer*

ENCONTRO CONJUNTO BRASIL – PORTUGAL EM MATEMÁTICA

O Encontro Conjunto Brasil-Portugal em Matemática, que se irá realizar de 14 a 20 de agosto de 2022 na Universidade Federal da Bahia, em Salvador – Bahia, marca o Bicentenário da Independência do Brasil. O evento decorrerá em Salvador, a primeira capital do Brasil (1549-1763), e celebra a intensificação da cooperação científica na área e a efeméride da independência, com o objetivo de lançar as bases para um novo estágio de colaboração bilateral, ainda mais ambicioso, na área de matemática.

As submissões de propostas de sessões temáticas estão abertas até ao dia 31 de dezembro de 2021.

EMS PROCURA CANDIDATOS PARA O COMITÉ EXECUTIVO

A próxima reunião do Conselho da European Mathematical Society será realizada em Bled, no verão, e haverá eleições para os cargos de presidente, vice-presidente e tesoureiro do Comité Executivo (CE). Uma possível eleição de membros gerais pode ocorrer, se os cargos acima mencionados forem preenchidos com candidatos do atual CE. Os eleitos tomarão posse a 1 de janeiro de 2023. De acordo com os estatutos, as sociedades membros e também os representantes dos membros individuais podem fazer sugestões para esses cargos. Envie as suas recomendações (carta de recomendação, currículo do candidato e declaração em formato PDF) até 31 de dezembro de 2021 para o EMS Office (ems-office@helsinki.fi).

PORTUGAL CONQUISTOU DUAS MEDALHAS DE PRATA E DUAS DE BRONZE NAS OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA

As XXXVI Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM) realizaram-se de 18 a 23 de outubro. Este ano as OIAM foram organizadas pela Costa Rica e, tal como no ano passado, também estas Olimpíadas decorreram exclusivamente online. Portugal saiu da competição com duas medalhas de prata e duas de bronze.

Tiago Marques e Tiago Mourão, ambos de Santa Maria da Feira e alunos do 12º ano, arrecadaram as duas medalhas de prata. Mariana Costa (12º ano, Vila Real) e Eduardo Guerreiro (12º, Olhão) conquistaram as medalhas de bronze.

A equipa portuguesa realizou as provas na Universidade de Coimbra, nos dias 19 e 20 de outubro. Além dos alunos, faziam ainda parte da equipa Joana Teles, capitã de equipa, António Salgueiro, tutor da equipa, e Alfredo Costa, observador que colaborou na correção e na classificação das provas. Todos são professores do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

34º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Em 2021, o Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) realiza-se em Santiago do Cacém nos dias 3 e 4 de dezembro. O evento, que se encontra na sua 34º edição, decorrerá em regime presencial e online e conta com seis conferencistas estrangeiros, que participarão via Zoom. Todos são figuras de destaque na comunidade de investigadores em História da Matemática: Jens Hoyrup e Eberhard Knobloch, ambos galardoados com a medalha Kenneth O May, Christian Gilain, membro da comissão para a edição das obras completas de D'Alembert e do projeto para o inventário analítico e material da correspondência de Condorcet, Craig Fraser, presidente da Sociedade Canadiana de História da Matemática, Luis Español González, antigo presidente da Sociedade Espanhola de História da Ciência, e Wagner Valente, presidente do Grupo Associado de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática-Brasil e editor da revista HISTEMAT, revista de História da Educação Matemática.

O Encontro está acreditado como Ação de Formação de 12 horas para os professores dos grupos 230 e 500, pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua (CCPF/ACC/112797/21).

INSCRIÇÕES PARA AS MINI-OLIMPÍADAS ATÉ 19 DE JANEIRO

Estão abertas as inscrições para as Mini-Olimpíadas, competição dedicada aos alunos dos 3.º e 4.º anos do 1.º ciclo do Ensino Básico, até ao dia 19 de janeiro. As Mini-Olimpíadas visam criar e desenvolver o gosto pela matemática nos primeiros anos de escolaridade. Os problemas propostos fazem, sobretudo, apelo à capacidade de raciocínio e imaginação do aluno. O concurso consiste numa única prova que se realizará em cada escola participante, no dia 26 de janeiro de 2022, em horário escolhido pela escola. Inscreva a sua escola em *http://mopm.mat.uc.pt/MOPM/*

ATUALIZAÇÃO DE DADOS DOS SÓCIOS SPM

A SPM pede a todos os sócios que atualizem os seus dados pessoais através da área de sócio (*https://socios.spm.pt/site/login*) ou do telefone 961 848 966. Esta atualização garante que recebem todas as informações e novidades.

Ana Jacinta Soares
Membro da Direção da SPM
ajsoares@math.uminho.pt

A MATEMÁTICA E A INDÚSTRIA NUMA PARCERIA DE SUCESSO

Durante o mês de novembro, a SPM vai estar envolvida em duas iniciativas online que evidenciam o sucesso da parceria entre a matemática e a indústria: a VII Iberian Modelling Week e o evento CIM & Empresas.

A VII Iberian Modelling Week (*https://www.spm.pt/PT-MATHS-IN/7imw/english/index.html*) vai decorrer em formato online de 26 a 28 de novembro de 2021. Trata-se de um evento promovido conjuntamente pela Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação, PT-MATHS-IN (*https://www.spm.pt/PT-MATHS-IN/*) e pela Rede Espanhola de Matemática e Indústria, math-in (*http://www.math-in.net*).

Depois do enorme sucesso da sua primeira edição, em 2014, na Universidade de Coimbra, esta iniciativa tem decorrido de forma alternada entre Portugal e Espanha, com edições de grande êxito em Santiago de Compostela (2015), Porto (2016), Vigo (2017), Lisboa (2018) e Sevilha (2019). Sofreu uma interrupção em 2020, devido à pandemia COVID-19, e surge agora num evento online que se espera igualmente bem-sucedido.

À semelhança das edições anteriores, a VII Iberian Modelling Week irá juntar estudantes portugueses e espanhóis, de vários cursos com uma componente matemática significativa, com o objetivo de trabalharem em equipa na resolução de problemas reais que surgem em contexto industrial, acompanhados por um tutor académico com experiência na transferência de matemática para a indústria.

Desta vez em ambiente virtual, espera-se que os jovens estudantes a participar no evento tirem partido desta experiência a não perder, enriquecendo a sua preparação face às exigências que encontrarão no seu percurso profissional, desenvolvendo o seu espírito crítico, o rigor e a capacidade de comunicação científica.

O caráter internacional do evento, bem como a colaboração com estudantes de diferentes realidades de ensino e com formações variadas, irá contribuir certamente para uma experiência muito enriquecedora que ajudará a desenvolver nos jovens participantes o gosto pela Matemática Industrial.

Para mais informações, visite a página do evento em *https://www.spm.pt/PT-MATHS-IN/7imw/index.html.*

Também em formato online, o evento CIM & Empresas (*https://www.cim.pt/agenda/event/220*), promovido e organizado pelo Centro Internacional de Matemática, CIM, e que conta com a colaboração da Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação, PT-MATHS-IN, vai decorrer na tarde de 26 de novembro de 2021.

Este evento é dirigido a uma vasta comunidade que inclui investigadores, estudantes e quadros de empresas, com interesse por aplicações desafiadoras da matemática em contextos tão variados como a indústria farmacêutica, a tecnologia, a inteligência artificial, o combate ao crime fiscal, o planeamento e a gestão de recursos.

O evento conta com as empresas Bluepharma, DefinedCrowd, Feedzai, INDUCTIVA Research Labs, NOVA IMS, Philips e SISCOG, que foram convidadas a partilhar as suas experiências e expectativas ao nível da colaboração com a comunidade matemática.

Espera-se que o evento CIM & Empresas possa potenciar oportunidades de colaboração de jovens matemáticos com as empresas e venha a contribuir para divulgar o enorme potencial da Matemática Industrial.

Para mais informações, visite a página do evento em *https://www.cim.pt/agenda/event/220.*

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2022

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM ***WWW.SPM.PT***