N. 0198

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXXIII | Nov. 2022 | 4,20€

Breves Notas sobre Entropia e suas Aplicações

Paulo Saraiva

CANTO DÉLFICO

O Teorema dos Rearranjos de Riemann

Ricardo Mamede

MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA

Dinis Pestana: Relatos de um Percurso

Ana Mendes e Paulo Saraiva

TARDES DE MATEMÁTICA

Conversas Ímpares

12 NOV. 2022, 15h00

Como a Matemática pode salvar a tua vida

Adérito Araújo
(CMUC, DM-FCTUC)

14 JAN. 2023, 15h00

Galileu: a acne solar e os planetas com orelhas

Fernando Figueiredo
(CITEUC, DM-FCTUC)

11 MAR. 2023, 15h00

Matemática, Magia e Mistério

Márcio Nascimento, Nuno Bastos e Nuno Conceição
(ESTGV-IPV)

13 MAI. 2023, 15h00

Paradoxos da Estatística: os números contam histórias...

Rui Pascoal
(CEBER, FEUC)

8 JUL. 2023, 15h00

Uma viagem sobre rodas e estradas exóticas

Fátima Leite
(ISR-UC, DM-FCTUC)

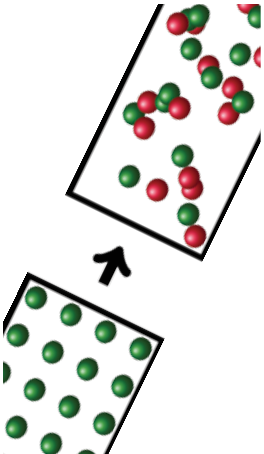
EXPLORATÓRIO

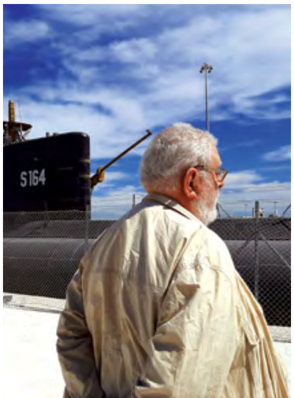
Entrada Livre

Iniciativa da SPM-centro

Coorganizado por:

Cofinanciado por:





ÍNDICE

Sílvia Barbeiro
Universidade
de Coimbra
silvia@mat.uc.pt

UM NOVO CICLO

A *Gazeta de Matemática* vai ter uma nova direção.

A atual direção da *Gazeta de Matemática* completa neste número o seu mandato. Assumimos com grande orgulho o compromisso de dirigir o rumo desta revista e tentámos dar o nosso melhor.

O meu agradecimento pessoal aos colegas editores, Daniel Pinto e Hugo Tavares. O seu dinamismo, o seu empenho e o seu entusiasmo foram determinantes para o sucesso da nossa missão. Sobraram ideias que gostaríamos de ter realizado e não conseguimos, mas também concretizámos alguns novos planos. Estendo o agradecimento à ajuda preciosa da Ana Figueiredo, como assistente editorial. Foi um prazer e um privilégio fazer parte desta equipa.

O leitor tem razões fortes para se demorar nesta edição. Não vai querer perder nenhum detalhe do que nos revela Dinis Pestana na entrevista dada a Ana Mendes e Paulo Saraiva. E vai desejar saborear cada pedaço de boa matemática que encontra ao longo da revista. No artigo "O Teorema dos Rearranjos de Riemann", Ricardo Mamede discute as condições em que podemos alternar a ordem dos termos de uma série convergente sem alterar a sua natureza ou soma. José Carlos Santos conta-nos como decorreram séculos até à prova da "conjetura de Kepler" sobre a forma mais eficiente de empilhar esferas e como pode ser difícil provar o que parece óbvio. Flora Ferreira e Wolfram Erlhagen apresentam um modelo matemático desenvolvido para memorizar e recuperar a ordem e o tempo relativo de um conjunto de eventos e ilustram o seu funcionamento nalgumas experiências com robôs. Paulo Saraiva relaciona entropia e quantidade de informação, expondo de forma exímia os conceitos que acompanha com exemplos. Fabio Chalub debruça-se também sobre o tema da entropia e explica os conceitos de Shannon, Boltzmann e Clausius. Com esta crónica intitulada "Amanhã Será Outro Dia", o Fabio Chalub encerra a coluna Na Linha de Frente, que nos deu durante 15 anos tanto prazer a ler.

A partir do próximo número, a *Gazeta de Matemática* será assegurada por uma equipa editorial renovada que certamente lhe trará nova vida e a ambição de tornar a revista ainda melhor. Acredito que ficará em muito boas mãos sabendo que Paulo Saraiva, da Universidade de Coimbra, aceitou recentemente o desafio de ser o próximo diretor.

Agradeço aos membros da redação, aos revisores, aos membros do Conselho Editorial e a todos os que têm contribuído para o sucesso da *Gazeta de Matemática*. Não resisto a destacar os leitores, que são a razão da existência desta publicação, e os autores, que são os grandes protagonistas.

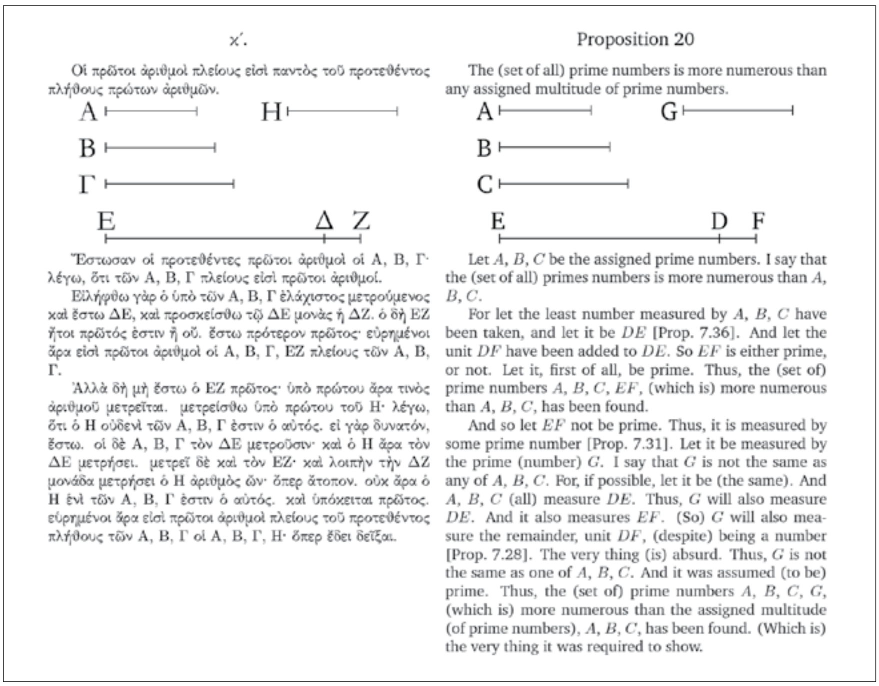
Jorge Nuno Silva
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

PRIMOS ORIGINAIS

Os números primos, pilares da aritmética, têm apaixonado muitos matemáticos ao longo dos tempos, principalmente pela sua misteriosa distribuição entre os números naturais. Paulo Ribenboim (*The Book of Prime Numbers*, Springer 1989) foi um desses matemáticos. A prova de Euclides, nos *Elementos,* da infinitude dos números primos é um belo exemplo de dedução matemática. Ribenboim exibe outras demonstrações, de mestres como Euler e Kummer, mas também de matemáticos mais obscuros. Hoje trazemos aqui algumas das ideias mais simples.

A prova de Euclides da infinitude dos primos pode ser escrita, essencialmente, mostrando que qualquer coleção finita de primos está incompleta.

Euclides, mestre na utilização do método do exemplo generalizável, começou por considerar uma coleção de três primos.



κ΄.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσιν· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ οἱ Α, Β, Γ, Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Proposition 20

The (set of all) prime numbers is more numerous than any assigned multitude of prime numbers.

Let A, B, C be the assigned prime numbers. I say that the (set of all) primes numbers is more numerous than A, B, C.

For let the least number measured by A, B, C have been taken, and let it be DE [Prop. 7.36]. And let the unit DF have been added to DE. So EF is either prime, or not. Let it, first of all, be prime. Thus, the (set of) prime numbers A, B, C, EF, (which is) more numerous than A, B, C, has been found.

And so let EF not be prime. Thus, it is measured by some prime number [Prop. 7.31]. Let it be measured by the prime (number) G. I say that G is not the same as any of A, B, C. For, if possible, let it be (the same). And A, B, C (all) measure DE. Thus, G will also measure DE. And it also measures EF. (So) G will also measure the remainder, unit DF, (despite) being a number [Prop. 7.28]. The very thing (is) absurd. Thus, G is not the same as one of A, B, C. And it was assumed (to be) prime. Thus, the (set of) prime numbers A, B, C, G, (which is) more numerous than the assigned multitude (of prime numbers), A, B, C, has been found. (Which is) the very thing it was required to show.

Figura 1. A Proposição VII-20 dos *Elementos* na versão de Richard Fitzpatrick.

Nós usaremos o agora estafado conjunto de n elementos, onde n representa um número natural indeterminado.

Seja $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$ um conjunto finito de primos. Seja p um divisor primo de

$$z = p_1 \cdots p_n + 1$$

então $p \notin A$ porque ao dividirmos z por qualquer elemento de A obtemos resto 1.

Em 1878, Kummer propôs uma prova semelhante. Usando a mesma notação, Kummer considera um divisor primo de $w = p_1 \cdots p_n - 1$. Este primo, como está em A, divide também $w + 1$ e, portanto, a diferença destes dois números, o que é impossível.

Pólya sugeriu uma outra abordagem. Para obter a infinitude dos primos, basta exibir uma sucessão de números naturais cujos elementos sejam primos entre si dois a dois. Tomando um divisor primo de cada termo, teríamos uma infinidade de primos. Naturalmente, para obter esta relação entre qualquer par de números da sucessão, não podemos utilizar a infinitude dos números primos...

Pólya usou os números de Fermat

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \qquad (n \geqslant 0)$$

Por indução, estabelece-se, sem dificuldade maior, que $F_n - 2 = F_0 \cdots F_{n-1}$, para $n \geqslant 1$. Portanto, se $k < m$, tem-se que F_k divide $F_m - 2$, e qualquer primo que divida F_k e F_m terá de dividir $F_m - 2$ e, por consequência, também terá de dividir 2, o que é absurdo, já que os números de Fermat são todos ímpares.

Aqui deixo o desafio ao leitor: encontrar outras sucessões, para as quais seja possível provar que os respetivos termos são primos entre si dois a dois, sem utilizar a infinitude dos primos. Se o conseguir, terá obtido uma demonstração original do resultado de Euclides!

Outra possibilidade, do agrado geral, mas que não cumpre o último requisito mencionado, consiste em usar os números de Fibonacci

$$\begin{array}{lcl} f_0 & = & 0 \\ f_1 & = & 1 \\ f_n & = & f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geqslant 2) \end{array}$$

Os termos da sucessão de Fibonacci gozam de inúmeras propriedades e relações. Uma delas, bem conhecida, é a seguinte:

$$f_{(n,m)} = (f_n, f_m)$$

onde os parênteses representam o máximo divisor comum. Assim, se indexarmos os números de Fibonacci com os termos de uma sucessão cujos termos são primos entre si dois a dois, obtemos outra sucessão com a mesma propriedade. Esta nova sucessão pode agora ser usada para indexar os números de Fibonacci, e assim sucessivamente.

E o leitor, tem outras sugestões para esta questão?

Sobre as questões propostas no número anterior:

- Como o objetivo é 100, a penúltima jogada do vencedor será para 89 (o adversário joga para um número entre 90 e 99.... Este raciocínio de análise retrógrada pode iterar-se e concluímos que o jogador vencedor vai fazer as seguintes jogadas: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100. Assim, o vencedor será o primeiro a jogar, que juntará uma unidade ao total nulo inicial.

- Os filhos vão e um deles regressa, passando o barco ao pai, que atravessa e manda o outro filho de volta. Finalmente, os filhos atravessam juntos. Este procedimento pode iterar-se no caso de um regimento de adultos...

- **A** responde que tem as plantas dos pés vermelhas, quer seja verdadeiro ou mentiroso. Assim, a resposta de **B** mostra que se trata de um indígena mentiroso (plantas brancas). A resposta de **C** denuncia-o também como mentiroso (plantas dos pés brancas).

- $237\,812 = 1025 \times 232 + 12$. A ideia é dividir 237 812 por 1025, porque se o resto de uma divisão for menor do que o quociente e do que o divisor, então estes podem trocar de papéis entre si.

Ricardo Mamede
Universidade
de Coimbra
mamede@mat.uc.pt

O TEOREMA DOS REARRANJOS DE RIEMANN

Se alterarmos a ordem pela qual somamos um qualquer conjunto finito de números reais, a sua soma permanece a mesma. No entanto, a situação pode alterar-se de forma inesperada se o conjunto de números for infinito. Em alguns casos, a alteração da ordem pela qual somamos um conjunto infinito de números pode alterar a sua soma, ou até tornar a soma infinita. Neste canto vamos analisar as somas infinitas que têm esta característica usando o Teorema dos Rearranjos de Riemann.

1. INTRODUÇÃO

A manipulação de somas infinitas de números reais, designadas por séries numéricas ou simplesmente séries, é uma área que facilmente produz resultados inesperados e pouco intuitivos. Um exemplo que ilustra o perigo de estender de forma ingénua as regras algébricas das somas finitas a séries, é a soma

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots + 1 - 1 + \cdots \tag{1}$$

Colocando parênteses entre cada par $1 - 1$, podemos argumentar que

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots = 0.$$

No entanto, se deslocarmos os parênteses uma unidade para a direita, obtemos

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + \cdots = 1.$$

Este exemplo foi usado no século XVIII pelo matemático e padre Luigi Grandi como evidência da existência de Deus, uma vez que "mostrava" que é possível criar algo a partir do nada.

A série (1) é um exemplo de uma série divergente, à qual não faz sentido atribuir uma soma, uma vez que à medida que somamos mais termos a soma oscila entre 0 e 1. Já à série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{2}$$

é possível atribuir uma soma. Por exemplo, se considerarmos um quadrado de lado 1, podemos obter a sua área começando por considerar apenas metade da sua área; de seguida, consideramos metade da área que ainda não considerámos; repetimos o processo, considerando em cada passo metade da área que ainda não considerámos (veja-se a Figura 1). Intuitivamente, é fácil aceitar que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

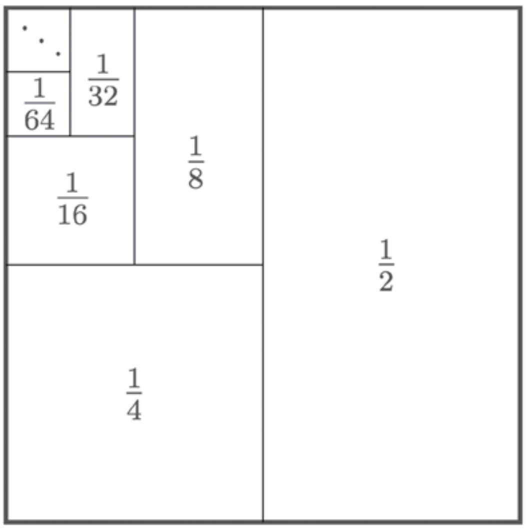


Figura 1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$.

Uma série à qual é possível atribuir uma soma chama-se série convergente. Formalmente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge se a sucessão das somas parciais $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$ for convergente, com $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para $k \geq 1$. Neste caso, dizemos que o limite $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ é a soma da série e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Portanto, s é a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se a soma dos seus n primeiros termos estiver tão próxima do número s quanto quisermos, desde que tomemos n suficientemente grande.

Também dizemos que a série diverge para $\pm\infty$ se o mesmo acontece com a sua sucessão das somas parciais.

É fácil verificar que a convergência da série $\sum a_n$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, uma vez que $a_n = s_n - s_{n-1}$. Já o recíproco não se verifica, isto é, existem sucessões (a_n)convergentes para 0 para as quais a série $\sum a_n$ é divergente.

Voltando à série (2), e usando a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma sucessão geométrica, temos que a soma dos seus n primeiros termos pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1$$

e, portanto, a série (2) é uma série convergente com soma 1.

Neste canto vamos analisar o que acontece à soma de uma série convergente se alterarmos a ordem pela qual somamos os seus termos.

2. CONVERGÊNCIA DE SÉRIES

Podemos distinguir dois tipos de séries convergentes. Se a série $\sum |a_n|$ for convergente, a série $\sum a_n$ diz-se absolutamente convergente. Por outro lado, uma série convergente que não seja absolutamente convergente chama-se simplesmente convergente.

É claro que uma série convergente de termos positivos é absolutamente convergente e, portanto, a série (2) é absolutamente convergente. Já a série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é um exemplo de uma série simplesmente convergente. De facto, é possível mostrar que esta série é convergente com soma $\ln(2)$ (veja-se, por exemplo, [1] para uma prova sem palavras desta identidade). No entanto, a série dos valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

designada por série harmónica é divergente. Uma das provas mais antigas para este facto, atribuída ao matemático francês do século XIV Nicole Oresme [2], consiste em considerar a subsucessão $(s_2, s_4, s_8, \ldots, s_{2^n}, \ldots)$ da sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\geq 1}$ da série harmónica e notar que agrupando convenientemente os termos, podemos escrever

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2},\\
s_{2^2} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \frac{2}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\\
s_{2^3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\\
&> \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{4}{2},
\end{aligned}$$

e, mais geralmente,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{n+1}{2}.$$

Conclui-se assim que $\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$ e, portanto, a sucessão das somas parciais da série harmónica é divergente. Segue-se que a série harmónica alternada é simplesmente convergente com soma $\ln(2)$:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

Uma série simplesmente convergente $\sum a_n$ pode ser vista como a soma de duas séries: a série $\sum a_n^+$ e a série $\sum a_n^-$, onde $a_n^{\pm} = (a_n \pm |a_n|)/2$, formadas respetivamente pelos termos positivos e pelos termos negativos de $\sum a_n$. É fácil verificar que as séries $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são ambas divergentes. De facto, se uma delas, digamos $\sum a_n^+$, fosse convergente, então a série dos termos negativos

$$\sum a_n^- = \sum a_n - \sum a_n^+$$

seria igualmente convergente por ser a diferença de duas séries convergentes. Isto implicaria a convergência absoluta da série $\sum a_n$, uma vez que temos

$$\sum |a_n| = \sum \left(a_n - 2a_n^-\right).$$

Concluímos assim que se $\sum a_n$ for simplesmente convergente, a série $\sum a_n^+$ dos termos positivos diverge para ∞, enquanto a série $\sum a_n^-$ dos termos negativos diverge para $-\infty$. Notemos ainda que como a série $\sum a_n$ é convergente, temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, donde se segue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} a_n^- = 0.$$

Voltando à série harmónica alternada, reordenemos os termos desta série da seguinte forma: a sequência de termos positivos e a sequência de termos negativos mantêm a ordem original, e a nova série consiste num termo positivo seguido de dois termos negativos. Obtemos assim a série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \tag{3}$$

Agrupando cada termo positivo com o termo negativo que lhe está imediatamente à direita, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

Ou seja, a soma da série (3) difere da soma da série harmónica alternada que lhe deu origem. Este exemplo mostra que reordenar os termos de uma série simplesmente convergente pode alterar a sua soma. O primeiro matemático a detetar este fenómeno foi Dirichlet, em 1827, enquanto trabalhava sobre a convergência da série de Fourier. Alguns anos mais tarde, Dirichlet mostrou que este comportamento não ocorre em séries absolutamente convergentes [3], como veremos no capítulo seguinte.

3. O TEOREMA DOS REARRANJOS DE RIEMANN

Vamos agora investigar em que condições podemos alterar a ordem dos termos de uma série convergente sem alterar a sua natureza ou soma. Formalmente, alterar a ordem dos termos de uma série $\sum a_n$ significa tomar uma bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e considerar a série $\sum b_n$ onde $b_n = a_{\phi(n)}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Começamos por mostrar que numa série convergente de termos não negativos, qualquer rearranjo dos seus termos dá origem a uma série que converge para a mesma soma.

Figura 2. Johann Dirichlet (1805-1859).

Teorema 3.1. *Suponhamos que $a_n \geq 0$ para todo o n. Então, se (b_n) é um rearranjo de (a_n) temos $\sum b_n = \sum a_n$.*

Demonstração. Denotemos por $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ e $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ as somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, e sejam $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ e $t = \lim_{n\to\infty} t_n$ (ou estes limites existem ou são iguais a ∞). O limite t envolve a soma de todos os termos da sucessão (b_n) e, portanto, envolve a soma dos termos $a_1, \ldots, a_n$. Como $a_n \geq 0$ para todo o n, segue-se que

$$s_n \leq t$$

para todo o n. De forma análoga, obtemos

$$t_n \leq s$$

para todo o n. Tomando limites quando n tende para ∞, concluímos que $s \leq t$ e $t \leq s$, ou seja, $s = t$. □

Provámos assim que a reordenação dos termos de uma série de termos não negativos não altera a natureza nem a soma da série, no caso de esta ser convergente. Vamos de seguida provar que o mesmo é válido para séries absolutamente convergentes (veja-se, por exemplo, [4]).

Teorema 3.2. *Se uma série é absolutamente convergente com soma s, todos os seus rearranjos convergem para a mesma soma s.*

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série absolutamente convergente e $\sum b_n$ um seu rearranjo. A definição de série absolutamente convergente garante que $\sum |a_n|$ é convergente e o teorema anterior diz-nos que $\sum |b_n| = \sum |a_n|$. Usando a igualdade

$$b_n = |b_n| - (|b_n| - b_n)$$

e o facto de a soma de séries convergentes ser ainda uma

Figura 3. Bernhard Riemann (1826-1866)

série convergente, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \left(|b_n| - b_n\right).$$

Uma vez que $|b_n| \geq 0$ e $|b_n| - b_n \geq 0$, os termos das duas séries do membro direito desta igualdade podem ser reordenados sem alterar a sua soma. Obtemos assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \left(|b_n| - b_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| - a_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

□

Portanto, a convergência absoluta de uma série garante que qualquer rearranjo dos seus termos não altera nem a natureza nem a sua soma. Neste aspeto, uma série absolutamente convergente comporta-se como uma soma finita, onde a ordem pela qual a soma dos seus termos é efetuada não altera a soma global. Em 1853, Riemann provou o seu Teorema dos Rearranjos que mostra que a situação é completamente diferente quando a série apenas converge simplesmente. Este resultado foi incluído num artigo sobre a série de Fourier com o título "Sobre a Representabilidade de uma Função por uma Série Trigonométrica", publicado após a morte de Riemann em 1866 [8].

Teorema 3.3. (Teorema dos Rearranjos de Riemann, 1853) *Seja $\sum a_n$ uma série simplesmente convergente. Dado um qualquer $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, existe um rearranjo (b_n) dos termos de $\sum a_n$ tal que $\sum b_n = c$.*

Demonstração. Seja $\sum a_n$ uma série simplesmente convergente e sejam $p_1, p_2, \ldots$ os termos não negativos de $\sum a_n$ e $q_1, q_2, \ldots$ os termos negativos de $\sum a_n$, pela ordem pela qual aparecem nesta série. As séries $\sum p_n$ e $\sum a_n^+$ bem como $\sum q_n$ e $\sum a_n^-$ diferem apenas por termos nulos, pelo que $\sum p_n = \infty$ e $\sum q_n = -\infty$.

Vamos considerar em primeiro lugar o caso $c \in \mathbb{R}$ e construir um rearranjo dos termos de $\sum a_n$ que converge para c.

Como $\sum p_n = \infty$, existe um número natural k tal que

$$p_1 + \cdots + p_k > c.$$

Seja k_1 o menor destes números k e consideremos a soma parcial $s_1 = p_1 + \cdots + p_{k_1}$. Temos $s_1 > c$ e $p_1 + \cdots + p_{k_1 - 1} \leq c$. Portanto, $s_1 \leq c + p_{k_1}$, pelo que

$$0 \leq s_1 - c \leq p_{k_1}.$$

Se $c < 0$, ignoramos este primeiro passo. De seguida, à soma s_1 vamos adicionar o menor número de termos negativos de modo a obtermos uma nova soma t_1 menor do que c. Ou seja, consideramos o menor inteiro m_i tal que $t_1 = s_1 + q_1 + \cdots + q_{m_1} < c \quad \text{e} \quad s_1 + q_1 + \cdots + q_{m_1 - 1} \geq c$. Neste caso, temos

$$0 \leq c - t_1 \leq -q_{m_1}.$$

Repetimos o processo indefinidamente, obtendo somas alternadamente inferiores e superiores a c, escolhendo em cada passo deste processo o menor número k_i de termos positivos e o menor número m_i de termos negativos tais que para cada i,

$$|s_i - c| \leq p_{k_i} \text{ e } |t_i - c| \leq -q_{m_i}. \tag{4}$$

Obtemos desta forma a série

$$\begin{aligned}p_1 + \cdots + p_{k_1} + q_1 + \cdots + q_{m_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} + \\ + q_{m_1+1} + \cdots + q_{m_2} + \cdots\end{aligned}$$

que é claramente uma reordenação dos termos de $\sum a_n$. Falta mostrar que esta série converge para o número c. Para tal, vamos provar que a sucessão das suas somas parciais converge para c. Como a série $\sum a_n$ é convergente, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, donde se segue que também (p_n) e (q_n) tendem para zero quando $n \to \infty$. Portanto, as subsucessões (p_{k_i}) e (q_{m_i}) tendem para zero quando $n \to \infty$ e as equações (4) garantem que as somas parciais da série convergem para c.

Um argumento semelhante permite exibir uma reordenação dos termos de $\sum a_n$ que divirja para ∞ ou $-\infty$. Por exemplo, no caso $c = \infty$, consideramos uma sucessão (c_n) que divirja para ∞ e construímos um rearranjo dos termos de $\sum a_n$ tal que a soma s_1 dos primeiros k_1 termos positivos exceda c_1, a soma t_1 dos primeiros m_1 termos negativos com s_1 seja inferior a c_1, a soma s_2 exceda c_2 e t_2 seja inferior a c_2, e assim sucessivamente. Claramente, a sucessão das somas parciais da série assim construída é divergente. $\square$

Referimos anteriormente que a série harmónica alternada $\sum(-1)^{n+1}/n$ tem soma $\ln(2)$. Vamos usar a construção da demonstração do Teorema dos Rearranjos de Riemann para verificar esta identidade. Seja $c = \ln(2) \approx 0,6931$. Começamos por tomar o menor número de termos positivos da série cuja soma exceda $\ln(2)$, que no nosso caso consiste no primeiro termo:

$$s_1 = 1 > \ln(2).$$

De seguida, tomamos o menor número de termos negativos de forma a que a soma destes com s_1 seja inferior a $\ln(2)$:

$$t_1 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5 < \ln(2).$$

Adicionamos de seguida termos positivos à soma t_1 de forma a voltarmos a exceder $\ln(2)$:

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \approx 0,8333 > \ln(2).$$

E adicionamos termos negativos de forma a voltarmos a ter uma soma inferior a $\ln(2)$:

$$t_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \approx 0,5833 < \ln(2).$$

Continuando este processo, obtemos as seguintes somas parciais

$$\begin{aligned}
s_3 &\approx 0,7833 > \ln(2)\\
t_3 &\approx 0,6166 < \ln(2)\\
s_4 &\approx 0,7595 > \ln(2)\\
t_4 &\approx 0,6345 < \ln(2)\\
s_5 &\approx 0,7456 > \ln(2)\\
t_5 &\approx 0,6456 < \ln(2)\\
s_6 &\approx 0,7365 > \ln(2)\\
t_6 &\approx 0,6532 < \ln(2)\\
s_{50} &\approx 0,6981 > \ln(2)\\
t_{50} &\approx 0,6881 < \ln(2)\\
s_{500} &\approx 0,6936 > \ln(2)\\
t_{500} &\approx 0,6926 < \ln(2)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Em cada passo, basta adicionar um termo negativo a $s_n > \ln(2)$ para obter a soma $t_n < \ln(2)$, com a sucessão (t_n) crescente e a aproximar-se sucessivamente de $\ln(2)$ por valores inferiores.

Analogamente, basta adicionar um termo positivo à soma $t_n < \ln(2)$ para obter a soma $s_{n+1} > \ln(2)$.

A sucessão (s_n) é decrescente e aproxima-se sucessivamente de $\ln(2)$ por valores superiores.

Obtemos assim a identidade,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).$$

Terminamos com um último exemplo. Vamos voltar a reordenar os termos da série harmónica alternada de forma a obtermos os primeiros termos de uma série convergente para $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Como anteriormente, começamos por escolher o menor número de termos positivos de $\sum a_n$ cuja soma seja superior a $\sqrt{2}$:

$$s_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \approx 1,533 > \sqrt{2},$$

seguido de termos negativos de forma a que a soma seja inferior a $\sqrt{2}$,

$$t_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \approx 1,033 < \sqrt{2}.$$

Repetindo o processo, obtemos:

$$\begin{aligned}
s_2 &= t_1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1,455 > \sqrt{2}\\
t_2 &= t_1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} \approx 1,205 < \sqrt{2}\\
s_3 &= t_2 + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \approx 1,4308 > \sqrt{2}\\
t_3 &= t_2 + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} \approx 1,264 < \sqrt{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} +\\
+ \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} + \cdots
\end{aligned}$$

são os primeiros 14 termos de uma série, obtida reordenando os termos da série harmónica, cuja soma é $\sqrt{2}$.

4. PROBLEMAS

Terminamos este Canto Délfico com uma proposta de alguns problemas que podem ser resolvidos usando as ideias que desenvolvemos nas secções anteriores. O problema 1 foi retirado da *14th Putnam Mathematics Competition* (1954), os problemas 2 e 3 foram retirados de [7] e o problema 4 aparece em [5.] Uma prova do problema 5 pode ser encontrada em [6].

1. Reordenemos os termos de série harmónica alternada
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{5}$$
tomando dois termos positivos, depois um negativo, depois dois positivos, depois um negativo, e assim sucessivamente:
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{6}$$
Denotemos por s_n e por t_n as n-ésimas somas parciais de (5) e (6), respetivamente. Sabemos que $\lim s_n = \ln(2)$. Assumindo que a série (6) é convergente e tem soma $\lim t_n = t$, mostre que
   (a) $t_{3n} = s_{4n} + \frac{1}{2}s_{2n}$,
   (b) $t \neq \ln(2)$.

2. Denotemos por S a soma dos termos da série harmónica que restam após eliminarmos todos os que contêm um dígito par:
$$S = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{39}+\frac{1}{51}+\cdots$$
Prove que $S < 7$.

3. Eliminemos todos os termos da série harmónica cujo denominador seja divisível por um primo de dois ou mais dígitos. Averigúe se a série resultante é divergente ou convergente.

4. Mostre que a série que se obtém removendo todos os termos da série harmónica que contêm o dígito 9 é convergente.

5. Mostre que a soma dos recíprocos dos números triangulares é igual a 2:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)/2}+\cdots = 2.$$

REFERÊNCIAS

[1] M. Hudelson (2010). "Proof Without Words: The Alternating Harmonic Series Sums to ln 2", *Mathematics Magazine*, 83:4, 294.

[2] W. Dunham (1987). "The Bernoullis and the Harmonic Series", *The College Mathematics Journal*, 18:1, 18-23

[3] J. Dirichlet (1837). "Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält." *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1837.*

[4] S.L. Gupta, and N. Rani (2004). *Fundamental Real Analysis*. Vikas Publishing House Pvt Ltd.

[5] A. Kempner (1914). "A Curious Convergent Series". *American Mathematical Monthly*. Washington, DC: Mathematical Association of America. 21 (2): 48–50.

[6] R. Nelsen (1991). "Proof without Words: Sum of Reciprocals of triangular numbers", *Mathematics Magazine*, 64:3, 167.

[7] S. Rabinowitz, and M. Bowron (1999). *Index to Mathematical Problems*, 1975-1979, MathPro Press.

[8] B. Riemann (1854), *Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Sobre a representabilidade de uma função por uma série trigonométrica). Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Fabio Chalub
Universidade
Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

AMANHÃ SERÁ OUTRO DIA

Entre as muitas frases que são comumente atribuídas ao genial físico Albert Einstein, uma diz que "dentre todas as teorias da física, a única que não será descartada no futuro será a termodinâmica".

O que será que siginifica dizer que uma teoria física não será jamais ultrapassada? Será então que a termodinâmica, que começa com o estudo das máquinas térmicas, não é propriamente ciência? Afinal, todo o conhecimento científico pode ser um dia provado errado.

Já na época de Einstein, a termodinâmica era muito mais do que o estudo das máquinas a vapor. Os trabalhos de Ludwig Boltzmann, no século XIX, que aplicou ao estudo dos gases tanto a mecânica de Newton como a teoria das probabilidades, levaram a uma maior compreensão da dinâmica dos gases, e, a partir daí, das máquinas térmicas.

Normalmente – por razões históricas e pedagógicas –, a termodinâmica é sintetizada em quatro leis. A "lei zero" informa que se um corpo está em equilíbrio térmico com outros dois (isto é, não transfere nem recebe calor), então estes dois corpos também estarão em equilíbrio entre si. Isto implica que a capacidade de receber ou transferir calor poderá ser quantificada por um único número, a que chamamos de *temperatura*. No passado houve muita confusão entre a sensação de calor e o conceito de temperatura. Aliás, uma das primeiras definições da palavra "quente" é "aquilo que causa a sensação de calor". Um simples experimento, antigamente visto como parte da física mas que hoje está mais ligado à psicologia sensorial, mostra a falsidade desta definição. Coloque uma mão em água fria, outra em água quente. Após alguns minutos, retire as mãos dos recipientes originais e coloque-as num único recipente contendo água morna e verá que a sensação de calor não é objetiva, sendo diferente em cada mão.

Estabelecido o que acontece quando estão em contacto dois corpos à mesma temperatura, a pergunta seguinte é o que ocorre quando eles **não** estão em equilíbrio térmico. Neste caso, haverá a transferência de calor do de maior temperatura para o de menor temperatura, de acordo com duas leis: a primeira lei da termodinâmica afirma existir uma nova quantidade, chamada *energia*, que é sempre conservada nos processos que não interagem com o exterior (isolados), enquanto a segunda lei afirma que uma outra quantidade, a que chamamos *entropia*, que sempre cresce nas mesmas condições.

Há ainda uma terceira lei que impõe restrições ao comportamento da entropia quando nos aproximamos da temperatura conhecida como *zero absoluto* (aproximadamente –273ºC).

O conceito central da termodinâmica, e que é efetivamente diferente de todo o resto da física, é a entropia. Provavelmente era disto que Einstein falava ao considerar que a termodinâmica sempre resistiria aos avanços da ciência. No entanto, um conceito necessário em qualquer teoria física, atual ou futura, pode facilmente ser classificado como matemático, não como físico.

Discutir se a entropia é física ou matemática está evidentemente fora dos objetivos deste texto; aceitemos que é um conceito que transita bem entre estas áreas. Não é o único, evidentemente. Há um grande número de leis físicas que estabelecem uma igualdade entre conceitos do mundo real e construções abstratas, nomeadamente geométricas.

Voltemos então à entropia. Há três definições importantes: a original, a partir do estudo das máquinas térmicas, feita por Rudolf Clausius entre 1855 e 1865; a estatísti-

Figura 1. Rudolf Clausius, Ludwig Boltzmann e Claude Shannon. Os autores dos três conceitos de entropia que discutiremos neste texto. Fonte: Wikimedia Commons.

ca, de Ludwig Boltzmann, publicada em 1877, e finalmente a baseada na teoria da informação, de Claude Shannon, anunciada em 1948. Veja uma recensão crítica em [1] e veja a figura 1.

Vamos apresentar brevemente estes conceitos em ordem inversa. Para Shannon, grosso modo, a entropia mede a quantidade de possibilidades compatíveis com o que já sabemos. À medida que ganhamos informações, as possibilidades – ou seja, a incerteza – reduzem-se. A entropia mede a informação e definimo-la, informalmente, como o negativo da "quantidade de perguntas de resposta sim ou não que nos permitem conhecer exatamente o estado de um determinado sistema". Quanto mais perguntas são necessárias, menos informações temos, portanto maior é a nossa ignorância do sistema e menor a entropia. (Maior ou menor entropia depende da escolha de um sinal na definição matemática de entropia, e isto não é feito de forma consistente na literatura científica – de qualquer maneira, o que é importante é que esta seja monótona no tempo, sempre crescente ou sempre decrescente, indicando uma assimetria entre o passado e o futuro. Tentaremos ser consistentes neste texto.)

Imagine o seguinte problema simples: eu penso num número entre 1 e $1024 = 2^{10}$. Quantas perguntas terá o leitor de fazer, no mínimo, para concluir o número que pensei? Bastarão dez perguntas, pois em cada uma poderá dividir o grupo em dois ("é maior do que 512?" etc.).

No entanto, eu posso passar uma informação: "o número é par". Automaticamente, o número de perguntas necessárias diminui em 1. Dizemos que eu dei "1 bit" de informação, e a entropia aumentou uma unidade. Neste caso, a palavra entropia tem o significado de incerteza. À medida que aumenta a informação disponível (quando as perguntas são respondidas), diminui a incerteza, aumenta a entropia. Para o leitor interessado, uma bela discussão não técnica dos conceitos desenvolvidos por Shannon pode ser encontrada em [2].

A formulação de Boltzmann não é muito diferente. Para Boltzmann, a entropia mede a quantidade de microestados de um dado sistema, associado ao macroestado do mesmo.

Repetiremos esta ideia com maior cuidado. Boltzmann queria compreender os resultados do Clausius e percebeu que isto decorreria da aplicação das leis da mecânica newtoniana a todos os constitutintes de um gás. No entanto, tipicamente um gás é formado por 10^{23} moléculas, um número tão grande que mesmo os computadores de hoje não são capazes de modelar. Portanto, Boltzmann aplicou as técnicas da estatística para perceber uma série de características médias desta enorme quantidade de pequenos constituintes.

Contudo, ao estudar estas propriedades médias, Boltzmann não estava a limitar a aplicabilidade do seu estudo. Na verdade, ninguém está interessado em saber onde está cada molécula de um gás. O que nos interessa saber são características macroscópicas, como a pressão do mesmo ou o volume que ele ocupa. Não me interessa saber quais ou quantas moléculas de oxigênio eu estou a respirar. Só quero que ele tenha pressão suficiente para chegar aos pontos mais profundos do pulmão e ser distribuído pelo corpo.

Assim, enquanto nós olhamos apenas para o *macroestado* (propriedades macroscópicas observáveis e de grande interesse), a mecânica newtoniana descreve o comporta-

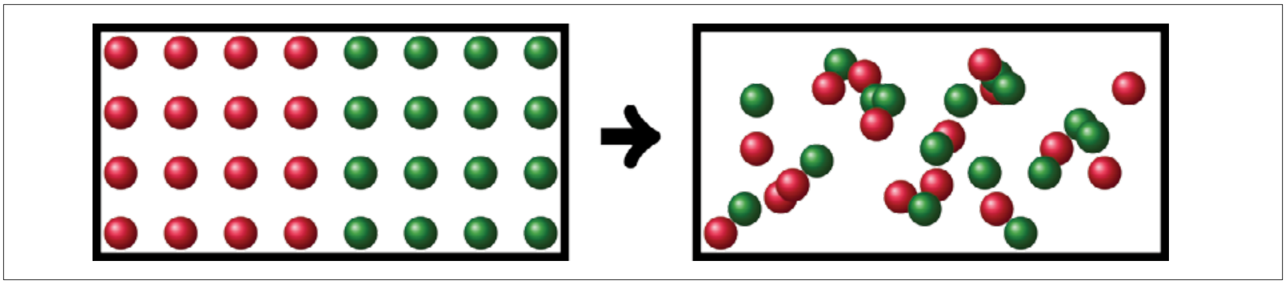


Figura 2. Começamos com uma situação altamente ordenada, que nos faz pensar que "alguém" (alguma inteligência) preparou a condição inicial, em que dois gases estão perfeitamente separados, com moléculas dispostas em pontos altamente simétricos. À medida que o tempo passa, o gás evolui para uma situação em que nenhum padrão é óbvio. Há muitas situações compatíveis com o macroestado da direita, mas poucas – talvez até apenas uma – compatíveis com a situação da esquerda.

mento de cada molécula (propriedades microscópicas não observáveis e desinteressantes). Diversos microestados podem conduzir ao mesmo macrostado; a entropia mede a incerteza que temos sobre o microestado, a partir do conhecimento apenas do macroestado.

Uma importante diferença da abordagem de Boltzmann, relativa àquela de Shannon, é que neste caso temos estados que se alteram no tempo de acordo com certas leis físicas. Esta alteração dá-se com alterações dos macroestados e dos microestados. No entanto, a evolução dá-se de forma que, à medida que o tempo passa, um sistema evolui para macroestados que têm um maior número de microestados compatíveis. A entropia aumenta com o passar do tempo.

Esta é a primeira lei física que estabelece uma direção preferencial para o tempo. Preferencial, pois a entropia aumenta estatisticamente. Um evento raro pode fazer com que ela decresça. De leis simétricas entre o passado e o futuro – como são as leis de Newton –, é possível conseguir uma assimetria apenas por considerar uma quantidade enorme de agentes a interagir. Este resultado assombrou e, em larga medida, continua a assombrar o mundo. Veja a figura 2.

Do ponto de vista prático, forneceu a explicação que Clausius queria. Clausius percebeu que os estudos sobre eficiência de máquinas térmicas do seu predecessor francês, Sadi Carnot, levavam à construção de uma grandeza, que ele chamou de entropia, com algumas propriedades interessantes: depende apenas do macroestado do sistema[1], nunca decresce, qualquer que seja o ciclo, e a sua taxa de crescimento mede a eficiência do ciclo. A entropia de Clausius não é apenas uma construção teórica e pode ser medida em laboratório. Quando consideramos todos os efeitos de uma máquina térmica, a entropia do Universo (ou, melhor, do sistema fechado que inclui a máquina e o ambiente em que esta funciona, trocando energia) irá sempre aumentar, sendo o seu aumento relacionado com a eficiência da máquina, ou seja, quanto da energia é efetivamente convertida em trabalho. A entropia de Boltzmann e de Clausius é discutida em muitos livros de física estatística, como [3].

Por fim, é importante chamar a atenção para o facto de que o conceito de entropia não é, nem nunca foi, sinónimo de desordem. Apesar de esta utilização ser muito comum na linguagem corrente, não tem nenhum paralelo na sua utilização técnica.

E porquê toda esta discussão? Ora, a segunda lei da termodinâmica estabelece uma *seta do tempo*. Difere o passado do futuro. Após cerca de 15 anos, está na hora de apontar para o futuro e seguir em frente. Este será o meu último texto na coluna Na Linha de Frente da *Gazeta*. Mas estarei por aí, em novos desafios. Um abraço a todos os leitores e leitoras!

REFERÊNCIAS

[1] Arieh Ben-Naim." Entropy and Information Theory: Uses and Misuses". *Entropy* 21, 1170 (2019).

[2] James Gleick. *Informação*. Temas e Debates, 2012.

[3] F. Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, Waveland Press, 2009.

[1] A formulação mais usual é dizer que depende do *estado*, mas não da *história* do sistema; a história, no entanto, está codificada no microestado.

BREVES NOTAS SOBRE ENTROPIA E SUAS APLICAÇÕES

PAULO SARAIVA
CMUC - CENTRE FOR MATHEMATICS OF THE UNIVERSITY OF COIMBRA; CEBER - CENTRE FOR BUSINESS AND ECONOMICS RESEARCH.
psaraiva@fe.uc.pt

1. INTRODUÇÃO

A teoria da informação é a área da matemática que estuda a quantificação, o armazenamento e a comunicação da informação digital. Na sua base está a ideia de quantificar a informação existente em eventos aleatórios. Trata-se de uma área fundamentalmente estabelecida após os trabalhos de H. Nyquist [4] e R. Hartley [1] na década de 1920, mas principalmente por Claude E. Shannon na década de 1940, no seu impactante artigo "A Mathematical Theory of Communication" [5] (razão pela qual este matemático é conhecido por *pai da Teoria da Informação*), situando-se na interseção de várias disciplinas: Teoria das Probabilidades, Estatística, Ciências da Computação, Mecânica Estatística, Engenharia da Informação e Engenharia Eletrotécnica. Aplicações de tópicos fundamentais da teoria da informação incluem a codificação de fontes de informação, a compressão de dados (*e.g.*, para arquivos ZIP), a codificação de canais, bem como a deteção e correção de erros. O conceito chave na teoria da informação é a entropia, a qual constitui uma métrica para o grau de casualidade ou de incerteza que eventos aleatórios possuem. Entropia e quantidade de informação relacionam-se do seguinte modo: quanto maior a quantidade de informação, maior será a desordem e maior será a entropia; quanto menor a quantidade de informação, menor será a escolha e menor a entropia.

No presente artigo, recorrendo a um exemplo, apresenta-se de um modo construtivo e intuitivo q.b. a noção de entropia, ao mesmo tempo que se explica em que sentido esta serve como métrica para a quantidade de informação subjacente a certos fenómenos. Dentre as propriedades da entropia, deduz-se a que diz respeito à entropia máxima. A entropia de Shannon veio a ser adaptada a outras áreas do conhecimento, sendo uma das ferramentas mais recorrentes na medição da diversidade biológica (leia-se, *e.g.*, [3], [6] e [2]), justificando-se assim a inclusão de um exemplo da sua aplicação neste contexto. Por último, a entropia pode igualmente ser adaptada no sentido de quantificar a diversidade de origens geográficas de populações que migram, como, por exemplo, os estudantes universitários. Apresenta-se um exemplo original desta aplicação a um universo restrito de estudantes da Universidade de Coimbra, o qual, se alargado a um universo mais amplo, pode revelar-se importante como auxílio à caracterização de migrações estudantis.

Apresenta-se aqui uma breve e intuitiva introdução à entropia de Shannon, incluindo algumas das suas propriedades. Ilustra-se a aplicação desta medida de informação em dois contextos distintos do que esteve na sua génese.

2. ENTROPIA DE SHANNON: CONSTRUÇÃO INTUITIVA, DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Para entender os conceitos de entropia e de quantidade de informação, considere o seguinte exemplo. Suponha que duas máquinas, M_1 e M_2, geram sequências de letras a partir de um alfabeto com apenas quatro letras, digamos A, B, C e D. M_1 gera cada letra aleatoriamente, de tal modo que cada uma ocorre em média 25% das vezes, enquanto M_2 gera as letras de acordo com as seguintes probabilidades de ocorrência:

$$p(A) = 50\%,\ p(B) = p(C) = 12,5\% \text{ e } p(D) = 25\%.$$

Qual das máquinas está a produzir mais informação? Claude Shannon refez a questão, colocando-a do seguinte modo: se tivesse de prever que letra deveria aparecer a seguir na sequência produzida por cada máquina, qual seria, em cada caso, o número mínimo de questões binárias que teria de realizar? Por questão binária, entendemos uma questão que divida as possibilidades em duas (isto é, questões de "sim ou não").[1]

Em relação à máquina M_1, a nossa primeira questão poderia ser: a próxima letra pertencerá ao conjunto $\{A, B\}$? A probabilidade de pertencer ao conjunto destas duas letras é de 50% e o mesmo sucede com a probabilidade de pertencer a $\{C, D\}$. Após obtermos a resposta (sim/não pertence), podemos eliminar metade das possibilidades e ficaremos apenas com duas letras, ambas equiprováveis. Por exemplo, se a resposta fosse afirmativa, poderíamos

[1] Uma interessante simulação de ambas as situações pode ser consultada em [7].

eliminar $\{C, D\}$ e colocar agora a questão: a letra seguinte é A? Após esta segunda questão, teremos identificado corretamente a próxima letra. Portanto, podemos dizer que a incerteza da máquina M_1 é igual a dois (duas questões por cada letra a adivinhar), uma vez que, independentemente do símbolo considerado, teremos de realizar duas questões se quisermos ter a certeza da próxima letra. A seguinte árvore binária, contendo as probabilidades associadas a cada questão colocada, pretende ilustrar esta situação.

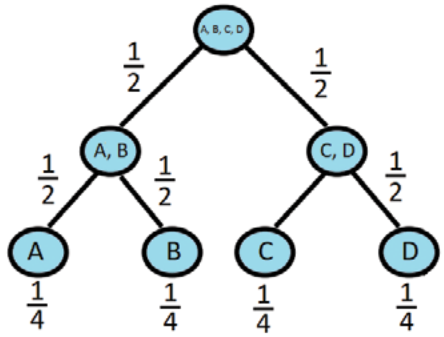


Figura 1. Árvore binária relativa a M_1.

Em relação à máquina M_2, à semelhança de M_1, bastariam duas questões para adivinhar a próxima letra. No entanto, o facto de as probabilidades de cada letra não serem todas iguais leva-nos a colocar as questões de maneira distinta. No caso presente, A ocorre com probabilidade 50%, sendo 50% a soma das probabilidades de ocorrência das restantes. Podemos começar por perguntar: será um A? No caso afirmativo, bastará uma pergunta. No caso negativo, ficámos com as restantes três letras: D, B e C, sendo estas últimas equiprováveis. Podemos fazer uma segunda pergunta: será um D? No caso afirmativo, bastaram-nos duas perguntas; no caso negativo, teremos de realizar uma terceira pergunta para identificar qual das restantes duas letras é a certa. Em média, quantas questões teremos de efetuar para identificar uma letra produzida pela máquina M_2? A árvore binária com as probabilidades associadas a cada questão colocada vai ajudar-nos a responder (figura 2).

Para calcular o número médio de questões que nos levam a cada uma das letras, tomaremos a média ponderada pelo número de questões:

$$p(A) \times 1 + p(D) \times 2 + p(B) \times 3 + p(C) \times 3 = 1{,}75.$$

Ou seja, no segundo caso, em média, o número expectável de questões binárias necessárias para atingir cada letra

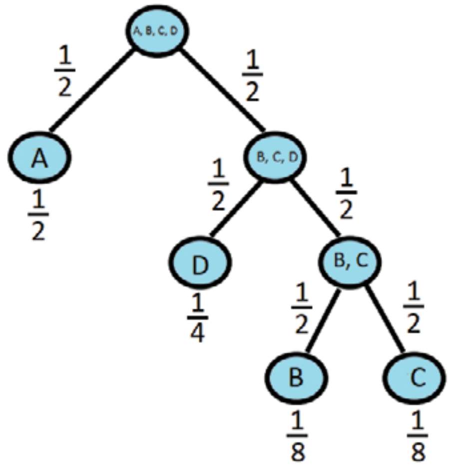


Figura 2. Árvore binária relativa a M_2.

é de 1,75, o que compara com as duas questões que, em média, necessitamos no caso da máquina M_1. Quer isto dizer que, se tivéssemos de adivinhar uma sequência de 100 símbolos gerados por cada uma das máquinas, seria expectável necessitarmos de 200 questões no primeiro caso, e de 175 questões no segundo caso. Isto significa que M_2 está a produzir menos informação do que M_1, uma vez que há menos incerteza ou surpresa acerca da letra a gerar. Claude Shannon chamou **entropia** a esta medida de incerteza média, tendo optado pela letra H para a representar. O **bit** (de *binary digit*), a unidade de informação escolhida por Shannon para H, baseia-se na incerteza inerente ao lançamento de uma moeda equilibrada, e equivale ao número médio de questões na analogia acima explanada.

Procuremos generalizar o conceito para o caso de n símbolos possíveis. Ainda segundo a analogia anterior, a entropia será o somatório, para cada símbolo, da sua probabilidade de ocorrência, p_i, multiplicada por s_i, número de questões binárias necessárias para o alcançar:

$$\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{n} p_i \times s_i. \tag{1}$$

A questão imediata é a de saber como representar s_i de uma maneira mais geral. Como pudemos observar, o número de questões depende do nível em que se encontra cada letra isolada no diagrama de árvore que modeliza cada máquina. Segundo esta analogia, cada símbolo isolado num determinado nível tem probabilidade $\frac{1}{2}$ relativamente ao nó que o originou. Assim, cada letra isolada no nível k tem probabilidade inicial $p = \frac{1}{2^k}$. Neste contexto, tem-se

$$p_i = \frac{1}{2^{s_i}},\ i = 1, \ldots, n,$$

e o número de questões para atingir o i-ésimo símbolo será

$$s_i = \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right),\ i = 1, \ldots, n.$$

Substituindo em (1) esta última expressão, vem:

$$\mathrm{H}\left(p_1, \ldots, p_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i. \quad (2)$$

Esta é a chamada **entropia de Shannon** para um evento aleatório com n estados possíveis, com probabilidades p_i, $i = 1, ..., n$, onde $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Sempre que ocorra $p_i = 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, adotaremos a convenção

$$p_i \log_2 p_i = 0. \quad (3)$$

Note que os cálculos de H podem ser feitos diretamente a partir dos dados das frequências absolutas de cada estado. Sejam $f_1, \ldots, f_n$ tais frequências e S o número total de observações. Então:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = S \quad \text{e} \quad p_i = \frac{f_i}{S},\ i = 1, \ldots, n.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\left(f_1, \ldots, f_n\right) &= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i}{S}\right) \log_2 \left(\frac{f_i}{S}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{S} \left[\log_2 f_i - \log_2 S\right] \\
&= \log_2 S - \tfrac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} f_i \log_2 f_i.
\end{aligned}$$

Admita que num dado evento aleatório existem n estados (ou categorias) possíveis, com probabilidades p_i, $i = 1, ..., n$, $n > 1$, tal que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Designando por H_{max} a máxima entropia, vamos provar que

$$\mathrm{H}_{max} = \mathrm{H}\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \log_2 n,$$

ou seja, que a quantidade de informação será máxima quando todos os estados são equiprováveis: $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$. Para tal, vamos recorrer a certas propriedades de $x \log_2 x$.

Consideremos a função F tal que

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = 0 \\ x \log_2 x, \text{ se } x \in]0,1] \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ se } x = 0 \\ kx \ln x, \text{ se } x \in]0,1] \end{cases}, \quad (4)$$

onde $k = \frac{1}{\ln 2} > 0$. Após levantamento da indeterminação, mostra-se que

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} kx \ln x = 0,$$

garantindo a continuidade de F em [0,1] (formalizando a convenção (3)). Note ainda que:

$$F'(x) = k \ln x + k \quad \text{e} \quad F''(x) = \frac{k}{x} > 0, \text{ para todo o } x \in]0,1[.$$

Assim sendo, F é convexa (e o seu mínimo é $-ke^{-1}$, atingido no ponto $x = e^{-1}$). Recordemos agora um conhecido resultado das funções regulares.

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Médio) *Seja f uma função contínua em [a,b] e diferenciável em]a,b[. Então existe algum $c \in]a, b[$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para a demonstração que estamos a construir é importante destacar o seguinte resultado:

Corolário 2.1 *Seja f uma função contínua em [a,b] e diferenciável em]a,b[. Admita que f′ é crescente em [a,b]. Para cada $t \in]a, b[$, se $p \in [a, b]$, então $f(p) \geq f(t) + f'(t)(p - t)$.*

Note que a função F definida em (4) satisfaz as condições do Teorema do Valor Médio, bem como do seu corolário, em[0,1]. Tomando $t = \frac{1}{n}$, o corolário permite concluir que, para cada $p_i \in [0, 1]$:

$$F(p_i) \geq F\left(\frac{1}{n}\right) + F'\left(\frac{1}{n}\right)\left(p_i - \frac{1}{n}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = \sum_{i=1}^{n} F(p_i) &\geq \sum_{i=1}^{n} \left[F\left(\frac{1}{n}\right) + F'\left(\frac{1}{n}\right)\left(p_i - \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= nF\left(\tfrac{1}{n}\right) + F'\left(\tfrac{1}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right] \\
&= nF\left(\tfrac{1}{n}\right) = -\log_2 n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{H}\left(p_1, \ldots, p_n\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leq \log_2 n = \mathrm{H}\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right),$$

concluindo a prova.

Sempre que uma situação traduza um afastamento da equiprobabilidade, ou caso se introduza algum grau de previsibilidade, a entropia deverá diminuir. Além disso, a entropia será nula quando a totalidade das ocorrências pertencer a um único estado. Fica assim clara a ideia de que, se a entropia de uma fonte de informação diminuir, podemos fazer, em média, menos questões para adivinhar o resultado gerado. O número de bits dá-nos então uma medida quantitativa da informação, da surpresa ou da incerteza associada a uma determinada distribuição aleatória.

Admita que X é uma variável aleatória assumindo n estados possíveis, $x_1, \ldots, x_n$, e que p é a sua distribuição de probabilidade. Considere que as probabilidades de ocorrência de cada um dos n estados possíveis são dadas por $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($p_i = p(X = x_i)$). De acordo com Shannon, toda a função de entropia $\mathrm{H} = \mathrm{H}(p_1, \ldots, p_n)$ deverá assumir as seguintes propriedades:

1. A entropia é contínua enquanto função de cada p_i, $i = 1, \ldots, n$.
2. Se $p_i = \frac{1}{n}$, então a entropia é uma função monótona crescente de n . Para eventos equiprováveis, quanto maior for o número de acontecimentos possíveis, maiores a incerteza e a possibilidade de escolha.
3. Se uma escolha for subdividida em duas escolhas sucessivas, a entropia original deverá ser a soma ponderada dos valores individuais de H.

A última propriedade pode ser interpretada do seguinte modo: a entropia é função da distribuição em si e não depende da forma como são agrupados os eventos, isto é, a entropia é uma função de estado. Isto pode ser ilustrado através do exemplo na seguinte figura:

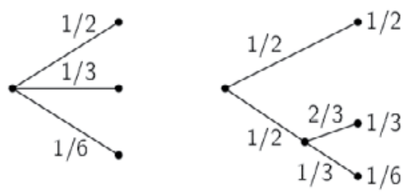


Figura 3. Decomposições de uma escolha com três possibilidades.

Na parte esquerda da figura 3 temos três possibilidades com probabilidades $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ e $p_3 = \frac{1}{6}$. À direita da mesma figura, primeiro escolhemos entre duas possibilidades, cada uma com probabilidade $\frac{1}{2}$, e se a segunda ocorrer, deve-se fazer outra escolha com probabilidades $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Os resultados finais terão de ser iguais, isto é, uma função de entropia deverá satisfazer

$$\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \mathrm{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Shannon provou que uma tal função obedecendo às propriedades 1., 2. e 3. deverá assumir a forma

$$\mathrm{H}(p_1, \ldots, p_n) = -K \sum_{i=1}^{n} p_i \log_b \ p_i,$$

onde K é uma constante positiva e arbitrária, estando apenas associada à escolha de uma unidade de medida (cf. [5], *Theorem* 2 e *Appendix* 2). A opção mais usual considera $K = 1$ e $b = 2$, subentendendo que a unidade de informação é o bit, obtendo-se nesse caso a expressão (2).

A título de exemplo, $\mathrm{H}(p, q)$, a entropia para o caso de uma variável aleatória com dois estados possíveis, p e q, com $q = 1 - p$, é dada por:

$$\mathrm{H}(p, q) = \mathrm{H}(p, 1 - p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2(1 - p).$$

O seu gráfico surge representado na figura seguinte.

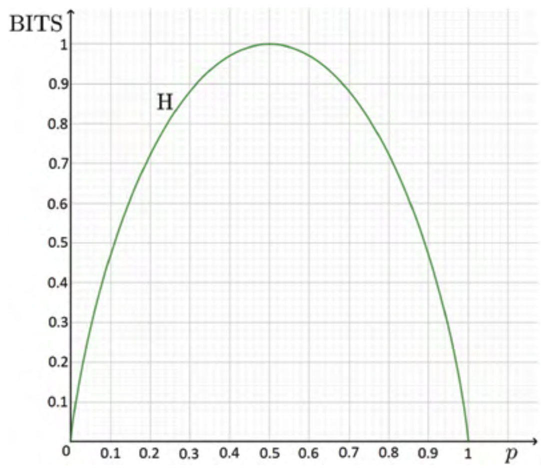


Figura 4. Entropia no caso de dois estados com probabilidades p e $1-p$.

Como expectável, a entropia máxima resulta de $p = q = \frac{1}{2}$, valendo 1 bit.

3. ENTROPIA DE SHANNON E DIVERSIDADE BIOLÓGICA

A quantificação da diversidade ecológica dos ecossistemas é a aplicação biológica mais comum da teoria da informação. Em geral, comunidades biológicas saudáveis localizadas em *habitats* favoráveis tendem a ser vistas como sistemas altamente diversos. Uma diminuição da diversidade biológica poderá dever-se tanto a condições ambientais como a situações de stress na comunidade biológica. A teoria da informação permite quantificar as diferenças entre ecossistemas, tanto as naturais como as induzidas pelo stress (*e.g.*, devidas a catástrofes ambientais, de origem humana ou não), bem como estudar a evolução da diversidade biológica ao longo do tempo. Os biólogos designam a entropia por índice de Shannon ou diversidade de primeira ordem, não sendo a única ferramenta existente com estes propósitos. Tal índice pode ser calculado para todos os organismos presentes num ambiente ou para tipos específicos de organismos (*e.g.*, árvores ou insetos). Há ainda exemplos de utilização do índice de Shannon no campo da comunicação entre animais. Por exemplo, em [6] o autor apresenta um interessante estudo feito sobre formigas-de-fogo, no qual relaciona a quantidade de informação direcional transmitida a formigas obreiras por um único trilho de odor de formiga-de-fogo, em função da distância entre o ninho e a fonte de alimentação encontrada. Referências a outras aplicações podem ser vistas em [2] .

O exemplo seguinte serve como simples ilustração da utilização desta ferramenta no campo da biologia. Os zoólogos MacArthur e MacArthur [3] propuseram-se estudar as possíveis relações entre a diversidade de espécies de aves (DEA) nidificantes e a diversidade de espécies de plantas (DEP) onde a nidificação ocorre, bem como com certas características dessa vegetação. Fizeram-no em 11 locais de florestas caducifólias de Pennsylvania, Vermont e Maryland. Em particular, além de estimativas para a DEA e para a DEP, uma das características testadas foi a altura das folhagens das árvores, a qual se exprime através do número de camadas de folhas entre o solo e o céu em diferentes locais. Por forma a criar um indicador de diversidade de altura da folhagem (DAF), esta característica foi dividida em três zonas: de zero a dois pés acima do solo, de dois a 25 pés e acima de 25 pés. Os autores obtiveram estimativas para a DAF nos 11 locais e puderam constatar que quando as quantidades de folhas acima do solo nas três zonas são sensivelmente iguais a DAF aumenta, refletindo um ambiente físico mais complexo. Estimados estes três indicadores - DEA, DEP e DAF - nos 11 locais de estudo, os autores procuraram estabelecer conexões entre a atratibilidade de um *habitat* para a nidificação e os referidos indicadores, tendo chegado à conclusão de que existe uma forte correlação entre a DEA e a DAF (ver gráfico na figura 5).

O coeficiente de correlação de Pearson para os dados de DAF e de DEA é:

$$\rho = \frac{COV(DAF, DEA)}{\sqrt{V(DAF)V(DEA)}} \approx 0,95,$$

(onde V e COV designam a variância e a covariância, respetivamente) confirmando uma forte correlação positiva entre DAF e DEA. Os dados aproximam-se bastante da reta de regressão linear:

$$DEA = 2,02 \times DAF + 0,44.$$

Com base nesta relação, as aves parecem selecionar os locais de nidificação com base na maior DAF. Por outro lado, observa-se uma relação muito mais fraca entre os valores de DEA e de DEP. A estrutura física de um bosque em termos das folhagens presentes em diferentes zonas de alturas parece importar mais às aves no momento de nidificar do que propriamente as plantas que produzem tais estruturas.

Local	DAF	DEP	DEA
A	0,043	0,972	0,639
B	0,448	1,911	1,266
C	0,745	2,344	2,265
D	0,943	1,768	2,403
E	0,731	1,372	1,721
F	1,009	2,503	2,739
G	0,577	1,367	1,332
H	0,859	1,776	2,285
I	1,021	2,464	2,277
J	0,825	2,176	2,127
K	1,093	2,816	2,567

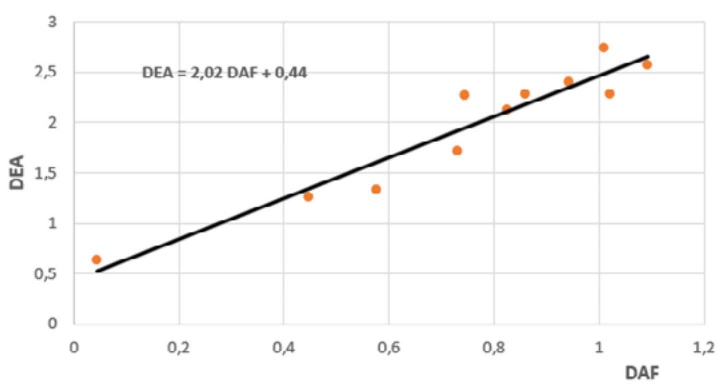


Figura 5. Valores de DAF, DEP e DEA e relação entre DEA e DAF.

4. MIGRAÇÕES DE ESTUDANTES

À semelhança de certas espécies animais, é possível observar fenómenos de migração entre diversos tipos de populações. Em particular, a população estudantil do Ensino Superior migra regularmente desde as respetivas localidades de residência para os estabelecimentos de Ensino Superior (doravante designados por escolas). Fatores como a distância residência-escola, o rendimento familiar e a existência de transportes (públicos ou particulares) influem na opção entre a migração pendular (deslocação diária casa-escola) e a migração sazonal (a qual implica o arrendamento/compra de uma residência no local de estudo). Independentemente desta opção, pode ser relevante determinar quão diversificado é o conjunto de origens geográficas dos alunos de uma escola, como forma de, por exemplo, ajustar medidas pedagógicas ou políticas de fomento da atratibilidade dos cursos. Ao incluir o local de residência, o registo de matrícula de cada aluno permite atingir tal propósito com bastante fiabilidade.

Comecemos por agrupar os alunos de um dado universo (turma, disciplina, curso ou escola) em categorias de acordo com o respetivo local de residência. Para tal, considerámos uma categoria por cada região NUTS III. NUTS é o acrónimo de Nomenclatura das Unidades Territoriais para Fins Estatísticos, sistema hierárquico de divisão do território em regiões. A nomenclatura subdivide-se em três níveis (NUTS I, NUTS II e NUTS III), definidos de acordo com critérios populacionais, administrativos e geográficos. Assim, os 308 atuais municípios de Portugal agrupam-se em 25 NUTS III (subdivisões de sete NUTS II e de três NUTS I). Além disso, e porque é frequente haver estudantes estrangeiros, considerámos três categorias adicionais: Brasil, PT e Europa, para estudantes provenientes do Brasil, dos PALOPs/Timor-Leste e da Europa, respetivamente. No total, os alunos foram agrupados em 28 categorias. Evidentemente, categorias adicionais podem sempre ser consideradas (agrupando, por exemplo, alunos de outros continentes ou subdividindo as duas últimas categorias). A medida de diversidade aplicada no presente contexto, constituindo uma métrica para a diversidade de origens geográficas dos estudantes, resultará então do cálculo de

$$\mathrm{H}\,(p_1, \ldots, p_{28}) = -\sum_{i=1}^{28} p_i \log_2\ p_i,$$

onde p_i representa a proporção de estudantes pertencentes à i-ésima categoria (a ordem é irrelevante). De acordo com a convenção (3), para cada região j sem alunos, considerou-se $p_j \log_2 p_j = 0$. A medida foi aplicada ao universo de 280 inscritos em 2021/2022 na disciplina de Cálculo I da Licenciatura em Economia da U. de Coimbra. Os dados obtidos e o valor de H (na célula a verde) surgem na tabela que se segue.

NUTS III	NUTS II	NUTS I	Alunos	Proporção (p_i)	$p_i \log_2 (p_i)$
Alto Minho	Norte	Continente	11	0,04	-0,18
Cávado			10	0,04	-0,17
Ave			9	0,03	-0,16
Área Metropolitana do Porto			22	0,08	-0,29
Alto Tâmega			3	0,01	-0,07
Tâmega e Sousa			20	0,07	-0,27
Douro			6	0,02	-0,12
Terras de Trás-os-Montes			5	0,02	-0,10
Oeste	Centro		6	0,02	-0,12
Região de Aveiro			13	0,05	-0,21
Região de Coimbra			66	0,24	-0,49
Região de Leiria			13	0,05	-0,21
Viseu Dão Lafões			13	0,05	-0,21
Beira Baixa			1	0,00	0,00
Médio Tejo			5	0,02	-0,10
Beiras e Serra da Estrela			6	0,02	-0,12
Área Metropolitana de Lisboa	Área Metropolitana de Lisboa		10	0,04	-0,17
Alentejo Litoral	Alentejo		0	0,00	0,00
Baixo Alentejo			0	0,00	0,00
Lezíria do Tejo			7	0,03	-0,13
Alto Alentejo			1	0,00	-0,03
Alentejo Central			0	0,00	0,00
Algarve	Algarve		3	0,01	-0,07
Região Autónoma dos Açores	Região Autónoma dos Açores	Região Autónoma dos Açores	1	0,00	0,00
Região Autónoma da Madeira	Região Autónoma da Madeira	Região Autónoma da Madeira	3	0,01	-0,07
Outras Categorias					
PT (PALOPs+Timor)			30	0,11	-0,35
Brasil			16	0,06	-0,24
Europa			0	0,00	0,00
			280	1,00	3,87

Figura 6. Diversidade de origem geográfica de população estudantil.

A análise da tabela na figura 6 permite observar uma expectável predominância de alunos provenientes da região de Coimbra, acompanhada de outras regiões com alguma relevância relativa. Se em algumas tal é compreensível (caso das regiões fronteiras à de Coimbra), noutras contudo ocorre alguma surpresa (*e.g.*, algumas regiões inseridas na NUTS II do Norte contribuem com proporções assinaláveis). Destaca-se igualmente o peso dos alunos das categorias PT e Brasil. Observe-se que a diversidade máxima seria de $\mathrm{H}_{max} = \log_2\ 28 \approx 4,81$, pelo que a diversidade de origem geográfica se cifrou em cerca de 81% do seu máximo. A recolha anual destes dados permite acompanhar este indicador ao longo dos anos. Assim, por exemplo, considerando os anos letivos 2009/2010 (o primeiro para o qual a plataforma informática fornece os dados necessários), 2020/2021 e 2021/2022, e para as mesmas 28 categorias (com, respetivamente, 420, 280 e 280 alunos), observa-se um claro aumento da diversidade de origens geográficas dos alunos no estrito universo considerado.

Ano Lectivo	2009/2010	2020/2021	2021/2022
H	2,86	3,66	3,87

São diversas as possibilidades de aplicação deste indicador, desde estudos comparativos entre cursos ou entre faculdades (ou até mesmo entre universidades, confirmando ou refutando tendências de regionalização de uma escola), passando pelo estabelecimento de séries temporais (por curso, por exemplo). Evidentemente, o que tornará mais interessante a sua utilização será, como acima se referiu, o modo como ele permitirá eventualmente ajustar medidas pedagógicas ou políticas de atratibilidade.

O autor agradece à Cristina Martins (DMUC) a leitura cuidadosa do texto e as sugestões de redação de parte da secção 2.

REFERÊNCIAS

[1] Hartley, R. V. L., "Transmission of information."}*The Bell System Technical Journal*, vol. 7, no. 3, pp. 535-563, July 1928. doi: 10.1002/j.1538-7305.1928.tb01236.x.

[2] Kolmes, S. and Mitchell, K., "Information Theory and Biological Systems." *UMAP Modules: Tools for Teaching* 1990, pp. 43-78, UMAP Module 705.

[3] MacArthur, Robert H. and John W. MacArthur, "On Bird Species Diversity." *Ecology*, vol. 42, no. 3, pp. 594–98, 1961 JSTOR, *https://doi.org/10.2307/1932254*.

[4] Nyquist, H., "Certain Factors Affecting Telegraph Speed." *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XLIII, pp. 412-422, January-December 1924. doi: 10.1109/T-AIEE.1924.5060996.

[5] Shannon, C. E., "A Mathematical Theory of Communication." *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423, 623-656, July, October, 1948. doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

[6] Wilson, E. O., "Chemical Communication Among Workers of the Fire Ant Solenopsis Saevissima. (Fr. Smith) 2. An Information Analysis of the Odor Trail." *Animal Behaviour*, vol. 10, 1962, pp. 134–147.

[7] *https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/informationtheory/moderninfotheory/v/information-entrop*

SOBRE O AUTOR

Paulo Saraiva é professor na Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra (FEUC). Licenciado e mestre em Matemática (especialização em Ensino) pela FCTUC, doutorou-se em Economia Matemática e Modelos Econométricos pela FEUC em 2004. É membro da Linha de Álgebra e Combinatória do *CMUC - Centre for Mathematics of the University of Coimbra* e colaborador do *CeBER - Centre for Business and Economics Research*. É coeditor do Boletim *FEUC et al.* desde o início desta publicação.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

QUANDO É DIFÍCIL PROVAR O QUE É ÓBVIO

Qual é a maneira mais eficiente de empilhar esferas do mesmo tamanho? Qualquer merceeiro sabe a resposta, mas provar que é mesmo a melhor solução é complicado.

Sir Walter Raleigh (c.1552-1618) foi das mais notáveis personagens do tempo da rainha Isabel I do Reino Unido. Estadista, soldado, escritor e explorador, foi um dos favoritos da rainha. E tinha ao seu serviço Thomas Harriot (c.1560-1621), que, entre outras coisas, era matemático. Sir Walter Raleigh fez-lhe uma pergunta natural vinda de um soldado daquele tempo e dirigida a um matemático: dada uma pilha de balas de canhão, como calcular quantas balas aí há? [1]

Harriot resolveu o problema, mas ficou a pensar na questão de saber qual é a melhor maneira de empilhar balas de canhão, isto é, a maneira de as empilhar que faz com que haja menos espaço vazio, e como se correspondia com Johannes Kepler (1571–1630), falou-lhe neste problema. Kepler publicou uma brochura sobre o problema, chamada *Strena seu de nive sexangula* (em português: *O floco de neve com seis ângulos*),[2] que é o primeiro texto escrito sobre a análise e a formação de cristais. Aí, ele afirma que a solução para o problema de Harriot é aquela que qualquer merceeiro conhece e que também é a maneira como as balas de canhão estão empilhadas em qualquer museu militar: na base, as balas estão dispostas como na figura 1; cada bala da camada seguinte é colocada num dos espaços mais baixos deixados pela camada anterior, como na figura 2, e assim sucessivamente.

Geralmente, chama-se "conjetura de Kepler" à afirmação segundo a qual a maneira atrás descrita é a mais eficiente de empilhar esferas, mas Kepler não exprimiu esta ideia como uma conjetura. De facto, limitou-se a afirmar que assim é. Por outro lado, ao colocar as esferas desta maneira, aproximadamente 74% do espaço é ocupado por elas; mais precisamente, o valor em questão é igual a $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}74048$.

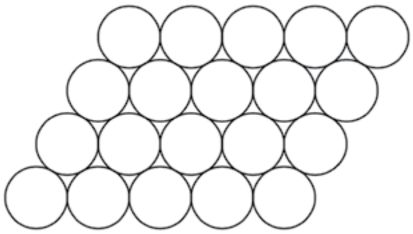


Figura 1. Camada inferior.

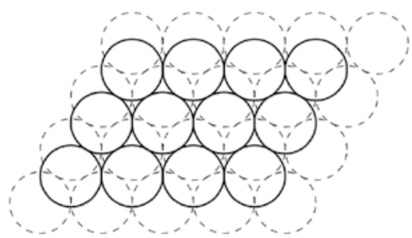


Figura 2. Duas primeiras camadas.

Após o texto de Kepler ter aparecido, decorreram séculos até alguém ter feito qualquer progresso no estudo deste problema. Essa pessoa foi Gauss, que, em 1831, demonstrou a conjetura de Kepler no caso em que os centros das esferas formam um reticulado. Isto significa que os centros das esferas estão regularmente distribuídos. Mais formalmente: se fixarmos o centro C de uma das esferas, então há três vetores linearmente independentes v_1, v_2 e v_3 de $\mathbb{R}^3$ tais que os centros das esferas são os pontos da forma $C + \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, onde α, β e γ são números inteiros. Mais à frente, voltaremos a esta demonstração.

Sobra então o caso em que os centros das esferas estão distribuídos de uma maneira irregular. Naturalmente, isto torna o problema mais difícil.

Em 1900, David Hilbert proferiu a sua famosa palestra sobre os problemas que seriam centrais para o desenvolvimento da Matemática nas décadas seguintes (veja-se [1]). O décimo oitavo problema consistia, de facto, em vários problemas relacionados entre si, um dos quais era precisamente o problema de demonstrar a conjetura de Kepler.

Foi somente em 1953 que o matemático húngaro László Fejes Tóth conseguiu fazer progressos quanto à resolução deste problema: conseguiu provar que o problema de determinar qual é a distribuição das esferas com densidade máxima podia ser reduzido a um número finito (mas muito elevado) de cálculos. Isto tornou razoável encarar a possibilidade de o problema poder vir a ser resolvido recorrendo a computadores. Foi precisamente o que acabou por acontecer alguns anos mais tarde com o problema das quatro cores (veja-se [9]).

Em 1993, um matemático californiano, Wu-Yi Hsiang, publicou um artigo ([7]) que pretendia conter uma demonstração da conjetura de Kepler. Essa suposta demonstração levantou muitas dúvidas a diversos matemáticos, entre os quais Gábor Fejes Tóth, filho de László Fejes Tóth, e Thomas C. Hales (veja-se [2]). Este último já tinha sido exposto à conjetura em 1982, mas só começou a dedicar-se seriamente ao problema seis anos mais tarde (veja-se [10, cap. 11]). É geralmente aceite hoje em dia que a demonstração de Hsiang não está completa.

O próprio Thomas C. Hales anunciou em 1998 ter demonstrado a conjetura de Kepler.[3] No entanto, a demonstração só viria a ser publicada em 2005 (veja-se [4]). E não é uma demonstração qualquer, pois não só o artigo em questão é anormalmente longo (tem mais de 100 páginas), como foi acompanhada por três *gigabytes* de programas de computador e de dados. De facto, passaram-se vários anos entre o momento em que o artigo foi submetido à

Figura 3. Thomas C. Hales.

prestigiada revista *Annals of Mathematics* e o momento da publicação, pois foi necessário esse tempo para que uma equipa de revisores científicos lesse e verificasse a validade da demonstração. Um destes revisores, Jeffrey C. Lagarias, afirmou (veja-se [8]):

> "A natureza desta demonstração, que consiste em parte num grande número de desigualdades com pouca estrutura interna, bem como o facto de estar estruturada de maneira complexa, faz com seja dificilmente verificada com segurança por seres humanos. No decorrer do processo, a verificação de muitas afirmações específicas permitiu constatar que estavam essencialmente corretas em cada caso. Isto resultou num processo de revisão que criou nos revisores um forte grau de convicção de que esta abordagem à demonstração está essencialmente correta [...]"

Não é habitual encontrar-se a palavra "convicção" na descrição de uma demonstração matemática. Fica claro do texto que os autores da revisão científica anterior ficaram com alguma margem de dúvida (claramente pequena) quanto ao facto de a demonstração estar inteiramente correta.

É claro que Thomas C. Hales poderia ter ficado satisfeito com esta quase certeza. Mas não ficou. Em vez disso,

---

[1] Kristin Leutwyler, *Stack 'em Tight*, *\https://www.scientificamerican.com/article/stack-em-tight/*

[2] O texto original, em latim, pode ser visto em *http://www.thelatinlibrary.com/kepler/strena.html*

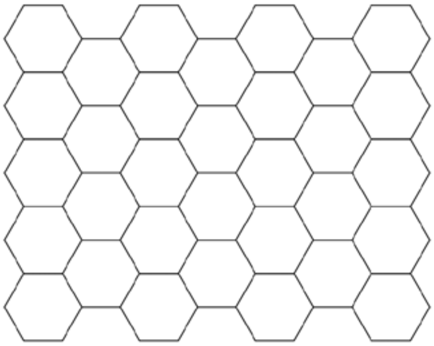


Figura 4. Divisão do plano em hexágonos regulares.

empenhou-se em conseguir fazer com que a sua demonstração fosse analisada por *software* que estuda demonstrações, a fim de obter um grau de certeza superior. E conseguiu fazer isso! O resultado foi um artigo com 21 autores, publicado em 2017; veja-se [6].

Convém deixar claro que este uso de computadores não tem nada a ver com os usos de computadores aos quais já tinha sido feita referência nesta rubrica (em [9]). Nesta demonstração formal, os computadores foram empregues para verificar a própria demonstração e não para fazer cálculos.

Regressando atrás no tempo, é interessante ver o que Hales escreveu (em [5]) sobre o resultado de Gauss segundo o qual a conjetura de Kepler é válida quando os centros das esferas estão distribuídos de uma maneira regular:

> O nome "Gauss" confere um prestígio imerecido a este resultado elementar. A demonstração ocupa poucas linhas e não exige quaisquer cálculos.

Esta demonstração faz de Thomas C. Hales um dos poucos matemáticos que conseguiram resolver um problema com séculos. Acontece que foi a segunda vez na sua carreira que ele fez isso. Em 2001, publicou (veja-se [3]) a demonstração da conjetura do favo de mel, que é a seguinte: se fixarmos uma área, de todas as maneiras de dividir o plano em regiões com a área dada, a divisão em hexágonos regulares (como na figura 4) é aquela que tem o menor perímetro. Ou seja, as abelhas têm um excelente motivo para fazer os favos de mel com forma hexagonal: poupar cera. Já no século I a.C. Marcus Terentius Varro tinha levantado o problema de saber porque é que as abelhas fazem os favos desta maneira (ele conjeturou que estaria ligado ao facto de terem seis patas). E László Fejes Tóth demonstrou, em 1943, que, se se acrescentar a hipótese de que cada região é um polígono convexo, então a melhor opção é precisamente fazer aquilo que as abelhas fazem. E, tal como viria a acontecer com a conjetura de Kepler, Hales levou mais longe as ideias de László Fejes Tóth e conseguiu demonstrar a conjetura no caso geral.

REFERÊNCIAS

[1] Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2000

[2] Thomas C. Hales, "The Status of the Kepler Conjecture", *The Mathematical Intelligencer* **16** (3), pp. 47-58, 1994

[3] Thomas C. Hales, "The Honeycomb Conjecture", *Discrete & Computational Geometry* **25**, pp. 1-22, 2001

[4] Thomas C. Hales, "A proof of the Kepler conjecture", *Annals of Mathematics* **162**, pp. 1065-1185, 2005

[5] Thomas C. Hales, "Cannonballs and Honeycombs", *Notices of the American Mathematical Society* **47** (4), pp. 440-449 **162**, pp. 1065-1185, 2005

[6] T. C. Hales, M. Adams, G. Bauer *et al*, "A Formal Proof of the Kepler Conjecture", *Forum of Mathematics, Pi*, **5**, E2, 2017

[7] Wu-Yi Hsiang, "On the Sphere Packing Problem and the Proof of Kepler's Conjecture", *International Journal of Mathematics* **4** (5), pp. 739-831, 1993

[8] Jeffrey C. Lagarias, *The Kepler Conjecture and its Proof*. In: Jeffrey C. Lagarias (ed.) *The Kepler Conjecture*, Springer-Verlag, pp.3-26, 2011

[9] José Carlos Santos, "Demonstrações com uso de computadores", Gazeta de Matemática **181**, pp. 30–32, 2017

[10] George G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, John Wiley & Sons, 2003

[3] Jennifer Bails, *Thomas Hales: The Proof of the Proof, https://pittsburghquarterly.com/articles/thomas-hales-the-proof-of-the-proof/*

Flora Ferreira
Centro de Matemática da Universidade do Minho
fjferreira@math.uminho.pt

Wolfram Erlhagen
Centro de Matemática da Universidade do Minho
wolfram.erlhagen@math.uminho.pt

MODELO MATEMÁTICO QUE DOTA OS ROBÔS COM A CAPACIDADE DE APRENDER SEQUÊNCIAS TEMPORAIS

Robôs, capazes de aprender sequências sobre o que fazer e quando, possibilitam uma interação e colaboração humano-robô mais flexíveis e naturais. Neste artigo, apresenta-se, de forma resumida, um modelo matemático baseado em campos dinâmicos neuronais, que implementa mecanismos de processamento neurologicamente plausíveis, auxiliando na aquisição eficiente e na reprodução flexível de sequências com restrições de tempo. Apresentam-se algumas experiências de robótica em que o modelo foi implementado, tais como a aprendizagem de uma sequência musical e a aprendizagem de sequências num contexto de colaboração humano-robô numa tarefa de montagem de um objeto.

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

Muitas das nossas atividades diárias são sequenciais, em que os eventos devem ser realizados numa determinada ordem e num determinado tempo. A capacidade de adquirir sensibilidade sobre regularidades ordinais e temporais é fundamental para uma interação humano-humano ou humano-robô, que seja fluente e eficiente. Neste artigo, apresentamos um modelo matemático baseado em campos dinâmicos neuronais que permite a aquisição e a reprodução de uma sequência de eventos com restrições de tempo. Os campos dinâmicos neuronais (*dynamic neural fields*) foram introduzidos na década de 1970 por Wilson e Cowan [7] e Amari [1], como um modelo matemático da formação de padrões de atividade no tecido neuronal. Os modelos baseados em campos dinâmicos neuronais são cada vez mais usados, uma vez que descrevem a atividade de populações de neurónios, tal como ela é observada no cérebro e, simultaneamente, permitem um tratamento matemático rigoroso da atividade neuronal [2].

A atividade neuronal é descrita pela seguinte equação integro-diferencial não linear proposta por Amari [1]:

$$\tau\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \int_\Omega w(|x-y|)f\left(u(y,t)\right)\mathrm{d}y + h + S(x,t). \tag{1.1}$$

Esta equação descreve a atividade neuronal numa única camada de neurónios interconetados (campo neuronal) ao longo de um domínio finito Ω unidimensional. A função $u(x,t)$ representa a atividade no momento $t \in \mathbb{R}_0^+$ do neurónio representado pela posição $x \in \mathbb{R}$. A função $S(x,t)$ representa um estímulo externo, variável no tempo, como, por exemplo, uma informação visual. A constante $h < 0$ determina o nível de repouso para o qual a atividade neuronal converge, na ausência de estimulação externa. A constante $\tau > 0$ define a escala de tempo da dinâmica de campo. A função $f(u)$ representa a taxa de disparo ou probabilidade de disparo em função de u. No modelo de Amari, assim como no modelo que será apresentado neste artigo, a função $f(u)$ é considerada como sendo a função de Heaviside (também denominada função degrau unitário), e assim um neurónio pode estar ativo ou inativo. Esta função representa uma simplificação do disparo neuronal real que normalmente mostra um aumento gradual da taxa de disparo com o aumento de u. A função $w(|x-y|)$ define a força de conetividade entre quaisquer dois neurónios no campo que se supõe depender da distância euclidiana.

A ideia central dos modelos baseados em campos dinâmicos neuronais é que as informações relevantes para uma tarefa são expressas por saliências supralimiares de populações neuronais, onde cada saliência representa uma ação ou subtarefa específica. A entrada de estímulos externos, como, por exemplo, uma informação visual, causa a ativação das populações correspondentes, que poderão permanecer ativas mesmo depois de o estímulo externo ficar inativo, devido a interações excitatórias e inibitórias recorrentes nas populações. Dependendo das funções de conetividade que controlam as interações entre os neurónios, diferentes padrões de ativação podem ser formados no campo neuronal em resposta aos estímulos externos. Amari [1] estudou a existência e estabilidade de uma região localmente excitada (um pico) para a função de conetividade do tipo inibição lateral:

$$w_{lat}(x) = w_{exc} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{exc}^2}\right)} - w_{inh}, \qquad (1.2)$$

onde w_{exc} e σ_{exc} definem, respetivamente, a amplitude e o desvio padrão (em relação a $x=0$), e w_{inh} define a inibição, que se considera constante, para neurónios distantes.

Pensando na aprendizagem de sequências, em que os estímulos externos pontuais, são apresentados de forma sequencial, a função (1.2) é adequada quando se pretende que exista, no máximo, um pico em cada momento. Pelo contrário, caso se pretenda que sejam geradas múltiplas regiões localmente excitadas (multipicos) em resposta a estímulos sequenciais, a seguinte função de conetividade será a mais apropriada [4]:

$$w_{osc}(x) = Ae^{-b|x|}\left(b \operatorname{sen}|\alpha x| + \cos(\alpha x)\right), \qquad (1.3)$$

onde $b > 0$ determina a taxa segundo a qual as oscilações de w decaem com a distância, e $A > 0$ e $0 < \alpha \le 1$ controlam a amplitude e a distância entre os zeros de w_{osc}, respetivamente.

Consideremos, por exemplo, dois estímulos externos representados por

$$S_i(x) = 14e^{\frac{(x-c_i)^2}{18}} - 0.5$$

para $i \in \{1,2\}$, com $c_1 = 45$ e $c_2 = 60$. Consideremos que $S(x,t) = S_1(x)$ para $t \in [0,t_1]$, $S(x,t) = S_2(x)$ para $t \in]t_2,t_3]$ e $S(x) = 0$ para $t \in]t_1,t_2] \cup]t_3,t_4]$. Na figura 1,

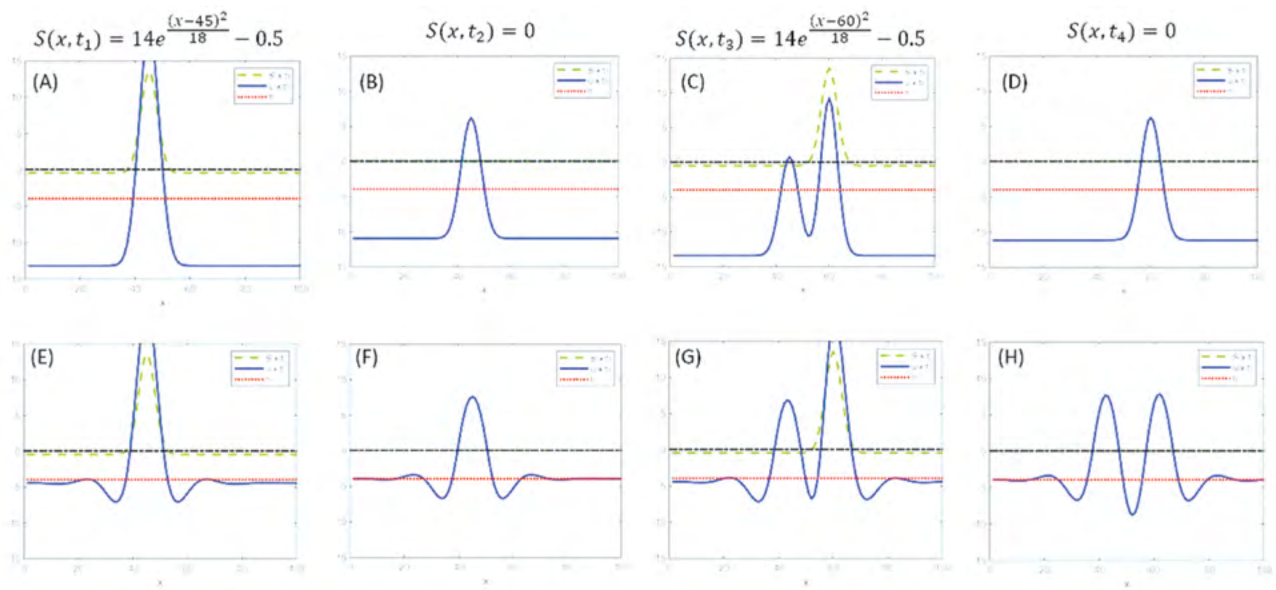


Figura 1. Atividade u (linha a cheio azul) com $h = -4$, em resposta a dois estímulos externos *S(x)* (linha tracejada a verde) apresentados de forma sequencial, para a função de conetividade w definida por (1.2), com $w_{exc} = 3$, $\sigma_{exc} = 3$ e $w_{inh} = 1$ nos diagramas (A)-(D), e definida por (1.3), com $A = 3$, $b = 0.15$ e $\alpha = 0.3$ nos diagramas (E)-(H).

podemos ver os padrões de ativação gerados num campo neuronal unidimensional em resposta a estes dois estímulos, sendo a função de conetividade w dada por (1.2) nos diagramas (A)-(D), com $w_{exc} = 3$, $\sigma_{exc} = 3$ e $w_{inh} = 1$, e dada por (1.3) nos diagramas (E)-(H), com $A = 3$, $b = 0.15$ e $\alpha = 0.3$. Para ambas as funções de conetividade, foi gerado um pico estável em resposta ao primeiro estímulo, tanto na presença do estímulo (figura 1 (A) e (E)), como depois de o estímulo ficar inativo (figura 1 (B) e (F)). Podemos observar que os padrões gerados em resposta aos dois estímulos externos são diferentes. Para a função w dada por (1.2), o pico existente no momento $t = t_2$ foi inibido na presença do segundo estímulo externo (figura 1 (C)) e um novo pico foi gerado em correspondência do segundo estímulo (figura 1 (D)). Para a função w dada por (1.3), um segundo pico foi gerado sem que o pico já existente fosse removido (figura 1 (G) e (H)).

Os estudos analíticos e numéricos sobre as condições necessárias e suficientes para a existência e a estabilidade de diferentes tipos de padrões em campos dinâmicos neuronais, nomeadamente a existência e a estabilidade de um pico usando a função de conetividade (1.2) [1] e a existência e a estabilidade de multipicos em termos da função de conetividade (1.3) [4] permitem perceber melhor como se pode obter os padrões desejados. Tendo como base os estudos analíticos e numéricos sobre a existência e a estabilidade, incluindo [1, 4], foi elaborado um novo modelo de aprendizagem de sequências de eventos que é brevemente apresentado na próxima secção. O modelo foi testado em diferentes experimentos de robótica em tempo real, incluindo a aprendizagem de uma sequência musical e a aprendizagem de uma sequência de montagem de um objeto. Primeiro, o robô adquire conhecimento sobre os aspetos ordinais e temporais de tarefas sequenciais por observação de demonstrações executadas por um humano e, posteriormente, reproduz as informações retidas na memória. Na Secção 3 são apresentadas algumas aplicações robóticas em que o modelo foi implementado.

2. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático desenvolvido para memorizar e recuperar a ordem e o tempo relativo de um conjunto de eventos consiste num sistema acoplado de cinco campos dinâmicos neuronais ilustrados na figura 2. Cada campo neuronal tem uma funcionalidade específica, sendo a sua dinâmica descrita através de uma equação do tipo (1.1).

Para melhor se entender o modelo, é útil pensar num exemplo concreto de robótica. Consideremos a experiência em que o robô aprende a tocar uma música num teclado em que cada tecla está representada por uma cor. O estímulo visual é uma cor e cada cor está associada a um intervalo de valores de x. Em resposta ao estímulo visual localizado, $S(x)$, um pico estável no campo de perceção u_P é gerado. Através das conexões excitatórias, um pico no local correspondente do campo de memória de sequência u_M é criado e o campo de traço da memória u_{MT} recebe o padrão de ativação de u_M como estímulo excitatório durante as sucessivas demonstrações da sequência. A conexão inibitória de u_M para u_P garante que, se uma cor for usada como estímulo mais do que uma vez, as representações locais (picos) dessa cor sejam representadas em locais diferentes, dentro do intervalo de valores de x que correspondem a essa cor. Dito de outro modo, permite a representação de eventos repetidos.

No final do processo de aprendizagem da sequência, a memória da ordem e do tempo relativo entre os eventos está representada no campo u_M como uma configuração multi-picos, em que a força de ativação é decrescente de

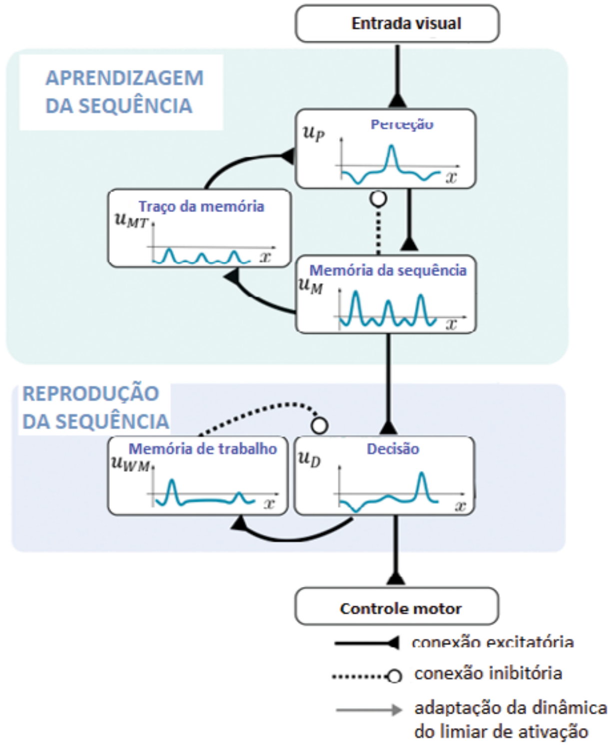


Figura 2. Esquema geral do modelo matemático baseado em campos dinâmicos neuronais, que implementa a aprendizagem e reprodução de sequências.

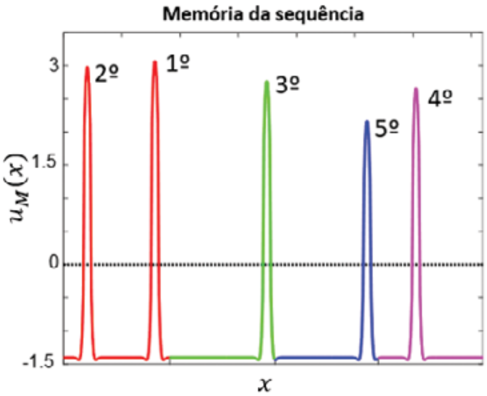


Figura 3. Padrão de ativação estável correspondente à memória de uma sequência onde a ordem das cores está representada na amplitude dos picos (vermelho-vermelho--verde-rosa-azul).

pico para pico em função do tempo decorrido desde o início da sequência. Veja-se o exemplo, ilustrado na figura 3.

Para se obter em u_M uma configuração multipicos com amplitudes diferentes, representando a ordem e o tempo relativo dos eventos, considerou-se que o nível de repouso h, em vez de uma constante, é uma função dependente do tempo e do valor de x, digamos $h_M(x,t)$, descrita pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial h_M(x,t)}{\partial t} = \beta_M f(u_M(x,t)) + \\ + [1 - f(u_M(x,t))][-h_M(x,t) + h_{M_0}], \tag{2.1}$$

onde $f(u)$ é a função Heaviside, $h_{M_0} < 0$ define o nível de repouso para o qual h_M converge sem ativação acima do nível 0 na posição x ($f(u(x,t)) = 0$), e $\beta_M > 0$ define a taxa de ativação nas posições x onde a atividade está acima de 0 ($f(u(x,t)) = 1$).

No campo da decisão u_D, o valor do nível de repouso h_D depende também do tempo, sendo descrito por:

$$\frac{\mathrm{d}h_D(t)}{\mathrm{d}t} = \beta_D, \quad h_D(t_0) = h_{D_0} < 0, \tag{2.2}$$

onde β_D controla a taxa de crescimento de h_D. O campo da decisão u_D recebe como entrada abaixo do nível 0 o padrão obtido no campo u_M. Durante a execução da sequência, o nível de repouso $h_D(t)$ no campo u_D aproxima cada um dos picos representados em u_M do nível 0 desencadeando a sua ativação de forma sequencial. As conexões inibitórias excitatórias entre populações associadas no campo de decisão u_D e o campo de memória de trabalho u_{WM} garantem que o pico que representa a última decisão seja primeiro armazenado no campo u_{WM} e posteriormente suprimido. Tomando diferentes valores de β_D, é possível executar a sequência com diferentes velocidades de execução, mas preservando o tempo relativo entre os eventos. Por exemplo, se aumentarmos o valor de β_D no exemplo do piano, é possível reproduzir a sequência musical mais rapidamente, mas preservando o ritmo.

Para mais detalhes, consulte a referência [6]. Uma extensão do modelo base aqui apresentado, em que, além da ordem e do tempo entre os eventos, a duração total da sequência e a duração de cada evento são codificados, é estudada na referência [6].

3. APLICAÇÕES REAIS

Para ilustrar o funcionamento do modelo aqui brevemente apresentado em experiências robóticas em tempo real, usamos dois robôs: o robô humanoide ARoS, construído no Laboratório de Robótica Móvel e Antropomórfica da Universidade do Minho, e o robô Sawyer, projetado pela empresa Rethink Robotics. O "corpo" do ARoS consiste numa estrutura metálica de suporte, na qual dois braços robóticos com três dedos e um sistema de câmara estéreo com uma unidade pan-tilt estão conectados. Sawyer possui um braço robótico de sete graus de liberdade com alcance de 1,26 metros, e a sua "cabeça" é um display LCD que fica no topo. Sawyer exibe diferentes movimentos dos olhos de uma forma familiar, o que contribui para o seu design amigável. O Sawyer é equipado com duas câmaras, uma localizada na cabeça e outra no braço.

3.1. O robô ARoS aprende a tocar uma sequência musical

Nesta experiência, o ARoS aprende uma curta sequência musical, a partir da observação de algumas demonstrações executadas por um humano e, posteriormente, reproduz, num teclado, a sequência aprendida, usando as suas duas mãos de três dedos (ver figura 4). Usamos, para as demonstrações, um display com as notas codificadas por cores. Sempre que o professor humano toca numa tecla, além do som produzido é também ativado um quadrado colorido que corresponde à nota tocada na tela do computador (por exemplo, sempre que a nota D é tocada, o quadrado com cor verde é ativado no display como representado na figura 4). Como exemplo de uma sequência musical facilmente reconhecível, selecionamos a primeira parte da melodia de Parabéns a você (C-C-D-C-F-E-C-C--D-C-G-F). Na maioria das experiências, o robô foi capaz

Figura 4. Configuração experimental: o robô ARoS a aprender a tocar uma melodia num teclado.

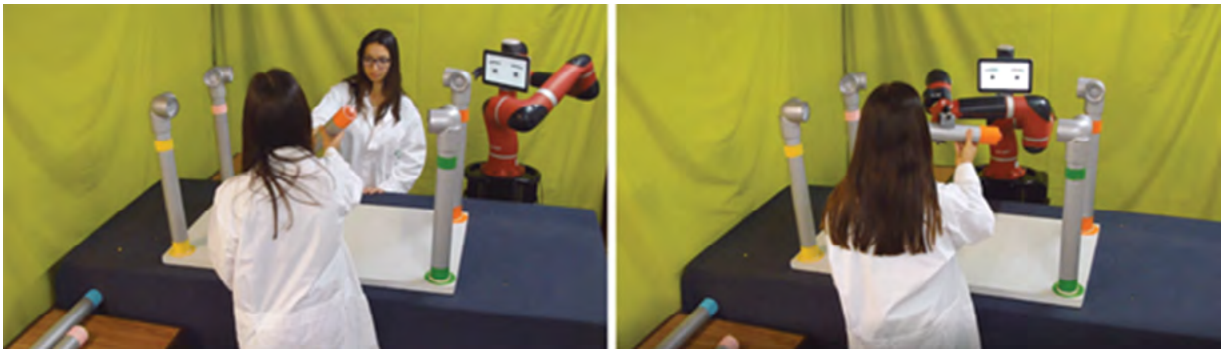


Figura 5. Na figura à esquerda, durante a aprendizagem, o robô Sawyer observa o tutor humano a entregar uma série de tubos numa ordem específica ao parceiro humano. Na figura à direita, durante a reprodução da sequência, o robô Sawyer entrega o tubo correto no momento certo ao parceiro humano.

de reproduzir a melodia após quatro demonstrações, apenas. Para mais detalhes, consultar a referência [5].

3.2. Montar uma estrutura com o robô Sawyer

Nesta experiência, o robô Sawyer aprende uma sequência de objetos que deve passar ao parceiro humano num determinado momento, na montagem de uma estrutura (ver figura 5). A estrutura é composta por oito tubos, em que quatro deles se encontram no espaço de trabalho do robô no início da tarefa. Primeiro, um tutor humano demonstra a sequência de entrega dos tubos, enquanto o Sawyer observa e memoriza. O estímulo externo é representado pela cor do tubo, e é codificado pelo robô no momento da entrega (os dois humanos tocam simultaneamente no tubo). Após a demonstração, o robô reproduz a sequência de transferência de quatro objetos. De notar que, nesta tarefa, a aprendizagem do tempo entre os momentos de passagem permitiu que o robô e o parceiro humano executassem a tarefa de forma sincronizada.

Além desta experiência, o modelo aqui apresentado mostrou também bons resultados quando a tarefa consistiu na aprendizagem da sequência completa de montagem da estrutura identificando corretamente qual o tubo e quando o inserir, para tutores humanos com preferências diferentes, quer quanto à ordem sequencial quer quanto às escalas de tempo comportamentais na realização da tarefa [3].

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo, apresentámos de forma resumida um modelo baseado em campos dinâmicos neuronais, que permite dotar um robô com a capacidade de aprender por observação, de forma rápida, as propriedades ordinais e intervalares de sequências. Ter um robô capaz de aprender por observação é considerado altamente atraente, pois permite, em princípio, que um usuário normal ensine novas tarefas a um robô de maneira intuitiva e simples. Por outro lado, um robô colaborativo, com capacidade de cognição temporal, tende a proporcionar uma interação humano-robô mais suave e natural. Acreditamos que modelos matemáticos que se inspiram no mecanismo de processamento neuronal em humanos ou em animais, como o modelo aqui apresentado, oferecem princípios de processamento chave que podem orientar o desenvolvimento de uma nova geração de robôs cognitivos. A possibilidade de analisar e compreender matematicamente o processo de formação de padrões nos campos dinâmicos neuronais é um pré-requisito fundamental para a conceção de arquiteturas de controlo de robôs complexos que funcionam em aplicações no mundo real.

Parte das experiências robóticas aqui apresentadas, assim como outras em que a matemática tem um papel fundamental, podem ser visualizadas em *https://youtu.be/L6CiwiUQYbg*.

REFERÊNCIAS

[1] Amari, S. I., "Dynamics of Pattern Formation in Lateral-Inhibition Type Neural Fields". *Biological cybernetics*, 27(2), 77-87, 1977.

[2] Coombes, S., beim Graben, P., Potthast, R., Wright, J. (Eds.), *Neural fields: theory and applications*. Springer, 2014

[3] Cunha, A., Ferreira, F., Erlhagen, W., Sousa, E., Louro, L., Vicente, P., Monteiro, S., Bicho, E., *Towards Endowing Collaborative Robots with Fast Learning for Minimizing Tutors' Demonstrations: What and When yo Do?* In Iberian Robotics conference, Springer, Cham, 368-378, 2019.

[4] Ferreira, F., Erlhagen, W., Bicho, E., *Multi-Bump Solutions in a Neural Field Model with External Inputs.* Physica D: Nonlinear Phenomena, 326, 32-51, 2016.

[5] Ferreira, F., Erlhagen, W., Sousa, E., Louro, L., Bicho, E., "Learning a Musical Sequence by Observation: a Robotics Implementation of a Dynamic Neural Field Model". *In 4th International Conference on Development and Learning and on Epigenetic Robotics, IEEE*, 157-162, 2014.

[6] Ferreira, F., Wojtak, W., Sousa, E., Louro, L., Bicho, E., Erlhagen, W., "Rapid Learning of Complex Sequences with Time Constraints: a Dynamic Neural Field Model". *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*, 853-864, 2020.

[7] Wilson, H. R., Cowan, J. D., *A Mathematical Theory of The Functional Dynamics of Cortical and Thalamic Nervous Tissue.* Kybernetik, 13(2),55-80, 1973.

SOBRE OS AUTORES

Flora Ferreira é atualmente professora auxiliar convidada do Departamento de Matemática e membro do Centro de Matemática da Universidade do Minho. Exerce também funções de analista de dados na empresa BERD (Bridge Engineering Research & Design). Os seus interesses de investigação incluem Teoria dos Campos Dinâmicos e análise de dados que são fortemente impulsionados por questões práticas e colaborações multidisciplinares.

Wolfram Erlhagen é formado em Matemática Aplicada pelas Universidades de Bona e Bochum, Alemanha. Atualmente é Professor Associado do Departamento de Matemática e membro do Centro de Matemática da Universidade do Minho. O seu principal interesse de investigação é a Teoria dos Campos Dinâmicos e as suas aplicações em Neurociência e Robótica Cognitiva, que desenvolve em estreita cooperação com colegas das áreas aplicadas.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação *pt-maths-in@spm.pt*

Manuel Xavier
CIUHCT – FCUL
mbarxavier@gmail.com

FALTA DE DINHEIRO E PERSEGUIÇÃO POLÍTICA: AS FRACAS RAZÕES DO ATRASO DA MATEMÁTICA PORTUGUESA

Falta de dinheiro e perseguição política: duas razões habituais para justificar os fracassos da matemática portuguesa durante o século XX. O que diziam, contudo, os matemáticos portugueses durante a ditadura? E que influência tiveram as afiliações políticas na opinião dos mesmos? Como procurarei mostrar, não são apenas as externalidades como a falta de financiamento ou a PIDE que justificam a subalternidade científica portuguesa neste período, mas também a resistência à mudança por parte da própria corporação universitária.

Quando olhamos para o passado científico português, em particular para a matemática, à parte um ou outro nome sonante, deparamos com a inexistência de tradições de investigação científica duradouras. Há duas razões para normalmente justificar este facto.

A primeira é a falta de dinheiro. Os sucessivos governos portugueses não investiam na ciência, na indústria ou nos laboratórios universitários. O mecenato científico era praticamente inexistente. As instalações tornavam-se obsoletas e não se atualizavam. É verdade que a ciência no nosso país sofre de um subfinanciamento crónico, mas houve quem argumentasse que se podia fazer mais com o pouco que se tinha. Foquemo-nos no século xx, durante o período de ditadura. Em 1930, num artigo de jornal, o matemático e professor da Universidade de Coimbra José Vicente Gonçalves (1896-1985) escreveu:

> *Não faltam explicações para a insuficiência da nossa produção científica: condições económicas dos professores, pobreza dos laboratórios, má preparação dos alunos dos liceus, etc. Fracas razões. Que produziram os professores de ensino durante o tempo em que se consideraram suficientemente remunerados? Quais foram, nesse período, os frutos da cultura universitária portuguesa no domínio das ciências puras ou aplicadas? E acaso não temos alguns liceus modelares, com admirável corpo docente?*
> *[…] A grande massa é cética, não luta. Cumpre, cumpre burocraticamente, quando de desejar seria que servisse com dedicação. Um professor não deve ser julgado apenas pelo que deixa de fazer. Quando não dê aos seus alunos bons exemplos de civismo e de trabalho, e se limite, sem qualquer originalidade ou relevo intelectual, a ensinar as mesmas coisas durante 30 ou 40 anos – é um mau professor, é um péssimo educador. E, infelizmente, anda muito generalizada a ideia de que às universidades incumbe sobretudo a divulgação da ciência feita (lá fora, já se vê…).*
> *É preciso reformar esta mentalidade!*[1]

[1] José Vicente Gonçalves, "Males do Ensino Superior," *O Primeiro de Janeiro*, 16 de abril de 1930.

Vicente Gonçalves focava-se, assim, numa questão de mentalidade, referindo-se às restantes explicações como "fracas razões". Um outro conhecido matemático concordaria com ele. Trata-se de Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958), professor do Instituto Superior Técnico (IST) e do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras (ISCEF). Mira Fernandes correspondia com o matemático Tullio Levi-Civita (1873-1941) e à data já tinha publicações reconhecidas internacionalmente. Foi também figura tutelar de Ruy Luís Gomes (1905-1984), professor catedrático e matemático na Universidade do Porto e futuro diretor do centro de estudos de matemática anexo a essa universidade. Mira, em carta ao seu colega, mostrou-se agradado com a análise, referindo que "desculpas são de mau pagador" e acrescentando:

> *A crise é, sobretudo, de pessoal. Oh! Se é! Nisto concorda a nossa devoção, o nosso sacerdócio (e o nosso individualismo, bem entendido). Havia grande conveniência, para começar a reforma, em demitir todo o professorado, sem exceção nenhuma.*[2]

Assim, matemáticos conceituados identificavam a mentalidade da própria corporação universitária como uma das causas da subalternidade científica do País. Relevante será dizer que ambos foram homens politicamente neutros, ao contrário de outros jovens investigadores envolvidos no Movimento Matemático, que estava para despontar.[3] No entanto, a sua análise era muito semelhante à dos matemáticos com simpatias mais à esquerda, o que sugere que a crítica podia transcender os espetros políticos.

Vejamos, por exemplo, o que o jovem António Aniceto Monteiro (1907-1980), doutorado em Paris sob a orientação de Maurice Fréchet (1878-1973) e o grande impulsionador do Movimento Matemático em Portugal, escreveu nesta mesma revista, em 1942:

> *[…] não devemos ter ilusões de espécie alguma sobre as dificuldades que nos esperam! Há que contar – isto é de todos os tempos! – com um recrudescimento da hostilidade, da ignorância e da má-fé; da hostilidade daqueles para quem a estagnação ou a decadência da nossa cultura matemática é a condição necessária para a realização de objetivos que nada têm que ver com as ciências matemáticas, daqueles que tremem perante a ideia da existência de uma juventude estudiosa consagrando inteiramente a sua vida e o seu entusiasmo a uma causa pela qual eles nunca lutaram […]*[4]

▸ Figura 1. Em 1942, o conceituado matemático francês Maurice Fréchet veio a Portugal realizar um conjunto de conferências na Faculdade de Ciências de Lisboa, a convite do seu discípulo António Monteiro. Segundo Monteiro, não "havia na assistência um único professor ou assistente de Matemática da Faculdade". [1] Na foto, vários elementos do Movimento Matemático na Escola Politécnica, a maioria bolseiros da JEN (da esquerda para a direita): Hugo Ribeiro, Armando Gibert, António Aniceto Monteiro, Manuel Zaluar Nunes, Bento de Jesus Caraça, Maurice Fréchet, José Sebastião e Silva, Ruy Luís Gomes, José Ribeiro de Albuquerque, Augusto Sá da Costa. Janeiro ou fevereiro de 1942. Agradecimentos a Jorge Rezende pela disponibilização da fotografia.

[1]: Carta de António Monteiro a Abel Salazar, 1942, Espólio Abel Salazar, Casa-Museu Abel Salazar.

Monteiro, um homem de simpatias à esquerda, focava-se, também, numa questão de mentalidade. Importante será dizer que, a esta data, a investigação científica ganhava ímpeto nos recentemente fundados centros de estudo anexos às universidades, criados pela Junta de Educação Nacional (JEN). A fundação desta primeira instituição de política de ciência, em 1929, é um marco da maior importância na história da organização científica portuguesa; numa primeira aproximação, podemos considerá-la a instituição-mãe da atual Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT). Quase todos os jovens matemáticos envolvidos no Movimento Matemático foram bolseiros desta instituição. O aparecimento da JEN acabou por espoletar tensões entre a universidade enquanto espaço de reprodução de saberes e os centros enquanto espaços de criação de conhecimento[5] – tensões que ainda hoje podemos, aliás, reconhecer nas unidades de investigação do País.

Note-se que Monteiro se referia a dificuldades "de todos os tempos", isto é, à resistência à mudança intemporal que o conservadorismo de qualquer tipo impõe por necessidade. Por isso, a questão é mais complexa do que reduzir as suas palavras a uma crítica ao fascismo ou à ditadura, apesar de haver quem as interprete dessa maneira.[6] Chegamos pois à segunda razão habitual para justificar os insucessos científicos do nosso país: a ditadura e a perseguição política.

Embora se reconheça que o ideal seja fazer ciência em tempos de liberdade democrática, a historiografia das ciências recente tem desmistificado a ideia de que as ditaduras fascistas ou comunistas eram necessariamente incompatíveis com a ciência.[7] O fascismo espanhol, italiano ou

alemão não impediu o surgimento de cientistas e escolas de investigação importantes; a Rússia comunista gerou provavelmente a melhor escola de matemática do século XX. Mesmo em Portugal, foi já no período de ditadura, com António de Oliveira Salazar (1889-1970) na pasta das Finanças e Gustavo Cordeiro Ramos (1888-1974), germanófilo, na pasta da Educação, que foi criada a JEN, em 1929. Mais do que isso, tal como demonstrado pelo historiador das ciências Quintino Lopes, nos seus primeiros anos, a JEN teve em média uma percentagem da dotação orçamental ligeiramente superior à da sua congénere espanhola – a *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas*. Como Lopes escreve, este facto "complexifica a realidade usualmente sugerida".[8]

Quanto à repressão, há que relembrar, com efeito, que o Estado Novo levou a cabo várias purgas de professores que considerou elementos subversivos, em particular em 1935 e em 1947. Estes foram rudes golpes para os grupos de investigação científica em ambiente universitário, que se iam formando a essa data. No entanto, sabemos hoje que as universidades tiveram um papel ativo e não apenas passivo no espoletar destas demissões. Nos bas-

[2] Carta de Aureliano de Mira Fernandes a José Vicente Gonçalves, 31 de maio de 1930, em Cecília Costa, "Sobre a correspondência epistolar de A. Mira Fernandes a matemáticos portugueses", *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n.o especial, *Actas do Colóquio do cinquentenário da morte de Aureliano de Mira Fernandes* (2008): 89-124.

[3] Não cabendo neste pequeno artigo referir toda a literatura existente sobre o assunto, ver, por exemplo: Ilda Perez e J. M. Mascaranhas, eds., *Movimento Matemático*, 1937-1947 (Lisboa: C.M.L.; Museu República e Resistência; SPM, 1997); Jorge Rezende, Luiz Monteiro e Elza Amaral, eds., *António Aniceto Monteiro: Uma Fotobiografia a Várias Vozes* (Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2007); Luís Saraiva, "A Década Prodigiosa da Matemática Portuguesa: Os Começos da Sociedade Portuguesa de Matemática (1936-1945)", *Revista Brasileira de História da Matemática* 11, n.o 23 (2011): 73-98.

[4] António Monteiro, "Movimento Matemático," *Gazeta de Matemática*, n.º 10 (1942): 26.

[5] Ver Ângela Salgueiro, *Ciência e Universidade na I República* (Casal de Cambra: Caleidoscópio, 2018), pt. II.

[6] Por exemplo, Jorge Rezende, "Sobre as perseguições a cientistas durante o fascismo", *Vértice*, II, n.o 166 (2013): 59-89.

[7] Ver, por exemplo, o volume 3 do *Journal of History of Science and Technology* (HoST), dedicado às relações entre fascismo e ciência: HoST, *The Fascistization of Science*, 2009.

[8] Quintino Lopes, "A Junta de Educação Nacional (1929/36): Traços de Europeização na Investigação Científica em Portugal" (Tese de doutoramento, Universidade de Évora, 2017), 42.

tidores, os académicos mais conservadores acusavam os professores-investigadores mais críticos e ativos de terem ideias subversivas, como forma de sabotarem os seus trabalhos. Entre o *status quo* abundavam professores de saberes enciclopédicos, de conhecimentos ultrapassados e que encaravam o doutorado não como um especialista mas como um superlicenciado.[9]

Quem sofreu particularmente com este ambiente de difamação e intriga, para o qual o Estado Novo naturalmente contribuiu, foi o movimento matemático português. Servindo esta interpretação histórica, está uma entrevista que o matemático Alfredo Pereira Gomes (1919-2006) deu depois do 25 de Abril. Pereira Gomes envolveu-se com o movimento matemático a partir do Porto, por intermédio de Luís Gomes e António Monteiro. Comentando o trabalho científico em equipa nos tempos do Estado Novo, disse:

> *"As dificuldades eram muitas, mas não era a PIDE. A PIDE era perigosa, mas era para certas coisas. [Pelo contrário], as dificuldades e as obstruções para uma atividade progressista neste sentido eram os oficiais do mesmo ofício. Uns por inveja, outros por inépcia […] Havia por exemplo a dificuldade em encontrar uma sala na Faculdade de Ciências do Porto ou no Instituto Superior Técnico. Os mandões não davam sala para essa gente. É surpreendente, não é? Havia salas às moscas! Não davam para se fazerem seminários, para se fazerem reuniões. E foram esses mesmos que depois denunciaram as pessoas ativas como tendo ideias subversivas."*[10]

Estas palavras mais convincentes se tornam se relembrarmos que este matemático foi militante comunista, irmão de Soeiro Pereira Gomes (1909-1949), este último dirigente do Partido Comunista Português (PCP) durante os anos 40. Não tinha, portanto, qualquer afinidade pelo regime, pelo contrário. Os "oficiais do mesmo ofício" e os "mandões" a que Pereira Gomes se referia eram, pois, os professores mais conservadores. À cabeça, temos por exemplo Victor Hugo Duarte de Lemos (1894-1959), professor de Matemática e diretor da Faculdade de Ciências de Lisboa (FCUL) entre 1932 e 1944. Apesar de Lemos se envolver com o Movimento Matemático, chegando inclusive a ser vice-presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática e assinando até um documento que defendia a reintegração de Monteiro quando lhe foi retirada a bolsa de que usufruía, a verdade é que tanto Lemos como a FCUL eram considerados pelos jovens matemáticos – em particular Monteiro e o seu discípulo Hugo Baptista Ribeiro (1910-1988) – os "inimigos número 1" da investigação e da matemática.[11] O matemático José Sebastião e Silva (1914-1972), parte deste grupo de jovens matemáticos e outro discípulo de Monteiro, queixava-se, em particular, da "má vontade da mestrança."[12] As aparências, pois, iludem.

Contribuindo ainda para complexificar as relações entre política e ciência neste período, há que dizer que o papel do PCP nem sempre foi alinhado com o progresso das ciências. Ressalve-se que a esquerda era, naturalmente, o símbolo da mudança e da renovação e que o PCP teve um papel importante inegável enquanto força agregadora entre estes jovens matemáticos. Relembre-se também que os elementos do Movimento Matemático se reuniam com Álvaro Cunhal (1913-2005) no jardim botânico da Escola Politécnica de Lisboa e participaram nos passeios no Tejo organizados por António Alves Redol (1911-1969), importantes para a reorganização do PCP na década de 40.[13]

Contudo, as forças oposicionistas tinham as suas agendas. Entre a luta surda, o ambiente tornava-se hostil ao trabalho continuado. Vejamos a entrevista que Maria do Pilar Ribeiro (1911-2011), professora de Matemática e esposa de Hugo Ribeiro, deu também depois do 25 de Abril. Sobre a perspetiva, durante a década de 40, de ser criado um instituto de matemática (que nunca chegou a existir), comentou:

> *"Não havia ambiente para trabalhar. O Instituto para a Alta Cultura [instituição sucessora da JEN] quis fazer um Instituto de Matemática. Depois, havia oposições. Não sei se do Salazar também. Mas havia gente nesse grupo que ia pertencer ao Instituto de Matemática, mais ligada à esquerda, que era contra o Salazar, gente ligada ao Partido Comunista, o Manuel Valadares e o José Morgado […] Esses trouxeram a notícia de que o Partido Comunista se opunha [ao Instituto], porque achava que isso era dar glória ao Salazar. Portanto, não havia nada a fazer. De maneira que havia oposição de um lado e oposição do outro."*[14]

Neste contexto, merece, por exemplo, ser mais bem estudado o papel de Bento de Jesus Caraça (1901-1948), que fez parte do Movimento Matemático e cuja importância enquanto professor, divulgador e mentor é inegável. No entanto, não era um investigador, como os próprios Monteiro ou Ribeiro reconheciam, e o intensificar do seu envolvimento político, em particular com o PCP, acabou, na opinião dos mesmos, por ter uma "influência perniciosa na juventude."[15] Relembremos que estas palavras eram escritas por dois jovens matemáticos que eram eles próprios parceiros de Caraça e que foram contra a ditadura. A História não se pode reduzir, pois, a análises a preto e branco.

Terá ficado claro que não devemos olhar apenas para externalidades como a falta de dinheiro ou a perseguição política para justificar alguns dos atrasos científicos portugueses. Mais do que isso, ao avaliar as relações entre política e ciência, não devemos cair na tentação de recorrer a dicotomias redutoras como "colaboracionistas *versus* antissituacionistas". Os atores históricos, precisamente por serem humanos, são complexos e cheios de contradições. Por fim, conhecendo melhor a história da organização científica portuguesa, podemos aproveitar para nos questionarmos: de quantas "fracas razões" continuamos, ainda hoje, a valer nas universidades, para justificar algumas das nossas faltas de qualidade e produção científicas?

[9] Ver, por exemplo, Ana Simões, "O ano 1947 e o Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisbo,," *Gazeta de Física* 34, n.º 2 (2011): 16-21

[10] *Alfredo Pereira Gomes*, DVD, vol. 1, 5 vols., Memória da Matemática, 2009.

[11] Carta de Hugo Ribeiro a Armando Gibert, 8 de setembro de 1942, espólio de Armando Gibert, Arquivo dos Museus da Universidade de Lisboa (AHMUL); Hugo Ribeiro a José da Silva Paulo, 14 de maio de 1944, espólio de Hugo Ribeiro na Biblioteca Nacional de Portugal (BNP).

[12] Carta de José Sebastião e Silva a Ruy Luís Gomes, 10 de agosto de 1942, espólio de Ruy Luís Gomes, Casa-Museu Abel Salazar.

[13] Ver, por exemplo, Augusto Fitas, "Os futuros cientistas e o seu compromentimento cívico: alguns episódios ilustrativos da resistência ao Estado Novo", em *Cultura Científica e Neo-realismo*, ed. Augusto Fitas (Lisboa: Edições Colibri, 2019), 227-52.

[14] *Maria do Pilar Ribeiro,* DVD, vol. 4, 5 vols., Memória da Matemática, 2009. À imagem de Monteiro para a matemática, Manuel Valadares (1904-1982) foi o grande impulsionador do desenvolvimento na investigação em física, no Laboratório de Física da Universidade de Lisboa (LFUL). Foi militante do PCP. José Morgado (1921-2003) era matemático e militante do mesmo partido.

[15] Carta de António Monteiro a Hugo Ribeiro, 29 de novembro de 1947, espólio de Hugo Ribeiro, BNP; carta de Hugo Ribeiro a Armando Gibert, 9 de julho de 1948, espólio de Armando Gibert, AHMUL.

SOBRE O AUTOR

Manuel Xavier, formado originalmente em Física, é investigador e bolseiro de doutoramento em História das Ciências na Universidade de Lisboa e membro do Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia (CIUHCT). A sua investigação centra-se nas relações entre ciência, universidades e política, durante o período do Estado Novo.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Pedro Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*

CAOS EM MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS SIR SAZONALMENTE FORÇADOS

Alexandre Rodrigues

Instituto Superior de Economia e Gestão da Univ. de Lisboa e Centro de Matemática da Univ. do Porto

alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Tendo como mote o trabalho [4], este texto descreve o modelo epidemiológico **SIR** (modificado) com a particularidade de que o parâmetro que modela a *taxa de infeção* apresenta variações sazonais. Descreve-se, de uma forma acessível, a dinâmica do modelo e enuncia-se que, sob certas condições, o fluxo associado pode exibir caos. A existência de caos nestes modelos tem consequências ligadas à impossibilidade de efetuar previsões precisas do número de infetados pela doença (ao longo do tempo). Os resultados analíticos obtidos são consistentes com a crença empírica de que sazonalidade intensa em modelos epidemiológicos induz maior erro nas previsões. No decorrer da exposição, explicitar-se-á a ideia geométrica da prova da existência de caos na dinâmica do modelo.

1. INTRODUÇÃO

A emergência de modelos matemáticos associados à epidemiologia trouxe uma importante contribuição para o combate a uma vasta gama de doenças como a SIDA, a tuberculose, a hepatite e, mais recentemente, a COVID-19 [5]. Vários modelos têm sido generalizados de diversas formas para decidir sobre medidas preventivas para conter a proliferação de doenças infecciosas.

O modelo SIR [8] é um dos modelos compartimentais mais simples e muitas equações diferenciais em contexto epidémico advêm desta forma básica. Assenta na divisão da população em três grupos de indivíduos (compartimentos): *Suscetíveis* (S), *Infetados* (I) e *Recuperados* (R), sendo razoavelmente preditivo no âmbito de doenças infecciosas transmitidas de humano para humano e em que a recuperação confere resistência como o sarampo, a parotidite e a rubéola [11]. Sob condições genéricas, sabe-se que o fluxo associado ao modelo SIR clássico possui um atrator global [7].

Embora o impacto da sazonalidade para modelar a evolução de algumas doenças específicas possa ser negligenciado, noutros casos esse impacto é extremamente importante e deve ser tido em conta no modelo. O estado atual da pesquisa indica evidências empíricas da presença das forças sazonais em modelos epidemiológicos, incluindo factores que influenciam a dinâmica da transmissão da doença ao longo do tempo, como o horário escolar ou de trabalho das populações sobre as quais recai o estudo, mudanças climáticas e ambientais, decisões políticas, entre outros [3]. A gripe sazonal é um exemplo paradigmático em que a sazonalidade desempenha um papel crucial na dinâmica pois há períodos do ano em que a incidência dessa gripe tem maior prevalência[1].

Em modelos matemáticos que incluem sazonalidade, os parâmetros são geralmente modulados através de funções periódicas [6, 7], que, naturalmente, adicionam maior complexidade aos modelos clássicos.

1.1. Estado da Arte em Modelos Periodicamente Perturbados

Em 2001, os autores de [7] analisaram um modelo SIR sazonalmente forçado direcionado para a evolução do sarampo e da rubéola e concluíram que a dinâmica das doenças em populações submetidas à sazonalidade é mais complexa. Em [2, 6] estuda-se a dinâmica de vários tipos de modelos aplicados à epidemiologia em que a taxa de transmissão de doenças é modulada através de uma função periódica. Em 2017, os autores de [1] procuraram compreender as consequências da sazonalidade em modelos epidemiológicos e mostraram, analiticamente, a existência de caos (ferraduras) sob a existência de sazonalidade na transmissão da doença, baixas taxas de natalidade e mortalidade, e elevadas taxas de recuperação.

1.2. Número Básico de Reprodução

O *número básico de reprodução*, denotado por $\mathcal{R}_0$, pode ser visto como um parâmetro destinado a quantificar a propagação da doença, estimando o *número médio* de infeções secundárias numa população completamente suscetível. A constante $\mathcal{R}_0$ tem sido amplamente utilizada como uma medida para estimar a eficácia das medidas de controlo sanitário e para conduzir a política de gestão de doenças. Estatisticamente, admitindo que os parâmetros do modelo são constantes, se $\mathcal{R}_0 < 1$ então a propagação da doença diminui e é eliminada, enquanto que se $\mathcal{R}_0 > 1$ então

[1] Sugere-se a consulta da figura 10 de *https://www.insa.min-saude.pt/wp-content/uploads/2022/05/S20_2022.pdf* para análise dos períodos com maior incidência de gripe sazonal (Fonte: Direcção.Geral ds Saúde).

a doença persiste [9]. No entanto, em modelos em que os parâmetros são variáveis, este juízo pode falhar: doenças podem persistir com $\mathcal{R}_0 < 1$, como veremos ao longo do presente texto.

O artigo [4] é uma investigação preliminar da interação entre sazonalidade, dinâmica determinística e persistência de caos, fornecendo uma compreensão matemática da dinâmica de certos modelos epidemiológicos. Em [4] exibe-se explicitamente um sistema dinâmico multiparamétrico inspirado no modelo SIR com $\mathcal{R}_0 < 1$ para o qual a componente I não tende para 0. Prova-se analiticamente que, sob perturbações periódicas com alta frequência na taxa de infeção ($\Leftrightarrow$ alta sazonalidade), caos aparece persistentemente no seu fluxo. Embora o modelo em análise apresente limitações biológicas, a prova da persistência da dinâmica caótica é relevante porque se preconiza alguma precaução em previsões epidemiológicas na presença de sazonalidade.

Não é objetivo do autor uma descrição exaustiva do modelo nem a apresentação de definições técnicas. Assume-se que o leitor possui conhecimentos básicos de equações diferenciais ordinárias. Para o leitor interessado nos detalhes e provas, sugere-se a leitura de [4, 7], salientando-se a exposição primorosa da segunda referência. A definição de caos que será usada ao longo do texto é a de *atrator estranho* de [12, §2.3]: *o fluxo apresenta um conjunto invariante, fechado e limitado onde quase todas as órbitas apresentam uma direção expansiva.*

2. DINÂMICA DO MODELO SIR MODIFICADO

Nesta secção, apresenta-se o modelo em consideração e os principais resultados.

2.1. Modelo

O modelo SIR clássico assume a divisão da população (humana) em três classes de indivíduos [8] face a uma doença infecciosa:

- *Suscetíveis (S):* indivíduos que atualmente não estão infetados mas que podem contrair a doença;
- *Infetados (I)*: indivíduos que estão atualmente infetados e que podem transmitir ativamente a doença a um indivíduo suscetível, até à sua recuperação;
- *Recuperados (R):* indivíduos que atualmente não podem ser infetados nem podem infetar indivíduos suscetíveis. Inclui indivíduos que têm imunidade definitiva porque recuperaram de uma infeção recente.

As letras S, I e R denotam o número de indivíduos de cada classe. Assume-se que os indivíduos suscetíveis nunca estiveram em contacto com a doença e que ficam imunes à doença quando recuperam. Inspirado em [8], o sistema não linear de equações diferenciais ordinárias (ODE) nas variáveis S, I e R que se vai considerar (dependendo da variável tempo t) é dado pela seguinte família no parâmetro γ:

$$\begin{cases} \dot{S} = S(A-S) - \beta_\gamma(t) IS \\[2ex] \dot{I} = \beta_\gamma(t) IS - (\mu + d)I - \dfrac{rI}{a+I} \\[2ex] \dot{R} = \dfrac{rI}{a+I} - \mu R, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde

$$\begin{aligned} X(t) &= (S(t), I(t), R(t)) \in (\mathbb{R}_0^+)^3, \\ \dot{X} &= (\dot{S}, \dot{I}, \dot{R}) = \left(\tfrac{dS}{dt}, \tfrac{dI}{dt}, \tfrac{dR}{dt}\right), \\ \beta_\gamma(t) &= \beta_0 \left(1 + \gamma\Phi(\omega t)\right). \end{aligned}$$

O parâmetro γ controla a deformação do gráfico β_γ relativamente à função constante igual a β_0. A figura 1 ilustra a interação entre as classes de indivíduos suscetíveis, infecciosos e recuperados no modelo (2.1).

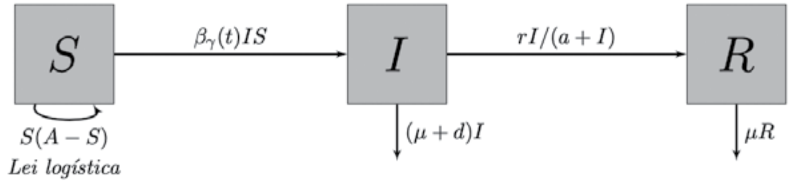


Figura 1. Diagrama esquemático do modelo (2.1). As caixas representam compartimentos e as setas indicam o fluxo entre os compartimentos.

2.2. Interpretação dos Parâmetros

Os parâmetros de (2.1) são calculados estatisticamente e podem ser interpretados da seguinte forma:

A: Limite de capacidade de Suscetíveis na ausência de doença;

γ: Amplitude da variação sazonal que oscila entre $\beta_0\left(1+\gamma \min_{t\in[0,T]}\Phi(t)\right)>0$ (época baixa) e $\beta_0\left(1+\gamma \max_{t\in[0,T]}\Phi(t)\right)$ (época alta), para algum $T>0$ – ver figura 2;

β_0: Média da taxa de transmissão da doença na ausência de sazonalidade[2];

$\Phi(\omega t)$: Efeitos da sazonalidade periódica ao longo do tempo com frequência $\omega>0$;

μ: Taxa de mortalidade natural de infetados e recuperados;

d: Taxa de mortalidade de indivíduos infetados pela doença;

r : Taxa de cura;

a: "Mede" os efeitos de um atraso na resposta ao tratamento que é proporcional à saturação dos serviços de saúde.

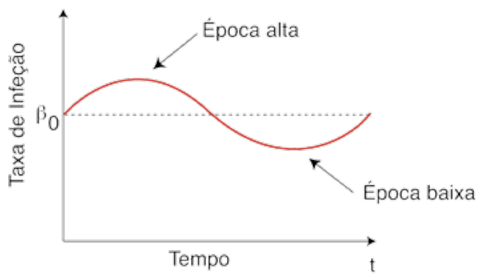


Figura 2. Representação gráfica da taxa de infeção $\beta_\gamma(t)$ com $\gamma>0$ (a vermelho).

2.3. Motivação

O sistema (2.1) foi inspirado no modelo SIR clássico [8], com as seguintes adaptações:

(1) Na classe dos *Suscetíveis* considera-se o crescimento logístico $S(A-S)$ [10] ao invés de crescimento linear ou exponencial;

(2) A taxa de transmissão da doença é dada por uma função periódica não autónoma capaz de capturar variações sazonais [7] em vez da função constante (modelo clássico);

(3) A transição de *Infectado* para *Recuperado* é dada pela função $\frac{rI}{a+I}$, contemplando a limitação das condições clínicas que não crescem linearmente com o número de infetados [14]. O termo consagra ainda os efeitos de atrasos na resposta ao tratamento.

2.4. Hipóteses

Daqui em diante vai-se admitir as condições que se seguem, habituais em contextos epidemiológicos periodicamente forçados:

(1) Os parâmetros de (2.1) são não negativos;

(2) Para todo o $t\in\mathbb{R}_0^+$, tem-se que $S(t)\leq A$;

(3) Para $T>0$ e $\gamma\geq 0$, a função $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é C^1, T-periódica, e tem (pelo menos) dois pontos críticos não degenerados.

O espaço de fase associado a (2.1) é um subconjunto de $(\mathbb{R}_0^+)^3$, munido da métrica euclidiana, e o conjunto de parâmetros é dado por:

$$\Lambda=\left\{(A,r,\beta_0,a,\mu,d)\in(\mathbb{R}_0^+)^6\right\},\ \gamma\in[0,\varepsilon]\ \text{ and }\ \omega\in\mathbb{R}^+,$$

onde $\varepsilon>0$ é arbitrariamente pequeno. As duas primeiras equações de (2.1), $\dot S$ e $\dot I$, são independentes de R, razão pela qual se pode reduzir (2.1) a:

$$\dot x=f_\gamma(x)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dot S=S(A-S)-\beta_\gamma(t)IS\\[2ex]\dot I=\beta_\gamma(t)IS-(\mu+d)I-\dfrac{rI}{a+I},\end{cases}\tag{2.2}$$

com $x=(S,I)$. Denote-se por $f_0(x)$ o campo de vetores associado a (2.2) que está bem definido em $(\mathbb{R}_0^+)^2$.

2.5. Resultados

Tal como já foi referido na secção 1.2, o escalar $\mathcal{R}_0$ pode ser visto como o número médio de contactos geradores de infeção de um único indivíduo durante todo o período em que permanece infectado. De acordo com [1, 9], para o modelo (2.1), esse número pode ser calculado explicitamente do seguinte modo:

[2] Em §2.4 serão enunciadas as propriedades analíticas sobre esta função.

$$\mathcal{R}_0 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A\beta(t)}{\mu+\frac{r}{a}}\,dt = \frac{\beta_0 A}{\mu+\frac{r}{a}} \geq 0. \tag{2.3}$$

O resultado principal de [4] enuncia que existem parâmetros em Λ tais que, se ω for suficientemente grande, então é "probabilisticamente fácil" encontrar campos de vetores da família f_γ cuja dinâmica exibe caos e onde é difícil efetuar previsões rigorosas acerca da evolução do número de infetados. Este fenómeno pode ter consequências a nível pandémico. Mais formalmente, tem-se:

Teorema A. [4] *Existe um conjunto aberto e não vazio de Λ, e $\omega^\star > 0$, para os quais o modelo (2.2) apresenta $\mathcal{R}_0 < 1$ e tal que, se $\omega > \omega^\star$, então a seguinte desigualdade é válida:*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|\{\gamma \in [0,\varepsilon] : f_\gamma \text{ exibe caos}\}|}{\varepsilon} > 0, \tag{2.4}$$

onde $|\cdot|$ *denota o comprimento usual.*

As implicações dinâmicas do teorema A são naturalmente induzidas para o sistema (2.1). O resultado é consistente com a crença empírica de que a sazonalidade intensa induz caos [1, 6, 7].

3 IDEIA GEOMÉTRICA DA PROVA E IMPLICAÇÕES BIOLÓGICAS

Nesta secção descreve-se a ideia geométrica da prova e as implicações epidemiológicas do Teorema A.

3.1. Considerações acerca da Prova

A demonstração do teorema A em [4] assenta nas seguintes ideias:

- Para $\gamma = 0$, existe um conjunto aberto e não vazio de Λ para o qual $\mathcal{R}_0 < 1$ e o sistema (2.2) exibem uma solução periódica atratora, como sugerido pela figura 3;

- Para $\gamma > 0$ e $\omega \approx 0$, o sistema não autónomo (2.2) é equivalente a um sistema autónomo tridimensional exibindo um toro bidimensional invariante e atrator;

- À medida que ω vai crescendo, o toro vai sendo destruído e, para ω suficientemente grande, emergem atratores caóticos observáveis numericamente ("*rank-one attractors*" na terminologia de [13]).

O método para encontrar atratores estranhos não pode ser usado diretamente no modelo SIR clássico [8]; é necessário incluir o crescimento logístico em (2.1) para definir um conjunto aberto de parâmetros no qual ocorre uma bifurcação de Hopf. Produzindo um toro invariante no sistema autónomo associado, a teoria associada à *"Quebra de toro"* [12] pode ser aplicada e a abundância de atratores estranhos segue por [13]. A prova do teorema A é válida para outros

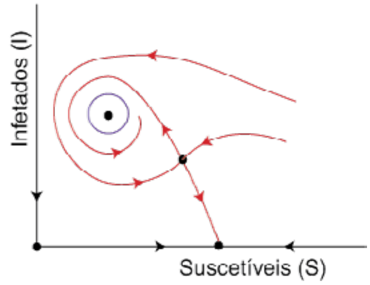


Figura 3. Esquema do diagrama de fase da equação (2.2). Os pontos representam equilíbrios. A curva fechada a azul denota uma solução periódica atratora.

modelos com perturbações periódicas cujo fluxo exiba uma solução periódica atratora.

3.2. Implicações Biológicas

Em [4] procura-se entender as consequências da sazonalidade em modelos epidémiológicos simples. Analisa-se um sistema dinâmico periodicamente forçado inspirado no modelo SIR através da adição de um termo não autónomo da forma

$$\beta_\gamma(t) = \beta_0\,(1+\gamma\Phi(\omega t))\,.$$

O modelo de [4] contempla a capacidade-limite da população [14] e uma taxa de tratamento saturada [9]. O termo Φ em $\beta_\gamma(t)$ pode ser visto como uma função periódica com dois extremos globais (governando as estações definidas pelas condições meteorológicas). O parâmetro ω pode ser interpretado como uma sazonalidade extra em relação à função Φ original. Este parâmetro $\omega > 0$ pode ser determinado por motivos políticos, férias escolares e/ou confinamentos forçados.

Finaliza-se esta secção com uma breve consideração sobre o número $\mathcal{R}_0$ usado em modelos epidemiológicos. O modelo estudado em [4] apresenta caos e $\mathcal{R}_0 < 1$, evidenciando que o número de infetados pode não estar controlado com $\mathcal{R}_0 < 1$. A definição de $\mathcal{R}_0$ não é uma grandeza universal que se aplique a todas as configurações [9].

Se o escalar $\mathcal{R}_0$ for usado em trabalhos de investigação, ele deve ser acompanhado das premissas subjacentes ao modelo e da evidência de que ele é realmente um critério de controlo. Este facto deve servir de alerta para todos os que fazem cálculos numéricos e que deduzem que a doença infecciosa desaparece meramente porque $\mathcal{R}_0 < 1$.

4. PROBLEMA EM ABERTO: A VACINAÇÃO

A existência de caos (atratores estranhos) em modelos epidemiológicos pode ser vista como um fenómeno indesejável associado à imprevisibilidade. Neste sentido, o problema de converter caos em dinâmica regular torna-se particularmente relevante. No contexto do sistema (2.1), evitar dinâmicas caóticas pode ser operacionalizado pela introdução de uma perturbação periódica que modela uma estratégia de *vacinação sazonal*, $v(t)$. Simulações numéricas mostram que uma diferença de fase entre as duas funções periódicas (taxa de infeção $\beta(t)$ e taxa de vacinação $v(t)$) podem desempenhar um papel importante no controlo do caos. Tal controlo pode contribuir para otimizar a política de vacinação, garantindo que a proporção de indivíduos *Suscetíveis* permanece abaixo de um determinado limiar.

Em [4], conjetura-se que se a frequência de $v(t)$ for suficientemente próxima da frequência de $\beta_\gamma(t)$ e separada por uma constante de fase, então a emergência de caos não é possível, estabilizando assim a dinâmica do sistema. A prova dessa conjetura é um trabalho em curso no trabalho de doutoramento de J. Carvalho (Universidade do Porto).

O autor contou com o apoio do CMUP, Portugal (UIBD/MAT/00144/2020), que é financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) com fundos estruturais nacionais e europeus através dos programas FEDER, no âmbito do PT2020. Também teve apoio do projeto CEECIND/01075/2020 do Estímulo do Emprego Científico (Apoio Individual) financiado pola FCT.

REFERÊNCIAS

[1] P. G. Barrientos, J. A. Rodríguez, A. Ruiz-Herrera, "Chaotic Dynamics in the Seasonally Forced Sir Epidemic Model", *J. Math. Biol.*, 75, 1655-1668, 2017.

[2] S. Bilal, B. K. Singh , A. Prasad, E. Michael, "Effects of Quasiperiodic Forcing in Epidemic Models", *Chaos*, 26 (8), 2016.

[3] B. Buonomo, N. Chitnis, A. d'Onofrio, "Seasonality in Epidemic Models: a Literature Review", *Ric. Di Mat.*, 67, 7-25, 2018.

[4] J. P. Carvalho, A. A. Rodrigues, "Strange Attractors in a Dynamical System Inspired by a Seasonally Forced Sir Model", *Physica D*, 434, 133268, 2022.

[5] S. Cobey, "Modeling Infectious Disease Dynamics", *Science*, 368, 713-714, 2020.

[6] J. Duarte, C. Januário, N. Martins, S. Rogovchenko, Y. Rogovchenko, "Chaos Analysis and Explicit Series Solutions to the Seasonally Forced Sir Epidemic Model", *J. Math. Biol.*, 78, 2235-2258, 2019.

[7] M. J. Keeling, P. Rohani, B. T. Grenfell, "Seasonally Forced Disease Dynamics Explored as Switching Between Attractors", *Physica D*, 148, 317-335, 2001.

[8] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, "Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics", *Proc. R. Soc. A*, 115, 700-721, 1927.

[9] J. Li, D. Blakeley, R. J. Smith, "The Failure of R_0", *Comput. Math. Methods Med.*, 2011(17), 2011.

[10] J. Li, Z. Teng, G. Wang, L. Zhang, C. Hu, "Stability and Bifurcation Analysis of an Sir Epidemic Model with Logistic Growth and Saturated Treatment" *Chaos Solitons Fractals*, 99, 63-71, 2017.

[11] S. W. Park, B. M. Bolker, "A Note on Observation Processes in Epidemic Models", *Bull. Math. Biol.*, 82, 2020.

[12] A. A. Rodrigues, " 'Large' Strange Attractors in the Unfolding of a Heteroclinic Attractor", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 42, 2355-2379, 2022.

[13] Q. Wang, L.S. Young, "From Invariant Curves to Strange Attractors", *Commun. Math. Phys.*, 225-275, 2002.

[14] X. Zhang, X. Liu, "Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function", *J. Math. Anal.*, 348, 433-443, 2008

SOBRE O AUTOR

Alexandre Rodrigues é professor auxiliar em Análise Matemática e Matemática Financeira no Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa. É membro integrado no Centro de Matemática da Universidade do Porto. Faz investigação em Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, com especial ênfase na dinâmica de redes heteroclínicas.

ANA MENDES
Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

PAULO SARAIVA
Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, CMUC e CeBER
psaraiva@fe.uc.pt

DINIS PESTANA: RELATOS DE UM PERCURSO

Professor catedrático aposentado do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Dinis Duarte Ferreira Pestana licenciou-se em Matemática Pura pela Universidade de Lisboa em 1972, vindo a doutorar-se em Sheffield, UK, em 1978, sob orientação do Prof. D. N. Shanbhag. Fez uma notabilíssima carreira de probabilista e de estatístico, contando com inúmeros artigos antes e depois da sua aposentação (em novembro de 2010), sendo ainda hoje investigador do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa e do Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral. Tendo lecionado sobretudo Probabilidade, Estatística, Bioestatística, Amostragem e Análise Numérica, primeiro na Secção de Matemática Aplicada e, depois, no Departamento de Estatística e Investigação Operacional, ficaram famosas as suas aulas (e os enunciados dos seus exames…). Espelho da sua dedicação à investigação e ao ensino são os 21 doutorandos que orientou. Dinis Pestana é um sedutor: pela elegância e pela simpatia do acolhimento, pela sua vasta erudição que não se cinge à sua área de atuação (rapidamente passando da literatura à música), mas também pelos inúmeros episódios (por vezes hilariantes) com que vai salpicando a conversa. Não se sente a passagem das horas e o que de seguida se regista é uma restrita amostra da conversa tida em finais de junho. Amostra enviesada, certamente (há episódios não publicáveis…).

Dinis Pestana recebe-nos em Cacilhas, nas instalações do Clube Naval de Almada, justamente ao lado da doca seca onde repousa o antigo submarino *Barracuda*. Mal nos apresentámos, e mesmo antes de explicarmos o *modus faciendi* da entrevista, já Dinis Pestana nos brinda com um exemplar da sua "dama favorita", a Estatística.

Dinis Pestana, conversa em Cacilhas (junho de 2022)

DINIS PESTANA Eu pertencia, em 2001, a uma subcomissão do Conselho Superior de Estatística para preparação do censo. Os Censos são inquéritos que visam o recenseamento geral da população e também o da habitação e podem conter algumas perguntas que parecem abstrusas… Se me perguntarem qual o tipo de cobertura do meu prédio, não faço a menor ideia. A subcomissão recebeu mil e tal sugestões de alteração ao projeto de inquérito que tinha sido divulgado, que é a melhor maneira de não se alterar nada… Porque, às tantas, aquilo cansa. Por pressão de certos grupos, pretendia-se que figurasse uma pergunta sobre quantas lésbicas ou homossexuais havia no agregado familiar. E eu disse que isso era a melhor forma de ter uma subavaliação. Primeiro que nada, porque o chefe de família se calhar é o último a saber dessas coisas. Por outro lado, responder sinceramente a uma pergunta destas é uma coisa que se sabe que pode não acontecer. E, além disso, é um risco para quem faz as entrevistas, pois pode ser agredido por pessoas que tenham ideias mais preconceituosas. Uma obra interessante sobre amostragem é o famoso Relatório Kinsey sobre sexualidade[1], onde ele refere precisamente a forma de perguntar e diz que há determinadas perguntas que não se podem fazer diretamente, sendo melhor fazê-las como se já se soubesse a resposta e esta fosse a menos

[1] Kinsey AC, Pomeroy WR, Martin CE. *Sexual behavior in the human male*. 1948. Am J Public Health. 2003 Jun;93(6):894-8.

pacífica, digamos. Por exemplo, numa situação destas (uma parte do inquérito deles era exatamente sobre experiência homossexual e tem muitos disparates), eles nunca perguntavam diretamente se a pessoa já tinha tido alguma experiência homossexual, porque dizer sim ou não era fácil. Perguntavam antes há quanto tempo é que teve a última experiência homossexual. O capítulo 2 do livro chama-se "Amostragem" e tem uma série de considerações judiciosas e interessantes sobre o assunto. Ainda a respeito da revisão dos Censos, de todas as sugestões a única que foi adotada por imposição política, e que causou o protesto veemente de todo o Conselho, foi a pergunta "Quantos deficientes existem nesta casa?". Foi uma pergunta totalmente estúpida, porque eu posso considerar que sou deficiente por ser obeso, ou por usar óculos ou por ouvir mal, mas a maior parte das pessoas não considera estas características uma deficiência, portanto, é uma pergunta que não está determinada de tal forma que tenha algum interesse.

GAZETA [DE MATEMÁTICA] Professor, iniciamos então a entrevista com perguntas simples. Em que momento da sua formação se tornou claro que a Matemática iria ser a sua disciplina de formação? Que pessoas tiveram influência nessa decisão? E porquê Matemática Pura?

DINIS PESTANA A decisão teve um motivo muito simples: desde muito cedo ganhava o meu dinheiro dando explicações, e todos os meus alunos estavam a optar pelas áreas de Ciências, Engenharia, Economia, pelo que, para os manter, tinha de aprender mais Matemática, Física e Química. Por isso (na altura, aluno do 1.º ano da licenciatura em Românicas), decidi averiguar o que era necessário para mudar para o curso de Matemática, descobrindo que tinha de fazer os exames de Matemática, Física e Química, e Desenho (Geometria Descritiva) do então 7.º ano. Comprei os livros e estudei-os (apenas uma vez cada, foi em meados de maio e os exames eram em junho, não deu para mais). Consegui assim mudar de curso, e a escolha de Matemática Pura também foi muito pragmática: nas disciplinas de Matemática não havia assinatura de folhas de presença, e por isso continuava a ter muito tempo para dar explicações. Quase tenho vergonha de o dizer, mas na altura em que eu estava no 3.º ano da faculdade, acho que fui a duas aulas durante o ano inteiro. Enquanto na altura um professor catedrático ganhava à volta de dez contos [cerca de €50] por mês, eu ganhava 20 e tal contos a dar explicações.


Dinis Pestana, conversa em Cacilhas (junho de 2022)

Portanto, não me dava tempo para ir às aulas.

Claro que faltar às aulas tinha consequências, e devo o meu curso ao melhor dos meus colegas, o António Monteiro (o melhor aluno do meu curso), que generosamente me emprestava os seus excelentes apontamentos algum tempo antes do exame.

GAZETA Que aspetos da sociedade portuguesa desse tempo (finais dos anos '60, inícios dos anos '70 do séc. XX) foram marcantes nessa formação?

DINIS PESTANA Eu acho que aquilo que me marcou mais foi o facto de a minha mãe achar que era muito mais interessante investir na nossa instrução do que deixar-nos dinheiro [como herança]. E daí a opção dos nossos pais de nos porem, à minha irmã e a mim, a estudar no Liceu Francês, que era caro na altura, apesar de em certo momento nos terem dado uma bolsa da Gulbenkian.

Nesse tempo dava muito pouca atenção a *Isto Tudo que nos Rodeia* (título emprestado do Jorge de Sena). Tive uma adolescência protegida ou alienada, como preferirem, vivia em Campolide e era aluno do Liceu Francês, e tirando as férias (em família) pouco me movia fora daqueles polos. Como vos disse, aos 16 comecei a dar explicações, e depois fui para a faculdade. Estava mais interessado no trabalho que me dava o dinheiro para comprar livros e nos livros que lia do que em qualquer outra coisa. O facto de ter tido excecionais professores no liceu, muitos dos quais não conseguiam trabalhar noutro sítio devido às opções políticas, inclinou-me para escolhas de esquerda, que continuam a pesar na minha vida nos momentos de eleições, mas de resto o meu interesse por política é muito reduzido.

GAZETA Continuou a sua formação em Sheffield. Qual a razão desta escolha e que recordações guarda da comunidade matemática com quem partilhou esses tempos?

DINIS PESTANA A escolha de Sheffield foi uma indicação do Prof. Tiago de Oliveira, por achar que o Joe Gani estava a dirigir um Departamento de Estatística muito forte. Mas de facto este tinha ido para a Austrália, deixando, porém, como legado um corpo académico muito bom e o *Applied Probability Trust*, que publica o *Journal of Applied Probability*, o *Advances in Applied Probability e o Teaching of Statistics*. O meu orientador foi o Dr. Damodar Shanbhag, excelente probabilista, com uma obra publicada de qualidade e consistente, apesar de muito variada. Aliás, como ele me avisou logo no início, teria de me despachar, pois ele mudava de tema de interesse de dois em dois ou de três em três anos. Na altura o interesse dele era divisibilidade infinita e unimodalidade, e foram esses os temas da minha dissertação.

Havia seminário às quartas-feiras, mas a diversidade do corpo docente levava a que os alunos de doutoramento poucos interesses comuns tivessem, e de facto o contacto com outros doutorandos fosse escasso, tirando obviamente com a Ivette, a minha esposa (embora eu goste mais de dizer que vivemos em pecado há quase meio século, não tivemos a bênção de um padre...) e, a partir do 2.º ano, com a Antónia Amaral, que também tinha ido para lá fazer o doutoramento. Ainda tentei pertencer a um grupo de trabalho sobre processos pontuais, mas a segunda sessão foi tão lenta e gaguejante que acho que o grupo se dissolveu por morte natural.

Eu gostei muito de estar em Sheffield. A estrutura inglesa é diferente da nossa. Os professores associados são escolhidos com uma multiplicidade de critérios, muito mais inglesa do que continental. Tínhamos dois professores associados e um deles era a Hilda Davis que era reputada de conhecer todos os alunos, saber detetar todos os seus problemas e resolvê-los. Portanto, era uma pacificadora daquela gente que ainda tem as hormonas em grande turbulência. Era uma pessoa encantadora e muito especial.

Lembro-me também do professor Morris Walter, que não era doutorado, mas era *Full Professor*, um dos nomes grandes da Teoria de Séries Temporais, mas que era um indivíduo muito estranho. Não gostava de falar às pessoas. Quando é que ele socializava? Sheffield estava ligado a duas universidades de Manchester e em cada trimestre fazia-se um seminário comum e aquilo ficava a 45 milhas de distância. O departamento pagava a deslocação, mas aconselhava a quem fosse de carro que levasse mais três pessoas, para ficar mais barato ao departamento. Nessa altura o professor Walter procurava três vítimas inocentes e desconhecedoras para irem com ele. Porquê desconhecedoras? Porque entre Sheffield e Manchester havia uma pequena cidade chamada Glossop e quando o Walter chegava lá, estacionava o carro, porque não conseguia estacionar em Manchester. Portanto, as pessoas [que o acompanhavam] não sabiam, mas quando chegavam ali, tinham de ir [o resto da viagem] de comboio até Manchester!

GAZETA Mas foi lá que conheceu a sua esposa, a professora Ivette? Ou foi cá e convenceu-a a ir para lá?

DINIS PESTANA Não, nada disso! Vão ver como estão enganados. A Ivette terminou o curso antes de mim, devido ao tempo que passei na Faculdade de Letras. Por isso, foi assistente das cadeiras de Teoria das Probabilidades e Processos Estocásticos, que eu tive no 4.º ano da licenciatura. Acho que não fui a nenhuma das aulas práticas de Processos Estocásticos e a Prof.ª Fátima Fontes de Sousa queria dar-me 19, mas ela opôs-se, e só tive 18, apesar do meu original trabalho sobre a música estocástica do [Iánnis] Xenákis. Como castigo, na altura em que em grupo, eu, a Ivette, a Antónia Amaral (Turkman) e a irmã, e a Helena Barroso (Morin), fomos passar férias ao Algarve, quando fomos a uma boîte, perguntei-lhe se queria casar comigo, e ela disse logo que sim. Em setembro ela tinha de ir à Alemanha fazer um curso de alemão e resolvemos casar a 10 de outubro. Eu acho que quando as coisas são para fazer, fazem-se! No dia em que regressámos das férias, acho que a Helena Barroso disse à Ivette "Mas tu já avisaste a tua mãe?" A Ivete disse "Não" (a Ivette é muito distraída…). A Ivette lá telefonou à mãe, mas só disse que tinha uma surpresa... Quando chegámos, às tantas a senhora perguntou qual era a surpresa, eu respondi que ia casar com a filha dela, mas foi uma genuína situação de surdez psíquica, continuou a sorrir, e daí a um bocado perguntou de novo qual era a surpresa, com o mesmo resultado. Só à terceira vez que perguntou, e a Helena Barroso lhe gritou "Ele vai casar com a sua filha" é que ela fez um ar consternado. [Gargalhadas]

GAZETA Foi então com a sua esposa para Inglaterra…

DINIS PESTANA Fomos os dois no ano seguinte. Foi um período talvez um bocadinho difícil, tínhamos um miúdo [Pedro Pestana] que tinha nascido em agosto e fomos para lá no fim de setembro. Ainda assim, tivemos os dois bolsa da Gulbenkian.

GAZETA Regressado a Portugal, ingressa na Secção de Matemática Aplicada da FCUL e, já em 1983, no Departamento de Estatística da FCUL. Como se chega tão jovem a coordenador do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa?

DINIS PESTANA Acho que passei para a Secção de Matemática Aplicada ainda em 1975, antes de ir para Sheffield, como assistente estagiário. No regresso, a Ivette e eu fomos contemplados com o período de expansão das universidades, começado pelo Veiga Simão (um homem notável) e que frutificou com o Estatuto da Carreira Docente Universitária do tempo da Eng.ª Maria de Lourdes Pintasilgo. Assim, creio que em 1980 já éramos professores associados, e, como tivemos algum êxito em publicações, creio que obtivemos o título de Professor Agregado em 1983. Por volta de 1986, como o estatuto obrigava a pôr a concurso os lugares de dois em dois anos, concorremos ambos a professores catedráticos. Assim, foi um misto de trabalho, sorte e oportunidades.

GAZETA Mudando de assunto, o professor tem fama de brincalhão, sobretudo com aqueles com quem mais se sente à vontade. Que histórias nos pode contar sobre os exemplos dados em aulas?

DINIS PESTANA Às vezes nas aulas utilizava como inspiração dois primos da Ivette, os irmãos Carlos e o Rui, que eram gémeos. Contava a história de dois gémeos que ainda estavam por nascer com temperamentos diferentes. O Rui dizia ao Carlos que deveriam continuar quentinhos dentro da mãe pois os papás poderiam ser pobres. Já o Carlos, mais afoito, sugeria uma visita lá fora ansioso com a possibilidade dos brinquedos da *Guerra das Estrelas* ou comboios elétricos. Um dia, o Carlos, mais curioso, decidiu colocar a mão de fora para ver como era o mundo exterior. Todo contente, abraçou o seu irmão Rui e, disse: "Já podemos nascer! Os papás são ricos. A mamã até tem casaco de peles…" Este é um bom exemplo para verem como a recolha de dados pode ser extremamente errada e que tal como nem tudo o que vem à rede é peixe, também nem tudo o que vem à mão é casaco de chinchila. Houve exemplos como este que percorreram toda a faculdade no mesmo dia.

GAZETA Este exemplo relembra-nos as provas com humor para maiores de 18 anos elaboradas pelo professor. Quer contar-nos um pouco sobre essas provas?

DINIS PESTANA A aventura dos meus exames extravagantes começa com um teste por alturas do Natal para dispensarem de exame. Sempre fiz todos os possíveis para que os alunos fossem aprovados e tivessem boas notas. Na verdade, quando comecei a dar Bioestatística na Faculdade de Farmácia a média das classificações subiu quatro valores, o que foi uma enorme alegria para os diretores.

Um aluno que veio tirar dúvidas disse-me "Não seja

Dinis Pestana e Maria Ivette Gomes em Dubrovnik (VI International Symposium on Computers at the University, Dubrovnik, 1984)

mau para as criancinhas", e eu agradeci porque isso me lembrou a matança ordenada pelo rei Herodes, o que me inspirou a elaborar o enunciado do teste sobre a matança dos santos inocentes.

Depois, foi um pouco ao sabor do acaso. Enquanto nas cadeiras de Bioestatística tentava usar questões de Biologia, nas cadeiras de Probabilidade dos cursos da área de Matemática inspirava-me em contos infantis, ou em efemérides, como a notícia de a Lorena Bobbitt ter cortado uma parte essencial do marido, John Bobbitt, e tê-la atirado para o jardim, sendo depois reconstituída com tanto sucesso que ele veio a ter uma carreira no cinema porno; ou o anão rezingão, que se achava prejudicado na repartição das noites que a Branca de Neve concedia a cada anão...

Creio que a obra-prima dos meus exames é a que usa personagens de contos infantis, mas a presidente do Departamento de Matemática da altura mandou a secretária do departamento interrogar os alunos para saber se tinham ficado ofendidos (negaram), e isso levou-me a perceber que nem sempre as minhas qualidades eram apreciadas.

GAZETA Tem uma paixão de longa data pela literatura. Nas suas palavras, "a par da ciência, a literatura tem o dom de ampliar aquilo que nos interessa e de criarmos um pouco mais de alma." Como é que o seu interesse pela literatura interseta os seus interesses científicos?

DINIS PESTANA Sempre li muito. Tenho muito prazer em reler. Na minha idade costumo revisitar aquilo de que gostei, o que às vezes me desilude. Alguns livros são quase uma metáfora da existência de universos paralelos, e proporcionam-nos emotiva e intelectualmente uma experiência que na nossa vidinha rotineira não conseguiríamos ter. E a beleza encantatória do encadeamento de sons enche a razão e o coração. O belo conto breve *Homero*, da Sophia, pode ser uma descrição de como criava versos de um ritmo e de uma sonoridade capazes de ressuscitar o radical Catilina, que, pela voz da poetisa, diz: "sou a seta lançada em pleno espaço / e tenho de cumprir o meu impulso". No fundo, em poesia um universo cabe num verso.

GAZETA É notável em diversos escritos e conferências a sua apetência por questões da filosofia da ciência, em torno por exemplo da construção do conhecimento científico. Cita frequentemente a resposta do físico Linus Pauling sobre o que está na base do sucesso em ciência, "ter muitas ideias, e a coragem de deitar quase todas fora", como paradigma do pensamento científico, com o seu paralelismo no trabalho do estatístico. Chegou a afirmar que a Estatística converteu incerteza e acaso em aliados, em vez de inimigos, na aventura da criação do conhecimento. Quais são as suas principais reflexões em torno desta área?

DINIS PESTANA A metodologia da investigação científica talvez tenha sido o assunto mais fascinante que aprendi no liceu. Tive um excecional professor de Filosofia, o Rui Grácio, que despertou o meu interesse pela Teoria do Conhecimento e a Metodologia da Investigação Científica, temas do programa que ele tratou com muito detalhe. Nas questões da filosofia da ciência, sou apenas um amador que acha que a amostragem nas urnas de Laplace nos ensina alguma coisa sobre a construção do conhecimento a partir da experiência, e que acha interessante que no fim do século XIX, com instrumentos rústicos para os nossos tempos (como os atuais serão em algumas décadas) Poincaré achasse que probabilidades superiores a 0.999 conduziam a uma "certeza moral", e as inferiores a 0.001 a uma "impossibilidade moral". Alguns paradoxos, por exemplo o de São Petersburgo, que muitos têm tentado contornar (o que levou em particular à criação da teoria da utilidade), também me têm encantado e obrigado a refletir.

Mas tudo o que publiquei sobre o assunto é bastante amador, apesar de continuar a achar interessante o que escrevi em *The Ways of Probable Truth*[2].

Certo dia, um jornalista telefonou-me dizendo que um colega de Coimbra lhe respondera que não apostava no Euromilhões porque a probabilidade de ganhar o *jackpot* era a mesma jogando ou não jogando. Queria o jornalista saber se compartilhava dessa opinião. Eu respondi que não, que gostava de apostar, porque a probabilidade de enriquecer a jogar ou a roubar era maior do que a de enriquecer a trabalhar, e a minha opção era de vez em quando jogar. A Santa Casa nunca teve a gentileza de me recompensar por uma publicidade tão genuína, e continuo a jogar de vez em quando, o que me permitiu comprar a minha casa dos Açores, onde passo sempre que possível uns dois meses por ano, e obrigou a minha mulher a deixar de dizer quando me via comprar lotaria que me "saía dinheiro do bolso".

GAZETA Gosta muito dos Açores.

DINIS PESTANA Os Açores são muito bonitos. Orientei o doutoramento de três docentes da Universidade dos Açores, criei amigos, tornou-se uma segunda naturalidade.

GAZETA O professor é um comunicador nato e aborda diversos temas. Nos seus trabalhos e orientações gosta também de percorrer muitos assuntos distintos e não conectados. Pensa que esta escolha possa ter sido um fator de dispersão na sua carreira ou enriqueceu-o?

Provas de agregação em 1983 (da esquerda para a direita) Tiago de Oliveira, Bento Murteira, Fátima Fontes de Sousa, vice-reitor Gomes Ferreira, Dinis Pestana, Rogério Nunes e Pedro Braumann.

DINIS PESTANA Eu gosto de variedade e foi esta que me permitiu ter um papel de auxílio a outras instituições de ensino. Essas instituições precisam de pessoas com uma diversidade de cultura e de problemas que as enriqueçam. Nesse sentido, orientei de forma muito diferente os meus estudantes. Sempre me esforcei por não fazer repetições, e aprendi muito com eles e com os seus temas.

No entanto, houve um fio consistente de trabalho em temas de Probabilidade e Teoria das Distribuições, a par da diversificação com os interesses ligados a orientação de doutoramentos e colaboração com cientistas de outras áreas. Enfim, um equilíbrio de unidade e diversidade, como creio que acontece com quem vive mais tempo. A diversidade ocorre com o tempo, porque a vida é complexa: tem uma parte real e uma parte imaginária.

Por exemplo, um dos meus excelentes alunos de doutoramento, o Rui Santos, fez um trabalho espetacular sobre a tentativa de axiomatização da Probabilidade na tese de Diogo Pacheco d'Amorim, de 1914, que transcende largamente um estudo histórico. Corrige de forma muito criativa conceções erradas, como o da construção da probabilidade contínua partindo e dobrando repetidamente um segmento até ter uma curva contínua, o que leva Pacheco d'Amorim a afirmar que os dois extremos se tocam – de facto, na construção do Pacheco d'Amorim o que acontece é que no limite todos os pontos coincidem, o que não tem interesse nenhum para a "probabilidade contínua" que ele queria resolver – e que de facto já estava bem lançada pelo Borel em 1909. O Rui estabeleceu um resultado realmente interessante, usando renormalização em cada passo da iteração, de forma a, no limite, não ter um resultado degenerado.

GAZETA Pode referir alguns dos problemas que mais o interessaram no decorrer da sua carreira de estatístico? E qual é o problema que gostaria de resolver e ainda não resolveu?

DINIS PESTANA Grande parte dos meus interesses de investigação surgiram nos três anos em que fabriquei o meu doutoramento. Os temas centrais foram as leis limites de somas de variáveis aleatórias e a unimodalidade, ficando com uma admiração deslumbrada pelo Paul Lévy e o seu discípulo W. Doeblin (prematuramente morto na guerra, mas que antes disso caracterizou os domínios de atração das estáveis para somas), e pela caracterização de Khinchine das autodecomponíveis para somas.

Depois descobri a teoria de representações usando pontos extremos, com a análise estocástica de D. G. Kendall e do seu discípulo Rollo Davidson (que morreu com 25 anos, se a memória não me engana, com a mania das escaladas, mas que antes disso fez um trabalho excecional sobre semigrupos délficos). E nos estudos sobre unimodalidade e caracterização de Pólya, lembrei-me de, em trabalhos de Paul Lévy, ter encontrado derivadas e integrais de ordem não inteira, e felizmente na biblioteca havia um livro de "cálculo difero-integral", que foi um instrumento precioso para estender a classe das transformadas de Laplace com transformadas Beta(1,q) e unimodalidade generalizada.

Durante alguns anos foram estes os meus temas de investigação e publicação, e creio que já no ano final de doutoramento comecei a olhar para as similitudes e diferenças da teoria de valores extremos, talvez por ocasionalmente falar com a Ivette sobre essas questões.

GAZETA Como lidam entre si dois estatísticos na mesma casa?

DINIS PESTANA Olhe, esta arte de lidar com o outro no casamento se calhar tem muito a ver com o não colidirmos muito um com o outro. A minha mulher gosta de futebol, eu tenho astigmatismo e não consigo ver onde é que a bola anda no meio daquilo tudo e tenho pouco interesse. Eu gosto de ópera e ainda por cima, como ouço mal, ponho alto e ela não gosta de ópera, acha que aquilo é uma berraria, mas como temos uma casa muito grande, isso não tem importância. A Ivette tem um bom feitio e, portanto, se eu tenho ou não bom feitio, isso não tem a menor importância. Com certeza que eu não tenho a mais mínima dúvida de que ela é muito melhor investigadora do que eu. Ela é de topo e eu sou apenas mediano. Dei-lhe algumas ideias de vez em quando e um princípio que tomámos desde base foi que trabalho um com o outro não é a nossa ideia. Apenas assinei trabalhos com a Ivette em situações em que a minha contribuição tinha sido considerável.

Por exemplo, quando trabalhámos em meta-análise, área onde, por exemplo, orientei a Fátima Brilhante, o que acontece é que temos de conjugar p-values obtidos de diversas experiências que às vezes são demasiado

[2] Pestana, D., and Sequeira, F. (2016). *The Ways of Probable Truth*, In O. Pombo and G. Santos (eds), *Philosophy of Science in the 21st Century – Challenges and Tasks*, Documenta, CFCUL, 91-111.

poucos para terem interesse. Pensei então, vamos ampliar os p-values à custa de teoremas de caracterização das variáveis uniformes, resultado que eu já tinha. Como a Ivette é muito melhor do que eu em estatística computacional, colaborou connosco. Digamos que a parte mais teórica do trabalho é minha, mas ela teve a sua parte. Este foi um dos trabalhos que com ela coassinei. Outro, foi quando construí uma extensão da família das betas e alterei a equação de Verhulst para obter crescimentos populacionais Gompertz (portanto, tipo lei de extremos Gumbel). Conseguimos com isto relacionar estas leis com as leis de Gumbel, Fréchet e Weibull. Como a Ivette é da área de extremos, acabámos por publicar um ou outro trabalho sobre isto na utilização de modelos demográficos em que surgissem equilíbrios diferentes do clássico equilíbrio logístico.

Outro trabalho que temos em conjunto é relacionado com o estimador de Hill, um estimador não paramétrico que pega nas estatísticas ordinais de topo, passa ao logaritmo e faz uma média geométrica, ou seja, média de ordem p=0. Falámos disso por acaso e numa conversa acabei por lhe sugerir que utilizasse outra média que não a geométrica. Considerámos médias de ordem p. A Ivette tem publicado muitos trabalhos em que aparecem médias de ordem p. Em resumo, a interseção do nosso trabalho teve sempre justificação. Nunca fizemos uma carreira de competição, nem de paralelismo, nem de colagem.

GAZETA Voltando aos trabalhos por concretizar…

DINIS PESTANA Os meus interesses alargaram-se, entretanto, para outras questões da teoria das distribuições estatísticas (benditos volumes de Johnson, Kotz e Balakrishnan, que dão acesso fértil a tantos resultados!), com particular interesse na *studentização* em populações não-gaussianas – a súmula dos resultados que desenvolvi com alguns alunos de doutoramento está no curso de Inferência Estatística sobre a Localização, que está acessível na página da Sociedade Portuguesa de Estatística.

Ao discutir as provas de agregação do Egídio dos Reis, descobri as expressões recursivas de Panjer-Sundt, e como na altura estava em contagens de bastardos de passarinhas que devem ter aprendido a ser infiéis na ópera *Così Fan Tutte*, do Mozart, fiz trabalhos sobre modelos fundamentais de contagem. Também fiz algum trabalho sobre expansões de Edgeworth e vários tipos de momentos, que me levou a uma demonstração quase elementar do teorema limite central (mas, claro, o que a teoria dos cumulantes que está por detrás implica não é tão elementar como eu gostaria).

Alguns dos novos temas (novos para mim, claro) ganharam raízes, em particular a orientação do doutoramento da Sandra Aleixo, em colaboração com o José Leonel Rocha, levou-me a ter resultados diversos em fractais e caos, ligando em particular a densidades betas e a uma extensão (em duas etapas, primeiro a que chamei de betinhas, e depois uma classe que continuo a estudar, englobando as betas mas com quatro parâmetros, que batizei com o nome BetaBoop), levando a equilíbrios populacionais que estendem de forma bem interessante a logística de Verhulst. Mas outros temas houve pelo caminho, como desenvolvimentos da Teoria de Dorfman sobre análises clínicas conjuntas, e uma muito episódica colaboração com o meu filho, analisando numa perspetiva de autossimilaridade as *Façades* de Philip Glass. O texto está publicado, mas infelizmente um computador "pifou" de forma irrecuperável, e perdi a comunicação que apresentei num congresso sobre o caos em Atenas, em que *Façades* servia de fundo musical a uma colagem de imagens e filmes de labirintos que me tinha levado horas e horas a fazer. Por fim, existem, sim, alguns problemas que gostaria de resolver, mas não sei se vale a pena maçar-vos com isso.

GAZETA O livro *Introdução à Probabilidade e à Estatística – Volume I*, do qual é coautor, é considerado por muito estatísticos um importante manual em português para uma sólida formação de um bom estatístico. Muitos esperam a sua continuação. Para quando o volume II?

DINIS PESTANA Esse manual está esgotado há uma dezena de anos, e a Fundação Calouste Gulbenkian aparentemente deixou de investir nos textos universitários. Há dois anos ainda pensámos pedir à Fundação Gulbenkian para ceder os direitos (que contratualmente têm para mais duas edições) ao Centro de Estatística e Aplicações ou a qualquer outra instituição (Sociedade Portuguesa de Estatística, ou Sociedade Portuguesa de Matemática, por exemplo) que quisessem manter o livro vivo, mas o isolamento decorrente da pandemia deixou tudo isso no limbo. Tenho pena, porque considero que é um livro muito bom e que o fundamental está escrito de uma forma agradável. Quando estava no fim da licenciatura em Matemática, o professor mais marcante que tive, António Simões Neto, depois grande amigo, falou-

Dinis Pestana, conversa em Cacilhas (junho de 2022)

-me do livro do W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, que de facto mudou o meu entendimento da Probabilidade. Foi, em certo sentido, um modelo, não nas matérias abordadas, mas no intuito de procurar uma apresentação inicial simples e apelativa, complementada por uma apresentação mais formal e rigorosa. Tem características diferentes de outros excelentes livros de Probabilidade e Estatística em português, como o de Bento Murteira e Marília Antunes e o de Esmeralda Gonçalves e Nazaré Mendes Lopes (penso que o fim da Escolar Editora também vai tornar estes últimos inacessíveis, infelizmente).

Não tenho um conhecimento panorâmico de Estatística, creio que não me sentiria confiante na capacidade de escrever um livro mais centrado em Estatística que tivesse as qualidades do volume I. Penso que a Antónia Amaral Turkman é que poderia escrever um livro fascinante mais focado em Estatística. O volume II que eu poderia escrever teria de ser mais centrado de novo em Probabilidade, mas os conhecimentos de Probabilidade mais avançados interessam a um público muito restrito, que tem acesso a excelente documentação em inglês, não tendo interesse editorial em português. Assim, não tenho grande incentivo para todo o investimento que teria de fazer. E a pergunta que eu gostaria de fazer é uma variante da vossa, “Para quando a reedição do Volume I?”

GAZETA Voltando ao campo da filosofia da ciência, a matemática tem, apesar de Gödel (e os seus teoremas de incompletude), um alto grau de coerência. É a ciência onde é menos discutível o que é verdadeiro e o que é falso. Como estatístico, se calhar não concordará com esta frase. Mas o professor diz que a verdade pode ser vista como um labirinto de hipóteses e de possibilidades. Que reflexões lhe suscitam estes comentários?

DINIS PESTANA Como disse antes, quando eu estava nas aulas de Filosofia do Rui Grácio, entre outras coisas, ele apresentou os vários critérios de verdade. Logo no início das *Meditações Metafísicas*, Descartes diz que os dados da razão pura nunca nos enganam, e sendo um cientista ele decerto considerava a coerência um critério de verdade, para além do seu critério de evidência (que me parece mais discutível, uma vez que ele o usou para validar o argumento de Santo Anselmo sobre a existência de Deus, sem que isso convertesse os que graças a Deus são ateus).

A coerência é um critério de verdade facilmente aceite, mas o conhecimento que "garante" só é de facto verdadeiro se os pontos de partida, axiomas e definições, forem verdadeiros. Ora, a história da negação do 5.º postulado de Euclides, de que por um ponto exterior a uma reta passa uma paralela e só uma, mostra que a "verdade" afinal é uma entidade elusiva. Quase dá para acreditar na afirmação de que a verdade é uma mulher nua no fundo de um poço, como defende uma personagem de *Os Velhos Marinheiros*, de Jorge Amado.

Se afinal não houver nenhuma paralela, ou infinitas, o que parece contraintuitivo, as geometrias de Riemann, Bolyai e Lobachevsky aí estão para mostrar que há outras construções coerentes, que me dizem que, em contextos mais estranhos, – e haverá mais estranho do que *quarks*? – parecem fazer sentido. Mas não sei discutir o assunto, e abandono. Quando tentamos aperceber-nos do que é verdade, se tivermos um espírito aberto, descobrimos que a verdade é um labirinto. Aquilo que adquirimos num dia pode ser posto em causa em dias ou horas que lhe sucedem.

GAZETA Que transformações registou na sua vida após a aposentação?

DINIS PESTANA Mudou muita coisa. Gostava mais da minha vida anterior, porque uma componente muito importante da minha vida era dar aulas, ter contacto com os alunos e com os alunos de investigação que eu orientava.

Atualmente, uma das coisas que faço é ajudar antigos alunos meus na sua colaboração com outras pessoas. Ainda na semana passada ajudei, a pedido do Fernando Sequeira, alguém do Banco de Portugal que está a tentar fazer um trabalho sobre as vulnerabilidades e decorrente risco para os sistemas informáticos.

Se por um lado a minha vida não tem tantos estimulantes como no passado, por outro lado posso ser mais agressivo nas minhas opções e menos bem-educado quando me apetece. [Risos]

GAZETA Um colega, o falecido professor Pedro Ramos, publicou há alguns anos um livro intitulado *Torturem os Números que Eles Confessam – Sobre o Mau Uso e Abuso das Estatísticas em Portugal, e Não Só*. Numa época em que somos bombardeados com todo o tipo de conclusões baseadas em estudos "mais ou menos" sérios, preocupa-o o mau uso e abuso das estatísticas não só na Economia, mas em todas as áreas da nossa vida?

DINIS PESTANA No século XIX, Thomas Carlyle, um dos grandes constitucionalistas ingleses, escreveu um livro chamado *Chartism*. No capítulo 3 explica que odeia o nome Estatística, mas reconhece que a mesma é a defesa dos homens comuns contra as aldrabices que lhes querem impingir. Infelizmente o papel que a Estatística tinha nesse século desapareceu e o abuso da Estatística é preocupante. A patetice humana que substitui a fé religiosa por fé em patacoadas de nutricionismo, de todas as áreas de ciências humanas – enfim, o triunfo do preconceito com o apoio de estatística irracional – é um fenómeno dos nossos tempos, que deve ser difícil de erradicar, apesar dos esforços do Pedro Ramos, do Goldacre e de muitos outros.

Creio que foi em 2004 que a revista *Statistical Science* publicou um conjunto de elogios ao *How to Lie with Statistics*, do D. Huff, no cinquentenário da sua publicação, em que é visível que a literacia estatística de muitos cientistas é insuficiente. O Planeamento de Experiências, que cresceu inicialmente no cérebro privilegiado de Ronald Fisher, continua a ser ignorado, ou mal usado, e o seu aforismo sobre "os que vão consultar um estatístico depois de recolher os dados em vez de um diagnóstico só têm direito a uma autópsia" é em si mesmo um bom diagnóstico da atual situação da Ciência, com uma proliferação de publicações erradas mesmo em boas revistas, mas sobretudo em revistas em que se paga para publicar. Parece o reino da estupidez, para ser agressivo como o Jorge de Sena gostava de ser.

Talvez o bom humor dos prémios IgNobel vá fazendo alguma coisa por remediar a situação. Mas também eles se enganam, como no caso do gozo com a rã a levitar do A. Geim, o qual além de um prémio IgNobel teve o prémio Nobel da Física em 2010; ou no gozo ao trabalho de McManus, sobre a posição errada dos testículos na estatuária clássica, que está na base do excecional livro *Right Hand, Left Hand. The Origins of Asymmetry in Brains, Bodies, Atoms and Cultures*, que é um dos livros mais interessantes de divulgação de Ciência.

Ah, como eu adorava ter um prémio IgNobel, ainda espero vir a ter estaleca para fazer um trabalho merecedor!

GAZETA Assistimos a um período de pandemia, uma guerra a decorrer com um grande impacto na Europa e lidamos diariamente com números sobre as nefastas consequências das alterações climáticas. Acha que é possível ser a Estatística a "salvar o mundo"?

DINIS PESTANA Não (e não há nada que possa salvar o mundo!). Concordo, obviamente, que as matemáticas (há outras além da desenvolvida no Ocidente) ajudaram a domar o nosso mundo, tal como a invenção da roda mudou o mundo, a invenção da "roda matemática" que é o 0 mudou o mundo, e continua a mudar.

A Estatística, como qualquer criação intelectual, tem um lado criativo, para o qual gostamos de olhar, e que me levou em tempos a fazer uma conferência que intitulei "Minha Querida Estatística". Mas, por outro lado, há o uso pérfido da Estatística, que levou a monstruosidades como o eugenismo que Galton e Fisher apoiavam, e o abuso da Estatística que pode ser uma das componentes mais nocivas da publicidade e da desinformação.

Muito boa Estatística tem sido obra de geneticistas e matemáticos como o Karl Pearson e o Fisher, ou de químicos como o Student e o W. J. Youden, antes de se tornarem estatísticos. Mas até o mais respeitado estatístico profissional, Fisher, escreveu um artigo "provando" que fumar não é prejudicial para a saúde. Mas não vou alargar-me sobre o tema, porque creio que todos percebem que tudo tem um direito e um avesso, como na bela novela do João Guimarães Rosa[3].

GAZETA Concorda que dados estatísticos bem tratados e analisados são essenciais para combater, por exemplo, os negacionistas das alterações climáticas.

DINIS PESTANA Evidentemente que é importante que os cientistas dessas áreas tenham também a Estatística como confirmatória de determinadas opiniões e hipóteses. Mas não é bem o papel da Estatística (apesar de haver atualmente muita Estatística espacial que se dedica também a questões ambientais), mas eu acho que o cerne da questão não deve ser a Estatística, mas tem antes que ver com coisas que são muito mais terra-a-terra, como sejam os problemas químicos envolvidos, o problema da subida dos oceanos, que são coisas mais de gestão do ambiente. A Estatística é mais um instrumento de trabalho.

GAZETA Por fim, como é que é viver sabendo que se é mais inteligente do que a média?

DINIS PESTANA [Risos] Fico muito agradecido com a opinião! Eu olho para trás na minha vida e digo: "Ó homem, foste tão estúpido, e deves continuar a ser!" Tanta parvoíce que eu fiz na vida! Portanto, não tenho essa opinião sobre mim. Mas tive a sorte de, de facto, a minha mãe investir muito na nossa educação e isso tem importância, e a sorte de ter lidado com muitas pessoas excecionais, que também me ensinaram que justiça, sentido do dever, caridade (no sentido clássico de compaixão e solidariedade) são tão importantes quanto a inteligência, e que apreciar tudo aquilo que nos rodeia, gozando a parte divertida da vida para criar alento para os inevitáveis revezes e maus momentos, é uma sã sabedoria.

[3] "Agora é que você vem vindo, e eu já vou-m'bora. A gente contraverte. Direito e avesso… Ou fui eu que nasci de mais cedo, ou você nasceu tarde demais. Deus pune só por meio de pesadelo. Quem sabe foi mesmo por um castigo?…" em *A Estória de Lélio e Lina*.

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

LITERATURA E ECOLOGIA

A literatura é um espelho dos seres humanos e o que escrevemos revela o que sentimos, o que pensamos e o que tememos.

Do grego *oikos* (casa) e *logos* (estudo), a ecologia tem-se afirmado como um importante campo do saber e uma lente segundo a qual estudamos as relações complexas entre os vários organismos vivos (incluindo a espécie humana) e entre esses organismos e o meio que habitam. O termo que usamos para denominar este ramo da biologia foi cunhado pelo cientista alemão Ernst Haeckel em 1866, mas as suas origens vêm de muito longe, pelo menos desde a Grécia Antiga, com as observações do mundo natural feitas, por exemplo, por Aristóteles e Hipócrates.

As muitas transformações que o planeta sofreu ao longo da História e a crescente consciência do papel que nós, seres humanos, temos em muitas dessas transformações têm dado maior relevo à disciplina da ecologia e aos seus estudos, modelos e previsões, levando-os frequentemente para os noticiários e páginas de jornais. As alterações climáticas são apenas o fenómeno mais recente e mais mediático, mas muitos outros o precederam, tais como a sobre-exploração dos recursos naturais, a contaminação dos solos e das águas ou os efeitos da Revolução Industrial.

Como acontece com todas as matérias relevantes para a experiência humana, não faltam exemplos de obras literárias que abordam questões ecológicas, refletindo as preocupações, as angústias e os desejos próprios de cada época. Podemos começar pela Bíblia que logo no primeiro livro, o Génesis, descreve a criação do céu, do mar e da terra, depois das ervas e das árvores de fruto, dos peixes, das aves, dos animais terrestres e finalmente do Homem, que haveria de reinar sobre os demais seres vivos. Na narrativa bíblica, o dilúvio é o primeiro desastre ecológico provocado pela espécie humana e Noé o primeiro conservador.

Saltando muitos séculos, até 1851, ano da publicação de *Moby Dick*, de Herman Melville, encontramos na obra uma das mais bem conseguidas representações da relação conturbada entre homem e Natureza, que põe em confronto a admiração que o Capitão Ahab sente pela baleia e a sua vontade de a dominar, de a subjugar e, eventualmente, de a matar. A Revolução Industrial tinha já começado e a Humanidade começava a aperceber-se do seu imenso poder e da angústia que o acompanha.

Um novo salto, desta feita até 1962, ano em que foi publicado o romance de ficção científica *Cataclismo Solar* (*The Drowned World*, no original), do autor inglês J. G. Ballard. A obra descreve um mundo pós-apocalíptico em que o aquecimento global provoca uma subida do nível das águas, tornando a maior parte do planeta inabitável. É mais um exemplo da ficção a antecipar a realidade e marca o início de uma era de ecoansiedade que tem alimentado o género do "romance ambiental", do qual também são exemplos *A Estrada*, de Cormac McCarthy, *Órix e Crex*, de Margaret Atwood, e *Eu, Animal*, de Indra Sinha.

A última obra que gostaria de citar foi publicada em 2007 e tem por título *O Mundo sem Nós*. Nela, o jornalista norte-americano Alan Weisman dá mais um passo na problematização da relação entre Homem e ambiente, ao discorrer longamente e com abundância de pormenores sobre a evolução de um mundo pós-humano, de como os ecossistemas recuperariam o equilíbrio e os vestígios da nossa civilização seriam progressivamente eliminados por plantas, micro-organismos e animais.

A literatura é um espelho dos seres humanos e o que escrevemos revela o que sentimos, o que pensamos e o que tememos. Não é diferente no que toca à ecologia e à nossa relação com o planeta–se, por um lado, tendemos a achar-nos mestres e senhores da Terra, também sabemos que não podemos agredi-la para lá de um certo ponto (mas qual?). Somos cada vez mais assombrados por uma perspetiva que para uns é terrível e para outros esperançada, a de que talvez o planeta possa sobreviver-nos e seguir a sua vida sem nós, até que nova espécie inteligente desenterre o passado e escreva uma obra em vários volumes intitulada *Ascensão e Queda da Humanidade*.

COMITÉ EXECUTIVO DA SOCIEDADE EUROPEIA DE MATEMÁTICA REUNIU-SE EM LISBOA

A SPM foi a anfitriã da reunião de trabalho do Comité Executivo da Sociedade Europeia de Matemática (EMS) que decorreu em Lisboa, nas instalações da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), nos dias 28 e 29 de outubro.

O Comité Executivo da EMS é composto por dez elementos eleitos por quatro anos e reúne periodicamente para tratar de assuntos correntes da vida da Sociedade, sendo estas reuniões acolhidas por sociedades de Matemática que são membros de EMS. Foi a primeira vez que a SPM, que é sócia fundadora da EMS, acolheu uma destas reuniões.

Na reunião, que foi a última do mandato dos atuais presidente, Volker Mehrmann, tesoureiro, Mats Gyllenberg, e vice-presidente, Betul Tanbay, estiveram também presentes, como convidados, os sucessores dos dois primeiros, Jan Philip Solovej e Samuli Siltanen, respetivamente, a nova vogal, Victoria Gould, além do responsável pela comunicação, Richard Elwes, e do editor-chefe do EMS Magazine, Fernando Pestana da Costa (atual vice-presidente da SPM e presidente em 2012-14).

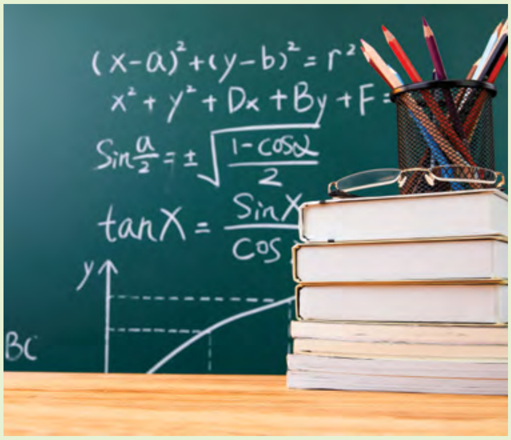
O vice-presidente da EMS, Jorge Buescu (atual presidente da Assembleia-Geral da SPM e presidente em 2014-16), que é docente da FCUL, fez as honras da casa. A reunião, que teve o apoio de secretariado das secretárias Rita Ferrer (SPM) e Elvira Hyvonen (EMS), foi iniciada no dia 28 com uma breve alocução pelo diretor da FCUL, prof. Luís Carriço, e terminou no dia 29 à noite com um concerto na Aula Magna pela Orquestra Metropolitana de Lisboa. Foi a primeira vez que uma destas reuniões de trabalho terminou com um evento cultural de tanto relevo.

PRÉMIO ÁLVARO BATISTA GONÇALVES PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA – CANDIDATURAS ABERTAS

A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e a Associação Álvaro Gonçalves promovem a primeira edição do prémio anual Álvaro Batista Gonçalves, que visa reconhecer e motivar a excelência no ensino da Matemática nos ensinos Básico e Secundário em Portugal.

O prémio é de cinco mil euros e será atribuído a um professor que se distinga pelo seu esforço, pela sua dedicação e pelo impacto nos alunos.

As candidaturas à primeira edição estão abertas, desde o dia 29 de setembro de 2022 e até ao dia 3 de fevereiro de 2023, a todos os professores de Matemática do País.



ENCONTRO CONJUNTO BRASIL-PORTUGAL EM MATEMÁTICA

O Encontro Conjunto Brasil-Portugal em Matemática decorreu de 14 a 20 de agosto de 2022 na Universidade Federal da Bahia, em Salvador – Bahia. Este encontro marcou o Bicentenário da Independência do Brasil e ocorreu em Salvador, a primeira capital do Brasil (1549-1763), celebrando a intensificação da cooperação científica na área e a efeméride da independência, com o objetivo de lançar as bases para um novo estágio de colaboração bilateral, ainda mais ambicioso, na área de Matemática.

SETÚBAL, UMA CIDADE DE DOIS PAÍSES

Com um ano de atraso, por causa das restrições implementadas durante a pandemia de COVID-19, Setúbal recebeu, no passado mês de outubro, a 9.ª edição do Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática (ELBHM). Desde a primeira edição, em 1993, o ELBHM tem-se afirmado como um dos principais motores da cooperação entre investigadores brasileiros e portugueses, fortalecendo a ligação entre os dois lados do Atlântico, sem a qual seria mais difícil a afirmação internacional de muitas das obras escritas em língua portuguesa ou longe dos principais centros políticos. Além das sessões plenárias e das conferências individuais, o 9.º ELBHM contou com cinco simpósios: História do Ensino/Educação Matemática, Os Manuais de Astronomia nas Instituições de Ensino Superior no Mundo de Língua Portuguesa (séculos XVII a XX), Divulgação da História da Matemática em Portugal e no Brasil nos Séculos XIX e XX, História da Matemática em Práticas Docentes Portuguesas e Brasileiras, e Episódios Didáticos na História da Matemática: da Babilónia a Cardano. Respeitando a regra da alternância que tem marcado o evento, a próxima edição decorrerá no Brasil.

OS MAIS NOVOS VÃO A JOGO

Os alunos do 3.º ao 6.º ano do Ensino Básico já se podem inscrever na 5.ª edição do Campeonato Nacional Multipli 2023, organizado pelo Politécnico de Leiria em colaboração com a Alfiii. O campeonato tem por base o jogo de cartas Multipli e pretende ser uma forma de incorporar uma componente lúdica na aprendizagem da Matemática. As provas serão disputadas online, estando a grande final agendada para o dia 5 de julho, depois de apurados os alunos vencedores das semifinais regionais.

PORTUGAL CONQUISTA DUAS MEDALHAS DE PRATA E UMA DE BRONZE NAS OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA

As 37.as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM) que decorreram em Bogotá, Colômbia, de 25 a 30 de setembro, acabaram com um saldo de duas medalhas de prata e uma de bronze para Portugal. Participaram mais de 70 jovens de 20 países da América Latina e da Península Ibérica, ficando Portugal, por países, em 6.º lugar na competição. Este ano, e pela primeira vez na sua história, dois dos problemas escolhidos para a prova foram propostos por Portugal.

Tiago Mourão (Esc. Sec. Santa Maria da Feira) e Leonardo Tavares (Esc. Sec. c/ 3.º Ciclo D. Filipa de Lencastre, Lisboa) arrecadaram ambos medalhas de prata, terminando de forma notável a sua carreira olímpica. Os restantes elementos da delegação portuguesa, os mais jovens da equipa, Apolo Gomes (Esc. Sec. de Santa Maria, Sintra) e Tiago Sousa (Esc. Sec. de São João do Estoril) conquistaram uma medalha de bronze e uma menção honrosa, respetivamente.

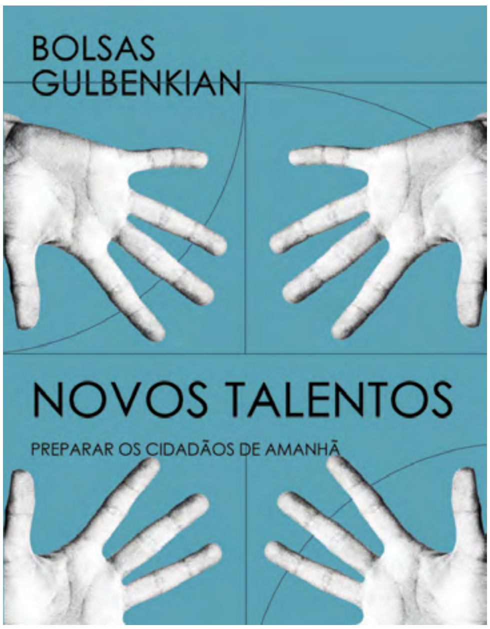
Portugal, que já organizou as OIAM duas vezes (2007 e 2018), participou pela primeira vez nesta competição em 1990 e, desde então, já conquistou dez medalhas de ouro, 26 medalhas de prata e 42 de bronze.

Da esquerda para a direita: Nuno Arala (tutor), Leonardo Tavares, Tiago Mourão, Apolo Gomes, Tiago Sousa e Joana Teles (chefe de delegação).

BOLSEIROS NA ÁREA DA MATEMÁTICA DO PROGRAMA NOVOS TALENTOS DA FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

No âmbito do programa Novos Talentos, a Fundação Calouste Gulbenkian atribuiu um total de 70 bolsas nas áreas de Biologia, Física, Matemática, Química, Humanidades e Ciências Sociais. Na área da Matemática foram apoiados dez candidatos: Nuno Carneiro, Pedro Costa, Rui Wang e Pedro Ronda (Instituto Superior Técnico), David Moreno e Rodrigo Luís (Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa), Dantas Serra e Filipe Gomes (Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra), Bernardo Gomes (Universidade de Aveiro) e Martim Paiva (Faculdade de Ciências da Universidade do Porto).

Os bolseiros recebem um apoio direto no valor de €1000 (€4000 para candidatos em situações sociais adversas) e um apoio de €1500 para atividades de enriquecimento de talento como, por exemplo, cursos de formação avançada, participação em conferências e escolas de verão, estágios, cursos de línguas, aquisição de livros e material de laboratório, entre outros. Mais informações em *https://gulbenkian.pt/bolsas-lista/novos-talentos*



LANÇAMENTO DE LIVROS

A Época e a Obra de Monteiro da Rocha

José Monteiro da Rocha, matemático e astrónomo de inegável talento, foi também uma figura crucial na elaboração, no séc. XVIII, dos Estatutos da nova Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, bem como do plano de estudos do *Curso Mathematico*, que este ano cumpre 250 anos. Inserido nas comemorações dessa efeméride foi lançado, no passado dia 12 de outubro, no Departamento de Matemática da FCTUC, o livro *José Monteiro da Rocha – A Época e a Obra*, numa sessão apresentada por Henrique Leitão. A publicação, coordenada por António Leal Duarte, Fernando B. Figueiredo e João Filipe Queiró, reúne textos de diversos autores, cristalizando, numa centena e meia de páginas, algumas das palestras apresentadas durante o colóquio de 2019 que assinalou o bicentenário do falecimento de Monteiro da Rocha.

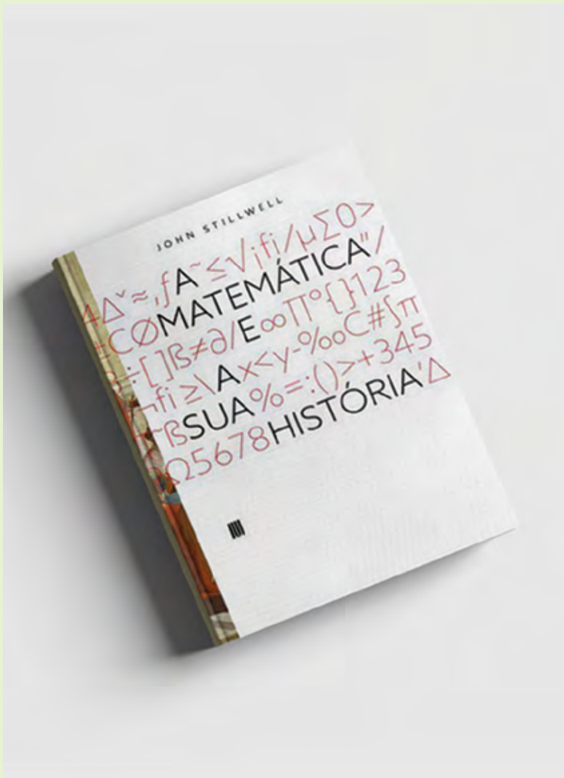
Damos conta de algumas novidades editoriais em Portugal na área da Matemática.

Matemática e a sua História

Numa edição da Imprensa da Universidade de Lisboa, foi recentemente lançada a tradução portuguesa (a cargo de Jorge Nuno Silva) do livro *Mathematics and Its History*, de John Stillwell. Em *A Matemática e a sua História*, o autor "apresenta uma visão unificada e concisa do desenvolvimento histórico da matemática, desde Pitágoras a Poincaré e Erdös. A abordagem é essencialmente cronológica e inclui as biografias dos mais importantes matemáticos no final de cada capítulo. Numa linguagem simples e acessível ao público menos familiarizado com a disciplina, Stillwell descreve o nascimento dos principais ramos da matemática moderna, traçando o seu desenvolvimento ao longo dos séculos até ao momento presente".

Tratado de Prática Darismética

Comemorou-se em 2019 o quingentésimo aniversário da edição do primeiro livro de matemática impresso em Portugal, T*ratado de Prática Darismética*, de Gaspar Nicolas (cf. artigo publicado recentemente na Gazeta n.º 190, pág. 23). O autor viveu num período de grande atividade editorial no que diz respeito a livros de aritmética comercial. Depois do seu livro, também Rui Mendes publicou *Prática Darismética*, em 1540, e Bento Fernandes publicou *Tratado da Arte de Arismética*, em 1555. O livro de Gaspar Nicolas conheceu mais nove edições, impressas entre os séculos XVI e XVIII (1530, 1541, 1551, 1573, 1594, 1607, 1613, 1679 e 1716). O livro é este ano reeditado pela Fundação Calouste Gulbenkian, numa edição coordenada por Jorge Nuno Silva e Pedro Jorge Freitas.



BARTOON

LUIS AFONSO

Publicado originalmente no jornal Público, em 26/08/2022. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETORA (EDITORA-CHEFE):
Sílvia Barbeiro Universidade de Coimbra

EDITORES:
Daniel Pinto Universidade de Coimbra
Hugo Tavares Instituto Superior Técnico

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Juvenal Espírito Santo** Instituto Nacional de Segurança Social de S. Tomé e Príncipe e Universidade de S. Tomé e Príncipe • **Natália Furtado** Universidade de Cabo Verde • **Nisa Figueiredo** Thomas More Hogeschool Roterdão • **Paolo Piccione** Universidade de São Paulo • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1250 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

José Carlos Santos
Presidente da SPM
jcsantos@fc.up.pt

UMA NOVA DIREÇÃO

O fim das restrições impostas pela pandemia levou ao ressurgimento das atividades presenciais. Iremos ver alguns exemplos.

O título desta Cartas da Direção talvez leve o leitor a pensar que a Sociedade Portuguesa de Matemática vai mudar e dedicar-se a tarefas totalmente novas. Mas não se trata disso. O título refere-se somente ao facto de esta ser a primeira carta que tem origem na direção da SPM que tomou posse a 9 de setembro de 2022 e que consiste em José Carlos Santos (presidente, Universidade do Porto), Fernando Pestana da Costa (vice-presidente, Universidade Aberta), Isabel Hormigo (vice-presidente, Escola Secundária D. Filipa de Lencastre), Joana Teles (tesoureira, Universidade de Coimbra), Clementina Timóteo (vogal, Escola Secundária Padre Alberto Neto), Frederico Valsassina (vogal, Colégio Valsassina), Luís Roçadas (vogal, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro), Óscar Felgueiras (vogal, Universidade do Porto), Paulo Vasconcelos (vogal, Universidade do Porto), Pedro Patrício (vogal, Universidade do Minho) e Pedro Serranho (vogal, Universidade Aberta).

Mas há uma mudança que nos é imposta do exterior: o fim da maior parte das restrições impostas pela pandemia. Isto leva a um regresso à normalidade das atividades desenvolvidas pela SPM. Já teve lugar em Tomar, no mês de julho, um Encontro Nacional da SPM feito em condições normais (que ainda foi da responsabilidade da direção anterior) e a SPM já participou na nona edição da Feira da Matemática, que teve lugar em outubro, no Museu Nacional de História Natural e da Ciência.

As Olimpíadas de Matemática também retomaram o seu funcionamento normal e as 37as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM), que decorreram em Bogotá (Colômbia) de 25 a 30 de setembro, acabaram com um resultado de duas medalhas de prata e uma de bronze para Portugal, tendo a equipa portuguesa terminado em sexto lugar dentro de um total de 20 países.

A SPM irá dar seguimento às numerosas atividades de divulgação que tem vindo a desenvolver. A divulgação permite alertar o grande público para a importância das ciências matemáticas e despertar vocações entre os mais jovens, ajudando a compreender um pouco melhor o mundo de hoje. As Tardes de Matemática contam com um programa extremamente rico e acontecem um pouco por todo o País. O seu funcionamento foi perturbado pela pandemia e deverão retomar a sua atividade normal. Por outro lado, as publicações periódicas e não periódicas da Sociedade chegam a milhares de leitores, constituindo em certos casos verdadeiros êxitos de vendas a nível nacional. É nossa intenção continuar a desenvolver esta componente editorial da SPM, apoiando o *Boletim*, e a *Gazeta de Matemática* e selecionando títulos de qualidade para as nossas coleções não periódicas.

Iremos também continuar a contribuir para o desenvolvimento da investigação matemática em Portugal. A revista *Portugaliae Mathematica*, hoje em dia editada pela European Mathematical Society, é exemplo disso e tem crescido em reputação e disseminação na comunidade matemática internacional. Iremos ainda apoiar a comunidade matemática nacional na organização de eventos científicos de grande impacto, como tem acontecido regularmente no passado (e.g., o AMS-EMS-SPM Meeting, no Porto em 2015, e o *ECMTB 2018*, em Lisboa).

Ainda a respeito da European Mathematical Society, convém referir que a última reunião da sua comissão executiva decorreu em Lisboa, em outubro, com o apoio da SPM.

A SPM irá continuar a contribuir para um ensino de Matemática de elevada qualidade. Manteremos a intervenção informada, rigorosa e construtiva sobre questões educativas, num momento em que a questão do ensino da Matemática em Portugal é mais importante do que nunca. Os atualmente designados SPM@Testes, que já decorrem desde 2016, com o objetivo de proporcionar às escolas um instrumento de avaliação externa que permita acompanhar o desempenho dos alunos, continuarão a ter lugar, de preferência tentando alargar o número de escolas que os aplicam. Além disso, continuaremos a promover o Centro de Formação e o Centro de Avaliação e Acreditação de Manuais Escolares. Daremos continuidade às atividades protocoladas com diversas instituições e reforçaremos a formação com ações diversificadas e pertinentes para os professores. Aliás, uma das atividades da SPM consiste em formular pareceres que nos sejam pedidos pelo Ministério da Educação relativamente aos programas de Matemática. Os novos programas não foram exceção: foi-nos pedido um parecer, o qual já foi entregue ao Ministério. A SPM também está envolvida no grupo de trabalho que está a repensar a formação de professores, tarefa que é necessário levar a cabo por causa da grande falta da professores (de Matemática e não só) que irá fazer-se sentir nos próximos anos.

Apoiaremos, desenvolveremos e consolidaremos projetos, de âmbito nacional, que permitam desenvolver as capacidades dos alunos e incrementar o gosto pela Matemática. Por exemplo, daremos continuidade ao projeto Círculos Matemáticos, atualmente a ser desenvolvido em projeto-piloto em várias escolas do país, em parceria com a Fundação Calouste Gulbenkian.

Haverá, naturalmente, dificuldades, tanto de origem interna como externa, que a SPM terá de superar. Encaramos essas dificuldades com naturalidade.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA **GAZETA DE MATEMÁTICA:**

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA **GAZETA** PARA O **ANO 2023**

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S.Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Fundação para a Ciência e a Tecnologia