N. 0201

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA | Ano LXXXIV | Nov. 2023 | 4,20€

MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO

Dados que Podem Salvar Vidas: Modelação e Predição de Acidentes de Viação para uma Segurança Rodoviária Mais Eficaz

Paulo Infante

CANTO DÉLFICO

O Teorema de Minkowski

Alfredo Costa

Uma Fórmula de Tipo Binet para os Números de Geonardo

Catarina Moreira, Pedro França e Patrícia D. Beites

14 DE MARÇO DE 2024
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

JM

JOGOS MATEMÁTICOS

17º CAMPEONATO NACIONAL

INFORMAÇÕES:
www.ua.pt/fabrica/cnjm17
234 427 053

INSCRIÇÕES ATÉ 7 JANEIRO DE 2024

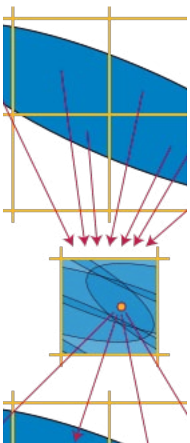
COMISSÃO LOCAL
FÁBRICA CENTRO CIÊNCIA VIVA aveiro
dmat universidade de aveiro departamento de matemática
pmate universidade de aveiro projeto matemática ensino

COMISSÃO NACIONAL
Ludus
APM Associação de Professores de Matemática
spm Sociedade Portuguesa de Matemática
CIÊNCIA VIVA

ÍNDICE

17 APANHADOS NA REDE

20 UMA FÓRMULA DE TIPO BINET PARA OS NÚMEROS DE GEONARDO



07 CANTO DÉLFICO

44 MATEMÁTICOS NA PRIMEIRA PESSOA
Andrei Martínez-Finkelshtein, o Matemático que Sonhou Ser Astronauta

PAULO SARAIVA
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

CONTRIBUTOS MATEMÁTICOS PARA A PREVENÇÃO RODOVIÁRIA

A análise e a modelação de dados rodoviários permitem tomar decisões que concorrem, de maneira consistente, para salvar vidas.

Um certo provérbio assevera que "o Homem é o único animal que tropeça duas vezes na mesma pedra", querendo isto dizer que o ser humano nem sempre faz uso da razão para decidir o que é correto e, como tal, arrisca-se a não aprender com a experiência, reincidindo no erro numa situação semelhante (o que nos leva a dizer, de tempos a tempos, que a História se repete). Nos finais dos anos 1970, a RTVE (televisão pública espanhola) passava semanalmente a série *A Segunda Oportunidade*, cujo principal objetivo era consciencializar os condutores para a redução dos acidentes de tráfego. No seu genérico, em voz *off*, ouvia-se justamente aquele provérbio, sobre um vídeo no qual um automóvel embatia repetidas vezes contra um bloco de pedra no meio de uma estrada. No capítulo da prevenção rodoviária, e em particular no nosso país, há ainda uma considerável margem de progressão na diminuição da sinistralidade rodoviária[1], cujos impactos (sobretudo os da sinistralidade grave) são seguramente imensos na nossa sociedade. Dependendo aquela de diversos fatores, importa perceber que contributo podem os modelos matemáticos aportar para a sua diminuição.

O artigo de capa desta *Gazeta*, da autoria de Paulo Infante (investigador da Universidade de Évora) mostra como a aplicação de ferramentas de base matemática (nomeadamente, com recurso a metodologias estatísticas e a modelos de aprendizagem automática) na análise e na modelação de acidentes de viação permite obter resultados importantes para apoiar cientificamente a tomada de decisão, contribuindo para a melhoria da segurança rodoviária. Neste como noutros campos, muito pouco se consegue com relevante impacto sobre a sociedade se o trabalho não for interdisciplinar. O projeto MOPREVIS, no qual se baseou este artigo, contou na sua equipa com investigadores dos departamentos de Matemática, Informática, Geociências e Sociologia da Universidade de Évora, bem como de elementos do Comando Territorial da GNR de Setúbal, região sobre a qual o estudo incidiu. É fundamental que, em matéria de promoção da segurança rodoviária, as opções dos decisores políticos e administrativos se baseiem em estudos como o referido, nos quais a evidência científica se sobrepõe de maneira inequívoca ao "achismo". Este é o resultado frequente de ideias preconcebidas, as tais que muitas vezes nos levam a tropeçar duas vezes na mesma pedra.

Deixo-vos o convite para ler este e os restantes artigos do número 201 da *Gazeta*. A diversidade dos temas abordados e a qualidade dos textos são certamente motivos para atrair a atenção dos apreciadores de matemática.

A coluna *Atractor* suspende no presente número a sua publicação. Das circunstâncias que levaram a esta decisão nos dá conta o professor Manuel Arala Chaves numa breve nota. É justo um agradecimento por parte da equipa editorial ao professor Arala Chaves e ao *Atractor*, por nos terem permitido apreciar uma abordagem interativa da matemática. Os leitores da *Gazeta*, e em especial os seguidores desta coluna, mantêm a esperança do seu regresso tão rapidamente quanto possível.

[1] O relatório do 1º semestre de 2023 da ANSR – Autoridade Nacional de Segurança Rodoviária revela uma quebra no número de vítimas mortais (-8,5%), mas uma subida no que diz respeito aos feridos graves (+5,6%) no continente e nas regiões autónomas em relação ao mesmo período de 2019.

No âmbito de uma colaboração entre a *Gazeta* e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor, relacionado com conteúdos interativos do seu *site* *www.atractor.pt* . Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para *atractor@atractor.pt*

AOS LEITORES DA *GAZETA DE MATEMÁTICA*

O *Atractor*, criado em 1999 com o objetivo de promover e divulgar a Matemática quer nas escolas quer ao público em geral, iniciou uma colaboração regular com a *Gazeta de Matemática* em março de 2008. Numa coluna reservada ao Atractor, publicou 40 textos ilustrados sobre tópicos muito diversos, em regra acompanhados por programas interativos disponibilizados no portal do *Atractor*. Foi com pesar que se viu agora constrangido a comunicar aos responsáveis da *Gazeta* a decisão de suspender essa colaboração. Neste texto, apresenta resumidamente as razões para esta resolução.

Desde o ano da sua criação e até 2022, o Atractor contou com o apoio do Ministério da Educação, sob a forma de destacamento de um ou dois professores do Ensino Secundário para trabalho a tempo integral no *Atractor*, e da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através da atribuição de duas bolsas BGCT (até ao início do ano 2019) e (desde então) de uma contribuição anual, cujo valor em 2023 não permite sequer a contratação de um ex-bolseiro a tempo inteiro por um mês.

Tendo cessado o apoio do Ministério da Educação e as bolsas da FCT, e sem outras fontes de financiamento regular que lhe permitam manter uma equipa de trabalho permanente, o *Atractor* não pode assumir compromissos com prazos, como é o caso da publicação na coluna da *Gazeta*.

O Atractor

HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
RECI e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

O CÍRCULO DA MORTE

Numa situação de vida ou de morte, é sempre bom saber alguma matemática… Neste artigo trazemos problemas matemáticos onde se procura escapar à morte (quase) certa!

Na primeira situação, consideremos o bem conhecido problema atribuído a Flávio Josefo (que teve diversas variações ao longo dos tempos):

> *Flávio Josefo estava sentado em círculo com 40 dos seus soldados. Cientes da morte iminente às mãos dos romanos, e nenhum querendo cometer suicídio por motivos religiosos, decidiram fazer um pacto entre eles: cada um iria assassinar, sucessivamente, o soldado à sua esquerda (o primeiro "assassino" é o soldado da posição 1).*
>
> *Os assassinatos teriam de acontecer no sentido dos ponteiros do relógio até que apenas sobrasse um soldado vivo. Essa pessoa teria de esperar pelos romanos… Flávio, conta a lenda, foi o soldado que sobreviveu a este pacto. Em que lugar estava ele sentado?*

Na figura 1 pode encontrar a sucessão de assassinatos que ocorreriam nesta situação e observar que o soldado sobrevivente estava colocado na posição 19.

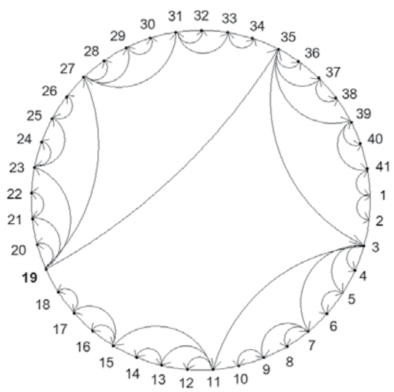


Figura 1: Solução do problema indicado anteriormente.

Em [1] pode encontrar uma simulação animada para a solução deste problema bem como a sua ligação com o sistema binário. Utilizando este sistema, é muito fácil encontrar a solução do problema.

E se, em vez de matar o soldado imediatamente à sua esquerda, cada soldado matasse o segundo soldado (vivo, claro) à sua esquerda? Em que posição estava sentado o último sobrevivente?

Em [2] pode encontrar uma vasta lista de referências a este problema e indica-se que este seria o problema original de Josefo, ou seja, ter-se-iam 41 soldados em círculo e assassinatos de "3 em 3", ou seja, morre sempre o terceiro soldado vivo (morto pelo primeiro); no problema anterior era o segundo soldado que morria (assassinado igualmente pelo primeiro).

De facto, o problema pode ser generalizado para quaisquer n soldados, com assassinatos de "m em m" soldados em que n e m são números naturais. Resolva este problema para diversos valores de m e n e tente descobrir um processo para obter a resposta geral.

Em [3] pode simular as soluções dos problemas, para diferentes valores, no GeoGebra.

Um outro problema matemático/lógico envolvendo potencial morte é o bem conhecido paradoxo do condenado:

> *A um sábio, condenado à morte, foi proposto que dissesse a sua última frase com as seguintes condições:*
>
> *- Se você disser uma verdade, será morto por enforcamento; se você disser uma mentira, morrerá afogado.*
>
> *Qual deverá ser a frase do condenado para se salvar?*

Um outro condenado à morte encontra-se em vias de ver executada a sua sentença. Observe o problema a seguir e ajude o prisioneiro a salvar-se (este é mais um problema de astúcia do que de raciocínio matemático).

Um prisioneiro é condenado à morte. Para tal, o prisioneiro deve escolher uma das seguintes salas:

- *A sala 1 está cheia de fogueiras acesas;*
- *A sala 2 está cheia de assassinos armados;*
- *A sala 3 está cheia de leões que não comem há três meses.*

Qual a sala que o prisioneiro deve escolher para se salvar? Porquê?

Últimas notas:

1. A seguir deixamos uma nota para uma notícia recente [4] que surpreendeu muitos apostadores incautos (e não só):

1, 2, 3, 4, 6 + 7. Foi esta a chave do sorteio do Totoloto de quarta-feira que deixou o País a "coçar a cabeça". Isto porque, na combinação vencedora, faltou apenas o número 5 para ser um resultado sequencial. Além disso, quatro pessoas acertaram no jackpot, tendo amealhado 3.087.482,97 euros. Mas é improvável? Segundo professores de matemática, não.

Manuel Scotto, professor catedrático do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa, adiantou, em declarações ao Notícias ao Minuto, que a probabilidade de ter sido esta a combinação vencedora é a mesma que qualquer outra, já que "todas as chaves são improváveis".

"A probabilidade é a mesma de todas as outras chaves. Todas as chaves são improváveis, mas as pessoas tendem a não gostar de chaves que pareçam demasiado fáceis", esclareceu.

Para leitores matemáticos, é claro que qualquer chave é igualmente improvável e não há dúvida absolutamente nenhuma. Mas a surpresa geral é aceitável e não é, a meu ver, uma questão de não se gostar de chaves fáceis. De facto, no totoloto existem apenas 45 possibilidades com os cinco números sorteados consecutivos (não considerando o número suplementar), o que, em 1.906.884 possibilidades (mais uma vez não considerando o suplementar), é manifestamente pouco (em termos relativos). E aqui é que está a surpresa justificada: sair uma chave com a tipologia de números consecutivos é mesmo muito mais improvável do que aparecer uma chave de tipologia "salteada"… Contudo, um apostador não ganha se sair uma qualquer chave "salteada"; ganha se sair a sua chave "salteada" e é neste ponto que por vezes há confusões… Apesar de uma chave específica consecutiva e uma chave "salteada" específica serem exatamente iguais em termos de probabilidade, é bem mais provável que seja sorteada uma chave de tipologia "salteada"...

2. Numa outra notícia, em [5], tem-se um comentário para uma estatística do futebol português da época passada:

"O penálti é uma coisa tão importante que quem deveria bater era o presidente do clube." A frase famosa é atribuída a Neném Prancha (1906-1976), olheiro, roupeiro, massagista e técnico de divisões de base do futebol brasileiro. Porém, ele sempre disse que a frase que proferiu era bem diferente: "O penálti é tão fácil de marcar que até o presidente o pode bater."

A verdade é que, tendo taxa de sucesso relativamente alta, marcar um penálti não é sinónimo de golo. Mesmo sem ser o presidente a executar o castigo máximo. São os números que o confirmam. Nas últimas dez épocas, por exemplo, só 78% das grandes penalidades marcadas em Portugal terminaram em golo. Ou seja, grosso modo, três em cada quatro penáltis dão golo. Neste período foram assinaladas 1065 grandes penalidades na Liga portuguesa. Nada menos de 828 foram convertidas em golo e 237 foram falhadas. Dá, pois, uma taxa de acerto de 78%.

Se a taxa de acerto é 78% (aproximação de 77,746…), não seria mais correto afirmar que, grosso modo, quatro em cada cinco penáltis dão golo? De facto, 77,75% está "suficientemente" a meio para se aceitar a escolha de uma versão ou de outra… Mas, para reforçar a ideia de que um penálti não é sinónimo de golo, é claramente mais enfática a versão "marca três em quatro", que é equivalente a dizer que se falha um em cada quatro… Falhar um cada cinco já não parece tão mal…

3. Num apontamento mais alegre e romântico, façamos ainda referência a duas canções que saíram este ano e que falam de matemática (uma delas "comparando" o nosso sistema decimal ao sistema binário da computação, de modo a ilustrar eventuais incompatibilidades no amor… O melhor é mesmo não complicar, nem no amor nem na matemática!):

Amor Digital (Jorge Palma)

Sei lá se me vou dar bem com esse teu amor digital
Ele é tão por demais veloz que o meu velho sistema decimal
Mas sei que ao olhar para ti qualquer numeração vai ao ar
Se o meu dois no teu caso é dez

Se calhar é melhor não complicar
(…)

Na Escola (Os Quatro e Meia)
Foi na escola que aprendi
Sobre plantas e animais
Dividi, multipliquei
Com três casas decimais

(…)

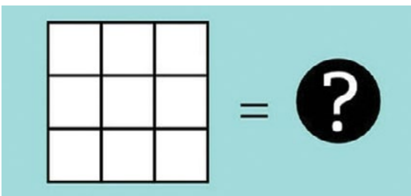
Aprendi a picotar
Fiz centenas de postais
Sei os sólidos e as formas
Bissetrizes, diagonais

(…)

De mochila presa às costas
Com dez quilos, talvez mais
Tantas vezes fui à escola
Aprender coisas banais

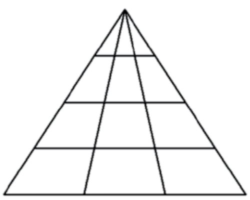
Se algo existe nesta vida
Que algum saber requer
É a ciência de entender
Como pensa uma mulher

Soluções dos desafios propostos no número anterior:
Na figura a seguir é possível observar 14 quadrados.
Num quadrado $n \times n$, onde n é um número natural qual-



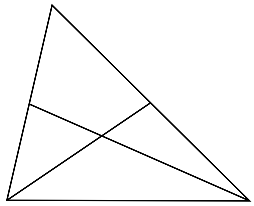
quer, ter-se-iam $\sum_{i=1}^{n} i^2$ quadrados.

Na figura a seguir é possível observar 24 triângulos diferentes.
Se a figura tivesse n "linhas" e m "colunas" (com n e m

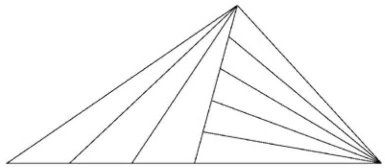


números naturais), ter-se-iam $\sum_{i=1}^{m} n \times i$ triângulos. Em *https://www.youtube.com/watch?v=dNw406ahIWA* pode observar o caso de três "linhas" e nove "colunas".

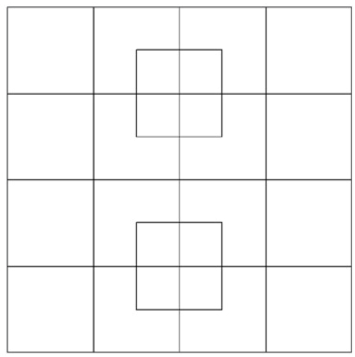
Na figura a seguir podem observar-se oito triângulos.



Na figura a seguir podem observar-se 24 triângulos.



Na figura a seguir podem observar-se 40 quadrados.



Até ao próximo número do nosso Recreio!

[1] *https://www.youtube.com/watch?v=uCsD3ZGzMgE*
[2] *https://mathworld.wolfram.com/JosephusProblem.html*
[3] *https://www.geogebra.org/m/ExvvrBbR*
[4] País ao Minuto, 11 de maio de 2023; *https://www.noticiasaominuto.com/pais/2318437/estranhou-a-chave-do-totoloto-matematicos-nao-tao-provavel-como-outra*
[5] A Bola, 22 de junho 2023; *https://www.abola.pt/nnh/2023-06-22/liga-a-bola-fez-as-contas-saiba-que-equipa-teve-mais-penaltis-nos-ultimos-10-ano/993092*

ALFREDO COSTA
Universidade
de Coimbra
amgc@mat.uc.pt

O TEOREMA DE MINKOWSKI

Neste *Canto Délfico* propõe-se o Teorema de Minkowski como tema avançado de estudo extra-curricular, para alunos do ensino secundário especialmente motivados.

1. INTRODUÇÃO

O Teorema de Minkowski foi o tema de uma aula lecionada pelo autor destas linhas num estágio do Projeto Delfos, em 2012. Os alunos eram essencialmente dos 11.º e 12.º anos de escolaridade. Este teorema não é irrelevante na preparação para competições escolares de matemática.

É verdade que por si só é muito raramente útil em tais competições; mas as suas demonstrações e aplicações constituem um bom pretexto para a introdução, ou revisão, de ferramentas úteis em contexto olímpico. Finalmente, a sua beleza pode estimular estudantes curiosos e com sentido estético, tenham ou não inclinações competitivas.

Neste texto, apresentamos o Teorema de Minkowski no caso bidimensional, seguindo essencialmente o plano da aula de 2012. A aplicação destacada é a dedução da caracterização dos números primos que são soma de dois quadrados. Esta caracterização é relevante em contexto olímpico, desde logo pela associação com os alicerces da Aritmética Modular.

Os jovens estudantes com interesse pela Física poderão ter um especial gosto em saber que estamos a falar de um teorema do matemático Hermann Minkowski, afamado pelo seu papel no dealbar da Teoria da Relatividade (tópico abordado num outro número da *Gazeta de Matemática*, cf. [7]). Não raro, tais estudantes interessam-se precocemente pelo estudo da integração numa ou mais variáveis reais; para eles, as instâncias do Teorema de Minkowski em dimensões superiores poderão ser especialmente motivadoras.

O Teorema de Minkowski inaugurou a chamada *Geometria dos Números*. O leitor interessado nesta área matemática encontra uma introdução amigável no livro homónimo [6], onde o Teorema de Minkowski é mesmo referido como sendo o "teorema fundamental da geometria dos números". No final desse livro encontramos uma breve biografia de Minkowski. Para uma exposição sobre o teorema num livro de preparação olímpica, temos a obra de Andreescu & Dospinescu [3]. O plano da aula associada a este canto délfico apoiou-se no livro de Jones & Jones [5].

Figura 1. Hermann Minkowski[1] (1864-1909).

[1] Imagem do domínio público, via Wikimedia Commons, *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hermann_Minkowski.png.*

2. O TEOREMA DE MINKOWSKI

Um *reticulado no plano* $\mathbb{R}^2$ é um conjunto da forma

$$\Lambda = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\},$$

onde v_1 e v_2 são vetores com direções distintas. Dizemos que v_1 e v_2 *geram* o reticulado Λ. Podemos escrever $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$. A *região fundamental* de um tal reticulado é o conjunto

$$F = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq \alpha_i < 1\}.$$

Trata-se do paralelogramo de vértices $(0,0)$, v_1, v_2 e v_1+v_2, a que foram retirados os lados $[v_1, v_1+v_2]$ e $[v_2, v_1+v_2]$, cf. figura 2. Note-se que o único elemento de Λ em F é o ponto $(0,0)$. Escrevendo $v_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})$ e $v_2 = (v_{2,1}, v_{2,2})$, a área da região fundamental é $|v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1}|$, i.e., o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Como exemplo especial, temos o reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o *reticulado inteiro*, gerado pelos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$, e cuja região fundamental é um quadrado de área 1 sem dois dos seus lados.

Fixado um reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$, dizemos que dois vetores v e w de $\mathbb{R}^2$ são *equivalentes módulo* Λ, e escrevemos $v \sim w$, se $v - w \in \Lambda$. É um exercício elementar provar que $v \sim w$ se só se $v + \Lambda = w + \Lambda$. Reparemos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

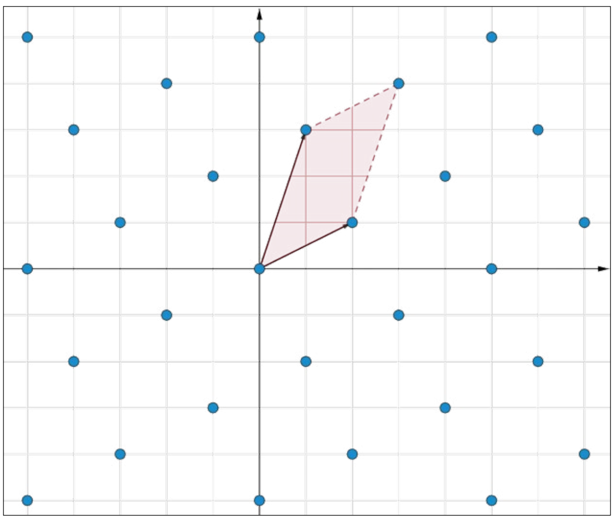


Figura 2. Ilustração do reticulado gerado pelos vetores v_1=(2,1) e v_2=(1,3). Os pontos do reticulado estão assinalados a azul, e a região fundamental aparece a sombreado.

A seguinte propriedade é fácil de intuir e provar: para cada $v \in \mathbb{R}^2$ existe um único $w \in F$ tal que $v \sim w$. Logo, podemos definir a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to F$ que a cada $v \in \mathbb{R}^2$ associa o único $w \in F$ tal que $v \sim w$.

Observemos que o plano é pavimentado por translações de F de forma natural; de facto, temos $(F+l) \cap (F+k) = \emptyset$ sempre que l, k são elementos distintos de Λ, e $\mathbb{R}^2$ é a união disjunta dos conjuntos da forma $F + l$, com $l \in \Lambda$:

$$\mathbb{R}^2 = \biguplus_{l \in \Lambda} (F + l).$$

No enunciado do teorema seguinte, pense o leitor que X é um cartão pousado no plano, com área superior à da região fundamental do reticulado $\Lambda = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$, e que corta o cartão X ao longo das retas paralelas a v_1 ou v_2 que passam pelos pontos do reticulado. Ao trasladar para a região fundamental, de um modo natural, os pedaços resultantes do corte, nasce a intuição de que será impossível evitar que pelo menos dois dos pedaços se sobreponham (cf. figura 3).

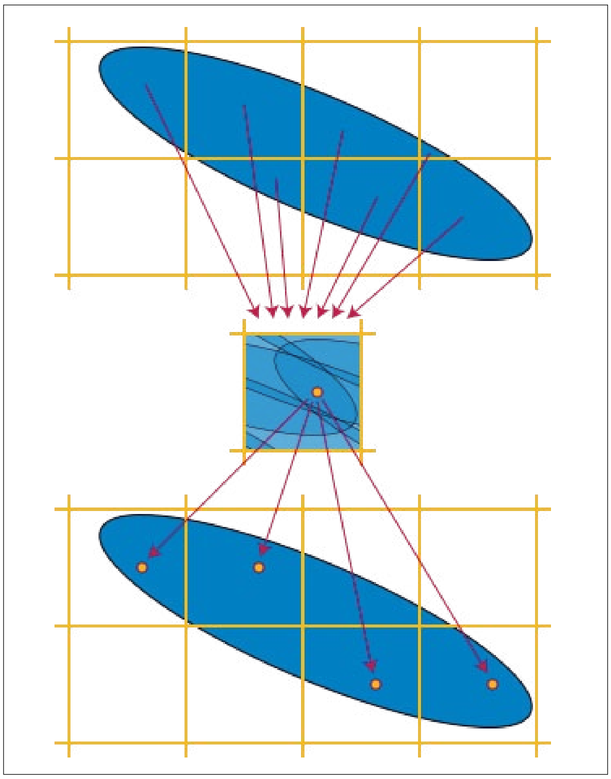


Figura 3. Ilustração[2] do Teorema 1 no caso do reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com o cartão X representado a azul.

Teorema 1. *Consideremos um subconjunto limitado X de $\mathbb{R}^2$. Se a área de X for maior do que a área da região fundamental de Λ, então a restrição de φ a X não é injetiva.*

Demonstração. Suponhamos que a restrição de φ a X é injetiva. Para cada $l \in \Lambda$, seja $X_l = X \cap (F + l)$. Então

$$X = \biguplus_{l \in \Lambda} X_l. \tag{1}$$

Sendo esta uma reunião disjunta, temos

$$\text{Área}(X) = \sum_{l \in \Lambda} \text{Área}(X_l)\,. \tag{2}$$

A restrição de φ a $F + l$ coincide com a restrição a $F + l$ da translação $v \mapsto v - l$. Portanto, temos

$$\text{Área}(X_l) = \text{Área}(\varphi(X_l))\,. \tag{3}$$

Uma vez que a restrição de φ a X é injetiva, concluímos a partir da união disjunta (1) que temos a seguinte união disjunta:

$$\varphi(X) = \biguplus_{l \in \Lambda} \varphi(X_l).$$

Portanto, a seguinte igualdade verifica-se:

$$\text{Área}(\varphi(X)) = \sum_{l \in \Lambda} \text{Área}(\varphi(X_l))\,. \tag{4}$$

Logo, de (2), (3) e (4) deduzimos que

$$\text{Área}(X) = \text{Área}(\varphi(X)).$$

Como $\varphi(X) \subseteq F$, concluímos que $\text{Área}(X) \leq \text{Área}(F)$. □

Corolário 1. *Se a área de X for maior do que a área da região fundamental de Λ, então existem $v, w \in X$ tais que $v \neq w$ e $v - w \in \Lambda$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, existem $v, w \in X$ tais que $v \neq w$ e $\varphi(v) = \varphi(w)$. Como $v \sim \varphi(v)$, $w \sim \varphi(w)$ e $\sim$ é uma relação de equivalência, temos $v \sim w$, ou seja, $v - w \in \Lambda$. □

No teorema anterior e seu corolário pressupõe-se implicitamente que o conjunto X é à partida *mensurável*; mas num contexto semelhante ao da aula associada a este documento, pode não ser oportuno destacar que é preciso que X tenha área, dada a delicadeza da noção de conjunto mensurável. A hipótese de que X é limitado não é necessária, mas é conveniente para evitarmos considerandos sobre séries, que seriam precisos para dar sentido às igualdades (2) e (4) no caso em que X não é limitado.

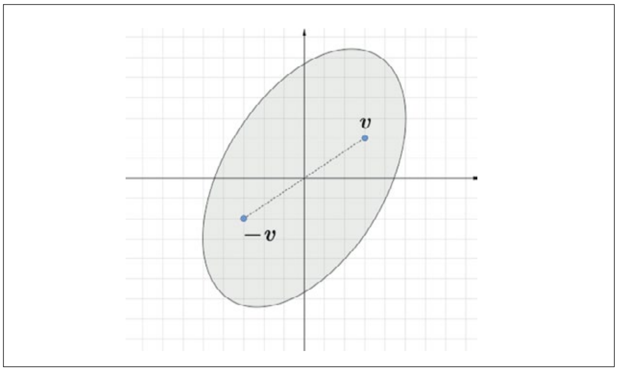


Figura 4. Um conjunto centralmente simétrico e convexo.

O leitor poderá querer agora exercitar-se resolvendo o seguinte problema olímpico.

Problema 1. (Teste de Seleção da China para as Olimpíadas Internacionais de Matemática, 1988) *Seja n um inteiro positivo. Um polígono do plano tem área maior do que n. Prove que podemos aplicar-lhe uma translação de tal modo que na nova posição contém pelo menos $n + 1$ pontos de coordenadas inteiras.*

O corolário 1 e o problema 1 são casos especiais do *Teorema de Blichfeldt* [6, Teorema 9.3]. Este resultado de 1914 deve-se ao matemático americano de naturalidade dinamarquesa Hans Frederik Blichfeldt (1873-1945), cuja biografia também é destacada no já mencionado livro [6] de introdução à Geometria dos Números. No popular fórum olímpico da página web *AoPS Online* encontra-se uma discussão sobre a solução do problema [1].

Precisamos de mais algumas definições antes de enunciar o Teorema de Minkowski. Um subconjunto de X de $\mathbb{R}^2$ diz-se:

- *centralmente simétrico*, ou *simétrico em relação à origem*, se $v \in X \Rightarrow -v \in X$;
- *convexo* se, sempre que $v, w \in X$, o segmento de reta $[v, w]$ que une v a w está contido em X.

Por exemplo, um círculo com centro na origem é centralmente simétrico. Mais geralmente, todas as regiões elípticas cujos dois eixos passem pela origem são cen-

[2] David Eppstein, CC0, via Wikimedia Commons - *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blichfeldts_theorem.svg.*

tralmente simétricas.

Teorema 2. (Teorema de Minkowski, c. 1890). *Seja Λ um reticulado de $\mathbb{R}^2$ com região fundamental F, e seja X um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ que é centralmente simétrico e convexo. Se*

$$\text{Área}(X) > 4\,\text{Área}(F),$$

então o conjunto X contém um ponto do reticulado Λ distinto de (0,0).

Demonstração. Suponhamos que

$$\Lambda = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$$

é gerado pelos vetores $v_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})$ e $v_2 = (v_{2,1}, v_{2,2})$. Recordemos que a área da respetiva região fundamental F é o módulo do determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Consideremos também o reticulado

$$2\Lambda = \mathbb{Z}(2v_1) + \mathbb{Z}(2v_2).$$

A região fundamental deste reticulado é o conjunto $2F = \{(2x, 2y) : (x, y) \in F\}$, cuja área é $|\det(2M)| = 4|\det(M)| = 4\,\text{Área}(F)$. Por hipótese, temos portanto $\text{Área}(X) > \text{Área}(2F)$. Decorre então do corolário 1, aplicado ao reticulado 2Λ, que existem $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ e $x - y \in 2\Lambda$. Logo, o ponto

$$P = \frac{x-y}{2}$$

pertence a Λ. Observemos o seguinte:

- $x \neq y$ significa que $P \neq (0,0)$;
- $-y \in X$, pois X é centralmente simétrico;
- o ponto médio de $x \in X$ e $-y \in X$, que é P, pertence a X porque X é convexo.

Portanto temos $P \in (X \cap \Lambda) \setminus \{(0,0)\}$. □

3. CONGRUÊNCIAS

Usamos a notação $a \equiv_n b$ para significar que a e b são *congruentes módulo n*, o que significa que os inteiros a e b deixam o mesmo resto quando divididos pelo número natural n. Dito de outro modo, $a \equiv_n b$ se e só se $a - b$ é múltiplo de n. Recordemos algumas propriedades básicas da Aritmética Modular:

- se $a \equiv_n b$ e $c \equiv_n d$, então $a + c \equiv_n b + d$ e $ac \equiv_n bd$;
- a é primo com n se e só existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $ac \equiv_n 1$; o inteiro c é único módulo n (isto é, se $ac \equiv_n ac' \equiv_n 1$ então $c \equiv_n c'$) e diz-se que c é o *inverso de a módulo n*.

O *Pequeno Teorema de Fermat* e o *Teorema de Wilson* são das primeiras propriedades avançadas da Aritmética Modular que são ensinadas.

Teorema 3. (Pequeno Teorema de Fermat). *Se p é primo e o inteiro x não é múltiplo de p, então $x^{p-1} \equiv_p 1$.*

Esboço da demonstração. As seguintes ideias permitem uma demonstração curta:

- Justificar que basta provar que $x^p \equiv_p x$.
- Reduzir a prova ao caso $x \geq 1$.
- Provar que $x^p \equiv_p x$ por indução em x, usando o binómio de Newton e o facto de que p divide $\binom{p}{k}$ quando $0 < k < p$.

Com estas pistas, a demonstração torna-se um exercício bastante acessível.

Teorema 4. (Teorema de Wilson) *Se p é primo, então $(p-1)! \equiv_p -1$.*

Esboço da demonstração. Comecemos por reparar que 1 e $p-1$ são os únicos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ que são solução da equação $x^2 \equiv_p 1$ (porquê?). De seguida, observemos que se no produto

$$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (p-2) \cdot (p-1)$$

emparelharmos os elementos de $\{2, 3, \ldots, p-2\}$ que são mutuamente inversos módulo p, cancelando esses pares de inversos mútuos, obtemos $(p-1)! \equiv_p 1 \cdot (p-1) \equiv_p -1$. □

As demonstrações destes dois bem conhecidos teoremas tinham sido feitas em aulas anteriores àquela cujo plano serve de base para este texto.

Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a é um *resíduo quadrático módulo n* se existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \equiv_n a$. Na demonstração do seguinte resultado, vemos o Pequeno Teorema de Fermat e o Teorema de Wilson em ação.

Teorema 5. *Seja p um primo ímpar. Então -1 é um resíduo quadrático módulo p se e só se $p \equiv_4 1$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \equiv_p -1$. Então temos

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p x^{p-1} \equiv_p 1$$

onde a última congruência resulta do Pequeno Teorema de Fermat. Portanto, p divide $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1$, o que só é possível se $\frac{p-1}{2}$ é par, isto é, se $p \equiv_4 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $p = 4k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Para $x = (\frac{p-1}{2})!$ temos:

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \cdots 1 \\ &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2} - p\right) \cdots \left(1-p\right). \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 cada um dos últimos $\frac{p-1}{2} = 2k$ fatores, segue que

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \left(p - \frac{p-1}{2}\right) \cdots \left(p-1\right) \\ &\equiv_p 1 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdots \left(p-1\right) \\ &\equiv_p (p-1)! \\ &\equiv_p -1 \end{aligned}$$

onde a última congruência se deve ao Teorema de Wilson. Portanto -1 é um resíduo quadrático módulo p. □

4. CARACTERIZAÇÃO DOS PRIMOS QUE SÃO SOMA DE DOIS QUADRADOS

O próximo lema estabelece as condições para aplicarmos o Teorema de Minkowski na caracterização dos primos que são soma de dois quadrados.

Lema 1. *Consideremos inteiros n e u, com $n \geq 1$. O conjunto*

$$\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \equiv_n ux\}$$

é o reticulado no plano $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,u)$ e $v_2 = (0,n)$. A área da sua região fundamental é n.

Demonstração. Seja $(x,y) \in \Lambda$. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $y = kn + ux$, donde

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x, kn+ux) \\ &= x(1,u) + k(0,n) \in \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2. \end{aligned}$$

Portanto sabemos que $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$. Reciprocamente, seja $(x,y) \in \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$. Então temos

$$(x,y) = \alpha(1,u) + \beta(0,n)$$

para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Necessariamente $x = \alpha$ e $y = ux + \beta n$, obtendo-se $y \equiv_n ux$. Provou-se pois que Λ é o reticulado $\mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$.

Finalmente, a área da região fundamental de Λ é o módulo do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

o qual vemos ser igual a n. □

Estamos em condições de deduzir do Teorema de Minkowski o resultado almejado.

Teorema 6. *Seja p um primo ímpar. Então p é a soma de dois quadrados se e só se $p \equiv_4 1$.*

Demonstração. Graças ao Teorema 5, basta-nos mostrar que p é a soma de dois quadrados se e só se -1 é um resíduo quadrático módulo p.

Se x e y são inteiros tais que $p = x^2 + y^2$, então p não divide x nem y (porquê?). Em particular, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $yz \equiv_p 1$. Então temos

$$0 \equiv_p (x^2 + y^2) \equiv_p (x^2 + y^2)z^2 \equiv_p (xz)^2 + 1.$$

Portanto $u = xz$ satisfaz $u^2 \equiv_p -1$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $u^2 \equiv_p -1$. Seja

$$\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \equiv_p ux\}.$$

Pelo Lema 1, o conjunto Λ é um reticulado cuja região fundamental F tem área p. Consideremos ainda o interior do círculo de centro (0, 0) e raio $\rho = \sqrt{2p}$, ou seja, consideremos o conjunto

$$\mathcal{B}_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2p\}.$$

A área de $\mathcal{B}_\rho$ é $2\pi p$. Como

$$\text{Área}(\mathcal{B}_\rho) > 4\,\text{Área}(F),$$

aplicando o Teorema de Minkowski concluímos que existe $(a,b) \in \mathcal{B}_\rho \cap \Lambda$ tal que $(a,b) \neq (0,0)$. Para um tal (a,b), temos $b \equiv_p ua$, e portanto

$$a^2 + b^2 \equiv_p a^2 + u^2a^2 \equiv_p a^2 - a^2 \equiv_p 0. \qquad (5)$$

Logo $a^2 + b^2$ é um múltiplo de p. Por outro lado, como

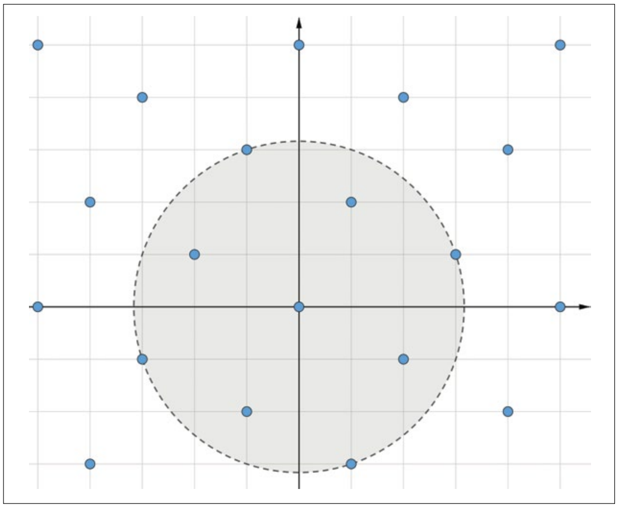
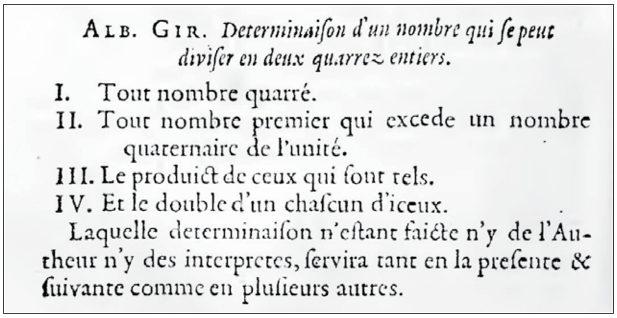


Figura 5. Ilustração da demonstração do Teorema 6 no caso p=5 e u=2.



ALB. GIR. *Determinaison d'un nombre qui se peut diviser en deux quarrez entiers.*

I. Tout nombre quarré.

II. Tout nombre premier qui excede un nombre quaternaire de l'unité.

III. Le produict de ceux qui sont tels.

IV. Et le double d'un chascun d'iceux.

Laquelle determinaison n'estant faicte n'y de l'Autheur n'y des interpretes, servira tant en la presente & suivante comme en plusieurs autres.

Figura 6. A conjetura de Girard na edição de 1625 de L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges, anotada por Girard.[3]

$(a,b) \in \mathcal{B}_\rho \setminus \{(0,0)\}$, temos

$$0 < a^2 + b^2 < 2p. \tag{6}$$

Combinando (5) e (6), vemos que temos de ter a igualdade $a^2 + b^2 = p$. $\square$

O matemático francês Albert Girard (1595-1632) terá sido o primeiro a conjeturar este teorema em 1625 (cf. figura 6). A primeira prova conhecida foi publicada por Euler. Pelo meio, Fermat já havia afirmado ter uma prova completa, numa carta a Mersenne datada do dia de Natal de 1640 [4].

Também foi provado por Euler que a decomposição de um número primo p como soma de quadrados, a existir, é única, no seguinte sentido: se $p = x^2 + y^2 = z^2 + t^2$, com $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, $x \leq y$ e $z \leq t$, então $(x,y) = (z,t)$. Keith Conrad propõe num seu manuscrito uma prova geométrica com reticulados [2].

É frequente encontrar-se na literatura uma prova não geométrica eficiente, devida ao norueguês Axel Thue (1863-1922), da existência e unicidade da decomposição $p = x^2 + y^2$ quando p é um primo da forma $4k+1$ $(x, y, k \in \mathbb{N})$ [4].

5. MAIS DOIS PROBLEMAS

Terminamos com mais dois problemas, nos quais é pertinente aplicar o Teorema de Minkowski.

Problema 2. Seja p um primo. Mostre que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $p = x^2 + 2y^2$ se e só se $p = 2$, $p \equiv_8 1$ ou $p \equiv_8 3$.

Algumas sugestões para a resolução deste problema:

- Use o seguinte resultado: se p é um primo ímpar, então -2 é um resíduo quadrático módulo p se e só se $p \equiv_8 1$ ou $p \equiv_8 3$.
- Use o seguinte facto: a área da região delimitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ (onde $a, b > 0$) é igual a πab.

Uma solução deste e doutros problemas semelhantes encontra-se no livro de Jones & Jones [5].

Problema 3. (Olimpíadas polacas) Sejam a, b, c inteiros positivos tais que $ac = b^2 + b + 1$. Prove que a equação $ax^2 - (2b+1)xy + cy^2 = 1$ tem soluções inteiras.

Uma solução deste problema recorrendo ao Teorema de Minkowski aparece no 13.º capítulo do livro de Andreescu & Dospinescu [3].

REFERÊNCIAS

[1] *https://artofproblemsolving.com/community/c6h42531p269131.*

[2] *https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Picksumofsq.pdf*

[3] T. Andreescu and G. Dospinescu. *Problems from the Book*. XYZ Press, 2010.

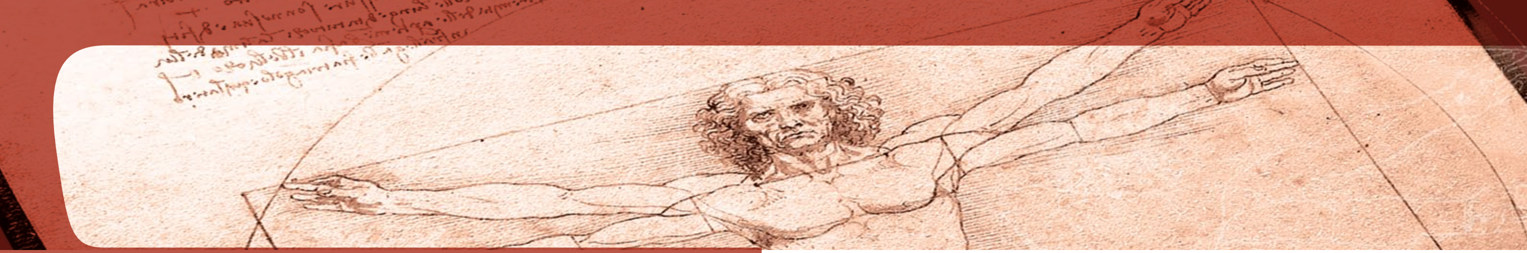
[4] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, 7th edition, 2011.

[5] Gareth A. Jones and J. Mary Jones. *Elementary Number Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1998.

[6] C. D. Olds, Anneli Lax, and Giuliana P. Davidoff. *The Geometry of Numbers*, volume 41 of *Anneli Lax New Mathematical Library*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000. Appendix I by Peter D. Lax.

[7] José Carlos Santos. "O Espaço-tempo". *Gazeta de Matemática*, (179):26–28, 2016.

[3] Imagem de um excerto de uma cópia de *L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges*, de domínio público, disponível na *Thomas Fisher Rare Book Library*, cf. *https://archive.org/details/larithmetiqvedes00stev/page/622/mode/2up?view=theater*.



Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

ARTE E RAZÃO DE OURO
PARTE 1

A razão de ouro é um elemento matemático que associamos habitualmente à beleza e à arte. De onde vem esta ideia?

Quando se fala de matemática e arte, provavelmente uma das primeiras coisas que nos vêm à cabeça é a razão de ouro, e a sua eventual presença em pinturas, especialmente renascentistas. No entanto, esta ideia tem pouco fundamento. Numa série de dois artigos, vamos tentar perceber como veio a associar-se um significado estético a esta proporção.

Comecemos pela definição. Dizemos que dois números positivos, a e b, estão na razão de ouro se

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Podemos encarar esta igualdade como a afirmação de que a sucessão b, a, $a+b$ é uma progressão geométrica. Habitualmente, a relação algébrica é ilustrada com a divisão de um segmento, como vemos na figura 1.

Figura 1: Razão de ouro.

A razão de ouro tem várias propriedades geométricas interessantes, tendo relações com o pentágono estrelado, o hexágono inscrito numa circunferência, o icosaedro e o dodecaedro. Estas propriedades fascinaram várias personalidades ao longo da História, como vamos ver.

A razão de ouro é mencionada nos *Elementos* de Euclides, livro 2, proposição 11: "Cortar um segmento de reta dado de modo que o retângulo contido pelo todo e por um dos segmentos seja igual ao quadrado do segmento restante." Pondo em equação, fica $(a+b)b = a^2$, equivalente à equação definidora da razão de ouro.

Ainda nos *Elementos*, esta secção volta a ser mencionada nos seguintes contextos:

- Livro 4, proposições 10 e 11: Construção de um triângulo isósceles de ouro e pentágono regular.
- Livro 6, definição 2: Define média e extrema razão (o conceito de proporção só é definido no livro 5), uma terminologia que iria permanecer como designação da razão de ouro, e que adotaremos também.
- Livro 13, proposições 16 e 17: Construção do icosaedro e do dodecaedro, com base nas proposições do livro 4.

Na primeira edição em latim dos *Elementos*, no século 13, o editor, Campanus de Novara, faz o seguinte comentário à divisão em média e extrema razão:

> "Maravilhoso, portanto, é o poder de uma linha dividida de acordo com uma razão que tem média e dois extremos: como a maioria das coisas dignas da admiração dos filósofos concorda com ela, essa base ou preeminência procede da natureza invariável das fundações superiores, que uma certa harmonia possa racionalmente unir sólidos tão diversos, primeiro em grandeza, depois no número de bases, depois também em sua forma irracional."

Campanus destaca a aplicação desta razão à construção do icosaedro e do dodecaedro, e também o facto de ser um número irracional.

Em 1509, Luca Pacioli publica uma das suas obras mais famosas, a *Divina Proportione*, em que aplica o adjetivo "divina" a uma construção que até agora estava apenas relacionada com construções de geometria euclidiana. Pacioli, no prólogo da obra, dá quatro razões para esta designação.

1. Esta proporção (razão) é uma e nada mais do que uma. Segundo toda a escola teológica e filosófica, esta unidade é o próprio epíteto de Deus.

2. Correspondência com a Santíssima Trindade. Como *in divinis* há uma mesma substância entre três pessoas, isto é, Pai, Filho e Espírito Santo, da mesma forma, uma mesma proporção (razão) deste tipo pode sempre ser encontrada entre três termos.

3. Como Deus não pode ser definido e nem compreendido por palavras, também este tipo de proporção não pode ser determinado por número inteligível, nem ser representado por número racional.

4. Assim como Deus não pode mudar, e é tudo em todos e está em toda a parte, esta proporção também é invariável em toda a quantidade.

Como vemos, todas as justificações comparam propriedades da média e extrema razão com atributos de Deus, ou seja, a justificação para a exaltação desta construção é ainda centrada na matemática.

O livro *Divina Proportione* tem três partes: a primeira, dedicada à média e extrema razão, a segunda, um tratado de arquitetura que discute a obra de Vitrúvio, e a terceira, uma tradução para italiano do livro de Piero della Francesca, em latim, sobre os cinco corpos regulares. Notamos apenas que, tal como em Vitrúvio, não há no tratado de arquitetura qualquer referência à razão de ouro, sendo todas as proporções apresentadas racionais.

Também Kepler mostrou um interesse especial pela divisão de um segmento em média e extrema razão. É conhecida a sua afirmação seguinte.

> "A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o teorema de Pitágoras, o outro, a divisão de uma linha na média e extrema razão."

Numa carta a Tanckius (um amigo com quem partilhava a paixão da alquimia), Kepler é mais específico, pondo em evidência alguns motivos para este destaque.

> "Entre as proporções contínuas[1], existe um tipo particularmente excelente: a proporção divina, quando das três quantidades as duas menores somadas somam a maior quantidade.
> Eu acredito que essa proporção geométrica serviu de ideia ao Criador quando ele introduziu a criação de semelhança a partir de semelhança, que também continua indefinidamente. Vejo o número cinco em quase todas as flores que abrem caminho para um fruto, isto é, para a criação que existe, não por si, mas pelo fruto a seguir. Quase todas as flores das árvores podem ser incluídas aqui [...]. Mas na geometria, o número cinco, que é o pentágono, é construído por meio da proporção divina que desejo (ou suponho) ser o protótipo para a criação."

Kepler faz assim uma referência à relação entre a média e extrema razão e a Natureza criada, concretizada aqui na botânica. Porém, mais adiante, apresenta outra proximidade à Natureza, agora a um nível astronómico. Kepler vai referir-se ao modelo cosmológico apresentado no seu livro *Mysterium Cosmographicum*, de 1597, ver figura 2.

Neste modelo, as órbitas dos planetas aparecem situadas em esferas, que são sucessivamente inscritas e circunscritas aos cinco sólidos platónicos, na ordem indicada na figura. Kepler obtém assim uma relação proporcional entre os raios das órbitas dos vários planetas, determinada pelos sólidos platónicos. Ora, sucede que os sólidos que aparecem junto à órbita da Terra são o icosaedro (inscrito) e o dodecaedro (circunscrito), que são justamente os dois sólidos que incluem, na sua construção, uma referência à média e extrema razão. Escreve então Kepler o seguinte na mesma carta.

> "Além disso, existe entre o movimento do Sol (ou, como eu acredito, da Terra) e o de Vénus, que está no topo da capacidade de geração, a proporção de 8 a 13, que, como iremos ver, está muito perto da proporção divina.
> Por fim, de acordo com Copérnico, a esfera terrestre está a meio caminho entre as esferas de Marte e Vénus. Obtém-se entre eles a proporção do dodecaedro e do icosaedro, que na geometria são ambos derivados da proporção divina; é na nossa Terra, no entanto, que o ato procriativo ocorre."

Há assim uma referência aos sólidos platónicos que têm

[1] Isto é, progressões geométricas.

[2] Fonte: Domínio público, via *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_Platonic_Solids.tif*.

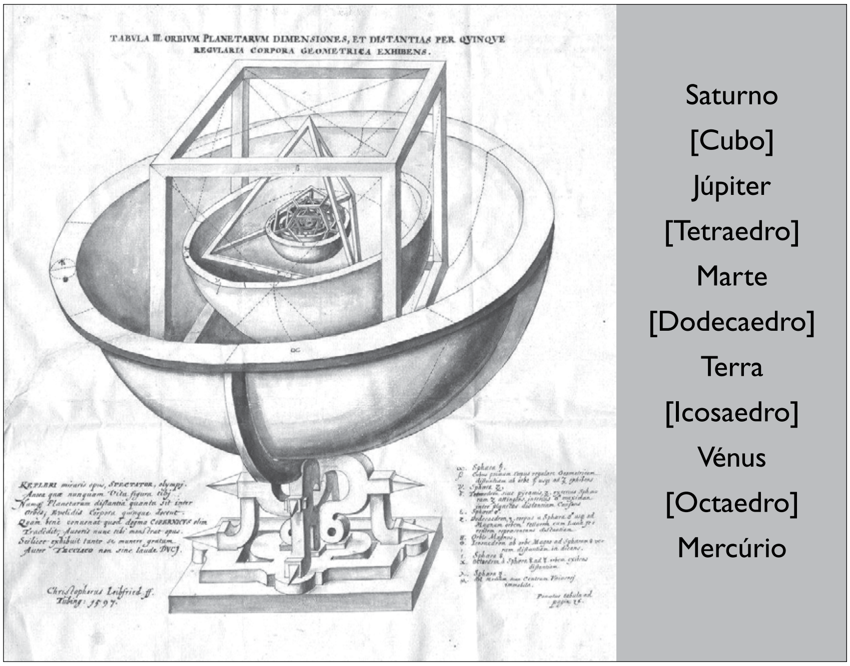


Figura 2: Modelo do sistema solar segundo o *Mysterium Cosmographicum* de Kepler.[2]

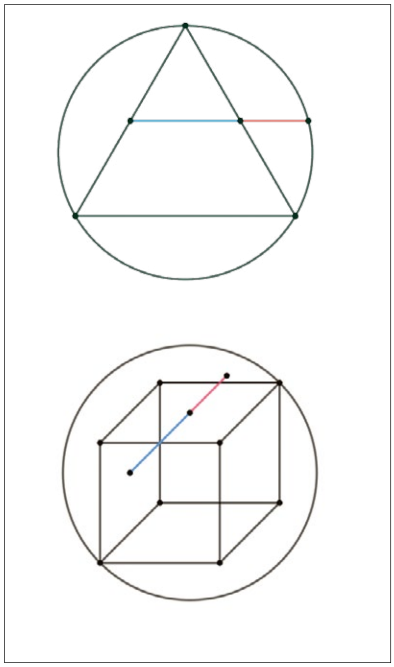


Figura 3: Duas ocorrências da razão de ouro.

uma proximidade especial com a razão de ouro, aqui num contexto de uma descrição cosmológica, associada à vida que apenas existe na Terra.

Vemos assim que, até ao Século 16, o destaque dado à "média e extrema razão" continha sempre referências às suas propriedades matemáticas, ainda que se lhe associassem significados não matemáticos, místicos ou religiosos. No entanto, não encontrámos referências a relações com a arte. No próximo texto veremos que, no Século 19, a situação mudará.

Para já, deixamos aqui, na figura 3, duas construções geométricas em que surge a razão de ouro, algo inesperadamente, que convidamos os leitores a analisar. Estas duas construções são devidas ao geómetra amador George Odom (do Século 20). Na primeira, os extremos do segmento azul são os pontos médios dos lados do triângulo equilátero, na segunda, os extremos do segmento azul são centros das faces do cubo, o outro extremo do segmento vermelho está na esfera circunscrita ao cubo[3]. Em ambos os casos, o segmento colorido está dividido na razão de ouro.

[3] Para demonstrar a ocorrência da razão de ouro nestas figuras, é útil (mas não necessário) saber o teorema relativo a duas cordas de circunferência que se intersetam, por vezes chamado a potência de um ponto.

REFERÊNCIAS

[1] Mario Livio, *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most aAstonishing* Number. Broadway Books, 2002.

[2] Roger Herz-Fischler, *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover, 1998.

[3] *The Golden Section in the Nexus Network Journal*, Nexus, 2002.

Coordenação do espaço ARTE E MATEMÁTICA:
Pedro J. Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

NÃO EXAGEREMOS…

Tornou-se popular desde há vários anos afirmar que a atriz Hedy Lamarr for a criadora do protocolo Wi-Fi e até mesmo que foi matemática. Não será bem assim…

Existe um *meme* que circula pela internet em que se podem ver retratos de Jack Dorsey, Mark Zuckerberg e Steve Jobs. Sobre estes retratos estão as frases (em inglês) "Criei o Twitter", "Criei o Facebook" e "Criei a Apple", respetivamente. Abaixo dos retratos anteriores, está um retrato bastante maior da atriz Hedy Lamarr, sobre o qual está a frase "Criei o Wi-Fi". O que é que há de verdadeiro aqui? E, já agora, quem foi Hedy Lamarr?

Antes de se responder a estas perguntas, convém saber o que significa Wi-Fi[1]. Trata-se de uma família de protocolos de comunicação através de redes sem fios, que foram desenvolvidos no Institute of Electrical and Electronics Engineers (mais conhecido pela sigla IEEE) na década de 1990 pelos engenheiros Vic Hayes e Bruce Tuch. Isto só por si permite ver que há algo de errado no *meme* anterior, pois embora a possibilidade de acesso à *internet* através de redes sem fios seja de facto importante para as redes sociais (e, em particular, para o Twitter e o Facebook), a Apple dedica-se sobretudo a fabricar computadores e telemóveis, tendo começado a fabricar computadores em 1976, muito antes de a internet estar largamente difundida e, claro, muito antes de esta ser transmitida através de redes sem fios.

Por seu lado, Hedy Lamarr (veja-se [1]) foi uma atriz norte-americana de origem austríaca. Nasceu no Império Austro-Húngaro em 1914 e o seu nome de batismo era Hedwig Eva Maria Kiesler. Ficou fascinada pelo cinema ainda na adolescência e fez diversos filmes na Áustria,

Figura 1.

na Alemanha e na Checoslováquia até se casar, em 1933, com um fabricante de armas austríaco, Friedrich Mandl, e conheceu tanto Hitler como Mussolini em eventos sociais organizados por ele. Em 1937 fugiu ao marido (que não a deixava trabalhar como atriz) e foi descoberta

[1] Para mais detalhes veja-se, por exemplo, *O que é Wi-Fi? (conceito e versões)*, de Emerson Alecrim: *https://www.infowester.com/wifi.php*.

em Londres pelo então chefe da Metro-Goldwyn-Mayer, Louis B. Mayer, sendo o apelido "Lamarr" uma sugestão da mulher de Mayer (tratou-se de uma homenagem à atriz Barbara La Marr). Fez o seu primeiro filme norte-americano (*Algiers*) em 1938 e o maior sucesso da sua carreira foi *Sansão e Dalila* (1949), onde foi dirigida por Cecil B. DeMille. Fez o seu último filme em 1958 e faleceu em 2000, após ter passado os últimos anos da sua vida em isolamento quase completo, preferindo conversar com os amigos e até com os próprios filhos unicamente por telefone.

Perante esta curta introdução à vida de Hedy Lamarr, poderá parecer estranho que o seu nome esteja associado ao Wi-Fi. Acontece que Hedy Lamarr tinha bastante tempo livre e, sendo pouco dada a atividades sociais, usava o seu tempo para inventar. Em 1941, ainda antes de os Estados Unidos começarem a participar na Segunda Guerra Mundial, ela apercebeu-se de um problema técnico que estava a prejudicar a Marinha do seu país adotivo. O problema era este: quando um torpedo era disparado, o navio (ou submarino) que o lançara enviava sinais de rádio para o dirigir em direção ao alvo. No entanto, se o inimigo soubesse qual era a frequência que estava a ser empregue para enviar esses sinais, podia emitir outros sinais usando a mesma frequência a fim de tornar ininteligíveis as instruções recebidas pelo torpedo.

Hedy Lamarr teve uma ideia para lidar com este problema: saltos de frequência. Consiste no seguinte: o rádio que emite sinais para o torpedo vai mudando de frequência e, de cada vez que a frequência muda, o torpedo também procura sinais emitidos na nova frequência. Para tal, é preciso, naturalmente, que esses saltos de frequência estejam sincronizados entre o emissor e o recetor. Na proposta de Hedy Lamarr, essa sincronização seria obtida por um processo mecânico; mais precisamente, através de rolos de papéis perfurados, colocados tanto no rádio como no torpedo. Os furos nos rolos indicariam as frequências.

Acontece que Hady Lamarr não fez isto sozinha. Sentiu a necessidade de ter apoio por parte de alguém mais competente do que ela do ponto de vista da tecnologia e obteve esse apoio a partir de uma fonte inusitada: não de um engenheiro, mas sim de um compositor, George Antheil. Uma obra de Antheil (de facto, a sua obra mais famosa) era o *Ballet Méchanique*, de cuja instrumentação faziam parte 16 pianolas,[2] que tinham de estar sincronizadas. Como tal, Antheil

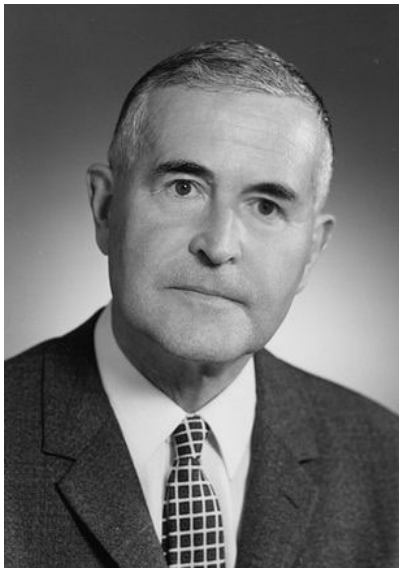


Figura 2.
Gustav Guanella.

tinha prática em lidar com este tipo de situações. Esta dupla improvável conseguiu levar o trabalho até ao fim. Submeteram um pedido de patente a 10 de junho de 1941, e esta foi-lhes atribuída a 11 de agosto do ano seguinte.[3] No entanto, a ideia deles nunca foi testada. A patente expirou em 1959 (curiosamente, o ano da morte de Antheil) e nunca foi renovada.

Como se pode ver, há outro problema com o *meme* mencionado no início deste texto: Hedy Lamarr não patenteou esta ideia sozinha, mas sim em colaboração com George Antheil. E nunca defendeu que a invenção patenteada fosse toda da sua autoria.

Quanto ao uso dos rolos de papel perfurados, é perfeitamente claro que não existem tais dispositivos nos nossos portáteis nem nos nossos *smartphones*. Não é daí que o nome de Hedy Lamarr veio a estar associado ao Wi-Fi. É, isso sim, dos saltos de frequência. Aparentemente, ela acreditava tratar-se de uma ideia nova. Mas estava enganada; de facto, vários autores tinham-na tido antes dela (veja-se [2]). Por exemplo, o inventor holandês Willem Broertjes submeteu um pedido de patente em 1929 para manter secretas mensagens enviadas por telegrafia sem fios, precisamente por meio de saltos de frequência.

Além disso, o Wi-Fi não usa saltos de frequência. Mais precisamente, não os usa por uma ordem pré-estabelecida registada tanto da parte do emissor como do recetor. Usa um outro sistema, chamado *direct sequence spread spectrum* (ou DSSS), que se deve a um inventor suíço, Gustav Guanella (cujo retrato pode ser visto na figura 2), que obteve a respetiva patente em

Figura 3.

1946.[4] O seu objetivo também era o de poder transmitir mensagens através de redes sem fios de maneira a manterem-se secretas. Além disso, não depende de um sistema mecânico (como os rolos perfurados) para funcionar. Quem observar o *meme* do início deste texto e imaginar o retrato de Hedy Lamarr que se pode aí ver substituído pelo de Guanella facilmente irá concluir que não teria, nem de perto, a mesma força.

Quem tiver lido este texto até aqui poderá, independentemente de o ter achado ou não interessante, ficar a perguntar-se o que é que tem a ver com matemática. O que foi escrito atrás não tem, de facto, nada a ver. Mas, em contrapartida, o *meme* que se pode ver na figura 3 tem a ver e muito. O texto por baixo do retrato começa por explicar quem é a retratada (*A atriz Hedy Lamarr foi em tempos descrita como "a mulher mais bela do mundo")*. É em seguida afirmado, entre outras coisas, que foi matemática e também que foi a inventora dos saltos de frequência, que esta tecnologia é empregue no Bluetooth e no Wi-Fi, que foi ignorada e que outros ficaram com o crédito da descoberta.

Infelizmente, parece que há muita gente a acreditar que divulgar falsidades destas poderá ser bom para a matemática e para a ciência em geral.

REFERÊNCIAS

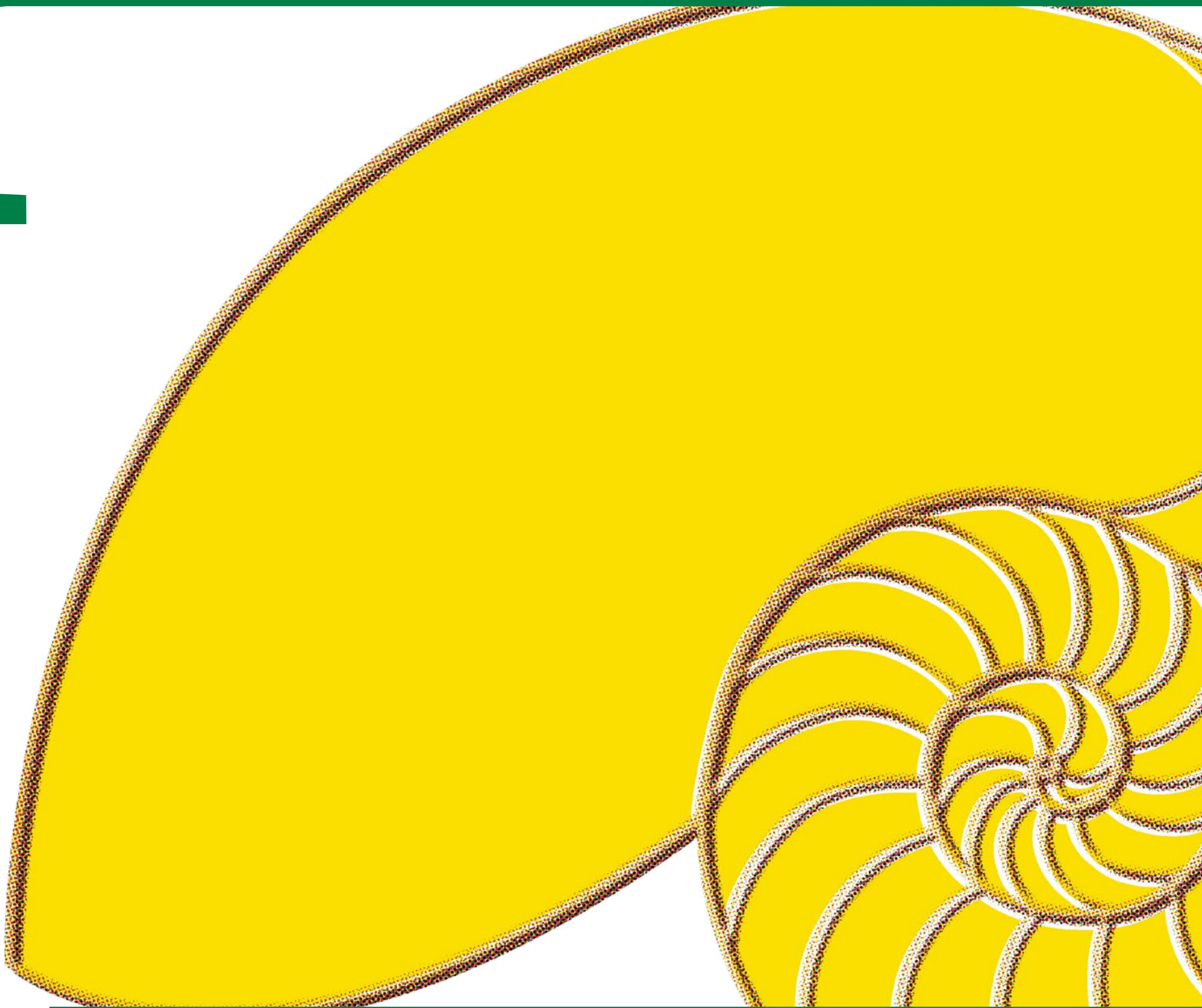
[1] R. Rhodes, *Hedy's Folly: The Life and Breakthrough Inventions of Hedy Lamarr, the Most Beautiful Woman in the World*, Doubleday, 2011.

[2] T. Rothman, "Random Paths to Frequency Hopping", *American Scientist* 107, pp. 46–53 (2019)

[2] Veja-se *Pianola*, de Soraia Simões de Andrade: *https://www.muralsonoro.com/mural-sonoro-pt/2014/2/6/pianola*

[3] *Secret communication system: https://patents.google.com/patent/US2292387A/en.*

[4] Veja-se No, *Hedy Lamarr Did Not 'Make' Wi-Fi: Why She Wasn't a Science Genius, and How Wi-Fi Really Got Made*, de Kimberly Moravec: *https://kimberlymoravec.medium.com/no-hedy-lamarr-did-not-make-wi-fi-92ac4956b9e.*



UMA FÓRMULA DE TIPO BINET PARA OS NÚMEROS DE GEONARDO

Catarina Moreira[a], Pedro França[b] e Patrícia D. Beites[c]
Universidade da Beira Interior[a, b]
Dep. de Matemática e Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior [c]
catarina.a.moreira@ubi.pt[a], pedro.franca@ubi.pt[b] e pbeites@ubi.pt[c]

O termo "números de Geonardo" – forma abreviada de designar uma generalização dos números de Leonardo criada por P. D. Beites - é inspirado na obra intitulada *Proofs that Reallly Count*, na qual A. T. Benjamin e J. J. Quinn definem os números de Gibonacci – forma abreviada de designar os números de Fibonacci por eles generalizados.

1. A SEQUÊNCIA DE LEONARDO

Uma das mais conhecidas sequências de números inteiros é a de Fibonacci, $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } n \geq 2.$$

Outra sequência de números com esta relacionada, estudada por Catarino e Borges em [6], Alp e Koçer em [1] e Beites e Catarino em [4], é a de Leonardo. A sequência de Leonardo, $\{Le_n\}_{n=0}^{\infty}$, é a entrada A001595 em [16] e definida por:

$$Le_0 = Le_1 = 1 \text{ e } Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } n \geq 2.$$

Para $n \in \mathbb{N}_0$, a relação $Le_n = 2F_{n+1} - 1$, que interliga as duas sequências mencionadas, foi referida por Dijkstra em [7] e demonstrada, recorrendo a indução matemática forte, por Catarino e Borges em [6]. O renomeado cientista da computação Dijkstra escreve, em [7], estar a fazer deduções e cálculos absolutamente elementares e desprovidos de interesse científico, mas está interessado em alguns números e precisa das fórmulas! Nesta mesma referência [7], é ainda possível observar a aplicação do Teorema Fundamental das Recorrências Lineares, por Dijkstra, para chegar a uma fórmula fechada para F_n.

A sequência de Leonardo é parte do algoritmo de procura *smoothsort*, em [8], de Dijkstra. Este algoritmo resolve o problema do caminho mais curto entre os vértices de um grafo, sendo o nó de origem escolhido por quem o utiliza e produzindo assim uma árvore de menor custo; funciona apenas com grafos de pesos positivos. É utilizado em artigos recentes, como [10] e [15], realçando assim a sua ainda atual importância. Os números de Leonardo, por serem obtidos por recorrência, tornam o algoritmo mais simples; além disso, a sequência começa em 1 e tem-se a referida restrição aos pesos dos grafos, daí a sua utilização.

2. AS SEQUÊNCIAS DE GEONARDO

Em [3], para cada $a \in \mathbb{N}_0$, a sequência de Geonardo associada a a, $\{Ge_n\}_{n=0}^{\infty}$, é definida por:

$$Ge_0 = Ge_1 = a \text{ e } Ge_n = Ge_{n-1} + Ge_{n-2} + a, n \in \mathbb{N}_0, \text{ tal que } n \geq 2.$$

Os primeiros números da sequência de Geonardo associada a a, ou números de Geonardo associados a a, são a, a, $3a$, $5a$, $9a$, $15a$ e $25a$. Com $a = 1$ obtém-se a definição e os primeiros números da sequência de Leonardo, $\{Le_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Uma estratégia para lidar com recorrências lineares como a de $\{Ge_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a utilização do chamado, por Fleischer e Shallit em [9], método dos aniquiladores. A um operador que aniquila uma sequência, ou seja, que a transforma na sequência nula, chama-se aniquilador dessa sequência. O referido método foi explicado nos artigos [11-13] de Jeske e, utilizando o polinómio característico da fórmula de uma recorrência linear, por André e Ferreira em [2].

No que se segue, S denota um operador *shift* ou translação, aplicação linear definida, para qualquer sequência $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, por $S(s_n) = s_{n+1}$. O operador *shift*, também conhecido como operador de deslocamento de bits em Ciências da Computação, só executa com números positivos, tendo como objetivo fazer o deslocamento de bits de uma expressão do tipo inteiro ou enumeração para a esquerda, denotado como "<<", ou para a direita, denotado como ">>".

Lema 2.1. *O aniquilador de* $\{Ge_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é*

$$p(S) = S^3 - 2S^2 + id$$

onde id *denota o operador identidade.*

Demonstração. Tem-se

$$(S^3 - 2S^2 + id)(Ge_n) = Ge_{n+3} - 2Ge_{n+2} + Ge_n = 0. \quad \square$$

Lema 2.2. Sejam $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então

$$\phi^2 = \phi + 1,\ \phi\psi = -1,\ \phi + \psi = 1, \tag{1}$$

e

$$\phi^3 - \phi^2 - 1 = -\psi,$$

$$\frac{\phi^2}{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 1} = \frac{-\psi}{\phi - \psi},\ \frac{\phi^2 - 2\phi - 1}{\phi^2 - 1} = -1. \tag{2}$$

Demonstração. Tem-se $\phi^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1$. As restantes igualdades em (1) podem também ser obtidas por cálculo direto. Invocando (1), em (2) tem-se

$$\phi^3 - \phi^2 - 1 = (\phi+1)\phi - (\phi+1) - 1 = \phi - 1 = -\psi,$$

$$\begin{aligned}\phi^2(\phi - \psi) &= (1+\phi)(\phi - \psi)\\ &= 2\phi - \psi + 2\\ &= 2(1-\psi) - \psi + 2\\ &= 4 - 3\psi\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\phi^3 + \phi^2 + \phi + 1)(-\psi) &= ((1+\phi)\phi + 1 + \phi + \phi + 1)(-\psi)\\ &= (3+4\phi)(-\psi) = 4 - 3\psi,\end{aligned}$$

$$\frac{\phi^2 - 2\phi - 1}{\phi^2 - 1} = \frac{\phi + 1 - 2\phi - 1}{\phi + 1 - 1} = -1. \qquad \square$$

Teorema 2.3. Sejam $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então

$$Ge_n = \frac{2a\phi}{\phi - \psi}\phi^n + \frac{-2a\psi}{\phi - \psi}\psi^n - a.$$

Demonstração. Invocando o Lema 2.1 e tendo em conta que ψ, ϕ e 1 são as raízes do polinómio $p(t) = t^3 - 2t^2 + 1$, pelo Teorema Fundamental das Recorrências Lineares, Ge_n pode escrever-se como combinação linear de potências de expoente n de ψ, ϕ e 1:

$$Ge_n = \alpha\phi^n + \beta\psi^n + \gamma, \text{ com } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \text{ escalares.}$$

Tomando $n \in \{0, 1, 2\}$ e tendo em conta (1) do Lema 2.2, obtém-se o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a\\ \phi^2\alpha - \beta + \phi\gamma = a\phi\\ \phi^4\alpha + \beta + \phi^2\gamma = 3a\phi^2 \end{cases},$$

cuja solução única é

$$\alpha = \frac{2\phi}{\phi^3 - \phi^2 + \phi - 1}a,\ \beta = \frac{2\phi^2}{\phi^3 + \phi^2 + \phi + 1}a,\ \gamma = \frac{\phi^2 - 2\phi - 1}{\phi^2 - 1}a.$$

Por (2), novamente, do Lema 2.2, chega-se à fórmula pretendida.

Do Teorema 2.3 tem-se uma fórmula fechada para Ge_n que pode, ainda, ser escrita como

$$Ge_n = 2a\frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} - a.$$

Esta fórmula de tipo Binet[1] para os números de Geonardo foi previamente obtida em [3] de modo distinto, através da fórmula de tipo Binet para os números de Leonardo em [6, Proposition 2.4] e a relação entre Ge_n e Le_n que, por razões de completude, também se demonstra a seguir.

Teorema 2.4. [3] *Para* $n \in \mathbb{N}_0$, $Ge_n = aLe_n$.

Demonstração. Provemos por indução matemática forte em n. Para $n = 0$: $Ge_0 = aLe_0 = a$, logo a igualdade verifica-se; também para $n = 1$: $Ge_1 = aLe_1 = a$. Suponhamos que a igualdade é válida para $k \leq n$ e provemos que também é válida para $k = n + 1$; assim, tendo $Ge_k = aLe_k$ como hipótese e $Ge_{n+1} = aLe_{n+1}$ como tese, vem que:

$$\begin{aligned}Ge_{n+1} = Ge_{n-1} + Ge_n + a &= aLe_{n-1} + aLe_n + a\\ &= a(Le_{n-1} + Le_n + 1)\\ &= aLe_{n+1}. \qquad \square\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1] Alp, Y., & Koçer, E. G. (2021). "Some Properties of Leonardo Numbers". *Konuralp Journal of Mathematics*, 9 (1), 183-189.

[2] André, C., & Ferreira, F. (2000). *Matemática Finita*. Universidade Aberta.

[3] Beites, P. D. (2023). "Geonardo Numbers". Submetido.

[4] Beites, P. D., & Catarino, P. (2023). "On the Leonardo Quaternions Sequence". *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*. Aceite para publicação.

[5] Benjamin, A. T., & Quinn, J. J. (2003). *Proofs that Really Count*. MAA.

[6] Catarino, P., & Borges, A. (2019). "On Leonardo Numbers". *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89 (1), 75-86.

[7] Dijkstra, E. W. (1981). "Fibonacci Numbers and Leonardo Numbers". *Dijkstra's handwritten notes, https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd07xx/EWD797.PDF*

[8] Dijkstra, E. W. (1982). "Smoothsort, an Alternative for Sorting in Situ". *Science of Computer Programming*, 1, 223-233.

[9] Fleischer, L., & Shallit, J. (2020). "Words with Few Palindromes, Revisited". *Pré-publicação arXiv, https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.12464*

[10] Jabbar, L. S., Abbas, E. I., & Hasan, S. D. (2023). "A Modification of Shortest Path Algorithm According to Adjustable Weights Based on Dijkstra Algorithm". *Engineering and Technology Journal*, 41 (2), 1-16.

[11] Jeske, J. A. (1963). "Linear Recurrence Relations - Part I". *Fibonacci Quarterly*, 1 (2), 69-74.

[12] Jeske, J. A. (1963). "Linear Recurrence Relations - Part II". *Fibonacci Quarterly*, 1 (4), 35-39.

[13] Jeske, J. A. (1964). "Linear Recurrence Relations - Part III". *Fibonacci Quarterly*, 2 (3), 197-203.

[14] Marinho, A. (2022). *Curiosidades sobre o Matemático, Físico e Astrónomo Francês Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856).* Clube de Matemática SPM, *https://clube.spm.pt/news/curiosidades-sobre-o-matemtico-fsico-e-astrnomo-francs--jacques-philippe-marie-binet-1786-1856*

[15] Salem, I. E., Mijwil, M. M., Abdulqader, A. W., & Ismaeel, M. M. (2022). Flight-Schedule Using Dijkstra's Algorithm with Comparison of Routes Findings. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 12 (2), 1675-1682.

[16] Sloane, N. J. A. (2022). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. The OEIS Foundation, *https://oeis.org*

Agradecimentos

P. D. Beites agradece ao CMA-UBI (Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior), projeto UIDB/00212/2020 da FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), e ao CIDTFF-UA (Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro), projeto UIDB/00194/2020 da FCT; um agradecimento especial a J. O. Shallit, pela indicação do método dos aniquiladores e dos artigos do *Fibonacci Quarterly* nas referências. Os autores estão gratos ao revisor e aos editores, pela leitura e pelas sugestões que melhoraram o manuscrito.

[1] As expressões "fórmula de tipo Binet" e "fórmula de Binet" são habitualmente utilizadas para designar uma fórmula fechada (não recursiva) para o n-ésimo termo de uma sequência de números. Trata-se de uma homenagem ao matemático, físico e astrónomo francês Jacques Philippe Marie Binet, [14], quem estabeleceu a chamada fórmula de Binet para os números de Fibonacci: $F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$, [2, 6].

SOBRE OS AUTORES

Catarina Moreira e Pedro França são estudantes das Licenciaturas, respetivamente, em Matemática e Aplicações e em Engenharia Informática, na Universidade da Beira Interior (UBI).

Patrícia D. Deites é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da UBI, Membro Integrado do CMA-UBI e Membro Colaborador do CIDTFF-UA. Os seus interesses de investigação prendem-se com tópicos de Álgebra, em particular Não Associativa, e de Educação Matemática.

Paulo Infante,
Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, IIFA, Universidade de Évora;
Departamento de Matemática, ECT, Universidade de Évora
pinfante@uevora.pt

DADOS QUE PODEM SALVAR VIDAS: MODELAÇÃO E PREDIÇÃO DE ACIDENTES DE VIAÇÃO PARA UMA SEGURANÇA RODOVIÁRIA MAIS EFICAZ

A sinistralidade rodoviária é um dos grandes problemas da nossa sociedade, tendo consequências sociais relevantes, quer na vida e na saúde das vítimas e dos seus familiares, quer no impacto em outras dimensões da vida em sociedade. O projeto Modelação e Predição de Acidentes de Viação no distrito de Setúbal (MOPREVIS) surgiu com o objetivo fundamental de contribuir para a redução da sinistralidade grave neste distrito. Utilizando alguns dados e resultados obtidos no projeto, este artigo mostra como a aplicação de ferramentas de base matemática num contexto de transdisciplinaridade pode conduzir a resultados muito importantes para apoiar cientificamente a tomada de decisão, contribuindo para tornar mais eficaz a segurança rodoviária.

1. INTRODUÇÃO

As vias rodoviárias constituem uma rede dinâmica de mobilidade que incorpora uma preocupação emergente: os acidentes de trânsito (colisões, despistes ou atropelamentos). Um acidente pode causar, para além dos danos materiais, perdas humanas e/ou danos físicos e psicológicos irreparáveis a muitas das vítimas. Segundo a Organização Mundial da Saúde [1], os acidentes de viação causam aproximadamente 1.3 milhões de vítimas mortais anualmente e entre 20 a 50 milhões de feridos, sendo a principal causa de morte de crianças e adultos jovens entre os 5 e os 29 anos. Segundo a Comissão Europeia, Portugal é o oitavo país da União Europeia com mais vítimas mortais por milhão de habitantes (54, ou seja, mais 9 que a média dos 27 países) [2].

A dimensão económica é também muito relevante, tendo em conta os custos humanos, perda de produtividade, custos médicos, danos de propriedade, custos administrativos, entre outros. De acordo com um estudo divulgado pela Autoridade Nacional da Segurança Rodoviária (ANSR) [3], os acidentes de viação registados em Portugal no ano de 2019 tiveram um custo económico e social para o país estimado em 6422.9 milhões de euros, um valor que representou 3,03% do PIB nesse ano.

Neste contexto, a procura por soluções eficazes que possam prevenir acidentes de viação assume uma importância inquestionável. Aqui a Matemática, intrínseca à Ciência de Dados e à Inteligência Artificial, assume um papel fundamental que pode salvar vidas, nomeadamente através da capacidade de analisar e modelar dados, que constitui uma das maiores esperanças na luta contra acidentes de trânsito. Descobrindo padrões ocultos e analisando informação histórica, é possível identificar fatores de risco e, mais importante, predizer acidentes antes que ocorram.

O Projeto MOPREVIS foi concebido para dar resposta a uma necessidade de uma Força de Segurança, a Guarda Nacional Republicana (GNR), no distrito de Setúbal, onde a sinistralidade rodoviária grave (definida como aquela em que resultam feridos graves e/ou mortos) era muito elevada. Este distrito, em particular, em 2018 registou o maior número de vítimas mortais entre todos os distritos do país, apesar de não ser dos distritos com maior número de acidentes. O projeto teve como objetivo fundamental contribuir para a redução da sinistralidade grave no distrito de Setúbal. Para tal foram traçados 5 objetivos específicos: 1) encontrar determinantes para a ocorrência e gravidade dos acidentes; 2) construir um sistema de informação espacial; 3) traçar o perfil dos intervenientes; 4) obter modelos preditivos para a ocorrência de acidentes por troço de estrada; 5) dotar a GNR com uma ferramenta digital de apoio à tomada de decisão em tempo real, de modo a permitir a otimização e a gestão dos recursos para a prevenção. Para atingir estes objetivos, foi formada uma equipa transdisciplinar, juntando investigadores dos departamentos de matemática, informática, geociências e sociologia da Universidade de Évora, com membros do Comando Territorial da GNR de Setúbal. Uma parte dos resultados obtidos no Projeto foi apresentada de uma forma essencialmente visual, suportada em infografias e na respetiva interpretação, privilegiando uma abordagem mais generalista e menos técnica, em [4]. Outros resultados importantes podem ser vistos em [5-9].

Neste artigo, tendo como pano de fundo os resultados obtidos através do projeto MOPREVIS, ilustra-se como a aplicação de algumas ferramentas, de base matemática, na análise e modelação de dados de acidentes de viação pode conduzir a resultados muito importantes para apoiar cientificamente a tomada de decisão, permitindo tornar mais eficaz a segurança rodoviária. Na secção 2 apresentam-se duas metodologias estatísticas utilizadas e faz-se uma pequena incursão nos modelos de aprendizagem automática. Na secção 3 são apresentados, de uma forma crítica, alguns resultados obtidos com as referidas metodologias estatísticas. Na secção 4 explica-se a construção dos modelos de predição implementados na ferramenta digital atualmente a ser utilizada pela GNR de Setúbal. Termina-se, na secção 5, com algumas considerações de natureza geral.

2. ALGUMAS METODOLOGIAS ESTATÍSTICAS UTILIZADAS

A Carta de Controlo de Qualidade

De uma forma muito simples pode definir-se uma carta de controlo como uma representação gráfica de valores de uma estatística amostral (por exemplo, média, desvio padrão, amplitude, proporção, número de não conformidades) em função do tempo. A estatística mede uma determinada característica da qualidade com base numa amostra aleatoriamente selecionada. A característica da qualidade pode assumir uma índole quantitativa, isto é, pode ser medida e expressa por um número (controlo por variáveis) ou uma índole qualitativa (controlo por atributos).

As cartas de controlo mais usuais foram desenvolvidas por Walter A. Shewhart em finais da década de 1920, constituídas por uma linha central que representa o valor médio da característica da qualidade, no caso em que o processo se encontra sob controlo estatístico, e por duas linhas simetricamente colocadas acima e abaixo da linha central, designadas por limites de controlo. Designando por W uma estatística amostral que mede uma determinada característica da qualidade com média μ_W e desvio padrão σ_W, a carta ficará definida com uma linha central (LC) igual a μ_W, um limite superior de controlo (LSC) igual a $\mu_W + L \cdot \sigma_W$ e um limite inferior de controlo (LIC) igual a $\mu_W - L \cdot \sigma_W$. O coeficiente L representa a distância dos limites de controlo à linha central medida em unidades do desvio padrão da estatística. Usualmente, toma-se $L = 3$, sendo os limites conhecidos por limites "3-sigma". Desta forma, se a distribuição da estatística amostral for aproximadamente normal, existindo apenas causas aleatórias (de variação inerente ao processo), caso em que se refere que o processo está sob controlo estatístico, em média apenas 27 valores surgem fora dos limites de controlo em cada 10000. O efeito de uma alteração no processo, como consequência do aparecimento de uma causa externa (usualmente designada por causa assinalável), traduz-se numa alteração no(s) parâmetros(s) dessa distribuição de probabilidade que modela a variabilidade aleatória do processo, com o consequente aparecimento de valores da estatística fora dos limites de controlo e/ou de padrões não aleatórios na carta de controlo. Na aplicação apresentada na próxima secção utiliza-se uma *carta c*, cujos limites de controlo e linha central são dados por:

$$LIC = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}; LC = \bar{c}; LSC = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}},$$

onde $\bar{c}$ representa a média do número de ocorrências por unidade de tempo ou espaço. Também se utiliza uma *carta*

u, cujos limites de controlo e linha central são dados por:

$$LIC = \overline{u} - 3\frac{\sqrt{\overline{u}}}{\sqrt{n_i}}; LC = \overline{u}; LSC = \overline{u} + 3\frac{\sqrt{\overline{u}}}{\sqrt{n_i}},$$

onde $\overline{u}$ representa a média do número de ocorrências por unidade e n_i a dimensão da unidade i.

Quando se pensa que poderá existir variação entre as categorias de uma dada variável categórica, deve optar-se por representar os dados para as categorias na mesma carta de controlo usando *rational ordering* (RO) ou *rational subgrouping* (RS). RO significa que os dados para todas as categorias são apresentados sequencialmente usando uma ordem temporal (por exemplo, semanas ou meses) de modo a ter pontos suficientes para uma carta sólida (usualmente entre 20 e 30, podendo em alguns casos ser ligeiramente inferior). RS significa que os dados para cada uma das categorias são agregados de modo a ter uma comparação transversal das várias categorias, usando apenas um ponto para cada categoria. Quando se aplica RS, os pontos deixam de estar ligados, pois já não se observam os dados ao longo do tempo. Tal permitirá avaliar se alguma categoria é uma causa assinalável relativamente às restantes. Neste caso, a obtenção de cartas de controlo separadas para cada categoria permitirá averiguar se há ou não estabilidade do processo dentro de cada categoria, podendo conduzir a intervenções sobre o próprio processo para uma melhoria. Vários exemplos pormenorizados de aplicação desta metodologia na área da saúde podem ser vistos, por exemplo, em [10]. Note-se que, tendo em conta a evolução do processo ao longo do tempo, a abordagem RO é muito mais informativa e potente do que a avaliação realizada por uma comparação transversal entre as várias categorias.

O Modelo de Regressão Logística

Ao pretender modelar uma variável resposta binária, para a qual o resultado da resposta de cada indivíduo é um "sucesso" ou um "insucesso", o modelo de regressão logística é o mais aplicado. Este é um modelo linear generalizado com componente aleatória binomial [11]. Admita-se que se tem um conjunto de possíveis variáveis explicativas independentes, que podem ser representadas por um vector $\mathbf{x}^\mathsf{T} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Representando a probabilidade condicional do resultado ser um sucesso por $Pr(Y = 1|\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x})$, o modelo de regressão logística é definido por

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{e^{g(\mathbf{x})}}{1 + e^{g(\mathbf{x})}}.$$

A função g lineariza a resposta sendo designada por função *logit*

$$g(\mathbf{x}) = \ln\left(\frac{\pi(\mathbf{x})}{1 - \pi(\mathbf{x})}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p,$$

mostrando que $\pi(\mathbf{x})$ aumenta ou diminui conforme a função logística e permitindo interpretar mais facilmente o efeito de cada variável. Se algumas das variáveis independentes forem categóricas (como o sexo ou o tipo de via), utiliza-se uma coleção de variáveis *dummy*, sendo a estratégia mais usual a de criar k-1 destas variáveis quando existem k categorias. Assim, representando por δ_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, k$-1 as variáveis *dummy* e por β_{ij} os seus coeficientes, então o *logit* do modelo para p variáveis, onde a i-ésima é categórica com k categorias, pode ser escrito como

$$g(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{ij}\delta_{ij} + \ldots + \beta_p x_p.$$

A grande popularidade dos modelos de regressão logística está relacionada com a facilidade de interpretação dos coeficientes através do *Odds Ratio* (OR). Por exemplo, numa variável dicotómica em que $x = 1$ traduz a presença de uma dada caraterística e $x = 0$ a sua ausência, o OR consiste na razão entre a chance/possibilidade (*odds*) de ocorrer "sucesso" entre os indivíduos com $x = 1$, dado por $\pi(1)/[1 - \pi(1)]$ e o (*odds*) de ocorrer "sucesso" entre os indivíduos com $x = 0$, dada por $\pi(0)/[1 - \pi(0)]$. Esta razão de chances neste exemplo é dada pela exponencial do coeficiente de x no modelo de regressão logística e traduz o aumento (se o coeficiente é positivo) ou diminuição (se o coeficiente é negativo) das chances/possibilidades de ocorrer "sucesso" nos indivíduos com a característica presente relativamente aos indivíduos com a característica ausente. O "sucesso" é visto como a ocorrência de um qualquer evento (seja ele positivo ou negativo) que interessa modelar, podendo também ser o estar acima ou abaixo de um ponto de corte de uma variável contínua ou ordinal, tornando o modelo aplicável nas mais diversas áreas do conhecimento.

As estimativas dos parâmetros são obtidas por máxima verosimilhança. Desenvolvimentos deste modelo, estratégias de modelação, inferência sobre os parâmetros, bondade de ajustamento, validação de pressupostos e análise de resíduos podem ser consultados, por exemplo, em [12].

Modelos de Aprendizagem Automática

Em termos gerais, os modelos de aprendizagem automática (*machine learning* - ML) são sistemas computacionais que a partir de algoritmos assimilam conhecimento com base em dados e utilizam esse conhecimento para realizar predições, apoiar a tomada de decisões informadas e executar tarefas complexas. É evidente uma forte base matemática subjacente a esses algoritmos, abrangendo, por exemplo, conceitos de álgebra linear, análise matemática e probabilidade e estatística. São tais ferramentas matemáticas que viabilizam a compreensão de como os algoritmos aprendem a partir dos dados, otimizam os parâmetros e se generalizam para novas situações. As redes neuronais (*Neural Networks* - NN), as máquinas de vetores de suporte (*Support Vector Machines* - SVM) e as árvores de decisão (*Decision Trees* - DT) são exemplos de algoritmos ML que têm uma base sólida em matemática. Além disso, a estatística desempenha um papel fundamental na seleção, avaliação e validação do desempenho dos modelos, bem como na obtenção de informação útil e fiável no apoio à tomada de decisão.

A escolha entre modelos estatísticos clássicos e ML deve ser pautada pela natureza do problema, pela quantidade e qualidade dos dados disponíveis, pela necessidade de interpretação específica dos coeficientes dos modelos e pela complexidade das relações subjacentes. Os modelos ML oferecem vantagens, por exemplo, em situações em que as relações entre variáveis são muito complexas, em que se pretende explorar grandes volumes de dados e/ou lidar com grande variedade de tipos de dados, incorporar informações não estruturadas (textos, sons, imagens), ou numa adaptação automática a alterações nos dados.

Quando se pensa num modelo preditivo, a sua interpretabilidade assume uma menor importância, pois o essencial é que o modelo possa ser validado adequadamente e realize predições precisas. A base de um modelo preditivo eficaz é estabelecida com bom senso e um profundo conhecimento do contexto do problema, considerando dados fiáveis e relevantes, realizando validação e visualização desses dados e considerando um amplo conjunto de ferramentas de modelação para lidar com os diferentes cenários possíveis.

As técnicas de modelação utilizadas com informação estruturada podem ser classificadas como aprendizagem supervisionada (quando existe uma variável objetivo observada nos dados) ou não supervisionada (quando o objetivo é encontrar padrões ou relações entre eles). Na aprendizagem supervisionada destacam-se as NN, SVM, DT e os classificadores bayesianos; na não supervisionada, destacam-se as técnicas de *clustering* e as de redução de dimensionalidade, além das NN que também existem nesta classe [13, 14].

As DT podem ser aplicadas a problemas de regressão ou de classificação. Opta-se por neste artigo focar brevemente as árvores de classificação, pois, além do algoritmo de regressão logística de aprendizagem automática, foram os algoritmos baseados em árvores de classificação, (*Random Forest* (RF), C5.0 e XGBoost), que se mostraram mais eficientes na predição dos acidentes de viação. Uma árvore de decisão é uma estrutura hierárquica que representa um processo de tomada de decisão. No caso das árvores de classificação, a resposta é qualitativa. A árvore é composta por nós de decisão, ramos e folhas. Cada nó representa uma questão (ou teste) sobre um atributo específico, cada ramo indica um resultado (ou caminho possível), e cada folha representa uma categoria da variável resposta. Cada nó pode conduzir a novos nós ou a uma folha. O processo de construção de uma árvore envolve dividir repetidamente o conjunto de dados em subconjuntos com base nos atributos, de modo a maximizar a pureza do nó em cada ramificação. Usualmente é utilizado o Índice Gini ou a entropia para avaliação dessa pureza. O RF é um algoritmo, incluído nas designadas técnicas de *ensemble learning*, que envolvem combinar vários modelos para melhorar o desempenho, a precisão e a capacidade de generalização. Utiliza a abordagem de *Bagging Bootstrap Aggregating* para criar um conjunto de árvores de decisão individuais, sendo as predições de cada árvore combinadas ([15]). O algoritmo C5.0 é uma extensão avançada das árvores de decisão tradicionais, que melhora o desempenho do modelo [16]. Finalmente, o XGBoost (*Extreme Gradient Boosting*) combina várias árvores de decisão, melhorando a precisão das predições por um processo iterativo de construção de árvores [17].

3. ALGUNS RESULTADOS DE ÍNDOLE EXPLICATIVA

Nesta secção apresentam-se alguns resultados obtidos que resultaram da aplicação de cartas de controlo e do modelo de regressão logística descritos na secção anterior. Refira-se que o projeto MOPREVIS permitiu, apesar de várias condicionantes, nomeadamente ao nível da disponibilidade e qualidade dos dados sobre a sinistralidade rodoviária, obter vários resultados importantes, mostrando que a extensão deste projeto para outros distritos pode ser um importante contributo em termos de prevenção e segurança rodoviária. Nos resultados de índole mais explicativa podem destacar-se:

1. Definição dos principais determinantes para a ocor-

rência de acidentes, para a ocorrência de acidentes com feridos graves ou mortos (sinistralidade grave), para a natureza dos acidentes (atropelamento, colisão ou despiste), para a ocorrência de acidentes envolvendo motociclos e para a ocorrência de atropelamentos com vítimas;

2. Conceção de um sistema de informação espacial sobre os acidentes, não só determinando de uma forma consistente *hotspots* e *clusters* de acidentes, mas também concebendo atlas de suscetibilidade de ocorrência de acidentes;

3. Implementação de um novo indicador de gravidade, mais robusto e consistente que os existentes, que considera: a gravidade do acidente; um efeito amortecedor do número de vítimas; um ponderador espacial; e um ponderador temporal;

4. Determinação do perfil dos intervenientes nos acidentes de viação (condutores e vítimas).

A Área e os Dados do Estudo

O distrito de Setúbal está situado a Sul de Lisboa e abrange uma área de 5.064 km^2, divididos em 13 municípios que compreendem áreas urbanas e rurais. O distrito é acessível por importantes vias de acesso a Lisboa e possui diversos pontos turísticos que aumentam o fluxo de trânsito nos períodos de pico.

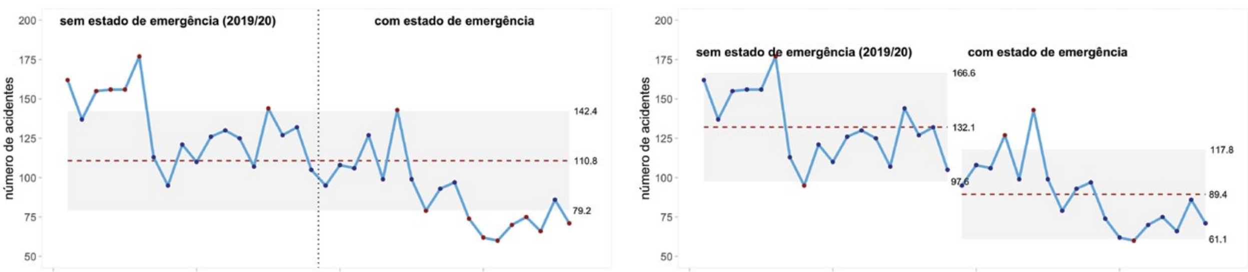
A principal fonte de dados foi o Boletim Estatístico do Acidente de Viação (BEAV), preenchido pelas autoridades policiais para cada acidente de viação, no período entre 2016 e 2022 (com variações do horizonte temporal consoante as abordagens e o momento em que ocorreram) atualizados pela ANSR para as vítimas a 30 dias (entre 2016 e 2019, pois a partir daí não foi recebida nenhuma atualização). Estes dados foram delimitados geograficamente aos acidentes registados pelo Comando Territorial da GNR de Setúbal ocorridos naquele distrito (a GNR tem jurisdição territorial em cerca de 96% do distrito). Os dados obtidos dos registos oficiais foram validados por cruzamento de várias variáveis e as coordenadas dos acidentes com vítimas foram validadas pela mesma entidade. Foram, ainda, incluídas diversas variáveis meteorológicas fornecidas pelo Instituto Português do Mar e da Atmosfera (IPMA) e outras relacionadas com as vias de circulação, informação fornecida pela Infraestruturas de Portugal (IP).

Note-se que o BEAV é apenas o retrato, mas não o filme, do momento do acidente, uma vez que não tem informações recolhidas *a posteriori* como, por exemplo, as vítimas a 30 dias ou os testes de álcool não realizados no momento. Sendo um registo manual, tem naturalmente imprecisões em alguns campos e em algumas coordenadas geográficas, bem como dados em falta, entre outros. O processo de validação foi muito moroso e a equipa de investigação sensibilizou as principais instituições envolvidas na problemática da sinistralidade rodoviária para a necessidade de melhorar a qualidade dos dados e proceder à sua validação. Também não existe informação oficial de variáveis importantes, como a intensidade de tráfego, a velocidade dos veículos, idade do parque automóvel e diversas características dos condutores.

A base final de análise foi composta por mais de 1000 variáveis de diferentes tipos: espaciais, temporais, ambientais, veículos envolvidos, intervenientes, via, tipologia e consequências do acidente. No período entre 2016 e 2019 e entre maio de 2021 e junho de 2022 (em que foram realizadas grande parte das análises), foram registados 36701 acidentes, 207 dos quais originaram vítimas mortais, 555 originaram feridos graves e 7199 originaram feridos leves. No total registaram-se 233 vítimas mortais, 686 feridos graves e 10040 feridos leves.

A intensidade de tráfego é explicativa para o número de acidentes, mas não para a sua gravidade?

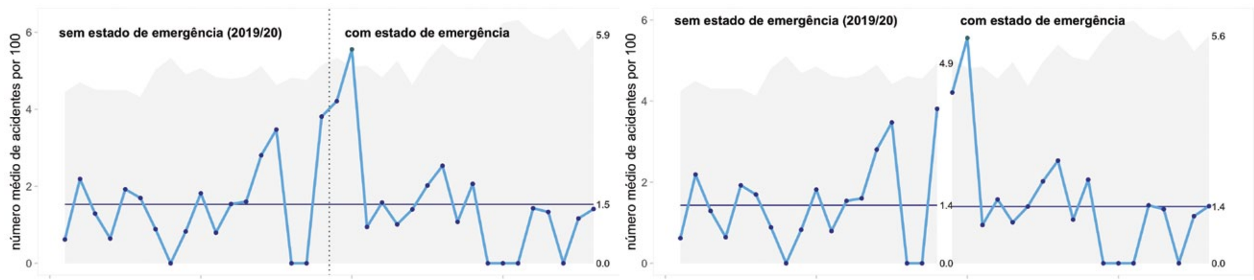
Pretendendo comparar o número de acidentes ocorridos no segundo período do estado de emergência (09/11/2020 a 16/03/2021) com os ocorridos no período homólogo dos anos anteriores, em vez de uma comparação transversal (que não tem em consideração a evolução com o tempo), podem usar-se cartas de controlo. Neste caso, definindo a semana como unidade de tempo, o número de acidentes nesta unidade de tempo pode ser monitorizado por uma *carta c*. Colocando os dois períodos (sem estado de emergência e com estado de emergência) na mesma carta de controlo, pode considerar-se que se usa uma abordagem *rational ordering*, por serem categorias de uma variável global (período). Contudo, neste caso, as observações, no seu conjunto, constituam uma sequência temporal. Na Figura 1(a) pode observar-se que os dois períodos têm distribuições de acidentes claramente diferentes, estando vários pontos acima do LSC e quase todos os pontos acima da LC no período sem estado de emergência, e vários pontos abaixo do LIC e abaixo da LC no período do estado de emergência. As cartas separadas por período (Figura 1(b)), embora ambas com alguns pontos fora dos



(a) com a mesma linha central

(b) com diferentes linhas centrais

Figura 1. *Cartas c* para o número de acidentes por semana.



(a) com a mesma linha central

(b) com diferentes linhas centrais

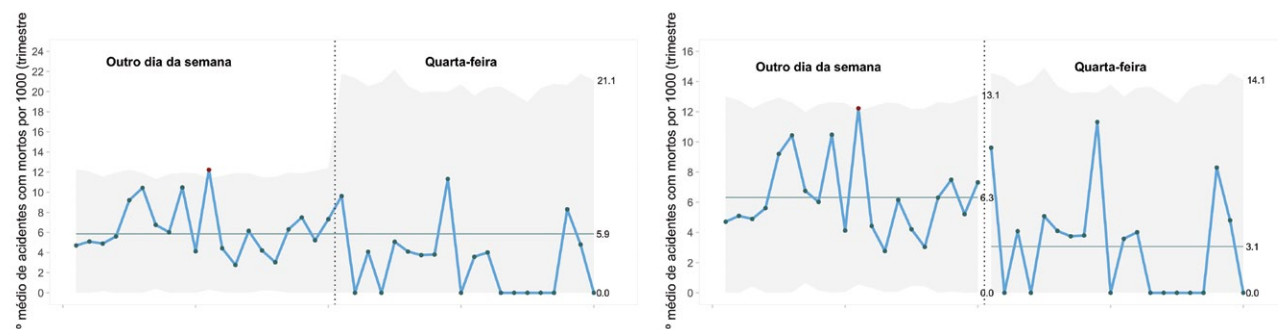
Figura 2. *Cartas u* para o número médio de acidentes de sinistralidade grave, em cada 100, por semana.

limites, permitem concluir que o número médio de acidentes foi menor no período em que vigorou o estado de emergência, onde, como se sabe, houve uma muito menor intensidade de tráfego.

Pensando, agora, no número de acidentes com sinistralidade grave (envolvendo feridos graves ou vítimas mortais), tomando como unidade de contagem o total de acidentes ocorridos numa semana, e atendendo a que este valor é variável, pode aplicar-se neste caso uma *carta u* e adotar a mesma abordagem que foi usada na *carta c*. Na figura 2(a) pode observar-se que os dois períodos têm distribuições de acidentes idênticas. Surge apenas um ponto acima do LSC no período do estado de emergência, existindo 8 pontos consecutivos abaixo da linha central que podem ser um indício de diminuição do valor da estatística, embora a probabilidade associada seja um pouco superior (0.0039) à de se obter um valor fora dos limites. Contudo, observando a Figura 2(b), onde se estimou a estatística eliminando o valor acima do LSC, conclui-se que não há base estatística para afirmar que se tenha registado uma redução no número médio de acidentes com sinistralidade grave no período em que decorreu o estado de emergência.

Quartas-feiras com menos acidentes com vítimas mortais?

Para estudar o efeito do dia da semana na ocorrência de acidentes com vítimas mortais, foi obtida uma *carta u*, uma vez que o número de acidentes por unidade de tempo é variável. Neste caso, para evitar um efeito excessivo da assimetria da distribuição (a probabilidade de ocorrer um acidente deste género é muito pequena) selecionou-se o trimestre como período temporal. Aplicando uma abordagem de *rational ordering* com os dados ordenados temporalmente dentro de cada dia da semana, representam-se todos os dias da semana na carta com a mesma linha central. Da sua análise, a quarta-feira destacou-se como causa assinalável relativamente aos restantes dias. Ao representar a carta com duas classes (quarta-feira *vs* restantes dias) com a mesma linha central, pode observar-se um padrão não aleatório nos acidentes com vítimas mortais ocorridos às quartas-feiras, surgindo 17 dos 20 pontos abaixo da



(a) com a mesma linha central (b) com diferentes linhas centrais

Figura 3. Cartas *u* para o número médio de acidentes com vítimas mortais, em cada 100, por trimestre

linha central (Figura 3(a)), a que está associada uma probabilidade de 1 em 1000. Construindo cartas separadas (Figura 3(b)), pode concluir-se que o número médio de acidentes com vítimas mortais às quartas-feitas é inferior ao ocorrido nos restantes dias da semana, estimando-se em aproximadamente metade (3 em cada 1000 *vs* 6 em cada 1000).

Determinantes para a Ocorrência de Acidentes Envolvendo Motociclos

O modelo de regressão logística permitiu encontrar, por exemplo, determinantes de acidentes envolvendo vítimas e também, de entre estes, determinantes para a ocorrência de feridos graves ou vítimas mortais ([5] e [6]). Também permitiu encontrar fatores que estão na origem de acidentes por atropelamento, que envolvem vítimas, constituindo um passo importante para delinear medidas para a sua prevenção. Uma caracterização de acidentes desta natureza, com base na informação disponível no BEAV, foi incluída em [7].

Neste artigo apresentam-se os resultados obtidos com o ajustamento de um modelo de regressão logística para os acidentes envolvendo motociclos, ciclomotores, triciclos e quadriciclos, aqui designados por motociclos por simplicidade de escrita. Estes acidentes merecem uma atenção particular, pois no período em análise não só aumentou a sua ocorrência como estão tipicamente associados a uma maior gravidade. Este modelo (Tabela 1) ajustou-se bem aos dados e registou uma ótima capacidade discriminativa (*Area Under the ROC Curve* $=0.84$).

A interpretação dos seus coeficientes permite avaliar o efeito de cada fator sobre a probabilidade de ocorrência de acidentes envolvendo motociclos. Com base no modelo e nos seus coeficientes pode concluir-se que os principais fatores que contribuem para uma maior probabilidade de ocorrência de um acidente envolvendo motociclos são:

▸ ESPACIAIS - A chance/possibilidade aumenta:

- Aproximadamente o triplo se ocorrer nos concelhos de Almada, Sesimbra e Setúbal, um pouco menos do triplo se ocorrer no Barreiro, Palmela ou Seixal ou próximo dos 60% se ocorrer em Alcochete ou na Moita, relativamente aos acidentes que ocorrem nos concelhos de Alcácer do Sal, Grândola, Montijo, Santiago do Cacém e Sines;
- Para quase o dobro se ocorrer a menos de 100 m de uma escola;
- Para cerca do dobro se ocorrer fora de uma zona de estacionamento;

▸ TEMPORAIS - A chance/possibilidade aumenta:

- Cerca de 20% se ocorrer ao domingo;
- Nos horários compreendidos entre as 7h e as 9h e entre as 19h e as 21h;

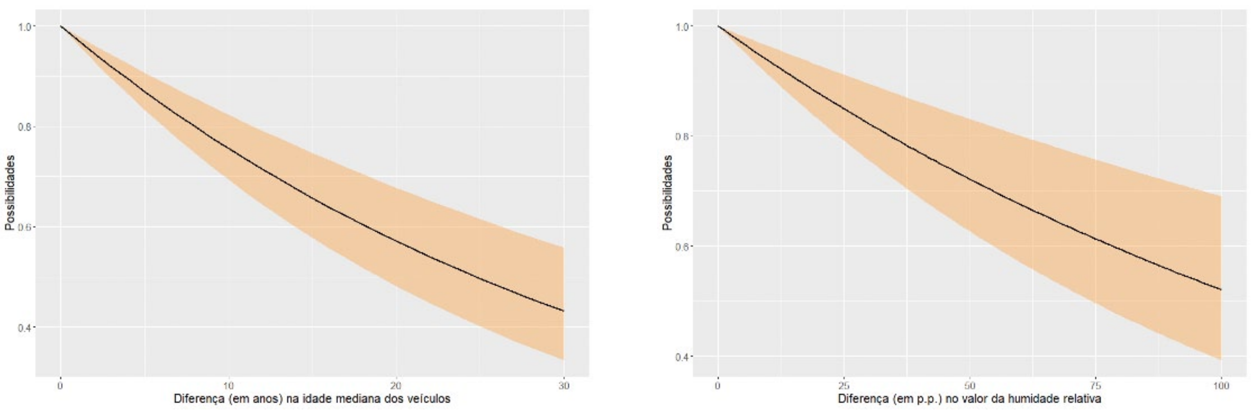
▸ RELACIONADOS COM O CONDUTOR - A chance/possibilidade aumenta mais de 6 vezes em acidentes onde a maioria dos condutores envolvidos é do sexo masculino;

▸ RELACIONADOS COM A VIA - A chance/possibilidade aumenta:

- Cerca de 70% em acidentes que ocorram numa via com separador central;
- Cerca de 5 vezes se ocorrer numa Estrada Nacional

Tabela 1. Modelo de regressão Logística para a ocorrência de um acidente envolvendo motociclos. Variáveis e respetivas categorias, coeficientes do modelo, desvios padrão dos coeficientes e valores *p*.

Variável	Coef.	D. Padrão	Valor *p*
Constante	–12.28	0.54	<0.001
Concelho (ref: Restantes Concelhos)			
Seixal / Barreiro / Palmela	0.97	0.09	<0.001
Setúbal / Sesimbra / Almada	1.19	0.09	<0.001
Moita / Alcochete	0.46	0.13	<0.001
Zona de Estacionamento (ref: Sim)			
Não	0.74	0.26	0.004
Proximidade de Escolas a 100m (ref: Sim)			
Não	–0.63	0.24	0.008
Tipo de via (ref: Autoestrada)			
EN	1.61	0.20	<0.001
Ponte / IC / IP	0.73	0.18	<0.001
Outra Via	1.27	0.20	<0.001
Existência de Separador Central (ref: Não)			
Sim	0.53	0.14	<0.001
Humidade Relativa	–0.007	0.002	<0.001
Idade Mediana dos Veículos Envolvidos	–0.03	0.01	<0.001
Percentagem de Condutores do Sexo Masculino (ref: [0,50]			
[50, 100]	1.82	0.13	<0.001
Hora do Acidente (ref: Restantes)			
6h-7h / 22h-0h	–0.31	0.13	0.015
1h-5h	–1.34	0.27	<0.001
7h-8h / 19h-21h	0.31	0.07	<0.001
Veículo Ligeiro (ref:Sim)			
Não	6.88	0.25	<0.001
Veículo Pesado (ref: Sim)			
Não	6.56	0.30	<0.001
Condições Meteorológicas (ref: Bom Tempo)			
Chuva / Outros Elementos Atmosféricos	–0.74	0.12	<0.001
Dia da Semana (ref: segunda a sábado)			
domingo	0.17	0.08	0.047



(a) função da idade mediana dos veículos envolvidos

(b) função das diferenças na humidade relativa

Figura 4. *Odds Ratio* (OR) de ocorrência de um acidente envolvendo motociclos.

(EN), o dobro se ocorrer na Ponte Vasco da Gama ou em Itinerário Complementar ou Principal (IC/IP) e cerca de 3.5 vezes se ocorrer noutras vias, relativamente aos acidentes deste tipo que ocorrem numa autoestrada;

- RELACIONADOS COM O VEÍCULO - A chance/possibilidade aumenta:
    - Nos veículos mais recentes (aumenta com a diminuição da idade dos veículos envolvidos, Figura 4(a);
    - No caso do acidente não envolver veículos ligeiros;
    - No caso do acidente não envolver veículos pesados;
- METEOROLÓGICOS - A chance/possibilidade aumenta:
    - Para aproximadamente o dobro se estiver bom tempo;
    - Quando a humidade relativa diminui (Figura 4(b)).

4. PREDIÇÃO DE ACIDENTES DE VIAÇÃO

Com base na sinistralidade grave ocorrida, foram selecionadas 4 vias: Estrada Nacional 4 (EN4), Estrada Nacional 10 (EN10), Itinerário Complementar 1 (IC1) e Autoestrada 33 com a Ponte Vasco da Gama (A33+PVG). A metodologia, descrita integralmente em [9] para a EN10 (predição de ocorrência de acidentes), utiliza uma abordagem mista entre inteligência artificial, estatística e sistemas de informação geográfica (SIG), consistindo em cinco etapas fundamentais: (1) divisão da via em segmentos (a dimensão de 500 m foi a que conduziu a melhores resultados); (2) geração de amostras negativas para obter informações sobre os períodos e segmentos em que não ocorreram acidentes; (3) ajuste de modelos de ML com 3 abordagens diferentes para mitigar o forte desbalanceamento dos dados (a abordagem ROSE - *Random Over-Sampling Examples* foi a que produziu melhores resultados); (4) comparação do desempenho dos modelos para cada via; (5) implementação, numa aplicação digital, do modelo com melhor desempenho para cada via.

Após o processo de segmentação, baseado em técnicas de SIG, os segmentos da via possuem apenas as amostras positivas, ou seja, as informações referentes às ocorrências dos acidentes de trânsito. Portanto, não há dados sobre quando não ocorreram acidentes (que usualmente se designam por amostras negativas). Para criar tais amostras, são geradas todas as datas (ano, mês, dia e hora) no período temporal pretendido, que neste caso foi de 1 de janeiro de 2016 a 31 de dezembro de 2022, retirando o período compreendido entre março de 2020 e abril de 2021, que correspondeu ao período de maior influência da pandemia COVID-19, por serem obtidos numa situação atípica. A estas datas (excluindo os casos em que houve acidentes) foram adicionadas informações sobre outras variáveis que podem ser consideradas preditivas, isto é, que sejam conhecidas antes da ocorrência do acidente de viação: variáveis meteorológicas (precipitação, direção e velocidade do vento e temperatura), variáveis temporais (dia da semana, movimento sazonal, pico de tráfego, turnos diurnos - ida para o trabalho, manhã ou tarde, saída do trabalho -, período escolar, período do nascer ou do pôr do sol e período de férias), variáveis relacionadas com as características da estrada (segmento, traçado da estrada, tipo de cruzamento rodoviário, número de vias, qualidade do pavimento, tipo de berma, existência de túnel/ponte no segmento e número de árvores no segmento), variáveis relacionadas com sinalização e informação sobre a velocidade no segmento (limite de velocidade e valores históricos da velocidade média).

Quando existe uma grande diferença no número de casos em cada classe da variável resposta, costuma referir-se que se está na presença de dados desbalanceados. Nesta situação, num problema de classificação binária, a classe que corresponde à não ocorrência de acidentes tem muito mais casos do que a classe de ocorrência de acidentes (basta pensar no número de horas em cada segmento de via em que ocorreram e não ocorreram acidentes). Tal pode levar a diversos problemas nos modelos, tais como o enviesamento da classe maioritária (uma vez que tem mais ocorrências dessa classe), um desempenho irrealista (modelo pode ter uma precisão elevada predizendo bem apenas a classe maioritária) ou uma menor sensibilidade à classe minoritária (maior dificuldade em aprender padrões dessa classe), conduzindo a decisões erradas. Para lidar com este problema, existem várias estratégias que podem ser aplicadas: 1) realizar sobreamostragem (*oversampling*) da classe minoritária ou subamostragem (*undersampling*) da classe maioritária para equilibrar as classes; 2) atribuir pesos diferentes às classes durante o treino para aumentar a importância da classe minoritária; 3) criar exemplos sintéticos da classe minoritária para aumentar a sua representação. Neste caso concreto, a abordagem que deu melhores resultados foi a ROSE [18], que consistiu em obter uma amostra aleatória dos casos negativos (classe maioritária), sendo quatro vezes o número de casos positivos (classe minoritária), e em seguida sobreamostrar os casos negativos replicando a classe minoritária. Desta forma, obtêm-se acidentes de viação sintéticos a partir dos existentes. Consequentemente, após a amostragem das amostras negativas para obter uma relação de 4:1, a sobreamostragem permite obter uma relação de aproximadamente 1:1 entre os casos negativos e positivos.

A aplicação dos modelos ML faz-se dividindo o conjunto de dados em dois subconjuntos. Um primeiro, designado por conjunto de dados de treino (neste caso entre 2016 e 2021, excluindo o período de influência da pandemia), usado para treinar o modelo, estimando os seus parâmetros para se ajustar aos padrões nos dados. Um segundo, designado por conjunto de dados de teste (neste caso o ano de 2022), usado para avaliar o desempenho do modelo com novos dados, sendo fundamental para medir a capacidade preditiva do modelo. No caso da EN10, o modelo preditivo atualmente implementado na aplicação digital é para acidentes com vítimas (portanto menos ocorrências), pelo que foi considerado um maior período de dados de teste (maio de 2021 a dezembro de 2022). Existem diferentes medidas de desempenho dos modelos, devendo ter-se um cuidado particular com as medidas a utilizar no caso de dados desbalanceados [19].

Os modelos atualmente implementados em cada uma das 4 vias e algumas medidas de desempenho são apresentados na Tabela 2. A Sensibilidade (SEN) é a probabilidade do modelo predizer corretamente um acidente de trânsito, a especificidade (ESP) é a probabilidade do modelo predizer corretamente um não acidente. O valor preditivo positivo (VPP) é a proporção de acidentes corretamente preditos e o valor preditivo negativo (VPN) é a proporção de não acidentes corretamente preditos. Estes valores variam consoante o ponto de corte (valor que separa as predições do modelo entre acidentes e não aci-

Tabela 2: Modelos ajustados (via de implementação) e valor de algumas medidas de desempenho.

Medida	C5.0 (EN10)	XGBoost (EN4)	LR (A33+PVG)	XGBoost (IC1)
SEN	0.888	0.810	0.828	0.739
ESP	0.611	0.607	0.502	0.545
VPP	0.621	0.618	0.617	0.616
VPN	0.884	0.803	0.750	0.679
AUC	0.881	0.755	0.729	0.707

dentes), o qual neste caso foi obtido para maximizar a sensibilidade, mantendo a especificidade próximo dos 50%. É ainda apresentada a área abaixo da curva ROC (AUC).

Como se pode observar, os resultados obtidos são bastante animadores. Recorde-se que os modelos predizem a ocorrência de um acidente rodoviário num dado segmento de estrada num determinado período horário de um dado dia. Este tipo de modelos nunca foi implementado em Portugal e a nível internacional não há conhecimento da aplicação de modelos preditivos para a ocorrência de acidentes em vias com caraterísticas tão heterogéneas como, por exemplo, a EN10, e faltando informação sobre algumas variáveis de grande interesse (como informação específica sobre a intensidade de tráfego). Estes modelos foram implementados numa aplicação digital que apoia o processo de tomada de decisão da GNR de Setúbal. Com esta informação, a GNR de Setúbal envia patrulhas aos segmentos com maior risco de ocorrência de acidentes e a sua presença reduz a probabilidade de ocorrência de um acidente naquele local. Na Figura 5 é apresentado um *output* da aplicação digital relativo à A33+PVG num dado período temporal. Os segmentos vermelhos têm probabilidade superior a um valor pré-estabelecido pela GNR de Setúbal, os segmentos amarelos têm probabilidade superior ao ponto de corte e inferior ao valor pré-estabelecido e os segmentos verdes têm probabilidade inferior ao ponto de corte. Cada troço contém informação sobre o segmento e o respetivo histórico de acidentes.

A aplicação digital desenvolvida tem outras valências, permitindo a visualização do: i) Passado - *dashboard* com consulta do histórico das variáveis principais que caracterizam o acidente; ii) Presente - atlas de suscetibilidade de ocorrência de acidentes e mapas com o indicador de gravidade por troço de estrada; iii) Futuro - predição de ocorrência de acidentes em tempo real para troços das 4 vias e predição de ocorrência de *hotspots* (locais de ocorrência de muitos acidentes). Dado que existe uma reconhecida limitação de recursos para a vigilância rodoviária no distrito de Setúbal, a GNR de Setúbal pode utilizar esta ferramenta preditiva, gerindo melhor a eficiência dos recursos ao seu dispor em prol do aumento da eficácia da segurança rodoviária.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas das decisões que afetam a vida das pessoas nos mais variados aspetos são tomadas com base em ideias pré-concebidas, sem critérios rigorosos, mas por afirmações aparentemente irrefutáveis, tornado-se uma prática

Figura 5. Mapa da aplicação digital de apoio à decisão: predição da ocorrência de um acidente de viação numa determinada hora do dia por segmentos de 500 m.

que alguns denominam por “achómetro”. Muitas vezes, parece haver certezas numa determinada área de atuação, baseadas na experiência que alguns têm nessa área e nas perceções que lhes são passadas por outros com mais experiência. Contudo, o “achómetro” frequentemente não está calibrado e a sua fiabilidade é muito pequena. A mudança de atitude é fundamental nestes casos, procurando a evidência científica para apoio à tomada de decisão.

Este artigo procurou, com base num projeto, dar exemplos do que se pode conseguir ligando o meio académico e a ciência aplicada transdisciplinar para a resolução de um problema social concreto. Foram apresentados exemplos de alguns resultados alcançados no projeto MOPREVIS (atualizados para este artigo), o qual teve fortes alicerces matemáticos e conjugou a matemática com outras áreas do saber e com o próprio saber da experiência adquirido ao longo do tempo. Este caminho precisa de ser seguido apenas em prol de um objetivo comum: SALVAR VIDAS!

É o conhecimento de base científica que possibilita tomar decisões coerentes e consistentes, definindo uma estratégia proativa e vetores de atuação, de modo a alcançar uma segurança rodoviária mais eficaz. E TODOS ganham com isso!

Com este projeto, um primeiro passo foi dado. E se esse passo levar a que menos uma pessoa tenha morrido nas estradas do distrito de Setúbal, então o projeto já valeu a pena!

REFERÊNCIAS

[1] WHO. "Preventing Injuries and Violence: An Overview". *Technical Report*. World Health Organization: Geneva, Switzerland, 2020.

[2] European Commission. "European Road Safety Observatory". Em *Annual Statistical Report on Road Safety in the EU, 2022*. European Commission, Directorate General for Transport: Brussels, Belgium, 2023.

[3] Silva, C. M., Bravo, J. M., Gonçalves, J., *Impacto Económico e Social da Sinistralidade Rodoviária em Portugal*. CEGE - Centro de Estudos de Gestão do ISEG e Autoridade Nacional de Segurança Rodoviária (ANSR), Lisboa, 2021.

[4] Infante P., Nogueira V., Rebelo Manuel P., Góis P., Afonso A., Santos D., Jacinto G., Saias J., Rego L., Silva M., Carocha Gonçalves N., Rebisco P., Quaresma P., Nogueira P., Pisco Costa R., Clemente R. *A Sinistralidade Rodoviária no Distrito de Setúbal*. Évora: Imprensa da Universidade de Évora, 2023, ISBN 978-972-778-300-7, doi: *https://doi.org/10.24902/uevora.33.*

[5] Infante, P., Afonso, A., Jacinto, G., Rego, L., Nogueira, P., Silva, M., Nogueira, V., Saias, J., Quaresma, P., Santos, D., Gois, P., Manuel, P.R., Some Determinants for Road Accidents Severity in the District of Setúbal. In: Bispo, R., Henriques-Rodrigues, L., Alpizar-Jara, R., de Carvalho, M. (eds), *Recent Developments in Statistics and Data Science*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 398, 203-214, 2022, ISBN 978-3-031-12765-6, *https://doi.org/10.1007/978-3-031-12766-3_14*.

[6] Infante, P., Jacinto, G., Afonso, A., Rego, L., Nogueira, V., Quaresma, P., Saias, J., Santos, D., Nogueira, P., Silva, M., Costa, R.P., Gois, P., Manuel, P.R., "Comparison of Statistical and Machine-Learning Models on Road Traffic Accident Severity Classification". *Computers*, 11(5), 80, 2022, doi: *https://doi.org/10.3390/computers11050080*.

[7] Infante P., Jacinto G., Afonso A., Rego L., Nogueira P., Silva M., Nogueira V., Saias J., Quaresma P., Santos D., Góis P., Manuel P.R., "Factors That Influence the Type of Road Traffic Accidents: A Case Study in a District of Portugal". *Sustainability*, 15(3), 2352, 2023, doi: *https://doi.org/10.3390/su15032352*.

[8] Nogueira, P., Silva, M., Infante, P., Nogueira, V., Manuel, P., Afonso, A., Jacinto, G., Rego, L., Quaresma, P., Saias, J., Góis, P.. Manuel, P. R., "Learning from Accidents: Spatial Intelligence Applied to Road Accidents with Insights from a Case Study in Setúbal District", Portugal. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 12(3), 93, 2023, doi: *https://doi.org/10.3390/ijgi12030093*.

[9] Infante P, Jacinto G, Santos D, Nogueira P, Afonso A, Quaresma P, Silva M, Nogueira V, Rego L, Saias J, Góis, P.. Manuel, P. R., "Prediction of Road Traffic Accidents on a Road in Portugal: A Multidisciplinary Approach Using Artificial Intelligence, Statistics, and Geographic Information Systems". *Information*, 14(4):238, 2023, *doi: https://doi.org/10.3390/info14040238*.

[10] Carey, R. G., *Improving HealthCare With Control Charts: Basic and Advanced SPS Methods and CAse Studies*. ASQ Quality Press, Milwaukee, Wisconsin, 2003.

[11]Dobson, A., Barnett, A., *An Introduction to Generalized Linear Models*. 4th Edition, Chapman & Hall, 2018.

[12] Hosmer Jr., D., Lemeshow, S., Sturdivant, R., *Applied Logistic Regression*. 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., US, 2013.

[13] James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R., *An Introduction to Statistical Learning with Applications in R*. 2nd Edition, Springer, US, 2021.

[14] Witten, I., Frank, E., Hall, M., Christopher J., *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*. 4th Edition, Morgan Kaufmann, US, 2017.

[15] Breiman, L., "Random Forests". *Machine Learning*, 45(1), 5-32, 2001.

[16] Pang, Su-lin,Gong, Ji-zhang, "C5.0 Classification Algorithm and Application on Individual Credit Evaluation of Banks". *Systems Engineering-Theory & Practice*, 29(12), 94-104, 2009, doi *https://doi.org/10.1016/S1874-8651(10)60092-0*.

[17] Chen, T., Guestrin, C., "XGBoost: A Scalable Tree Boosting System". In *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 785-7944, 2016, New York, US: ACM, doi: *https://doi.org/10.1145/2939672.2939785*.

[18] Menardi, G.; Torelli, N., "Training and Assessing Classification Rules with Imbalanced Data". *Data Min Knowl Disc*, 28, 92-102, 2014, doi: *https://doi.org/10.1007/s10618-012-0295-5*.

[19] He, H.; Garcia, "Learning from Imbalanced Data". *EEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 21 (9), 1263–1284, 2009, doi:*10.1109/TKDE.2008.239*.

Agradecimentos:

Os resultados obtidos no Projeto MOPREVIS só foram possíveis devido a uma equipa transdisciplinar que desde o início realizou um trabalho excecional. Pela Universidade de Évora, um profundo agradecimento aos Professores Vítor Nogueira, Anabela Afonso, Gonçalo Jacinto, José Saias, Paulo Quaresma, Pedro Nogueira e Rosalina Pisco Costa, e aos Bolseiros Mestres Daniel Santos, Leonor Rego, Marcelo Silva e Patrícia Góis. Pela GNR de Setúbal, um profundo agradecimento ao Tenente-Coronel Nuno Carocha Gonçalves, ao Cabo-Chefe Paulo Rebisco e ao Cabo Rui Clemente. E um profundo agradecimento ao timoneiro que desencadeou este projeto, Coronel Paulo Rebelo Manuel, dando sempre contributos fundamentais para o seu sucesso, quer inicialmente pela GNR de Setúbal (enquanto Comandante do Comando Territorial), quer depois integrado na equipa da Universidade de Évora. Finalmente, fica um agradecimento especial ao Instituto Português do Mar e da Atmosfera, à Infraestruturas de Portugal, à Waze Portugal e à Autoridade Nacional de Segurança Rodoviária, pelo apoio dado ao longo do projeto.

SOBRE O AUTOR

Paulo Infante é Professor Associado na Universidade de Évora, doutorado em Matemática pela mesma Universidade. Tem desempenhado diversos cargos, como o de Pró-Reitor para as áreas da Inovação, Transferência, Empreendedorismo e Cooperação, sendo atualmente Coordenador da Linha de Investigação em Modelação Matemática em Ciências da Vida e Aplicações do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA) e membro das Comissões de Curso da licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão e da licenciatura e mestrado em Inteligência Artificial e Ciência de Dados. Responsável por unidades curriculares dos diferentes ciclos de estudo, tendo orientado estudantes de licenciatura, mestrado e doutoramento. Coordenou vários projetos entre a Universidade e a comunidade, com diversas publicações em metodologia estatística e em modelação estatística e análise de dados, em diferentes áreas. Foi investigador responsável do projeto Modelação e Predição de Acidentes de Trânsito no Distrito de Setúbal (MOPREVIS), financiado pela FCT. Além da modelação estatística, os seus interesses atuais de investigação estão nas áreas de ciência de dados, controlo de qualidade e análise de sobrevivência.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação *pt-maths-in@spm.pt*

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

CONTAS ROMANAS

A numeração romana é tida como pouco adequada aos cálculos aritméticos. Como mostrou Bernardo Mota no volume 170 desta *Gazeta*, tal não é necessariamente verdade. Vários artigos, como o de Mota, têm chamado a atenção para o facto de os numerais romanos gerarem tabuadas simples, que tornariam as operações exequíveis sem grande esforço. Somos da opinião, no entanto, de que as mesas de cálculo romanas estariam baseadas no uso de pedrinhas – *calculi* – e na organização das quantidades guiada pelas ordens de grandeza dos numerais.[1]

Todos conhecemos bem os numerais romanos – I, V, X, L, C, D, M – que representam sempre as mesmas quantidades, independentemente das posições relativas que ocupem. Estamos, naturalmente, a referir-nos à notação aditiva, deixando de lado a subtractiva. Na primeira, quatro representa-se por IIII, enquanto na segunda se escreve IV, tendo o I um efeito subtractivo. Os métodos que descreveremos adaptam-se facilmente à notação subtractiva, mediante a utilização de pedrinhas de duas cores.

Sendo a soma e a subtracção simples de implementar, vamos abordar a multiplicação por meio de um exemplo. Suponhamos que pretendemos calcular 23 × 16, isto é, XXIII × XVI. Na mesa de cálculo, com as colunas encimadas pelos numerais romanos por ordem crescente da direita para a esquerda, introduzamos o multiplicando na linha cinzenta, representado por duas pedrinhas com valor 10 e três com valor unitário. No bordo da mesa, à direita, temos o multiplicador, um numeral em cada linha (ver figura 1).

Multiplicamos agora cada numeral do multiplicador pelo multiplicando. Cada produto elementar corresponde a um movimento simples de um grupo de pedrinhas (ver figura 2).

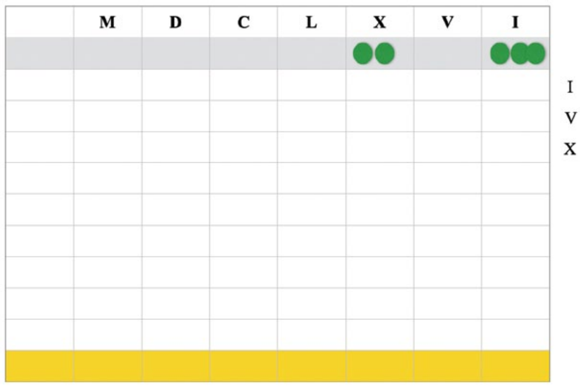


Figura 1. Armando a multiplicação XXIII × XVI.

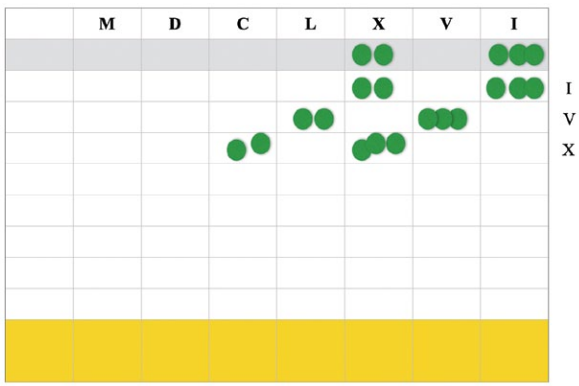


Figura 2. Efectuando XXIII × XVI.

---

[1] A palavra portuguesa "cálculo" deriva da latina calculus que significava pedrinha, por ser com pedrinhas numa superfície plana que se efectuavam as contas. A expressão "cálculos nos rins" é também de uso corrente, com significado evidente.

Agora, resta proceder às somas, por colunas, pelo que baixamos todas as pedrinhas para a faixa amarela (ver figura 3).

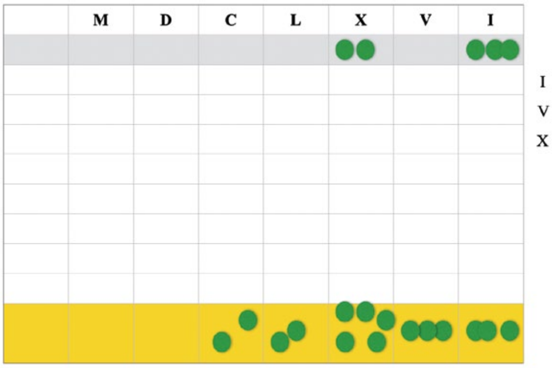


Figura 3. Finalizando o cálculo de XXIII × XVI.

Resta agora simplificar o resultado, de acordo com o protocolo habitual dos numerais romanos (ver figura 4).

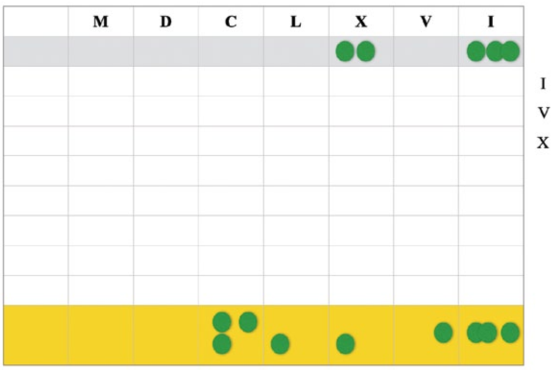


Figura 4. XXIII × XVI = CCCLXVIII.

Os factos elementares da multiplicação – a tabuada – exprimem-se facilmente em amplitudes de deslize de peças neste tabuleiro. Por exemplo, multiplicar por X corresponde a deslizar o multiplicando duas colunas para a esquerda. Deixamos ao leitor a tarefa de examinar os produtos por I, X, C, M. Quando multiplicamos por um numeral do conjunto V, L, D, ... se o multiplicando elementar for uma potência de 10, a operação corresponde ainda a um movimento simples do multiplicando (um salto, três saltos, etc). Contudo, para os produtos entre dois numerais deste tipo (os numerais V, L, D, ... são muitas vezes referidos na literatura por *etruscos*) a interpretação dinâmica é diferente: devemos colocar duas peças no destino expectável e ainda uma peça na casa de denominação imediatamente inferior. Por exemplo, V × L = CCL (ver figura 5).

Cobrimos a tabuada, pelo que estamos preparados para efectuar qualquer multiplicação. Vejamos um último exemplo (um traço sobre um numeral corresponde a multiplicá-lo por mil), 166 × 60, isto é, CLXVI × LX (ver figura 6).

Procedamos aos produtos elementares (ver figura 7).

Efectuando as somas, baixando as peças para a parte amarela, respeitando as colunas e simplificando, obtemos o resultado final, 9960 (ver figura 8).

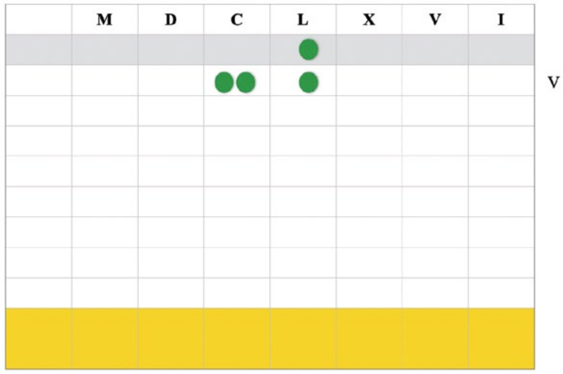


Figura 5. V × L = CCL.

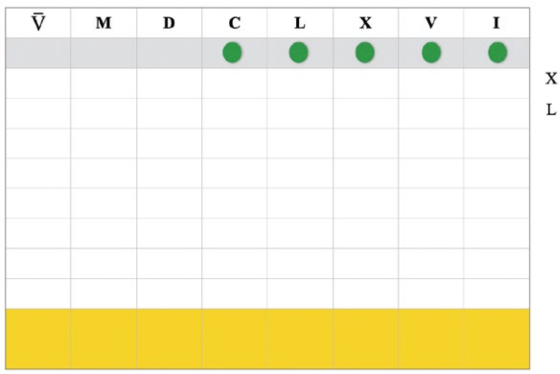


Figura 6. Preparando o cálculo de CLXVI × LX.

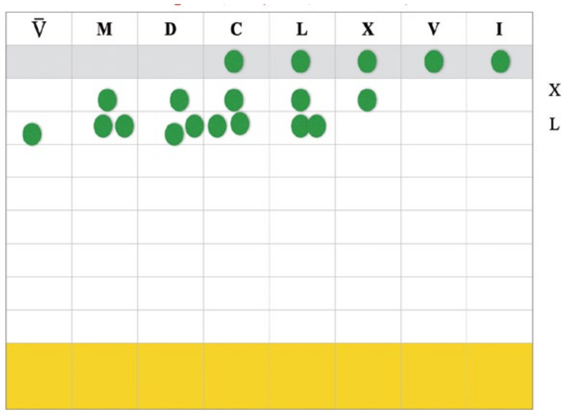


Figura 7. Produtos elementares de CLXVI × LX.

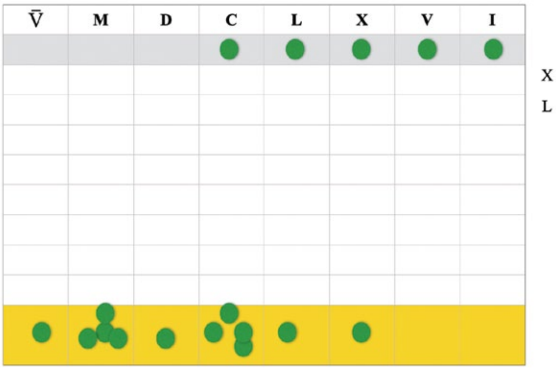


Figura 8. CLXVI × LX.

A divisão pode ser implementada introduzindo duas vezes o dividendo (uma das instâncias será consumida no processo) e constando o divisor na margem da mesa. Vejamos o exemplo DXXXV ÷ VIII (ver figura 9).

Introduzimos o dividendo na parte inferior da mesa, reservando a faixa cinzenta, acima, para o quociente.

Trocando a peça que vale 500 por cinco centenas, obtemos a seguinte representação (ver figura 10).

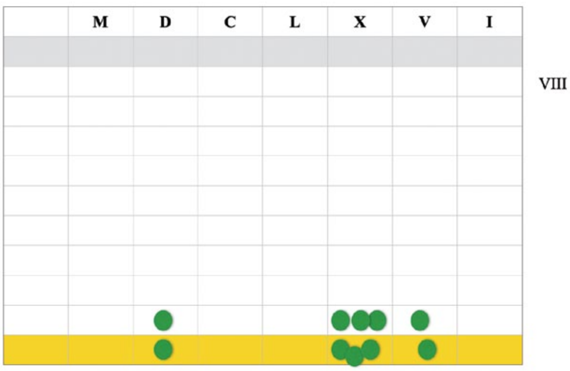


Figura 9. Armando a conta DXXXV ÷ VIII.

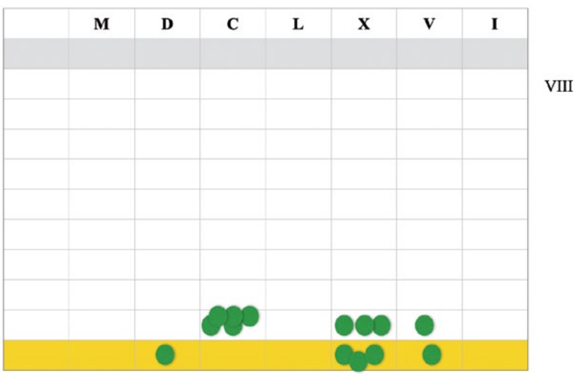


Figura 10. DXXXV ÷ VIII.

Como $8 \times 50 = 400$, podemos retirar 400 do dividendo e introduzir 50 no quociente (ver figura 11):

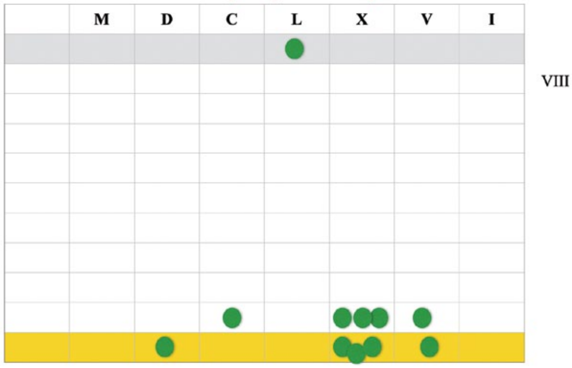


Figura 11. Após a divisão parcial CCCC ÷ VIII.

Repetindo operações elementares desta natureza obtemos a situação final, em que o que resta do dividendo é uma quantidade inferior ao divisor (ver figura 12), o que termina o cálculo, obtendo DXXXV = LXVI × VIII + VII.

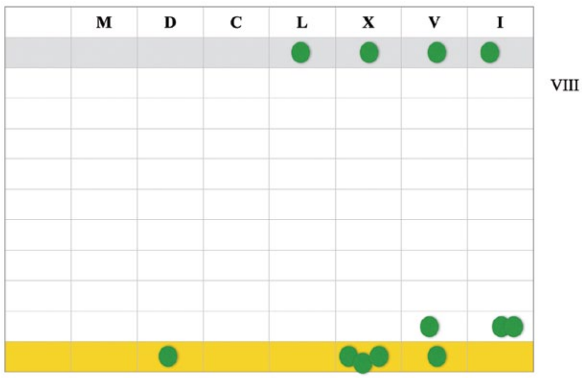


Figura 12. DXXXV = LXVI × VIII + VII.

O método descrito funciona bem e, com mais ou menos esforço, as divisões podem ser levadas a cabo na mesa de cálculo romana.

Vamos descrever um método alternativo para a divisão, a que chamaremos *método especial*, à míngua de melhor designação. Vamos calcular de novo DXXXV ÷ VIII. Para armar a conta, procedemos como acima, mas introduzimos também um *divisor auxiliar simpático* e a diferença entre os dois divisores. Como o divisor original era 8, vamos escolher 10 para o auxiliar (ver figura 13).

Todas as divisões do algoritmo que agora descrevemos terão como divisor o auxiliar (neste caso, 10). Começemos por dividir 500 por 10. O resultado é 50. Para não falsificar o nosso propósito, após retirar 500, devemos devolver ao

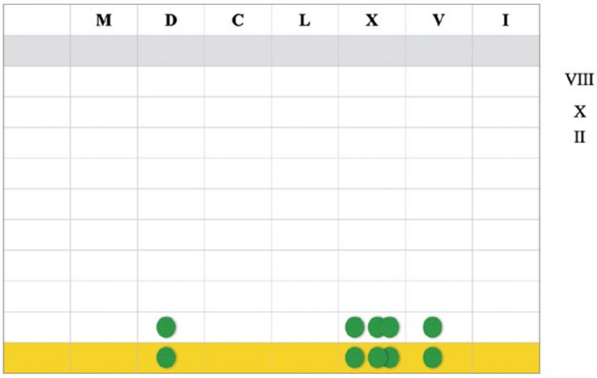


Figura 13. Armando a conta
DXXXV ÷ VIII (método especial).

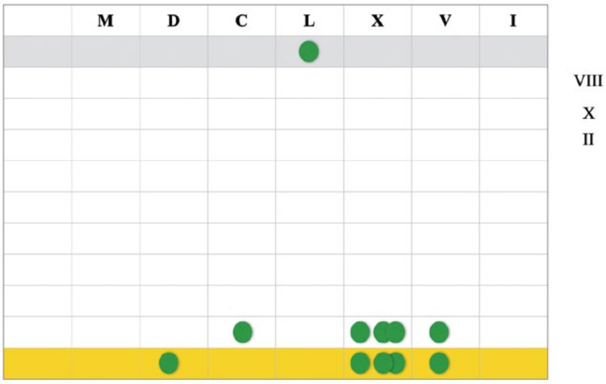


Figura 14. DXXXV ÷ VIII (método especial).

dividendo o produto deste quociente parcelar pela diferença entre os divisores (original e auxiliar), isto é, temos de devolver 50×2=100. Ver figura 14.

Como $100 = 10 \times 10$, retiramos 100 ao dividendo, juntamos 10 ao quociente e devolvemos $10 \times 2 = 20$ ao dividendo (ver figura 15).

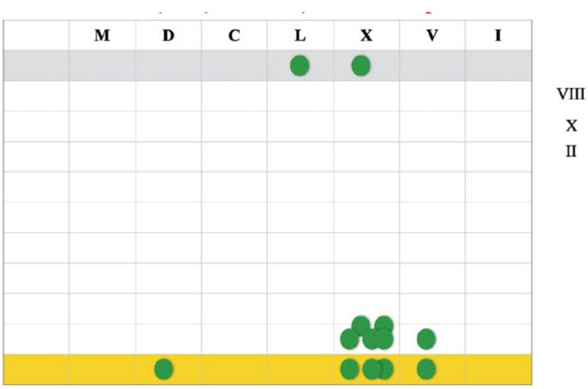


Figura 15. DXXXV ÷ VIII (método especial).

Como 50=5× 10, retiramos 50 ao dividendo, juntamos 5 ao quociente e devolvemos 5×2=10 ao dividendo (ver figura 16).

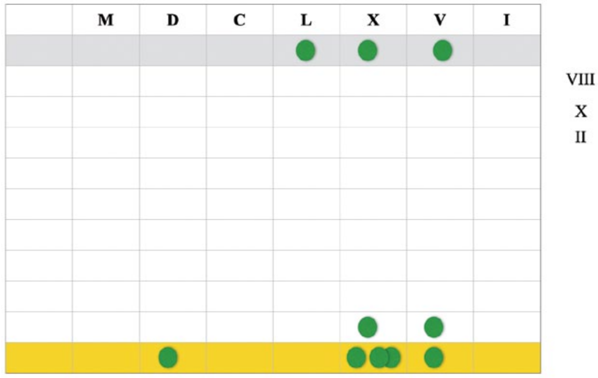


Figura 16. DXXXV ÷ VIII (método especial).

Finalmente, como 10=1×10, retiramos 10 ao dividendo, juntamos 1 ao quociente e devolvemos 1×2=2 ao dividendo (ver figura 17).

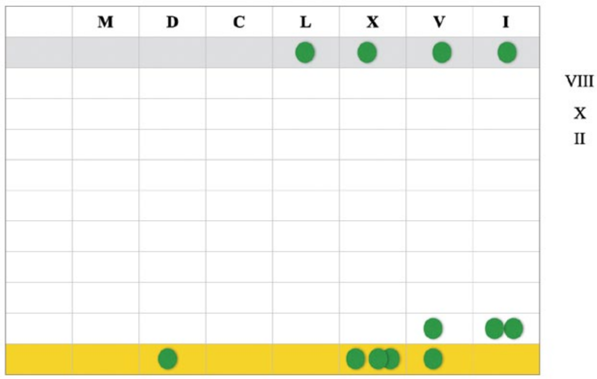


Figura 17. DXXXV = LXVI × VIII + VII.

Este método simplifica muito as operações, principalmente quando o divisor original torna as divisões parciais trabalhosas.

Matematicamente, a justificação do método especial reside na equivalência

$$a = bq + r \Leftrightarrow a + zq = (b+z)q + r$$

que nos permite usar um divisor auxiliar, simpático, $b+z$. No nosso exemplo, tínhamos $a = 535$ e $b = 8$. A potência de 10 mais próxima de 8 é a escolha natural para divisor auxiliar.

A razão que nos leva a admitir que este método pode ter sido usado no âmbito da numeração romana é o facto de ele ser semelhante ao algoritmo *Divisio Ferrea*, atribuído a Gerbert, que se encontra descrito em Bernelin, 2011. Acontece que, no contexto do Ábaco de Gerbert (ver Bernelin, 2011, e Schärlig, 2012), este método faz menos sentido do que na mesa de cálculo romana, o que nos leva a crer que Gerbert o conheceria quando tomou contacto com os numerais indo-árabes e criou o seu ábaco.

Gerbert – o Papa do ano 1000 – ganhou um conhecimento parcial dos métodos aritméticos dos árabes quando teve contacto com eles, por volta de 970 d.C. Só assim se compreende que tenha criado um ábaco, com peças móveis representativas dos novos numerais, mas sem a sofisticação dos métodos de lápis e papel.

O método de divisão *Divisio Ferrea* será, nesta perspectiva, uma adaptação de algo que Gerbert conheceria ao novo mundo da numeração decimal posicional.

Outras fontes relacionadas com este tema podem ser encontradas na lista de referências.

REFERÊNCIAS

Anderson, W. French (1956). "Arithmetical Computations in Roman Numerals". *Classical Philology* 51.3, pp. 145–150. issn: 0009837X, 1546072X.

Bernelin (2011). *Libre d'abaque.* Texte latin établi, traduit et annoté par Béatrice Bakliouche. Notes complémentaires de Jean Cassiut. Après le manuscrit du xie siècle H.491 de la Biliothèque de l'École de Médicine de Montpellier. Cressé: Editions des Régionalismes.

Detlefsen, Michael et al. (1976). "Computation with Roman Numerals". *Archive for History of Exact Sciences* 15.2, pp. 141–148. issn: 00039519, 14320657.

Gavin, J. e Alain Schärlig (2018). *Sept Pères du Calcul Écrit: des Chiffres Romains aux Chiffres Arabes*: 799-1202-1619. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. isbn: 9782889152780.

Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. Wiley. isbn: 9780471393405.

Karpinski, L.C. (1925). *The History of Arithmetic*. Nineteenth Century Collections Online (NCCO): Science, Technology, and Medicine: 1780–1925. Rand McNally.

Kaub, Shirley Jane (1957). "The Abacus in the Latin Classroom". *The Classical Journal* 53.1, pp. 13–14. issn: 00098353.

Kennedy, James G. (1981). "Arithmetic with Roman Numerals". *The American Mathematical Monthly* 88.1, pp. 29–32. issn: 00029890, 19300972.

Lazarides, Margaret (abr. de 1970). "Quare Multiplicandum Est". *Nature* 226, p. 195.

Lengnink, Katja e Dirk Schlimm (2010). "Learning and understanding numeral systems: Semantic aspects of number representations from an educational perspective". *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. Ed. por Benedikt Löwe e Thomas Müller. London: College Publications.

Maher, David W. e John F. Makowski (2001). "Literary Evidence for Roman Arithmetic with Fractions". *Classical Philology* 96.4, pp. 376–399. issn: 0009837X, 1546072X.

Mota, Bernardo (2013). "Fazer Contas com Numerais Romanos". *Gazeta de Matemática* 170, pp. 46–47.

Robertson, Jane I. (1979). "How to Do Arithmetic". *The American Mathematical Monthly* 86.6, pp. 431–439. issn: 00029890, 19300972.

Schärlig, A. (2001). *Compter Avec des Cailloux: le Calcul Élémentaire sur L'Abaque Chez les Anciens Grecs.* Enseignement des mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880744533.

— (2003). *Compter Avec des Jetons: Tables à Calculer et Tables de Compte du Moyen Age à la Révolution*. Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880745424.

— (2006). *Compter du Bout des Doigts: Cailloux, Jetons et Bouliers, de Périclès à nos Jours.* Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880746803.

— (2012). *Un Portrait de Gerbert D'aurillac: Inventeur d'un Abaque, Utilisateur Précoce des Chiffres Arabes, et Pape de L'An Mil.* Presses polytechniques et universitaires romandes. isbn: 9782880749446.

Schlimm, Dirk e Hansjörg Neth (2008). "Modeling Ancient and Modern Arithmetic Practices: Addition and Multiplication with Arabic and Roman Numerals". *Proceedings of the thirtieth annual meeting of the Cognitive Science Society*. Ed. por V. Sloutsky, B. Love e K. McRae. Austin, Texas, USA: Cognitive Science Society.

Smith, D.E. e National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Number Stories of Long Ago.* National Council of Teachers of Mathematics. isbn: 9780873534086.

Turner, J. Hilton (1951). "Roman Elementary Mathematics—the Operations". *The Classical Journal* 47.2, pp. 63–108. issn: 00098353.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Jorge Nuno Silva, Universidade de Lisboa, *jnsilva@cal.berkeley.edu*

Nuno Camarneiro
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

EINSTEIN E KAFKA

Que importância poderá ter a literatura para quem trabalha em ciência? Responda quem saiba. Que importância poderá ter a ciência para quem se ocupa de literatura? Pois, que responda quem saiba.

Na sua obra *Seis Passeios nos Bosques da Ficção*, Umberto Eco relata que Thomas Mann terá emprestado um dos romances de Kafka a Albert Einstein, que o terá devolvido pouco tempo depois, dizendo: "Não consegui lê-lo, a mente humana não é tão complexa." A anedota, verdadeira ou não, levanta questões sobre a relação entre literatura e ciência, os modelos que norteiam ambas as disciplinas e como cientistas e escritores se relacionam entre si. Não faltam exemplos de uns fascinados pelos outros, nem dos cruzamentos profícuos que foram definindo a civilização contemporânea e os grandes avanços do conhecimento. Poderia dizer-se que a literatura imagina e hipnotiza sem respeitar os dados e que a ciência deduz e concretiza sem contemplar todas as repercussões das suas descobertas.

Aldous Huxley, o escritor e filósofo inglês conhecido pela obra *Admirável Mundo Novo*, no seu último livro, Literatura e Ciência, publicado dois meses antes do seu falecimento, afirma: *"No contexto actual, a ciência pode ser definida como um instrumento para investigar, ordenar e comunicar as mais públicas das experiências humanas. Ainda que de forma menos sistemática, também a literatura se ocupa dessas experiências. Contudo, o seu principal objectivo é o de ocupar-se das experiências mais íntimas do ser humano, bem como das interacções entre indivíduos autoconscientes e sensíveis e a realidade objectiva que os rodeia."* Voltamos ao comentário de Einstein acerca da obra de Kafka, que experiências são mais relevantes para nós, membros da espécie humana? As mais públicas, sensoriais e universais de que se ocupam os vários ramos da ciência ou as outras, íntimas e relacionais que vão pontuando as nossas vidas? Os cientistas são homens e mulheres e os escritores e leitores são utilizadores e destinatários das muitas descobertas científicas, fará sentido estabelecer fronteiras?

É conhecido o comentário do físico J. Robert Oppenheimer que, após testemunhar a primeira detonação de uma bomba atómica, terá dito: "Tornei-me a Morte, destruidora de mundos", citando o clássico indiano *Mahabharata*. A citação, que entrou no domínio da cultura pop através do filme homónimo realizado por Christopher Nolan, parece apontar para a complementaridade entre cultura científica e humanística. Por mais que as repercussões de um qualquer desenvolvimento tecnológico estejam previstas e quantificadas por cálculos matemáticos, só a sua experiência sensorial pode inscrevê-las e sujeitá-las à interpretação humana. Nenhuma explosão existe fora do corpo e dos olhos que a ela assistem, o mais é abstracção e números escritos num papel ou numa folha de Excel.

Num excerto da biografia de Darwin, lemos da sua mão: *"Se tivesse de voltar a viver a minha vida, teria adoptado como regra ler alguma poesia e ouvir alguma música pelo menos uma vez por semana, pois talvez as partes do meu cérebro agora atrofiadas se mantivessem activas através do uso. A perda destes gostos é uma perda de felicidade e pode, possivelmente, ser prejudicial para o intelecto e, mais provavelmente, para o carácter moral, ao enfraquecer a parte emocional da nossa natureza."*

Ficam as palavras do mestre para que sobre elas possamos reflectir. Que importância poderá ter a literatura para quem trabalha em ciência? Responda quem saiba. Que importância poderá ter a ciência para quem se ocupa de literatura? Pois, que responda quem saiba.

Ana Mendes
Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

Paulo Saraiva
Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

ANDREI MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, O MATEMÁTICO QUE SONHOU SER ASTRONAUTA

Dono de uns olhos brilhantes de menino e com um sorriso contagiante, Andrei Martínez-Finkelshtein nasceu em Moscovo em janeiro de 1963, filho de pai cubano e mãe russa. Começou a moldar o seu modo de ser e também o seu gosto pela matemática nos seus anos de juventude em Cuba, de 1973 a 1994. Neste período, regressaria apenas à então União Soviética nos conturbados tempos de 1987 a 1991, para se doutorar em Matemática pela Universidade Lomonosov de Moscovo (a conhecida Universidade Estatal de Moscovo). Especialista em teoria da aproximação e polinómios ortogonais, as suas áreas de interesse incluem temas como funções especiais e aplicações, problemas de Riemann-Hilbert e análise assintótica, análise complexa e numérica e modelação matemática, em particular, em oftalmologia e ciência da visão. É autor de inúmeras publicações, destacando-se, entre os livros, os títulos *Complex Methods in Approximation Theory* (que editou com F. Marcellán e J. J. Moreno Balcázar) e "*From Operator Theory to Orthogonal Polynomials, Combinatorics, and Number Theory*", volume da *Operator Theory: Advances and Applications* (que editou com F. Gesztesy). Andrei Martínez transitou de Cuba para Espanha em 1994, tendo-se estabelecido como docente da Universidade de Almeria, onde, além de professor catedrático desde 2007, é membro do grupo de investigação Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales, sendo igualmente investigador associado do Instituto Carlos I de Física Teórica e Computacional da Universidade de Granada. Atualmente, e desde 2018, é professor da Baylor University, nos EUA. Segue-se um excerto com o essencial do que foi a amena conversa que com ele mantivemos no passado mês de julho.

Cortesia do estúdio fotográfico @eStasFotosS

GAZETA [DE MATEMÁTICA] Nasceste em Moscovo, na era soviética, filho de pai cubano e mãe russa. Que memórias tens dos tempos que passaste em Moscovo, antes de ires para Cuba?

ANDREI MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN Guardo as típicas memórias que pode ter uma criança russa na União Soviética. Ali a escola começa aos 7 anos, o que é diferente de Cuba e de Espanha, onde começa mais cedo (aos 6 anos). Eu era muito independente. Os meus pais levaram-me à escola no primeiro dia e disseram-me logo: "Já viste qual é o caminho para aqui chegar", e a partir daí passei a ir à escola e a regressar a casa por minha própria conta. Além disso, todos os anos passava os meses de verão em acampamentos, semelhantes aos dos escuteiros, aos quais os russos chamavam "organização de pioneiros". E isto acontecia porque os meus pais estavam então a fazer os respetivos doutoramentos e eu era uma moléstia… Essas são as memórias básicas. No último ano antes de ir para Cuba, estive num colégio interno, o que é muito típico em Cuba, mas que na Rússia é mais para crianças conflituosas. E fui pelas mesmas razões: os meus pais estavam demasiado ocupados investigando para os respetivos doutoramentos.

GAZETA O que estudavam os teus pais?

ANDREI A minha mãe era engenheira eletrotécnica e o meu pai era economista-matemático. O meu pai começou em Economia, mas rapidamente se interessou pela Economia Matemática, que por aquela altura tinha conhecido um *boom* enorme com o desenvolvimento de diversos métodos matemáticos.

GAZETA Os teus pais conheceram-se na Rússia, suponho que ainda quando eram estudantes.

ANDREI Sim, o meu pai tinha ido para a Rússia estudar, integrando o grupo dos primeiros estudantes que foram para lá continuar os estudos. A Revolução Cubana foi em 1959 e julgo que o meu pai terá ido para Moscovo em 1961.

GAZETA Aqui em Portugal temos uma ideia de que o Ensino Básico na Rússia, pelo menos na era soviética, era um ensino muito forte, muito bem estruturado, mais rigoroso, ao contrário do que acontece em partes do mundo ocidental, e inclusive nos EUA, onde esta formação é talvez mais ligeira. Trata-se de um mito ou era assim mesmo?

ANDREI Não é um mito, pelo menos nessa época. Quando cheguei a Cuba, como não falava espanhol, ingressei na escola soviética da embaixada. Tive muita sorte, pois era uma escola excelente. Muitos russos queriam ir para Cuba, entre outros motivos, porque os colaboradores eram bem pagos. Além disso, o clima era fenomenal. A escola tinha de facto professores excelentes, todos eram muito bons. E estudei nessa escola desde os 10 anos mais ou menos até ao final do Ensino Secundário. Os últimos três anos, já os fiz na escola cubana. O ensino de Matemática na escola soviética era, de facto, muito rigoroso. De tal modo era assim que tínhamos não uma, mas duas disciplinas de Matemática: uma era Álgebra e a outra Geometria. E nesta seguiam basicamente a Geometria de Euclides. Ou seja, desde muito cedo o aluno começava a perceber o que era um axioma, o que era um teorema e qual a diferença entre estes, e aprendia a demonstrar teoremas, desde os mais simples (por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180 graus) aos mais avançados. E a tal ponto que eu fiquei com a ideia de que as coisas apenas se demonstravam em Geometria, e que em Álgebra não se demonstrava nada, porque a Álgebra é para calcular e a Geometria para demonstrar. Mas a verdade é que te ensinavam a pensar em termos de demonstrações [dos resultados estudados]. Depois, quando passei para a escola cubana, e sobretudo quando comecei a participar nas Olimpíadas Matemáticas, senti que a formação russa me ajudou muito, porque me ensinou desde muito cedo a ser um pouco criativo: não a aprender como se calcula, como se faz, mas antes a procurar construir demonstrações. Assim, tenho de dizer que sim, que naquela época a formação russa era muito sólida e muito séria.

GAZETA Podemos então concluir que a Matemática começou a interessar-te desde muito cedo?

ANDREI Vou ser sincero, eu era bom estudante em tudo e estudava sem muito trabalho, mas, enquanto jovem, interessava-me mais pela astronomia. Como toda a criança russa, eu queria ser astronauta, e a Matemática não era algo pelo qual demonstrasse um grande interesse. E vim a dedicar-me à Matemática por uma razão um tanto ou quanto aleatória. O facto é que não gostava mesmo nada do trabalho agrícola. Em Cuba era obrigatório que todos nós [os estudantes] dedicássemos um mês aos trabalhos agrícolas (conhecidos por "escola do campo"). E então, depois de dois anos desta experiência, compreendi que aquilo não era para mim e passei a fazer de tudo para o evitar. Foi então que um amigo viu um anúncio de treinos para as Olimpíadas Matemáticas, e quem se inscrevesse nesse curso estava isento dos trabalhos agrícolas. E, obviamente, eu inscrevi-me. Se tivessem sido aulas de *ballet* (por exemplo), talvez hoje fosse um grande coreógrafo, quem sabe! Tive muita sorte, porque o professor responsável pelo curso era fenomenal. Comecei a seguir [as aulas] logo que este começou a funcionar. Não diria que era muito bom em Matemática. Era bom estudante, mas naquela altura não havia nenhuma disciplina em que me destacasse em especial.

GAZETA E quando foste para Cuba, foste só ou com os teus pais?

ANDREI O meu pai regressou a Cuba e a minha mãe acompanhou-o, pelo que eu fui também com eles. Ele havia concluído o doutoramento e tinha de regressar.

GAZETA Imaginamos que, para ti, tenha sido uma mudança radical.

ANDREI Sim, muito! Pelo clima (do frio para o clima tropical), pelo choque cultural, pelo idioma... Aos 10 anos, o período de adaptação foi um pouco complicado. Tornou-se mais fácil porque a escola continuou a ser em russo, o sistema educativo era semelhante. Para se ser um emigrante profissional como sou [hoje em dia], requer-se um

Andrei não foi imune ao sonho de todo o menino russo em ser cosmonauta.

Andrei, "pioneiro" russo

treino, e pode-se dizer que comecei muito cedo. Obviamente que também houve vantagens. Quando cheguei, tudo me encantou imediatamente: as paisagens, o clima... Mas também foram anos difíceis. Em 1973, lembro-me de que ia na rua com a minha mãe e "choveu" no chão uma batata e a minha mãe apanhou-a e disse: "Olha que sorte! Vamos levá-la para casa." Porque havia problemas com a subsistência: tudo era racionado e bastante limitado. Quando és criança, não te dás demasiado conta, mas economicamente não foram anos fáceis em Cuba.

GAZETA Depois, fizeste a licenciatura em Cuba, certo?

ANDREI Quando terminei o curso pré-universitário em Cuba, já levava três anos nos cursos das Olimpíadas, tendo até participado nas internacionais. Nessa altura já era muito claro que o que eu queria seguir era Matemática. É preciso esclarecer que o último ano (pré-universitário), fi-lo num instituto experimental que eles criaram, a que chamaram Instituto de Ciências Exatas, para o qual enviaram os alunos de todo o país com bons resultados em Matemática, Física e Química, e nós vivíamos ali toda a semana. Mas havia a opção de seguir diretamente para a Rússia para continuar os estudos, como foi o caso de muitos dos meus companheiros. Mas eu preferi ficar em Cuba porque tinha as coisas claras: muitos seguiam para a Rússia para aprender o idioma, mas para mim, que era bilingue, não havia vantagens nisso e nessa época queria divertir-me. Eu era dirigente estudantil. No ano final do instituto pré-universitário, praticava muito desporto e gostava de participar na organização de todos os eventos estudantis pré-universitários e, depois, universitários. Havia naquela época duas organizações juvenis em Cuba: a Federação de Estudantes do Ensino Médio, onde comecei, e depois, quando entrei na universidade, outra organização tradicionalmente bastante forte que é a FEU, Federação Estudantil Universitária. São associações não tão politizadas quanto a União de Jovens Comunistas.

Ambas tinham muitos aspetos sociais e eu aderi pela via do desporto e da recreação. Rapidamente me tornei membro do secretariado nacional da FEU (responsável pelo desporto e pela recreação juvenil em Cuba). Assim, os anos de licenciatura foram muito intensos, porque estudava muito, mas também me envolvi muito nas atividades da FEU, para as quais tinha de viajar por todo o país com muita frequência, organizando eventos.

GAZETA E que desportos praticavas?

ANDREI Nessa altura praticava quase tudo, mas no final acabei por me fixar na esgrima, desporto que muito apreciava. Mas houve então uma situação bastante dramática que veio a afetar durante muitos anos a Federação Cubana de Esgrima. Em 1976 puseram uma bomba no avião da Cubana de Aviación que fazia o voo de Caracas até Havana. Neste avião seguia a equipa juvenil nacional cubana de esgrima e, além disso, tinham comprado armas de esgrima que deveriam servir para muitos anos. O avião explodiu, morreram todos os ocupantes e é claro que foi muito dramático. A minha própria professora de esgrima esclareceu-me que, durante muitos anos, não haveria futuro para a prática desta modalidade em Cuba, porque nem sequer iríamos ter dinheiro para um florete ou uma espada, pelo que mudei para o karaté, que pratiquei durante os anos da universidade. Mas depois tive de deixar este desporto, pois lesionei-me. Como me ressenti das costas [na prática do karaté], comecei a nadar e ainda hoje em dia faço muita natação, que é o que me mantém mentalmente são, dentro do possível. Além disso, pelo menos para mim, a natação funciona como uma espécie

Comunicação na 10th St. Petersburg Conference in Spectral Theory, em 2018 de meditação. O facto de estares isolado do mundo exterior, escutando apenas a água... Por vezes ocorrem-me ideias matemáticas mais ou menos boas quando estou a nadar. Então a minha preocupação é não esquecer essas ideias quando saio da água para as apontar a tempo.

GAZETA Depois, como típico cubano, seguiu-se o doutoramento na Rússia.

ANDREI Essa decisão foi também um pouco complicada, porque quando finalizei a licenciatura tive de fazer o serviço militar. Fui para tenente de artilharia, que é o normal para alguém licenciado em Matemática. Nesse momento a situação em Cuba era já complicada, porque em 1986 havia começado na URSS a chamada Perestroika, que Fidel Castro não apreciou nada (já estava um pouco velho e não conseguiu adaptar-se...). Começou então a tendência de que já não havia que enviar os cubanos para que continuassem os estudos fora, porque em Cuba seriam mais bem ensinados. Fui quase dos últimos que conseguiram "escapar" para fazer o doutoramento na Rússia. Possivelmente porque havia dedicado tanto tempo como dirigente estudantil, ao falar com o meu antigo chefe, foi-me autorizada a ida para Moscovo.

GAZETA Nessa altura, sabias já com quem ias trabalhar? Porque também na tua área há nomes russos míticos.

ANDREI É uma boa pergunta, porque nos últimos anos da licenciatura estava na realidade mais interessado noutras coisas. Atraíam-me mais temas das matemáticas aplicadas e da otimização, e creio que foi o meu pai que me deu um bom conselho: mais do que procurar o tema, deves procurar alguém que te ensine a investigar, um investigador que seja dedicado. E foi assim que contactei o Guillermo López Lagomasino. Disse-lhe que queria trabalhar com ele e deu-me logo alguns temas [para investigar]. E foi ele que me disse que, como eu ia para Moscovo, seria melhor falar com Nikishin [Evgenii Nikishin], porque ele era jovem e de certeza que iria aceitar-me. O problema é que, um ano antes de ir para Moscovo, estava eu no exército, o Nikishin ficou bastante doente e acabou por falecer [a 17/12/1986]. Em 1986 tinha havido um grande congresso em Havana ao qual compareceram vários matemáticos e, em particular, esteve o Gonchar [Andrei Gonchar], e o Guillermo também me tinha aconselhado a falar com ele. Como eu falava russo, o contacto com o Gonchar foi muito fácil. Comecei por lhe explicar o que estava a estudar com o Guillermo, tendo concordado que se eu fosse para Moscovo me aceitaria como orientando de doutoramento.

GAZETA E que tal foi a experiência?

ANDREI Boa e má, porque tive, ao mesmo tempo, boa e má sorte. A má sorte foi que, após seis meses de chegar a Moscovo, o Gonchar foi nomeado primeiro vice-presidente da Academia de Ciências da Rússia, um cargo extremamente exigente, pelo que ele não tinha praticamente tempo para mim. Em cada semana, eu apenas o via num seminário que ele ministrava, mas aquilo a que se chama sentar-se com ele e trabalhar... [nada]. Mas digo que também acabou por ser boa sorte, porque então eu virei-me para Rakhmanov [Evguenii], que é um tipo excelente, e que veio a ser, de um certo modo, meu diretor não oficial de tese. E com este, sim, aprendi muitas coisas.

GAZETA Feito o doutoramento, tiveste de voltar para Cuba.

ANDREI Sim, eu queria voltar. O doutoramento na Rússia é algo muito stressante. Nessa época era, mas imagino que ainda hoje em dia seja. São muito profissionais, mas muito exigentes. Por exemplo, uma das coisas que fazem é que é rara a vez (pelo menos, foi o que me disseram quando perguntei) que te propõem um problema para pensar. Dizem-te: "Já pensaste nalgum problema?" No princípio, consegui pensar num problema e relatei-o a Gonchar. E ele disse-me que era interessante, que pelo menos não lhe parecia trivial. Estive dois anos a trabalhar sobre o problema, mas não consegui resolvê-lo (e está ainda por resolver). Nessa altura senti-me a pessoa mais estúpida do mundo, porque não funcionou. Aconselhou-me então a pensar noutro problema. Mas, de todos os modos, foi uma experiência muito interessante, porque o estilo russo dá-te uma formação muito sólida, fazem-te estudar "como uma besta". Mas para mim era claro que queria regressar a Cuba. Fi-lo após me doutorar, em 1991, poucos meses antes do golpe de Estado[1]. Acontece que, um ano antes, os meus pais voltaram à Rússia, porque o meu pai tinha um grave problema na vista. Ele era diretor de um centro de investigação em ciências económicas em Cuba. Possibilitaram-lhe que deixasse esse posto e aceitasse um

[1] A dissolução da URSS veio a ocorrer a 26/12 desse ano, no final da chamada Era Gorbachov (1985-1991).

cargo no CAMEN – Conselho de Ajuda Mútua Económica (uma instituição que havia nos países socialistas), com sede em Moscovo, e isso deu-lhe a oportunidade de estar uns tempos comigo em Moscovo. Já em Moscovo, a minha mãe adoeceu gravemente. Praticamente todo o tempo que lá esteve, passou-o internada em hospitais. Em 1991, regressei sozinho a Cuba, porque os meus pais tiveram necessidade de continuar em Moscovo. E fiquei em Cuba a lecionar na Universidade de Havana até 1994. Em Cuba vivia-se então o chamado "Período Especial", a época em que a canalização de verbas de auxílio a Cuba por parte da URSS cessou e Cuba acabou por ficar absolutamente isolada. Foram anos muito duros, porque eu passava grande parte do dia a pensar mais em como obter comida do que em investigar matemática. Para cúmulo, a situação da minha mãe foi piorando e ficou claro que, permanecendo na Rússia, iria morrer (mas em Cuba estaria pior). E foi quando me ocorreu falar com Francisco Marcellán. Aliás, foi por sugestão do Guillermo que decidi falar com o Marcellán. Este conhecia muito bem a situação das matemáticas em Espanha e talvez me pudesse ajudar a ficar uns tempos nesse país e, simultaneamente, tentar algum tratamento para a minha mãe. Foi o Marcellán que me falou na recentemente criada Universidade de Almeria (que antes fazia parte da Universidade de Granada), estando à procura de pessoas para o corpo docente. Submeti a candidatura e aceitaram-me. Tive de procurar no mapa, porque não sabia onde ficava Almeria [Risos]. Já lá, tranquilizei-me e concluí que ali se podia viver. No ano seguinte consegui trazer a minha mãe para junto de mim e a Segurança Social espanhola salvou-lhe a vida. Esteve sete meses internada no hospital [de Almeria], teve várias intervenções cirúrgicas e depois disso ainda viveu mais cerca de 20 anos. Também o meu pai veio para Almeria. Aliás, ele esteve ainda alguns anos como docente na Universidade de Almeria, até que se jubilou.

GAZETA Fala-nos um pouco dos problemas que estudavas naquela época.

ANDREI Tanto a minha tese doutoral como o seminário ao qual passei a assistir eram sobre teoria da aproximação, em particular, teoria da aproximação racional e em variável complexa. Os meus estudos coincidiram com uma revolução que houve naquela época nessa área, resultante da introdução de técnicas novas. Há que recordar que este tema começou no séc. XIX com os trabalhos clássicos de Laguerre, Legendre (entre outros grandes analistas desse século), ou até mesmo antes, com os trabalhos de Gauss. Eles não construíram uma teoria de polinómios ortogonais, mas Chebyshev veio a fazê-lo, ao criar os polinómios ortogonais, as frações racionais, etc., os quais acabam por aparecer constantemente como métodos secundários nos trabalhos de vários autores. Hermite, nos métodos para demonstrar a irracionalidade do número de Neper (por exemplo), concebeu um tipo de aproximação à qual posteriormente se chamou aproximante de Padé, ou ainda de Hermite-Padé. Em finais do séc. XIX, princípios do séc. XX, há um desenvolvimento mais ou menos normal desta teoria, ou melhor, dentro da teoria das funções especiais e algumas aplicações. Nos anos 1930, Gabor Szego, que havia emigrado para os EUA, dá-lhe já uma estrutura de teoria. O que é verdade é que não houve grandes avanços nos métodos de estudo desta teoria até aos anos 1980. O meu período em Moscovo coincidiu com o grande desenvolvimento da teoria através das técnicas de teoria do potencial logarítmico, com os conceitos de medida e equilíbrio, de energia, etc., que entram nessa área, dando início à resolução de um montão de problemas que até então não se tinha conseguido resolver. E isso atraiu-me imenso, porque havia muito movimento, muita atividade nessa área. Apesar de ter começado em teoria de aproximação racional, rapidamente transitei para a teoria analítica de polinómios ortogonais, justamente porque a mim sempre me chamou a atenção a aplicação de novas técnicas, de novas ferramentas.

Ao terminar o doutoramento, nos primeiros anos em Cuba, como já disse, fiz muito pouca investigação, porque a situação era tão dura que, mais do que outra coisa, investigava onde comprar bananas. Ao chegar a Espanha, deparo com um grupo de investigação em polinómios ortogonais muito sólido. Paco [Francisco] Marcellán era um dos líderes. Claro, para me integrar, comecei a trabalhar mais em problemas que o grupo espanhol já vinha estudando. Paco Marcellán havia começado com os polinómios de Sobolev, com os quais também trabalhei um pouco e depois regressei mais à minha linha de métodos assintóticos, polinómios ortogonais e suas aplicações.

GAZETA O estudo das aplicações à área de oftalmologia pode dizer-se que foi motivado pelos problemas de visão de que o teu pai padecia?

ANDREI Sim, pode-se dizer que, em parte, houve uma motivação pessoal. O problema é que o meu pai, creio que em 2004, teve uma recaída grave relativamente ao seu problema de visão. Foi uma enfermidade degenerativa que teve um desenvolvimento muito rápido. A oftalmologista que o seguia em Almeria disse-me que teria de o levar a Barcelona ao Instituto de Microcirurgia Ocular, porque eles lá eram muito bons e seguramente iriam salvá-lo. E, efetivamente, foram uns meses de luta muito intensa, mas resultou. Nestes meses de interação com vários oftalmologistas, nas conversações sempre surgia o tema das matemáticas e das suas várias aplicações… Convidei então Gracia Castro, a oftalmologista com quem colaborei, para nos dar um seminário, de modo que, dentro dos seus conhecimentos, nos apontasse possíveis formas de desenvolver aplicações matemáticas. Ela apresentou muitos problemas e alguns destes chamaram-me a atenção. Comecei a pesquisar, e o facto é que não eram coisas concretamente relacionadas com a doença do meu pai, mas a verdade é que senti curiosidade por alguns deles, e comecei a trabalhar nisso. O primeiro impacto foi uma deceção, porque te dás conta de que, basicamente, tens de estudar, tens de te "fazer" oftalmologista para estudar os problemas. Não podes esperar que os médicos venham e te formulem um problema matemático.

GAZETA Ou seja, isso implica entender mais além do jargão da oftalmologia, tens de te embrenhar nessa área do conhecimento, certo?

ANDREI Totalmente! Observa, se for apenas terminologia, eu aprendo-a rapidamente. Mas em alguns aspetos és tu [matemático] quem tem de formular o problema. Uma das coisas que eram problemáticas nesses anos (e que ainda continua a sê-lo) é uma doença chamada queratocone, na qual a córnea se vai debilitando e, pela pressão intraocular, começa a deformar-se tomando a forma de um cone. Então, era muito importante – e ainda hoje é – detetá-la precocemente. Sobretudo porque nessa época eram muito comuns as operações lasik de correção da miopia. Mas o lasik originalmente o que fazia era cortar uma capa da córnea. O lasik moderno, com o laser, o que faz é perfurar e reduzir a espessura da córnea em algum lado para alterar a curvatura. Mas isto debilita a córnea. No caso do queratocone, se se debilita a córnea, acaba-se por cegar muito rapidamente. Então, eles tinham o problema de como detetar atempadamente se era mesmo essa a doença e diferenciá-la [de outras doenças]. E utilizavam métodos envolvendo os famosos polinómios ortogonais de Zernike, entre outros, e parecia que estavam a resultar. Então, ao meter-me neste tema e sobretudo ao entender a biologia de como funciona, disse-lhes: "Meus senhores, aqui podem passar-se coisas para as quais os polinómios de Zernike não vos servem." Mas eu tive de argumentar utilizando a linguagem dos oftalmologistas, e não apenas ouvi-los, mas dizer-lhes: "Olha, se tens a degeneração de um tal tipo [degeneração corneana marginal] pelúcida, esta pode formar uma estrutura de tal tipo na córnea que não irás detetá-la desta forma, teremos de lá chegar por outra via." Ou seja, nesses anos eu quase me vi como um especialista da córnea! A tal ponto que os meus colegas do departamento vinham ter comigo, dizendo-me: "Olha, acho que tenho aqui um problema na vista, porque não estou a ver muito bem, qual é a tua opinião?" [Risos] Eu dizia-lhes: "Olha, eu não sou médico, eu o que estudo são modelos."

Mas sim, o que eu digo aos meus alunos que se interessam pela matemática aplicada é que têm de estar com a mente muito aberta, porque quase vais ter de adquirir uma segunda especialidade, a matemática mais a área que vais estudar [para aplicar a matemática], e ser bom nessa área. Se essa área for a Medicina, tens de conseguir ser um pouco médico, não basta que apenas te informes um pouco, tens de meter-te com profundidade. Foram anos divertidos!

GAZETA Num desses anos, coincidimos num congresso e, a dada altura, enquanto terminavas de preparar a tua palestra, começámos a conversar e revelaste que estavas a fazer provas para astronauta.

ANDREI Penso que foi em 2005, tinha acabado de regressar dos Estados Unidos e ia a conduzir da universidade para casa e na rádio ouvi que a Agência Espacial Europeia (ESA) procurava candidatos para serem astronautas, que tivessem experiência docente e de investigador em Matemática ou Física e que falassem inglês e russo. Quando ouvi esta notícia, foi quase como se estivessem a dizer-me: "Andrei, por favor liga-nos!" [Risos]. Cheguei a casa e disse à então minha mulher: "Vou fazer isto." O meu filho, que nessa época deveria ter uns 4 anos, pôs-se a chorar, dizendo: "Papá, não te vás embora para a Lua!" A verdade é que fiz todos os exames médicos, passei os exames físicos, fiz muitos testes de conhecimento (quase todos *online*), e um dia chegou uma carta a dizer, de forma educada, que tinham gostado muito do meu currículo, mas que lamentavelmente tinha sido eliminado. Assim, o meu sonho espacial esfumou-se… Um ano e tal foi quanto estive nesse programa. Não deu…

GAZETA Sabemos que tens três filhos e que não deve ser fácil levar a bom porto uma carreira tendo de os educar.

ANDREI Sim, é verdade. E mais agora, que estão os três comigo no Texas. Eu subestimei o trabalho que dá ser pai solteiro. É uma loucura. Divorciei-me em 2017. Em 2016, a minha mãe faleceu e, no meio disso tudo, surgiu um convite para me candidatar a um lugar de catedrático na Universidade de Baylor. No meio da barafunda da vida, pensei: "Porque não? Parece que a tua vida vai ter de mudar." Apresentei-me a concurso e acabei por ganhar a vaga de catedrático. Desde 2018 que estou praticamente a tempo inteiro nos Estados Unidos.

GAZETA Podes descrever-nos um pouco a questão do financiamento científico nos Estados Unidos? É muito diferente do sistema europeu?

ANDREI A questão do financiamento científico nos Estados Unidos depende muito de onde vem o dinheiro. As bolsas da National Science Foundation (NSF) são muito difíceis de conseguir. É praticamente uma missão impossível consegui-las. As bolsas NSF estão associadas ao vencimento mensal. Em teoria, pagam-te apenas uns nove ou dez meses de trabalho. Então, quando pedes dinheiro da NSF também estás a pedir dinheiro do teu salário. Isto faz com que os grandes investigadores/professores fiquem com grande parte do dinheiro porque auferem ordenados elevados. Estamos a falar de gente muito notável, como o Terence Tao, que lideram grandes projetos, com grande quantidade de dinheiro e que ficam com a maior parte do financiamento da NSF. Isto faz com que a NSF seja muito elitista.

A seguir à NSF está uma organização que é muito pouco burocrática e muito concreta, que é a Simons Foundation, que se converteu no análogo aos Projetos Nacionais em Espanha. Financia basicamente as viagens, as visitas de investigadores estrangeiros, etc… O processo de candidatura a apoios é muito simples. Como é óbvio, tens de elaborar um relatório anual descrevendo como está a decorrer o teu projeto, mas também é algo muito simples. No entanto, há nos Estados Unidos algo que não há em Espanha. É que os departamentos têm uma boa quantidade de dinheiro para apoiar os projetos dos seus professores e investigadores. Isso, sim, é bastante diferente. Tens muitos estudantes de doutoramento (muito mais do que em Espanha), dinheiro para viajar, etc… E todos os anos tens de relatar o que tens estado a fazer. Nesse sentido, é rigoroso.
Um dos grandes incentivos de ter vindo para Baylor foi a possibilidade de ter mais estudantes de doutoramento, principalmente para alguém como eu, que estava na Universidade de Almeria. Em Madrid até podes ter mais estudantes, mas em Almeria não.

GAZETA Pensas continuar nos Estados Unidos ou vais regressar a Espanha?

ANDREI Eu não vou reformar-me nos Estados Unidos, disso tenho a certeza. A cultura mediterrânica é-me muito mais próxima. No entanto, os meus dois filhos mais velhos estão a estudar na Universidade de Baylor. Sendo eu professor em Baylor, ficam isentos de propinas. Estamos a falar de 50 mil euros ao ano, por cada de um deles! É um argumento muito sólido para ficar nos Estados Unidos. Eles estão a aproveitar a educação que lhes dou. Não tenho razões de queixa.

GAZETA Continuas a investigar na área da teoria de aproximação e a resolver os problemas que estudavas antes ou foste mudando desde que passaste a viver nos Estados Unidos?

ANDREI Tenho vindo a mudar. Primeiro, com os problemas de Riemann-Hilbert. Foi uma segunda revolução que vivi no final dos 1990, princípio dos anos 2000. Estes trabalhos permitiram-me conectar-me com outras teorias, como a das matrizes aleatórias, que, por sua vez, me colocou a trabalhar com o conceito de probabilidade livre. Trabalho com um grupo aqui, mas sempre motivado por perspetivas da análise complexa, teoria de aproximação, polinómios ortogonais, que continuam a ser o meu *leitmotiv*. Diria apenas que os métodos e interesses é que mudaram um pouco.

GAZETA Na tua área, a parte computacional é relevante para o que fazes?

ANDREI Sim, muito relevante. Primeiro, porque sempre gostei muito da matemática computacional, e também porque a minha forma de pensar é mais algorítmica do

Andrei Finkelshtein na Baylor University.

que qualquer outra coisa. Tenho alguns artigos de métodos numéricos de que gosto muito. Creio que na minha área é muito relevante como uma ferramenta experimental. Já não tenho de tentar demonstrar alguma coisa sem saber por onde vou. Posso fazer experiências numéricas e, ao analisá-las, digo: "Parece que isto se verifica." Vamos lá então demonstrá-lo. E isso dá muita força. E muitas vezes, experimentalmente, descobres coisas de que nem suspeitavas. Tento usar muito técnicas computacionais, sobretudo porque me estimula encontrar novos fenómenos, experimentar um pouco, procurar novas soluções e depois demonstrá-las rigorosamente.

GAZETA E nota-se a evolução destas técnicas computacionais ao longo dos anos?

ANDREI A anos-luz desde que comecei! Eu sou da velha guarda. Só vi um computador quando já estava no terceiro ano da licenciatura. Sou um pré-histórico… Recordo que quando vi o primeiro ficheiro em *latex* demorava 30 segundos a compilar uma página. Todos os métodos e *softwares* evoluíram imenso. Tudo é muito mais fácil. E agora o que estamos a viver com a Inteligência Artificial é alucinante. O próprio ChatGPT, utilizo-o na minha vida diária de trabalho para acelerar as coisas. Quando leio ou pesquiso um conjunto de trabalhos, dou-lhe um monte de referências bibliográficas e digo-lhe: "Escreve-me isto em formato *bibtex*." E ele escreve! Não perdes nem um segundo. O ChatGPT causou uma revolução.

GAZETA Trabalhas com vários grupos de investigação, nomeadamente com um em Almeria e outro em Granada. Como interages com cada um destes grupos?

ANDREI Eu tenho sempre colaboradores. Estes dois grupos inicialmente eram um só. Depois, por questões geográficas, separaram-se. Também colaboro muito com gente na Bélgica, no Brasil, nos Estados Unidos e na Rússia. Obviamente, trabalhamos online. Utilizamos o Overleaf. Nos nossos dias, é tão fácil fazer estas coisas.

GAZETA Culturalmente, qual é a nacionalidade do colaborador com quem te foi mais fácil trabalhar?

ANDREI Acho que é fácil dares-te bem com pessoas de qualquer nacionalidade. Trabalho com diversos estudantes de várias nacionalidades. Vais encontrando em cada um deles o jeito de colaborar.

GAZETA Por curiosidade, tens um artigo na área económica[2]. Podes explicar como aparece?

ANDREI Esse é um artigo com o meu pai. Ele levava anos a falar-me e a discutir sobre esse tema, e um dia demos-lhe uma roupagem matemática. Eu não acredito que tenha muito interesse, mas sempre gostei de métodos matemáticos em economia, sobretudo as técnicas de tomada de decisão, teoria de jogos, etc. Não posso dizer que seja um especialista. Estudo para mim, mas sem o intuito da investigação.

GAZETA Sabemos que és fã de *gadgets*. Quais os teus favoritos?

[2] Francisco Martínez Soler & Andrei Martínez Finkelshtein, 2005. "Las ganancias del comercio y el intercambio desigual en los modelos del comercio internacional", *Revista de Economía Crítica*, Asociación de Economía Crítica, vol. 4, pages 115-140. *https://ideas.repec.org/a/ret/ecocri/rec04_06.html*

ANDREI [Risos] Todos … Na verdade, todos os que o dinheiro me possa permitir… É a minha debilidade… Outros terão outras… Há quem invista em vinho. Gosto de tudo o que é eletrónica: os computadores, a programação, os Raspberry Pi, os telemóveis, quase tudo o que é tecnologia me encanta. Gosto de perceber como funcionam.

GAZETA Referiste alguns nomes que influenciaram a tua carreira, mas gostaríamos de saber quais são as tuas referências enquanto professor e enquanto matemático.

ANDREI Como professores, eu diria, sem dúvida, o Guillermo López Lagomasino e o Andrei Gonchar. Foram grandes referências. Como matemáticos, diria o Evguenii Rahkmanov (com quem ainda colaboro), que é uma pessoa brilhante. O Barry Simon, com quem tenho alguns trabalhos, apesar de ser difícil colaborar com ele, pois é impossível não sentir um complexo de inferioridade constante. O bom de fazer matemática é que te encontras constantemente com gente extremamente inteligente e tão interessante que acaba por ser uma constante cura de humildade, o que não te permite ter uma opinião demasiado boa de ti próprio. E isso é bom!

GAZETA Que dirias aos estudantes que julgam que a matemática é só para génios ou para gente naturalmente talentosa?

ANDREI Eu sempre digo aos estudantes que na matemática podes fazer muito se te aproximares com a mesma mentalidade de quem vai a um ginásio. Primeiro, sabes que vais para sofrer, vai doer-te. De seguida, vais frustrar-te e vais pensar que não serves para isto. Durante meses não vai haver resultados e vais estar rodeado de pessoas muito mais fortes e bonitas do que tu. No entanto, vai haver um dia em que consegues levantar um peso que antes não conseguias ou correr sem perder o fôlego. Acredito que a maioria de nós, que chegou onde chegámos, foi simplesmente por conseguir manter a consistência nesta atitude. Sabes que a cada três dias vais sentir-te estúpido e que é para sofrer: coisas que deveria saber e não sei, coisas que devia ver e não vejo… Sabes que vais ter esse sofrimento, mas isso não é mau. É exatamente igual àquilo que sentes quando chegas a casa do ginásio: dói-te tudo e pensas que vais morrer de cansaço, mas realizado. Há algo de prazeroso nisso. Porque, além disso, sabes que vais ter a recompensa. Creio que os matemáticos aprenderam isso: a encontrar o prazer na recompensa intelectual que chega apenas de vez em quando, mas chega. Vale a pena!

GAZETA A matemática, se tivesses de a descrever, seria um homem ou uma mulher?

ANDREI [Risos] Céus, que pergunta tão politicamente incorreta, agora… nestes tempos… Os meus filhos se sabem que respondo a isto, vão crucificar-me! Eles defendem o *gender fluid*, etc… A imagem da mulher sempre foi associada ao enigmático, algo por descobrir. E, sim, considero que em geral a mulher é um ser mais evoluído e complexo do que o homem. Nesse sentido, considero que a matemática é enigmática e que tem muito por descobrir. Na matemática tu podes descobrir pequenas coisas, mas não podes aspirar a compreendê-las e a descobri-las completamente, tal como aplicaria à maioria das mulheres que eu conheço ou conheci na minha vida. Diria que é mais feminina do que masculina.

GAZETA Sabemos que aprecias música. Tocas algum instrumento?

ANDREI Chamar tocar ao que faço… é demasiado. [Risos] Toco guitarra. Eu cresci em Cuba, na *Nueva Trova Cubana*. Conheci os cantautores pessoalmente e isso influenciou-me muito. Toco para a minha alma, mais do que outra coisa. Continuo a ouvir todos os cubanos e, a este propósito, aconselho-vos um grupo jovem, muito bom, chamado Buena Fe.

GAZETA Ainda não conversámos sobre o teu lado profissional que tem mais a ver com atividades organizacionais, como é o caso do SIAM Activity Group. Gostas deste tipo de atividades?

ANDREI Não, não gosto. Acho que me saturei de todo o trabalho associativo, político e organizativo depois dos meus anos de estudante em Cuba. Depois disso, fiquei sem vontade. O que acontece é que uma das desvantagens de ser um *Senior* é que há um momento em que alguém tem de se chegar à frente. Alguém tem de o fazer. Estando em Espanha, estive três anos como diretor da secção de matemática da ANEP, que é quem distribui dinheiro pelos projetos por parte do ministério. Foi muito intenso. O do SIAM é uma atividade muito mais leve. Fui vice-

-presidente e agora sou diretor de programação. O problema no SIAM é que o grupo de polinómios ortogonais é muito pequeno e temos dificuldades em fazer com que cresça e com que não morra. Na realidade, não me ocupa tanto tempo. O que me rouba mesmo tempo é a minha participação como editor em várias revistas. É um trabalho muito complicado e cada vez pior. Cada dia é mais difícil encontrar quem queira fazer a revisão de artigos.

GAZETA Voltaste ao problema que propuseste ao Gonchar? Ou abandonaste-o?

ANDREI O problema consistia no estudo da melhor aproximação racional da função exp(P(x)), onde P é um polinómio sobre o semieixo positivo. Foi motivado pelo estudo da convergência de esquemas de discretização de equações parabólicas para a sua solução numérica. Pode ser abordado usando técnicas de teoria do potencial e equilíbrio num campo externo (que estavam a ser desenvolvidas na altura do meu doutoramento), mas a solução final passava pelo estudo de propriedades de certas superfícies de Riemann, e que resistiram às minhas tentativas. Penso que agora poderia ser resolvido, embora ainda seja um problema tecnicamente complicado. Se o abandonei? Não, o problema é que estão sempre a surgir-me novos desafios que acabo por achar mais interessantes e nunca lhe pego. Está ali, numa lista grande de problemas que tenho para resolver. Mas não "atirei a toalha ao chão"!

GAZETA Partilhas esses problemas ou guarda-los para ti?

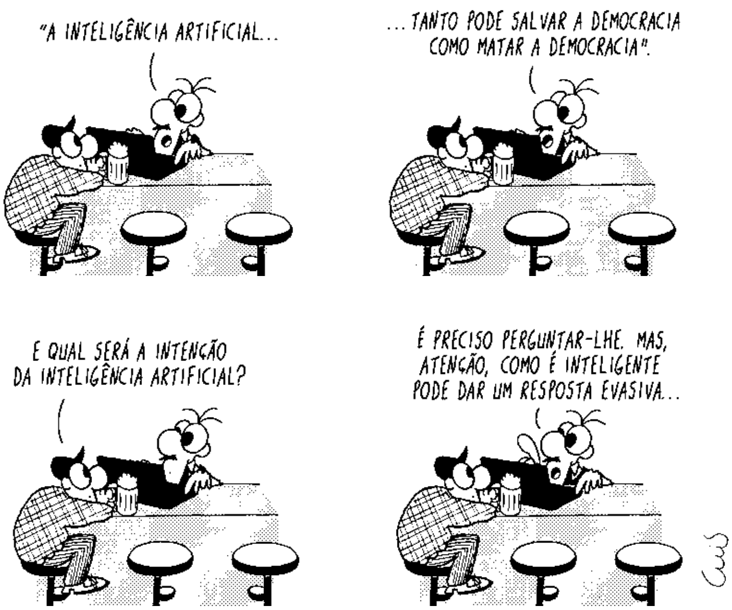
ANDREI Pelo contrário, comento-os com toda a gente. Estou sempre a "vendê-los" a quem quiser comprá-los. Popularizo-os! Em muitos artigos apresento esses problemas e chamo a atenção para eles. Como é óbvio, não são problemas fáceis, não são um exercício. Lembro-me de um problema que não conseguia resolver. Relatei-o a Percy Deift, que bem conheces, e ele também não conseguiu encontrar solução. Passou-o a um estudante de doutoramento que conseguiu resolvê-lo parcialmente. E publicou esse trabalho. Fiquei contente, pois o problema que me ocorreu teve um êxito parcial. Também não é que queira provar a hipótese de Riemann... [Risos]

GAZETA Para terminar, como vês o futuro dos polinómios ortogonais?

ANDREI Brilhante! Cada vez estão a incorporar-se mais novos métodos e há cada vez mais temas de aplicações. É algo cada dia mais atrativo. Está muito ativo e constantemente aparecem conexões e coisas novas. Deixou de ser esse remanso que acontecia quando fiz a minha tese de doutoramento. Era aquele cantinho de areia onde costumavas brincar e ninguém te incomodava e, de repente, toda a gente veio jogar para onde tu estás. Há muita coisa que se pode fazer.

BARTOON

Luis Afonso



Publicado originalmente no jornal Público, em 07/10/2023. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:
Patrícia Beites Universidade da Beira Interior
Rui Santos Politécnico de Leiria
Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1350 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

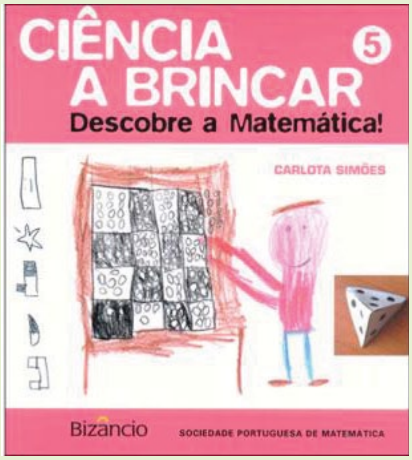
PORTUGAL ARRECADOU UMA MEDALHA DE PRATA E TRÊS DE BRONZE NAS OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA

As XXXVIII Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM) decorreram, de 6 a 12 de setembro, no Rio de Janeiro. Portugal saiu da competição com uma medalha de prata e três de bronze. Na classificação por países ficou em 5.º lugar na tabela. Rafael Inácio, aluno do 12.º ano da Escola Secundária Mário Sacramento, em Aveiro, conquistou a medalha de prata. Laura Muliar, do 11.º ano da Escola Secundária de Ponte de Lima, Rui Rodrigues, do 12.º ano da Escola Secundária Diogo de Gouveia, em Beja, e Tomás Faria, do 10.º ano do Colégio Moderno, em Lisboa, arrecadaram as medalhas de bronze. Além dos alunos, fizeram ainda parte da equipa António Salgueiro, capitão de equipa, professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, e Nuno Arala, tutor da equipa e ex olímpico. Portugal participou pela primeira vez nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática em 1994 e, desde então, já conquistou oito medalhas de ouro, 27 de prata e 44 medalhas de bronze.

CIÊNCIA A BRINCAR – DESCOBRE A MATEMÁTICA

O livro *Ciência a Brincar – Descobre a Matemática*, da autoria de Carlota Simões, está novamente disponível na Loja SPM.
Este livro convida as crianças a viajarem pelo mundo da Matemática e a descobrirem alguns dos seus segredos. Será fácil fazer um canteiro com a forma de um pentágono? E será que sai mais vezes cara ou coroa quando se lança uma moeda? Será possível dividir uma tarte em 11 pedaços apenas com quatro cortes?

Preço de Sócio: 8.63€
Preço Não Sócio: 9.59€



COMMUNICATIONS IN MATHEMATICS DEDICA VOLUME À MATEMÁTICA PORTUGUESA

A revista *Communications in Mathematics*, editada pela EpiSciences, terá no próximo ano um volume especial dedicado à matemática portuguesa e à matemática feita em Portugal. Neste momento, os editores estão a fazer uma chamada de artigos para este volume especial, que visa dar um panorama do contributo de matemáticos portugueses ou com forte ligação à comunidade portuguesa para áreas internacionalmente ativas.

Os artigos propostos devem ser escritos em inglês e passar por um processo de *referee* por pares. Também se aceitam artigos de revisão se fornecerem um panorama abrangente do tópico em questão. Sendo uma revista eletrónica, a publicação será imediata, após aceitação. As contribuições devem ser enviadas até 30 de junho de 2024. A revista é indexada por: SCOPUS, Mathematical Reviews e ZbMATH. Consulte a revista em *https://cm.episciences.org*.

IRENE FONSECA NA DIREÇÃO DA AMS

A matemática portuguesa Irene Fonseca foi eleita vice-presidente da American Mathematical Society para o triénio 2024-2027. Irene Fonseca é professora de matemática do Mellon College of Science da Universidade Carnegie Mellon, onde é diretora do Center for Nonlinear Analysis desde 1998. Nasceu em Lisboa, onde se licenciou na Faculdade de Ciências com média de 20 valores e doutorou-se na Universidade do Minnesota, nos EUA. O foco principal do seu trabalho é a pesquisa e o treino em matemática aplicada na ampla interface entre a matemática, as ciências físicas e a engenharia. É reconhecida por ser uma orientadora inspiradora e um modelo para outras mulheres matemáticas. Em 1997, a matemática foi agraciada com o grau Grande Oficial da Ordem Militar de Sant'Iago da Espada, em 2012 foi-lhe concedido o grau de Doutor Honoris Causa pela Universidade Nova de Lisboa e foi-lhe atribuído o prémio Seeds of Science da Ciência Viva. Em 2022, foi galardoada com o ISIMM Senior Prize, atribuído pela International Society for the Interaction of Mechanics and Mathematics.

Irene Fonseca foi presidente da Society for Industrial and Applied Mathematics em 2013 e 2014, escreveu mais de 100 artigos e participa ainda nos conselhos de várias importantes universidades e centros de investigação internacionais.

JM JOGOS MATEMÁTICOS

CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

A final do 17.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) terá lugar no dia 14 de março de 2024, na Universidade de Aveiro. Pela primeira vez, o CNJM não ocorrerá numa sexta-feira, porque a organização decidiu associar-se às celebrações do Dia Internacional da Matemática, que no próximo ano terão como tema "Playing with Math".

A competição é disputada em quatro categorias (1.º, 2.º e 3.º ciclos e ensino secundário) e consta de seis jogos: Gatos & Cães, Rastros, Produto, Dominório, Atari Go e NEX.

As inscrições para a competição estão abertas até ao dia 7 de janeiro.

http://ludicum.org/cnjm/2023-2024-cnjm17

NATALMÁTICO

A par dos Campeonatos SUPERTMATIK 2023/24, a Eudática lançou este ano o Natalmático, um concurso matemático dedicado aos alunos do 1.º ciclo. Como ensinar os alunos mais novos nas semanas que antecedem o Natal é um grande desafio, dado o entusiasmo com que vivem a época natalícia, foram criados alguns desafios matemáticos especificamente para esta época festiva. As inscrições decorreram até ao dia 30 de novembro e as atividades serão desenvolvidas em sala de aula no dia 11 de dezembro.

RENOVA PATROCINA OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

A Renova tornou-se na principal patrocinadora das Olimpíadas Portuguesas de Matemática, numa parceria que foi oficialmente assinada no dia 3 de agosto. Com duração até 2026, a parceria contempla as próximas três edições das Olimpíadas.

Paulo Pereira da Silva, presidente do Conselho de Administração da Renova, expressou o seu entusiasmo sobre esta parceria: "Estamos orgulhosos por apoiar as Olimpíadas Portuguesas de Matemática… Esperamos que esta colaboração ajude a despertar as mentes dos mais jovens, que é algo fundamental para termos, nas próximas gerações, jovens criativos e carregados de talento... os visionários que vão moldar o futuro".

X FEIRA DA MATEMÁTICA

Nos dias 10 e 11 de novembro, realizou-se a X Feira da Matemática no Museu Nacional de História Natural e da Ciência (MUHNAC). A feira presenteou o público com um programa de cerca de 100 atividades científicas, culturais e educativas, realizadas para diferentes públicos e faixas etárias: no dia 10 de novembro, com um programa dirigido para o público escolar, e no dia 11 de novembro para público geral e famílias. Circo Matemático, Círculos Matemáticos, Geometria Divertida, Passeios Matemáticos Coloridos e Os Maiores Segredos do Mundo são apenas alguns exemplos das diversas atividades que passaram pela Feira.

O evento foi organizado pelo MUHNAC em parceria com a Sociedade Portuguesa de Matemática, a Associação Ludus, a Associação de Professores de Matemática, a Sociedade Portuguesa de Estatística, a Associação Portuguesa de Investigação Operacional e o projeto Matemática do Planeta Terra.

CANDIDATURAS PARA O PRÉMIO FELIX KLEIN

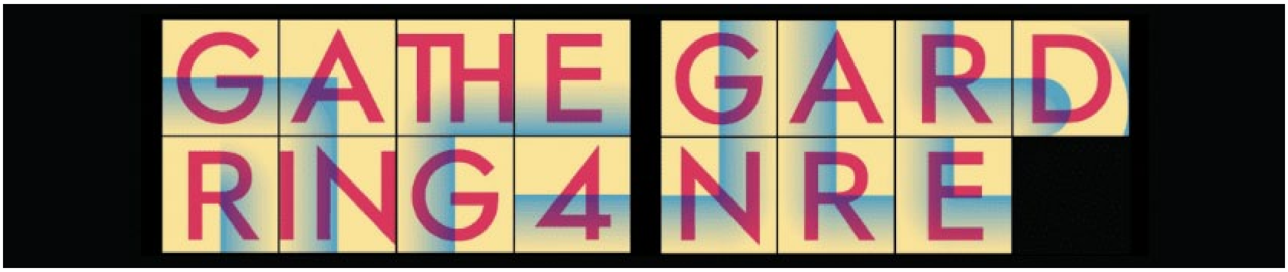
Estão abertas as candidaturas ao Prémio Felix Klein até ao dia 31 de dezembro de 2023. As candidaturas deverão ser acompanhadas de uma justificação escrita e de uma citação de cerca de 100 palavras, que poderá ser lida na data da atribuição, e ser enviadas eletronicamente à presidente da Comissão do Prémio, Professora Peregrina Quintela Estévez, da Universidade de Santiago de Compostela, peregrina.quintela@usc.es, com o Gabinete EMS em CC, ems-office@helsinki.fi.

O Prémio será concedido a um investigador, ou a um grupo de no máximo três investigadores, com idade inferior a 38 anos, por usar métodos sofisticados para fornecer uma solução excecional, que satisfaça completamente a indústria, para um problema industrial concreto e difícil. As nomeações podem ser feitas por qualquer pessoa. O prémio será entregue no 9º Congresso Europeu de Matemática em Sevilha, de 15 a 19 de julho de 2024, e é composto por um certificado que inclui a citação e um prémio monetário de 5000€.

36.º ENCONTRO DO SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O 36.º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) decorreu em Aveiro, nos dias 20 e 21 de outubro. O evento teve como convidados Clóvis Pereira da Silva, da Universidade Federal do Paraná, Brasil, June Barrow-Green da Open University, Milton Keynes, Inglaterra, Marc Moyon da Universidade de Limoges, França, e Reinhard Siegmund-Schultze da Universidade de Agder, Noruega. O Encontro foi acreditado pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação Contínua de Professores como 12 horas de formação para os grupos 230 e 500. O SNHM foi fundado em 1988 para colmatar as lacunas na divulgação e investigação em História da Matemática em Portugal, e muito em especial no que dizia respeito à matemática portuguesa.

15.ª EDIÇÃO DA GATHERING FOR GARDNER CONFERENCE



De 21 a 25 de fevereiro de 2024 em Atlanta, Geórgia, terá lugar a 15.ª edição da Gathering for Gardner Conference (G4G15). Os participantes vão encontrar-se para honrar a memória de Martin Gardner, para celebrar matemática recreativa, magia matemática, quebra-cabeças, ceticismo, ciência, arte, literatura e as interseções desses assuntos. Os interessados podem participar através de apresentações, performances, artigos originais e exposições. Ao contrário de muitas outras conferências, a G4G15 é de natureza participativa, todos os participantes são incentivados a contribuir, seja com uma apresentação de 5 minutos, um artigo original, uma exposição única ou alguma novidade.

Saiba mais em *www.gathering4gardner.org/g4g15-info.*

Joana Teles
Tesoureira da SPM,
Universidade de Coimbra
jteles@mat.uc.pt

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NA LUSOFONIA

Uma causa que abraçaremos sempre.

A competição científica, na área da Matemática, para alunos não universitários, com mais prestígio a nível internacional é a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Anualmente o número de países presentes ultrapassa a centena, num total de mais de 600 participantes. A lista de olímpicos (que pode ser encontrada na página oficial desta competição, *https://www.imo-official.org*) contém um painel admirável de matemáticos de renome, espalhados por diversos países, e já conta com o nome de 14 medalhas Fields.

O Brasil foi o primeiro país lusófono a participar na IMO, em 1979, e após 44 participações já obteve 14 medalhas de ouro, 55 medalhas de prata e 89 medalhas de bronze. Ao matemático brasileiro Artur Ávila, medalha de ouro na IMO em 1995, foi atribuída em 2014 a medalha Fields, sendo o primeiro (e até agora o único) lusófono a obter esta distinção. Portugal teve a sua primeira participação, passados dez anos, em 1989 e desde esse ano esteve em todas as edições. Os alunos portugueses, fruto de uma preparação que se intensificou nos últimos 20 anos através do Projeto Delfos, já conquistaram três medalhas de ouro, oito medalhas de prata e 41 medalhas de bronze. Moçambique participou em apenas três IMO (2004, 2005 e 2006) e Angola levou a sua equipa a Bath (Reino Unido), em 2019. Foi a única participação de Angola até ao momento. Mais nenhum país lusófono participou na IMO.

Ciente desta realidade e com o objetivo de incentivar as competições de matemática nos países da lusofonia, em março de 2010, a Sociedade Portuguesa de Matemática promoveu um encontro em Lisboa, com o apoio do Ministério da Ciência e da Tecnologia, com participantes dos países onde o português é uma das línguas oficiais: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste. Nesta reunião foi decidida, por unanimidade, a criação da **Olimpíada de Matemática da Lusofonia** a realizar anualmente, com a primeira edição prevista para 2011, em Portugal, e as seguintes no Brasil e em Moçambique. A Olimpíada de Matemática da Lusofonia, após a primeira edição, designada **Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP),** é uma competição anual entre jovens estudantes de países de língua portuguesa, cujos objetivos são:

- A melhoria da qualidade do ensino e a descoberta de talentos em Matemática, fundamental para o desenvolvimento científico e tecnológico;

- A promoção do estudo da Matemática nos países lusófonos;

- A criação de uma oportunidade para a troca de experiências educacionais nacionais;

- A união e a cooperação entre os países lusófonos para a criação de instrumentos que permitam a competição de alunos numa olimpíada internacional para os países de língua portuguesa.

Estas Olimpíadas percorreram já seis dos oito países lusófonos, mas nunca se conseguiu a participação de todos os países na mesma edição. Nos dois anos afetados pela pandemia houve uma interrupção na periodicidade (anual) que se tinha mantido até aí. Alguns países deixaram de realizar competições nacionais que permitiam identificar e depois selecionar as equipas que representariam o país. O caminho que há a percorrer ainda é longo. Continuamos com o propósito inicial de reunir esforços para que em conjunto se consiga apoiar a preparação e a participação na competição, esforços que seriam um incentivo para o desenvolvimento conjunto da Matemática nos países da lusofonia.

No próximo ano, 2024, iremos organizar em Portugal a 12.ª edição da OMCPLP. Estamos a fazer todos os esforços, com um contacto direto com os responsáveis em cada país e uma divulgação antecipada, para que todos os países convidados possam estar presentes, uma vez que seria a primeira vez que isso aconteceria. Será também uma oportunidade para lançar novos desafios a todos estes países:

- Formação de professores "Treinador Olímpico" nos vários países lusófonos;
- Ampliação da bibliografia olímpica existente em português utilizando a experiência da Olimpíada Portuguesa de Matemática e da Olimpíada Brasileira de Matemática;
- Trabalho conjunto na preparação dos alunos, que poderá ser presencial ou à distância, e no estabelecimento de competições nacionais regulares.

Este é um desafio em que estamos envolvidos e que não deixaremos de abraçar.

12ª Olimpíada de Matemática da CPLP Portugal

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2024

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S.Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

VISITE A LOJA SPM EM *WWW.SPM.PT*

spm SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia