N. 0204

Gazeta de Matemática

Publicação quadrimestral da SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA Ano LXXXV | Nov 24 - Fev 25 | 4,20€

O Fascinante Mundo da Uniforme e das Suas Parentes

Maria de Fátima Brilhante, Maria Ivette Gomes, Sandra Mendonça e Dinis Pestana

MATEMÁTICA E LITERATURA

Infinitos

Nuno Camarneiro

APANHADOS NA REDE

Uma infinidade de novas fórmulas para π

José Carlos Santos

HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA

Lillian R. Lieber

Jorge Nuno Silva

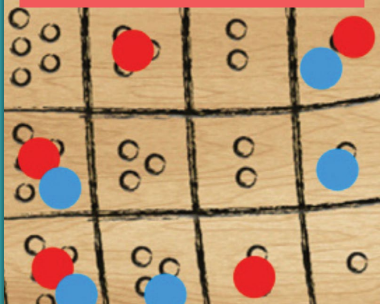
CENTRO DE FORMAÇÃO
2025 | SPM

Inscrições abertas

www.spm.pt

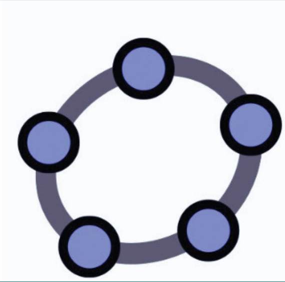
História da Matemática na Sala de Aula

FORMADOR JORGE NUNO SILVA
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500



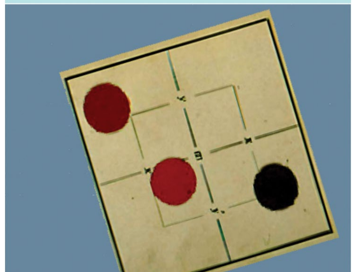
Aplicações do Geogebra Módulo 1

FORMADORES
PEDRO PIMENTA E JOAQUIM ROSA
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500



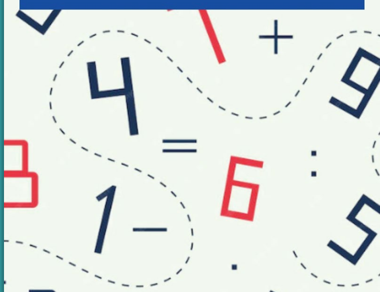
Jogos, Lógica e Matemática

DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500
FORMADOR
JORGE NUNO SILVA



Números e Operações no 1.º ciclo

FORMADORES
JORGE SANTOS E JOSÉ MARTINS
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 110 E 230

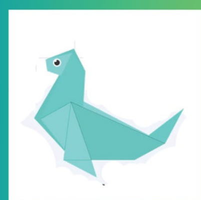


Clubes de Pensamento Matemático e Computacional (1º e 2º CEB)

FORMADOR PEDRO MARCELINO
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 110 E 230

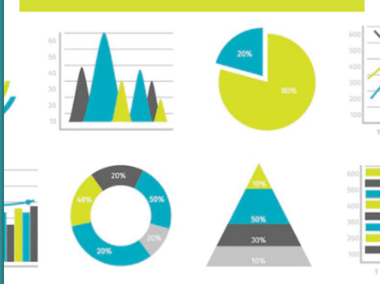
Matemática Recreativa II

FORMADOR JORGE NUNO SILVA
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500



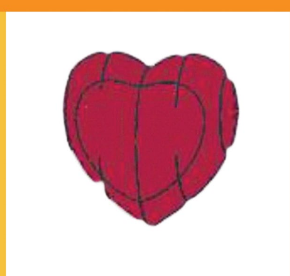
Estatística no Excel- E-Learning

FORMADORES
JORGE SANTOS E JOSÉ MARTINS
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500



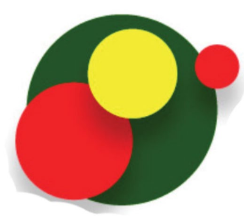
Geogebra 3D

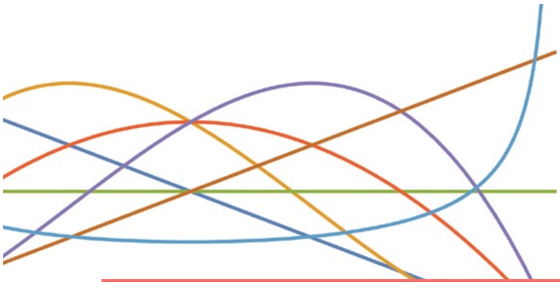
FORMADOR
PEDRO PIMENTA
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500



Círculos Matemáticos E-learning

FORMADORES JOANA TELES E
JORGE NUNO SILVA
DESTINATÁRIOS
PROFESSORES DOS GRUPOS 230 E 500

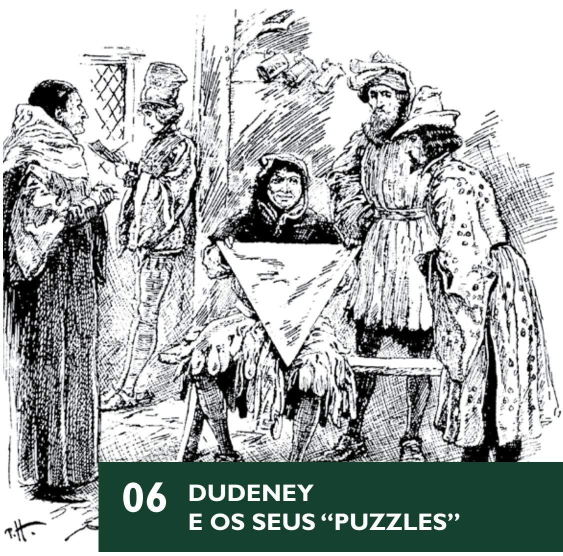




16 O FASCINANTE MUNDO DA UNIFORME E DAS SUAS PARENTES

11 ARTE E MATEMÁTICA

35 MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA E INOVAÇÃO



06 DUDENEY E OS SEUS "PUZZLES"

ÍNDICE

SERENDIPIDADE MATEMÁTICA E OUTROS ESCRITOS

Paulo Saraiva
Universidade
de Coimbra
psaraiva@fe.uc.pt

Dos resultados inesperados às Olimpíadas de Matemática: um conjunto de textos para descobrir

De tempos a tempos, alguns cientistas e, em particular, matemáticos, são surpreendidos pela obtenção de resultados inesperados que não constituíam o propósito das pesquisas que estavam a desenvolver. Tal faculdade de fazer descobertas agradáveis e imprevistas recebe o nome de serendipidade (vale a pena procurar a origem do termo). Um exemplo de serendipidade matemática é a descoberta de que a soma da série de termo geral $\frac{1}{n^3}$ é um número irracional (dito de outro modo, ζ (3), onde ζ é a função zeta de Riemann, é irracional), feita por Roger Apéry em 1978. Foi ao investigar problemas relacionados com a Teoria de Números que Apéry se terá apercebido da conexão que o conduziu a esta prova inesperada, o que permitiu abrir novas perspetivas no estudo de séries e dos números transcendentes. A taxa de descobertas serendipitosas na ciência não é clara, embora se estime que seja elevada (e há quem se preocupe em avaliá-la[1]). Vem isto a propósito do artigo da secção *Apanhados na Rede* da presente edição da *Gazeta*, no qual José Carlos Santos nos relata a notável descoberta de infinitas novas fórmulas para obter π por parte de dois físicos teóricos indianos. Aquelas foram obtidas como "subproduto" de uma fórmula mais geral no âmbito da investigação que ambos faziam na área da Teoria das Cordas.

No tema de capa, Jorge Nuno Silva convida-nos a conhecer a fascinante matemática americana Lillian R. Lieber, cuja prolífica colaboração com Hugh Lieber (este, ao nível das ilustrações), deu origem a vários livros de divulgação matemática, com considerável acolhimento entre leigos e especialistas.

Na secção *Matemáticos na Primeira Pessoa*, Ana Mendes e Joana Teles dão-nos a conhecer a matemática espanhola María Gaspar, principal responsável no país vizinho pela organização das Olimpíadas de Matemática (OM), focando em particular o seu labor de décadas na promoção do gosto pela matemática e na descoberta de jovens talentos matemáticos. Em Portugal, as OM são organizadas anualmente, desde 1983, pela Sociedade Portuguesa de Matemática. Independentemente do país em que se realizem, as OM permitem o desenvolvimento de competências, ao desafiar os jovens participantes a resolver problemas complexos, promovendo a criatividade e o engenho, e estimulando a procura do conhecimento em diversas áreas da matemática. Em particular, as Olimpíadas Internacionais de Matemática oferecem uma oportunidade de ligação com outros jovens talentosos de todo o mundo, construindo uma rede que pode ser benéfica no seu futuro. Por outro lado, podem ser motivadoras para os alunos com inclinações matemáticas, incentivando-os a prosseguir estudos e investigação em matemática. Vale a pena lembrar que matemáticos como Terence Tao, Grigori Perelman ou Artur Ávila[2] , todos agraciados com a Medalha Fields, participaram enquanto jovens nestas olimpíadas. Claro, importa sublinhar que há certamente outras vias suscetíveis de estimular nos jovens o gosto pela matemática e de, quiçá, os levar a optar por carreiras a ela ligadas.

Estou certo de que, entre os artigos aqui destacados e os restantes que aqui não couberam, encontrará motivos suficientes para ler esta edição da *Gazeta de Matemática*.

[1] Thagard, P. (2012). "Creative Combination of Representations: Scientific discovery and Technological Invention." In R. Proctor & E. J. Capaldi (Eds.), *Psychology of Science: Implicit and Explicit Processes* (pp. 389-405). Oxford University Press.

[2] Atente às palavras de Artur Ávila em *https://clube.spm.pt/news/curiosidades-sobre-o-matemtico-brasileiro-artur-vila-cordeiro-de-melo*, no curto vídeo por ocasião da atribuição da Medalha Fields em 2014.

Hélder Pinto
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

O JOGADOR DE TÉNIS QUE NÃO É ASSIM TÃO MAU, MAS QUE PERDE (QUASE) SEMPRE.

Qual é a probabilidade de um determinado jogador vencer um jogo de ténis, sabendo a probabilidade de esse jogador ganhar cada ponto?

Em tempos, jogava ténis todas as semanas com um colega da faculdade e, apesar de não ser "trucidado" (longe disso…), acabava por perder, invariavelmente, quase sempre. Como é que ele ganhava (quase) sempre, se eu ganhava, por exemplo, em média, 40% dos pontos que disputávamos?

Depois de anos com esta dúvida, lá me cruzei com um texto de Ian Stewart [1, pp. 15-30] que abordava exatamente esta temática:

> *"Dennis: how come you always beat me?"*
> *"I'm better than you, old son."*
> *"Yes, but you're not that much better. I've been keeping score and I reckon that I win one-third of the points. But I don't win one-third of the matches!"*

De facto, a conclusão apresentada era a seguinte:

> *"Dennis, if I have a one in three chance of winning each point, I only have a one in seven chance of winning a game! No wonder you always beat me! The rules of tennis amplify differences between players."*

Na realidade, este "*one in seven*" é apenas uma aproximação. Tente determinar o valor exato da probabilidade de o amigo ganhar um jogo de ténis ao Dennis.

E no caso dos meus 40%? Qual a probabilidade de eu ganhar um jogo ao meu colega?

Mas é necessário ganhar seis jogos (pelo menos) para se ganhar um *set*… E pelo menos três *sets* para se ganhar uma partida de ténis (na vertente masculina, dependendo dos torneios)… Se o leitor tiver coragem (e algum tempo livre), tente chegar à conclusão que está indicada a seguir:

> *"Well, according to my calculations, if I have a 1/3 chance of winning a point against you, my chance of winning a match is 0.000000027, or about one in thirty-seven million."*

Nada como a matemática para nos levantar a autoestima desportiva!...

PS: Nestes considerandos, para facilitar, considere que a probabilidade de vencer um ponto é sempre a mesma, independentemente de quem está a servir (o que está longe de ser verdade, embora me pareça que no ténis recreativo amador não seja assim tão descabido).

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS

1. Os números aleatórios que guiam as nossas vidas e a a busca para encontrá-los

> *"Mesmo com toda a sua capacidade, existem coisas que os computadores não fazem muito bem. Uma delas é definir números aleatórios.*

Sim, os computadores liberam dados o tempo todo, mas não números aleatórios. Porquê?

Os computadores dependem de mecanismos internos que, em algum nível, são previsíveis. Por isso, os resultados dos algoritmos dos computadores, em algum momento, também se tornam previsíveis – é exatamente o que você não quer que aconteça, quando administra um casino.

O mesmo problema também causa dores de cabeça para os criptógrafos. Quando você criptografa informações, você quer que o código seja o mais aleatório possível, para que ninguém consiga descobrir como você codificou o texto original. Isso impede que as pessoas leiam a mensagem secreta.

Há muito tempo, as pessoas buscam fontes externas de aleatoriedade para servir de base à geração de números aleatórios. E, nesta busca da verdadeira aleatoriedade, elas já examinaram praticamente tudo, em busca de fenômenos caóticos que não possam ser previstos, nem manipulados.

Os pesquisadores já ouviram os ruídos das tempestades elétricas, tiraram fotos de gotas de chuva no vidro e brincaram com as minúsculas partículas do Universo conhecido. E a busca está longe de terminar." [2]

Ora aqui está uma situação que nos parece contraintuitiva, numa época em que a inteligência artificial e a computação parecem não ter limites… Afinal, um computador, por si só, não consegue criar números que sejam totalmente aleatórios!… Coisa que uma criança consegue fazer lançando uma moeda ao ar e observando a face que fica para cima (como matemáticos que somos, consideremos as faces 0 e 1 na moeda, e o sistema de numeração binário), embora permaneça a questão: como decidimos a paragem de lançamentos para que a nossa escolha seja verdadeiramente aleatória?

Embora haja modelos computacionais (*Pseudo-Random Number Generators*) que, na prática, são suficientemente bons para a maioria das necessidades humanas, ainda é necessário recorrer a fenómenos naturais para determinar números completamente aleatórios (*True Random Number Generators*). Esta necessidade de verdadeiros números aleatórios é crucial em certas áreas, como a criptografia, pois só assim se garante, por exemplo, a segurança dos dados pessoais, bancários, etc. (consultar [3] para mais pormenores).

2. Matemática e democracia

"Uma publicação da UNESCO de 2022 intitulada Mathematics for Action defende, com detalhes acessíveis a um público alargado, que todos os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável das Nações Unidas precisam de intervenção e decisões baseadas em fundamentos matemáticos. […]

Foi por isso com muita surpresa que li o texto do deputado Nélson Brito no Observador do dia 10 de junho de 2024. Defender que no Ensino Secundário apenas deveriam ser obrigatórios Português, Inglês e Educação Física e que uma alternativa à Matemática poderia ser "estatística, análise de dados, matemática financeira, econometria" é um duplo erro. Primeiro, todos os cidadãos precisam de (muita) Matemática para além do Ensino Básico como o texto da UNESCO (e muitos outros) evidenciam, por outro lado todas as áreas que refere, "estatística, análise de dados, matemática financeira, econometria", se baseiam em Matemática muito para além do lecionado no Ensino Básico, sem a qual não podem ser minimamente trabalhadas." (Jaime Carvalho e Silva, [4])

De facto, reduzir todo o estudo/investigação e todo o ensino à componente utilitária das coisas tem sido prática corrente de alguns comentadores e de algumas políticas públicas. E esta visão tem sido castradora, por exemplo, para muitas áreas como a Literatura, a História e as Artes, que têm muita dificuldade em encontrar fontes de financiamento em detrimento de áreas mais rentáveis... Reduzir a utilidade da Matemática à sua componente aplicada é não conhecer a Matemática, nem sequer conhecer o processo como a Matemática encontra a sua aplicabilidade no mundo real… Será que Newton quando enunciou a lei da gravitação universal sabia que tal conhecimento ia ser rentável, pois iria ser aplicado, por exemplo, na órbita de satélites? E, já agora, porquê aplicar apenas a Matemática à Finança e à Economia e não a outras áreas como a Química, a Física, a Medicina e a Astronomia? Ah, suponho que já sei: ou os cifrões estão mesmo à frente dos nossos olhos ou então não conseguimos ver mais além…

De facto, a educação sofre um pouco do mesmo mal do futebol: todos são treinadores de bancada e todos fariam melhor do que os especialistas que lá estão!

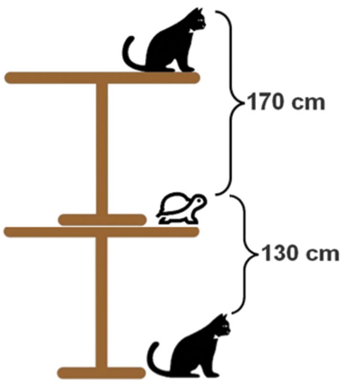
3. O teorema do ponto fixo de Brouwer

"Vocês sabiam que ao mexerem o café numa chávena, existe sempre um ponto do café que fica no mesmo sítio? Mesmo que sejam agressivos! Isto deve-se ao teorema do ponto fixo de Brouwer (…)" [5]

Duas notas breves sobre a frase acima: 1) Em rigor, deveria ser referido que existe, pelo menos, um ponto nessas condições (apesar de extremamente improvável, poderia dar-se o caso de termos vários pontos a terminarem no sítio onde começaram… No limite, até podíamos ter todos os pontos nessa situação… Imagine-se uma rotação da bebida em relação ao centro da chávena que seja múltipla de 360º); 2) Deveria ter-se reforçado, talvez, que esta afirmação só é verdadeira se compararmos o início e o fim de mexermos o café. Durante esse intervalo de tempo, todos os pontos do café podem ter-se movimentado nalgum momento e não há maneira de garantirmos o contrário. Em rigor, não é preciso esperar pelo final de mexer o café: em qualquer momento, existe sempre, pelo menos, um ponto que está no mesmo sítio onde estava inicialmente.

SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR

A mesa no problema do gato e da tartaruga mede 150 centímetros. Basta considerar uma mesa em cima da outra, como na figura abaixo, para concluir que duas mesas sobrepostas medem 300 centímetros. Por outro lado, nada pode concluir-se sobre a altura dos animais, a não ser que o gato mede mais 20 cm do que a tartaruga (basta observar que $m + g = t + 170$ e $m + t = g + 130$ e comparar as variáveis t e g).



Na segunda questão colocada no número anterior, se $a + b = 1$ e $a^2 + b^2 = 2$, então verifica-se a igualdade $a^{11} + b^{11} = \frac{989}{32}$. Pode encontrar uma explicação detalhada da resolução desta questão em [6].

No problema "Se $x + xy + y = 54$, a que é igual $x + y$?" (por lapso, no número anterior não foi indicado que as duas variáveis x e y têm de ser números inteiros positivos), a solução é 14.

Para chegar à solução, basta observar que a equação indicada é equivalente à equação $(x+1)(y+1) = 55$. Note-se ainda que cada fator desta equação terá de ser maior do que dois pela restrição agora indicada, o que obriga a que um dos fatores seja 5 e o outro 11 (55 é decomposto apenas nos fatores primos 5 e 11). Por outro lado, verifica-se ainda que

$$x + y = (x+1) + (y+1) - 2$$

e, portanto, conclui-se facilmente que

$$x + y = 5 + 11 - 2 = 14.$$

Note-se que, sem a restrição agora indicada, $x + y$ não têm um valor único (considere, por exemplo, as situações a seguir):

- $x = 0$, implica que $y = 54$ (logo, a soma seria igual a 54);
- $x = 1$, implica que $1 + y + y = 54$, ou seja, $y = \frac{53}{2}$ (a soma seria, portanto, igual a 552).

A solução natural de $\begin{cases} ab + c = 2020 \\ a + bc = 2021 \end{cases}$ é (673,2,674).

A solução natural de $\begin{cases} ab + c = 2023 \\ abc = 2022 \end{cases}$ é (1,1,2022).

Até ao próximo número do nosso Recreio!

REFERÊNCIAS

[1] Stewart, I. (1989). *Game, Set, and Math: Enigmas and Conundrums*. Basil Blackwell.

[2] BBC News Brasil, 26 de julho 2024. *https://www.bbc.com/portuguese/articles/c51y05zev73o*

[3] Lugrin, T. (2023). "Random Number Generator". In: Mulder, V., Mermoud, A., Lenders, V., Tellenbach, B. (eds) *Trends in Data Protection and Encryption Technologies*. Springer. *https://doi.org/10.1007/978-3-031-33386-6_7*

[4] Carvalho e Silva, J., *Observador*, 15 de junho de 2024. *https://observador.pt/opiniao/matematica-e-democracia*

[5] *Mathgurl*, YouTube, 8 de maio de 2024. *https://youtube.com/shorts/lPAS8sJ2Ob8?si=zwviyg_XlqSxnWtd* (transcrição do vídeo)

[6] Bhannat Maths, YouTube, 10 de março de 2023. *https://www.youtube.com/watch?v=YKEr7OW-VIc*

"Haberdasher": retroseiro, isto é, dono de uma loja de miudezas ou de retrós.

DUDENEY E OS SEUS "PUZZLES"

António Guedes De Oliveira[a] e Maria Rosário Pinto[b]
CMUP e Departmento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto[a,b]
agoliv,@fc.up.pt[a] e mspinto@fc.up.pt[b]

No início do século XX, dois fantásticos criadores de charadas (matemáticas ou não) publicaram numerosos artigos em jornais de grande circulação e vários livros com os problemas que criaram. Embora não se conhecessem pessoalmente, colaboraram um com o outro diversas vezes. Um, Sam Loyd, vivia nos Estados Unidos e o outro, Henry Dudeney, vivia em Inglaterra. Ao primeiro foi dedicada a coluna "O que vem à Rede" da *Gazeta de Matemática* N.º 151, de julho de 2006, com o artigo "Os Fantásticos 'Quebra-Cabeças' de Sam Loyd", de António Monteiro. Aqui falaremos um pouco mais de Henry Dudeney, sobretudo com base na introdução assinada pelo editor, Martin Gardner, de uma edição póstuma, americana, do livro de H. Dudeney, *536 Puzzles & Curious Problems*, e na pequena biografia publicada por J. J. O'Connor e E. F. Robertson para a Mac Tutor[1].

Martin Gardner, ele próprio provavelmente o maior divulgador de matemática do século XX, era um grande admirador de Dudeney, em particular pelas suas charadas matemáticas. Note-se que Dudeney era filho de um professor, mas não teve grande educação formal. Estudou Matemática e História da Matemática como autodidata, um pouco como o pai do seu pai, que também foi professor mas que começou a vida como pastor de ovelhas, e que era ainda pastor quando começou a estudar por si Matemática.

Dudeney começou a fazer charadas e problemas de xadrez aos nove anos e manteve durante muitos anos colaboração com jornais populares (durante 30 anos publicou "puzzles" numa revista, *The Strand Magazine*, onde na mesma altura publicaram autores como Agatha Christie, Arthur Conan Doyle – criador de Sherlock Holmes – e P. G. Wodehouse).

Uma das suas charadas mais conhecidas, embora seja referida muitas vezes sem indicação do autor, é talvez a seguinte, publicada em 1924 no *The Strand Magazine*: *Substituir cada letra do esquema seguinte por um algarismo diferente, de modo a que represente do modo habitual uma soma.*

$$\begin{array}{r} SEND \\ +MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$

Convidamos o leitor a resolver a charada. Sugerimos só que comece por determinar o valor de $M > 0$.

Henry Dudeney publicou o seu primeiro livro, *The Canterbury Puzzles*, em 1907.[2]

Vamos começar por considerar aqui um problema (o Problema N.º 131, "Finding a Square") de um outro livro, publicado depois, *536 Puzzles & Curious Problems.* Dudeney resolve este problema com a utilização original de um método tradicional (em inglês, *casting out nines*) de trabalhar com números. Consiste em, dado um número natural, somar os algarismos desse número, em somar os algarismos dessa soma, etc., até ter um número de um só algarismo, de 1 a 9, a que Dudeney chama *a raiz digital* do número inicial.[3] Note-se que, não sendo de modo nenhum inédita a construção, é muito original a utilização que Dudeney faz dela.

A segunda charada que aqui vamos considerar faz parte de *The Canterbury Puzzles*. É apresentada como *The Haberdasher's Puzzle* – que podemos traduzir como "A Charada do Retroseiro". Deve referir-se que Dudeney descreve esta e outras charadas como sendo histórias perdidas de *The Canterbury Tales*, obra clássica publicada em fins do Século XIV, onde os membros de um grupo de peregrinos contam cada qual uma história aos outros membros. Na charada em questão, é o retroseiro quem apresenta (em suposto inglês antigo) um triângulo equilátero de tecido. Pede para lhe dizerem como se pode cortá-lo num número mínimo de panos que, dispostos de outro modo (sem os virar), constituam um quadrado. O retroseiro acaba por confessar que não conhece a resposta, mas diz Dudeney, num aparte, que ele, Dudeney, sabe dividir

Pode-se recortar um triângulo equilátero em quatro peças que, juntas de outro modo, formem um quadrado?

[1] *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dudeney*

[2] *https://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm*

[3] *Digital root* no original inglês. É habitual entre nós utilizar esta técnica dos "noves fora", em geral na chamada "prova dos nove".

o triângulo em quatro partes que se podem unir num quadrado e convida o leitor a descobrir como. Dá mais tarde a solução, que aqui apresentamos também. Dudeney tinha claramente orgulho nesta sua invenção: mandou construir um modelo com peças de madeira e dobradiças de cobre, que lhe permitiam, rodando as peças num sentido ou no outro, formar ora um quadrado ora um triângulo equilátero. A Royal Society mostrou-se interessada na invenção, e Dudeney apresentou-a em 1905 numa reunião desta sociedade científica.

Em ambos os casos, apresentamos (em tradução livre) o problema que Dudeney propôs e a solução que publicou. Apresentamos também o que (naturalmente, dado o contexto) Dudeney não faz, a justificação matemática dos raciocínios usados, incluindo, no segundo caso, a prova de que *é realmente um quadrado* a figura que se constrói.

Problema 1: *São dados seis números,* 4 784 887, 2 494 651, 8 595 087, 1 385 287, 9 042 451 *e* 9 406 087. *Sabe-se que três desses números, somados, formam um quadrado. Quais são?*

Solução (segundo Dudeney): Tomando os seis números por ordem, a soma dos seus algarismos forma a segunda linha de números de:

4 784 887	2 494 651	8 595 087	1 385 287	9 042 451	9 406 087
46	31	42	34	25	34
1	4	6	7	7	7

Somando de novo, consecutivamente, até obter um número entre 1 e 9, a raiz digital do número inicial, obtemos a terceira linha de números. Estas raízes podem ser combinadas em diferentes conjuntos de três de oito maneiras diferentes:

146	147	167	177	467	477	677	777
2	3	5	6	8	9	2	3

dando de novo as raízes digitais indicadas. Mas, conforme foi visto em *Amusements in Mathematics*, as raízes digitais de um quadrado só podem ser 1, 4, 7 ou 9,[4] de modo que os números procurados devem ter raízes 4, 7, 7 para que a soma seja um quadrado. Os dois setes podem ser selecionados de três maneiras diferentes. Mas se o quinto número for incluído, a soma termina em 189 ou em 389, o que não pode acontecer com um quadrado terminado em 89, onde 89 deve ser precedido de um algarismo par (eventualmente 0).

Portanto, os números procurados são o segundo, o quarto e o sexto, e, de facto,

$$2\,494\,651 + 1\,385\,287 + 9\,406\,087 = 13\,286\,025 = 3\,645^2\,.$$

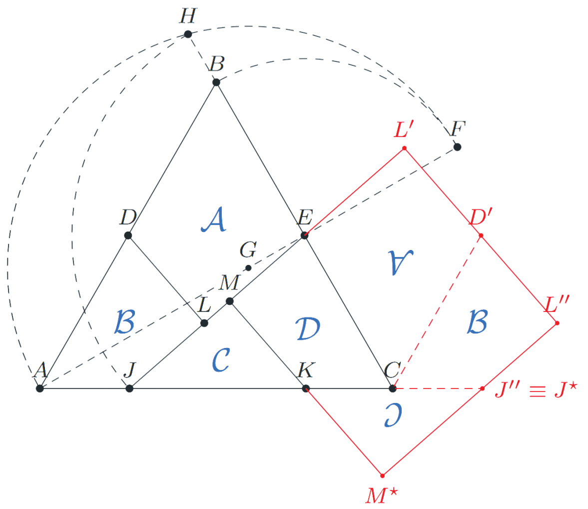
Alguns comentários

A raiz digital de $n > 0$ é o resto na divisão de n por nove, com a diferença de que a raiz digital, como soma de algarismos não-nulos, não pode ser zero, e que pode ser 9. Mas é fácil ver que a raiz digital de n é nove se e só se n é múltiplo de 9.[5] Dudeney, em *Amusements in Mathematics*, nota que as raízes radicais dos quadrados dos números naturais formam a sequência $1\,,4\,,9\,,7\,,7\,,9\,,4\,,1\,,9$, "repetida até ao infinito", e conclui que um quadrado tem como raiz digital 1, 4, 7 ou 9. Podemos obter o mesmo resultado notando que, se dois números têm o mesmo resto na divisão por 10, então também têm o mesmo resto na divisão por 10 (de facto, na divisão por 20) os quadrados desses dois números, já que $(10\,k + a)^2 = 100\,k^2 + 20\,a\,k + a^2$, e que, portanto, basta considerar os algarismos das unidades dos quadrados dos inteiros de 1 a 9.

Pelo mesmo raciocínio, o quadrado de um número natural termina em 9 se e só se esse número termina em 3 ou 7. Podemos estender este raciocínio, notando que se dois números têm o mesmo resto na divisão por 100, então os seus quadrados *diferem num múltiplo de 200*. De facto, $(100\,k + a)^2 = 10\,000\,k^2 + 200\,a\,k + a^2$. No caso de o número terminar em 3, analisando os diversos casos, vemos que o quadrado de um número termina em 89 se e só se esse número termina em 33 ou 83, sendo $33^2 = 1\,089$ e $83^2 = 6\,889$. No caso de o número terminar em 7, o quadrado termina em 89 se e só se o número termina em 17 ou 67, sendo $17^2 = 289$ e $67^2 = 4\,489$. Portanto, *num quadrado terminado em 89 o algarismo das centenas é par*, como nestes quatro quadrados.[6]

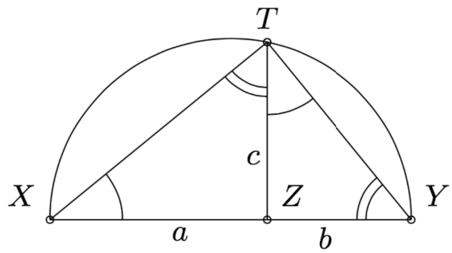
Problema 2: *Dividir um triângulo equilátero em quatro partes que, noutras posições, constituam um quadrado.*[7]

Solução (segundo Dudeney): Sejam $\triangle ABC$ o triângulo equilátero e D e E os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respetivamente. Sobre $\overrightarrow{AE}$, do outro lado de A relativamente a E, marca-se F tal que $|EF| = |EB|$. Com centro no ponto médio de $\overline{AF}$, G, passando por estes dois pontos, desenha-se um arco que interseta $\overrightarrow{CB}$ em H. Seja J o ponto de $\overline{AC}$ à mesma distância de E que H, e $K \in \overline{CJ}$ tal que $|JK| = |BE|$. Finalmente, sejam $L, M \in \overline{EJ}$ tais que $\overline{DL}, \overline{KM} \perp \overline{EJ}$.



As quatro peças estão claramente identificadas na figura, assim como o quadrado que formam.

Meio proporcional
Suponhamos (ver figura) que, dados quatro pontos X, Y, Z, T, $Z \in \overline{XY}$, $|XZ| = a$, $|YZ| = b$, $\overline{ZT} \perp \overline{XY}$, T pertence à circunferência de diâmetro $\overline{XY}$ e $|ZT| = c$. Portanto, $\measuredangle XTY = 90^{\circ} = \measuredangle TZX = \measuredangle TZY$ e são semelhantes os triângulos $\triangle XZT$ e $\triangle TZY$ e, portanto, $\frac{|XZ|}{|ZT|} = \frac{|ZT|}{|YZ|}$ (ou $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$) e $|ZT|^2 = |XZ||YZ|$.



Alguns comentários

Pode considerar-se que a peça $\mathcal{B}$ foi rodada 180º em torno de D, sendo B a imagem de A, e que depois se rodaram *solidariamente* em torno de E, de novo 180º, a peça $\mathcal{A}$ e a peça $\mathcal{B}$ depois de rodada. Obtém-se L' como imagem de L, C como imagem de B, etc., e J'' e L'' como imagens dos rodados de J e L, respetivamente. Finalmente pode considerar-se que a peça $\mathcal{C}$ é rodada 180.º em torno de K. Sejam $M^{\star}$ e $J^{\star}$ os rodados de M e J por esta rotação, respetivamente.

Portanto, $\overline{EL'}$ está no prolongamento de $\overline{EJ}$, $\overline{D'L'} \perp \overline{EJ}$, D' é o ponto médio de $\overline{L'L''}$ e $\overline{L'L''} \perp \overline{L''J''}$. Do mesmo modo, K é o ponto médio de $\overline{MM'}$ e $\overline{KM'}$ é perpendicular ao segmento definido por M' e pelo rodado $J^{\star}$ de J, que pertence a $\overline{AJ''}$. Como $|AJ| = |CJ''|$ e, por construção, $|AJ| + |CK| = |JK| = |AB|/2$, $|KJ| = |KJ''|$ e, portanto, $J^{\star} = J''$ e as peças $\mathcal{A}$ – $\mathcal{D}$, nas novas posições, *formam um retângulo*. Em particular, $|KM| = |D'L'| = |DL|$. Note-se que a área do rectângulo é a área do triângulo inicial.

Na verdade, $\square JDEK$ é um paralelogramo, uma vez que $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{JK}$ são retas paralelas e $|DE| = |JK| = |AC|/2$. A simetria no centro do paralelogramo envia E em J e D em K e, consequentemente, L em M. Em particular, $|KM| = |DL|$, como vimos, e $|JM| = |EL|$. Mas então $|ML'| = |ME| + |EL'| = |ME| + |EL| = |ME| + |JM| = |EJ|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{área}(\square ML'L''M') &= 2|EJ|\,|KM| \\ &= \text{área}(\triangle ABC) \\ &= |AE|\,|BC|/2\,. \end{aligned}$$

É interessante observar que o facto de ser $|EJ| = |EH|$ não intervém na construção feita até aqui. Isto mostra que, fazendo variar $|EJ|$, isto é, a posição de J em $\overline{AC}$, podemos construir assim retângulos (para além do quadrado), todos com a área do triângulo inicial e todos com um lado igual a $|EJ|$.

Notamos agora que a construção do ponto H é uma *construção do meio proporcional*, em que, dados segmentos de comprimento a e b, respetivamente, se *constrói um segmento de comprimento c tal que* $c^2 = ab$.

No nosso caso, $|EH|^2 = |AE|\,|EF|$ e

$$2|EH|\,|KM| = \text{área}(\square ML'L''M') = |EH|^2\,;$$

[4] *https://www.forgottenbooks.com/en/download_pdf/Amusements_in_Mathematics_1000013184.pdf*, p.20.

[5] De facto, escrevendo como é habitual $a \equiv b \bmod 9$, no sentido de dizer que a e b têm o mesmo resto na divisão por 9 (ou que $a - b$ é múltiplo de 9), lembremos que, se $a \equiv b \bmod 9$ e $c \equiv d \bmod 9$, então $a + c \equiv b + d \bmod 9$ e $ac \equiv bd \bmod 9$. De facto, se $a = 9k + b$ e $c = 9\ell + d$, então $a + c = (9k + b) + (9\ell + d) = 9(k + \ell) + b + d$ e $ac = (9k + b)(9\ell + d) = 81k\ell + 9(b\ell + dk) + bd$. Como $10 \equiv 1 \bmod 9$, também $10^m \equiv 1 \bmod 9$ e portanto, por exemplo,

$$2\,494\,651 = 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + \cdots + 5 \cdot 10 + 2 \equiv 2 + 4 + \cdots + 5 + 2 \bmod 9.$$

[6] De forma mais direta, veja-se que $(10k + 7)^2 - 17^2 = 20(k - 1)(12 + 5k)$, que este número é múltiplo de 100 se e só se $k = 5\ell + 1$ para algum inteiro ℓ e que se $k = 5\ell + 1$, então $20(k - 1)(12 + 5k) = 100\ell(17 + 25\ell)$ é múltiplo de 200 porque $\ell(17 + 25\ell)$ é par para todo o inteiro ℓ. Se $k = 5\ell + 3$, $(10k + 3)^2 - 33^2 = 100\ell(33 + 25\ell)$, que é múltiplo de 200 por razões análogas. De modo semelhante se vê que o algarismo das unidades de um quadrado terminado em 9 é par.

[7] Usamos aqui uma notação que não é talvez a mais usada em Portugal, onde $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ e $|AB|$ designam, respetivamente, o segmento que une os pontos A e B, a semirreta com origem em A que passa por B e o comprimento do segmento que une A e B.

portanto, $2|KM| = |EH|$ e, finalmente, $\square ML'L''M'$ *é um quadrado.*

Solução de $SEND + MORE = MONEY$

(notemos a complexidade da resposta – e o engenho de Dudeney). Vamos começar pelo valor representado por $M > 0$: como a soma de dois números diferentes de um só algarismo é inferior a 18, $M = 1$, então $O = 0$ e $S = 9$, porque a coluna a seguir não pode causar transporte superior ou igual a 2, e portanto $S > 8$. Note-se que, como $S = 9$, a coluna a seguir de facto não causa transporte e $N = E + 1$, já que $N \neq E$. Como $R \neq S$, $R = 8$, e $D + E = 10 + Y$. Na verdade, como $Y \geq 2$ e $D \leq 7$, $E = 10 + Y - D \geq 12 - 7 = 5$. Por exemplo, $E = 5$ e $N = 6$, $D = 7$ e $Y = 2$ são valores que se adaptam à situação. Obtém-se

$$\begin{array}{r} SEND \\ +MORE \\ \hline MONEY \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9567 \\ +1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

É fácil agora ver que esta solução é única.

Agradecimentos

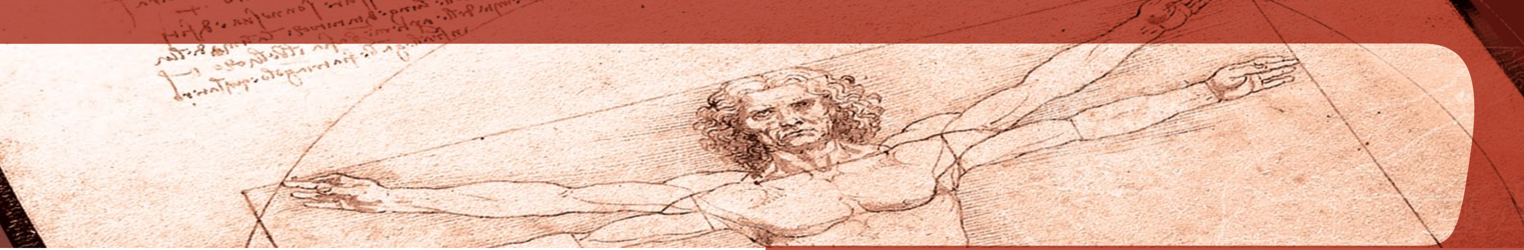
Os autores agradecem ao revisor e aos editores a leitura cuidadosa deste artigo.

Os autores foram parcialmente apoiados pelo CMUP, que é financiado com fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), pelo projeto UIDB/00144/2020.

SOBRE OS AUTORES

António Guedes de Oliveira é Professor Catedrático Aposentado da Universidade do Porto e é investigador no CMUP (Centro de Matemática da U. Porto). Fez o doutoramento em Matemática em Darmstadt (Alemanha), e especializou-se em Combinatória.

Maria Rosário Pinto é Profesora Auxiliar da Universidade do Porto. Fez o doutoramento em Geometria em Southampton (Reino Unido).



PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

A MATEMÁTICA DE ANA LUA CAIANO

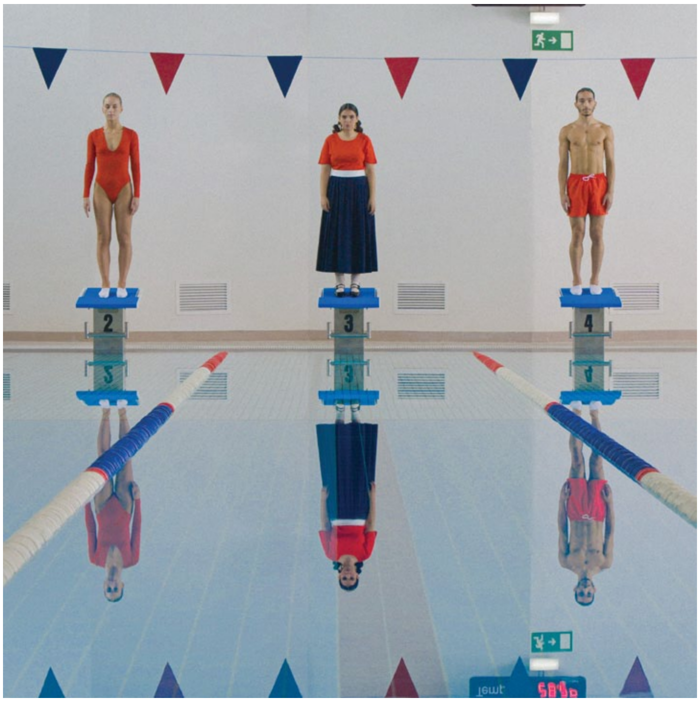
Todos já ouvimos, certamente, alguma das canções de Ana Lua Caiano, uma das revelações mais recentes da música portuguesa. Mas terá alguém reparado na presença de elementos matemáticos nessas canções?

O meu interesse na música de Ana Lua Caiano terá começado com um programa de rádio, num domingo de manhã, em que a cantora foi entrevistada. A partir daí, comecei a prestar mais atenção à sua música, uma inusitada e muito interessante mistura de elementos *folk* e eletrónicos, usando bombo, adufe, teclados, uma *beat machine* e uma *loop station*, entre outros instrumentos. Neste momento, a sua discografia conta já com dois EP, *Cheguei Tarde a Ontem* e *Se Dançar é Só Depois*, lançados em 2023, e um LP, *Vou Ficar Neste Quadrado*, publicado em 2024.

Um dia, dei com uma canção com um título muito aritmético, *Um Menos Um* (e a aritmética, aliás, continuava na letra). Comecei então a olhar para a sua obra com mais atenção e fiquei com a ideia clara de que havia ali uma proximidade à Matemática, que não consistia apenas em exemplos dispersos, mas parecia denotar algum gosto especial da artista – por exemplo, os brincos circulares ou quadrados, ou as tranças com aspeto sinusoidal (em ambos os casos, obras da própria Ana Lua). E quantas cantoras têm como *merchandising* um cubo soma (um *puzzle* inventado por Piet Hein) a acompanhar um álbum chamado *Vou Ficar Neste Quadrado*?

Como é bem sabido, é arriscado tentar encontrar elementos matemáticos em obras de arte antigas, muitas vezes podemos estar simplesmente a tentar projetar a nossa própria visão, sem que isso corresponda a uma verdadeira vontade ou a um desejo do artista. No entanto, estando (felizmente) esta artista bem viva, foi possível saber se estas impressões são ou não certas, contactando-a diretamente. E, muito simpaticamente, Ana Lua acedeu em conversar comigo, confirmando o que eu suspeitara: desde os tempos da sua formação secundária que tem um interesse especial pela Matemática, em particular pela resolução de desafios ou problemas, coisa que, de facto, veio a perpassar para a sua obra.

A conversa começou por um assunto mais técnico e por isso menos visível: a estrutura de *loops*, sempre presente na sua música. Quando se define um ritmo, na *loop station*, estabelece-se um compromisso com o compasso, em geral quaternário, tendo cada frase, habitualmente, quatro compassos (perfazendo, ao todo, 16 tempos). No entanto, isto não tem de ser limitativo: por exemplo, na referida canção *Um Menos Um*, o refrão tem frases de três compassos, mas como são quatro frases, acaba por se obter um ciclo de 12 compassos. Na canção *O Bicho Anda por Aí*, a estrutura é ainda mais delicada: estando a *loop station* em compasso quaternário, no refrão há um ciclo de 16 compassos ternários (48 tempos, ao todo), fazendo com que só de 12 em 12 tempos se acerte a cadência da letra com o ritmo. Em ambos os casos, é o facto de 12 ser



◀ Figura 1: Imagem do vídeo de *O Bicho Anda por Aí*, por Joana Caiano.

▼ Figura 2: Capa do EP *Cheguei Tarde a Ontem*, por Joana Caiano.

o mínimo múltiplo comum de 3 e 4 que faz o esquema funcionar.

Além destas estruturas rítmicas aritméticas, também há aspetos visuais dos vídeos de Ana Lua Caiano, realizados pela irmã, Joana Caiano (a quem se foi juntando, ao longo do tempo, uma numerosa equipa), que nos remetem para a geometria e a autorreferência. Encontramos várias simetrias de reflexão, como, por exemplo, no vídeo da canção *O Bicho Anda por Aí*, quer nas posições dos bailarinos, quer na superfície da piscina (figura 1). A repetição, agora em *mise en abyme*, potencialmente infinita, aparece também na capa do EP *Cheguei Tarde a Ontem* (figura 2).

Já no vídeo da canção que dá nome ao álbum *Vou Ficar Neste Quadrado*, o dito quadrado aparece como espelho, ora ocultando a face da cantora, ora revelando-a e multiplicando-a, quando colocado em paralelo com outro espelho (figura 3). Aqui, esta escolha visual acompanha o tema da canção: a decisão de ficar no mesmo lugar, apesar de a natureza convidar a sair – o quadrado espelhado, apesar de limitado, parece abrir um espaço infinito de saída.

Passando agora aos textos, há no final da letra de *Deixem o Morto Morrer* um paralelismo estilístico numa referência às carpideiras, que pode ser encarado como uma repetição em espelho de uma frase, invertendo o sentido:

Senhoras no chão / Sombras correndo / Alguém a gritar / Que um homem morreu

Senhoras em pé / Sombras paradas / Chega de chorar / Deixem o homem morrer

Para terminar, olhamos para as letras de duas canções com elementos explicitamente matemáticos. A primeira, *Ando em Círculos*, fala de "passos quadrados" que andam numa "linha reta", no "dia reto" que passou, na noite que cai "retamente" sobre os "pés verticais". São abundantes as referências a linhas retas, que contrastam com o título, que é repetido no refrão. Todas estas imagens matemáticas descrevem uma rotina que leva à insensibilidade e ao alheamento, ajudando a pintar esta imagem de rigidez.

Finalmente, na primeira canção que mencionei, *Um Menos Um*, a cantora faz várias contas referindo-se a alguém que lhe é amorosamente chegado, mas que, como vamos percebendo, é para ela uma relação tóxica. Estes são os primeiros versos.

Um mais um somos nós os dois
Mas um mais dois já não é pudor
E com mais um são os amigos mais chegados
E os cães abandonados que tu querias

Dois mais três era a família que desejavas
Mas p'ra mim é discoteca bem escondida
E um mais cinco são as assoalhadas
Que tu querias na nossa imaginada casa

Depois destes versos, chega o refrão, com uma conta diferente e uma mensagem diferente também.

Mas Um Menos Um são os dias
Que eu quero estar mais contigo
Um Menos Um foram os dias
Em que eu não precisei de vinho
Um Menos Um foram os dias
Em que não fumei para te ouvir
Um Menos Um, Um Menos Um, ao menos um

Os versos voltam então às contas de somar, que continuam a aumentar uma unidade de cada vez, até chegar a

Dez mais três são quantos estamos hoje à mesa

E, aqui chegada a letra, já não passa da soma 13, antes volta a repetir essa soma com parcelas diferentes, acompanhando um desejo súbito de partir:

Nove mais quatro, já não me sento mais aqui
Oito mais cinco, ai, vou já buscar a mala

A letra prossegue, diminuindo a primeira parcela e aumentando a segunda, terminando com a partida inevitável:

Um mais doze, vou já sair de Portugal
Treze, já saí de Portugal

Como se vê, a aritmética, engenhosamente usada, serve para descrever a natureza desta relação amorosa, a sua progressiva dissolução e o desejo final de sair, com as somas a acompanharem esta evolução.

Gostaria de terminar com duas pequenas observações, ambas bastante óbvias. Primeiro, esta descrição, necessariamente pessoal, de alguns dos elementos matemáticos na arte de Ana Lua Caiano não pretende ser exaustiva. Estes elementos foram aqueles que mais me chamaram a atenção, e que foram aparecendo na agradável conversa que tive com a cantora, um pouco ao correr das palavras. Há muito mais a descobrir, não só no campo da matemática como, especialmente, fora dele.

E isto leva-me à segunda observação: estes elementos

Figura 3: Imagem do vídeo de *Vou Ficar Neste Quadrado*, por Joana Caiano.

matemáticos não esgotam, de forma alguma, o interesse da arte de Ana Lua Caiano, que tem já um reconhecimento nacional e internacional muitíssimo sólido, com referências na imprensa estrangeira e participações em vários festivais de nomeada, como o Primavera Sound Porto ou o festival Roskilde, na Dinamarca, para falar apenas de dois mais recentes. As observações feitas neste artigo pretendem apenas apresentar mais uma camada de profundidade da sua obra e servir de convite a ir ver todo o material que está na plataforma Bandcamp (incluindo os álbuns), bem como os vídeos no YouTube e, mais do que tudo, ir ouvi-la ao vivo, ver a sua presença sozinha em palco, rodeada dos seus instrumentos, com a música, e por vezes a voz, em *loop* cadenciado. Esta combinação muito feliz de elementos musicais de raízes tradicional e eletrónica, aparentemente díspares, lembrou-me uma frase de Almada Negreiros: "Ser autor é (...) trazer-nos inédito o que ainda pertence ao conhecimento geral." E é uma sorte tudo isto ter também um tempero de Matemática.

Agradecimentos
Os meus agradecimentos a Ana Lua Caiano e a Joana Caiano pela permissão para reproduzir aqui as imagens das figuras e as letras das canções.

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

UMA INFINIDADE DE NOVAS FÓRMULAS PARA π

Recentemente, dois físicos indianos descobriram uma fórmula nova para π. De facto, descobriram uma quantidade infinita delas. Iremos ver de que é que isto se trata.

O número π é um dos tópicos matemáticos que mais interesse geram. E também é daqueles que são estudados há mais tempo. Sendo assim, é difícil que surja uma novidade relativa àquele número e, mais do que isso, uma novidade que se possa explicar facilmente a uma audiência vasta. Mas é exatamente isso o que acabou de acontecer.

Dois físicos indianos, Arnab Priya Saha e Aninda Sinha, publicaram um artigo (veja-se [2]) altamente técnico sobre Teoria das Cordas numa revista científica bastante prestigiada, a *Physical Review Letters*. Obtiveram aí, como subproduto do seu trabalho, uma família de fórmulas para π que são uma novidade completa. E uma novidade interessante.

Normalmente, quando se é exposto ao número π pela primeira vez, este é definido como sendo o quociente entre o perímetro de uma circunferência e o respetivo diâmetro. Esta definição faz sentido a partir do momento em que uma pessoa se convence de que aquele quociente é o mesmo para todas as circunferências, mas não é prático para obter o valor numérico de π com grande precisão. A partir do século XVII, começaram a surgir na Europa (e, ainda antes disso, fora da Europa, como iremos ver) maneiras de representar π como soma de séries (ou seja, somas com uma infinidade de parcelas), o que é mais conveniente para o cálculo numérico de π. A primeira a surgir é geralmente conhecida por série de Leibniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

cuja soma é $\frac{\pi}{4}$. De facto, embora esta igualdade tenha sido descoberta por Leibniz, já tinha sido descoberta alguns anos antes dele pelo matemático escocês James Gregory e, ainda bastante antes disso, pelo matemático e astrónomo indiano Mādhava de Sangamagrāma.

Mas embora se tenha de facto a igualdade

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

isto não é útil para obter valores aproximados de π. Basta ver que se fizermos o cálculo do membro da direita da igualdade anterior usando os 100 primeiros termos da série, o valor obtido começa por 3,13 enquanto que π é aproximadamente 3,14. Comparemos isto com o que fez Newton ainda antes de Leibniz (e de James Gregory). Ele obteve a igualdade[1]:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \times 2^5} - \frac{1}{28 \times 2^7} - \frac{1}{72 \times 2^9} - \cdots\right),$$

e bastou-lhe somar (à mão!) os primeiros 22 termos do membro da direita desta igualdade para obter uma aproximação de π na qual os primeiros 16 algarismos estão corretos.

Passemos então à fórmula recentemente descoberta, a qual teve algum impacto[2]. Para a compreender é preciso introduzir o símbolo de Pochhammer. Trata-se do seguinte: se a é um número real (ou até complexo) e se n é um inteiro não negativo, então

$$(a)_n = a \times (a+1) \times (a+2) \times \cdots \times (a+n-1)$$

caso $n > 0$; além disso, $(a)_0 = 1$. Por exemplo,

$$(6)_3 = 6 \times (6+1) \times (6+2) = 336.$$

Com isto, podemos enunciar a nova fórmula:

$$\begin{aligned}\pi &= 4 + \left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2+\lambda} - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{5^2}{4(2+\lambda)} - 2\right)_1 + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3+\lambda} - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{7^2}{4(3+\lambda)} - 3\right)_2 + \cdots \\ &= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+\lambda} - \frac{4}{2n+1}\right)\left(\frac{(2n+1)^2}{4(n+\lambda)} - n\right)_{n-1}.\end{aligned}$$

Uma coisa que salta aos olhos imediatamente aqui é a existência de um parâmetro λ. Que número é este? A resposta é: qualquer número real maior do que -1. Até pode ser um número complexo cuja parte real seja maior do que -1. Desde que se faça esta restrição, a soma é sempre π. É por isso que isto não é somente a descoberta de uma nova fórmula para π; é a descoberta de uma infinidade de novas fórmulas.

De facto, embora infinito não seja um número, até podemos tomar $\lambda = \infty$. Se o fizermos, então

$$\frac{1}{n+\lambda} - \frac{4}{2n+1} = -\frac{4}{2n+1} \quad \text{e} \quad \frac{(2n+1)^2}{4(n+\lambda)} - n = -n,$$

pelo que a fórmula se reduz a

$$\pi = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{4}{2n+1}\right)(-n)_{n-1}.$$

Mas

$$\begin{aligned}(-n)_{n-1} &= (-n) \times (-n+1) \times (-n+2) \times \cdots \times (-n+n-1) \\ &= (-1)^{n-1} n!,\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{4}{2n+1}\right)(-n)_{n-1} &= 4 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ou seja, com $\lambda = \infty$ recupera-se a série de Leibniz (ou, se preferirem, a série de Mādhava)! Como esta foi originalmente descoberta por um matemático indiano e como os autores de [2] são indianos, pode-se ver isto como um regresso às origens. Aliás, parece haver uma tradição histórica por parte dos matemáticos indianos para descobrirem fórmulas ligadas a π. Um exemplo disto é uma fórmula de Ramanujan (veja-se [1]):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!^4} \frac{26390n + 1103}{396^{4n}}.$$

Com esta fórmula, podemos obter excelentes aproximações de $\frac{1}{\pi}$ muito rapidamente. Logo a primeira parcela desta soma tem os mesmos sete primeiros algarismos a seguir à vírgula que o número $\frac{1}{\pi}$; com as duas primeiras parcelas, isto sobe para os primeiros 16 algarismos.

Em contrapartida, como já foi referido, a série de Leibniz não tem interesse prático para calcular valores aproximados de π. E a nova série? Esta já tem; basta escolher λ apropriadamente. Se, por exemplo, se tomar $\lambda = 12$, então a soma dos dez primeiros termos da série é igual a $3,1415961\ldots$ e os seis primeiros algarismos deste número são os seis primeiros algarismos de $\pi (\approx 3,1415926)$.

Convém lembrar que esta fórmula se deve a dois físicos teóricos e não a matemáticos. Com efeito, a fórmula surgiu acidentalmente, por assim dizer, como consequência de uma fórmula mais geral obtida num artigo sobre Teoria das Cordas. Os autores *não* estavam à procura de uma fórmula para π.

Para terminar este artigo, eis a opinião de Aninda Sinha sobre o trabalho que desenvolveu e que levou à fórmula de que é coautor[3]:

> "Fazer este tipo de trabalho, embora talvez não dê origem a uma aplicação imediata à vida do dia-a-dia, fornece o prazer puro de fazer teoria só pelo prazer de a fazer."

BIBLIOGRAFIA

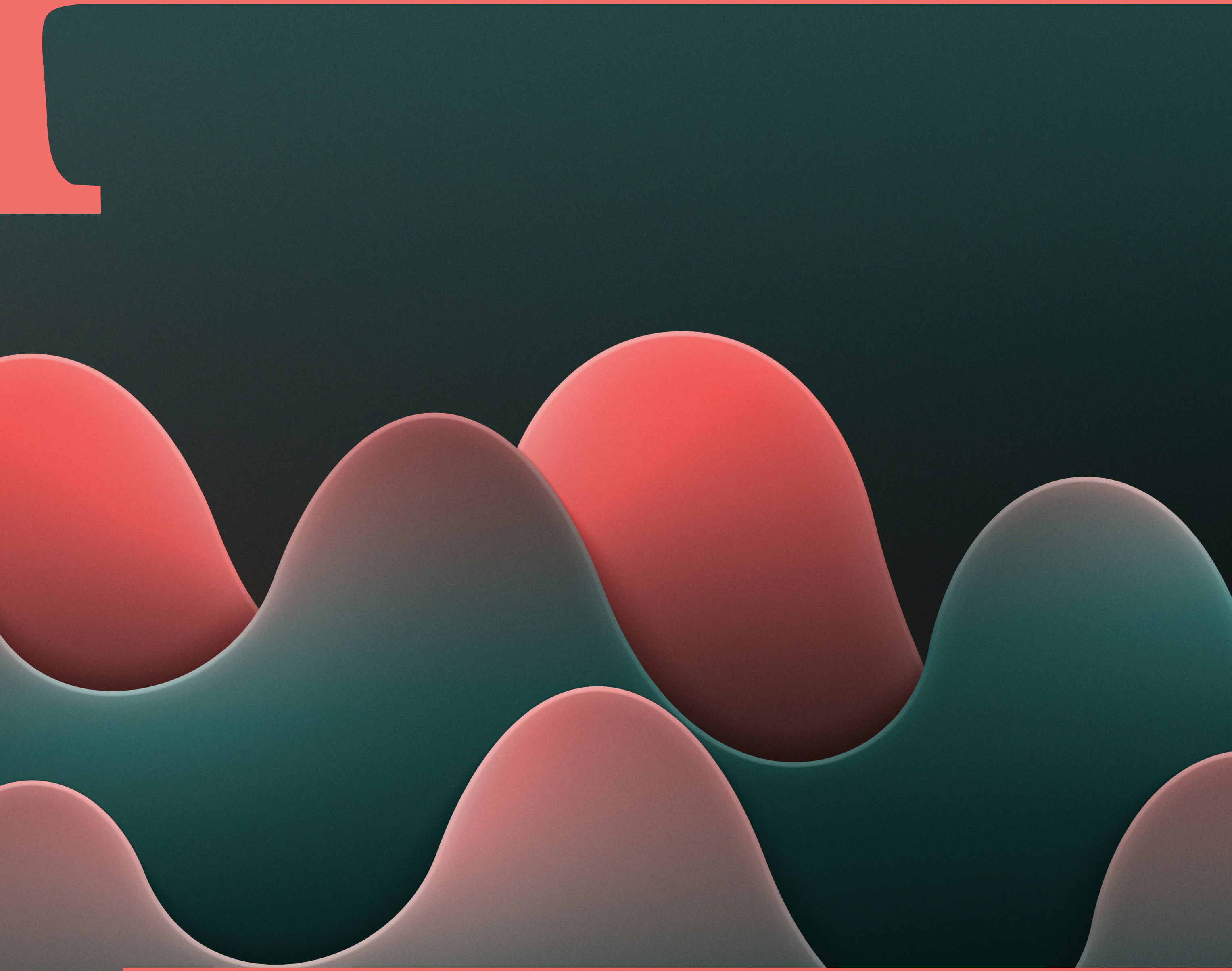
[1] Srinivasa Ramanujan, "Modular Equations and Approximations to π", *Quart. J. Math.* **45**, pp. 350–372, 1914

[2] Arnab Priya Saha; Aninda Sinha, "Field Theory Expansions of String Theory Amplitudes", *Physical Review Letters* **132**, 221601, 2024

[1] Rick Wicklin, *How Newton Calculated Pi to 16 Decimal Places*, *https://blogs.sas.com/content/iml/2023/03/08/newton-pi.html*

[2] Bruno Vaiano, *Kurt Gödel: o Filósofo Paranoico que Provou a Incompletude da Matemática*, *https://super.abril.com.br/especiais/os-teoremas-da-incompletude-de-godel*

[3] Ananthapathmanabhan MS, *IISc Physicists Find a New Way to Look at Mathematics' Pi*, *https://kernel.iisc.ac.in/iisc-physicists-find-a-new-way-to-look-at-mathematics-pi/*



O FASCINANTE MUNDO DA UNIFORME E DAS SUAS PARENTES

Maria de Fátima Brilhante[a, b], Maria Ivette Gomes[b, c, d, e], Sandra Mendonça[b, f] e Dinis Pestana[b, c, e]

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade dos Açores[a], Centro de Estatística e Aplicações (CEAUL)[b], DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL)[c], Academia das Ciências de Lisboa[d], Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral[e] e DM-FCEE, Universidade da Madeira[f]

maria.fa.brilhante@uac.pt[a]

Devido ao teorema da transformação uniformizante, a variável aleatória Uniforme tem grande protagonismo em Estatística. Depois da apresentação sumária de variáveis aleatórias que são funções de variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão, nomeadamente Gamas, Betas e BetaBoops, ilustramos o seu papel na construção de novos modelos, por aleatorização de parâmetros ou resultando da contração por multiplicação, ou da expansão por divisão ou exponenciação.

1. INTRODUÇÃO

A avaliação do que é mais provável ajuda-nos a tomar decisões, por exemplo, no contexto de seleção de estratégias ou de apostas. Por outro lado, os valores de probabilidade muito baixa de caudas extremas são usados para eventualmente falsear hipóteses. Nesta perspetiva, as variáveis aleatórias Uniformes podem parecer quase inúteis, porque a equiprobabilidade não apoia tomadas de decisão e, numa visão ingénua, o modelo Uniforme parece ser apenas um exemplo que permite exemplificar de forma simples o cálculo da função de distribuição e de momentos.

Mas a simplicidade do modelo Uniforme padrão (isto é, com localização 0 e dispersão 1), que denotamos $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, e que tem função densidade de probabilidade $f_U(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, dá-lhe o estatuto privilegiado de poder ser usado para obter números aleatórios de um modelo $X \frown F_X$ usando a função de distribuição inversa generalizada: $F_X^{\leftarrow}(U) \frown F_X$, em que $F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x\colon F_X(x) \geq u\}$, sendo F_X a função de distribuição da variável aleatória X. Este resultado inverso do teorema da transformação uniformizante, $F_X(X) = U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, que permitiu o desenvolvimento explosivo da Estatística Computacional e dos Métodos de Monte Carlo, é apresentado na Secção 2, onde a equiprobabilidade é também discutida.

Na Secção 3 são referidas funções de variáveis aleatórias Uniformes independentes, observando-se que as suas funções densidade de probabilidade apresentam frequentemente potências de x, $1-x$ e $-\ln x$. Este facto motiva-nos a apresentar as funções Gama e Beta de Euler, bem como a extensão não trivial BetaBoop da função Beta, que simplificam a definição de famílias importantes de variáveis aleatórias.

Na Secção 4 exploramos sumariamente o papel de variáveis *Gama, Beta e BetaBoop* na aleatorização de parâmetros em modelos hierárquicos e na contração por multiplicação, ou na expansão por divisão ou exponenciação.

2. EQUIPROBABILIDADE E O MODELO UNIFORME

A experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda equilibrada uma única vez tem dois resultados possíveis correspondentes à saída de face e à de coroa, que representamos por F e C, respetivamente. A esta experiência aleatória podemos associar a variável aleatória $\mathit{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$, $B:\ \{C,F\} \longrightarrow \{0,1\}$ usando a notação

$$B = \begin{cases} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, \end{cases}$$

que modela equiprobabilidade dicotómica.

Da repetição sucessiva desta experiência aleatória resulta a sequência infinita $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $B_k \frown \mathit{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$, a qual pode ser usada para representar a expansão binária de números em $[0,1]$,

$$U = 0.B_1B_2B_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{2^k},$$

que curiosamente mostra que a variável aleatória contínua $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ é a soma de infinitas variáveis aleatórias discretas $\frac{B_k}{2^k}$. Borel (1909) usou este contexto[1]

[1] Obviamente $\omega = \sum_{k=1}^{j} \frac{B_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{2^k}$ em que $B_j = 1$ mas $B_{j+1} = B_{j+2} = \cdots = 0$, admite também a expansão de Bernoulli infinita $\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k^*}{2^k} = \sum_{k=1}^{j} \frac{B_k}{2^k}$ em que $B_k^* \equiv B_k$, $k = 1, \ldots, j-1$, $B_j^* = 0$, $B_{j+1}^* = B_{j+2}^* = \cdots = 1$, pois $\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{B_k^*}{2^k} = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{j+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^j} = \frac{B_j}{2^j}$. Por isso descartamos as expansões "degeneradas", *i.e.* finitas, que constituem um conjunto com medida de Lebesgue 0, a fim de ter uma relação bijetiva entre o conjunto $\mathcal{B}$ de expansões de Bernoulli infinitas e $\{x :\ x \in (0,1]\}$.

para enunciar o princípio de Borel, que foi uma construção pioneira e rigorosa de probabilidade contínua[2]:

Princípio de Borel: Seja $\mathcal{B}$ o conjunto das sequências de Bernoulli observáveis no lançamento de uma moeda equilibrada. Denote-se E um acontecimento que pode ocorrer numa de tais sequências e $\mathcal{B}_E$ o subconjunto de $\mathcal{B}$ que corresponde ao acontecimento E. A probabilidade de E é $\lambda\{\mathcal{B}_E\}$, em que λ é a medida de Lebesgue.

Uma vez que a medida de Lebesgue é invariante para translações, tem-se $\mathbb{P}[x < U \leq x + \Delta] = \Delta$ quaisquer que sejam $\Delta \in (0,1)$ e $x \in [0, 1-\Delta)$, o que justifica dizer que a variável aleatória U é Uniforme, no sentido em que modela equiprobabilidade contínua em $[0,1]$. Assim, se $x \in [0,1]$, então $\mathbb{P}[0 < U \leq x] = x$, implicando que a função de distribuição de U é $F_U(x) = x\,\mathbb{I}_{[0,1)}(x) + \mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$ e, portanto,

$$U \frown \mathit{Uniforme}(0,1) \iff f_U(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

em que f_U é a função densidade de probabilidade da variável aleatória U.

É imediato que se $U \frown \mathit{Uniforme}\,(0,1)$, $1-U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$. De facto, isto é o caso especial $\mu = 1$ e $\theta = -1$ de $X = \mu + \theta\, U \frown \mathit{Uniforme}(a,b)$, $\mu, \theta \in \mathbb{R}$, com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \frac{1}{|\theta|}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$, em que $a = \min\{\mu, \mu+\theta\}$ e $b = \max\{\mu, \mu+\theta\}$.

A propriedade mais relevante da variável aleatória $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ é o teorema da transformação uniformizante (Fisher, 1932).

Teorema (transformação uniformizante). *Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F_X. Então $F_X(X) = U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$.*

Demonstração. O suporte de $Y = F_X(X)$ é $[0,1]$. Denotando $F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}$ a inversa generalizada de F_X, para $y \in [0,1]$, tem-se $F_Y(y) = \mathbb{P}\big[F_X(X) \leq y\big] = \mathbb{P}\big[X \leq F_X^{\leftarrow}(y)\big] = F_X\big(F_X^{\leftarrow}(y)\big) = y$, ou seja, $f_Y(y) = \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$. □

Exemplo 1: Seja $X \frown \mathit{Exponencial}(1)$, *i.e.* X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ e função de distribuição $F_X(x) = (1-\mathrm{e}^{-x})\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$. Então

$$1 - \mathrm{e}^{-X} \frown \mathit{Uniforme}(0,1).$$

Consequentemente, também $\mathrm{e}^{-X} \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$.

Ao testar uma hipótese nula H_0 contra uma alternativa unilateral à direita usando uma estatística de teste T, o valor-p, $p = \mathbb{P}[T > T_{\text{obs.}} | H_0 \text{ verdadeira}]$ é uma observação de uma variável aleatória Uniforme padrão. Com toda a generalidade, a uniformidade dos valores-p é uma consequência do teorema da transformação uniformizante.

O enunciado recíproco (transformação uniformizante inversa) é a base de um método elementar para gerar amostras de números pseudoaleatórios de uma população X com função de distribuição F_X a partir de pseudoaleatórios de Uniforme padrão.

Teorema (transformação uniformizante inversa). *Seja U uma variável aleatória Uniforme em $[0,1]$. Então, $F_X^{\leftarrow}(U)$ é uma variável aleatória com função de distribuição F_X.*

Demonstração. $F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}$, pelo que $\{u : F_X^{\leftarrow}(u) \leq x\} = \{u : u \leq F_X(x)\} = F_X(x)$. □

Exemplo 2: Do Exemplo 1 conclui-se que se $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, então $-\ln U \frown \mathit{Exponencial}(1)$.

A variável aleatória $\mathit{Uniforme}(0,1)$ estabelece assim uma ponte entre duas variáveis aleatórias X e Y, no sentido em que $F_X = F_X^{\leftarrow}(F_Y)$ e $F_Y = F_Y^{\leftarrow}(F_X)$. Devido ao desenvolvimento explosivo da Estatística Computacional, a *Uniforme* passou a ser um dos modelos mais estudados, veja-se Johnson *et al.* (1995, Cap. 26).

3. FUNÇÕES DE VARIÁVEIS UNIFORMES E DE SUCESSÕES DE VARIÁVEIS UNIFORMES INDEPENDENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS — VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAMA, BETA E BETABOOP

Além de $F_X^{\leftarrow}(U) = X \frown F_X$, que, como referimos já no Exemplo 2, mostra que $-\ln U \frown \mathit{Exponencial}(1)$, outras transformações imediatas de $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ são:

- $f_{\frac{1}{U}}(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$, e $F_{\frac{1}{U}}(x) = \big(1 - \frac{1}{x}\big)\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$, ou seja, $\frac{1}{U} \frown \mathit{Pareto}(1)$.

  Recorde-se que $F_{\frac{1}{X}}(x) = \mathbb{P}\big[\frac{1}{X} \leq x\big] = \mathbb{P}\big[\frac{1}{x} \leq X\big] = 1 - F_X\big(\frac{1}{x}\big)$ pelo que $f_{\frac{1}{X}}(x) = \frac{1}{x^2} f_X\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

- $f_{U^{1/p}}(x) = p\,x^{p-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, $p > 0$. Observe-se que $-\ln U^{1/p} \frown \mathit{Exponencial}\big(\frac{1}{p}\big)$.

  De $F_{U^{1/p}}(x) = \mathbb{P}[U \leq x^p] = x^p$ no intervalo $(0,1]$, tem-se $f_{U^{1/p}}(x) = p\, x^{p-1}\, \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$; e, para $x > 0$, de se ter

$F_{-\ln U^{1/p}}(x) = \mathbb{P}[-\ln U^{1/p} \le x] = \mathbb{P}[U \ge \mathrm{e}^{-px}] = 1 - \mathrm{e}^{-px}$,

resulta $f_{-\ln U^{1/p}}(x) = p\, \mathrm{e}^{-px}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$.

- $f_{1-U^{1/q}}(x) = q\,(1-x)^{q-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, $q > 0$. Observe-se que $\mathcal{K}_{\xi,q} = (1-U^{1/q})^{1/\xi}$ é a variável aleatória de Kumaraswamy (1980) com parâmetros positivos ξ e q, usada, por exemplo, na modelação da percentagem da quantidade de água em reservatórios, cuja função de distribuição é

$$F_{\mathcal{K}_{\xi,q}}(x) = [1-(1-x^{\xi})^{q}]\,\mathbb{I}_{[0,1)}(x) + \mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$$

e cuja função densidade de probabilidade é

$$f_{\mathcal{K}_{\xi,q}}(x) = \xi\, q\, x^{\xi-1}\,(1-x^{\xi})^{q-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

Por outro lado, é fácil calcular a função densidade de probabilidade de somas, de produtos e de estatísticas ordinais de $(U_1,\ldots,U_n)$, em que $U_k \frown Uniforme(0,1)$, $k = 1,\ldots,n$, são independentes.

Somas: Partindo da função densidade de probabilidade da soma de duas variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão

$$\begin{aligned} f_{U_1+U_2}(z) &= \int f_{U_1}(y) f_{U_2}(z-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{z-1}^{z} \mathbb{I}_{[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \begin{cases} 0\,, & z<0 \vee z>2 \\ \int_{\max\{0,z-1\}}^{\min\{z,1\}} \mathrm{d}y\,, & 0 \le z \le 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & z<0 \vee z \ge 2 \\ z, & 0 \le z < 1 \\ 2-z, & 1 \le z < 2 \end{cases}, \end{aligned}$$

e analogamente, para a soma de n variáveis independentes, $U_1,\ldots,U_n$, com distribuição Uniforme padrão, tem-se

$$\begin{aligned} f_{\sum_{k=1}^{n} U_k}(z) &= \int f_{\sum_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\, f_{U_n}(z-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{z-1}^{z} f_{\sum_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

obtendo-se, após alguns cálculos,

$$f_{\sum_{k=1}^{n} U_k}(z) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor z \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (\max\{0, z-k\})^{n-1}\right] \mathbb{I}_{[0,n]}(z),$$

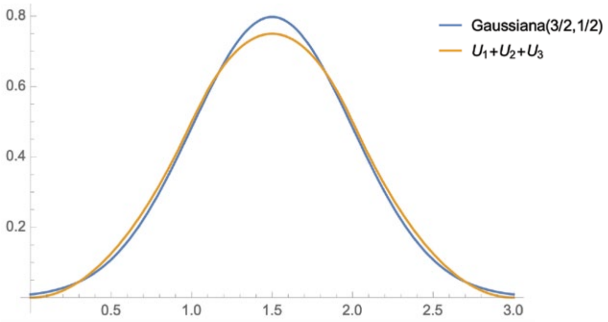


Figura 1. Funções densidade de probabilidade de $\sum_{k=1}^{3} U_k$ e da Gaussiana com os mesmos valor médio e desvio padrão.

onde $\lfloor z \rfloor$ é o maior inteiro não superior a z.

Intragável? Sim, mas felizmente a aproximação (teorema limite central) $\sum_{k=1}^{n} U_k \approx X \frown Gaussiana\left(\frac{n}{2}, \sqrt{\frac{n}{12}}\right)$ é muito boa, mesmo para valores bastante moderados de n, como se ilustra na figura 1.

A função densidade de probabilidade da média aritmética $\overline{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$ é então

$$f_{\overline{U}_n}(x) = \frac{n}{(n-1)!}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (\max\{0, nx-k\})^{n-1}\right] \mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

Produtos: Partindo da função densidade de probabilidade do produto de duas variáveis independentes com distri-

[2] O paradoxo de Bertrand (1889, pp. 5-6.), determinando valores diferentes para a probabilidade de uma corda "ao acaso" ter maior comprimento do que o raio de uma circunferência, mostrou os limites do recurso à intuição na Teoria da Probabilidade, e foi decerto uma das motivações de Hilbert para, na sua alocução no Congresso Mundial de Matemática de 1900, indicar que um dos principais problemas em aberto em Matemática seria proceder a uma construção axiomática rigorosa da Probabilidade (6.º problema de uma lista de 23; no Congresso de Paris apenas apresentou dez problemas, incluindo o da fundamentação rigorosa da Probabilidade). O problema apenas foi resolvido em 1933 por Kolmogorov (1933). Anote-se que Diogo Pacheco d'Amorim, na sua tese de doutoramento (Pacheco d'Amorim, 1914, republicada em Mendonça *et al.*, 2007), tentou fazer uma construção rigorosa da Probabilidade com base no conceito de lançamento ao acaso, aparentemente sem conhecer o trabalho de Borel. Como já era sabido do paradoxo de Bertrand, este ponto de partida que lhe parece intuitivo e inquestionável leva-o a estabelecer resultados absurdos, como, por exemplo, que deixando cair uma corda ao acaso num plano, a distância entre os extremos da corda é 0, sem se aperceber de que a sua construção de probabilidade contínua, dobrando repetidamente um segmento, acaba num único ponto. Veja-se como o problema deveria ser abordado com renormalização em Santos (2008).

buição Uniforme padrão,

$$f_{U_1U_2}(z) = \int f_{U_1}(y) f_{U_2}\left(\tfrac{z}{y}\right) \frac{\mathrm{d}y}{|y|} =$$
$$= \int_z^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z) =$$
$$= -\ln z\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z),$$

e analogamente, para o produto de n variáveis independentes, $U_1, \ldots, U_n$, com distribuição Uniforme padrão, tem-se

$$f_{\prod_{k=1}^{n} U_k}(z) = \int f_{\prod_{k=1}^{n-1} U_k}(y)\, f_{U_n}\left(\tfrac{z}{y}\right) \frac{\mathrm{d}y}{|y|} =$$
$$= \int_z^1 f_{\prod_{k=1}^{n-1} U_k}(y) \frac{\mathrm{d}y}{y}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z)\,;$$

consequentemente,

$$f_{\prod_{k=1}^{n} U_k}(z) = \frac{(-\ln z)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z)\,.$$

Assim, a função densidade de probabilidade da média geométrica $\mathcal{G}_n = \left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right)^{1/n}$ de variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão é

$$f_{\mathcal{G}_n}(x) = \frac{n^n}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, (-\ln x)^{n-1}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x).$$

É interessante anotar que se definirmos o modelo hierárquico $\mathfrak{U} \frown \mathit{Uniforme}(0, U)$, obtém-se $f_{\mathfrak{U}}(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x) = -\ln x\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x)$ e, portanto, $\mathfrak{U} \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_1 U_2$, com $U_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_2 \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ independentes. Mais geralmente, definindo recursivamente $\mathfrak{U}_0 \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, $\mathfrak{U}_k \frown \mathit{Uniforme}\,(0, \mathfrak{U}_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, obtém-se $f_{\mathfrak{U}_n}(x) = \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}_{(0,1]}(x)$, ou seja, temos o produto de n variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão, i.e. $\mathfrak{U}_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \prod_{k=1}^{n} U_k$.

Divisão: A função densidade de probabilidade da divisão ("*Slash*") de variáveis $U_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_2 \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$ independentes é

$$f_{\frac{U_1}{U_2}}(z) = \int f_{U_1}(zy)\, f_{U_2}(y)\, |y|\, \mathrm{d}y =$$
$$= \begin{cases} 0\,, & z < 0 \\ \int_0^{\min\left\{1, \frac{1}{z}\right\}} y\, \mathrm{d}y\,, & z \geq 0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1/2, & 0 \leq z < 1 \\ 1/(2z^2), & z \geq 1 \end{cases}.$$

Exponenciação: Seja $W = U_1^{U_2}$; então $-\ln W = U_2(-\ln U_1)$ tem função densidade de probabilidade

$$f_{-\ln W}(w) = \int f_{U_2}\left(\tfrac{w}{y}\right) f_{-\ln U_1}(y)\, \frac{\mathrm{d}y}{|y|} =$$
$$= \int_w^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\, \mathrm{d}y\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w) =$$
$$= \mathrm{E}_1(w)\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w),$$

onde $\mathrm{E}_1(x) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$ é a função integral exponencial (Abramowitz and Stegun, 1972, Cap. 5, p. 228). Consequentemente, a função densidade de probabilidade de $W = U_1^{U_2}$ é, para $w \in (0,1)$,

$$f_W(w) = f_{-\ln W}(-\ln w) \frac{1}{|w|} =$$
$$= \frac{\mathrm{E}_1(-\ln w)}{w} =$$
$$= -\frac{\mathrm{li}(w)}{w}\,,$$

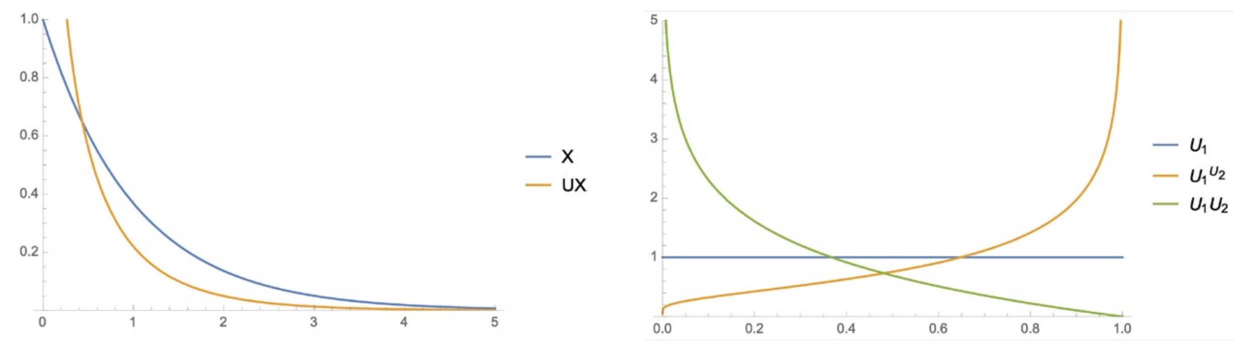
onde $\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, $x > 0$, é a função integral logarítmica.

Na figura 2 as funções densidade de probabilidade de $XU \stackrel{\mathrm{d}}{=} -\ln W$ em (a) e U_1U_2 em (b) ilustram a contração quando se multiplica por uma variável com suporte $[0,1]$, e a função densidade de probabilidade de $W = U_1^{U_2}$ exibe a expansão ao usar um expoente com suporte $[0,1]$.

Estatísticas Ordinais: Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um vetor aleatório de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com uma variável aleatória X e $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ o correspondente vetor de estatísticas ordinais ascendentes. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, o acontecimento $x < X_{i:n} \leq x + \mathrm{d}x$, com $\mathrm{d}x \approx 0$, ocorre se e só se $i-1$ das n variáveis forem inferiores ou iguais a x, uma das outras $n-(i-1)$ estiver entre x e $x + \mathrm{d}x$ e as restantes $n-i$ variáveis forem superiores a $x + \mathrm{d}x$. Portanto,

$$\mathbb{P}[x < X_{i:n} \leq x + \mathrm{d}x] =$$
$$= \binom{n}{i-1} (\mathbb{P}[X \leq x])^{i-1} \binom{n-i+1}{1}$$
$$\mathbb{P}[x < X \leq x + \mathrm{d}x]\, (\mathbb{P}[X > x + \mathrm{d}x])^{n-i}$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} F_X^{i-1}(x) [F_X(x + \mathrm{d}x)$$
$$- F_X(x)][1 - F_X(x + \mathrm{d}x)]^{n-i}.$$

Dividindo por $\mathrm{d}x$ e fazendo $\mathrm{d}x \to 0^+$, obtém-se a função



a) $X \frown \mathit{Exponencial}(1)$, $U \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, independentes.
$XU \prec X$

b) $U_1, U_2 \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, independentes.
$U_1 U_2 \prec U_1 \prec U_1^{U_2}$.

Figura 2. Contração (respetivamente expansão) ao multiplicar (respetivamente exponenciar) por $\mathit{Uniforme}(0,1)$. (Note-se que $XY \prec X$ se e só se $F_{XY}(x) \geq F_X(x)$, com desigualdade estrita para alguns valores x.)

densidade de probabilidade pretendida:

$$f_{X_{i:n}}(x) = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\mathbb{P}[x < X_{i:n} \leq x + \mathrm{d}x]}{\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\, F_X^{i-1}(x)$$
$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{F_X(x+\mathrm{d}x) - F_X(x)}{\mathrm{d}x}\, [1 - F_X(x+\mathrm{d}x)]^{n-i}$$
$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\, [F_X(x)]^{i-1}\, [1 - F_X(x)]^{n-i}\, f_X(x).$$

No caso de a população parente ser Uniforme padrão, tem-se $F_U(x) = x\, \mathbb{I}_{[0,1)}(x) + \mathbb{I}_{[1,\infty)}(x)$ e, portanto,

$$f_{U_{k:n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, x^{k-1} (1-x)^{n-k}\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

Em particular, no que se refere ao mínimo e ao máximo,

$$f_{U_{1:n}}(x) = n(1-x)^{n-1}\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

e $f_{U_{n:n}}(x) = n\, x^{n-1}\, \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

Nas funções densidade de probabilidade acima aparecem potências de x, $1-x$, $-\ln x$, pelo que podemos simplificar substancialmente as notações com as funções Gama e Beta de Euler e ainda com a função BetaBoop, a definir adiante, que generaliza a Beta. Para mais informação sobre as funções Gama e Beta consulte-se Whittaker and Watson (2013, Cap. XII), Erdélyi *et al.* (1953, Cap. 1) e Abramowitz and Stegun (1972, Cap. 6).

Função Gama e variáveis aleatórias Gama

A função Gama, ou integral de Euler de segunda espécie,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x\,,$$

toma valores finitos para qualquer $\alpha > 0$.

No que se refere a valores interessantes da função Gama, começamos por recordar a expressão iterativa que se obtém integrando por partes:

$$\Gamma(\alpha) = \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\, \mathrm{e}^{-x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\alpha}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha),$$

e como $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$, conclui-se que $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado,

$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-y}\, \mathrm{d}y$$
$$\underset{\substack{x=u^2\\ y=v^2}}{=} 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$
$$\underset{\substack{u=\rho\cos\theta\\ v=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^\infty \rho\, \mathrm{e}^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho = \pi,$$

donde $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e, para $n \geq 1, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right) \left(n-\frac{3}{2}\right) \left(n-\frac{5}{2}\right) \cdots \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}$.

Como $\Gamma(\alpha) > 0$ para $\alpha > 0$, observa-se de imediato que $f_{X_\alpha}(x) = \frac{x^{\alpha-1}\,e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$, $\alpha > 0$, é uma função densidade de probabilidade. Usamos a notação $X_\alpha \frown \mathit{Gama}(\alpha)$.

Mais geralmente, dizemos que

$$Y = \lambda + \delta X_\alpha \frown \mathit{Gama}(\alpha, \delta, \lambda),\ \alpha, \delta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

se Y é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_Y(x) = \frac{(x-\lambda)^{\alpha-1} e^{-(x-\lambda)/\delta}}{\delta^\alpha\,\Gamma(\alpha)}\,\mathbb{I}_{[\lambda,\infty)}(x)$. No caso mais comum de a localização ser $\lambda = 0$ escrevemos indicando simplesmente o parâmetro de forma α e o parâmetro de dispersão (escala) δ: $Y \frown \mathit{Gama}(\alpha, \delta)$, sendo especialmente importante o caso $Y \frown \mathit{Gama}(1, \delta)$, que corresponde à variável exponencial com escala δ. Em geral escreve-se $Y \frown \mathit{Exponencial}(\delta)$.

Se $Z \frown \mathit{Gaussiana}(0,1)$, então Z^2 tem função densidade de probabilidade

$$f_{Z^2}(x) = f_Z(\sqrt{x})\,(\sqrt{x})' - f_Z(-\sqrt{x})\,(-\sqrt{x})' = \frac{x^{-1/2} e^{-x/2}}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x),$$

ou seja $Z^2 \frown \mathit{Gama}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Quando Pearson (1900) inventou o teste do qui-quadrado, usava a notação χ para a Gaussiana padrão, e por isso chamou ao seu quadrado, naturalmente, χ^2. Devido às propriedades aditivas das variáveis Gama – se $X \frown \mathit{Gama}(\alpha, \delta)$ e $Y \frown \mathit{Gama}(\beta, \delta)$ são independentes, então $X + Y \frown \mathit{Gama}(\alpha + \beta, \delta)$ – conclui-se que a soma $Y = \sum_{k=1}^n Z_k^2$ dos quadrados de n variáveis $Z_k \frown \mathit{Gaussiana}(0,1)$ independentes é uma $\mathit{Gama}\left(\frac{n}{2}, 2\right)$, que desde esse trabalho pioneiro de Pearson é usualmente denominada qui-quadrado com n graus de liberdade, usando-se a notação $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \frown \chi_n^2$. Observe-se que se $X \frown \mathit{Exponencial}(1)$, então $2X \frown \chi_2^2$.

Função Beta e variáveis aleatórias Beta

A função Beta, ou integral de Euler de primeira espécie,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,,$$

toma valores finitos para quaisquer $p, q > 0$. Consequentemente,

$$f_{X_{p,q}}(x) = \frac{x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad p, q > 0,$$

é uma função densidade de probabilidade, e dizemos que $X_{p,q} \frown \mathit{Beta}(p,q)$. Observe-se que $X_{1,1} \frown \mathit{Uniforme}(0,1)$, pelo que a distribuição *Beta* (1,1) coincide com a Uniforme padrão.

A função Beta pode exprimir-se de forma simples em termos da função Gama:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} dy \\
&\underset{\substack{x+y=z\\ y=t}}{=} \int_0^\infty \int_0^z (z-t)^{p-1} t^{q-1} e^{-z} dt\,dz \\
&\underset{t=zw}{=} \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-z}\,dz \int_0^1 (1-w)^{p-1} w^{q-1} dw \\
&= \Gamma(p+q)\,B(q,p),
\end{aligned}$$

ou seja, $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p)$. Por exemplo, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

Função BetaBoop e variáveis aleatórias BetaBoop

Seja

$$G_{p,q,P,Q}(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}(-\ln x)^{Q-1},$$

$x \in (0,1)$, $p, q, P, Q > 0$, e defina-se a função BetaBoop

$$\beta(p,q,P,Q) = \int_0^1 G_{p,q,P,Q}(x)\,dx. \qquad (1)$$

Observe-se que $\beta(p,q,1,1) = B(p,q)$ e que $G_{p,q,P,Q}(x) = G_{q,p,Q,P}(1-x)$, donde $\beta(p,q,P,Q) = \beta(q,p,Q,P)$. Por outro lado, recorrendo a integração por substituição de variável, verifica-se que $\beta(p,1,1,Q) = \frac{\Gamma(Q)}{p^Q}$, donde se conclui que $\beta(1,q,P,1) = \beta(q,1,1,P) = \frac{\Gamma(P)}{q^P}$. Por exemplo,

$$\beta\left(p,1,1,\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Uma condição suficiente para $\beta(p,q,P,Q) < \infty$ é $\min\{p,q\} + \min\{P,Q\} > 1$ (Brilhante *et al.*, 2023). Observe-se, porém, que não é condição necessária, pois, para quaisquer $p, Q > 0$, tem-se

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(-\ln x)^{Q-1}\,dx = \frac{\Gamma(Q)}{p^Q}$$

e, para quaisquer $q, P > 0$, tem-se

$$\int_0^1 (1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}\,dx = \frac{\Gamma(P)}{q^P}.$$

Caso $\beta(p,q,P,Q) < \infty$,

$$f_{p,q,P,Q}(x) = \frac{G_{p,q,P,Q}(x)}{\beta(p,q,P,Q)} =$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}(-\ln x)^{Q-1}}{\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[-\ln(1-x)\right]^{P-1}(-\ln x)^{Q-1}\,dx}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x) \qquad (2)$$

é uma função densidade de probabilidade, denotando-se $X_{p,q,P,Q} \frown BetaBoop(p,q,P,Q)$ a correspondente variável aleatória. Naturalmente, em vez de $X_{p,q,1,1} \frown BetaBoop(p,q,1,1)$, usamos $X_{p,q} \frown Beta(p,q)$.

Retomamos os exemplos de funções de variáveis uniformes com notação mais condensada usando as funções Gama, Beta e BetaBoop, começando por registar a relação de subordinação estocástica entre algumas das variáveis BetaBoop que são funções de $(U_1,\ldots,U_n)$, com indicação das respetivas funções densidade de probabilidade no suporte $[0,1]$:

$$\underbrace{\overset{BetaBoop(1,1,1,n)}{\prod_{k=1}^{n} U_k}}_{\frac{(-\ln x)^{n-1}}{\Gamma(n)}} \prec \underbrace{\overset{Beta(1,n)}{U_{1:n}}}_{n(1-x)^{n-1}} \prec \underbrace{\overset{Beta(k,n+1-k)}{U_{k:n}}}_{\frac{x^{k-1}(1-x)^{n-k}}{B(k,n+1-k)}} \prec \underbrace{\overset{Beta(n,1)}{U_{n:n}}}_{nx^{n-1}} \prec$$

$$\prec \underbrace{\overset{BetaBoop(1,1,n,1)}{1-\prod_{k=1}^{n}(1-U_k)}}_{\frac{[-\ln(1-x)]^{n-1}}{\Gamma(n)}}.$$

1. $f_{U^{1/p}}(x) = p\,x^{p-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ e, assim, $U^{1/p} \overset{d}{=} X_{p,1} \frown Beta(p,1)$; para $n \in \mathbb{N}$, tem-se $U^{1/n} \overset{d}{=} U_{n:n}$.

2. $1-U^{1/q} \frown Beta(1,q)$; para $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1-U^{1/n} \overset{d}{=} U_{1:n}$.

3. $U_{k:n} \overset{d}{=} X_{k,n+1-k} \frown Beta(k,n+1-k)$, em que k e $n+1-k$ são os *ranks* ascendente e descendente, respetivamente. Observe-se que $X_{k:n} \overset{d}{=} U_{k:n+k-1}$.

4. $-\ln U^{1/p} \frown Exponencial\left(\frac{1}{p}\right)$; em particular, $-\ln U_{n\cdot n} \overset{d}{=} -\ln U^{1/n} \frown Exponencial\left(\frac{1}{n}\right)$.

5. $Y_{Q,p} = -\ln X_{p,1,1,Q} \frown Gama\left(Q,\frac{1}{p}\right)$:
   Para $x \in [0,\infty)$, $\mathbb{P}[-\ln X_{p,1,1,Q} \le x] = 1-\mathbb{P}[X_{p,1,1,Q} \le \mathrm{e}^{-x}] = 1-F_{p,1,1,Q}(\mathrm{e}^{-x})$. Consequentemente a função densidade de probabilidade de $-\ln X_{p,1,1,Q}$ é

$$f_{-\ln X_{p,1,1,Q}}(x) = \frac{p^Q}{\Gamma(Q)}\,(\mathrm{e}^{-x})^{p-1}\,\left(-\ln(\mathrm{e}^{-x})\right)^{Q-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) = \frac{p^Q\,x^{Q-1}\,\mathrm{e}^{-px}}{\Gamma(Q)}\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x).$$

   Portanto $-\ln X_{p,1,1,Q} \frown Gama\left(Q,\frac{1}{p}\right)$; em particular, $-\ln X_{p,1} \frown Exponencial\left(\frac{1}{p}\right)$ e $-\ln U \frown Exponencial(1)$.

   Observe-se que se $Q = N \in \mathbb{N}$, então

$$Y_{N,p} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{N} Y_{1,p;k}$$

   onde $Y_{1,p;k} \frown Exponencial\left(\frac{1}{p}\right)$, $k=1,\ldots,N$, são variáveis aleatórias independentes. Portanto

$$\mathrm{e}^{-Y_{N,p}} \overset{d}{=} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-Y_{1,p;k}}$$

   reobtendo-se assim

$$X_{p,1,1,N} = \prod_{k-1}^{N} U_k \frown BetaBoop(1,1,1,N),$$

   com a consequência imediata

$$X_{p,1,1,Q}^{1/\xi} \overset{d}{=} X_{p\xi,1,1,Q},\ \xi > 0.$$

6. Mais geralmente,

$$\prod_{k=1}^{N} U_k^{1/p} \frown BetaBoop(p,1,1,N).$$

   Assim, como já foi referido, a média geométrica $\mathcal{G}_n = \left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right)^{1/n} \overset{d}{=} X_{n,1,1,n}$ tem função densidade de probabilidade

$$f_{\mathcal{G}_n}(x) = \frac{n^n}{\Gamma(n)}\,x^{n-1}(-\ln x)^{n-1}\,\mathbb{I}_{(0,1]}(x)$$

   e função de distribuição

$$\mathrm{F}_{\mathcal{G}_n}(x) = \frac{\Gamma(n,-n\ln x)}{\Gamma(n)}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x) + 1\,\mathbb{I}_{[1,\infty)}(x),$$

   onde $\Gamma(n,z) = \int_z^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ é a função gama incompleta superior.

7. $\frac{1}{U_{k:k}} \overset{d}{=} T_k \frown Pareto(k)$.

8. $\mathcal{K}_{\xi;\alpha} = X_{1,\alpha,1,1}^{1/\xi}$ é a variável aleatória de Kumaraswamy com parâmetros positivos ξ e α.
   A variável aleatória de Kumaraswamy generalizada $\mathcal{K}_{\xi;p,q,P,Q} = X_{p,q,P,Q}^{1/\xi}$, com $p,q,P,Q,\xi > 0$, tem função densidade de probabilidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta(p,q,P,Q)}\,\xi^Q\,y^{\xi p-1}\left(1-y^\xi\right)^{q-1}\left[-\ln\left(1-y^\xi\right)\right]^{P-1}(-\ln y)^{Q-1}\,\mathbb{I}_{(0,1)}(y).$$

   Observe-se que

$$X_{p,1,1,Q}^{1/\xi} \overset{d}{=} X_{p\xi,1,1,Q} \frown BetaBoop(p\xi,1,1,Q)$$

   e que, em particular, $X_{p,1}^{1/\xi} \overset{d}{=} X_{p\xi,1} \frown Beta(p\xi,1)$ e $X_{1,1,1,Q}^{1/\xi} \overset{d}{=} X_{\xi,1,1,Q} \frown BetaBoop(\xi,1,1,Q)$.

4. ALGUMAS APLICAÇÕES DE VARIÁVEIS GAMA, BETA E BETABOOP

Referimos já o protagonismo da variável Uniforme em Estatística Computacional e Métodos de Monte Carlo. A família das variáveis Beta, devido à grande diversidade de formas das densidades $Beta(p,q)$, veja-se a figura 3, é um modelo muito versátil para dados com suporte limitado (e não cabe aqui referir a importância que tem em Estatística Bayesiana).

Quanto à família das variáveis Gama, referimos já a importância da subfamília das variáveis Qui-quadrado. No entanto, qualquer dos modelos apresentados tem outras aplicações interessantes. Nesta secção, exemplificamos sucintamente o seu uso na aleatorização de parâmetros e na contração e expansão usando variáveis com suporte [0,1], como já foi exemplificado na figura 2.

Modelos hierárquicos e aleatorização de parâmetros

Aleatorizar parâmetros é uma forma interessante de flexibilizar modelos. Nesse contexto, usa-se por exemplo a distribuição Gama para aleatorizar um parâmetro de escala, ou uma distribuição BetaBoop para aleatorizar um parâmetro de probabilidade. Adiante usamos as notações $X|\Lambda$ e $X|P$, respetivamente, para representar uma variável aleatória X cuja distribuição de probabilidade depende de outra variável aleatória, Λ, com suporte $[0,\infty)$, ou P, com suporte $[0,1]$, respetivamente.

Para ilustrar o primeiro caso, seja $X|\Lambda \frown Poisson(\Lambda)$ em que $\Lambda \frown Gama(\alpha,\delta)$. De

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=k] &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\,\frac{\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\delta}}{\delta^\alpha \Gamma(\alpha)}\,d\lambda \\ &= \frac{1}{k!\,\delta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \left(\frac{\delta}{1+\delta}y\right)^{\alpha+k-1} e^{-y}\,\frac{\delta}{1+\delta}dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{k} \\ &= \binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{k},\end{aligned}$$

$k=0,1,\ldots,$ concluímos que

$$X \frown BinomialNegativa\left(\alpha, \tfrac{1}{1+\delta}\right).$$

Se $X \frown Poisson(\lambda)$, então $\operatorname{var}(X)=\mathbb{E}(X)=\lambda$, e portanto o índice de dispersão $I(X)=\frac{\operatorname{var}(X)}{\mathbb{E}(X)}=1$, enquanto se $X \frown BinomialNegativa\left(\alpha,\frac{1}{1+\delta}\right)$, então $\operatorname{var}(X)=\alpha\delta(1+\delta)$ e $\mathbb{E}(X)=\alpha\delta$, pelo que o índice de dispersão é $I(X)=1+\delta$. A Binomial Negativa é portanto mais dispersa e flexível

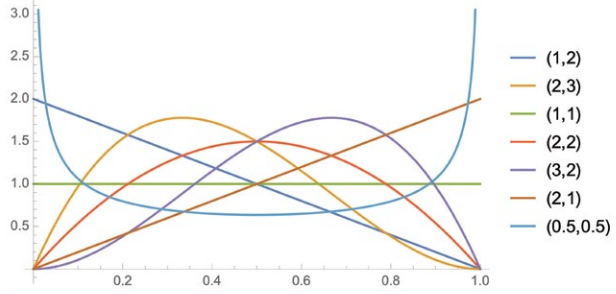


Figura 3. Densidades de probabilidade $Beta(p,q)$.

do que a Poisson, ganhando por isso popularidade na análise de dados, nomeadamente em Bioestatística e em Ecologia (Johnson *et al.*, 2005, Cap. 5, pp. 232-233).

Por outro lado, por vezes é tentador aleatorizar o parâmetro p que surge, por exemplo, nos modelos Binomial e Binomial Negativo, o qual, sendo o valor de uma probabilidade, toma valores entre 0 e 1. Nesse caso, podemos desenvolver um modelo hierárquico considerando que a variável aleatória correspondente, P, tem distribuição BetaBoop.

- Seja $B|P \frown Bernoulli(P)$, em que P tem suporte $[0,1]$ e função de distribuição F_P. Como $\int_0^1 p\,dF_P(p)=\mathbb{E}[P]$, resulta

$$B=\left\{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-\mathbb{E}[P] & \mathbb{E}[P]\end{array}\right. .$$

Por exemplo, se $P \frown BetaBoop(1,1,1,2)$, então obtém-se $B \frown Bernoulli(\frac{1}{4})$.

Note-se que, no caso em que a distribuição de P é simétrica, resulta sempre $B \frown Bernoulli(\frac{1}{2})$.

Podemos também observar que, se $P \frown Beta(\mu,\nu)$, então a probabilidade de sucesso é maior do que a probabilidade de insucesso se e só se $\mu>\nu$, o que é explicado pelo facto de se ter $\mathbb{E}[P]=\frac{\mu}{\mu+\nu}$.

- Seja $X|P \frown Binomial(n,P)$ e $P \frown Uniforme(0,1)$. Como, nesse caso,

$$\binom{n}{k}\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\,dp=\binom{n}{k}B(k+1,n+1-k)=\frac{1}{n+1},$$

tem-se $\mathbb{P}[X=k]=\frac{1}{n+1}$, $k=0,1,\ldots,n$, ou seja,

$$X \frown UniformeDiscreta\{0,\ldots,n\}.$$

Observe-se que $P \frown Uniforme(0,1)$ pode ser considerado como informação "nula" sobre o valor de p, resultando por isso equiprobabilidade discreta.

Mais geralmente, se $X|P \frown Binomial(n,P)$ em que $P \frown Beta(\mu,\nu)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
p_k = \mathbb{P}[X=k] &= \binom{n}{k}\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\,\frac{p^{\mu-1}(1-p)^{\nu-1}}{B(\mu,\nu)}\,\mathrm{d}p \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{B(\mu,\nu)}\int_0^1 p^{k+\mu-1}(1-p)^{n-k+\nu-1}\mathrm{d}p \\
&= \frac{\binom{n}{k}}{B(\mu,\nu)}B(k+\mu,n-k+\nu) \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\frac{\Gamma(k+\mu)\Gamma(n-k+\nu)}{\Gamma(n+\mu+\nu)}}{\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\Gamma(k+\mu)\Gamma(n-k+\nu)\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(n+\mu+\nu)\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\,,
\end{aligned}$$

$$k=0,1,...,n.$$

Casos simples destes modelos Beta-Binomial (Johnson *et al.*, 2005, p. 253) são:

a)

$$P\frown Beta(2,1)\Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(3)}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(2)\,\Gamma(1)} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}\,,\ k=0,1,...,n.$$

b)

$$P\frown Beta(1,2)\Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+2)\,\Gamma(3)}{\Gamma(n+3)\,\Gamma(1)\,\Gamma(2)} = \frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}\,,\ k=0,1,...,n.$$

c)

$$P\frown Beta(2,2)\Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.\frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(n-k+2)\,\Gamma(4)}{\Gamma(n+4)\,\Gamma(2)\,\Gamma(2)} = \frac{6(k+1)\,(n-k+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,,\ k=0,1,...,n.$$

d)

$$P\frown Beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\Longrightarrow p_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(n-k+\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}{\pi\,k!\,(n-k)!}\,,\ k=0,1,...,n$$

ou seja,

$$p_k = 2^{2-2n}\binom{2k-1}{k-1}\binom{2n-2k-1}{n-k-1},$$

$$k=1,\dots,n-1,\text{ e }\ p_0 = p_n = 2^{1-2n}\binom{2n-1}{n-1}.$$

• Seja $X|P \frown Binomial(n,P)$ com $P \frown BetaBoop(1,1,1,2)$. Usando a fórmula 4.253 1 de Grashteyn and Ryzhik (1980, p. 538),

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x^r)^{q-1}(-\ln x)\,\mathrm{d}x = -\,\tfrac{1}{r^2}\,B\Big(\tfrac{p}{r},q\Big)\left[\psi\left(\tfrac{p}{r}+q\right)-\psi\left(\tfrac{p}{r}\right)\right],$$

onde $\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, conclui-se que

$$\begin{aligned}
p_k &= \tfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\int_0^1 p^k\,(1-p)^{n-k}\,(-\ln p)\,\mathrm{d}p = \\
&= \tfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\beta(k+1,n-k+1,1,2) = \\
&= \tfrac{1}{n+1}\,\left[\psi(n+2)-\psi(k+1)\right],\ k=0,1,...,n.
\end{aligned}$$

• Seja $X|P\frown Geométrica(P)$ onde $P \frown Uniforme(0,1)$. Então $\mathbb{P}[X=k] = \int_0^1 p\,(1-p)^{k-1}\,\mathrm{d}p = B(2,k) = \frac{1}{k\,(k+1)}$, $k=1,2,\ldots$

Mais geralmente, se $X|P\frown Geométrica(P)$ em que $P \frown Beta(\mu,\nu)$, tem-se

$$\begin{aligned}
p_k &= \int_0^1 p\,(1-p)^{k-1}\,\tfrac{p^{\mu-1}(1-p)^{\nu-1}}{B(\mu,\nu)}\,\mathrm{d}p \\
&= \tfrac{\mu\,\Gamma(\mu+\nu)\,\Gamma(\nu+k-1)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu+\nu+k)}.
\end{aligned}$$

Por exemplo, se $\mu=2$ e $\nu=1$, obtém-se

$$p_k = \tfrac{2\,\Gamma(k)\,\Gamma(3)}{\Gamma(k+3)} = \tfrac{4}{k\,(k+1)\,(k+2)},\ k=1,2,\ldots.$$

• Seja $X|P\frown Geométrica(P)$ com $P \frown BetaBoop(1,1,1,2)$. Então, da fórmula 4.253 de Gradshteynand Ryzhik (1980) atrás transcrita, vem

$$\begin{aligned}
p_k &= \int_0^1 p\,(1-p)^{k-1}(-\ln p)\,\mathrm{d}p \\
&= \beta(2,k,1,2) \\
&= B(2,k)\ \left[\psi(2+k)-\psi(2)\right].
\end{aligned}$$

Como $\Gamma'(z+1) = \big(z\Gamma(z)\big)' = z\,\Gamma'(z)+\Gamma(z)$, tem-se

$$\tfrac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \tfrac{z\,\Gamma'(z)}{z\,\Gamma(z)} + \tfrac{\Gamma(z)}{z\,\Gamma(z)}$$

e, consequentemente, $\psi(z+1) = \psi(z)+\frac{1}{z}$. Deduz-se então que

$$p_k = \tfrac{1}{k\,(k+1)}\,\Big[\psi(k)+\tfrac{1}{k}+\tfrac{1}{k+1}-\psi(2)\Big].$$

Continuando a aplicar a expressão recursiva para

ψ, obtém-se $p_k = \frac{H_{k+1}-1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, ...$, onde $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ é o n-ésimo número harmónico.

Contração e expansão resultando de produtos, divisões e exponenciações usando Betas ou BetaBoops

Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes e o suporte de Y for $[0,1]$, então o produto $V = XY$ contrai Y, enquanto a exponenciação $W = X^Y$ e a divisão $T = \frac{X}{Y}$ expandem Y. Vamos dar alguns exemplos "*neste vasto mundo de carecas e boas*", como comentou Jorge Amado no seu capítulo de *O Mistério dos MMM*.[3]

No que se refere a contração devida a multiplicação por *BetaBoop*, começamos por apresentar um resultado sugestivo (Brilhante *et al.*, 2010).

Teorema 1. *Sejam* $X \frown Gama(\alpha, 1)$ *e* $Y \frown Beta(p, \alpha - p)$ *independentes,* $0 < p < \alpha$. *Então* $W = XY \frown Gama(p, 1)$.

Demonstração. Para $z \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} f_W(z) &= \frac{1}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha-p)} \int_z^\infty \left(\frac{z}{y}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{z}{y}\right)^{\alpha-p-1} y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, \frac{dy}{y} \\ &= \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha-p)} \int_z^\infty (y-z)^{\alpha-p-1}\, e^{-y}\, dy \\ &\underset{y-z=w}{=} \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha-p)} \int_0^\infty w^{\alpha-p-1}\, e^{-w}\, e^{-z}\, dw = \frac{z^{p-1}\, e^{-z}}{\Gamma(p)}. \end{aligned}$$

Para $z \le 0$, tem-se $f_W(z) = 0$. □

Casos especiais:

1. Se $X \frown Gama(\alpha, 1)$ e $Y \frown Beta(\alpha - 1, 1)$ independentes, então $W = XY \frown Gama(\alpha - 1, 1)$.

2. Se $X \frown Gama(\alpha, 1)$ e $Y \frown Beta(1, \alpha - 1)$ independentes, então $W = XY \frown Exponencial(1)$.

Tendo em conta a equivalência $V \frown Gama(\alpha, 1) \iff e^{-V} \frown BetaBoop(1, 1, 1, \alpha)$, obtém-se o resultado que se segue.

Teorema 2. *Sejam* X *e* Y *variáveis aleatórias independentes,* $X \frown BetaBoop(1, 1, 1, \alpha + 1)$ *e* $Y \frown Beta(\alpha, 1)$. *Então* $X^Y \frown BetaBoop(1, 1, 1, \alpha)$.

Corolário 2.1. *Se* $X \frown BetaBoop(1, 1, 1, n+1)$ *e* $Y \frown Beta(n, 1)$ *são independentes, então* $X^Y \frown BetaBoop(1, 1, 1, n)$.

No caso de $\alpha \in \mathbb{N}$, reinterpretando em termos de produtos e estatísticas ordinais de variáveis aleatórias uniformes independentes, se $U_k \frown Uniforme(0, 1)$, $1 \le k \le n+1$, independentes e independentes de $U_j^* \frown Uniforme(0, 1)$, $1 \le j \le n$, também independentes, então

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} U_k\right)^{U_{n:n}^*} \overset{d}{=} \prod_{k=1}^{n} U_k.$$

Em particular, para $n = 1$, resulta que se U_1, U_2, U_3 forem variáveis independentes com distribuição Uniforme padrão, então $(U_1 U_2)^{U_3} \frown Uniforme(0, 1)$. Este caso ilustra expressivamente que a exponenciação expande a contração operada pela multiplicação.

Tal como a transformada de Laplace $\mathcal{L}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}]$ é um instrumento facilitador do estudo de somas de variáveis aleatórias positivas independentes, a transformada de Mellin $\mathcal{M}_X(s) = \mathbb{E}[X^s]$, que converge numa banda vertical contendo pelo menos o eixo imaginário, pode simplificar a identificação de produtos de variáveis aleatórias positivas independentes. Se $X \ge 0$ e $Y \ge 0$ forem independentes, então $\mathcal{M}_{XY}(s) = \mathbb{E}[(XY)^s] = \mathbb{E}[(X)^s]\,\mathbb{E}[(Y)^s] = \mathcal{M}_X(s)\,\mathcal{M}_Y(s)$ na intersecção das suas bandas de convergência. Por exemplo $\mathcal{M}_U(s) = \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{1+s}$ e

$$\int_0^1 x^s \frac{(-\ln x)^{Q-1}}{\Gamma(Q)} dx = \int_0^\infty e^{(1+s)t}\, \frac{t^{Q-1}}{\Gamma(Q)} dt = \left(\frac{1}{1+s}\right)^Q$$

é uma forma simples de identificar

$$f(x) = \frac{(-\ln x)^{Q-1}}{\Gamma(Q)}\, \mathbb{I}_{(0,1]}(x)$$

como densidade do produto $U_1 \cdots U_n$ de n variáveis *Uniforme*$(0, 1)$ independentes.

Claro que este método só é útil se conseguirmos identificar a distribuição do produto de transformadas de Mellin. Por exemplo, $U^{1/p} \frown Beta(p, 1)$, pelo que

$$\mathcal{M}_{U^{1/p}}(s) = \int_0^1 p\, x^{p+s-1} dx = \frac{p}{p+s}.$$

Portanto, se $U_1 \overset{d}{=} U_2 \frown Uniforme(0, 1)$, independentes, então $\mathcal{M}_{U_1^{1/\mu} U_2^{1/\nu}}(s) = \frac{\mu}{\mu+s}\, \frac{\nu}{\nu+s}$. Note-se que não conseguimos ir mais longe do que isto se $\mu \ne \nu$. Nestas situações há que recorrer à técnica usual para determinar a densidade do produto de $U_1^{1/\mu}$ por $U_2^{1/\nu}$. Para $z \in (0, 1)$,

$$\int_z^1 \mu \left(\frac{z}{t}\right)^{\mu-1} \nu t^{\nu-1} \frac{dt}{t} = \begin{cases} \mu^2 z^{\mu-1} (-\ln z)\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z) & , \mu = \nu \\ \frac{\mu\nu}{\nu-\mu} z^{\mu-1} (1 - z^{\nu-\mu})\, \mathbb{I}_{(0,1]}(z) & , \mu < \nu \end{cases},$$

de onde se conclui que $U_1^{1/\mu} U_2^{1/\mu} \frown BetaBoop(\mu, 1, 1, 2)$ e

$$U_1^{1/\mu} U_2^{1/\nu} \frown \mathcal{K}_{\nu-\mu; \frac{\mu}{\nu-\mu}, 2, 1, 1}, \; \mu < \nu.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_{p,1,1,Q}}(s) &= \tfrac{p^Q}{\Gamma(Q)} \textstyle\int_0^1 x^{s+p-1} \left(-\ln x\right)^{Q-1} \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{p^Q}{\Gamma(Q)} \tfrac{\Gamma(Q)}{(p+s)^Q} = \left(\tfrac{p}{p+s}\right)^Q
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$X_{p,1,1,Q} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \prod_{k=1}^{Q} U_k^{1/p}, \; p > 0, Q \in \mathbb{N}.$$

A transformada de Mellin de $X_{p,q} \frown Beta(p, q)$ é

$$\mathcal{M}_{X_{p,q}}(s) = \tfrac{B(p+s,q)}{B(p,q)} = \tfrac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(p)} \tfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+s)}.$$

Observe-se a contração $X_{p,q}\, X_{p-1,1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{p-1,q+1}$, pois

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{X_{p,q}}(s)\mathcal{M}_{X_{p-1,1}}(s) &= \tfrac{\Gamma(p+s)}{\Gamma(p)} \tfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+s)} \tfrac{p-1}{p-1+s} \\
&= \tfrac{\Gamma(p+s-1)}{\Gamma(p-1)} \tfrac{\Gamma(p-1+q+1)}{\Gamma(p-1+q+1+s)} \\
&= \mathcal{M}_{X_{p-1,q+1}}(s).
\end{aligned}$$

Como $U_{k:k} \frown Beta(k, 1)$, com transformada de Mellin $\mathcal{M}_{U_{k:k}}(s) = \frac{k}{k+s} = \frac{B(k+s,1)}{B(k,1)}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{B(k+s,1)}{B(k,1)} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k\,\Gamma(k+s)}{\Gamma(k+s+1)} \\
&= n!\, \tfrac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(2+s)} \tfrac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(3+s)} \tfrac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(4+s)} \cdots \tfrac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(1+n+s)} \\
&= n!\, \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+n+s)} \\
&= \frac{B(1+s,n)}{B(1,n)} = \mathcal{M}_{U_{1:n}}(s).
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\prod_{k=1}^{n} U_{k:k} \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_{1:n}\text{[4]},$$

que exibe de forma muito expressiva a contração que resulta de multiplicar por variáveis com suporte $[0, 1]$ – o produto de máximos tem a distribuição do mínimo! Observe-se ainda que

$$U_{1:k-1}\, U_{k:n+k} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \prod_{j=1}^{n+k} U_{j:j} \stackrel{\mathrm{d}}{=} U_{1:n+k}.$$

No que se refere à expansão que resulta da divisão por uma variável aleatória com suporte $[0, 1]$, exemplificamos com a clássica variável *Slash* e com o quociente de $X \frown Gama(\alpha, 1)$ por $U \frown Uniforme(0, 1)$, independentes.

Em estudos de robustez (Hoaglin *et al.*, 1992) é muito usada a variável Gaussiana Dividida ("*Slash*"), que é a variável $Z \frown Gaussiana(0, 1)$ dividida pela variável $U \frown Uniforme(0, 1)$, com Z e U independentes. Esta variável tem função densidade de probabilidade

$$\begin{aligned}
f_{\frac{Z}{U}}(x) &= \int f_Z(xy) f_U(y)\, y\, \mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2y^2}{2}} y\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^2} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & \text{se } x = 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

e ao dividir por valores de $(0, 1)$ estamos a obter caudas muito mais pesadas do que as da Gaussiana (que, a despropósito se diga, é a variável de caudas mais leves na classe das leis infinitamente divisíveis[5], ver figura 4(a)).

Um outro exemplo simples é $Y = \frac{X}{U}$, com $X \frown Gama(\alpha, 1)$ e $U \frown Uniforme(0, 1)$ independentes. Para $z \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
f_Y(z) &= \int f_X(zu) f_U(u)\, |u|\, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{(zu)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-zu}}{\Gamma(\alpha)}\, u\, \mathrm{d}u \\
&\underset{w=zu}{=} \int_0^z \frac{w^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-w}}{\Gamma(\alpha)} \frac{w}{z} \frac{\mathrm{d}w}{z} \\
&= \frac{\gamma(\alpha+1, z)}{\Gamma(\alpha)\, z^2},
\end{aligned}$$

[3] Novela policial em 10 capítulos, coordenada por João Condé e escrita por 10 mestres da língua e da imaginação, Viriato Correa, Dinah Silveira de Queiroz, Lúcio Cardoso, Herberto Sales, Jorge Amado, José Condé, João Guimarães Rosa, Antonio Callado, Orígenes Lessa e Rachel de Queiroz, cada um tentando dificultar mais a tarefa do escritor do capítulo seguinte. Foi editada em Portugal com a chancela de *Livros do Brasil*. – neste caso carecas serão os modelos U e as boas a Beta e a BettaBoop.

[4] Obviamente esta expressão tem que ser interpretada assumindo que $U_{1:1} = U_{11}$, $U_{2:2} = \max\{U_{21}, U_{22}\}$, $U_{3:3} = \max\{U_{31}, U_{32}, U_{33}\}$,..., $U_{n:n} = \max\{U_{n1}, \ldots, U_{nn}\}$, com as variáveis U_{jk}, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, j$, independentes entre si.

[5] As distribuições infinitamente divisíveis sem fatores primos e as distribuições indecomponíveis são os tijolos da aritmética das probabilidades, pois o teorema da fatorização de Khinchine estabelece que qualquer distribuição $\mathcal{P}$ admite ser decomposta como $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ no semigrupo de convolução, sendo $\mathcal{P}_1$ infinitamente divisível sem fatores indecomponíveis e $\mathcal{P}_2$ degenerada ou representável como convolução finita ou numerável de distribuições indecomponíveis.

onde $\gamma(\alpha, z) = \int_0^z w^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-w} \mathrm{d}w$ é a função Gama incompleta inferior, ver figura 4(b).

Para quem seja curioso e masoquista indicamos um recente trabalho de Zörnig (2019) em que com grande generalidade se investiga o resultado da divisão por variáveis *Beta* – e fica o desafio da divisão por *BetaBoop*. Por exemplo, se $X \frown Beta(p,1)$ e $Y \frown BetaBoop(1,1,1,n)$ são independentes, tem-se

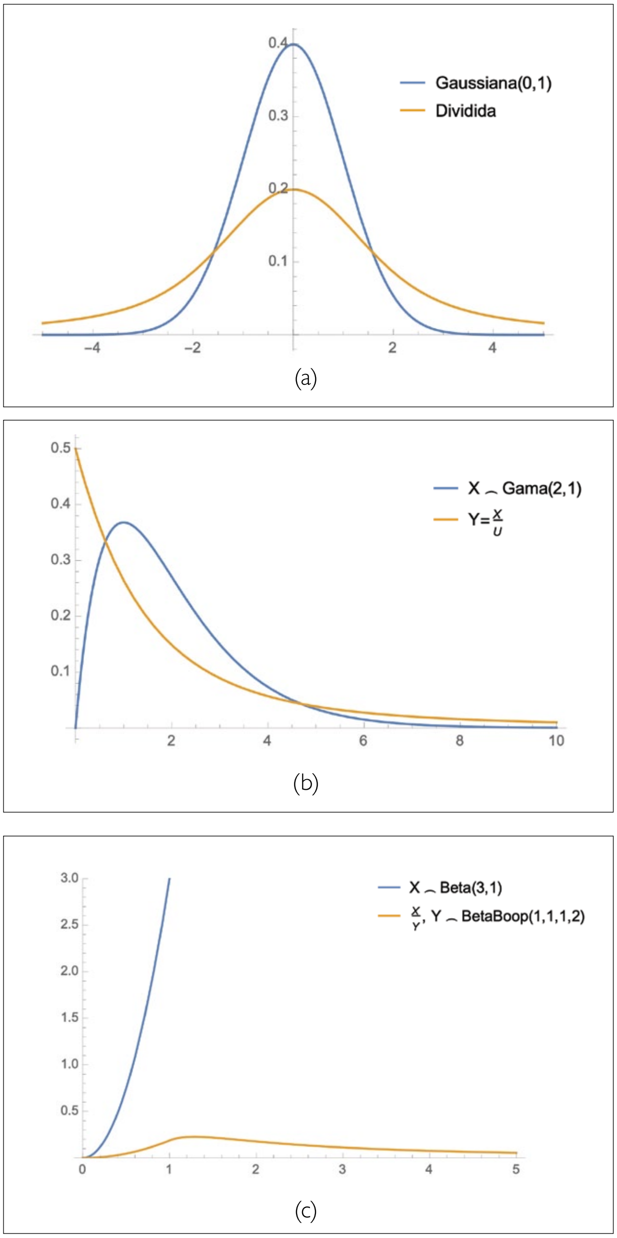


Figura 4. Expansão que resulta da divisão por uma variável aleatória com suporte [0,1].

$$f_{\frac{X}{Y}}(z) = \frac{p\,z^{p-1}}{\Gamma(n)} \int_0^{\min\left\{1,\frac{1}{z}\right\}} y^p\,(-\ln y)^{n-1} \mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} \frac{p\,z^{p-1}}{\Gamma(n)} \beta(p+1,1,1,n) = \frac{p\,z^{p-1}}{(p+1)^n} & ,0 < z < 1 \\ \frac{p\,z^{p-1}}{\Gamma(n)} \int_{\ln z}^{\infty} \mathrm{e}^{-(p+1)w} w^{n-1} \mathrm{d}w = \dfrac{p\,z^{p-1}\,\Gamma(n, \ln z^{p+1})}{(p+1)^n\,\Gamma(n)} & ,z \geq 1 \end{cases},$$

caso este que se ilustra na figura 4(c).

REFERÊNCIAS

[1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 8th ed., Dover, New York, USA.

[2] Bertrand, J. (1889). *Calcul des Probabilités*, Gauthier--Villars, Paris, France.

[3] Borel, E. (1909). "Les Probabilités Dénombrables et Leurs Applications Arithmétiques". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **27**, 247-271.

[4] Brilhante, M. F.; Gomes, M. I.; Mendonça, S.; Pestana, D.; Pestana, P. (2023). "Generalized Beta Models and Population Growth, so Many Routes to Chaos". *Fractal Fract.*, **7**, 194.

[5] Brilhante, M. F.; Mendonça, S.; Pestana, D.; Sequeira, F. (2010). "Using Products and Powers of Products to Test Uniformity". *In Proceedings of the ITI 2010*, 32nd International Conference on Information Technology Interfaces, Cavtat, Croatia, pp. 509-514.

[6] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*, vol I; McGraw--Hill, New York, USA.

[7] Fisher R. A. (1932). *Statistical Methods for Research Workers*, 4th ed., Oliver and Boyd, Edinburgh and London, UK.

[8] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products* 6th ed., Academic Press, San Diego, USA.

[9] Hoaglin, D. C.; Mosteller, F.; Tukey, J. W. (1992).*Análise Exploratória de Dados, Técnicas Robustas: Um Guia*, Salamandra, Lisboa, Portugal.

[10] Johnson, N. L.; Kemp, A. W.; Kotz, S. (2005). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2, Wiley, New York, USA.

[11] Johnson, N. L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2, Wiley, New York, USA.

[12] Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, Ergebnisse Der Mathematik. (English translation: Kolmogorov, A.N. *Foundations of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York, USA, 1950.)

[13] Kumaraswamy, P. (1980). "A Generalized Probability Density Function for Double-Bounded Random Processes". *Journal of Hydrology*, **46(1-2)**, 79-88.

[14] Mendonça, S.; Pestana, D.; Santos, R. (2007). *Diogo Pacheco d'Amorim's The Elements of Probability Calculus Diplomatic Bilingual Edition of Pacheco D'amorim's 1914 Thesis on the Construction of Probability*, 2007. Annotated English translation. *https://estudogeral.uc.pt/handle/10316/113710*

[15] Pacheco d'Amorim, D. (1914). *Elementos de Cálculo das Probabilidades*, Imprensa da Universidade, Coimbra, Portugal.

[16] Pearson, K. (1900). "On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such that it can be Reasonably Supposed to have Arisen from Random Sampling". *Philosophical Magazine*, Ser. 5 **50** (302), 157-175. *https://doi.org/10.1080/14786440009463897*

[17] Santos, R. (2008).*Probabilidade Circa 1914 e a Construção de Diogo Pacheco d'Amorim*, Universidade de Lisboa. *http://hdl.handle.net/10451/1542*

[18] Whittaker, E. T.; Watson, G. N. (2013). *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[19] Zörnig, P. (2019). "On Generalized Slash Distributions: Representation by Hypergeometric Functions". *Stats*, **2** (3), 371-387. *https://doi.org/10.3390/stats2030026*

Agradecimento: Este trabalho é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto UIDB/00006/2020. DOI: 10.54499/UIDB/00006/2020 (*https://doi.org/10.54499/UIDB/00006/2020*).

Agradecemos também o meticuloso relatório do(a) revisor(a) científico, com abundantes indicações detalhadas que melhoraram o texto, clarificando passos importantes.

SOBRE OS AUTORES

Maria de Fátima Brilhante é Professora Associada da Universidade dos Açores, e investigadora do Centro de Estatística e Aplicações. Tem trabalhos publicados sobre evolução estocástica de populações, fractalidade e caos, estudentização interna e externa, meta análise, e influência de COVID19 no turismo. A convite da Sociedade Portuguesa de Estatística, publicou um curso sobre Meta Análise.

Maria Ivette Gomes, doutorada em Probabilidade e Estatística (Sheffield, UK), foi Professora de Estatística, Estatística Computacional, Estatísticas Ordinais e Teoria de Valores Extremos na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, tendo-lhe sido conferido o título de Professora Emérita. É membro da Academia das Ciências de Lisboa, investigadora do Centro de Estatística e Aplicações e do Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral. Foi editora de Revstat - Statistical Journal, e editora Associada de Extremes, entre outras, e vice-presidente do International Statistical Institute. Em 2013 recebeu o Prémio de Carreira da Sociedade Portuguesa de Estatística, sendo eleita membro honorário.

Sandra Mendonça é Professora Associada da Universidade da Madeira, de que foi Vice-Reitora, e investigadora do Centro de Estatística e Aplicações. Tem trabalhos publicados sobre convexidade generalizada, filtragem geométrica e estatísticas ordinais e extremos, dinâmica não linear e caos, e meta análise.

Dinis Pestana, doutorado em Probabilidade e Estatística (Sheffield, UK), foi Professor de Probabilidade, Bioestatística, Amostragem na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É investigador do Centro de Estatística e Aplicações e do Instituto de Investigação Científica Bento da Rocha Cabral. Em 2013 recebeu o Prémio de Carreira da Sociedade Portuguesa de Estatística, sendo eleito membro honorário.

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

LILLIAN R. LIEBER

Lillian Lieber foi uma matemática americana, de origem russa, que viveu uma longa vida de 100 anos, tendo falecido em 1986. Com um percurso académico raro para uma mulher do seu tempo, escreveu vários livros de divulgação matemática que conquistaram o público leigo e especialistas. O esquecimento a que foi votada não é fácil de compreender. Alinhavamos aqui algumas notas biográficas de Lillian Lieber, assim como uma sucinta descrição do seu trabalho.

Lillian Rosenberg[1] nasceu em Nicolaiev, Rússia, em 1886. Viajou para os EUA, com a família, em 1891. O seu percurso académico foi notável, principalmente se atendermos ao facto de ser mulher e judia. Em 1908, obteve um AB de Barnard College. Esta instituição, ligada à Columbia University, permitiu-lhe contactar com académicos de consequência, como Edward Kasner. Em 1908, iniciou um período de dois anos em que ensinou na Hunter College, uma instituição para alunos do sexo feminino. Após ter também ensinado no Ensino Secundário, Lillian obteve um mestrado pela Columbia University, em 1911, e um doutoramento (em Química) pela Clark University, em 1914. Ocupou lugares de investigação e ensino no Bryn Mawr College e no Wells College (aqui, para ensinar Física). Em 1934, entrou para a Long Island University (LIU), em Nova Iorque, onde permaneceu até se aposentar. Foi chefe do Departamento de Matemática a partir de 1945, sucedendo no lugar ao seu marido, Hugh Gray Lieber, com quem se casara em 1926. No mesmo ano de 1934, foi nomeada directora do Galois Institute of Mathematics and Art. Lillian Lieber faleceu em 1986, em Nova Iorque.

Ao longo da sua carreira, Lillian publicou, com ilustrações do seu marido, mais de 15 livros de popularização da matemática. O seu estilo era único e as obras receberam boa aceitação do público e dos especialistas, como Albert Einstein. Este escreveu, como comentário à obra *The Einstein Theory of Relativity* (L. R. Lieber, 1936):

A clear and vivid exposition of the essential ideas and methods of the theory of relativity... can be warmly recommended especially to those who cannot spend too much time on the subject.

Figura 1. Lillian Rosanoff Lieber

Figura 2. Infinito

Outras recensões podem ser encontradas em Brinkmann 1934, Brinkmann 1941, Church 1948, Graubard 1962, Kokomoor 1955, Smith 1932, Stickles 2009 e W.M.M. 1937.

Lillian Lieber escreveu sobre tópicos difíceis e cientificamente muito relevantes como geometrias não euclidianas, teoria da relatividade, teoria de Galois, o infinito, etc. Nos seus livros, procura não "fugir às equações", antes tornando-as acessíveis, por serem essenciais à compreensão dos assuntos. Como muito bem notou Maria Popova (em Popova 2017, mas ver também Popova 2018):

> *... many of her books have fallen out of print – no doubt because the depth, complexity, and visionary insurgency of her style don't conform to the morass of formulaic mediocrity passing for popular science writing today.*

Desde as suas primeiras obras – sempre ilustradas pelo seu marido – Lillian adotou um estilo muito próprio de escrita, às vezes confundido com *verso livre*. Nas suas

[1] Alterou o apelido para Rosanoff mais tarde.

INTRODUCING THE HERO—T. C. MITS

This introduces the Hero:

T. C. M I T S
The
Celebrated
Man
In
The
Street

T. C. is born and gets
an education of some kind—
perhaps college,
perhaps "the school of hard knocks."
In any case
he tries to figure out
how best to "get along."
He picks up a lot of
contradictory information:

"The past is antiquated,
you must be progressive."
"The past is wonderful,
the new-fangled fads are
a sign of decadence."

"Science will save us from
Superstition and Fraud."
"Science is the greatest menace
yet invented by man."

"Fifty million people can't be wrong."
"Some races are always wrong."

"Be practical, learn a vocation,
don't waste your time on
Mathematics and Art."

"Why be a narrow, practical farmer
all your life,
get out and learn some theory,
and find out how
to do things in a better way."

And so on and so on.

He is naturally confused by all this,
and very much hemmed in.
He becomes not only
Mits in name,

Figura 3. Apresentação de T. C. MITS.

palavras (L. R. Lieber 1931):

This is not intended to be
Free verse.
Writing each phrase on a separate line
Facilitates rapid reading,
And everyone
Is in a hurry
Nowadays.

As ilustrações de Hugh Lieber eram também muito originais. Como exemplo, na figura 2, uma extraída de L. R. Lieber 2007a.

Curiosamente, quando Lillian sucedeu, na chefia do Departamento de Matemática de LIU, ao seu marido, este passou a dirigir o Departamento de Arte da mesma universidade.

Na figura 3, escolhemos uma página da nossa preferência para tentar partilhar a experiência de mergulhar numa obra do casal Lieber (L. R. Lieber 1946a, pp. 9–11).

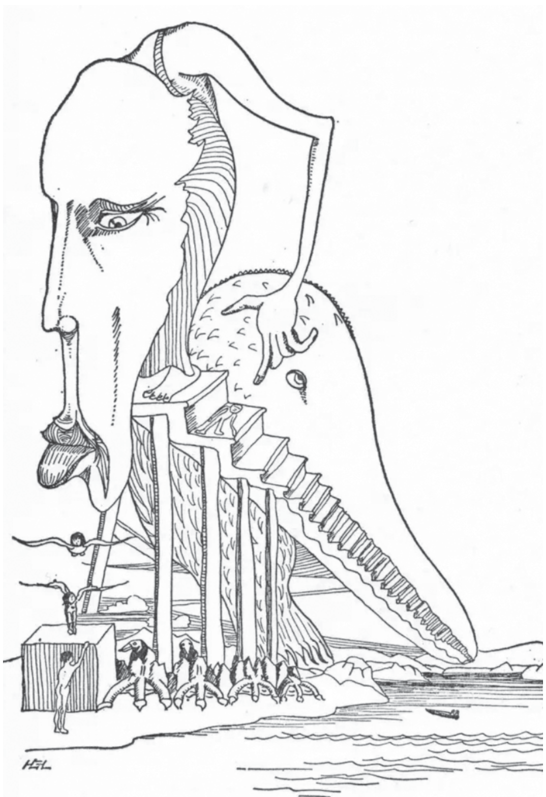


Figura 4. *Human values and Art, Science, and Mathematics* (L. R. Lieber 1961 (p.47)).

O herói T. C. MITS, bem como a sua companheira WITS (woman in the street) acompanham-nos em várias obras. Uma outra figura notável é SAM. Aqui, as iniciais são inspiradas nas palavras inglesas para *ciência*, *arte* e *matemática*. O conceito evoluiu e, muito sucintamente, "S" representa a nossa percepção do mundo exterior, "A" a intuição, as emoções, a componente humana. Finalmente, "M" representa a capacidade de obter inferências racionais, inclui a lógica, a matemática, o bom senso. Um comentário nosso: será que Ubiratan D'Ambrósio leu Lillian Lieber? Não só o conceito original de etnomatemática vem à mente, mas também os movimentos STEM e STEAM...

Lillian Lieber vivia a matemática de forma intensa e pessoal. Entusiasmada com os recentes avanços da disciplina, via neles metáforas para a complexa vida social.

Baseada na discussão dos sistemas formais que teve origem no surgimento das geometrias não euclidianas, Lillian Lieber propõe à sociedade um sistema de postulados, que enumeramos sucintamente (ver L. R. Lieber 1961):

I. Sobre a preservação da Vida Humana.

II. Sobre a obrigação individual de Sobrevivência.

III. Sobre a Liberdade.

IV. Sobre a procura da Felicidade.

Lillian atravessou as duas grandes guerras, o que a marcou indelevelmente. Dedica a edição de 1945 do seu livro sobre Relatividade a Roosevelt:

To
FRANKLIN DELANO ROOSEVELT
who saved the world from those forces
of evil which sought to destroy
Art and Science and the very
Dignity of Man.

A matemática recreativa também lhe mereceu atenção, como atestam os dois problemas (Hugh Gray Lieber e L. R. Lieber 1943, Hugh Gray Lieber e L. R. Lieber 1944), publicados em co-autoria com o seu marido, na *The Atlantic.*

Em 1947, uma comissão elaborou o programa do encontro de verão da *Mathematical Association of America*, que incluía sessões sobre Energia Atómica, Problemas, Matemática para as Artes Liberais e Cálculo Automático. Entre os participantes, encontramos Pólya, Coxeter, von Neumann, entre outros matemáticos de primeira linha. A comissão organizadora era composta por G. Birkhoff, Lillian R. Lieber e C. E. Springer (ver Zariski e Carver

1947). Este facto atesta como Lillian Lieber estava bem entrosada com a elite matemática da época, um mundo dominado por homens.

Apesar da sua popularidade há quase um século, hoje esta autora está esquecida. Foi das primeiras mulheres a fazer um percurso académico nos EUA. Mesmo assim, têm-se revelado infrutíferos os esforços de obter, da parte da LIU, pormenores sobre o trajecto profissional de Lillian Lieber. Esperamos levar a cabo, noutro local, uma abordagem mais pormenorizada da vida e da obra de Lillian Lieber. Para já, realçamos o livro Roberts 2019, que lhe dedica um capítulo. Num registo mais melancólico, o diário de um jovem paciente de cancro, Gunther 1949, regista uma carta, do paciente a um amigo, relatando uma visita dos Lieber, que muito o animou.

Só tomámos contacto com esta autora nos últimos meses. Se algum leitor tiver conhecimento ou memória relacionados com ela, por favor não deixe de nos contactar. É que ficámos fãs do casal Lieber!

REFERÊNCIAS

[1] Brinkmann, H.W. (ago. de 1934). "Non-Euclidean Geometry and Galois and the Theory of Groups by Lillian R. Lieber and H. G. Lieber". Em: *The American Mathematical Monthly* 41.7, pp. 442-3.

[2] —(jan. de 1941). "Non-Euclidean Geometry or Three Moons in Mathesis by Lillian R. Lieber and H. G. Lieber". Em: *The American Mathematical Monthly* 48.1, p. 56.

[3] Church, Alonzo (mar. de 1948). "Mits, Wits and Logic by Lillian R. Lieber and Hugh Gray Lieber". Em: *The Journal of Symbolic Logic* 13.1, p. 55.

[4] Graubard, Mark (mai. de 1962). "Packets of Thought: Human Values and Science, Art, and Mathematics by Lillian R. Lieber". Em: *Science* 136.3515, pp. 503-4.

[5] Gunther, John (1949). *Death, be Not Proud: A Memoir.* Hamish Hamilton.

[6] Kokomoor, F. W. (mai. de 1955). "Infinity by Lillian R. Lieber". Em: *The American Mathematical Monthly* 62.5, pp. 378-9.

[7] Lieber, H.G. e Lillian R. Lieber (1954). *Comedie Internationale: A Book of Symbols.* Long Island University Press.

[8] Lieber, Hugh G. (1958). *Goodby Mr. Man, Hello Mr. New-Man.* Introduction by Lillian R. Lieber. New York: The Galois Institute of Mathematics and Art.

[9] Lieber, Hugh Gray e Lillian R. Lieber (set. de 1943). "Quiz". Em: *The Atlantic*, pp. 113, 115.

[10] — (fev. de 1944). "Quiz". Em: *The Atlantic*, pp. 104, 107.

[11] Lieber, Lillian R. (1931). *Non-Euclidean Geometry; Or, Three Moons in Mathesis*. Drawings by Hugh G. Lieber. Academy Press.

[12] — (1936). *The Einstein Theory of Relativity.* Drawings by Hugh G. Lieber. New York: Holt, Rinhart and Wiston.

[13] — (1941). *Galois and the Theory of Groups: a Bright Star in Mathesis.* Drawings by Hugh G. Lieber. Lancaster, Pennsylvania: The Science Press Printing Company.

[14] — (1942). *The Education of T.C. Mits.* Drawings by Hugh G. Lieber. The Galois Institute Press, Long Island University.

[15] — (1946a). *Modern Mathematics for T.C. Mits.* Drawings by Hugh G. Lieber. London: George Allen & Unwin Ltd.

[16] — (1946b). *Take a Number: Mathematics for the Two Billion.* Drawings by Hugh G. Lieber. New York: The Ronald Press Company.

[17] — (1947). *MITS, wits, and logic.* 1ª ed. Drawings by Hugh G. Lieber. WW Norton & Company, Inc.

[18] — (1959). *Lattice Theory: The Atomic Age in Mathematics.* Drawings by Hugh G. Lieber. Galois Institute of Mathematics and Art.

[19] — (1961). *Human Values and Science, Art and Mathematics*. Drawings by Hugh G. Lieber. WW Norton & Company, Inc.

[20] — (1963). *Mathematics: First S-t-e-p-s.* Drawings by Hugh G. Lieber. F. Watts.

[21] — (2007a). *Infinity: Beyond the Beyond the Beyond.* Drawings by Hugh G. Lieber. Paul Dry Books.

[22] — (2007b). *The Education of T.C. MITS: What Modern Mathematics Means to You.* Drawings by Hugh G. Lieber. Paul Dry Books.

[23] — (2008). *The Einstein Theory of Relativity: A Trip to the Fourth Dimension.* Drawings by Hugh G. Lieber. Paul Dry Books.

[24] — (2017). *Take a Number: Mathematics for the Two Billion.* Drawings by Hugh G. Lieber. Dover Publications.

[25] Nagel, Ernest (out. de 1953). "Infinity by Lillian R. Lieber and Hugh Gray Lieber". Em: *Scientific American* 189.4, pp. 107-8.

[26] Popova, Maria (mar. de 2017). "Mathematician Lillian Lieber on Infinity, Art, Science, the Meaning of Freedom, and What it Takes to be a Finite but Complete Human Being". Em: *The Marginalian. https://www.themarginalian.org/2017/03/30/lillian-lieber-infinity.*

[27] — (2018). "From Euclid to Equality: Mathematician Lillian Lieber on How the Greatest Creative Revolution in Mathematics Illuminates the Core Ideals of Social Justice and Democracy". Em: *The Marginalian. https://www.themarginalian.org/2018/01/16/lilian-lieber-human-values.*

[28] Roberts, D.L. (2019). *Republic of Numbers: Unexpected Stories of Mathematical Americans through History.* Chapter 14. Johns Hopkins University Press.

[29] Smith, Adam J. (fev. de 1932). "Non-Euclidean Geometry or Three Moons in Mathesis by Lillian R. Lieber and Hugh Gray Lieber". Em: *The Mathematics Teacher* 25.2.

[30] Stickles, Paula R. (mai. de 2009). "Infinity: Beyond the Beyond the Beyond by Lillian R. Lieber". Em: *The Mathematics Teacher* 102.9, pp. 715-6.

[31] W.M.M. (1937). "The Einstein Theory of Relativity by H. G. L. R. Lieber". Em: *Philosophy of Science* 4.2, p. 287.

[32] Zariski, Oscar e W.B. Carver (dez. de 1947). "The Twenty-Ninth Summer Meeting of the Mathematical Association". Em: *The American Mathematical Monthly* 54.10P1, pp. 608-13.

Raul Morais dos Santos
CITAB – Centro de Investigação em Tecnologias Agroambientais e Biológicas, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
rmorais@utad.pt

O PAPEL DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL E DA MONITORIZAÇÃO INTELIGENTE NA VITICULTURA DE PRECISÃO

As tecnologias de aquisição de dados no contexto da agricultura de precisão, sejam de proximidade, utilizando sensores no campo, ou remotas, como aquelas que recorrem a sensores transportados por veículos aéreos, já atingiram um nível de maturidade suficiente para que o esforço de investigação se concentre atualmente na extração de conhecimento e na forma como este pode transformar práticas agrícolas diversas em práticas mais sustentáveis e ecologicamente responsáveis. O uso de modelos matemáticos e de técnicas de inteligência artificial tem registado um crescimento significativo na extração de métricas, parâmetros de desempenho das culturas, deteção de anomalias, entre outros, tornando-se indispensável para o gestor agrícola moderno. Neste artigo, apresenta-se uma visão prática sobre como estas tecnologias têm sido aplicadas na viticultura de precisão, explorando várias vertentes tecnológicas e recorrendo a modelos matemáticos e a inteligência artificial para atingir metas de sustentabilidade ambiental, ecológica e económica.

1. TRANSIÇÕES DIGITAIS NA VITICULTURA DE PRECISÃO

Uma análise dos termos indexantes das publicações sobre viticultura de precisão na base de dados SCOPUS revela a forte componente tecnológica deste conceito, que deriva diretamente da agricultura de precisão (ou *smart farming*, agricultura inteligente, entre outros termos frequentemente usados na literatura). Quando aplicada à cultura da vinha, a viticultura de precisão foca-se na gestão da planta, compreendendo as causas de variabilidades, espaciais e temporais, e atuando para as minimizar. Numa visão ideal, este conceito permitiria monitorizar cada planta individualmente e fornecer-lhe as condições ideais para o seu desenvolvimento. No entanto, esta abordagem personalizada é muitas vezes impraticável, dados a dimensão do terreno e o número de plantas, além dos custos associados. Assim, é comum e desejável o uso de modelos matemáticos que compreendam as métricas de desenvolvimento das plantas e que produzam mapas para ajustar as práticas de cultivo, visando alcançar o objetivo final: plantas saudáveis, produção maximizada, viabilidade económica e sustentabilidade ambiental.

Consequentemente, é comum encontrar termos como tecnologia, variabilidade, sensores, processamento de imagem, sensores hiperespectrais, deteção remota, drones, servidores, sensores de campo, comunicações, robótica, *Big Data*, internet das coisas, e gestão de processos entre os termos indexantes das publicações científicas.

Nas últimas décadas, assistiu-se a um crescimento exponencial de tecnologias que recolhem dados, processam-nos e produzem informações relevantes para a gestão das práticas agrícolas. No atual estado de desenvolvimento tecnológico, o foco está agora no processamento de dados, com a introdução de conceitos como *Big Data, Data Lake*, e decisões baseadas em dados massivamente produzidos, que requerem tratamento adequado e oportuno. Paralelamente, modelos de previsão utilizam estes dados para treino através de técnicas de inteligência artificial (IA), como a aprendizagem supervisionada e a não supervisionada, entre outras.

Esta vasta gama de ferramentas tecnológicas tem incentivado um aumento significativo das tecnologias de monitorização do solo, tanto na superfície como abaixo dela, utilizando sensores óticos e de radar. A computação, que antes era centralizada ou baseada na nuvem, tem sido direcionada para dispositivos que já processam dados localmente, no contexto de *Edge/Fog Computing*, isto é, processamento distribuído. Nesse paradigma, as comunicações desempenham um papel crucial, trazendo preocupações de cibersegurança, ciber-resiliência e autenticidade dos dados produzidos, cada vez mais, por dispositivos IoT (*Internet of Things*). Estes dados geram longas séries temporais que constituem verdadeiros "lagos de dados", cujo processamento analítico com técnicas convencionais já não faz sentido, o que promoveu o surgimento de técnicas de IA para essas tarefas. Com o volume crescente de dados e as várias técnicas de IA disponíveis, surgem modelos que tentam descrever o comportamento da vinha, abrangendo doenças, ciclos vegetativos, fenologia, stresses hídricos, entre outros fatores, todos influenciados pelas alterações climáticas que modificam o contexto dos dados e das previsões.

Estamos na era dos modelos matemáticos descritivos e preditivos que tentam simular o comportamento das plantas, utilizando o conceito de gémeo digital (*Digital Twin*), cujo grande objetivo é a virtualização da vinha. Assim, entramos numa era de sistemas de apoio à decisão baseados em dados, num conceito de "inteligência da cultura", onde todos os dados, heterogéneos por definição, competem entre si para definir, com a maior precisão possível, o comportamento da cultura, bem como prever os passos seguintes. Se o panorama da monitorização pode parecer avassalador, o cenário de atuação é igualmente desafiador. Além das tecnologias VRT (tecnologias de taxa variável) conhecidas das últimas duas ou três décadas, o trabalho colaborativo realizado por robôs que operam 24 horas por dia, sete dias por semana, com mapas de prescrição gerados em tempo real tende a ser cada vez mais elétrico, numa perspetiva de descarbonização.

Atualmente, todas estas ferramentas tecnológicas permitem uma ampla gama de aplicações, que estão em fase de disseminação e adoção por aqueles que investiram e agora colhem os frutos. Estas aplicações incluem pulverização de precisão, irrigação inteligente, tratamento preventivo de pragas e doenças, operações culturais autónomas, mapeamento de zonas para vindima seletiva, gestão eficiente e adaptação das práticas às alterações climáticas, sempre com uma abordagem de valorização de resíduos, reutilização de água e aumento dos índices de sustentabilidade. Naturalmente, este processamento intensivo de dados requer o uso de modelos que vão desde a validação dos dados até à extração de conhecimento, com o objetivo de otimizar a gestão dos processos agrícolas.

2. O PAPEL DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL NO *GREEN DEAL*

O Pacto Ecológico Europeu, conhecido como *Green Deal*, estabelece uma série de metas ambiciosas para transformar a economia da União Europeia numa economia sustentável, neutra em carbono e eficiente na utilização de recursos. Entre os objetivos principais estão a redução das emissões de gases com efeito de estufa, a preservação da biodiversidade, a transição para uma economia circular e a promoção de sistemas alimentares sustentáveis. A IA desempenha um papel crucial na concretização destas metas, especialmente no contexto da agricultura e, em particular, na viticultura de precisão.

A IA tem vindo a ser integrada em ferramentas avançadas que utilizam algoritmos de aprendizagem automática (*machine learning*) e técnicas de análise de dados para prever zonas de stress hídrico, identificar necessidades de rega, detetar pragas e doenças de forma precoce e analisar dados de imagens hiperespectrais para a gestão do solo e a identificação de assinaturas espectrais de doenças. Estas aplicações contribuem para uma gestão mais inteligente dos recursos, reduzindo o uso de água, fertilizantes e pesticidas, em conformidade com os objetivos do *Green Deal.*

Exemplos concretos da aplicação da IA na viticultura de precisão incluem o desenvolvimento de modelos preditivos para a gestão do stress hídrico nas vinhas. Utilizando dados meteorológicos, imagens de satélite e sensores colocados nas plantas, a IA pode prever situações de stress hídrico e recomendar estratégias de rega mais eficientes. Esta abordagem não só promove a conservação da água, um recurso cada vez mais escasso, como também assegura que as vinhas se mantêm saudáveis e produtivas, contribuindo para a resiliência climática e a sustentabilidade económica dos produtores. De forma semelhante, são utilizados dados históricos para treinar modelos que melhoram o combate a pragas e doenças, permitindo o uso reduzido de químicos, e para criar mapas que identificam variabilidades no solo, promovendo práticas de cultivo adaptativas que fomentam a regeneração do solo e a proteção da biodiversidade. Ao reduzir a necessidade de práticas agrícolas intensivas e incentivar a agricultura biológica, a IA apoia diretamente as metas do *Green Deal* relativas à sustentabilidade ambiental.

Além disso, um dos grandes focos do uso da IA está nos melhores planeamento e adaptação às alterações climáticas, antecipando o impacto de fenómenos climáticos extremos e ajudando os viticultores a ajustar as suas práticas de forma proativa. Esta capacidade de antecipação e adaptação é essencial para mitigar os riscos climáticos e promover a resiliência das vinhas face às alterações climáticas, alinhando-se com a visão do *Green Deal* de um sistema agrícola mais sustentável e preparado para o futuro.

Assim, a IA desempenha um papel fundamental na concretização dos objetivos do *Green Deal* no setor vitivinícola. Ao promover a eficiência no uso de recursos, reduzir o impacto ambiental e aumentar a resiliência da viticultura, a IA torna-se uma aliada poderosa na transição para uma agricultura mais verde e sustentável, em linha com os compromissos ambientais da União Europeia.

3. DADOS, INFORMAÇÃO E CONHECIMENTO EXTRAÍDOS DO TERRENO

Na viticultura de precisão, o uso de dados é essencial para a gestão eficaz e sustentável das vinhas. A obtenção de dados diretamente do terreno – através de sensores de campo, drones, imagens de satélite e outros dispositivos de monitorização – permite uma compreensão detalhada e em tempo real das condições das vinhas. No entanto, a mera recolha de dados não é suficiente; é necessário transformá-los em informação útil e, posteriormente, em conhecimento que apoie a tomada de decisões informadas.

Os dados recolhidos no terreno podem incluir uma variedade muito heterogénea de parâmetros, tais como temperatura, humidade relativa do ar, teor de água do solo, radiação solar, precipitação, velocidade do vento, fluxo de seixa, níveis de nutrientes, vigor das plantas, presença de pragas e doenças, entre outros. Sensores no solo e em drones captam informações em várias escalas espaciais e temporais, proporcionando um retrato dinâmico e abrangente da vinha. Imagens aéreas obtidas por sensores hiperespectrais e multiespectrais, por exemplo, ou mesmo de radar (GPR – *Ground Penetrating Radar*) podem ser utilizadas para detetar variações na saúde das plantas e identificar doenças numa fase inicial, permitindo uma resposta rápida e eficiente, assim como perceber as causas de variabilidade no seu desenvolvimento, sabendo qual a morfologia do terreno onde se encontram.

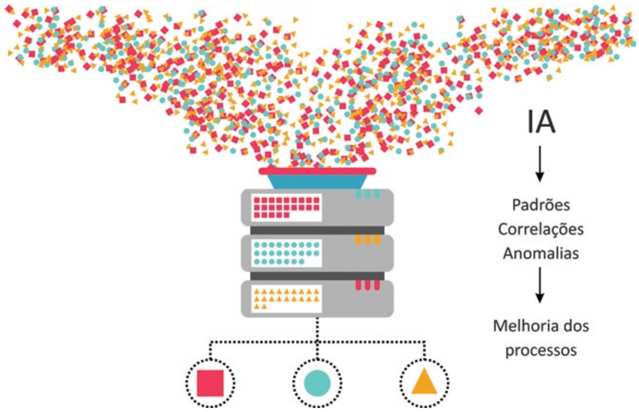


Figura 1. O uso de IA na identificação de correlações, classificação de padrões e deteção de anomalias contidos em dados em bruto recolhidos por sensores heterogéneos.

Uma vez recolhidos, estes dados brutos são processados utilizando técnicas avançadas de análise de dados e IA (ver figura 1). Algoritmos de *machine learning* são aplicados para identificar padrões e tendências que não são imediatamente visíveis através de métodos tradicionais. Por exemplo, ao analisar séries temporais de dados meteorológicos, os modelos preditivos podem antecipar situações de stress hídrico, permitindo ajustes proativos nas estratégias de rega. Da mesma forma, algoritmos de reconhecimento de padrões podem ser utilizados para detetar sinais precoces de infestação por pragas ou de doenças, possibilitando intervenções preventivas mais eficazes e reduzindo o uso de fitofármacos.

A transformação de dados em informação e, finalmente, em conhecimento útil é um processo que requer uma infraestrutura robusta para armazenamento e processamento de grandes volumes de dados, frequentemente referidos como *Big Data*. Plataformas de gestão de dados agrícolas, que integram informação proveniente de diferentes fontes (como sensores de campo, dados meteorológicos, imagens de satélite, etc.), permitem aos viticultores visualizar e analisar dados de forma integrada, facilitando uma tomada de decisão mais informada e baseada em dados reais. As figuras 2 e 3 ilustram um dos muitos exemplos de recolha de dados que visam a tomada de decisão onde modelos matemáticos são usados quer para validar os dados de entrada quer para extrair tendências que, com o apoio de IA, geram alertas de stress hídrico. Neste caso, dispositivos IoT de baixo custo são usados para recolher dados de teor de água no solo, temperatura e humidade relativa do ar, precipitação, entre outros, que enviam para uma plataforma que processa esses dados e devolve propostas de atuação ao gestor da exploração.

O conhecimento extraído do terreno vai além da simples monitorização. Ele inclui a capacidade de desenvolver modelos de simulação que replicam o comportamento da vinha sob diferentes cenários climáticos e de gestão. Este conceito emergente de gémeo digital permite aos viticultores testar virtualmente diferentes estratégias de cultivo, gestão de pragas e irrigação, antes de as aplicar no terreno, reduzindo assim o risco e melhorando a eficiência das operações. Este será, de facto, um grande tema de investigação para o futuro próximo. A IA, ao converter dados brutos em *insights* valiosos, torna-se assim um pilar fundamental da viticultura moderna, guiando os produtores para práticas mais inteligentes, eficientes e sustentáveis.

Figura 2. Aquisição de dados numa vinha do Palácio de Mateus no âmbito do projeto PRIMA/DATI (Digital Agriculture Technologies for Irrigation Effiency), *https://datiproject.eu*, que visa a recolha de dados para estabelecer melhores estratégias de rega.

Figura 3. Exemplo de séries temporais de dados numéricos obtidos de uma vinha.

4. O VINEINSPECTOR COMO FERRAMENTA IOT DE RECOLHA DE DADOS INTELIGENTE

A evolução na aquisição de dados na viticultura tem passado de métodos tradicionais, como a recolha de dados de sensores numéricos simples e imagens de satélite, para soluções mais avançadas que incorporam processamento dedicado. Atualmente, a integração de dispositivos de baixo custo com tecnologias de IA e computação de borda (*Edge Computing*) permite a extração de informações diretamente no ponto de interesse. Estes sistemas modernos não só facilitam a aquisição e processamento imediato de dados complexos, como também oferecem uma análise detalhada e em tempo real, tornando possível a monitorização precisa e a tomada de decisões informadas sem a necessidade de intervenções dispendiosas ou demoradas. O sistema VineInspector [1] foi concebido para este objetivo: recolher imagens e extrair delas *insights* valiosos, e em tempo real.

O VineInspector é um sistema autónomo, de baixo custo e fácil de instalar, concebido para operar em campo aberto. É composto por um computador de placa única (SBC – *Single Board Computer*) e várias câmaras RGB[1], integrando um conjunto de sensores de imagem que possibilitam a monitorização contínua e a avaliação da condição fitossanitária das vinhas. Este sistema é capaz de detetar e classificar automaticamente atributos distintos nas imagens adquiridas periodicamente, utilizando abordagens de IA. Tal capacidade é crucial para práticas de monitorização de proximidade inteligentes que procuram replicar a observação visual direta realizada por viticultores experientes. As figuras 4 e 5 mostram a materialização conceptual impressa

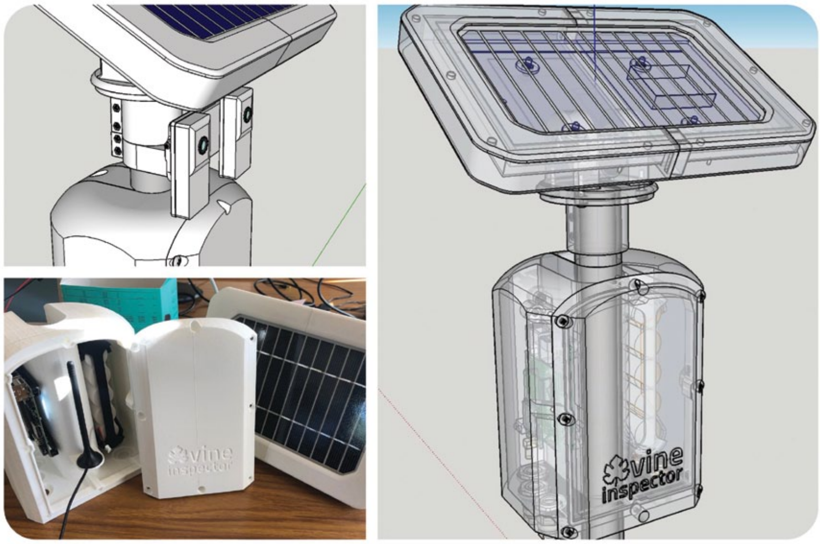


Figura 4. O conceito VineInspector: um dispositivo IoT de baixo custo que usa imagem para extrair *insights* valiosos e em tempo real.

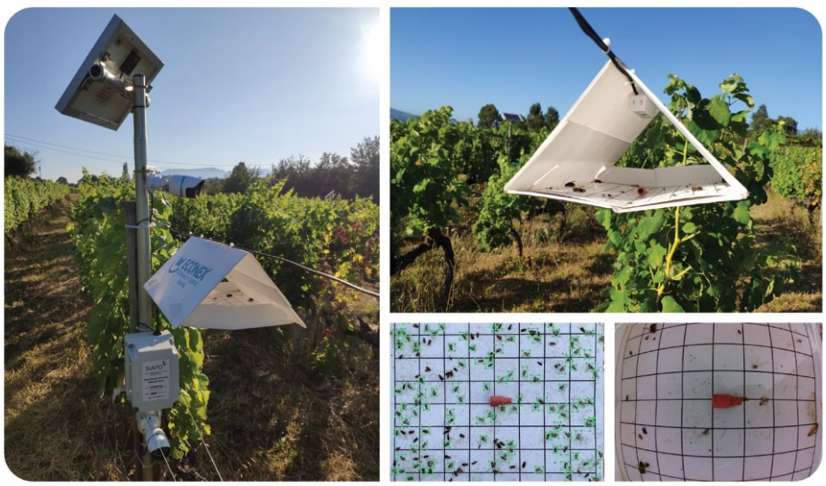
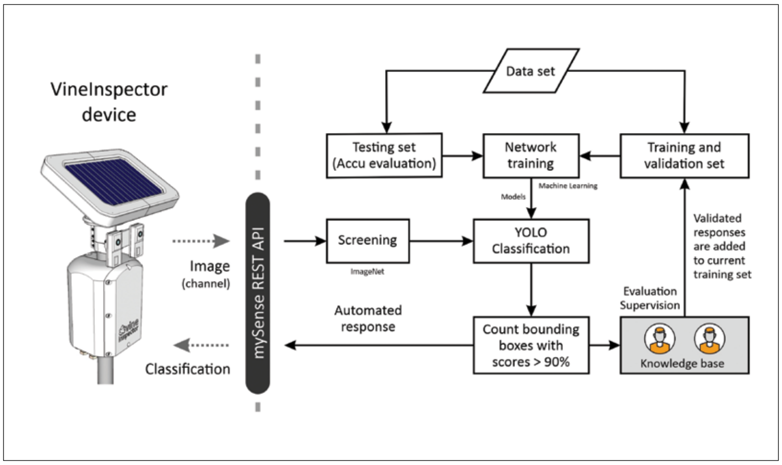
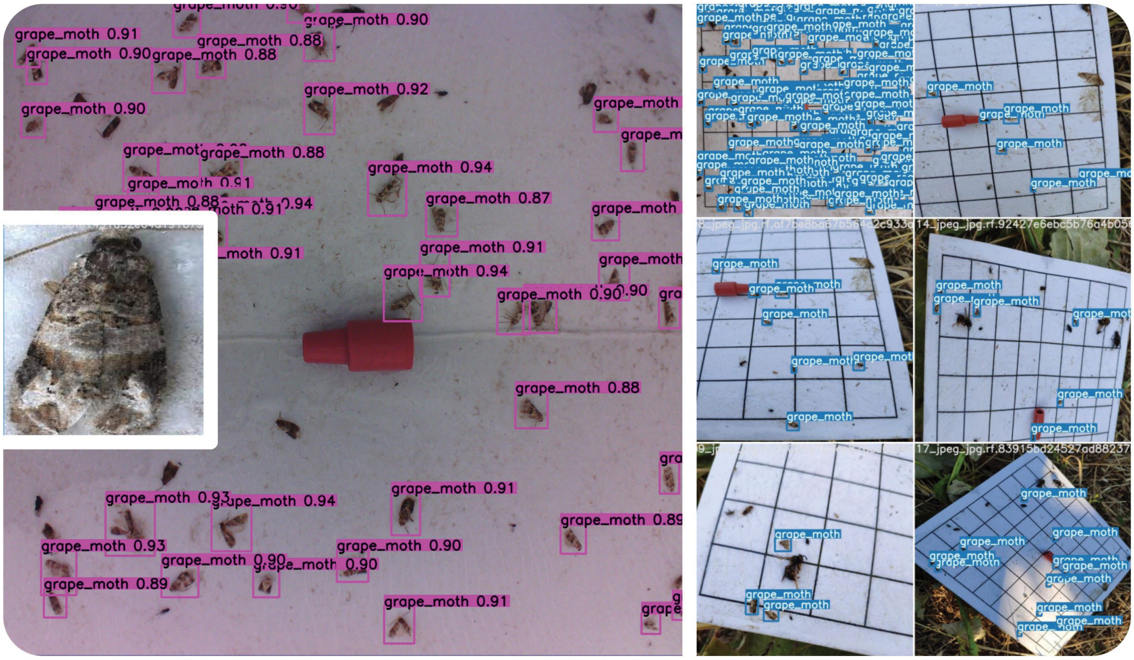


Figura 5. O VineInspector é utilizado para contar insetos (traça da uva), remotamente e em tempo real, e estimar o nível económico de ataque (NEA), fronteira a partir do qual se deve aplicar um tratamento.



◀Figura 6- Abordagem seguida pelo VineInspector: imagens são capturadas e são enviadas para um sistema na nuvem (*https://mysense.utad.pt*), que recorrendo a um modelo treinado por IA, classifica e conta o número de exemplares de traça da uva que ficam aprisionados na armadilha.

▼Figura 7. Treino realizado sobre imagens reais que foram anotadas e fornecidas a um motor YoLo4.



em 3D e o seu uso em campo em aplicações de deteção precoce de ataque de traça da uva.

A abordagem do VineInspector para deteção precoce de doenças e pragas em videiras baseia-se na captura de imagens que são posteriormente analisadas através de modelos de IA (ver figura 6). Na figura 7 ilustra-se o processo de treino e os resultados da classificação de exemplares de traça que ficam colados na armadilha.

Uma outra aplicação desenvolvida para demonstrar a eficácia deste sistema de recolha de dados enquadra-se nas estratégias de deteção automática do estado fenológico das videiras (por exemplo, o tamanho dos pâmpanos de videira) para uso quer nas práticas de gestão quer em estratégias de combate ao míldio da videira usando a regra conhecida como "3–10"[2]. Nesta aplicação em particular, um sistema de IA foi treinado para detetar se os pâmpanos têm um tamanho superior a 10 cm. Para tal, e como se pode observar na figura 8, o sistema foi treinado com as imagens do lado esquerdo (ausência de pâmpanos, pâmpanos inferiores a 10 cm, pâmpanos superiores a 10 cm) e o resultado da classificação pode ser visto do lado direito.

Os resultados dos testes em condições reais de operação demonstraram que o VineInspector é uma ferramenta robusta e funcional, capaz de fornecer uma monitorização contínua e automatizada. Com uma capacidade de operação autónoma e um consumo de energia reduzido,

Figura 8. Imagens utilizadas para treino do modelo de IA (lado esquerdo) e respetivos resultados de classificação (lado direito), mostrando a efetividade do modelo treinado na classificação de pâmpanos, relativamente ao seu tamanho.

o VineInspector permite realizar práticas agrícolas de forma mais eficiente, substituindo a necessidade de observações frequentes no local por especialistas. Esta evolução tecnológica minimiza o impacto nas práticas culturais e reduz a necessidade de recursos humanos intensivos, ao mesmo tempo que melhora a precisão e a oportunidade das intervenções contra pragas e doenças. O VineInspector representa assim o passo lógico e significativo na evolução dos sistemas de monitorização de proximidade, alinhando-se perfeitamente com as necessidades da viticultura de precisão e com os objetivos mais amplos de práticas agrícolas sustentáveis.

5. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

A evolução dos processos de aquisição e processamento de dados tem transformado significativamente diversos setores, destacando-se também na agricultura e na viticultura de precisão. Como discutido, a integração de sensores numéricos simples com tecnologias avançadas, como Internet das Coisas, IA e *Edge Computing*, tem proporcionado uma revolução na forma como os dados são adquiridos, processados e analisados, procurando sempre a extração de *insights* que possam promover práticas mais sustentáveis, e exemplifica a aplicação direta e prática de conceitos matemáticos complexos.

O uso de sensores numéricos e de imagens de satélite, que antes eram processos separados e muitas vezes dispendiosos, é hoje realizado de forma integrada, com redundância e a um custo muito inferior. O advento de tecnologias de baixo custo, combinado com a capacidade de processamento em tempo real no ponto de recolha dos dados, tem permitido uma análise mais rápida das condições ambientais e do estado das culturas. Esta transformação não só melhora a eficiência das práticas agrícolas e vitícolas, mas também contribui para a sustentabilidade ao otimizar o uso de recursos e reduzir desperdícios.

Além disso, o processamento dedicado e a aplicação de IA têm permitido uma compreensão mais aprofundada dos dados recolhidos. Algoritmos de *machine learning*, como redes neurais e árvores de decisão, são baseados em modelos matemáticos que envolvem teoria dos grafos, otimização e análise estatística. As técnicas de análise preditiva ajudam a identificar padrões e prever eventos

[1] Sistema de cores R – *Red*, G – *Green*, B – *Blue*.

[2] Regra prática utilizada para determinar o momento ideal para aplicação de fungicidas no controlo do míldio da videira. Assim que a temperatura média das últimas 24 horas atingir os 10º C, tiver ocorrido uma acumulação de precipitação de 10 mm nas últimas 24 horas, e as videiras apresentarem pâmpanos com cerca de 10 cm, o risco de infecção por míldio é elevado, sendo recomendada a primeira pulverização.

futuros, como a ocorrência de doenças ou a necessidade de rega, com um nível de precisão que seria impossível de alcançar com métodos tradicionais. Além disso, o processamento distribuído e a análise em tempo real envolvem a resolução de problemas matemáticos relacionados com a eficiência dos algoritmos e a gestão de grandes volumes de dados. Modelos matemáticos são utilizados para otimizar o desempenho dos algoritmos de processamento e para garantir que os sistemas possam operar de maneira eficiente sob restrições de tempo e de recursos.

Em jeito de conclusão, a integração de tecnologias emergentes na aquisição e no processamento de dados representa um marco na evolução das práticas agrícolas. A capacidade de utilizar sensores avançados, imagens de satélite e técnicas de processamento em tempo real com IA tem transformado a forma como os dados são utilizados para tomar decisões informadas e estratégicas.

O impacto positivo desta revolução é visível não apenas na eficiência e na precisão das práticas agrícolas, mas também na sustentabilidade e na capacidade de resposta às mudanças climáticas e aos desafios ambientais. As tecnologias de baixo custo têm democratizado o acesso a ferramentas de alta tecnologia, permitindo que pequenos e médios produtores também beneficiem dessas inovações.

No entanto, é crucial que os desenvolvimentos futuros continuem a focar-se na acessibilidade e na integração dessas tecnologias, garantindo que todos os tomadores e beneficiários destas tecnologias (*stakeholders)* possam aproveitar ao máximo os benefícios oferecidos. A colaboração entre matemáticos, engenheiros e profissionais do setor agrícola será essencial para maximizar o impacto positivo dessas inovações e para enfrentar os desafios emergentes no campo da agricultura e a viticultura de precisão, e aproveitar ao máximo as oportunidades oferecidas pelas tecnologias avançadas.

A evolução das tecnologias de aquisição e processamento de dados promete um futuro mais inteligente e sustentável para a agricultura, com decisões mais rápidas e informadas. A matemática é fundamental tanto para a tecnologia atual quanto para o desenvolvimento futuro, oferecendo técnicas avançadas que impulsionam a inovação e a eficiência. Assim, uma base matemática sólida é crucial para a evolução contínua das práticas agrícolas e para a criação de um setor mais sustentável.

REFERÊNCIAS

[1] Mendes, J.; Peres, E.; Neves dos Santos, F.; Silva, N.; Silva, R.; Sousa, J. J.; Cortez, I.; Morais, R. "VineInspector: The Vineyard Assistant". *Agriculture* **2022**, *12*, 730. *https://doi.org/10.3390/agriculture12050730*

SOBRE O AUTOR

Raul Morais dos Santos é professor catedrático no Departamento de Engenharia da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). As suas áreas de investigação estão centradas em dispositivos embebidos, redes de sensores sem fios, Internet das Coisas no contexto de agricultura de precisão, IA e plataformas de integração de dados. É investigador do Centro de Investigação e Tecnologias Agroambientais e Biológicas (CITAB) e coordena a Agenda Mobilizadora Vine & Wine do PRR na UTAD.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação *pt-maths-in@spm.pt*

NUNO CAMARNEIRO
Universidade
de Aveiro
nfcm@ua.pt

INFINITOS

Sou incapaz de conceber o infinito, e ainda assim não aceito a finitude.
Simone de Beauvoir

A frase de Simone de Beauvoir sintetiza com grande elegância a relação complexa, de assombro e de fascínio, de atracção e de repúdio que a espécie humana cedo estabeleceu com o conceito de "infinito". Como podem, afinal, seres finitos (limitados fisicamente, cognitivamente e temporalmente) ter algum entendimento de algo que os transcende? Ainda hoje, quando olhamos para um céu estrelado custa-nos aceitar a imensidão que nos é apresentada, mais ainda quando nos apercebemos de que o que vemos é apenas uma ínfima porção do que realmente existe. O passo dedutivo que se segue é ainda mais assustador – haverá fim para o que existe?

Muitos foram os ramos do saber que estudaram ou tentaram definir e contextualizar os diversos infinitos. Na antiga Grécia notabilizaram-se os contributos de Anaximandro, Demócrito ou Zenão, este último usando os famosos paradoxos (entre eles o de Aquiles e a tartaruga) para explorar os efeitos de uma hipotética divisão infinita do espaço e do tempo. Já Aristóteles separou os infinitos em potenciais (processos que podem ser estendidos indefinidamente) e actuais (uma impossibilidade no mundo físico).

Na matemática, Georg Cantor (1845-1918) revolucionou o conceito de infinito ao desenvolver a "teoria dos conjuntos" no final do século XIX, demonstrando que existem diferentes infinitos e que o conjunto dos números inteiros (infinito contável) tem cardinal menor do que o do conjunto dos números reais (infinito incontável).

Quanto à física, os infinitos mantêm-se território de contenda. Enquanto para Newton o espaço e o tempo eram infinitos e absolutos, a teoria da relatividade de Einstein propõe um universo limitado (embora sem fronteiras) e que teria tido um começo (o famigerado Big Bang), contrapondo-se à anterior visão estática e inalterável.

E na literatura? Que infinitos foram imaginados e descritos ao longo dos muitos séculos? Lucrécio (99-55 a.C.), no seu poema *De Rerum Natura*, explora o conceito de um universo infinito, inspirado por Demócrito e Epicuro, descrevendo "um cosmos sem limites, onde os átomos se movem eternamente no vazio infinito". Treze séculos mais tarde, Dante Alighieri, na sua *Divina Comédia*, sugere dois infinitos que se desenvolvem em direcções opostas, o do mal, representado pelos círculos do inferno que se aprofundam num sofrimento humano progressivo, e o da ascensão divina rumo à perfeição de Deus que representa o "infinito em acto". Já John Milton (1608-1674), no *Paraíso Perdido*, descreve o infinito como uma qualidade de Deus e do Céu, enquanto o inferno e o universo material são limitados e finitos. No século XX, Jorge Luis Borges explorou o infinito misturando filosofia e ficção. N'*A Biblioteca de Babel*, Borges imaginou uma biblioteca infinita composta por todas as possíveis combinações de letras e palavras, espelhando a vastidão do conhecimento humano. No conto *O Aleph*, o escritor apresenta um ponto no espaço que contém todos os outros pontos, um local onde se pode observar simultaneamente todo o universo, e n'*O Livro de Areia*, o infinito é representado por um livro que não tem início nem fim, com páginas que se multiplicam indefinidamente.

Termino esta brevíssima história dos infinitos citando uma passagem do livro *Uma Breve História do Tempo*, de Stephen Hawking, onde este relata o seguinte episódio: "Um conhecido homem de ciência deu uma vez uma conferência sobre astronomia. Descreveu como a Terra orbita em volta do Sol e como o Sol, por sua vez, orbita em redor do centro de um vasto conjunto de estrelas que constitui a nossa galáxia. No final da conferência, uma senhora, no fundo da sala, levantou-se e disse: 'O que o senhor disse é um disparate. O mundo não passa de um prato achatado equilibrado nas costas de uma tartaruga gigante.' O cientista sorriu com ar superior e retorquiu: 'E onde se apoia a tartaruga?' A senhora exclamou então: 'O senhor é um jovem muito inteligente, mas são tartarugas até ao fundo!'".

Luis Afonso

Publicado originalmente no jornal Público, em 01/07/2024. Imagem gentilmente cedida pelo autor.

FICHA TÉCNICA

DIRETOR (EDITOR-CHEFE):
Paulo Saraiva Universidade de Coimbra

EDITORES:
Patrícia Beites Universidade da Beira Interior
Rui Santos Politécnico de Leiria
Sandra Bento Universidade da Beira Interior

CONSELHO EDITORIAL:
Adérito Araújo Universidade de Coimbra • **Afonso Bandeira** ETH Zurich, Suíça • **António Machiavelo** Universidade do Porto • **António Pereira Rosa** E. S. Mª Amália Vaz de Carvalho, Lisboa • **Carlos Farias** E. S. Campos Melo, Covilhã • **Helder Vilarinho** Universidade da Beira Interior • **Henrique Leitão** Universidade de Lisboa • **João Filipe Queiró** Universidade de Coimbra • **Maria de Natividade** Universidade Agostinho Neto, Angola • **Rogério Martins** Universidade Nova de Lisboa • **Sílvia Barbeiro** Universidade de Coimbra • **Teresa Monteiro Fernandes** Universidade de Lisboa

ASSISTENTE EDITORIAL:
Ana Isabel Figueiredo SPM

REVISÃO:
Margarida Robalo

DESIGN:
Ana Pedro

IMPRESSÃO:
FR Absolut Graphic
Rua Professor Egas Moniz n 38 4º Dto - 2620-138 Póvoa Sto. Adrião

CONCEÇÃO DO PORTAL WEB:
Alojamento Vivo

MANUTENÇÃO DO PORTAL WEB
Ana Isabel Figueiredo SPM

PROPRIEDADE, EDIÇÃO E REDAÇÃO
Sociedade Portuguesa de Matemática
SEDE: Av. República 45, 3ºEsq. 1050-187 Lisboa
Tel.:217939785 Fax: 217952349 E-mail:spm@spm.pt
NIPC: 501065792

ESTATUTO EDITORIAL: http://gazeta.spm.pt/politica

TIRAGEM **1350 Exemplares**
ISSN **0373-2681** • ERC **123299** • DEPÓSITO LEGAL: **159725/00**

ANA MENDES
Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Politécnico de Leiria
aimendes@ipleiria.pt

JOANA TELES
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
jteles@mat.uc.pt

MARÍA GASPAR: A MADRINHA DOS MATEMÁTICOS OLÍMPICOS ESPANHÓIS

Durante a sua longa vida profissional, María Gaspar Alonso-Vega combinou o Ensino Secundário e o Ensino Superior, como professora associada do Departamento de Geometria e Topologia da Universidade Complutense de Madrid (UCM).

Tem-se destacado pelo seu compromisso e pela sua dedicação à Matemática e à promoção do talento matemático nos jovens há mais de 20 anos. É presidente da Comissão de Olimpíadas da Real Sociedad Matemática Española (RSME) e organizadora da Olimpíada Espanhola de Matemática.

Atualmente, dedica ainda as manhãs de sábado a incentivar os alunos mais brilhantes em Matemática da Comunidade de Madrid, selecionados pelo ESTALMAT, um projeto de estímulo ao talento matemático da Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, com o apoio da Faculdade de Matemática da UCM. Acompanha ainda um clube de Matemática no Instituto de Enseñanza Superior San Mateo, do Programa de Excelência da Comunidade de Madrid e é uma das criadoras do Concurso de Primavera de Matemáticas, no qual participam todos os anos mais de 50.000 estudantes de Madrid. Desde 1983, participa regularmente nas Olimpíadas Internacionais de Matemática com a equipa espanhola e desde 2019 é membro do seu Comité de Ética.

Em 2016 foi premiada com a Medalha da RSME, sendo ainda galardoada com o prémio Smartick de Melhor História de Ensino em 2019 (Smartick é um método *online* de leitura e aprendizagem de matemática para crianças).

Conversámos com a detentora de uma vida dedicada a ensinar Matemática e com um apego estrondoso à descoberta de novos talentos matemáticos. Em 2019 María Gaspar foi definida pelo jornal *El Mundo* como a "*madre de las Mates*" espanholas.

GAZETA DE MATEMÁTICA María, desde 1977 que ensinas estudantes a descobrir a sua vocação como matemáticos. Como é que a Matemática e a paixão por ensinar surgem na tua vida? Foste influenciada pelos teus pais ou pelos teus professores?

MARÍA GASPAR A verdade é que não. Apesar de ser filha de professores universitários, quer a minha mãe quer o meu pai eram químicos e quando fui para a escola eu era como a *Antoñita la fantástica*: o que mais gostava de fazer era inventar histórias mágicas, escrever, etc. Era boa em Matemática, mas era o que mais me custava estudar. Como devo ser um pouco masoquista, acabei por escolhê-la. A minha família ficou boquiaberta. "Sim? A sério? Se é isso o que tu queres …" Depois de todos estes anos, não me arrependo. Se bem que, como sabes, a relação com a Matemática tem os seus momentos. Há alturas em que é maravilhosa e outras em que te sentes perdida… parece que não te saem os resultados, que ficas ali presa. Mas é exatamente isso que mais me atrai na Matemática: o desafio, o tentar.

GAZETA María, e o que fizeste da tua vocação literária? Escreveste algum livro?

MARÍA Não, mas invento sempre *contos* para a minha família. Passam a vida a dizer-me que deveria escrevê-los. Erradamente, pensei que, apesar de dedicar toda a minha vida à Matemática, ainda teria tempo para ir a museus, ver exposições e manter-me um pouco a par da formação humanista, mas é mentira. As matemáticas absorvem-te muito. Com isto não digo que nunca visito um museu. Claro que sim.

Talvez conseguisse escrever, mas o contrário é impossível. Se deixas uma área científica por algum tempo, como é o caso da Matemática, perdes o fio à meada.

Penso que em algum momento na tua vida enquanto estudante, um pouco à margem dos teus professores, vês algo naquilo que estão a ensinar-te que te diz que tens de fazer indubitavelmente Matemática. Dizes: "Isto é maravilhoso!" No meu caso, lembro-me de que foi o triângulo de Tartaglia[1] e a sua relação com o binómio de Newton, que me fez ver que isto é incrível.

GAZETA A opção pela Matemática foi então pelo desafio. No Ensino Secundário ainda não havia essa paixão?

MARÍA Foi como acabei de referir. Tive bons professores, mas não me lembro de nenhum que fosse inspirador.

GAZETA Nem na universidade?

MARÍA Bem, na universidade… No início fiquei muito desorientada. Pensei: "Aonde vim meter-me?" Sim, tive professores que me influenciaram positivamente. Estudei na Universidade Complutense, onde posteriormente vim a dar aulas. Enquanto estudante universitária, vivi uma época dura e difícil. Foram os últimos anos do franquismo. A faculdade esteve encerrada metade do ano académico. Quando acabei o curso, pensei que se calhar deveria voltar a matricular-me, porque perdi muitos temas, muitas horas de aulas.

GAZETA Fala-nos um pouco do teu percurso posterior, entre a universidade e o Ensino Secundário.

MARÍA Eu sempre compatibilizei o trabalho de aulas na universidade com as aulas como professora do Ensino Secundário. O primeiro que fiz foram as *oposiciones*[2] de cátedra para o Ensino Secundário. Naqueles tempos, depois da cátedra da universidade, a que se seguia em importância era essa. Tal como outros companheiros de departamento (estava integrada no Departamento de Geometria e Topologia), considerava que era mais seguro obter primeiro uma boa posição de professor no Secundário, numa boa cidade, como Madrid. A partir daí, tínhamos um trabalho para o futuro. Já não teríamos de nos preocupar com o fim dos contratos, do financiamento de um projeto, etc. Fizemo-lo todos, ao fim de seis ou sete anos. A verdade é que tive muita sorte, integrei-me num grupo de pessoas fantásticas que me ajudaram muito e consegui obter muito jovem a cátedra para o Ensino Secundário.

Sempre pensei que onde podia fazer a diferença era no último ano do Ensino Secundário, onde poderia ajudar os estudantes no acesso à universidade. Já na universidade, apesar de poder dar aulas a qualquer ano, acho que fiz a diferença com os alunos dos primeiro e segundo anos. Porque sei como são, sei como os agarrar.

GAZETA Então, toda a vida permaneceste a lecionar nos dois graus de ensino. Acreditas que isso faz de ti uma pessoa mais completa? Há vantagens nisso?

MARÍA Bem… quem pode dizê-lo são os meus alunos. Posso dizer que houve alunos excelentes que reencontrei a fazer a licenciatura em Matemática e reconheço que posso ter tido alguma coisa que ver com a descoberta da sua vocação.

Recordo-me do episódio em que um deles me comenta: "Sabes que ao 'fulanito' de tal ainda não lhe vi a cara? Nem uma só vez. Enche quadros e mais quadros de coisas e não percebemos nada do que escreve." Estes estudantes ficam sem entender nem uma palavra do que estão a dizer-lhes.

São meus amigos. Talvez pudesse ter-lhes dito: "Estes alunos não têm de saber já isto." A forma de transmitir é importante. Não podes esperar chegar a uma aula de Álgebra Linear, no primeiro ano, e dizer-lhes que o espaço vetorial quociente é um grupo normal ou exigir que saibam o que é uma relação de equivalência. Ninguém lhes ensinou nada disso antes. Por que raio é que tem de o saber? Nisso, tenho vantagem por saber o que é um estudante de 16, 17 anos. Conhecer as suas inquietudes. Gosto de estar nessa iniciação e de os ajudar a aprender, sem trivializar a Matemática. Gosto de saber olhá-los de frente e contar-lhes as coisas. Muitas vezes digo-lhes: "Deixem de tirar apontamentos, isso está em todos os livros muito melhor do que eu escrevo aqui." O mais importante que o professor pode fazer é transmitir olhando para a cara dos estudantes. Não é quando escreve as suas fórmulas e os seus teoremas. A explicação do que faz é o melhor. Porque é necessária esta hipótese, porque vou por este caminho e não por aquele. Por isso, quando me dizem que ainda não lhe vi a cara… penso: "Pobrezitos destes estudantes." [Risos]

GAZETA Aqui entra novamente a María contadora de histórias…

MARÍA Claro que num curso de doutoramento não, mas quando são pequenos, tens de o fazer. Como faço com o meu neto e com os alunos do ESTALMAT. Se é necessário fazer de palhaço, faz-se. Tens de contar de verdade uma história para que fiquem agarrados. Não é um conto de

[1] Trata-se do triângulo de Pascal, o qual nalguns países é igualmente conhecido por este nome.

[2] As oposições em Espanha representam uma porta de entrada para o mundo da Função Pública. São, no essencial, o processo através do qual o Estado seleciona os seus futuros funcionários de carreira, garantindo os princípios da igualdade, do mérito e da capacidade.

Na Faculdade de Matemáticas da UCM, na ocasião da entrega do Prémio Smartick para Melhor História Docente, 2024 fadas, mas é a aventura do ser humano em busca do saber, do que foi avançando e do que falta fazer.

GAZETA Apesar de te dedicares a trabalhar com os melhores dos melhores, essas histórias têm de ser para todos, não é?

MARÍA Sim, para todos. Há uma massa que, bem formada, pode dar origem a individualidades que podem vir a inspirar um monte de gente. Por exemplo, no ténis quantos não terá o Nadal inspirado? É óbvio que não serão todos como o Nadal, mas deu, com certeza, origem a escolas de ténis onde todos desfrutarão. Assim, na Matemática, existe o Concurso de Primavera de Matemáticas que é para todos!

GAZETA Como surgem na tua vida as Olimpíadas de Matemática? Foste aluna olímpica?

MARÍA Não, nem sabia que existiam. E olha que Espanha tem Olimpíadas de Matemática desde 1964. Tomei conhecimento delas já na universidade, em 1983, o primeiro ano em que Espanha participou nas Olimpíadas Internacionais. Foi um professor meu, que teve muita influência na minha formação, Miguel de Guzmán, que conseguiu que Espanha fosse convidada a participar nestas Olimpíadas, que nesse ano se realizavam em França. Como chefe da delegação espanhola, foi um colega meu de departamento, Ceferino Ruiz. Como no ano seguinte não conseguia ir, convenceu-me a substituí-lo. Fui como tutora da delegação espanhola. Teria cerca de 31 anos quando fui a Praga. Deixei a minha filha mais velha, Ana, então com 3 anos, em Espanha. Uma tutora acompanha os jovens, apoia o chefe e ajuda na correção das provas.

Aquilo impactou-me. Percebi que não se tratava de um grupo de "bichos raros". Percebi que se vivia um ótimo ambiente. Rapidamente te apaixonas. Depois existem as Olimpíadas Ibero-Americanas, de que ainda gosto mais, pois são mais familiares.

Por sua vez, a Olimpíada Internacional é como as grandes cidades, em que há bairros que são como pequenos povoados. E ganhas mais ou menos afinidade com uma povoação ou outra.

Já as Olimpíadas Ibero-Americanas têm uma grande importância na formação de professores. Na América Latina quase não havia professores de Matemática e agora já existem. As Ibero-Americanas tiveram muito mais impacto lá do que em Espanha ou em Portugal.

GAZETA Por curiosidade, quando começaram as Olimpíadas de Matemática?

MARÍA A Olimpíada Internacional foi na Roménia, em 1959. No entanto, nos países de leste já havia alguns projetos nacionais anteriores. Por exemplo, os húngaros têm desde o século XIX o *Eötvös Mathematical Competition*. Tinham muita tradição e depois continuaram com ela. Sempre a mantiveram porque, de facto, não é necessária uma grande estrutura económica para a manter: lápis, mesa e cabeça. Contudo, em Química ou Física, tornam-se mais dispendiosas.

GAZETA Voltando um pouco atrás… Em 1983, a primeira vez que Espanha foi a uma Olimpíada Internacional, já preparavam os estudantes como agora?

MARÍA Muito pouco. Tínhamos as olimpíadas nacionais que já existiam desde 1964. Eles participavam nelas, fazendo as suas provas locais. Vinham um dia a Madrid. E escolhiam-se os seis melhores classificados para representar Espanha. Isto continua sendo assim, o que para mim é um desastre. Estávamos dois dias com eles e lá seguiam para as provas.

GAZETA Como professora e colaboradora das Olimpíadas espanholas, como motivas os teus estudantes a participar? E como intuis que um estudante poderá vir a ser brilhante?

MARÍA Tens de começar por agarrá-los quando são mais jovens. O que recordo dos primeiros anos em que trabalhei nas nacionais é que quando enviávamos as cartas-convite para as provas às escolas, alguns professores ainda liam alguns dos problemas, mas outros nem isso.

A participação era mínima e foi nessa altura que vimos que era necessário fazer alguma coisa. Além de ter coincidido com algumas mudanças no sistema educativo em que passaram de cinco horas de Matemática para três horas semanais. E assim, nasceu o Concurso de Primavera de Matemáticas. Também na comunidade olímpica espanhola - porque há uma comunidade olímpica, não só em cada país, mas também internacional, na qual fazes amigos com os quais partilhas problemas -, surgiu a Olimpíada de Maio (Olimpíada Ibero-Americana destinada a alunos até aos 15 anos), porque se percebeu que era necessário semear em níveis mais baixos. Com problemas mais simples, que possam atrair mais gente. Foi quando se

María com os seus "poluellos" e a presidente da RSME, em 2024

começou a distribuir problemas com soluções, para que os professores não se sentissem despidos. Penso que foi aí que as coisas começaram a mudar. São cada vez menos os que me escrevem a dizer que querem participar, mas não conseguem fazê-lo na sua escola. A situação mudou.

O que não mudou foi que a equipa espanhola internacional é constituída pelos seis vencedores das Olimpíadas nacionais e isso não é bom. Isso mudou em Portugal, mas não em Espanha.

GAZETA A equipa espanhola alguma vez ganhou um ouro numa Olimpíada Internacional?

MARÍA Nunca. Uma prata, sim. No entanto, Portugal já ganhou.

GAZETA Mas agora já fazem preparação, certo? A preparação é essencial?

MARÍA Eu acredito que sim. Tens de saber o que vais encontrar. Por sermos um país tão grande, é difícil reuni-los e temos poucos meios económicos para isso, mas algo fazemos.

Sobretudo, porque começamos antes a preparação. Vão 77 à última fase das Olimpíadas nacionais e esses já sabem ao que vão. Antes nem sabiam o que os esperava. No ano passado, tínhamos uma equipa fantástica, mas por razões que não se entendem não tivemos nenhum ouro nas internacionais. Depende de muitos fatores. Já nas Ibero-Americanas, eles obtiveram três medalhas de ouro. Estiveram estupendamente bem. Claro que, pela população que tem Espanha, deveríamos ter já algum ouro.

GAZETA Sabemos que nessas preparações se aprendem algumas técnicas de demonstração, algumas próprias do nível universitário. Isso não altera a genialidade individual?

MARÍA É possível que sim. Por isso, há bons problemas, problemas fantásticos e problemas não tão bons. Há problemas que, para aqueles que foram bem treinados, se transformam em trivialidades e há outros que, para

Alunos do ESTALMAT nas OME

aqueles pouco treinados, são impossíveis. Este ano houve um problema, o problema 5, de nível médio-difícil, que foi feito perfeitamente por participantes de todos os países, mas quem perdeu pontos foram os chineses e os coreanos, porque saía do padrão.

E muito tem a ver com a preparação e com os programas que ensinamos aos nossos alunos no Ensino Secundário. A geometria que aprendem, por exemplo, está toda algebrizada. Não podem saber o que não lhes foi ensinado. No percurso que os estudantes fazem das nacionais às internacionais, acabam por aprender muita coisa.

GAZETA Disseste numa entrevista que metade da tua vida foi dedicada às Olimpíadas de Matemática. Consideras que é preciso uma vocação para o fazer ou qualquer um pode fazê-lo?

MARÍA Tens de acreditar que é importante. Eu acredito verdadeiramente que o que faço é importante. Tens de permitir que estes jovens descubram que a Matemática é mais do que resolver 20 equações todas iguais. Através das Olimpíadas, percebem que têm um dom especial para a Matemática, que de outra forma não descobririam.

Quem sabe se alguns destes jovens podem resolver os problemas do Milénio que ainda falta resolver!

Trabalhar com as Olimpíadas não é só criar problemas e ter ideias. Isso é algo que agrada a todos os matemáticos. Envolve muitas tarefas ingratas e burocráticas, de muita gestão no contacto com as direções das escolas, as famílias e a organização das viagens.

A propósito, fizemos um trabalho lindíssimo Portugal e Espanha, uma Ibero-Americana conjunta. Também muito original a forma como a fizemos. Teria sido impossível concretizá-la sem as relações de amizade.

GAZETA O trabalho que se faz é duríssimo e pouco reconhecido. Verdade?

Equipas portuguesa e espanhola na 50.ª OIM (Bremen, Alemanha, 2009)

MARÍA Sim, é. Não é remunerado. É totalmente voluntário. Por exemplo, na semana que vem, irei para a Bolívia. Confesso que não me apetecia ir nem um pouco, mas não havia mais ninguém. A parte bonita disto é a de rever as pessoas da comunidade olímpica, de estar ali, de viver a competição. Quando o propões a outros, incluindo antigos olímpicos, todos se defendem com outros compromissos.

GAZETA Como vê a tua família as ausências? Esta dedicação…

MARÍA Sabem que são as maluqueiras da mãe e da avó. O meu marido costuma dizer: "Lá está a avó a consertar o mundo." Já sabem que eu vou e contam com isso. As vezes em que parei foi quando tinha uma filha lactante. Apesar das ausências familiares, sei que a recompensa é ver a cara dos miúdos que acompanhamos e sentir que as Olimpíadas fazem a diferença. Como se diz em Espanha, *algo tiene el agua cuando la bendicen*[3]… Antes só existia a Olimpíada de Matemática. Agora existem olimpíadas de tudo: de ortografia, de literatura, de economia, de ambiente, de informática… até de ponto cruz!

GAZETA Quanto te leva a preparação de um grupo de alunos olímpicos durante um ano? Qual é o teu volume de trabalho?

MARÍA Falando em anos académicos, de setembro a setembro. Eu começo a trabalhar para o ano seguinte logo que termina a Ibero-Americana, que usualmente acontece em setembro. Durante o ano, há meses em que praticamente trabalho todas as semanas a *full time* para as Olimpíadas. Há sempre algum concurso, é necessário fixar calendários, escolher datas, falar com pessoas, conseguir espaços, etc.

Aqui em Espanha há uma "fase zero" em que partici-

[3] Expressão espanhola que serve, entre outras situações, para justificar elogios.

pam cerca de 500 estudantes só em Madrid. Normalmente, é de escolha múltipla, porque senão seria impossível corrigir. Depois outro filtro é a fase local, normalmente em janeiro. É preciso definir os problemas e arranjar localmente as equipas de professores e corretores. Por fim, temos a nacional e, antes desta, acontecem as Olimpíadas femininas, normalmente em fevereiro. Mesmo hoje estavam a pedir-me datas e não sei se este ano teremos condições para as realizar. Significa que temos de lhes arranjar onde dormir e onde comer. Depois da Páscoa, normalmente em abril, começas a pensar que em maio temos a Olimpíada de Maio para os mais pequenotes. Ou seja, todo o ano. O meu marido costuma brincar comigo: "E agora o que tens? As olimpíadas das quartas-feiras, das sextas-feiras?" [Risos] Há sempre coisas. E não está mal, desde que apareça mais gente para o fazer. Antes, os que nos dedicávamos a estas coisas éramos considerados meio maluquinhos. Antigamente só existiam campos de verão para estudantes com mais dificuldade em Matemática, mas agora há uma inversão. São as empresas privadas que apostam na realização destas e doutras atividades para alunos que mais se destacam.

GAZETA Alguma vez trabalhaste na criação de problemas? Como se cria um problema olímpico?

MARÍA Sim, claro! Peço sempre aos meus colegas matemáticos que se dedicam sobretudo à investigação que, se se depararem com uma ideia que possa ser aproveitada para estes fins, ma enviem.

Tenho também alguns amigos que são bons buscadores de problemas. Agora, criar um problema vai sempre depender do nível para o qual estamos a falar. Não tens sempre de inventar a pólvora. Por exemplo, para o Concurso de Primavera, para estudantes mais jovens, podes sempre reajustar problemas antigos. De outro modo, seria impossível. Podes pegar num problema cuja solução conheces e recriar o seu enquadramento. Claro que se estamos a falar dos que enviamos à Olimpíada Internacional ou à Ibero-Americana, não podemos fazer isso. A eles já não lhes "dás a volta". Tens de ter problemas completamente originais. E esses são criados pelos nossos colegas a quem chamamos *problemistas.*

GAZETA Alguma vez leste um problema das Olimpíadas que não tenhas conseguido resolver?

MARÍA Muitíssimas vezes…[Risos] Os problemas que os olímpicos têm de resolver só consegues fazê-los quando tens 16 ou 17 anos, ou, quando consegues, demoras mais tempo. Temos já o cérebro cheio de vícios e de informação. Mas alguns ex-olímpicos continuam a ser umas "feras".

GAZETA O que acontece depois a estas "feras"? Estudam Matemática na universidade?

MARÍA Em Espanha, agora sim, a maioria dos jovens olímpicos opta por seguir a profissão de matemático. E, se observarmos, a nível internacional quase todos os medalhistas Fields são estudantes olímpicos. O Artur Ávila é um exemplo e é ibero-americano.

GAZETA Voltando aos problemas, o que é valorizado na correção dos mesmos? A originalidade?

MARÍA Atualmente, não. Se está bem, está bem, mesmo que a resposta seja pouco elegante. Cada problema é cotado de 0 a 7. E é indiferente se um teve uma ideia genial e o fez de forma elegante, enquanto outro deu voltas e voltas até obter a solução. Se os dois têm 7, têm o mesmo prémio. O que pode acontecer é, num desses problemas superdifíceis, encontrares alguma resolução notável, e então esse jovem pode receber uma menção especial. Por curiosidade, com as melhores cabeças de todo o mundo a pontuação máxima atingida é de 42 pontos. Este ano só houve um aluno com essa pontuação. Um menino chinês. E neste grupo estão vários génios. Apesar de os jovens da equipa espanhola não terem obtido grande pontuação, eles têm um dom para a Matemática. Têm intuição, como o Mozart tinha para a música... É preciso ajudá-los a desenvolver esse dom. Senão, perdemos todos. Eles e a sociedade.

GAZETA Isso é um problema, certo? Como se chega a todos os estudantes que têm esse dom? Como convencer todas as escolas a participar? E, dentro das escolas, como convencer os miúdos a participar?

MARÍA Sim, absolutamente. Mas alguma coisa está a mudar nas escolas. Por exemplo, no Concurso de Primavera, que já é realizado por tantos estudantes em Madrid, quando chegam os estudantes premiados às respetivas escolas, os professores contam-nos que os colegas já não lhes apontam o dedo, acusando-os de graxistas, marrões, etc… mas sim que começam a sentir-se orgulhosos dos seus companheiros de escola. Que os aplaudem. Obviamente que não é como ao Cristiano Ronaldo, mas aplaudem. [Risos]

Problema 5. O caracol Turbo joga num tabuleiro retangular com 2024 linhas e 2023 colunas. Em 2022 casas (quadrados unitários) desse tabuleiro existem monstros escondidos. Inicialmente, Turbo não conhece a posição de qualquer um dos monstros, mas ele sabe que existe exatamente um monstro em cada linha, com exceção da primeira e da última linha, e que cada coluna tem no máximo um monstro.

Turbo faz uma série de tentativas para ir da primeira linha à última linha. Em cada tentativa, ele escolhe começar em qualquer casa na primeira linha, e repetidamente se move para uma casa adjacente, ou seja, com um lado em comum (ele pode voltar a uma casa visitada anteriormente). Se ele chega a uma casa em que há um monstro, essa tentativa acaba e ele é transportado de volta para a primeira linha para começar uma nova tentativa. Os monstros não se movem e Turbo lembra se em cada casa que ele visitou há, ou não há, um monstro. Se ele chega a uma casa na última linha, a tentativa acaba e o jogo termina.

Determine o menor valor de n para o qual Turbo tem uma estratégia que garante que ele chegará na última linha na n-ésima tentativa, ou antes, sem importar as posições dos monstros.

Enunciado do problema 5 da OIM (Bath, Reino Unido, 2024)

GAZETA Falámos um pouco disto superficialmente, mas não de uma forma consistente. A preparação destes jovens faz-se como em Portugal?

MARÍA Não como em Portugal, porque há uma desigualdade entre regiões autónomas. Acresce ainda a questão das deslocações no país. Há casos em que têm de se deslocar muitos quilómetros para vir a Madrid e isso afeta. O que está a mudar é que nalgumas comunidades começa a haver sessões de preparação, como é o caso de Madrid ou da Catalunha. Em Madrid, as sessões de preparação não coincidem com as do ESTALMAT e são livres. Os jovens que quiserem podem vir. O problema é que noutras comunidades não há mesmo nada! Por isso, na RSME começámos no ano passado um conjunto de sessões *online* preparando-os para as coisas que não sabem. Vamos fazendo isto pouco a pouco. Mais uma vez, digo que são necessárias pessoas. Em Espanha somos uns 12 na comissão das Olimpíadas e depois em cada universidade há um responsável pela organização das Olimpíadas locais. Na preparação, em Madrid, estão ainda envolvidos três ou quatro ex-alunos olímpicos que vão assumindo, vez a vez, a preparação para as Ibero-Americanas ou as Internacionais.

GAZETA Explica-nos um pouco melhor as sessões *online*… São mesmo para todos?

MARÍA Sim, são. Abrimos todos os anos uma fase de inscrições. Isto permite a participação de miúdos de zonas mais rurais ou distanciadas. Mas temos de ter particular cuidado porque há menores envolvidos e não queremos correr o risco de haver algum "lobo" a participar. As questões *online* são sempre muito delicadas. E, como é óbvio, embora estas sessões sejam uma vantagem, os miúdos preferem ainda assim ver-se e participar presencialmente.
Outra coisa que está a melhorar é o facto de a Comunidade da Andaluzia estar a ajudar nas preparações através de umas olimpíadas próprias que funcionam antes da nacional. Cada vez há mais andaluzes a ter bons resultados.

GAZETA Então pode dizer-se que esta olimpíada específica melhorou a participação dos alunos andaluzes. O que me leva à pergunta que alguns consideram controversa. Há necessidade de uma olimpíada específica para jovens mulheres? Aumenta a participação delas?

MARÍA Em Espanha, sim. Está a notar-se devagar, mas está. Elas começam a participar mais. Além disso, os rapazes não estão nem com inveja, nem as menosprezam pelo facto de terem uma Olimpíada só para elas. Para que as pessoas tenham noção, na fase da Olimpíada nacional, este ano em que foram 75 alunos, apenas participaram seis ou sete meninas. Eu não quero só que elas participem, mas sim que cheguem mais alto. Se não as incentivamos desde baixo, nunca chegarão lá acima. Nas Olimpíadas matemáticas femininas europeias, Espanha não participou desde o início. Só ao fim de quatro anos. Houve um momento em que pensámos: "Quem somos nós para privar estas miúdas de participar nisto?" Devo dizer que elas participam e vêm encantadas. Muitas dizem-me: "Já não tenho de dissimular e de me sentir desadequada. Percebi que há mais gente como eu."

Aproveito também para dizer que o nosso governo progressista não nos apoia em nada nestas olimpíadas. No ano passado houve uma polémica sobre isto que nem vos conto.

GAZETA Porque achas que elas não se sentem tão cativadas pelas Olimpíadas?

MARÍA Eu acho que é por duas coisas. A primeira é porque têm muito mais medo de um fracasso público do que os rapazes. Porque têm consciência de que não só vão julgá-las, a elas, mas também de que o desempenho individual passa a ser o desempenho de todas as mulheres. Como noutros tempos, quando as mulheres começaram a conduzir, ouviam-se comentários do género: "São mulheres…", "Só podia ser mulher…", "Nem sabem conduzir..." E conduzíamos fenomenalmente!

Quando enfrentas uma olimpíada, podes sair-te bem ou mal. Essa espécie de medo do fracasso influencia. A segunda razão, é que têm um sentido muito mais pragmático. Têm uma grande quantidade de testes e exames para fazer enquanto estudantes e preferem priorizar essas atividades.

Um rapaz se tem um problema de Matemática na cabeça fica com ele na cabeça. E uma rapariga é muito mais prática, se tenho um exame de História vou estudar para isso, para obter aprovação e depois logo penso no problema. Depois, quer queiras quer não, por tradição, há muitos mais rapazes a participar nas olimpíadas. Imagina que és uma jovem de 16 anos e chegas a um coletivo em que todos são rapazes, não te vais sentir confortável. Vais sentir-te deslocada. Que ocorreria se fosse ao contrário? Igual, claro. No fundo é uma mistura destes fatores. Não é que seja uma olimpíada de segunda ou nada do género.

GAZETA María, voltemos a focar-nos em ti. És reconhecida como a "*madre de las Mates*" espanhola. Além deste reconhecimento, qual consideras ter sido o teu contributo mais importante para a Matemática espanhola?

MARÍA [Risos] Isso foi uma jornalista que se lembrou de dizer. Não sou eu!! Não é um prémio de reconhecimento. O meu contributo para a Matemática espanhola é o meu trabalho para as Olimpíadas. Mas isso não é uma coisa que se faça sozinha. O que eu tive foi a sorte do reconhecimento! Há muitos outros a quem não se reconhece por terem ajudado estes miúdos que irão puxar pela Matemática espanhola. Eu chamo-lhes os meus "*polluelos*" (pintainhos). Eles, quando se conhecem, perguntam coisas deste tipo: "Tu também és um *polluelo* de María?"

Não há nenhum teorema de María. [Risos] Este é o meu contributo. A jornalista do *El Mundo* é que disse isso. Depois disso, meio na brincadeira, os meus companheiros começaram a dizer: "Vem aí a Mãe…"

GAZETA Com a "Era" da IA, como vês a preparação dos alunos olímpicos? Como achas que pode conviver a informação arquivada em bruto com a genialidade de uma boa demonstração que resulta do trabalho e das técnicas?

MARÍA É verdadeiramente difícil responder a esta pergunta. Para o fazer, penso no que aconteceu com o xadrez. Apesar de o computador conseguir jogar, continua a haver quem se sinta estimulado a jogar e continua a haver campeonatos. Os típicos problemas-padrão de que há pouco falávamos, que os chineses, os estado-unidenses e outros enfrentam muito bem, deixam de ser problemas e passam a meros exercícios. Esses a IA deve fazê-los num piscar de olhos. No entanto, acredito que a frescura da inteligência humana possa ser superior à IA a outros níveis. Tudo isto é uma incógnita.

Ao que parece, em problemas de geometria, a IA dá-se muito bem. Acho que propuseram os desafios da olimpíada deste ano ao ChatGPT e ele também não conseguiu fazer integralmente o tal problema 5. Mas, ao que parece, o ChatGPT conseguiria uma medalha de prata[4].

Mesmo que assim seja, devemos continuar a fomentar a criatividade dos miúdos sem fechar todas essas janelas. À semelhança do que fizemos com a aceitação das calculadoras. Não obstante, sabemos que o cálculo mental lhes garante uma certa intuição. Nada de dizer que não merece a pena investir nisto. Claro que tenho um pouco de medo do futuro. Quem sabe como vai evoluir o mundo? Não foi neste verão que houve uma quebra global, onde caíram empresas como a Microsoft? No entanto, deixem-me dizer-vos que já apresentei alguns problemas ao ChatGPT e na maioria das vezes obtive soluções disparatadas. [Risos]

GAZETA Sabemos que foste responsável pela organização da Olimpíada Internacional que decorreu em Madrid, em 2008. O que recordas desta organização? De que forma este evento foi importante para o país?

MARÍA Para mim, foi um sonho. De alguma forma, a grande maioria da RSME envolveu-se nesta organização. Gente muito importante, de muito prestígio, esteve envolvida de forma empenhada, e no que respeita à organização éramos todos iguais. Tivemos também a sorte de que nessa altura o Ministério da Educação tenha dado conta da importância do evento e nos tenha concedido um apoio financeiro fabuloso. E ao realizarmos a Olimpíada Internacional em Madrid, a Comunidade Autónoma de Madrid e o Ayuntamiento (Câmara Municipal) de Madrid também apoiaram muito. Foi um movimento único, em que até a Casa Real se envolveu. Os atuais reis (na época, ainda príncipes) estiveram no encerramento do evento com os jovens olímpicos. Para todos os que participaram, foi uma aventura que enriqueceu muito.

Uma das penas que tenho é não ter conseguido chegar a 100 países participantes. Ficámo-nos pelos 98. Lembro-me que o Paquistão e a Nigéria não conseguiram o visto. Chegaram os chefes, mas não os jovens. E o Panamá, país irmão, perguntou-nos se lhes poderíamos pagar os bilhetes. Não o fizemos, não porque não tivéssemos dinheiro, mas porque ao fazê-lo teríamos de tê-lo tornado público previamente a todos os que necessitassem.

Convidámos alguns países observadores, que no ano seguinte já foram à Olimpíada Internacional que ocorreu na Alemanha e eles conseguiram chegar aos 100.

Para além de chegar aos 100, tínhamos como objetivos que não faltasse nenhum país europeu, reincorporar o Magrebe e conseguir ter toda a Ibero-América. Foi uma aventura!

GAZETA Na entrevista ao *El Mundo* comparas a Matemática com a música. Podes concretizar? Será pela ordem, pela harmonia ou pela beleza?

MARÍA Desde logo pela beleza e, também, porque, por exemplo, na Física, para fazeres algo importante, precisas de um percurso prévio. Na Matemática, como na música, existem os Mozart. Há crianças que superam os seus mestres desde muito pequenos, tal como na música. Se pretenderes entusiasmar com a música, não podes começar a estimular com a nona sinfonia. Tens de escolher algo mais simples que lhes agrade mais. Tens de começar pelas partes da Matemática elementar que são bonitas. E, sobretudo, pela beleza de saber escutar a melodia das matemáticas.

GAZETA O que falha no ensino mundial para que a Matemática continue a ser entendida como o terror dos terrores?

MARÍA Se calhar, não estamos a ensinar bem, se calhar, estamos a falhar na formação de professores. Principalmente, os que lecionam aos miúdos pequenos. Provavelmente, esses não têm de saber muitíssima Matemática, mas a que souberem tem de lhes agradar e têm de a entender. Se subimos as idades, por exemplo, para os 13 anos, qualquer um pode estudar autonomamente sobre História ou Biologia, enquanto na Matemática um professor tem uma grande importância na aprendizagem. Também posso dizer que o professor de Matemática tem uma vantagem. À maioria dos pais não lhes interessa a nota dos filhos em Ginástica ou em Expressão Plástica, mas interessa-lhes saber se sabem Matemática. Ninguém discute a sua importância.

GAZETA María, que gostarias de ver acontecer na Matemática espanhola?

MARÍA Era ter um ouro na Olimpíada Internacional. [Risos] Um dos meus *polluelos*, Ricardo Pérez-Marco, se não fosse espanhol, talvez francês, provavelmente já teria uma Medalha Fields. Foi a primeira prata espanhola numa Olimpíada Internacional. Há um prémio com o seu nome que tem como objetivo premiar os integrantes da seleção olímpica espanhola que obtiverem a medalha de ouro nas Olimpíadas Internacionais de Matemática. Cada medalha de ouro receberá o equivalente a dez mil euros em *bitcoins*, utilizando o preço do *bitcoin* no dia do anúncio dos prémios. Enfim, nós temos de criar os meios e eles têm de pôr a sua parte e ter um pouquinho de sorte. A sorte é muito importante: o tema que calha, como se sentem… E se não têm sorte, lá estaremos para os ajudar a apanhar os cacos e os animar, para que não desistam e para que desfrutem do que fazem. É por isso que me chamam a "*madre de las Mates*". [Risos]

SOBRE AS AUTORAS

Ana Mendes é professora do Politécnico de Leiria, Escola Superior de Tecnologia e Gestão. Doutora em Matemática Pura, investiga atualmente em problemas de classificação sendo investigadora convidada do LABI- Laboratório de aplicações bioinformática da UNIOESTE.

Joana Teles é professora auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Atualmente, os seus interesses de investigação centram-se no ensino da geometria. Na direção da SPM é a responsável pelas Olimpíadas. Acompanha regularmente as equipas portuguesas às competições internacionais.

[4] *https://www.newscientist.com/article/2441450-deepmind-ai-gets-silver-medal-at-international-mathematical-olympiad*

PORTUGAL CONQUISTOU UMA MEDALHA DE PRATA E DUAS MEDALHAS DE BRONZE NAS OLIMPÍADAS IBERO-AMERICANAS DE MATEMÁTICA

Tarija, na Bolívia, recebeu a 39.ª edição das Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática (OIAM). Conhecida como a capital do vinho e do sorriso, a cidade recebeu 79 alunos de 21 países, entre 18 e 25 de setembro. Portugal saiu da competição com uma medalha de prata, duas de bronze e uma menção honrosa.

Tomás Faria, aluno do Colégio Moderno, conquistou a medalha de prata, e Miguel Francisco, da Escola Secundária Infanta D. Maria, e Miguel Domingos, da Escola Secundária Rainha D. Leonor, arrecadaram as duas medalhas de bronze. Já Henri Campagnolo, do Lycée Français Charles Lepierre, conseguiu uma menção honrosa por ter uma questão completamente certa.

Além dos alunos, faziam parte da equipa Joana Teles, capitã de equipa, professora do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, e Nuno Arala, tutor da equipa e ex-olímpico.

Portugal participou pela primeira vez nas Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática em 1994 e, desde então, conquistou oito medalhas de ouro, 28 medalhas de prata e 46 medalhas de bronze.

CENTENÁRIO DO NASCIMENTO DO PROFESSOR BENTO MURTEIRA

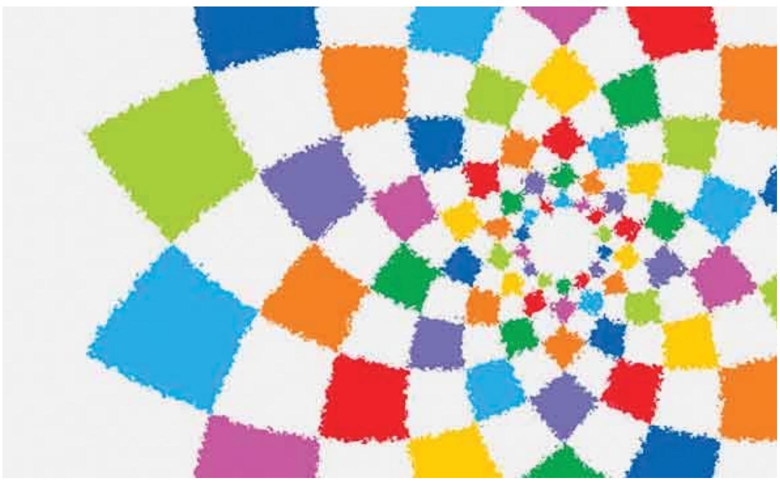
No dia 15 de novembro teve lugar uma sessão de homenagem ao professor Bento Murteira, na data em que se comemorou o centenário do seu nascimento. O evento decorreu no Salão Nobre do ISEG e foi organizado pela Sociedade Portuguesa de Estatística e pelo Instituto Superior de Economia e Gestão, juntamente com o Centro de Matemática Aplicada à Previsão e Decisão Económica e o Centro de Estatística e Aplicações. Bento Murteira deixou um legado ímpar na História da Matemática Aplicada e da Estatística em Portugal.

Durante o evento foi lançada uma nova edição do livro *Estatística: Inferência e Decisão*, anteriormente editado pela Imprensa Nacional-Casa da Moeda e atualmente esgotado. Em breve, será também disponibilizada uma edição digital do livro.

DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA 2025: MATEMÁTICA, ARTE E CRIATIVIDADE

Todos os anos o Dia Internacional da Matemática (IDM) tem um tema diferente, assim é possível despertar a criatividade e trazer luz às ligações entre a matemática e todos os tipos de campos, conceitos e ideias. O tema do IDM 2025 será Matemática, Arte e Criatividade. A criatividade une a matemática e a arte, campos que podem parecer separados, mas estavam originalmente interligados, ambos procurando revelar a beleza do Universo.

Todos os países do mundo estão convidados a participar. Saiba mais em: *https://www.idm314.org.*



JORGE BUESCU É O VENCEDOR DO GRANDE PRÉMIO CIÊNCIA VIVA 2024

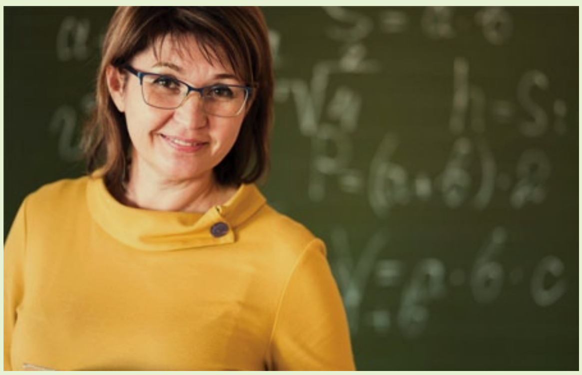
Jorge Buescu, doutorado em Matemática e antigo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, é o vencedor do Grande Prémio Ciência Viva 2024. Este prémio distingue personalidades e entidades com intervenções de mérito na divulgação científica e tecnológica. Os Prémios Ciência Viva são atribuídos anualmente desde 2012. Jorge Buescu destaca-se por ter um vasto currículo de centenas de artigos científicos publicados em revistas nacionais e internacionais e publicações sobre a importância da matemática no ensino e na sociedade, a par de vários livros de divulgação científica de grande êxito editorial. Tem ainda um enorme prazer em mostrar o lado lúdico da matemática.

Licenciou-se em Física na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, é mestre em Matemática pelo Instituto Superior Técnico (IST) e obteve o doutoramento, também em Matemática, pela Universidade de Warwick (Reino Unido). Foi professor no IST durante mais de duas décadas, e é Professor Associado com Agregação na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Em 2001, recebeu o Prémio Rómulo de Carvalho de Investigação e Divulgação. Foi presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, entre 2016 e 2018, Diretor da *Gazeta de Matemática* do n.º 154 ao n.º 162 (de 2008 a 2010), e é o primeiro português a desempenhar o cargo de vice-presidente da European Mathematical Society, organização com a qual colabora desde 2008.

A cerimónia de entrega dos Prémios Ciência Viva 2024 decorreu no Dia Nacional da Cultura Científica, 24 de novembro, no Pavilhão do Conhecimento – Centro Ciência Viva, em Lisboa.

CANDIDATURAS ABERTAS PARA INICIATIVAS DE APOIO ÀS MULHERES NA MATEMÁTICA

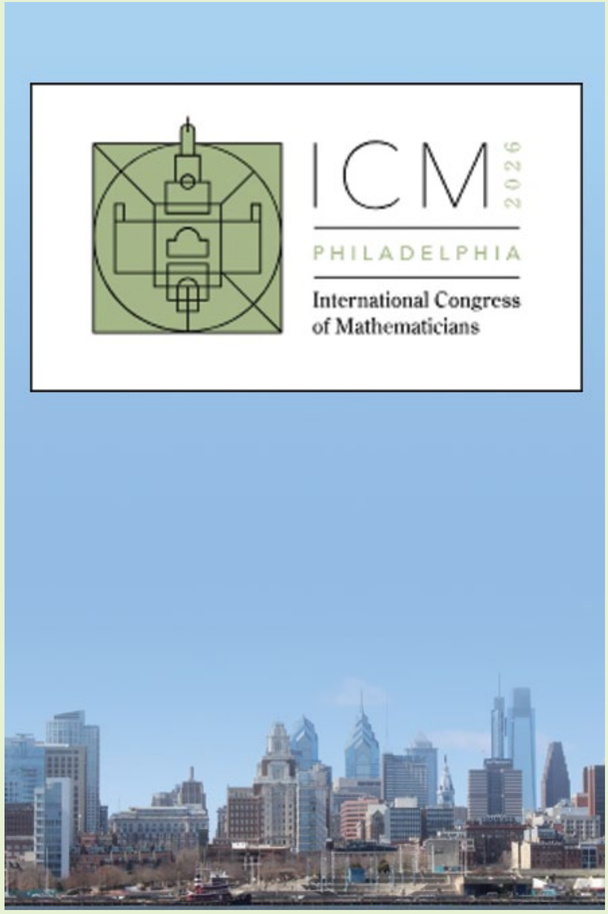
O Comité para as Mulheres na Matemática da International Mathematical Union (IMU) convida à submissão de propostas de financiamento até €3000 para atividades ou iniciativas de apoio às mulheres na matemática. As candidaturas deverão ser feitas através da página da IMU Grants (*https://grants.mathunion.org*) até ao dia 13 de dezembro de 2024. Os projetos terão a duração de um ano e deverão ter início em março de 2025. Cada candidato apenas pode submeter uma candidatura.



CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS 2026 EM FILADÉLFIA

O próximo Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) decorrerá de 23 a 30 de julho de 2026, em Filadélfia, nos Estados Unidos da América, e a 20.ª Assembleia Geral da International Mathematical Union acontecerá alguns dias antes em Nova Iorque, nos dias 20 e 21 de julho de 2026. O *site* oficial do Congresso é *www.icm2026.org* e o programa do evento será disponibilizado na primavera de 2025. A presidente do Comité do Programa do ICM 2026 é Claire Voisin, investigadora do CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche.

Neste momento está aberta a submissão de propostas para Conferências Satélite e outros possíveis eventos a associar e complementar ao Congresso Internacional de Matemáticos de 2026. Serão aceites eventos organizados em universidades, institutos de investigação e organizações científicas nos Estados Unidos, no Canadá e no México. Os eventos deverão decorrer entre maio e setembro de 2026 e envolver uma perspetiva internacional sobre algum aspeto das ciências matemáticas, com temas de conferências relacionados com as áreas científicas abrangidas pelo ICM. As propostas deverão ser submetidas até 31 de dezembro.



COLÓQUIO DE MATEMÁTICA RECREATIVA 8 TERÁ LUGAR EM LISBOA

O Recreational Mathematics Colloquium 8 | Gathering for Gardner Europe terá lugar em Lisboa de 27 a 29 de janeiro de 2025. Haverá uma exibição de matemática recreativa no dia 26 de janeiro, domingo, para o público em geral, que inclui um espetáculo e uma sessão intitulada Os Nossos Problemas Favoritos. O encontro terá lugar no Pavilhão do Conhecimento e conta com o apoio da Ciência Viva. As propostas de apresentação deverão ser submetidas até 6 de dezembro de 2024. Todas as dúvidas poderão ser esclarecidas através do *e-mail* ludus@ludicum.org.

ALMOÇO DE ANIVERSÁRIO DA SPM

A Sociedade Portuguesa de Matemática celebra 84 anos no dia 10 de dezembro e convida todos os sócios e amigos a participarem no almoço comemorativo que está a organizar para assinalar a data. A celebração terá lugar no dia 14 de dezembro, sábado, em Lisboa, em local a designar. Contamos com a sua presença!

EXPOSIÇÃO *TIPOGRAFIA MATEMÁTICA NA IMPRENSA DA UNIVERSIDADE 1772-1934*

Os Estatutos Pombalinos da Universidade de Coimbra (UC), aprovados em agosto de 1772, criaram a Faculdade de Matemática, a primeira no mundo dedicada a esta disciplina. Os primeiros professores da nova Faculdade foram nomeados poucos dias depois, a 11 de setembro. O alvará de 16 de dezembro de 1773 concedeu à Imprensa da Universidade o exclusivo da impressão dos livros clássicos dos estudos matemáticos. Entre os primeiros livros publicados pela Imprensa da Universidade encontra-se a obra de Étienne Bézout (1730-1783), *Elementos de Aritmética*, numa tradução do original francês.

No passado dia 18 de outubro, foi inaugurada a exposição *Tipografia Matemática na Imprensa da Universidade 1772-1934*, que apresenta diversos episódios marcantes desta caminhada conjunta, no período compreendido entre a Reforma Pombalina de 1772 e a extinção da Imprensa da Universidade em 1934, pelo Estado Novo.

Esta mostra, patente ao público no piso 0 do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (DMUC), surge na sequência da exposição *Tipografia Matemática Portuguesa 1496-1987*, patente ao público em 2021 em Leiria, e constitui uma homenagem a Isabel Narra de Figueiredo, então presidente do Centro Internacional de Matemática e coordenadora da Biblioteca Matemática. A organização da exposição esteve a cargo de António Leal Duarte, Carlos Tenreiro, Carlota Simões e Fernando Figueiredo, professores do DMUC. A exposição poderá ser visitada até 28 de fevereiro de 2025.

LOJA SPM COM DESCONTOS ATÉ AO NATAL

A Loja SPM tem disponíveis promoções e descontos em livros até ao Natal. Ciência a Brincar – Descobre as Simetrias e António Aniceto Monteiro – Uma Fotobiografia a Várias Vozes são apenas alguns exemplos dos livros que estarão com preço reduzido.

Visite a loja em *www.spm.pt* e ofereça matemática. Todas as semanas novos livros estarão disponíveis.

Luís Roçadas
Direção SPM
rocadas@utad.pt

NOTA SOBRE O 9.º ENCONTRO IBÉRICO DE MATEMÁTICA

Três dias de partilha ibérica da Matemática.

A 9.ª edição do Iberian Mathematical Meeting (IMM) decorreu entre os dias 2 e 4 de outubro, no *campus* de Ponta Delgada da Universidade dos Açores. Este encontro bienal ibérico, um evento conjunto da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e da Real Sociedad Matemática Española (RSME), teve a sua primeira edição em Lisboa (2007) e realiza-se alternadamente em Portugal e Espanha. No seu percurso conta já com as seguintes edições: Badajoz (2008), Braga (2010), Valladolid (2012), Aveiro (2014), Santiago de Compostela (2016), Évora (2018) e Sevilha (2022).

O Encontro Ibérico de Matemática permite que investigadores portugueses e espanhóis se encontrem num mesmo espaço, promovendo a partilha dos seus trabalhos e a criação de condições para o estabelecimento de cooperações futuras, seguindo uma estrutura temática baseada na escolha de algumas áreas científicas. Este ano, recaiu nas seguintes áreas temáticas: Matemática Recreativa; Matemática e Medicina; e Matemática, Sustentabilidade e Alterações Climáticas. As contribuições foram partilhadas em sessões plenárias, sessões paralelas (propostas e convidadas) e apresentações em formato póster.

A Matemática Recreativa contou com várias participações, evidenciando que esta vertente continua a apresentar-se como um meio eficaz para atrair o interesse quer de académicos, quer do público em geral, promovendo a difusão e a valorização da Matemática de uma forma apelativa e estimulante. Neste âmbito, foram destacados diversos exemplos memoráveis ao longo da história da matemática, tais como as obras de Lillian Rosanoff Lieber e de Girolamo Cardano. Outros temas explorados incluíram a magia matemática, em particular, a realizada através dos truques de cartas, com raízes em textos antigos que continuam a ser usados para ensinar diversos conceitos matemáticos, bem como o engenhoso plano de lotaria publicado em Portugal em 1834, que aplicava conceitos combinatórios, destacando-se a sua importância como forma de recreação social na época. Também houve lugar para contribuições históricas: desde as suas origens na Suméria até à evolução como um ramo multidisciplinar que integra história, educação, cultura popular e conceitos matemáticos. Deu-se especial destaque ao intervalo temporal compreendido entre o século XVII (quando surgiu pela primeira vez a designação “Matemática Recreativa”) e os dias de hoje, bem como às conceções opostas, que oscilaram entre defender que todo o edifício matemático é recreativo e considerar que um assunto formal não é lúdico. A este leque de participações juntaram-se estratégias de ensino da Matemática que visam tornar a aprendizagem desta disciplina mais envolvente e eficaz, por intermédio de dinâmicas variadas como os *escape rooms* e a *Matemática fora de portas*. Foi, também, dado o exemplo do jogo *Dots & Boxes*, realçando-se o uso que faz da Fórmula de Euler e do Teorema de Sprague-Grundy, resultados fundamentais para uma análise mais aprofundada do jogo e das suas estratégias. Por último, apresentou-se uma análise da estrutura das pavimentações de Escher e a sua relação com o trabalho de Roger Penrose.

Os contributos das sessões de Matemática e Medicina exemplificaram a importância da Matemática na medicina contemporânea, evidenciando como a modelação matemática pode informar práticas clínicas e fomentar inovações nos cuidados de saúde. Um dos temas centrou-

-se na modelação das estratégias adaptativas de bactérias e vírus através de sistemas de equações diferenciais. Os modelos em causa permitem compreender como estes organismos desenvolvem resistência a tratamentos e afetam o sistema imunológico, permitindo o desenvolvimento de terapias mais eficazes. No tratamento do cancro, a utilização de técnicas de controlo ótimo foi abordada como uma forma de otimizar protocolos de tratamento. Este método matemático permite ajustar as dosagens dos medicamentos, com o objetivo de minimizar o tamanho do tumor enquanto se previne o desenvolvimento de resistência aos fármacos. Adicionalmente, a dinâmica do DNA foi explorada utilizando objetos topológicos para modelar cadeias de DNA, proporcionando novas perspetivas sobre a recombinação genética e a formação de nós. A abordagem combina topologia com biologia molecular para oferecer uma compreensão mais detalhada dos mecanismos que regem o comportamento do DNA em contextos diversos. Exploraram-se, de igual modo, outros temas, tais como as estratégias inovadoras que visam o controlo de epidemias de dengue e malária, a modelação matemática de tratamentos oculares e a investigação sobre placas ateroscleróticas mobilizando a análise de diferentes suposições estruturais e de parâmetros hemodinâmicos, focando-se técnicas de controlo ótimo de fluidos regulados pelas equações de Navier-Stokes. Foi ainda evidenciada a importância da estatística na análise de uma ferramenta que permite identificar padrões de tendões saudáveis e patológicos em imagens de ultrassom, na discussão da problemática dos coeficientes padronizados, na análise de regressão e na apresentação de um algoritmo de inferência bayesiana para a estimativa de parâmetros num modelo da evolução de glioblastoma multiforme.

Finalmente, as comunicações na área de Matemática, Sustentabilidade e Alterações Climáticas vieram ressaltar a importância da aplicação de modelos matemáticos para compreender o impacto das alterações climáticas e para melhorar o entendimento e o desenvolvimento de estratégias que visem mitigar os efeitos destes fenómenos em diversas regiões. Foi neste sentido que se explorou a aplicação da teoria dos sistemas dinâmicos para prever eventos climáticos extremos. Esta abordagem baseia-se na identificação de padrões atmosféricos de baixa dimensão e alta persistência, que podem oferecer previsibilidade significativa. Exemplos citados incluem os que causaram as tempestades *Filomena* e *Glória*, bem como as ondas de calor recentemente observadas na Península Ibérica. Falou-se também da modelação espaço-temporal bayesiana para analisar recordes de temperatura máxima diária em Espanha. Utilizando testes de hipóteses estatísticas, os investigadores identificaram mudanças climáticas não estacionárias, revelando que o número de recordes de temperatura duplicou na última década. Estas alterações mostram variações significativas tanto espaciais quanto temporais, sublinhando a urgência de intervenção. Outra temática que recebeu igual destaque foi a do impacto das mudanças climáticas na disponibilidade de água, tema particularmente inquietante, uma vez que as crescentes frequência e duração dos períodos de seca alteraram o ciclo hídrico e diminuíram a disponibilidade de recursos hídricos, especialmente em regiões como Portugal. As discussões sublinharam a necessidade urgente de implementar uma gestão sustentável da água, focando-se em sistemas de irrigação mais eficazes para mitigar os efeitos adversos da seca prolongada. Realizou-se, ainda, uma apresentação no âmbito da programação estocástica multiescalar e da sua aplicação na transição energética, na qual se abordaram de igual modo as decisões a longo prazo sobre tecnologias de geração de energia e a sua interação com operações de curto prazo devido à natureza intermitente dos recursos renováveis.

Como forma de recuperar do trabalho intenso, este encontro contou ainda com alguns momentos livres em que os participantes puderam optar por uma visita ao Centro de Informação e Vigilância Sismovulcânica dos Açores ou a uma plantação de ananases, ou explorar livremente a cidade, e ainda confraternizar no habitual jantar do encontro.

Resta deixar uma palavra de agradecimento a todos os participantes que contribuíram para que o 9th IMM tivesse o elevado nível científico que se esperava, e uma particular referência e o agradecimento à importante contribuição da Comissão Científica do encontro: Pedro Alegria, da Universidade do País Basco; Juan Belmonte Beitia, da Universidade de Castilla-La Mancha; Jorge Milhazes Freitas, da Universidade do Porto; Juan Miguel Morales, da Universidade de Málaga; Adélia Sequeira, da Universidade de Lisboa; e Jorge Nuno Silva, da Universidade de Lisboa.

Para terminar, por todo o seu trabalho, o seu empenho, a sua disponibilidade e a sua simpatia, uma palavra muito especial de agradecimento aos colegas da Universidade dos Açores que constituíram a Comissão Organizadora Local: Ana Paula Garrão, Margarida Raposo e Ricardo Cunha Teixeira.

Em 2026, contamos com nova edição, por terras de Espanha.

Gazeta de Matemática

FUNDADA POR: **António Monteiro • Bento Caraça • Hugo Ribeiro • J. Silva Paulo • M. Zaluar Nunes**

POLÍTICA EDITORIAL DA GAZETA DE MATEMÁTICA:

A Gazeta de Matemática continua a ser, tal como acontece desde a sua fundação em 1940, o principal elo de ligação da Sociedade Portuguesa de Matemática com a comunidade matemática portuguesa.

A Gazeta de Matemática é uma publicação essencialmente de divulgação da cultura matemática. Pretende estimular o gosto pelo estudo da matemática assim como a troca de ideias entre quem estuda, ensina, investiga, usa ou simplesmente se interessa pela matemática.

A Gazeta de Matemática publica artigos submetidos espontaneamente, artigos convidados e secções permanentes.

Incentivamos os nossos leitores a enviarem textos para publicação na Gazeta de Matemática. Damos preferência a artigos curtos (4 a 6 páginas) sobre temas que tenham interesse para o nosso público: algo relacionado com um tema de investigação que possa ser explicado à comunidade matemática em geral, algum aspecto curioso de matemática menos conhecido, uma nova perspectiva sobre um tema do interesse do leitor ou simplesmente algo que tenha uma ligação com o mundo matemático.

Os artigos poderão ser submetidos à apreciação de um ou mais especialistas com o objectivo de obter um parecer sobre a sua adequação para publicação na Gazeta de Matemática.

Os textos podem ser submetidos em **LaTeX** ou em **Word** (com uma versão em **PDF**). No caso de o documento conter muitas fórmulas aconselhamos o primeiro formato. Deve submeter o texto, junto com as imagens, para o seguinte endereço: ***gazeta@spm.pt.***

ASSINATURA DA GAZETA PARA O ANO 2025

Preço de Capa (avulso) + portes de envio	Assinatura				Assinatura para sócios SPM	Assinatura de Apoio
	Portugal	Europa	Guiné-Bissau S. Tomé e Príncipe Timor Leste	Resto do Mundo		
4.2€	12€	15€	12€	17€	0€	≥ 17.5€

A SPM disponibiliza na página **http://www.spm.pt/carreira/carreira.phtml** informação sobre emprego e carreira para matemáticos. As pessoas interessadas em incluir anúncios neste site devem enviar um email com os dados para *imprensa@spm.pt*

VISITE O SITE DA **SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA**

www.spm.pt

E O DA ***GAZETA DE MATEMÁTICA***

www.gazeta.spm.pt

Sociedade Portuguesa de Matemática • Av. da República 45, 3° esq. • 1050-187 Lisboa • Telf.: 21 793 97 85 • Email: *spm@spm.pt*


Liping Ma
Saber e Ensinar Matemática Elementar
ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO
Uma fotobiografia a várias vozes
JORGE BUESCU O fim do Mundo está próximo?
LOGARITMOS
Elon Lages Lima
Análise Combinatória e Probabilidade
10 MATEMÁTICOS 100 PROBLEMAS
TEXTOS DE MATEMÁTICA
2000 MATEMÁTICA √ RADICAL
OS INSTRUMENTOS NÁUTICOS DE NAVEGAÇÃO E O ENSINO DA GEOMETRIA
NUNO CRATO
A Matemática das Coisas
Desarrumar
TÓPICOS DE ÁLGEBRA SUPERIOR
Isometrias
Elon Lages Lima
OS NÚMEROS E OS JOGOS
JOHN H. CONWAY
exercícios de álgebra linear
A MATEMÁTICA NO TEMPO DO MESTRE JOSÉ VIZINHO
MATEMÁTICA & COMBOIOS
MATEMÁTICA ELEMENTAR DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR
Felix Klein
ANÁLISE
Olimpíadas de Matemática
PEDRO NUNES
OBRAS
VOL. I
TRATADO DA SPHERA
NÚMEROS CIRURGIAS E NÓS DE GRAVATA
COMO RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS
exercícios de Análise Complexa e Equações Diferenciais
NUNO CRATO
PASSEIO ALEATÓRIO
RON AHARONI
ARITMÉTICA PARA PAIS
Matemática em família
Matemática em Portugal
Uma Questão de Educação
Jorge Buescu
TREZE VIAGENS PELO MUNDO DA MATEMÁTICA
Bento de Jesus Caraça
INÉDITOS DE ECONOMIA MATEMÁTICA
Carlos Bastien
4000 ANOS DE GEOMETRIA