GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO V **N.º 21** DEZEMBRO-1944

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO	ADMINISTRADOR	TESOUREIRO
J. da Silva Paulo	*Orlando M. Rodrigues*	*J. de Oliveira Campos*

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO V - N.º 21 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO - 1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Uma Teoria das Séries Duplas

por **J. Albuquerque** (Bolseiro em Roma do I. A. C.)

Foi *Arquimedes* o primeiro matemático a fazer uso de uma série infinita utilizando uma série geometrica para calcular a área de um segmento de parábola Mais tarde em 1668, *Mercator* e *Brouncker* empregaram uma série, chamada série logarítmica, no cálculo de áreas relativas à hipérbole.

O uso sistemático das séries começa sòmente com *Newton* (1669). No século XIX já eram conhecidos exemplos de séries divergentes e indeterminadas, e tais exemplos eram até já conhecidos antes, mas até ao fim do século XVIII as séries foram sempre empregadas como uma soma de infinitos termos que deveria ter sempre um sentido. *Jacob* e *João Bernoulli* (1689, 1705), *Leibniz* (1713), *Euler* (1734) empregaram as séries sem se preocuparem das suas eventuais convergências ou divergências. Mais tarde, matemáticos como *Nicolau* e *Daniel Bernoulli* (1743, 1771), e *D'Alembert* (1761), fizeram grandes reservas sôbre o seu emprêgo, mas as séries não convergentes continuavam a somar-se, e os resultados eram muitas vezes justos mas também algumas vezes injustos.

A série indeterminada $1-1+1-1+\cdots$, recebeu, por exemplo, de *J. Bernoulli* (1696), de *Grandi* (1710), e de *Leibniz* (1713), a soma $1/2$, justificadà com argumentações metafísicas, recurso de que lança mão o sábio para não confessar a sua ignorância. *Grandi* abandona-se a grandes dissertações que o conduzem não só ao valor da soma série, como também à possibilidade da criação do Nada.

O conceito da soma de séries não convergentes toma pela primeira vez um aspecto correcto com *Cesàro* em 1890, com uma perfeita generalização de soma de de uma série, seguida de outras generalizações devidas a *Borel* (1901) e a *Sannia* (1916-20).

Uma primeira definição correcta de convergência de uma série foi dada por *Fourier* (1811). A definição plenamente rigorosa é de *Bolzano* (1817), de *Cauchy* (1821), e de *Abel* (1826).

A teoria das séries duplas foi iniciada por *Cauchy*, organizada de modo rigoroso por *Stolz* (1884), por *Bolzano*, por *Biermann* (1887, 1897), e por *Pringsheim* (1897). Têm uma grande aplicação na teoria das funções analíticas a duas variáveis complexas.

Consideremos o algorítomo:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+\cdots \\ +a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+\cdots \\ +\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}+\cdots \\ +\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Êste algorítomo chama-se uma *série dupla*.

A soma $S_{m,n}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}a_{rs}$ chama-se *reduzida* de índices m, n, e a uma soma qualquer de termos da série (1), chama-se uma *soma parcial*. As reduzidas são as somas dos termos contidos em rectângulos de vértice em a_{11} e são certas somas parciais finitas Dada uma reduzida existe uma soma parcial finita ou infinita (com uma infinidade de têrmos) que a contém, mas dada uma soma parcial, só se ela é finita, existe uma reduzida que a contém.

Se o limite $\lim_{(m,n)\to\infty} S_{m,n}$ é um número finito S, a série dupla diz-se convergente; se o limite existe mas infinito a série dupla diz-se divergente; nos restantes casos a série dupla diz-se indeterminada.

Critério geral de convergência. *É condição necessária e suficiente para a série dupla* (1) *ser convergente, que dado* $\varepsilon>0$ *se possam determinar dois inteiros positivos* μ, ν *tais que: para* $m, m'>\mu$ *e* $n, n'>\nu$ *resulte sempre:* $|S_{m,n}-S_{m',n'}|<\varepsilon$.

Dem. A condição é necessária. A série dupla tem um limite finito $S=\lim_{(m,n)\to\infty} S_{m,n}$ que é o extremo superior do conjunto C de todos os números $S_{m,n}$ onde se faz passar m, n por todos os inteiros positivos emparelhados de todos os modos possíveis.

O ponto S é ponto de acumulação do conjunto C no espaço dos números reais, e dada uma visinhança 2ε de S, isto é, o intervalo $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ existe pelo menos um ponto de C, $S_{m,n}$, contido na visinhança e portanto a distância entre $S_{m,n}$ e S é menor que ε: $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$.

Mas não existe só o ponto $S_{m,n}$ mas sim uma infinidade dêles contidos na visinhança e o conjunto dos inteiros m, n que correspondem a êsses pontos é limitado inferiormente por μ, ν, qualquer que seja ε, isto é, para cada ε, existem números inteiros $\mu(\varepsilon)$ e $\nu(\varepsilon)$ tais que se verifica sempre: $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$ para $m>\mu(\varepsilon)$ e $n>\nu(\varepsilon)$.

Então para $m, m'>\mu(\varepsilon)$ e $n, n'>\nu(\varepsilon)$ teremos: $d(S_{mn}, S)=|S_{m,n}-S|<\varepsilon$ e também $d(S_{m',n'}, S)=|S_{m',n'}-S|<\varepsilon$, e pela desigualdade triangular da distância, vem: $d(S_{m,n}, S_{m',n'})\leq d(S_{m,n}, S)+d(S_{m',n'}, S)$ ou $|S_{m,n}-S_{m',n'}|\leq|S_{m,n}-S|+|S_{m',n'}-S|<2\varepsilon$.

A condição é suficiente. Seja uma série dupla para a qual dado $\varepsilon>0$ existem $\mu(\varepsilon)$ e $\nu(\varepsilon)$ tais que para $m, m'>\mu(\varepsilon)$ se tem: $|S_{m,n}-S_{m',n'}|<\varepsilon$.

Representemos por $C(\varepsilon)$ o fecho de conjunto de todos os $S_{m,n}$ com $m>\mu(\varepsilon)$ e $n>\nu(\varepsilon)$; será para $\varepsilon<\varepsilon'$: $C(\varepsilon)\subset C(\varepsilon')$.

O produto de todos os $C(\varepsilon)$ contêm um ponto, pelo teorema de *Cantor* (Durchschnittssatz), e se fôr S êsse ponto, S é finito porque os $C(\varepsilon)$ são conjuntos fechados. Dado $\varepsilon>0$ tem-se: $|S_{m,n}-S|<\varepsilon$ para $m>\mu(\varepsilon)$ e $n>\nu(\varepsilon)$.

Então a série tem S como limite e é portanto convergente. c. q. d.

Corolário. *Para a convergência da série* (1), *é necessário que:* $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} a_{m,n}=0$.

Com efeito, tomando os módulos à identidade

$$a_{m,n}=(S_{m,n}-S_{m,n-1})-(S_{m-1,n}-S_{m-1,n-1}),$$

vem: $|a_{m,n}|\leq|S_{m,n}-S_{m,n-1}|+|S_{m-1,n}-S_{m-1,n-1}|<2\varepsilon$ e portanto: $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} a_{m,n}=0$. c. q. d.

Comparação de séries. Dadas duas séries, se existe entre os têrmos da primeira e da segunda uma correspondência biunívoca tal que cada têrmo da primeira é igual ou inferior ao têrmo correspondente da segunda, diremos que a primeira série é *majorada* pela segunda ou é uma *minorante* da segunda, e que a segunda série é *minorada* pela primeira ou é uma *majorante* da primeira.

Duas séries cada uma das quais é majorada pela outra, dizem-se *equivalentes*.

Se a majorante de uma série é convergente a série majorada é também convergente, se a majorada é divergente a majorante é também divergente.

As séries equivalentes são da mesma espécie.

Uma série dupla pode ser comparada com uma série simples e ser majorante ou majorada por ela, e portanto uma série dupla majorante de uma série simples divergente é divergente, e uma série dupla majorada por uma série simples convergente é convergente.

Uma série dupla é *absolutamente convergente* (absolutamente divergente) se cada série dupla equivalente fôr convergente (divergente).

Séries de têrmos positivos. Uma série de têrmos positivos não pode ser indeterminada; ou é convergente ou divergente e em ambos os casos absolutamente. A soma da série que é o extremo superior do conjunto das somas parciais e também do conjunto das reduzidas, é independente da ordem dos têrmos.

Com efeito, a série dupla de têrmos positivos ou é convergente ou divergente a $+\infty$, não podendo ser indeterminada. A soma finita ou infinita é o extremo superior das somas parciais, e se a série é divergente a soma é também extremo superior das reduzidas. A adição de uma série de têrmos positivos goza da propriedade comutativa, e portanto a série é absolutamente convergente ou absolutamente divergente, ou por outras palavras, a soma è independente da ordem dos têrmos.

Cada série simples de têrmos positivos equivalente a uma série dupla de têrmos positivos, tem a mesma soma (finita ou infinita) *da série dupla.* Em particular a série: $a_{1,1}+a_{2,1}+a_{1,2}+a_{3,1}+a_{2,2}+a_{1,3}+\cdots$, chama-se a *soma por diagonais* da série dupla (1).

Cada linha ou coluna de uma série dupla de têrmos positivos convergente, constitui uma série simples convergente.

Com efeito, a soma por diagonais da série dupla é uma majorante de cada uma destas séries.

Uma série dupla de têrmos positivos de soma S *é somável por linhas (e anàlogamente por colunas) obtendo-se a mesma soma.*

Com efeito, seja $A_r=\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{r,s}$ uma das séries convergentes da linha s; será, $A_r\leq S$ e também $A_p+A_r\leq S$ $(p\neq r)$ porque A_p+A_r é o extremo superior das somas parciais $\sum\limits_{s=1}^{\infty}(a_{p,s}+a_{r,s})$ que são só algumas somas parciais da série dupla. O mesmo sucede portanto para uma soma finita de AA de índices diferentes. Considerando $A_1+A_2+A_3+\cdots$, teremos uma série de termos positivos majorada pela série dupla e que portanto terá uma soma $S'\leq S$.

Mas cada soma parcial da série dupla é ultrapassada por infinitas somas parciais desta série simples e portanto $S\leq S'$, donde resulta terem as duas séries uma mesma soma.

Para demonstrar a recíproca desta proposição, suponhamos que uma série dupla somada por linhas dá uma soma finita; então cada linha é uma série simples convergente e a série simples $A_1+A_2+A_3+\cdots$, é formada das suas somas. Cada soma parcial da série dupla distribui-se em somas parciais pelas diferentes linhas, e vê-se, portanto, que o conjunto das somas parciais da série dupla é limitado, e a série dupla convergente.

Exemplo:

$$
(2)\qquad \begin{array}{l} 1 + q + q^2 + \cdots \\ +q' + qq' + q^2q' + \cdots \\ +q'^2 + qq'^2 + q^2q'^2 + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots \end{array}
$$

Supondo $0<q<1$, $0<q'<1$, as linhas são séries geométricas simples de razão q portanto convergentes. A série simples formada pelas somas

$$\frac{1}{1-q}+\frac{q'}{1-q}+\frac{q'^2}{1-q}+\cdots$$

é uma série geométrica de razão q', que tem por soma:

$$S=\frac{1}{(1-q)\cdot(1-q')}$$

A série dupla (2) é chamada uma *série somável* pelo facto de a sua soma se poder obter somando as linhas ou colunas. A série (2) é conhecida pelo nome de *série geométrica dupla de razões* q *e* q'.

Se pelo menos uma das razões da série geométrica dupla fôr maior que a unidade, a série será divergente.

As condições suficientes de convergência, conhecidas com o nome de critérios de convergência, estendem-se com relativa facilidade às séries duplas; são por exemplo prováveis os seguintes teoremas, que em todo o caso necessitam de uma demonstração directa que se deixa ao cuidado do leitor:

A série dupla de termos positivos (1), *converge ou diverge conforme:*

$$\max.\lim.\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}<1 \quad ou \quad \min.\lim.\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}>1,$$

e para tal êstes limites deverão ser independentes de n.

Se dada a série dupla de termos positivos (1), *é possível determinar uma sucessão* , b_1, b_2, b_3, $\cdots$, *de números positivos, tal que existam um inteiro* $p>0$ *e um número* k *positivo, de modo que para* $m\geq p$ *resulte independente de* n *e maior que* k, *a diferença*

$$b_m\frac{a_{m,n}}{a_{m+1,n}}-b_{m+1}$$

a série é convergente; se ao contrário, é possível determinar a sucessão dos bb *de modo que seja divergente a série* $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots$ *e a referida diferença, para* $m>p$ *suficientemente grande, seja não positiva, a série dupla é divergente.*

Nêste teorema tomando os *bb* todos iguais à unidade, caímos no critério anterior; tomando os *bb* pela sucessão dos números naturais, caímos no critério seguinte:

A série dupla de têrmos positivos (1), *converge ou diverge conforme*

$$\min.\lim.m\left(\frac{a_{m,n}}{a_{m+1,n}}-1\right)>1 \;ou\; \max.\lim.m\left(\frac{a_{m,n}}{a_{m+1,n}}-1\right)<1,$$

e para tal êstes limites deverão ser independentes de n.

Demonstremos agora o seguinte teorema:

A série dupla de têrmos positivos (1), *converge ou diverge conforme* max. lim. $\sqrt[m+n]{a_{m,n}}$ *é maior ou menor que a unidade. Se êste* max. lim. *é a unidade nada se pode afirmar sôbre a convergência ou divergência da série.*

Seja S a soma da série simples que se obtém de $\sqrt[m+n]{a_{m,n}}$ fazendo variar m e n por todos os possíveis valores inteiros. Suponhamos $S<1$. Representemos por q um número satisfazendo a $S<q<1$.

Poderão determinar-se números μ e ν convenientes tais que:

$$\sqrt[m+n]{a_{m,n}}\leq q \quad \text{para} \quad m>\mu \quad \text{e} \quad n>\nu, \quad \text{ou} \quad a_{m,n}\leqq q^{m+n}.$$

Mas a série dupla geométrica de razões q e $q'=q$

$$
\begin{array}{llll} q^{\mu+\nu} & +q^{(\mu+1)+\nu} & +q^{(\mu+2)+\nu} & +\cdots \\ +q^{\mu+(\nu+1)} & +q^{(\mu+1)+(\nu+1)} & +q^{(\mu+2)+(\nu+1)} & +\cdots \\ +q^{\mu+(\nu+2)} & +q^{(\mu+1)+(\nu+2)} & +q^{(\mu+2)+(\nu+2)} & +\cdots \\ +\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}
$$

é convergente para $q<1$ e portanto será também convergente o resto da série dupla dado pelos valores μ e ν, resto que é majorado por esta série geométrica; a série dupla (1) é convergente. Se pelo contrário $S\geq 1$ haverá infinitos têrmos da série dupla $\sqrt[m+n]{a_{m,n}}$ que serão maiores que 1, e portanto infinitos têrmos da série dupla (1) maiores que 1 e ela será divergente a $+\infty$, c. q. d.

Séries duplas de têrmos reais de qualquer sinal. *É condição necessária e suficiente para uma série dupla ser absolutamente convergente que seja convergente a série dupla dos módulos dos têrmos.*

Se a série dupla é absolutamente convergente, por definição, tôda a série dupla equivalente é convergente e tôda a série simples equivalente é também convergente e para isso a série dos módulos de qualquer série simples equivalente é convergente e será convergente a série dupla dos módulos.

Se a série dupla dos módulos é convergente serão absolutamente convergentes tôdas as séries duplas majoradas por esta e portanto também o será a série dupla dada. c. q. d.

Poderiam estudar-se para as séries duplas as propriedades comutativa e distributiva da adição e chegariamos entre outros ao seguinte resultado, que se deixa para ser demonstrado: *a propriedade comutativa vale só para as séries duplas para as quais o conjunto das somas parciais é limitado pelo menos de um dos lados.*

Para as séries duplas não absolutamente convergentes podem considerar-se duas espécies de convergência: séries duplas *semiabsolutamente convergentes*, se existe qualquer série simples equivalente não absolutamente convergente, séries duplas *simplesmente convergentes*, se não existe alguma série simples equivalente convergente.

Exercício: provar que o conjunto dos têrmos de uma série dupla convergente absolutamente ou semiabsolutamente é limitado, mas que tal nem sempre sucede nas séries simplesmente convergentes.

Séries duplas de têrmos complexos. O teorema anterior dá a condição para a convergência absoluta, generaliza-se sem esfôrço às séries duplas de têrmos complexos.

Deduzem-se também fàcilmente as seguintes propriedades:

Uma série dupla absolutamente oonvergente, com têrmos reais ou complexos, pode somar-se por linhas, ou por colunas, ou por diagonais, ou por qualquer série simples equivalente; tem-se sempre por resultado a soma da série dupla dada.

Para terminar, notemos que o teorema sôbre as séries simples que afirma *ser absolutamente convergente o produto à Cauchy, de duas séries simples absolutamente convergentes*, resulta imediatamente da teoria das séries duplas aplicadas à série

$$\begin{array}{l} a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \cdots \\ + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \cdots \\ + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

onde $a_1+a_2+a_3+\cdots$, $b_1+b_2+b_3+\cdots$, são as duas séries simples dadas. Esta demonstração é devida ao próprio Cauchy, em 1821.

Roma, Julho de 1944

ASTRONOMIA

SÔBRE O MOVIMENTO DOS POLOS À SUPERFÍCIE DA TERRA (*)

O «TÊRMO DE KIMURA» OU TÊRMO «Z»

por **A. Baptista dos Santos**

Num artigo da Secção de Astronomia publicado no n.º 17 da «Gazeta de Matemática», fizemos uma breve história do movimento geral do polo à superfície da Terra, definimos as suas leis e dissemos qual era a sua provável interpretação física. Vamos hoje dizer o que é o «têrmo de Kimura» ou têrmo «z» e indicar as causas que, provàvelmente, lhe dão origem.

Na representação do movimento geral do polo é hábito, desde Chandler, projectar a trajectória por êle descrita à superfície da Terra sôbre um plano tangente a esta superfície no polo do eixo de figura e referir, em cada instante, a sua posição nessa projecção a um sistema de eixos coordenados rectangulares, um dos quais é a projecção do meridiano de Greenwich naquele plano e o outro a direcção perpendicular. Designando por x e y as coordenadas do polo, num certo instante, em relação a êste sistema de eixos e por $\Delta\varphi$ a variação da latitude, isto é, a diferença, nêsse instante, entre a latitude de qualquer lugar dum meridiano de longitude λ e a latitude média dêsse lugar durante o período completo do movimento do polo, será:

$$\Delta\varphi = x \cos\lambda + y \operatorname{sen}\lambda \tag{1}$$

a equação que relaciona as quatro quantidades mencionadas e traduz analìticamente o movimento do polo. Para cada lugar, ou melhor, para cada meridiano, existe uma equação desta natureza que constitui uma das relações de condição na determinação, pelo método dos menores quadrados, dos valores mais prováveis das coordenadas x e y. Conhecidos êsses valores mais prováveis, o segundo membro da equação (1) permite calcular novos valores $\Delta\varphi$—para cada estação e qualquer instante—que, comparados com os valores observados, nos dariam, segundo a teoria dos êrros de observação, uma série de resíduos de carácter acidental, se os valores $\Delta\varphi$ observados resultassem apenas do deslocamento do polo. Mas não é isso o que acontece na prática. O astrónomo japonês Hisashi Kimura mostrou, em 1902, que nêsses valores $\Delta\varphi$ existia uma parte sistemática que desapareceria se ao segundo membro da equação (1) se juntasse mais um têrmo, o têrmo «z», isto é, se a equação (1) passasse a ter a forma:

$$\Delta\varphi = x \cos\lambda + y \operatorname{sen}\lambda + z \tag{2}$$

(*) Continuação do n.º 17.

As coordenadas do polo, x e y, eram independentes de «z» que, como se vê, não dependia da longitude λ; e como as estações do Serviço Internacional estão distribuídas ao longo do mesmo paralelo, isto é, têm tôdas a mesma latitude, nada se podia afirmar quanto à dependência de «z» da latitude da estação. A análise dos valores dêste têrmo para cada décimo de ano mostrava que êle era uma quantidade variável, de período anual, com um máximo no solstício do inverno e um mínimo no solstício do verão.

Eis pois o que era e, com ligeiras diferenças, o que ainda é hoje, o têrmo «z» também conhecido por «termo de Kimura», nome do seu descobridor: um resíduo sistemático, variável com o tempo, de período anual, atingindo os seus valores máximo e mínimo respectivamente nos solstícios do inverno e do verão, não alterando as coordenadas do polo, independente das longitudes, mas sendo provàvelmente, como vamos ver, função da latitude do lugar.

¿Mas teria, de facto, o têrmo «z» realidade física, quere dizer, haveria, na realidade, na variação das latitudes uma parcela com as caracteristicas de «z»? Ou, pelo contrário, seria o seu aparecimento simplesmente devido a possíveis deficiências dos dados do problema ou a incorrecções próprias do método de cálculo usado na combinação das observações? Esta questão foi posta quási logo de início e bastantes foram os astrónomos que, nestes dois campos, se notabilizaram na investigação das causas de «z».

Está no primeiro campo a sugestão apresentada ainda por Chandler: o têrmo «z» teria origem num movimento real do centro de gravidade da Terra ao longo do seu eixo, para um e outro lado duma posição média. Dêste deslocamento resultaria, com efeito, um desvio constante na vertical de todos os lugares dum mesmo paralelo e, conseqüentemente, uma variação constante na sua latitude, perfeitamente independente do deslocamento geral do polo; e, como é fácil de verificar, essa variação seria proporcional ao coseno da latitude—nula no polo e máxima no equador. Já tivemos ocasião de dizer que a distribuïção das estações do Serviço Internacional não se presta à verificação desta propriedade, a da proporcionalidade ao cosseno da latitude, mas o astrónomo Spencer Jones, actual director do Observatório de Greenwich, fazendo a comparação dos resultados do Serviço Internacional com os da observação da estrêla δ Cassiopeiae no Observatório de Poulkovo, cuja latitude, 59°, é suficientemente elevada em relação à das estações internacionais, 39°, verificou a perfeita proporcionalidade entre os valores de «z» e os cossenos das respectivas latitudes.

A oscilação do centro de gravidade da Terra parecia, portanto, justificar satisfatòriamente a existência dum têrmo «z». ¿Mas a que causa deveríamos atribuir essa oscilação? Pouco ou nada se disse, então, a êste respeito. Parece-nos, no entanto, evidente, que um deslocamento de massas à superfície ou no interior da Terra, de um para o outro hemisfério e de distribuïção simétrica relativamente ao eixo terrestre poderia dar-lhe origem; e, já vimos, quando no artigo anterior indicamos as causas da componente anual do deslocamento geral do polo, que êsse movimento de massas se verifica à superfície da Terra. O deslocamento resultante do centro de gravidade não se efectuaria, provàvelmente, segundo o próprio eixo da Terra mas a sua componente segundo êste eixo poderia dar conta do têrmo «z», no todo ou em parte — a componente na direcção normal daria origem à parte anual do movimento geral do polo. Uma outra explicação, também satisfatória, é a que, modernamente, apresenta o Prof. Kimura: a mudança de direcção da vertical resultante da deformação da superfície terrestre devida à atracção do Sol e ao aquecimento solar. À Metereologia e à Mecânica competiria a verificação das hipóteses que teriam igualmente uma contra prova na determinação directa dos desvios da vertical por meio do pêndulo horisontal. A acção do vento poderia, por outro lado, explicar tambem a existência da maior parte do têrmo de Kimura: S. Kawasaki mostrou que mais de metade do têrmo «z» deduzido das observações de Greenwich compreendidas entre 1916 e 1927, podia ser atribuída ao efeito do vento. Mas a atenção dos astrónomos, a do Serviço Internacional, em particular, dirigiu-se de preferência para as causas do segundo tipo acima apontadas e assim devia ser visto que a hipótese da existência real de «z» só poderia merecer-nos inteira confiança se, prèviamente, tivessem sido eliminadas as causas que através dum cálculo defeituoso poderiam dar-lhe origem. Nêste campo muito de interessante se concluiu. Reconheceu-se quo na investigação de tão diminuta quantidade, como é o têrmo «z», seria indispensável entrar com correcções, até então desprezadas, no cálculo da posição aparente das estrêlas; estão nêste caso as paralaxes das estrêlas observadas e pequeninas correcções provenientes da consideração de têrmos até então não considerados, por desnecessários, no desenvolvimento da expressão que traduz o efeito da nutação do eixo terrestre nas posições das estrêlas. Demonstrou-se que um pequenino êrro existente nas constantes de aberração e de nutação adoptadas no cálculo das posições aparentes das estrêlas daria origem a um têrmo «z». Verificou-se, finalmente, que o método usado na combinação das observações seria improfíquo, dando igualmente origem a um têrmo «z», se existissem variações diurnas ou semi-diurnas nas latitudes; e a realidade destas variações tem-se acentuado dia a dia desde 1923, para o que muito contribuiram as investigações de Boccardi em Pino Torinese.

Os trabalhos do Serviço Internacional, já então sob a direcção do Prof. Kimura, foram assim encaminhados no sentido de se eliminarem, quanto possível, tôdas estas causas de êrro e, como ùltimamente parece ter-se verificado que «z» não é completamente independente da longitude, foi abandonado o uso da fórmula (2) na determinação de x, y e z, passando a adoptar-se o método das aproximações sucessivas. Não obstante, o têrmo «z» prevaleceu ainda, se não com igual amplitude e fase, pelo menos, com marcada probabilidade de existência física.

No seu último relatório, publicado em 1935 e abrangendo as observações feitas entre 1922.7 e 1931.0, o Prof. Kimura conclui: Em «z» há um têrmo comum a tôdas as estações, pelo menos, àquelas que fazem parte do Serviço Internacional; na parte restante, de carácter local e, portanto, variável de estação para estação, estão incluídos dois outros têrmos, um constante durante o ano em cada estação e outro variável com o tempo e a estação que é pròpriamente designado por «z» local. Em sua opinião a parte constante é principalmente devida às variações diurna e semi-diurna da latitude, devendo também considerar-se nela incluído o efeito de um possível êrro na constante de aberração. Os outros dois têrmos poderão ter origem nas anomalias da refracção como pretendem, segundo diz, alguns investigadores de «z», mas êle entende que há outra causa igualmente provável, a mudança de direcção da vertical resultante da deformação da Terra devida, em parte, à atracção do Sol e, em parte, às dilatações e contracções da crusta terrestre local, resultantes do aquecimento solar em combinação com a pressão atmosférica.

O Prof. Kimura acrescenta que, na investigação de tão complicado têrmo «z» seria altamente desejável a determinação rigorosa da constante de aberração por observações astronómicas diferentes das da variação das latitudes e, pròpriamente na investigação das suas causas, muito desejável seria o empreendimento de observações geofísicas.

Assim estávamos em 1935, ainda no campo das hipóteses sem confirmação definitiva. Depois, o estado de saúde pouco satisfatório do Prof. Kimura obrigou-o a abandonar a direcção do Serviço Internacional que passou a ser dirigido pelo Prof. Carnera do Observatório italiano de Capodimonte. Veio a guerra e com ela as dificuldades sempre crescentes das trocas internacionais. Durante todo êste período apenas chegaram às nossas mãos três ou quatro folhetos—que devemos à gentileza do Prof. Carnera—contendo apenas resultados provisórios. Num dêles, o de 1938, diz êste distinto Professor que «não é com os actuais instrumentos de pequenas distância focal e abertura, que se consegue ver centésimos de segundo e o que se não vê não se pode medir». Há, na verdade, necessidade de aperfeiçoar também os instrumentos astronómicos.

Esperemos então que a Paz nos traga o socêgo e a cooperação internacional indispensáveis à complicada solução dêste interessante problema da Astronomia que, não obstante largamente estudado, não conseguiu ainda obter uma explicação indubitável.

Lisboa, Outubro de 1944.

PEDAGOGIA

A ESTRATÉGIA E TÁCTICA DO ESTUDO

por ***W. W. Sawyer***

É quási um lugar comum afirmar hoje em dia que a grande maioria dos nossos estudantes não tira aproveitamento apreciável do ensino ministrado nos Liceus e Universidades. A unanimidade das queixas não deixa margem para dúvidas. Mas se é fácil e cómodo apontar as causas dêste lamentável estado de coisas é, no entanto, incomparàvelmente mais árduo e delicado, dar-lhe o remédio devido. As linhas que se seguem são a expressão duma tentativa nêste último sentido. Constituem um dos capítulos, o IV, dum pequeno mas curioso livro intitulado «Mathematician's Delight», editado pela Penguin Books. É seu autor W. W. Sawyer, nome, entre nós, pouco conhecido. É um livro modesto mas de leitura agradável e estimulante a que não falta nem encanto nem originalidade. Recomendamo-lo, em particular aos alunos do primeiro ano das nossas Universidades, que freqüentam as cadeiras de Matemáticas. *N. T.*

«Tenho ensinado matemática e ciência aplicada ou engenharia, a quási tôdas as espécies de rapazes e homens... À luz da minha experiência, difìcilmente existirá um homem que não se possa tornar um descobridor, um impulsionador do conhecimento, e quanto mais cedo lhe derem oportunidade de manifestar a sua individualidade, melhor». — John Perry, 1901.

As duas condições fundamentais para alcançar êxito em qualquer espécie de trabalho, são o interêsse e a confiança. As pessoas, usualmente, prestam pouca atenção a êstes dois factores porque sentem (aliás com razão) que não se podem tornar confiantes ou interessadas por um esfôrço de vontade.

É de facto verdade que não se pode aumentar a confiança por um acto de vontade. Da mesma maneira que ninguém pode aumentar o volume dos músculos ou fazer com que o coração bata mais vigorosamente sentando-se numa cadeira e desejando que assim aconteça. No entanto, se pularmos durante meia hora, alcançaremos ambos os resultados.

A confiança e o interêsse podem também alterar-se desde que se *tomem as medidas convenientes*.

As medidas convenientes não consistem em atirar-se ao trabalho como um toiro. É bem sabido que o efeito do treino físico demasiado intenso, é destruir o corpo e não melhorá-lo. O mesmo acontece com o espírito.

No treino físico, alguns dos órgãos vitais encontram-se fora do domínio da consciência. Não podemos enviar ordens directamente ao coração, ao fígado ou às glândulas. Temos de inventar exercícios dependentes do movimento dos membros, do esfôrço dos músculos que podemos comandar, que produzam o desejado efeito nos outros órgãos. Depois de uns poucos de meses de treino apropriado, não sabemos que mudanças tiveram lugar no nosso corpo, mas sentimos o benefício e sabemos que se deram certas alterações.

No treino mental também as alterações decisivas correm fora do domínio consciente. A prova de qualquer sistema de ensino não é verificar se produz estudantes capazes de executarem certos truques como cães amestrados. Tal método é fútil e fundamentalmente degradante. Habilita apenas os rapazes a passarem nos exames, sôbre assuntos que não compreendem e qualifica-os para postos onde se sentirão infelizes e incapazes. A prova real de qualquer método de ensino encontra-se mais profundamente. Um estudante que faça uma aproximação correcta do assunto, alcança uma apreciação completa do mesmo por escalões sucessivos. Começa por compreender de que trata o assunto, em seguida sente-se capaz de o dominar e, depois, começa a ter prazer no seu estudo e a pensar nêle fora das horas de trabalho. Sòmente quando se criou tal atitude é que o espírito compreendeu, de facto, o significado do assunto. As pessoas evidenciam um grau mais elevado de inteligência e conhecimento nos seus passatempos, do que em qualquer outro ramo de actividade.

Falta de Interêsse. ¿Será possível transferir para o trabalho a espécie de interêsse que sentimos por um passatempo? Depende da razão da falta de interêsse.

Há indivíduos cujo interêsse se concentra num único assunto. Se sentimos que na vida apenas temos um propósito, seja pintar quadros ou descobrir a cura do cancro, que apenas isto importa e que, em comparação, tudo o resto—confôrto, riqueza, respeitabilidade, segurança, laços de família ou obrigações sociais—não tem significado, então não devemos ter dúvidas sôbre o que temos a fazer.

Só uns poucos, raros indivíduos, são assim categóricos e claros nos seus desígnios. A maior parte dos homens e mulheres estão prontos, mais ou menos, a enquadrar-se nos costumes que os rodeiam, a trabalhar em qualquer profissão onde possam ganhar um ordenado razoável.

Há provàvelmente alguns que se encontram entre êstes dois extremos—indivíduos que poderiam ser felizes e eficientes num tipo particular de vida, mas que se ignoram a si próprios, ou a quem falta a coragem ou a determinação necessárias para romper com a vida que os outros esperam que vivam. A guerra deu origem a muitos casos em que indivíduos que dantes tinham feito um esfôrço pouco convincente para se quàlificarem para profissões intelectuais, se acharam fazendo um trabalho prático, apagando fogos, conduzindo camiões, etc., etc. Era evidente que tinham encontrado o género da trabalho para o qual a natureza os tinha destinado. Num mundo perfeito teriam sido encorajados a desempenhar tal tarefa sem ter sido necessária uma guerra. Para tais pessoas trata-se, não de aprender matemática, mas sim de a mandar ao diabo na primeira oportunidade favorável.

A primeira pregunta a fazer é então esta: ¿a que tipo pertenço eu? ¿Sou um indivíduo com um interêsse de tal maneira profundo por algum tipo especial de actividade que me posso permitir mandar passear outros assuntos (incluindo a matemática) e lutar para vir a ser um perito da especialidade, ou pertenço ao tipo mais comum que está pronto a trabalhar no que lhe vem à mão?

Devemos decidir-nos definitivamente por uma ou outra alternativa. Ou os nossos interêsses estão tão longe da matemática que nunca dela seremos capazes de tirar proveito ou prazer, ou há alguma coisa que achamos digna de realização e para a qual é necessário o conhecimento da matemática. Quando respondermos a esta questão devemos dar-lhe o desconto devido pelo facto já mencionado de que o sistema de ensino parece ter sido especialmente delineado para esvaziar de tôda a vida e de todo o interêsse os assuntos ensinados. Por Matemática designamos a Matemática viva, não aquela que é ensinada em muitas escolas.

Nalguns casos, portanto, a falta de interêsse emerge directamente das raízes mais profundas da personalidade. Mas a vasta maioria das pessoas que odeia as matemáticas não enfileira sob esta bandeira. A causa mais comum do desagrado das matemáticas é, de longe, a maneira como são apresentadas. Pode verificar isto por si próprio. Gosta de quebra-cabeças? Presta atenção às adivinhas do Almanaque Bertrand? Resolve as palavras cruzadas? Gosta do bridge, do xadrês ou das damas? Toma parte nas animadas discussões a que algumas vezes assiste, como por exemplo quando se trata de saber o que aconteceria se os passageiros de um automóvel atirassem uma bola ao ar? caïrá novamente no carro? Tem interêsse por qualquer espécie de aperfeiçoamento científico ou mecânico, tal como a radiolocalização ou o funcionamento dum avião? Se assim é, os seus interêsses básicos não diferem muito dos do matemático. Conheço uma família (aliás nada snob) que, numa noite de Natal, se dividiu em dois grupos inimigos a propósito do automóvel e da bola. Na escola, eram os rapazes mais normais que mais se entusiasmavam com as soluções que davam a tais problemas. Êste interêsse naquilo que poderia acontecer está muito próximo do interêsse sentido pelo cientista, e a ciência em breve conduz às matemáticas.

A Eliminação do Mêdo. Provàvelmente muitas pessôas interessar-se-iam pelas matemáticas, da mesma maneira que muitas se interessariam pela música, se não tivessem mêdo. Interêsse e confiança estão intimamente relacionados. Se você descobre que pode fazer alguma coisa, fica agradàvelmente impressionado. Gosta da sensação de ter dominado a natureza e de sentir que os outros o admiram. Quere fazer um pouco mais, e quanto mais faz melhor se torna. Por outro lado, se começa por uma derrota, o efeito é opôsto. Ninguém gosta de parecer parvo. Evita o assunto ou trata de fingir que não lhe merece interêsse. Decide que nunca poderá fazer nada e, portanto, ¿para que perder energia? Em qualquer caso, convence-se a si próprio de que é inútil tentar. Tudo isto nada tem que ver com os factos do caso: é a tentativa desesperada de uma alma humana para conservar o equilíbrio e o respeito por si própria. Provàvelmente, concentrar-se-á num outro assunto ou passará a jogar furiosamente qualquer jôgo, comentando para consigo próprio: «Bem, posso ser um asno em álgebra, mas no foot-ball e no king sou um ás!»

Nalgumas escolas, quando um rapaz é uma negação, segue-se o excelente costume de o pôr à banca de carpinteiro ou à rabiça do arado. Convence-se em breve de que pode fazer bem *alguma coisa* e não mais necessita de se enganar a si próprio acêrca das lições. Pode correr o risco de tentar ser alguém, visto a sua confiança não ser agora abalada, caso falhe.

É essencial, se pretende dominar o receio que lhe inspira um assunto, compreender qual é o seu primeiro objectivo. A primeira tarefa não é aprender qualquer resultado particular. É livrar-se do mêdo. Deve andar para trás uma certa distância e começar com um trabalho que esteja absolutamente seguro de fazer. Quando se começa a aprender uma língua estranjeira, por exemplo, é conveniente arranjar um livro escrito nessa língua, destinado ao ensino das primeiras letras às crianças. Por pior que o tenham ensinado, é quási certo que será capaz de o ler. Esta é a sua primeira vitória — leu um livro escrito de facto para ser usado p oralguém que fala uma língua estrangeira.

Nas matemáticas, é mesmo mais importante andar para trás, até uma encruzilhada ainda mais atrasada. É impossível compreender a álgebra se não dominou a aritmética; é impossível compreender o cálculo se não dominou a álgebra. Se tentar o impossível, sem compreender o que está a fazer, o seu moral sofrerá.

Àparte esta necessidade lógica, há também uma razão psicológica. É quási certo que você carrega ainda consigo todos os sentimentos de frustação e incerteza que o feriram nos vários estágios da sua educação. Sente ainda as derrotas que sofreu quando tinha oito ou nove anos. Êste sentimento desaparecerá imediatamente se fôr direito ao princípio e ler outra vez os livros textos por onde estudou nessa altura. Verificará muitas vezes que as dificuldades desapareceram mesmo sem disso se aperceber.

É por esta razão que há capitulos nêste livro que tratam de coisas como a taboada. Lerá êstes capítulos sem dificuldade. A certa altura do livro achar-se-á outra vez intrigado. Isto significa que alcançou um ponto onde o seu conhecimento do assunto começa a mostrar falhas — nêste ponto, ou noutro qualquer mais atrasado, deve começar a revisão. Não é nada invulgar ficar atrapalhado com coisas que se acabam de aprender. Se continuar a fazer revisões e estiver perfeitamente a par de tudo o que fêz há um ano ou seis meses atrás, não tem de que se aborrecer.

Um bom processo de fazer uma revisão é agarrar num livro texto e examinar os problemas. Se os puder resolver fàcilmente, não necessita ler o livro. Pode acontecer que encontre dificuldades nos exemplos de alguns capítulos. Se o livro fôr um dos que leu há vários anos atrás, e se os resultados dados nêstes capítulos são mais tarde muito usados, então descobriu a origem das suas dificuldades. Se não são importantes pode, entretanto, abandoná-los.

Nas matemáticas é muitas vezes necessário trabalhar às arrecuas. Se topar com uma dificuldade na página 157, tente descobrir o «porquê». Veja se a página em questão faz uso dos resultados dados em outras páginas anteriores. Se a página 157 depende das páginas 9, 32 e 128, leia estas páginas outra vez e trate de as compreender. Se não fôr capaz, não pode, possìvelmente, compreender a página 157.

Se tiver ainda alguma dificuldade peça a alguém que lhe explique a página referida. Verifique com muito cuidado se essa pessoa usa qualquer palavra, sinal ou método, que lhe seja estranho. Se assim suceder, peça que lhe indique onde vem explicada essa palavra, sinal ou método.

Se conseguir ver em que consiste a dificuldade é meio caminho andado para a resolver. Muitas vezes as pessoas têm a cabeça cheia com um nevoeiro de pequenas dificuldades: não estão completamente certas do significado das palavras, não têm uma idéia clara do que está antes, não compreendem o objectivo do trabalho. Podem resolver-se fàcilmente tôdas estas dificuldades se forem atacadas uma por cada vez. Desde que o livro esteja escrito numa linguagem simples e razoável, basta consultar um dicionário durante uns minutos para esclarecer a primeira dúvida. A seguir, é ver que conhecimentos são precisos para a compreensão da demonstração do novo resultado. É possível traçar um diagrama que mostre como um livro constitui um todo, como cada secção depende das secções anteriores. Deve estudar-se um livro tanto de traz para a frente, como da frente para trás: deve saber-se que o resultado da página 50 se demonstra, recorrendo ao resultado da página 29, e que aquêle serve para demonstrar o resultado da página 144. (É evidente que nenhuma pessoa com juízo vai decorar o número das páginas onde se trata da questão que lhe interessa, mas é útil escrever à margem da página 50: «Veja pág. 29; usado a págs. 144»). Muita gente fixa resultados separadamente, mas nunca os liga desta maneira.

Nêste livro não foi possível, para cada simples frase, citar tôdas as referências anteriores que ajudam à sua compreensão. Se não pode compreender uma certa frase, sublinhe-a. É quási certo que em qualquer parte do capítulo, ou do livro, se fêz uma observação especialmente destinada a servir de preparação para a sua compreensão. Numa primeira leitura pode não ter reparado nesta nota. Parecia sem pés nem cabeça. Veja se encontra tais observações. Se assim acontecer, escreva à margem: «Isto explica a frase sublinhada a páginas ...».

Naturalmente julga que esta recomendação pouco vale, que é ridícula. Pode ser que assim seja, mas é necessário muita persuassão para levar as pessoas a fazê-lo. Como regra, alguem que tenha dificuldades no Cálculo ou na Trigonometria, não acredita de boa mente que a atrapalhação seja devida a ignorância da Álgebra ou da Aritmética. Há sempre um exame daqui a um mês, seis meses, um ano, ou o quer que é, e êste exame é de Càlculo ou Topografia e não de Álgebra ou Aritmética. Tentar estudar Matemáticas Superiores sem uma firme compreensão das Matemáticas Elementares, é o mesmo que tentar inventar um avião sem nada saber de motores de automóveis. Antes que a indústria automobilística se tivesse desenvolvido, tôdas as tentativas para a construção de aviões foram fracassos completos.

A revisão das Matemáticas Elementares leva muito menos tempo do que se imagina. ¿Por quantos livros texto estudou um rapaz de dezóito anos? Um, sôbre aritmética, outro sôbre álgebra, um de geometria, uma trigonometria e, talvez, um livro de cálculo. Ponhamos de lado, por enquanto, a Geometria. ¿Quanto tempo leva a percorrer uma Aritmética e uma Álgebra e ver se há algum resultado importante a que no liceu não se tenha ligado importância? Quanto tempo levam a escrever numa fôlha de papel os índices dêstes livros e a pôr uma marca em todos os resultados que se tenham compreendido claramente? Não muito. A vantagem dêste procedimento é que se começa a ver o que se tem de estudar.

Há a tendência para julgar a Álgebra uma vasta selva de confusão no seio da qual se vagabundeia sem mapa nem bússola. É muito melhor pensar da Álgebra (ou da parte da Álgebra que é necessário conhecer) como uma meia dúzia de métodos e uns vinte resultados, ou coisa parecida, dos quais provàvelmente já conhece 60 %. Não necessita mesmo de rever tudo duma vez. Suponha, por exemplo, que encontra dificuldades no Cálculo por não saber muito bem o binómio de Newton. Abra a sua álgebra e veja em que sítio vem. Não se rale, por enquanto, com a demonstração. Procure compreender primeiro, claramente, o que é o binómio de Newton. Está cheio de símbolos como C_r^n ou $\binom{n}{r}$ — usam-se símbolos diferentes conforme o livro que consultar. Êstes símbolos são explicados no capítulo que trata da Análise Combinatória. Não se importe mais uma vez com a demonstração. Veja o que significam êstes sinais. Faça uns poucos de exercícios — C_1^9, C_2^9 e C_3^9, por exemplo. Resolva-os numéricamente. Volte atrás ao binómio e considere casos particulares. Faça $n=4$, por exemplo. O teorema diz respeito à expressão $(x+a)^n$. Faça $x=10$ e $a=1$. Calcule 11^2, 11^3 e 11^4. Qual é a relação entre 11^4 e os números calculados acima? Calcule 101×101 e $101\times101\times101$. O que é que nota acêrca de 11×11 e 101×101? E acêrca de $11\times11\times11$ e $101\times101\times101$? Aparecem os mesmos algarismos em ambos os casos? Julga que no resultado de 101×101 figurarão os mesmos algarismos que no resultado de 11×11? Em $101\times101\times101$ como em $11\times11\times11$? Se assim é, não está muito longe de descobrir por si próprio o teorema binominal.

Desta maneira, caminhando para trás, passa a saber quais as partes da Álgebra que são úteis ao Cálculo. Sabe, pelo menos, o binómio de Newton e como êle o pode ajudar a calcular 1001^4, mesmo que desconheça a demonstração. Quando um livro ou um professor se referirem ao binómio de Newton será capaz de compreender a maneira como dêle se utilizam. Quando estiver completamente familiarizado com a utilidade e o significado do teorema, pode então ser vantajoso estudar a demonstração. (Alguns livros dão demonstrações muito maçadoras. Procure um que lhe dê uma demonstração breve e que lhe seja simpática).

Tradução de F. CARVALHO ARAÚJO

ANTOLOGIA

OS OBJECTIVOS DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

por ***António Monteiro***

(Palestra lida ao microfone do Rádio Club Lusitânia em Maio de 1944)

O aparecimento da ciência moderna foi determinado pela revolução industrial do século XVIII e por isso o pensamento científico teve a sua origem na vida da Indústria e não na vida das Universidades.

As Universidades eram, nessa época, centros de cultura humanista impenetráveis ao Renascimento Científico. A educação e a investigação científica eram realizadas em organismos especialmente criados para êsse fim. As instituïções cuja actividade mais ilustraram a história da ciência francesa, por exemplo, do século XVI até aos fins do século XIX, foram: o Colégio do Rei (fundado em 1530) que mais tarde seria o Colégio de França, o Jardim do Rei, a Escola de Pontes e Calçadas, a Escola de Minas, o Observatório de Paris, a Escola de Artilharia, a Academia das Ciências, a Academia de Arquitectura, a Academia de Cirurgia, a Escola Politécnica, a Escola Normal Superior, etc., etc.

Só depois da revolução industrial ter pôsto em evidência a importância da ciência é que ela penetrou nas Universidades, com uma lentidão que arrepia quando considerada a distância. Para ilustrar esta afirmação, basta notar que nos princípios do século XIX (mais precisamente em 1802) se exigiam para a entrada na Universidade de Harvard, na América do Norte, conhecimentos de Aritmética que não iam além da regra de três simples, e que na Alemanha o ensino das matemáticas elementares só passou das Universidades para os Liceus entre 1810 e 1830. Mesmo em França, é preciso chegar aos fins do século XIX para que, com a Terceira República, as Universidades possam rivalizar com as chamadas Grandes Escolas.

No século XX a investigação científica aparece como um factor que desempenha um papel de primeiro plano na estruturação da vida das nações.

Nos países em que as Universidades não estiverem directamente ligadas e interessadas na resolução dos problemas fundamentais da vida económica da Nação, elas não podem desempenhar o papel de centros propulsores do progresso científico. Por isso as Universidades dos países mais avançados modificaram profundamente a sua feição, durante o século XX, com a criação de seminários, institutos, centros de estudo e laboratórios destinados a transformá-las em grandes centros de investigação.

O facto da actividade científica ter crescido vertiginosamente nas últimas décadas, deu origem a numerosos problemas de organização difíceis de resolver. Um dos problemas mais discutidos e dos mais importantes é o das relações entre o ensino e a investigação. É um facto indiscutível que as Universidades não podem, só por si, atacar a resolução de todos os problemas que a vida põe em cada época. Por isso, entre as duas grandes guerras dêste século, se acentuou a tendência para organizar a investigação científica como um serviço público independente. A criação recente, em Portugal, da Estação Agronómica Nacional é um exemplo particular desta afirmação. Trata-se na realidade da transposição duma prática corrente na vida das grandes emprêsas industriais, em que um pessoal científico especializado realiza, em laboratórios e institutos especiais, as pesquizas necessárias à vida dessas emprêsas. Mas se pensamos que a investigação científica deve ser organizada como um serviço público independente, e que só assim ela pode ser eficiente, no mundo de amanhã, isto não quere dizer que ela deva ser um previlégio dêsses serviços.

Ser investigador é um dever de todo o cidadão consciente das suas responsabilidades perante a sociedade, porque ser investigador é adoptar uma atitude crítica, perante a vida e o conhecimento, para chegar a novas conclusões.

Mas é claro que para investigar, em certos capítulos da ciência, é necessária uma preparação especial, um longo treino, uma escola. As universidades têm, sob êste aspecto, um papel importante a desempenhar, mas para isso é necessário que o ensino não vise exclusivamente a transmissão de conhecimentos, isto é, que êle não seja um ensino erudito e portanto estéril e infecundo.

Existem, na realidade, investigadores sem qualidades para o ensino, mas nenhum professor poderá iluminar as suas lições com côres vivas e profundas se não tiver vivido os problemas que trata, se não tiver investigado na disciplina que professa.

Torna-se necessário coordenar a actividade das Universidades e dos Institutos de Investigação com o objectivo de aumentar o rendimento da produção científica e facilitar a formação de quadros de investigadores.

Para realizar o apetrechamento intelectual do nosso país, em condições que permitam orientar com eficiência as actividades económicas para a libertação material do homem, é necessário organizar um plano adequado em que a clareza de visão se alie à viabilidade de execução.

Vamos indicar, em breves palavras, a importância da cultura matemática no apetrechamento intelectual do país.

A matemática — ou a ciência do cálculo — é um método geral de pensamento aplicável a tôdas as disciplinas e desempenha portanto um papel dominante na ciência moderna.

A grande obra científica do século XVII foi a organização da Mecânica numa ciência em que é possível prevêr os fenómenos por meio do cálculo matemático. Esta conquista, a que está ligado o grandioso nome de Newton, criou uma base científica segura para a ciência das máquinas a vapor, para citar um exemplo cuja importância é desnecessário realçar. A Química transformou-se, no século XVIII, numa ciência em que o cálculo é possível e esta grande conquista da ciência dêsse século, foi a base fundamental para o desenvolvimento da Indústria Química. No século XIX a Física Matemática criou as bases científicas necessárias para o desenvolvimento da grande Indústria. O século XX será possívelmente o século da Biologia Matemática. Podemos, em qualquer caso, afirmar que assistimos a uma verdadeira matematização de todos os ramos da ciência.

A Matemática aparece assim como uma disciplina fundamental, de cujo progresso depende, em grande parte, o desenvolvimento de muitas outras. Prestar a devida atenção a esta circunstância não é um acto de justiça é antes um acto de prudência e elementar bom senso.

É difícil descrever, exactamente, o estado em que se encontra a cultura matemática portuguesa, mas o mais importante é, como se compreende fàcilmente, comparar o ritmo do seu desenvolvimento com o dos países mais avançados. Encarada a questão sob êste aspecto crucial, podemos afirmar que o movimento matemático português se caracteriza por um atrazo crescente em relação ao movimento matemático internacional.

No interêsse da cultura, que é o interêsse do país, é preciso olhar de frente para esta situação e tirar as conseqüências necessárias. Para desenvolver e actualizar a cultura matemática portuguesa, em condições que garantam a continuïdade e eficiência da obra a realizar, é necessário subordinar essa tarefa a um plano de conjunto traçado com largas perspectivas.

Os matemáticos portugueses conscientes das suas responsabilidades perante o país e perante a cultura, resolveram unir-se para a realização das missões que o dever lhes impõe.

Em 4 de Outubro de 1943, um grupo de investigadores portugueses fundou a Junta de Investigação Matemática e definiu os seus principais objectivos nos seguintes termos:

1.º — Promover o desenvolvimento da investigação matemática;
2.º — Realizar os trabalhos de investigação necessários à economia da Nação e ao desenvolvimento das outras ciências;
3.º — Sistematizar e coordenar a inquirição dos matemáticos portugueses;
4.º — Vincular o movimento matemático português com o dos outros países e, em especial, com o dos países ibero-americanos;
5.º — Despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora.

Os mesmos investigadores convidaram tôdas as pessoas interessadas a ingressarem nêste agrupamento.

Estão hoje reünidos nesta Junta de Investigação Matemática a quási totalidade dos investigadores portugueses que têm dado provas de capacidade, grande dedicação e interêsse efectivo pelo desenvolvimento da cultura matemática portuguesa. Trata-se portanto duma organização que representa as fôrças vitais dessa cultura, o que revela a existência duma consciência profunda dos problemas da hora presente.

As ciências matemáticas têm um grande papel a desempenhar na construção dum Portugal feliz e progressivo. A Indústria, a Agricultura, a Meteorologia, a Aviação, a Navegação, a Estatística, os Seguros, a Engenharia, as Finanças, são baseadas no cálculo matemático.

Criar as bases fundamentais para o aperfeiçoamento e actualização da nossa cultura matemática é uma tarefa gigantesca que só pode ser realizada por vontades disciplinadas que saibam subordinar o interêsse individual ao interêsse colectivo.

Quando os matemáticos portugueses, sem serem solicitados, sem serem forçados, mas animados do grande desejo de servir a Nação, fundaram a Junta de Investigação Matemática, disseram ao país: *para cumprir os nossos deveres, estamos presentes.*

A ARITMÉTICA RACIONAL

por *António Monteiro* e *J. da Silva Paulo*

(Capítulo 0 da «ARITMÉTICA RACIONAL» dos mesmos Autores)

Os Primitivos. A noção de número inteiro tem origem empírica e apareceu no espírito do homem em épocas muito recuadas na História. Em certos calhaus rolados, encontrados no mesolítico, existem, traçados a ocre vermelho, vários sinais, alguns dos quais *barras e pontos*, são presumìvelmente sinais de numeração. Nalgumas gravuras rupestres encontram-se sinais, em geral *barras e pontos* ou *pequenos círculos*, que parecem representar registos de contagens. Em sociedades muito primitivas (tríbos selvagens da África e da Austrália) aparece já a noção de número inteiro, embora vaga e embrionária. O homem de certas tríbos (Pigmeus) sabe contar até cinco e a respeito duma colecção com mais objectos diz que ela tem *muitos* objectos.

Na língua francesa existem duas palavras, *trois* (três) e *très* (muitos) próximas parentes, talvez vestígios da época em que o homem não contava além de dois; mais notável é o caso da palavra inglêsa *thrice*, que tem as duas significações «três vezes» e «extremamente». De resto, ainda hoje existem sociedades em que só há nomes para os números *um* (urapum) e *dois* (okosa).

Os progressos da Aritmética resultam em regra de progressos da vida económica do homem. Os indígenas *Bakumu* não sabem contar além de 30 ou 40, porque os seus contratos comerciais ou de matrimónio não vão, em regra, além de 30 ou 40 unidades.

Existe uma Aritmética dos pastores, como uma Aritmética dos agricultores e dos comerciantes. O pastor que regista o número de crias que nasceram no seu rebanho, serve-se de entalhes no cajado, um por cada cria (Serra da Estrêla). É já um sistema de representação dos números inteiros.

O Misticismo. O desenvolvimento desta representação fêz, pouco a pouco, ligar outro significado à idéia de número. Assim como o desenho de homens e animais se prestava, como representante dêsses homens e dêsses animais, a certas práticas místicas que tinham por fim *conciliar* as fôrças desconhecidas que podiam tornar propícios certos actos de defêsa e de ataque ou de caça, assim também ao número, como representante de algum modo de certos aglomerados, começou a estar ligada uma idéia mística.

A Escola Pitagórica, entre os gregos, atribuía propriedades metafísicas aos números: «*o número é a alma das coisas*», «*o número três representa a divindade*», «*o número é a cadeia, omnipotente e autogénea, que constitui a estabilidade das coisas no mundo*», «*é a prisão na qual a unidade divina fechou o Universo*».

As designações ainda hoje usadas: *números primos, números amigáveis, números perfeitos*, são sobrevivências dessa época.

A mística dos números subsiste ainda em certas camadas populares e nas élites (quando se atribuem, por exemplo, ao número treze, influências perniciosas).

Os Logísticos. A partir da observação foi o homem coligindo dados da experiência, acumulando experiências vividas, e traduzindo-as depois em *leis empíricas*, quando verificou a repetição dos mesmos fenómenos nas mesmas condições. Entre essas leis figuram as leis do cálculo. Há pelo menos cinco mil anos que o homem sabe calcular com números inteiros. No antigo Egipto, e entre os Babilónios, existia já um sistema completo de regras de cálculo sôbre os números inteiros, e sôbre os números racionais, maiores que zero. Criou-se mesmo uma classe de *calculadores profissionais* (chamados *escribas* entre os egípcios, entre os gregos terão o nome de *logisticos*, de *logos* = cálculo, *logisticos* = hábil calculador), que aplicavam essas regras sem se preocuparem com a sua justificação nem com a definição das operações a que dizem respeito (Empirismo do Cálculo).

De dois dêles nos ficam os mais antigos documentos sôbre Aritmética que actualmente se conhecem, os *papiros de Moscovo* (Século XXI A. C.), ou de Golenishschev, e de *Rind*, ou de Ahmes (Século XIX A. C.).[1]

Os Gregos. Depois dos egípcios e dos babilónios, foram os gregos que mais contribuiram para o desenvolvimento da Aritmética. Foram notáveis nêste período: *Pitágoras* (580-501 A. C.) que descobre os irracionais, (facto importantíssimo que será mais tarde o ponto de partida para um rápido desenvolvimento da Aritmética) e *Euclides* (300 A. C.) que esboça uma ordenação dos conhecimentos de Aritmética da época, nos seus ELEMENTOS, onde há já muitas passagens com demonstrações formais de certas regras de cálculo. No entanto, a preponderância da Geometria e o apêlo constante à *representação* geométrica, o desprêzo pela «prática»,[2] paralizam o

[1] Golenishschev e A. Henry Rind foram os primeiros possuidores nos tempos modernos daqueles papiros: Ahmes é o nome do escriba que o escreveu.

[2] Veja: Bento de Jesus Caraça. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Vol. I (cap. IV), Vol. II (cap. IV). Lisboa, 1941 e 1942.

desenvolvimento autónomo da Aritmética e dão origem a uma estagnação na técnica do cálculo.

Para os matemáticos gregos as *fracções* não eram números eram «razões» de números inteiros. Os calculadores profissionais (Logísticos) continuavam, porém, a *calcular* com as *fracções* como se fôssem *números*, indiferentes às críticas irónicas de *Platão*.

Daqui em diante até ao Renascimento o principal progresso realizado consiste na elaboração lenta dum simbolismo que terá as suas repercussões.

O Simbolismo. A história das notações aritméticas foi dividida por Nesselman em três grandes períodos: o *retórico*, o *sincopado* e o *simbólico*.

Na *Aritmética Retórica*, os problemas são resolvidos por uma seqüência de raciocínios expressos inteiramente por meio de palavras. Não existem nem abreviaturas, nem símbolos. A preocupação ainda hoje existente de se enunciarem os teoremas da Aritmética recorrendo apenas a palavras e sem utilizar a simbologia conhecida, é uma sobrevivência do estilo retórico.

Na *Aritmética Sincopada*, que nasce com *Diofanto* (Século III), usam-se já abreviaturas para algumas operações e quantidades. É o ponto de partida para uma larga e longa evolução. Parte-se da palavra, passa-se à abreviatura e daqui ao símbolo puro.

É interessante assinalar, por exemplo, a evolução de sinal *menos* $(-)$. Inicialmente, no período retórico, escrevia-se *minus*, depois aparece a abreviatura $\overline{m}$, no período sincopado (o traço sôbre a letra *m* usava-se para recordar que ela não tinha no discurso o significado usual), e finalmente desaparece o *m* e fica simplesmente o traço —.

Durante a Idade Média a Aritmética é caracterizadamente sincopada, Diofanto voltando à tradição dos calculadores profissionais, é levado a desenvolver as regras do cálculo algébrico abstracto, sem se preocupar com a *representação geométrica* dos números. Por isso, para Diofanto, o número pode ser *inteiro*, *racional* e *não racional*.

A *Aritmética Simbólica* nasce, pode dizer-se, com *Viète* que no seu livro *Logistica Speciosa* propõe o seguinte artifício: «*o emprêgo dos símbolos permanentes pela sua natureza e fáceis de compreender, por exemplo: a notação do valor desconhecido por A ou por outras vogais, ao passo que os valores dados são designados por B, C, G e outras consoantes.*»

Cincoenta anos mais tarde *Descartes*, na sua *Géométrie*, representa, pelas primeiras letras do alfabeto, as constantes, e pelas últimas, as variáveis (notação que ainda hoje usamos).

É claro que êstes períodos não são separados por barreiras nítidas; na mesma época há matemáticos que usam o simbolismo ou forma sincopada, enquanto outros escrevem ainda em estilo retórico. Do facto é prova o que escrevia *Moivre* a *Jean Bernoulli* (1705) a propósito de *Gregory*: «*Há uma coisa ridícula no seu cálculo, são as suas expressões, que sendo escritas por extenso, sem a substituição das várias quantidades por uma única letra, ocupam algumas vezes mais de meia página.*»

Esta transcrição mostra também uma das vantagens do simbolismo, a economia do esfôrço, que não é nem a maior, nem a mais importante.

A Mecanização do Cálculo. A criação dum sistema de notações adequadas ao cálculo, nasceu da necessidade de abreviar e simplificar a resolução de numerosos problemas qne se punham na vida do homem e determinou por sua vez um desenvolvimento prodigioso da Aritmética. Aparecem então as regras fixas que permitem calcular com rapidez e segurança, poupando o espírito e a imaginação (Leibniz), e daqui resulta uma verdadeira MECANIZAÇÃO DO CÁLCULO.

Descartes vê no emprêgo sistemático do cálculo algébrico um método poderoso e universal para resolver todos os problemas e desta corrente de idéias resulta uma verdadeira industrialização da matemática. Sob o ponto de vista que nos interessa, é conveniente notar que esta corrente de idéias continua a tradição dos logísticos, na medida em que se fixa a atenção sôbre o mecanismo do cálculo, independentemente da natureza das entidades sôbre as quais se opera.

É o que acontece quando os matemáticos profissionais aplicam o mecanismo do cálculo já conhecido a certas «entidades» (números negativos e imaginários) que apareciam como resultado de operações «impossíveis» $(1-2, \sqrt{-1})$. A prática do cálculo com êstes números «absurdos», «imaginários» ou «impossíveis» conduzia com freqência a resultados «exactos» e esta circunstância deu origem a que mais tarde aparecessem as primeiras «interpretações concretas» das novas entidades. Parece que Descartes foi o primeiro a reconhecer que se pode raciocinar sôbre entidades abstractas, isto é: de natureza não especificada. Para Descartes a Aritmética e a Geometria «*consistem ùnicamente numa sucessão de conseqüências deduzidas por raciocínio.*» [3] A racionalização da matemática iniciada com Descartes torna os métodos mais simples e mais fáceis (Fontenelle). Nos fins do século XVIII, Lagrange diria que a Química era tão fácil como a Álgebra.

A Aritmética Racional. O aparecimento de novas espécies de números conduziu naturalmente ao estudo pormenorizado das respectivas leis do cálculo. Inicia-se

[3] **Règles pour la direction de l'esprit, règle 2ª.**

assim um movimento de crítica aos fundamentos da Aritmética, que se esboçara já com Descartes, Newton e Leibniz; mas é preciso chegar ao fim do século XIX para que apareça a Aritmética Racional com os trabalhos de Weierstrass, Dedekind, Cantor, Peano e principalmente com os trabalhos de Hilbert e da sua Escola.

Podemos considerar duas atitudes em frente da Aritmética, que não são nem opostas nem contraditórias. Uma, aquela que o homem tomou desde início, com fins utilitários, baseada na necessidade de resolver certos problemas da vida diária. Esta atitude leva-o a *coleccionar noções, leis* que as regem e *regras*, que lhe permitem resolver aquêles problemas. Num estado mais adeantado daquelas noções, leis e regras, deduz outras regras, mas tudo continua sob a forma dum *conjunto de informações* que se aplicam à resolução de certos problemas. É a ARITMÉTICA PRÁTICA.

Nela existem regras, fórmulas de cálculo, teoremas, definições, etc., que são de grande utilidade prática, e que por isso são estudadas no ensino primário e nos primeiros anos do liceu. Todo o ensino destas matérias tem um carácter semi-empírico, semi-lógico e em grande parte metafísico.

A outra atitude, que só aparece em plena luz do século XX, nasce da crítica aos fundamentos da Aritmética e conduz à ARITMÉTICA RACIONAL.

Aqui aparecem as mesmas regras, as mesmas fórmulas de cálculo, teoremas e definições, mas apresentando-se como um conjunto de proposições lògicamente ordenadas. A Aritmética organiza-se como uma ciência dedutiva. Podemos dizer, com J. Young, que uma ciência dedutiva é um conjunto de proposições apresentadas numa certa ordem, de tal modo que cada proposição que segue *uma determinada*, é uma conseqüência lógica de algumas ou tôdas as proposições que a precedem. E logo surge a pregunta: qual deve ser o ponto de partida de uma teoria dedutiva? A primeira proposição, pelo facto de ser a primeira, não se pode deduzir de proposições anteriores. A segunda, geralmente, não será conseqüência da primeira. É claro, então, que há que partir de um conjunto de uma ou mais proposições que *não se provam*. A estas primeiras proposições pode dar-se o nome de *Proposições Primitivas* (outros autores chamam-lhe Postulados, Axiomas, Hipóteses, Leis, etc.). É claro que se estabelecia um ciclo vicioso se quiséssemos provar tôdas as proposições como conseqüências lógicas umas das outras.

Temos portanto que partir dum certo número de *proposições primitivas*, que admitimos como verdadeiras, e é a partir delas que demonstramos as outras proposições. Estas últimas têm o nome de «*proposições demonstráveis*» (Teoremas, Lemas, Princípios, etc.)

Do mesmo modo se vê, pela análise das definições existentes numa teoria, que deve haver algumas noções ou têrmos «não definidos» a que se dá o nome de idéias ou *noções primitivas*. As entidades correspondentes são representadas, em regra, por símbolos. Elas aparecem, em particular, nos enunciados das *proposições primitivas*, que fixam as regras que devem ser respeitadas no manejo daquelas noções. Na concepção formalista de Hilbert as noções primitivas são até consideradas como definidas exclusivamente por aquelas regras.

Quando o formalismo é levado até às suas últimas conseqüências (é o que acontece quando, com Hilbert, se abstrai completamente do significado dos símbolos que intervêm numa teoria determinada) então os símbolos ($+$, $\cdot$, $\leq$, $<$, a, b, etc.) passam a ser *entidades concretas* que se manejam de acôrdo com regras bem determinadas. Por isso a atitude formalista de Hilbert e da sua Escola, se converteu numa atitude nìtidamente realista.

O Cepticismo. Quando a crítica às regras de cálculo da Aritmética tinha chegado a esta posição, levantou-se nos fins do século XIX e princípios do nosso século (de acôrdo com as tendências gerais do pensamento da época) um côro geral de descrença e desconfiança nas virtudes da vaga de racionalismo que invadia o pensamento matemático.

O grande matemático francês H. Poincaré, por exemplo, com certo tom de tristeza, dizia: *Antes de Descartes, só o acaso, ou o génio, permitiam resolver uma questão de geometria; depois de Descartes pode-se chegar ao resultado por regras infalíveis; para ser um geómetra basta ser paciente. Mas um método puramente mecânico, que não exige ao espírito de invenção nenhum esfôrço, não pode ser realmente fecundo*».

Entra-se numa época em que as tendências racionalistas da Matemática sofrem acusações da mais variada natureza: «*automatismo lógico*», «*intelecto petrificante*», «*verbalismo escolástico*», «*mecanismo estéril*», «*malabarismo cego*», etc.

A maioria daqueles que ainda defendem as tendências racionalistas da Matemática não o fazem sem largas concessões às tendências irracionais (intuïcionistas, emocionais, instintivas, idealistas, místicas, etc.).

Chega-se a dizer que a grande fraqueza da Álgebra e da Lógica é «*não ter sinais para representar as noções confusas.*»

Tôdas estas tendências vinham de longe e persistem nos nossos dias. Já d'Alembert dizia na ENCYCLOPEDIE (T. I. 1751, pág. 551, artigo Application) que o «*uso demasiado freqüente e fácil da Análise pode tornar o espírito preguiçoso.*» Carnot, no princípio do século XIX, apregoava mesmo a necessidade de «*renunciar a considerar as quantidades negativas como seres reais*» e exaltava o papel da intuïção.

Tendências Modernas. O desenvolvimento vertiginoso da Matemática no século XX, veio porém demonstrar a necessidade e utilidade dos métodos racionais, em particular da unificação de disciplinas que até então eram estudadas separadamente, reduzindo-se a pó o cepticismo anteriormente referido. Esta tendência da Matemática moderna tem naturalmente as suas repercussões no estudo da teoria dos números e permite encará-la sob novos aspectos.

Para que a *Aritmética* se possa chamar *Racional* é indispensável que ela seja apresentada sob a forma duma teoria dedutiva, e para isso é necessário distinguir cuidadosamente as *proposições primitivas* das *proposições demonstráveis.*

Sem esta distinção o estudo da Aritmética tem um carácter nebuloso que torna impossível o entendimento de qualquer demonstração.

Um estudo crítico aturado demonstrou, porém, que a Aritmética se pode organizar como uma teoria dedutiva de muitas e variadas maneiras.

A nossa atenção pode então ser dirigida para a estrutura das diversas teorias. Como a ordem em que «*aparecem*» os «*teoremas*» pode variar com uma certa latitude, surge a tendência para *Racionalizar* a própria *Aritmética Racional.*

Essa racionalização pode ser feita de forma a abreviar o estudo, economizar o esfôrço, aliviar a memória e obter um conhecimento mais profundo da própria teoria. Os autores dêste livro visaram (além de tudo isto) o objectivo fundamental do ensino da Aritmética Racional no liceu: «*preparar o aluno para prosseguir estudos superiores.*»

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CONGRESSO PARA O AVANÇO DAS CIÊNCIAS — CÓRDOVA — OUTUBRO DE 1944

A «Gazeta de Matemática» apresenta neste número uma rápida resenha dos trabalhos de matemática apresentados na 1.ª secção do Congresso Luso-Espanhol. Os Profs. Ruy Luís Gomes e Bento de Jesus Caraça do Centro de Estudos de Matemática da Faculdade de Ciências do Pôrto e do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, respectivamente, relatam a participação portuguesa e o Prof. Síxto Ríos da Universidade de Madrid refere a participação espanhola.

O Centro de Estudos de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto apresentou ao Congresso de Cordova os seguintes trabalhos:

A — «*Álgebra Moderna*»: António de Almeida e Costa: 1 — *Sôbre os anéis semi-primários.* 2 — *Sôbre um teorema dos corpos comutativos.*

B — «*Análise*»: José Gaspar Teixeira: *Sôbre uma certa classe de polinómios de coeficientes complexos.*

C — «*Teoria Geral da Medida e da Integração*»: Luís Neves Real: *Sôbre a construção algébrica da teoria geral da medida*; Ruy Luís Gomes: *Sôbre a definição algébrica de integral em espaços abstractos.*

D — «*Topologia*»: Alfredo Pereira Gomes: *Sôbre a a noção de espaço compacto*; António Monteiro: *Caracterização dos espaços topológicos mais gerais determinados pela família dos conjuntos fechados*; Maria O. Botelho e Maria H. Costa Ferreira: *Caracterizações simples dos espaços de Kuratowski.*

O Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras participou no Congresso de Córdoba de Outubro de 1944 com a apresentação de três trabalhos individuais e um colectivo.

Os trabalhos individuais foram:

a) *Os polinómios* $Q(x)$ *e* $G(x)$ *como resultados da ortogonalização dos sistemas* $[f_k = (-1)^k \cdot n^k \cdot x^k]$ *e* $\left[f_k = \frac{(x)_k \cdot m^{x/2}}{\sqrt{x!}}\right]$ pelo assistente Dr. Alfredo Miranda.

b) *Sôbre os conceitos de regime de capitalização e de equivalência financeira,* pelo assistente Dr. Augusto Sá da Costa (actualmente em Zürich).

c) *Sôbre a população portuguesa,* pelo assistente Dr. João Remy Freire.

O trabalho colectivo foi a seguinte Proposta apresentada e discutida na 1.ª Secção (Matemáticas e Astronomia) do Congresso:

«1. É de todos sabido que, por falta duma tábua de mortalidade portuguesa, todos os estudos e determinações actuariais em Portugal têm sido sempre feitos sôbre a base de tábuas de mortalidade, gerais e especiais, estrangeiras.

2. Os inconvenientes que daí resultam, já patentes actualmente, tornar-se-ão ainda maiores quando amanhã o problema da previdência ultrapassar definitivamente a fase privada, de que agora começa a sair, para se entrar numa larga política de previdência social.

3. Não são apenas os elementos que habitualmente figuram numa tábua de mortalidade que faltam — é todo o estudo teórico da variação populacional portuguesa que está por fazer.

4. Julga-se que tal estudo deve interessar igualmente à Espanha e que haverá, portanto, vantagem em que êle seja prosseguido paralela e coordenadamente nos dois países.

5. Em vista disso, o Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia (Universidade Técnica de Lisboa) propõe à Associação Luso-Espanhola para o Progresso das Ciências que promova a realização coordenada de trabalhos nos dois países, tendentes:

a) À determinação de funções e coeficientes de variação populacional nas diferentes regiões da Península Ibérica e sua unificação possível.

b) Ao estudo da distribuïção, suas características e evolução da distribuïção da população por idades, nas diferentes regiões peninsulares.

c) À coordenação da recôlha de dados demográficos pelos organismos estatísticos dos dois países.

d) À obtenção, como objectivo final, de tábuas de mortalidade regionais e, se possível, duma tábua de mortalidade peninsular».

Esta proposta foi aprovada por unanimidade.

Noticia de los trabajos de Matemáticas presentados en el Congresso:

1.— L. Pérez-Cacho. — *El último teorema de Fermat y los teoremas de irreducibilidad algebraica.*

Llega entre otros notables resultados al siguiente: el último teorema de Fermat queda reducido a demostrar que la ecuación $z^2-a^n z+a=0$ es irreducible en $K(I)$ siendo a um número de este cuerpo.

2.—L. Pérez-Cacho.—*Sobre los números de Mersenne.*

Apoyándose sobre el teorema de Euler y sobre la propriedad según la cual los divisores de los números de Mersenne son de la forma $8k\pm1$ (k natural), demuestra la congruencia fundamental: $A+B\equiv2^n$ (n^2) de la cual deduce $A+B\equiv0$ (16) de que obtiene notables consecuencias.

2. — L. Pérez-Cacho. — *Divisiones del cuerpo cuadrático* X^2-5.

Demuestra que dichos númercs son $2,5$ y los números primos terminados en 1 ó en 9, de lo cual deduce interesantes consecuencias para sus resultados relativos a los números de Mersenne.

3. — D. Ortiz Ribas. — *Algunos casos de radicación abreviada o rapidísima.*

Exposición detallada de algunas reglas abreviadas para obtención de raíces, basada en la conocida igualdad aproximada $(1+a)^n \backsim 1+na$.

4. — J. R. Fuentes Miras. — *La falta de contradicción en la Matemática. Rasgos generales del logicismo, formalismo e intuicionismo.*

Exposición clara de los trabajos contemporáneos para la fundamentación de la Matemática, en sus tres tendencias fundamentales.

5. — C. Saenz García. — *Un problema ingenieril y diversas sugerencias matemáticas.*

Estudio geométrico de algunos problemas de mínimos en relación con el problema de ingeniería que se refiere a la construcción de depósitos reguladores de los abastecimientos de água.

6. — R. de la Hoz Arderíus. — *Una simplificación para la práctica de la integración gráfica.*

Modificación de los métodos, bien conocidos, de construcción de la curva integral y simplificación del dispositivo para su realización mecánica.

7. — S. Ríos. — *Sobre la reordenación de series de Dirichlet.*

Dos teoremas relativos a la prolongación analítica de series de Dirichlet por alteración del orden de los términos, que precisan algunos resultados anteriores del autor.

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICAS APLICADAS À ECONOMIA (I. S. C. E. F.)

MÉTODO DOS MENORES QUADRADOS

Com início no passado mês de Novembro, o Dr. João Remy Teixeira Freire realizou neste Centro um curso de cinco sessões sôbre o assunto em epígrafe, destinado a pessoas com habilitação equivalente à de um curso de Matemáticas Gerais, mas especialmente dedicado àquelas que pretendam fazer a sua aplicação a assuntos econométricos ou demográficos.

ECONOMETRIA

O Prof. Dr. Bento de Jesus Caraça fêz recentemente duas lições neste Centro. Na primeira expôs sumàriamente os objectivos desta Ciência e os seus fundamentos. Na segunda referiu-se a alguns dos problemas mais importantes da Econometria. Expôs, dentro desta ordem de idéias, o plano de trabalho do Centro para o presente ano lectivo. Êsse plano compreende:

a) Um estudo teórico e prático da distribuïção dos rendimentos e da determinação da riqueza nacional;

b) A determinação de algumas funções de procura e oferta do nosso mercado e de funções-custo de produção;

c) Estudo de demografia matemática tendente à determinação das características da população portuguêsa e de uma tábua de mortalidade geral portuguêsa.

FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PORTO — DOUTORAMENTOS

Em 19 e 20 de Junho de 1944 realizaram-se na Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto as provas de doutoramento do assistente Jayme Ríos de Souza. No 1.º dia foram argüentes os Profs. Drs. Scipião de Carvalho e Augusto Queiroz para os pontos «Integrais Abelianos» e «O tetraedro regular em projecção paralela», respectivamente, no 2.º dia foi discutida a tese «Estudo de algumas funcionais e sua aplicação à resolução de equações de derivadas parciais» pelos Profs. Drs. Scipião de Carvalho e A. Madureira e Sousa.

Em 14 e 15 de Dezembro de 1944 na mesma Faculdade prestou provas para obter o grau de doutor o assistente Gonçalves Miranda. Os pontos do primeiro dia foram «Espaços de Hilbert e suas aplicações à Mecânica Quântica» e «Teorema limite de Probabilidade (de Laplace-Tchebicheff)» e argüentes, respectivamente, os Profs. Drs. Ruy Luís Gomes e Abílio Aires; no último dia foi discutida a tese «Multiplicações vectoriais associativas e modulares. Representações geométricas» pelos Profs. Drs. Augusto Queiroz e Ruy Luís Gomes.

SÔBRE O MOVIMENTO MATEMÁTICO ESPANHOL

Algumas informações. — Reforma universitária: Programas da licenciatura em ciências matemáticas

1.—El Prof. António J. Flores ha obtenido últimamente resultados de um interés fundamental en el campo de la Fisica teórica y tambien en diversas ramas de la Topologia.

2.—El Prof. R. San Juan explica durante el año académico 1944-45 um curso sobre Funciones cuasianalíticas, en la Fundación Conde de Cartagena de la R. Academia de Ciencias de Madrid.

3.—El Prof. T. R. Bachiller explica un curso sobre Grupos Topológicos en el Instituto Jorge Juan.

4.—El Prof. S. Ríos explica un curso sobre la Representación analítica de funciones reales en la Fundación C. de Cartagena de la R. Academia de Ciencias de Madrid.

Sección de Matemáticas.

Primer curso (cuatrimestres primero y segundo): Análisis matemático, primero (Algebra lineal, Algoritmos indefinidos, Cálculo diferencial y aplicaciones): cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Geometría y Trigonometría (estudio sintético del espacio euclídeo y proyectivo, Trigonometría, Sistemas de representación): cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Física experimental, tres horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Teoría de conocimiento (sólo en primer cuatrimestre y voluntaria), dos horas semanales de clase.

Segundo curso (cuatrimestres tercero y cuarto): Análisis matemático, segundo (Cálculo integral, aplicaciones. Teoría clásica de ecuaciones. Ecuaciones diferenciales ordinarias elementales), cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Geometría analítica, cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Física teórica, primero (Mecánica y Termología), tres horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Astronomía general y Topografía, tres horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Tercer curso (cuatrimestres quinto y sexto): Análisis matemático, tercero (Ecuaciones diferenciales, Ecuaciones integrales, Cálculo de variaciones), cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Geometría proyectiva, tres horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Cálculo de probabilidades, tres horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Física teórica, segundo (Optica y Electricidad): Tres horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Cuarto curso (cuatrimestres séptimo y octavo): Análisis matemático, cuarto (funciones de variable compleja), cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Geometría descriptiva, tres horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Mecánica teórica (principios de Dinámica analítica y mecánica relativista), cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Estadística matemática, cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

Quinto curso (cutrimestres noveno y diez): Análisis matemático, quinto (Funciones reales, Cálculo funcional) dos horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Geometría diferencial, dos horas semanales de clase y una de sesión práctica.

Física matemática. dos horas semanales de clase y una de sesión práctica.

(A elegir dos asignaturas entre Astronomía esférica y Geodesia, Topología, Algebra superior, Geometría algebraica, Teoría de números) cuatro horas semanales de clase y dos de sesión práctica.

En todos los cursos habrá un Seminario Matemático dirigido por un catedrático o miembro del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus — Outubro de 1943. — Ponto n.º 4.

I

1900 — Determine as condições a que deve satisfazer m para que as raízes da equação $(m+2)x^2+x-(m^2+2m-1)=0$ sejam de sinais contrários e indique os casos, separadamente, em que a raíz de maior valor absoluto tem os dois sinais possíveis. R: *Para que as raízes sejam de sinais contrários, deverá ser* $-(m^2+2m-1):(m+2)<0$ *ou* $(m^2+2m-1):(m+2)>0$. *As raízes do trinómio* m^2+2m-1 *são* $-1\pm\sqrt{2}$ *e êste trinómio é positivo para os valores de* m *tais que* $m<-1-\sqrt{2}$ *e* $m>-1+\sqrt{2}$. *Como* $m+2$ *é positivo para* $m>-2$, *segue-se que as raízes da equação têm sinais contrários para os valores de* m *que satisfazem a* $m>-1+\sqrt{2}$. *Por outro lado* m^2+2m-1 *é negativo para os valores de* m *tais que* $-1-\sqrt{2}<m<-1+\sqrt{2}$, *e* $m+2$ *é negativo para* $m<-2$, *donde a condição ser também verificada para os valores de* m *que satisfazem à dupla desigualdade* $-1-\sqrt{2}<m<-2$. *A raíz de maior valor absoluto é positiva para os valores de* m *que tornavam* $-1/(m+2)$ *positivo, o que exige que* m *seja menor que* -2. *Quere dizer que a raíz de maior valor absoluto é positiva para os segundos valores achados* $-1-\sqrt{2}<m<-2$. *Será negativa quando* $-1/(m+2)<0$ *ou seja* $m>-2$, *e, portanto, para os valores de* m *que satisfazem a* $m>-1+\sqrt{2}$, *primeiros valores que se acharam.*

1901 — Indique a condição a que deve satisfazer c para que a equação $12x+15y=c$ admita soluções inteiras. Justifique a resposta. R: c *deve ser um múltiplo do* m. d. c. *de* 12 *e* 15 *ou seja* $c=\dot{3}$, *porque sendo assim, a equação que se obtém dividindo os coeficientes da equação proposta por* 3 *tem os coeficientes das incógnitas primos entre si.*

1902 — Exprima em função de n a soma dos n primeiros números pares. R: *Os primeiros números pares constituem uma progressão aritmética de razão* 2 $\div 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$ *cuja soma é* $S=(2+2n)\,n:2=n\,(n+1)$.

II

1903 — Determine por logaritmos o perímetro dum losango em que um ângulo inteiro mede $115°\,25'$ e a diagonal que passa pelo vértice dêsse ângulo mede 27 metros. R: *O lado* l *do losango é dado por*

$$l=d/2:\cos\alpha/2\,;$$
$$l=13{,}5:\cos 57°\,42'\,30''\,;$$
$$\log l=\log 13{,}5+\operatorname{colog}\cos 57°\,42'\,30''\,;$$
$$\log l=1{,}13033+0{,}27227=1{,}40260\,;$$

donde $l=25{,}27$ m *e o perímetro é* $4l=101{,}08$ m.

1904 — Determine o valor da tangente dum ângulo obtuso sabendo que a cosecante é 3. R: *O ângulo é do 2.º quadrante. De* $\operatorname{cosec}\alpha=3$ *deduz-se* $\operatorname{sen}\alpha=1/3$ *e* $\cos\alpha=-\sqrt{1-1/9}=-2\sqrt{2}/3$ *donde* $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{2}/4$.

III

1905 — Deduza a expressão do lado do dodecágono regular em função do raio do círculo circunscrito, a partir do conhecimento do lado do hexágono regular, inscrito no mesmo círculo. R: *Como* $l_6=R$ *se fôr* x *a diferença entre o apótema* OM *do hexágono e o raio do círculo vê-se que* $l_{12}=\sqrt{R^2/4+x^2}$. *Ora* $x=R-OM$ *e* $OM=\sqrt{R^2-R^2/4}=R/2\cdot\sqrt{3}$ *donde, finalmente, se deduz* $x=R\,(1-\sqrt{3}/2)$ *e* $l_{12}=\sqrt{R^2/4+R^2(1+3/4-\sqrt{3})}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1906 — Indique e justifique a construção que permite traçar tangentes a uma circunferência a partir dum ponto exterior. R: *Seja* [c] *a circunferência de centro* O *e* P *o ponto. Divida-se* $\overline{OP}$ *ao meio e com o raio* $\overline{OM}$ *e centro em* M (*ponto médio do segmento* $\overline{OP}$) *descreva-se uma circunferência que intersecte* [c] *nos pontos* P_1 *e* P_2. *As rectas* PP_1 *e* PP_2 *são tangentes a* [c]. *Com efeito os ângulos* OP_2P *e* OP_1P *são rectos por serem inscritos numa circunferência e os seus lados passarem pelos extremos dum diâmetro.*

IV

1907 — Defina m. d. c. de dois números. Sofrerá êste m. d. c. alteração quando um dos números se divide por um seu divisor que seja um número primo com o outro? Justifique a resposta. R: *Não, porque no* m. d. c. *só entram os factores comuns aos dois números. A substituição dum dos números pelo cociente da sua divisão por um divisor que é primo com o segundo número só implica a supressão dos factores primos que compõem êsse número e que, por hipótese, não são comuns aos dois números dados, por êste divisor ser primo com um dêles.*

Soluções dos números 1900 a 1907 de José Júlio Rodrigues dos Santos.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

BREVE ESTUDO, NO CAMPO REAL, DE ALGUMAS TRANSCENDENTES ELEMENTARES (*)

por **Manuel Zaluar Nunes**

Generalização da noção de potência

Supozemos até aqui definida a potência de expoente racional e tendo por base um número qualquer positivo [1] e estudadas as suas propriedades fundamentais. Introduziu-se, seguidamente (ao fazer o estudo da função e^x) a definição de potência de base e para expoente real qualquer (racional e *irracional*).

A definição de expoente real qualquer dum número positivo é dada, como é de esperar, de modo que as mesmas regras de cálculo continuem a aplicar-se.

Ora, para x racional qualquer e $a \geq 0$, é $\log a^x = x \log a$ ou $a^x = e^{x \log a}$. Notemos mais que *para* x *irracional* o 2.º membro da última igualdade escrita, isto é, $e^{x \log a}$ tem um significado preciso, não sucedendo porém o mesmo ao primeiro membro. Pois bem: *por definição* diremos que a^x tem para x irracional o valor $e^{x \log a}$. Passa assim, por exemplo, a ter significado, o que não sucedia até aqui, o símbolo $3^{\sqrt{2}}$, sendo, por definição $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log 3}$.

É fácil de verificar que as regras de cálculo continuam a aplicar-se.

Assim, por exemplo, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (x e y reais quaisquer). Com efeito, $a^x \cdot a^y = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = e^{(x+y) \log a} = a^{x+y}$ em vista das propriedades deduzidas já para e^x. Anàlogamente $(a^x)^y = (e^{x \log a})^y = e^{xy \log a} = a^{xy}$, etc.

Função a^x

Feita a generalização precedente, fica definida a função $y = a^x$ $(a > 0)$ (*exponencial de base* a): $a^x = e^{x \log a}$. Esta função é evidentemente contínua e derivável e tem-se: $y' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a$. Da definição resulta que é, para x qualquer, sempre $a^x > 0$. De $y' = a^x \log a$ resulta que:

se $a < 1$ $y' < 0$ e y monotónica decrescente;
se $a > 1$ $y' > 0$ e y monotónica crescente;
no caso $a = 1$ $y = 1$ reduz-se a uma constante.

De $y'' = a^x \log^2 a > 0$ deduz-se qual o sentido da concavidade para a qualquer positivo.

É também evidente (partindo da expressão de y' para $x = 0$) que $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$.

Função $y = \log_a x$ (logaritmo de base a)

A função $y = \log_a x$, $a > 0$, pode definir-se como a função inversa da exponencial de base a. Assim, tem-se $y = \log_a x$, ou $x = a^y$ (é a definição dada nos Liceus só válida então, porém, para y racional).

Mas de $x = a^y$ deduz-se também $\log x = y \log a$ donde $y = \log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$.

A função logaritmo de base qualquer $a > 0$ é pois uma função do tipo $y = C \log x$, définindo a escôlha da base o valor de $C = \frac{1}{\log a}$.

Na prática, como se sabe, utiliza-se a base $a = 10$ que se adapta melhor à numeração decimal.

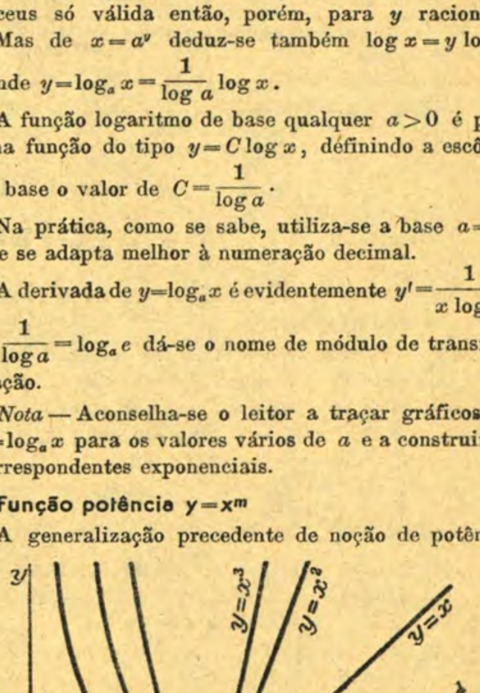
A derivada de $y = \log_a x$ é evidentemente $y' = \frac{1}{x \log a}$.

A $\frac{1}{\log a} = \log_a e$ dá-se o nome de módulo de transformação.

Nota — Aconselha-se o leitor a traçar gráficos de $y = \log_a x$ para os valores vários de a e a construir as correspondentes exponenciais.

Função potência $y = x^m$

A generalização precedente de noção de potência



permite-nos também definir a função $y = x^m$ $(x > 0$ m real qualquer).

(*) Conclusão do número anterior.

[1] **No estudo da função a^x que faremos imediatamente a seguir não interessa, por causa da continuïdade, o caso $a < 0$. Limitamos o nosso estudo, como já se frizou, ao campo real. Aproveite-se, porém, a ocasião para recordar o que se estabeleceu relativamente à operação potência de *base qualquer e expoente racional* ao deduzir a fórmula de Moivre generalizada.**

Será $y=x^m=e^{m\log x}$. Também se deduz que $y>0$ e $y'=e^{m\log x}\cdot\frac{m}{x}=mx^{m-1}$ (o que mostra que a regra de derivação de uma potência é válida para qualquer expoente).

É útil fazer um estudo mais pormenorizado da função potência para os valores de m estudando o sentido de crescimento e de concavidade (veja-se a figura junta).

Introduzida a função x^m para valores irracionais de m as duas propriedades assinaladas quando do estudo da função $y=\log x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x=0} x^n \log x=0$$

são agora extensíveis a qualquer valor positivo de n, racional ou não.

Sendo n positivo, a função $f(x)=x^n\log x$ é pois um infinitésimo com x a que é impossível assinalar ordem.

Nota — Terminamos aqui a nossa breve exposição em que quási nos limitámos a introduzir definições e deduzir seguidamente as mais importantes propriedades. Um estudo das transcendentes elementares, no campo real, requere o tratamento de outros problemas como seja o dos desenvolvimentos em série de potências (ou dos desenvolvimentos limitados de Mac Laurin) das funções $\log(1+x)$, e^x, a^x, $(1+x)^n,\cdots$, e determinação da sua validade. Dos desenvolvimentos obtidos partir-se-ia para o cálculo numérico destas funções. Seguir-se-ia, também, naturalmente depois, o estudo de outras funções como as hiperbólicas directas e inversas, as funções circulares e suas inversas, a função u^v, etc.. Veja-se, por exemplo, além dos livros citados já na bibliografia (Gaz. Mat. n.º 20), também os seguintes:

H. Commissaire et *G. Cagnac*. Cours de Mathématiques Spéciales — Vol. II, 2ème édit. — Paris, 1941.

René Garnier — Cours de Mathématiques Génerales — Tome I, Paris, 1930.

A. Sá da Costa — O cálculo da soma de uma série — «Gazeta de Matemática» n.º 11, 1942.

EXAMES DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de freqüência, Fevereiro de 1944.**

1908 — Verificar a identidade $\text{arc cotg}(2n-1)-\text{arc cotg}(2n+1)=\text{arc cotg}\,2n^2$ e determinar, a partir dela, a soma da série de têrmo geral $\text{arc cotg}\,2n^2$. R: *Pondo* $\text{arc cotg}(2n-1)=a$ *e* $\text{arc cotg}(2n+1)=b$, *a igualdade* $\text{cotg}(a-b)=(1+\text{cotg}\,a\cdot\text{cotg}\,b)/(\text{cotg}\,b-\text{cotg}\,a)$ *prova a identidade. A soma da série é:* $\sum_{n=0}^{\infty}\text{arc cotg}\,2n^2=\sum_{n=0}^{\infty}[\text{arc cotg}(2n-1)-\text{arc cotg}(2n+1)]$; *como os têrmos se reduzem dois a dois sucessivamente, com excepção do primeiro, é* $S=\text{arc cotg}(-1)$.

1909 — Achar as derivadas das funções:

a) $y=\text{arc tg}\sqrt{(1-\text{sen}\,x)/(1+\text{sen}\,x)}$;

b) $y=\log[(x+1)^2+x^{x+1})]$.

1910 — Achar a primitiva da função: $y=\text{tg}^3 x+x\,\text{arc tg}\,1/x$. R: *Como* $P\,\text{tg}^3 x=P\,\text{tg}\,x\,(\sec^2 x-1)=\text{tg}^2 x/2-\log\cos x$, *primitivando por partes a 2.ª parcela de* y, *vem:* $Py=\text{tg}^2 x/2-\log\cos x+x^2/2\cdot\text{arc tg}\,1/x-1/2\cdot(x-\text{arc tg}\,x)$.

1911 — Num cilindro circular recto é constante a soma dos comprimentos do raio e da altura. Quando é máximo o volume do cilindro? R: *A fórmula que dá o volume de um cilindro circular recto é* $V=\pi R^2 h$; *e como* $h+R=K$, *teremos* $V(R)=\pi R^2K-\pi R^3$, *função que é máxima para* $R=2K/3$ *ou, o que é o mesmo,* $R=2h$.

Soluções dos n.ºs 1908 a 1911 de Carlos de Jesus, aluno do 2.º ano da Faculdade de Ciências de Coimbra.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — 1.º exame de freqüência, 1943-44.

1912 — Extremar a função $\psi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, sendo (1) $x-y+2z=1$. R: *Temos* $\Phi=x^2+y^2+z^2+\lambda\cdot(x-y+2z-1)$ *e:* $\Phi'_x=2x+\lambda=0$, $\Phi'_y=2y-\lambda=0$, $\Phi'_z=2z+2\lambda=0$; *estas equações dão, com* (1): $x=-\lambda/2$, $y=\lambda/2$, $z=-\lambda$, $\lambda=-1/2$ *ou* $x=1/4$, $y=-1/4$, $z=1/2$ *e* $\lambda=-1/2$; *ora* $d^2\Phi=2dx^2+2dy^2+2dz^2$ *e* $dy=dx+2dz$; *logo* $\varphi_2(P_0,\alpha)=2\alpha_1^2+2(\alpha_1+2\alpha_2)^2+2\alpha_2^2=2+2(\alpha_1+2\alpha_2)^2>0$. *Há portanto um mínimo no ponto:* $P_0(1/4,-1/4,1/2)$.

1913 — Calcular $P1/(3+\cos x)$. R: *Pondo* $\text{tag}\,x/2=t$, *vem* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ *e* $x'=2/(1+t^2)$; *logo* $P1/(3+\cos x)=P2/(4+2t^2)=P1/(2+t^2)=[\text{arc tag}(t/\sqrt{2})]/\sqrt{2}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tag}\frac{\text{tag}\,x/2}{\sqrt{2}}+C$.

F. C. C. — 2.º exame de freqüência, 1943-44.

1914 — Resolver a equação de derivadas parciais $q=\varphi(p,y)$ pelo método de Charpit-Lagrange.

R: *Temos* $dp=0$; *logo* $p=c$ *e portanto* $q=\varphi(c,y)$; $\frac{dz}{dx}=c$ *e* $\frac{dz}{dy}=\varphi(c,y)$; *vem pois* $z=cx+u(y)$, $\varphi(c,y)=u'(y)$, $u(y)=P\varphi(c,y)+c_1$; *por conseqüência* $z=cx+P\varphi(c,y)+c_1$.

1915 — Calcular o volume do elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. R: *Temos* $V=8\iint_A z\,dx\,dy=$

$$=8\iint_A c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\,dx\,dy.$$

Fazendo $x=av\cos u$, $y=bv\,\mathrm{sen}\,u$ *com* $0<v\leq 1$ *e* $0\leq u\leq\pi/2$ *temos* $|J|=abv$; *logo*

$$V=8c\iint_{A'}\sqrt{1-v^2\cos^2 u-v^2\,\mathrm{sen}^2\,u}\;abv\,du\,dv=$$

$$=8c\iint_{A'}\sqrt{1-v^2}\;abv\,du\,dv=$$

$$=8abc\int_0^1 v\sqrt{1-v^2}\,dv\int_0^{\pi/2}du=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Soluções dos n.os 1912 a 1915 de José B. Pacheco de Amorim.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de freqüência ordinário, 7-3-944.

1916 — Demonstre que, se $\boldsymbol{a}$ fôr perpendicular a $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, se tem $(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})^2$.

1917 — Demonstre que, se — em dado instante — o movimento dum sólido fôr de translação, entre as acelerações de dois quaisquer dos seus pontos, P e O, existe a relação $P''=O''+\boldsymbol{\omega}'\wedge(P-O)$, na qual $\boldsymbol{\omega}$ designa o vector livre velocidade angular. R: *Derivando ambos os membros da fórmula fundamental das velocidades* $P'=O'+\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)$ *e atendendo a que, no instante considerado, é* $\boldsymbol{\omega}=0$, *obtém-se imediatamente a relação indicada.*

1918 — Recorde que o raio de curvatura da elipse no ponto de encontro (vértice) com o seu eixo de comprimento $2a$ vale $\rho=b^2/a$, sendo $2b$ o comprimento do outro eixo.

Considere uma elipse de semi-eixos $a=20$ m e $b=10$ m.

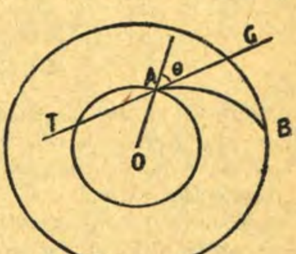
Suponha que um ponto descreve a elipse com movimento uniforme de velocidade igual a 7,2 km/h.

Determine as acelerações normais nos vértices da trajectória. R: *Designando os vértices por* A, B, C *e* D, *sendo* A *e* C *os situados sôbre o eixo de comprimento* 2a, *vem*

$$j_n(A)=j_n(C)=0{,}8\ \mathrm{m/s^2}\ \text{e}\ j_n(B)=j_n(D)=0{,}1\ \mathrm{m/s^2}.$$

1919 — Demonstre que tôdas as soluções da equação vectorial $\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{x}=m$, onde são constantes o vector $\boldsymbol{a}\neq 0$ e o escalar m, são dadas por $\boldsymbol{x}=\frac{m\boldsymbol{a}}{a^2}+\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{a}$, em que $\boldsymbol{v}$ é um vector arbitrário.

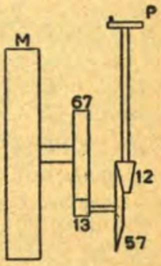
1920 — A figura representa parcialmente a roca duma bomba centrífuga, com raio interno $\overline{OA}=5$ in. Em regime normal de funcionamento, a pá AB efectua 520 r.p.m. em tôrno de O, no sentido directo; e a água caminha de O para A, chegando a êste ponto com a velocidade absoluta de 7 ft./sec.



Sabendo que, em regime normal de funcionamento, para que não haja choque, a água deve atingir a pá segundo a tangente TG em A, determine o ângulo θ de TG com OA. R: $\theta=\arctan 3{,}24=72°\,51'$.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.º exame de freqüência extraordinário, 30-5-944.

1921 — A figura mostra esquemàticamente o trem de engrenagens que, na gadanheira Ajuria, transmite ao prato-manivela P o movimento da roda motora M, cujo rasto assenta no terreno.



A roda M tem 720 mm de diâmetro. Os números de dentes das rodas do trem estão indicados na figura.

Calcule o número de voltas que efectua o prato-manivela por cada hectómetro percorrido pela gadanheira. R: 1082.

1922 — Considere um sistema de pontos materiais coplanares. Suponha que êle admite dois eixos de simetria material ortogonais e concorrentes em O.

Demonstre que, se os momentos de inércia do sistema em relação a êsses eixos forem iguais, o momento quadrático do sistema tem o mesmo valor em relação a tôdas as rectas do seu plano que passam por O. R: *Os eixos de simetria material são principais de inércia. Se os momentos quadráticos em relação a êstes eixos (momentos principais) são iguais, a elipse de inércia é uma circunferência, facto que torna evidente a proposição enunciada.*

1923 — Considere um tronco recto de cilindro de revolução homogéneo, com densidade ρ, raio da base R e comprimento b.

Calcule o seu momento de inércia em relação: *a*) ao eixo de simetria; *b*) a uma das geratrizes.
R: a) *Decompondo em tubos elementares coaxiais, vem* $I_r = 2\pi\rho b \int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi\rho b R^4$; b) *o Teorema de Lagrange fornece, a partir do resultado anterior,* $I_g = \frac{3}{2}\pi\rho b R^4$.

1924 — Se o ponto de aplicação da fôrça $\boldsymbol{F} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ percorrer o eixo Ox no sentido positivo com velocidade igual a 2, qual é a potência de $\boldsymbol{F}$? (Unidades M.K.S.). R: 10 W.

1925 — $Oxyz$ é um sistema galileano.

O ponto material P com 9,80 kg de massa percorria Ox, no sentido positivo, com a velocidade constante de 2 cm/s. O é a posição inicial de P.

Quando P chegou ao ponto de abscissa $+1{,}52$ m, foi-lhe aplicada uma fôrça, com a direcção e o sentido de Oy, de intensidade igual a 2 kg.

Calcule a velocidade vectorial de P no instante $t = 1$ m 20 s. R: $\mathbf{V} = 0{,}02\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ (U. m.).

Soluções dos n.os 1917 a 1925 de P. de Varenes e Mendonça.

PROBLEMAS

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1895 — Calcular os catetos e a hipotenusa dum triângulo rectângulo, conhecendo-se as superfícies (A_1 e A_2) dos dois triângulos, em que a altura, correspondente à hipotenusa, o divide. R: *Sejam* h *a altura relativa à hipotenusa, e* p *e* q *os segmentos em que esta é dividida por aquela, correspondentes aos triângulos de áreas* A_1 *e* A_2 *respectivamente. Tem-se* $2A_1 = h\cdot p$ $2A_2 = h\cdot q$ *e, por conseqüência,* $4A_1A_2 = h^4$ *Tem-se mais* $ah = 2(A_1+A_2)$, $bc = 2(A_1+A_2) \cdots (1)$, $a^2 = b^2 + c^2 \cdots (2)$. *Resolvendo êste sistema de 4 equações a 4 incógnitas, acha-se:*

$$a = \frac{2(A_1+A_2)}{\sqrt[4]{4A_1A_2}}, \quad b = \frac{\sqrt{(A_1+A_2)^2 \pm (A_1^2 - A_2^2)}}{\sqrt[4]{A_1A_2}},$$

$$c = \frac{2(A_1+A_2)\sqrt[4]{A_1A_2}}{\sqrt{(A_1+A_2)^2 \pm (A_1^2-A_2^2)}},$$

onde os radicais são tomados com o seu valor aritmético. Qualquer das 2 últimas fórmulas dá os valores dos 2 catetos, porque se b_1 *e* c_1 *são os valores de* b *e de* c *correspondentes ao sinal superior, e* b_2 *e* c_2 *os correspondentes ao sinal inferior, tem-se, em virtude da simetria das equações* (1) *e* (2), $b_1 = c_2$, $b_2 = c_1$.

Solução de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Carlos A. G. Gomes (do Pôrto); Fernando R. D. Agudo (de Lisboa); e Paul Richard (de Portalegre).

1896 — Encontrar quatro números inteiros consecutivos tais que o cubo do maior seja igual à soma dos cubos dos outros três. (*Generalizar*: — quatro números formando progressão aritmética).

R: *Seja* r *a razão da progressão. Se* r *fôr positivo, deverá ser* $(x+3r)^3 = x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3$ *ou* $x^3 - 6r^2x - 9r^3 = 0$. *Esta equação tem sempre uma só raiz real, como se conclui do sinal do seu discriminante* $(9/2\cdot r^3)^2 - (2r^2)^3$. *Acha-se* $x = 3r$. *Os números* $3r$, $4r$, $5r$, $6r$, *verificam pois a relação*

$$(1) \qquad (3r)^3 + (4r)^3 + (5r)^3 = (6r)^3.$$

Se a razão da progressão fôsse $-r$ *(*r *positivo), os números que se obteriam seriam ainda os precedentes, escritos em ordem inversa, porque se fôssem diferentes, dispondo-os em progressão crescente, a razão seria* r, *recaír-se-ia no caso anterior e igualando o cubo do maior à soma dos cubos dos outros, ter-se-ia uma igualdade que não coïncidiria com a identidade* (1) *e que, portanto, não seria verdadeira. Fazendo na identidade* (1) $r = 1$ *obtém-se os 4 inteiros consecutivos pedidos.*

Solução de Alberto Paes (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Carlos A. G. Gomes (do Pôrto); Fernando R. D. Agudo, (de Lisboa); Heliodoro A. Lopes (de Coimbra); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); e T. Ferreira Rato (S. Tiago de Cabo Verde).

1897 — Resolver a equação

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b.$$

R: *Efectuando o cociente*

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=(x-a)-\sqrt{(x-a)(x-b)}+$$

$+(x-b)$ *vem* $(x-a)-\sqrt{(x-a)(x-b)}+(x-b)=a-b$ *ou* $\sqrt{(x-a)(x-b)}=2(x-a)$, *e, elevando ambos os termos ao quadrado,* $4(x-a)^2=(x-a)(x-b)$. *As raízes desta equação são as raízes das equações* $x-a=0$ *e* $4(x-a)=x-b$ *ou sejam as raízes* $x=a$ *e* $x=\frac{4a-b}{3}$. *Ambas as raízes satisfazem à equação dada.*

Solução de Carlos A. Gonçalves Gomes (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: Fernando R. D. Agudo (de Lisboa); J. S. Faria de Abreu (de Penafiel); Marcelino Guedes de Sousa (do Pôrto); e T. Ferreira Rato (S. Tiago de Cabo Verde).

1898 — Dividir o volume dum cone recto de revolução, em média e extrema razão, por um plano paralelo à base. R: *Seccionando um cone por um plano paralelo à base, obtemos um cone semelhante ao primeiro e um tronco de cone. Suponhamos que o volume do cone parcial* v *é maior que o do tronco e seja* V *o volume do cone total. Entre êstes volumes deverá existir a relação* $v=\frac{\sqrt{5}-1}{2}V$. *Mas os volumes de sólidos semelhantes estão entre si como os cubos de duas linhas homólogas, portanto* $h'^3/h^3=v/V$ *donde*

$$(\alpha)\qquad h'^3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}h^3 \quad ou \quad h'=h\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

O cone deve ser seccionado por um plano paralelo à base a uma distância h' *do vértice dado pela relação* (α). *Suponhamos agora que o volume* v' *do tronco é maior que o do cone parcial. Entre* v' *e* V *existe a relação* $v'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}V$ *e o volume do cone parcial* v *será*

$$v=V-v'=V-\frac{\sqrt{5}-1}{2}V=\frac{2-\sqrt{5}+1}{2}V=\frac{3-\sqrt{5}}{2}V$$

mas, como vimos, $v/V=h''^3/h^3$ *e, portanto,*

$$(\beta)\qquad h''^3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}h^3 \quad ou \quad h''=\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,h.$$

Neste caso, a secção deve ser feita a uma distância h'' *do vértice dada pela expressão* (β).

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Paes (de Lisboa); F. R. D. Agudo (de Lisboa); e J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

42 — HARDY, G. H. E ROGOSINSKI, W. W. — **Fourier Series** — Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 38 — London — 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do Instituto Britânico em Portugal.

Como é sabido, as séries trigonométricas foram consideradas pela primeira vez por D. Bernoulli no estudo do problema das cordas vibrantes. Bernoulli mostrou que a solução mais geral da equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

do movimento duma corda vibrante com os extremos fixos $(0,0)$ e $(1,0)$ tem a forma

$$y=\sum_1^\infty a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}.$$

Séries dêste tipo foram utilizadas também por Fourier para a representação de certas funções $f(x)$ em problemas relacionados com a condução do calor. A teoria das séries de Fourier foi largamente desenvolvida por Poisson, Cauchy, Harnack, Dirichlet, Riemann, Cantor, Hurwitz, Fejér, Lebesgue, etc. Actualmente esta teoria tomou uma orientação diferente da estabelecida por êstes matemáticos, tendo sido influenciada por certos ramos da matemática moderna, em especial pela teoria da medida-L.

No livro de G. H. Hardy e W. W. Rogosinski, *Fourier Series* da série «Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics», os autores começam por indicar a conexão íntima entre a teoria das séries trigonométricas e a teoria das funções harmónicas e analíticas de que aquela é uma parte. Seguidamente apresentam algumas definições referentes à teoria geral da medida, teoria geral da integração, afim de introduzir as noções de espaço L^p, sua métrica, espaço de Hilbert e sistemas ortogonais num L^α. As séries de Fourier são classes especiais de séries ortogonais convergentes ou somáveis; assim, no capítulo II, vem exposta uma teoria geral de séries ortogonais num espaço de Hilbert, particularizando no capítulo III alguns resultados e adaptando-os às séries de Fourier. O capítulo IV é reservado ao estudo da convergência das séries de Fourier. Até recentemente, julgou-se ser êste o problema central da teoria das séries de Fourier e nesta ordem de idéias foi êste que maior desenvolvimento teve. Os pontos de vista actuais mostram todavia que a noção de convergência pode ser tomada num sentido muito mais lato e englòbar as noções de convergência forte, convergência fraca e diferentes tipos de somabilidade; dêste modo eliminam-se certas limitações necessárias no estudo da convergência vulgar. No capítulo V, a propósito da somabilidade das séries de Fourier, os autores introduzem alguns pontos de vista pessoais no sentido da determinação do conjunto dos pontos de somabilidade e duma sistematização de diversos tipos de somabilidade. Ocupam-se a seguir, capítulo VI, de algumas aplicações dos teoremas estabelecidos nos capítulos anteriores e dedicam o capítulo VII ao estudo das séries gerais trigonométricas. O livro termina com uma série de notas e complementos elucidativos do texto e respectiva bibliografia.

Êste trabalho pressupõe o leitor já iniciado nos conhecimento da teoria geral das séries de Fourier e da teoria da medida e integração-L.

Resumindo: trata-se duma exposição clara e actualizada da teoria das séries de Fourier, que constitui também uma boa introdução à monografia de Zygmund da colecção de monografias sôbre a teoria das funções, publicada em Varsóvia sob a direcção de Sierpinski.

Ruy Luís Gomes

PERIÓDICOS CIENTÍFICOS RECEBIDOS

Argentina

Boletin Matematico — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática — Ano XVII, n.^{os} 1-4 e 5, 1944.

Brasil

Revista Politécnica — (S. Paulo) — Ano 39.º, n.º 144, Maio de 1944.

Cuba

Revista de la Socidade Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas — Universidad de La Habana — Vol 1, n.^{os} 1 e 2.

Espanha

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones — Tomo IV, n.^{os} 43 e 44, Setembro e Outubro de 1944.

Inglaterra

Biometrika — A journal for the statistical study of biological problems — Vol. XXXIII — parts I and II — 1943-1944, London. — (Oferta do «British Council» por intermédio do «Instituto Britânico em Portugal»).

The Journal of the London Mathematical Society — Vol. 19, Part 1, n.º 73 — January, 1944. — London.

The Mathematical Gazette — Vols. XXV (1941), XXVI (1942), XXVII (1943) e XXVIII, n.^{os} 278 a 281 — 1944, Londres.

OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Álgebra e Trigonometria — 2.º ciclo do ensino liceal — por P. Campos Tavares. Edições Marânus, Pôrto, 1943.

Curso Prático de Geometria Descritiva — Humberto Meneses — Lisboa, 1943.

Fourier Series — por G. H. Hardy e W. W. Rogosinski — Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics — n.º 38 — Cambridge, 1944. (Oferta do «British Council» por intermédio do «Instituto Britânico em Portugal»).

Jacobian Elliptic Functions — por Eric Harold Neville — Oxford, 1944. (Oferta do «British Council» por intermédio do «Instituto Britânico em Portugal»).

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.º 150 — Novembro de 1944.

Publicações da Embaixada Britânica.

Publicações da Embaixada dos Estados Unidos da América do Norte.