GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

Número extraordinário dedicado às
MATEMÁTICAS ELEMENTARES E EXAMES DE APTIDÃO

ANO V **N.º 22** MARÇO-1944

SUMÁRIO

Êste número contém 73 problemas de Matem. Elementares, 52 dos quais de pontos dos Exames de Aptidão
A sua publicação precede, por conveniência, a dos números 19, 20 e 21.

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Editor e Proprietário	Administrador	Tesoureiro
J. da Silva Paulo	*Orlando M. Rodrigues*	*J. de Oliveira Campos*

Correspondência para Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO V - N.º 22 GAZETA DE MATEMATICA MARÇO 1944

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

NÚMERO EXTRAORDINÁRIO DEDICADO ÀS MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Organizado por: *Bento Caraça, José da Silva Paulo, Manuel Zaluar e R. Quaresma Rosa*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

O NÚMERO π [1]

por **Bento Caraça**

1.º — Generalidades e história

O número π é, como todos sabem, definido como o *cociente do comprimento duma circunferência rectificada pelo seu diâmetro.*

Esta definição fundamenta-se no facto, a que todos os livros de geometria elementar fazem referência, de que *os comprimentos de duas circunferências quaisquer estão entre si como os seus diâmetros,* donde imediatamente resulta que *é constante o cociente do comprimento de qualquer circunferência pelo respectivo diâmetro.*

É essa constante que se representa pelo símbolo π e tem-se portanto, sendo C o comprimento da circunferência rectificada e r o seu raio

(1) $$\pi = \frac{C}{2r}.$$

Sabe-se ainda, pelo menos desde *Arquimedes,* que a *área dum círculo é igual à de um triângulo rectângulo que tenha por base a circunferência respectiva rectificada e por altura o raio,* de modo que para essa área A se tem

(2) $$A = \pi r^2.$$

Desde a mais alta antiguidade se têm procurado determinações de π. Foram, muito provàvelmente, problemas de cálculo de áreas que deram origem às primeiras determinações de π. Mas, desde que se acendeu o interesse à volta dêste número, iniciou-se um longo período de penosos esforços (que só vêm a terminar no final do século XIX) para, não só o determinar com a maior exactidão possível, como ainda prescrutar a sua natureza teórica e resolver os problemas que com ela andam ligados.

Vamos passar em rápida revista o desenrolar dêsses esforços que arrumaremos em três períodos: até *Arquimedes,* de *Arquimedes* a *Viète,* de *Viète* à actualidade.

1.º Período. — Até Arquimedes. — Período empírico.

São do Médio Oriente as mais antigas determinações aproximadas que se conhecem de π.

Em *Babilónia,* como entre os *hebreus,* tomava-se, simplesmente, $\pi = 3$. É êste, com efeito, o valor que se deduz de uma passagem da Bíblia relativa à construção do templo de Salomão. Mas já antes, entre os *egípcios,* era conhecido um valor mais exacto. No célebre *Papiro de Rhind,* pertencente à colecção Rhind do *British Museum,* redigido certamente antes de 1.700 A. C., portanto há aproximadamente 4.000 anos, o sacerdote *Ahmes* dá a seguinte regra para determinar a área de um campo circular: «dividir o diâmetro em nove partes iguais, tirar-lhe uma dessas partes e quadrar». Obtém-se dêsse modo, para área do círculo (com os nossos símbolos de hoje)

$$A = \left(2r - \frac{2r}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \cdot r^2$$

donde, por comparação com a fórmula (2),

(3) $$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16 \qquad \textit{por defeito.}$$

2.º Período. — De Arquimedes a Viète.
1.º Período teórico.

Com *Euclides* e, sobretudo, *Arquimedes* inicia-se o segundo período na história das determinações de π, período a que podemos chamar *primeiro período teórico;* nêle se encontram com efeito, não apenas regras empíricas, mas o cuidado de justificar os resultados.

---

[1] O leitor não encontrará neste artigo nada de novo. Todos os problemas de carácter prático e teórico a que nêle se faz referência estão resolvidos há muito tempo. Trata-se apenas de uma compilação de resultados que, na sua maior parte, são do domínio das Matemáticas Elementares.

Arquimedes (287-212 A. C.) inscreve e circunscreve à circunferência polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, calcula os perímetros dêsses polígonos e obtém assim um limite superior e um limite inferior do comprimento da circunferência rectificada. Êste procedimento implica: *a)* admitir que o comprimento da circunferência existe; *b)* que êle é o *limite* comum dos perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos quando o seu número de lados tende para infinito. *Arquimedes* admitiu ambos os factos, sem que, no entanto, desse uma formulação rigorosa do segundo, o que estava fora das preocupações e dos recursos da Análise do seu tempo, mesmo para uma mentalidade da fôrça da sua.

Dos seus cálculos, deduz *Arquimedes* que «o perímetro da circunferência excede três vezes o seu diâmetro por uma parte que é menor que a sétima parte do diâmetro e maior que 10 dividido por 71», o que traduzimos escrevendo a dupla desigualdade

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \tag{4}$$

ou, em escrita decimal

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429\,.$$

Durante muito tempo, esta aproximação dada por *Arquimedes* não foi ultrapassada, mas no século III p. C. o matemático chinês *Liu Hui,* calculando perímetros de polígonos regulares inscritos até 192 lados, encontrou

$$\pi = 3{,}14 \ \textit{por defeito} \tag{5}$$

(que concorda com a determinação arquimedeana) e no século V p. C. o chinês *Tsu Ch'ung-chih* obteve a determinação muito mais exacta

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927 \tag{6}$$

da qual tirou os valores aproximados $\frac{355}{113}$ e $\frac{22}{7}$ êste, como vimos, já usado por Arquimedes. Na viragem do século V para o VI p. C. o astrónomo hindú *Aryabhata* encontra o valor notàvelmente aproximado

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416 \tag{7}$$

mas os hindús não fizeram grande uso dêle; tomavam habitualmente ou $\pi = 3$ ou $\pi = \sqrt{10}$.

No século XII, o matemático hindú *Bhaskara* dá o valor arquemediano 22/7 e também o valor (7) 3927/1250, êste parece que obtido pelo método arquimedeano com polígonos até 384 lados!

O mesmo valor (7) se encontra também mencionado pelo matemático árabe *Al-khowarizmi* (séc. IX), mas parece que os árabes posteriormente o esqueceram e continuaram a tomar nas aplicações $\pi = \sqrt{10}$.

Entretanto, na Europa não se encontram sinais de novas determinações que se pudessem pôr a par das dos hindús e árabes, antes do século XVI. Nessa altura porém os cálculos numéricos receberam, na Europa do Ocidente e do Noroeste, um impulso extraordinário, devido principalmente às necessidades da navegação que originaram também uma completa renovação na Astronomia e na concepção do mundo.

Adrianus Romanus (1561-1615) um matemático dos Países Baixos, calculou π com 15 decimais usando o método arquimedeano, e um seu contemporâneo, também dos Países Baixos, *Ludolph van Ceulen* (1540-1610) levou, pelo mesmo método, o cálculo até 35 decimais!

James Gregory (1638-1675) e *Christian Huyghens* (1629-1685) ocuparam-se também do mesmo cálculo.

Mas, por muito extraordinária que a todos tenha parecido a proeza de *Van Ceulen* (e foi-o a tal ponto que o valor por êle determinado foi gravado no seu túmulo e a π se deu o nome de *número de Ludolph*) ela devia ser brevemente eclipsada por novas determinações feitas por um método novo.

3.º Período.—De Viète à actualidade.
2.º Período teórico.

Êsse método novo é o *método dos limites* que começa a despontar pela segunda metade do século XVI e toma corpo ao longo do século XVII. Caracteriza-o, como todos sabem, o recurso aos processos infinitos de cálculo, isto é, ao manuseamento de expressões em que figura uma infinidade de operações, o que era inteiramente estranho aos matemáticos da Antiguidade.

A primeira expressão de π por um algorítmo infinito é devida a *Viète* (1540-1603)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}\,. \tag{8}$$

Aberto o caminho, dentro em pouco é uma verdadeira explosão de algorítmos infinitos — séries, fracções contínuas, produtos infinitos — a servirem para exprimir π.

Assim, pouco depois, *John Wallis* (1616-1703), um dos principais obreiros do método dos limites, deu a expressão

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots \tag{9}$$

e *Lord William Brouncker* (1620-1684) a seguinte

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}}} \tag{10}$$

que é uma das primeiras da teoria das fracções contínuas.

Na segunda metade do século XVII, *James Gregory* (1638-1675) e *W. G. Leibniz* (1646-1716) encontraram, quási ao mesmo tempo (*Gregory* com alguns anos de antecedência?) o desenvolvimento em série da função *arc tg x*

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$$

donde haviam de vir a sair os métodos mais expeditos para o cálculo de π com um grande número de decimais. Essa série dá, para $x=1$, a relação

$$\text{(12)} \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(encontrada quási ao mesmo tempo também por *Huygens*) que, no entanto, não é própria para o cálculo numérico de π por ser muito lentamente convergente (para ter, a partir dela, π com *dez* casas dècimais, seria preciso tomar cêrca de 5.000 milhões de termos da série!). Mas não é difícil deduzir relações em que figure a função *arc tg x* e que fornecem processos muito ràpidamente convergentes.

Citaremos, de entre elas, a que deu *Leonhard Euler* (1707-1783) na sua *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

$$\text{(13)} \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}, \text{ [2]}$$

e a que deduziu o matemático vienense *L. Schultz von Strassnitzky* (1803-1852)

$$\text{(14)} \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$$

a partir da qual o calculador *Dase* determinou, após dois meses de trabalho, π com 200 decimais, em 1844.

Mas, em rapidez de convergência, sobreleva a todas a fórmula dada em 1706 por *John Machin* (1680-1751)

$$\text{(15)} \qquad \frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}\cdot$$

Dela se serviu em 1874 *William Shanks* (1812-1882) para calcular π com 707 (!) decimais, proeza até agora não ultrapassada. Por uma questão de curiosidade, damos a seguir êsse valor

$$\text{(16)} \qquad \pi = 3{\cdot}\; \begin{array}{llllllllll}
14159 & 26535 & 89793 & 23846 & 26433 & 83279 & 50288 & 41971 & 69399 & 37510 \\
58209 & 74944 & 59230 & 78164 & 06286 & 20899 & 86280 & 34825 & 34211 & 70679 \\
82148 & 08651 & 32823 & 06647 & 09384 & 46095 & 50582 & 23172 & 53594 & 08128 \\
48111 & 74502 & 84102 & 70193 & 85211 & 05559 & 64462 & 29489 & 54930 & 38196 \\
44288 & 10975 & 66593 & 34461 & 28475 & 64823 & 37867 & 83165 & 27120 & 19091 \\
45648 & 56692 & 34603 & 48610 & 45432 & 66482 & 13393 & 60726 & 02491 & 41273 \\
72458 & 70066 & 06315 & 58817 & 48815 & 20920 & 96282 & 92540 & 91715 & 36436 \\
78925 & 90360 & 01133 & 05305 & 48820 & 46652 & 13841 & 46951 & 94151 & 16094 \\
33057 & 27036 & 57595 & 91953 & 09218 & 61173 & 81932 & 61179 & 31051 & 18548 \\
07446 & 23799 & 62749 & 56735 & 18857 & 52724 & 89122 & 79381 & 83011 & 94912 \\
98336 & 73362 & 44065 & 66430 & 86021 & 39501 & 60924 & 48077 & 23094 & 36285 \\
53096 & 62027 & 55693 & 97986 & 95022 & 24749 & 96206 & 07497 & 03041 & 23668 \\
86199 & 51100 & 89202 & 38377 & 02131 & 41694 & 11902 & 98858 & 25446 & 81639 \\
79990 & 46597 & 00081 & 70029 & 63123 & 77387 & 34208 & 41307 & 91451 & 18398 \\
05709 & 85\ldots & \text{[3]} & & & & & & &
\end{array}$$

[2] O leitor deduz fàcilmente esta fórmula e as duas seguintes, tomando as tangentes de ambos os membros e notando que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\alpha) = \alpha$.

[3] Reproduzido de *Calcolo Numerico* por *Ugo Cassina*, pág. 512.

Repare o leitor nisto que é curioso — os métodos mais poderosos para o cálculo de π (definido por uma relação geométrica) são métodos puramente analíticos. Ao longo da história da Matemática, não foi esta a menor razão do interêsse despertado à volta dêste número.

2.º — Natureza teórica de π

Poderá o leitor preguntar qual é o interêsse que pode existir no cálculo de centenas de casas decimais de π. ¿Interêsse prático? nenhum! «Dez casas decimais bastam para dar o comprimento do meridiano terrestre com um êrro inferior a uma polegada, e trinta decimais dariam a circunferência do universo visível a menos de um segmento imperceptível com o mais poderoso telescópio». [4]

¿Interêsse teórico? Sim, até certa altura pelo menos. É que o número π guardou ciosamente o segrêdo da sua natureza teórica durante muitos séculos, e a incerteza sôbre essa natureza andou ligada desde a antiguïdade clássica a um problema célebre — o da quadratura do círculo.

¿π é racional ou irracional? esta pregunta só teve resposta no final do século XVIII quando *Lambert* (1728-1777) demonstrou que *π é irracional*, e por isso se justifica, pelo menos até essa altura, o afã de encontrar um número cada vez maior de decimais, à procura de qualquer lei na dízima que ainda se não descortinava...

Mas não está tudo dito com a asserção de que π é irracional — ¿a que classe de irracionalidade pertence? é algébrico? ou transcendente?

Ao leitor menos versado neste assunto, diremos que *se chama número algébrico a todo aquêle que é raiz de uma equação algébrica de coeficientes racionais;* uma tal equação pode sempre evidentemente reduzir-se a uma outra de coeficientes inteiros com as mesmas raízes.

Assim, são algébricos os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, i, $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}}$ porque são, respectivamente, raízes das equações $x^2-2=0$, $x^3-5=0$, $x^2+1=0$, $2x^8+x^4+1=0$.

São, em particular, algébricos todos os números racionais m/n, $n \neq 0$, visto serem raízes de equações da forma $nx-m=0$.

Sabe-se que o conjunto dos números algébricos constitui um *campo* e que, por conseqüência, somas

[4] *Simon Newcomb*, matemático e astrónomo americano, citado de *Mathematics and the Imagination* por E. Kasner e J. Newman, pág. 78.

(algébricas) produtos e cocientes (de divisor não nulo) de números algébricos são ainda números algébricos.

A todo o número não algébrico chama-se *transcendente.*

A questão de se saber se π é ou não algébrico equivale portanto a esta outra — saber se existe ou não alguma equação algébrica de coeficientes inteiros que o tenha como raiz — e esta questão tem uma grande importância para o problema da quadratura, como veremos adiante.

Os esforços para resolver esta questão da algebricidade de π culminaram na demonstração que *Lindemann* fêz em 1882 de que — *π não é algébrico.*

Êsse facto resulta de um corolário que se tira do teorema fundamental de *Lindemann* e que diz: *se* x *é um número algébrico não nulo qualquer,* e^x *não é racional.*

Ora, da bem conhecida *fórmula de Euler*

$$e^{ix}=\cos x+i \operatorname{sen} x, \tag{17}$$

resulta para $x=\pi$,

$$e^{i\pi}=-1 \tag{18}$$

donde se conclue, em face do resultado de *Lindemann,* que $i\pi$ *não é algébrico.* Mas i é algébrico, logo π não o pode ser, aliás seria algébrico o seu produto.

3.º — O problema da constructibilidade

Ocupemo-nos agora, para terminar, dêste problema — o da *constructibilidade* de π.

Antes de mais, precisemos o significado do problema. É o seguinte: escolhida uma unidade de medida, isto é, um segmento $\overline{OA}=1$, construir, *com a ajuda apenas da régua e do compasso,* um segmento $\overline{OB}$ tal que $\overline{OB}/\overline{OA}=\pi$.

A exigência de usar apenas êstes dois instrumentos resulta das condições históricas do problema. Êle surgiu na Grécia clássica e, para a maioria dos geómetras gregos, uma boa, uma verdadeira solução geométrica não devia exigir mais que régua e compasso. Mas, note-se bem, *régua não graduada,* (ou, melhor, régua usada *exclusivamente* para traçar rectas) pois um dos problemas célebres postos na geometria grega e que vieram sem solução até ao século XIX, o da *trissecção do ângulo*, resolve-se com uma régua *graduada* e um compasso. [5]

O problema da constructibilidade de π, está ligado directamente ao da *quadratura do círculo* que consiste, como todos sabem, em, dado um círculo qualquer, construir um quadrado cuja área lhe seja igual (inútil acrescentar que se trata de uma construção teòricamente rigorosa e não apenas aproximada).

Se fôr r o raio do círculo, como a sua área é πr^2, deverá encontrar-se um quadrado de lado l, tal que $l^2=\pi r^2$, isto é, tal que

$$l=r\cdot\sqrt{\pi}. \tag{19}$$

Ora, em qualquer livro de geometria elementar se aprende a fazer (entre outras) as seguintes construções — dados segmentos de comprimentos a e b, construir segmentos de comprimentos $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, a/b e $\sqrt{a}$ — e se verifica que tais construções não exigem mais que régua não graduada e compasso.

De modo que, se se souber construir π, sabe-se construir $\sqrt{\pi}$ e depois $r\cdot\sqrt{\pi}$, e o problema da quadratura reduz-se, afinal, ao da constructibilidade de π.

Partamos de um segmento unidade (que, no nosso caso, pode ser o próprio raio do círculo). Com as construções acima mencionadas, podemos, em primeiro lugar, construir todos os números racionais e tôdas as raízes quadradas de números racionais e, em seguida, como é óbvio, *tôda a combinação finita de raízes quadradas e de números racionais.*

Ponhamos agora a questão — *¿ que outros números são construíveis?* Demonstra-se que mais nenhuns!

Com efeito, um resultado essencial da teoria da constructibilidade é o seguinte [6] — *são construíveis com régua não graduada e compasso aquêles números algébricos (e só êles!) que são combinações finitas de números racionais e raízes quadradas* (é, por exemplo, construível $\sqrt[2^n]{2}$, pela efectivação sucessiva de n raízes quadradas, mas não $\sqrt[3]{2}$).

Ora como o número π não é algébrico, resulta daqui imediatamente que êle não é construível e que, portanto, é impossível a quadratura só com régua não graduada e compasso.

Assim se fechou, há pouco mais de sessenta anos, um capítulo da História da Matemática, vélho de muito mais de vinte séculos!

Com a demonstração de *Lindemann*, π entregou-nos o seu último segrêdo — o da sua não algebricidade. Nesse dia, extinguiu-se virtualmente a legião dos quadradores. Se essa extinção não foi, em todos os casos, efectiva, o facto deve atribuir-se a um fenómeno de longevidade que é, talvez, do domínio das ciências bio-psicológicas, mas que nada tem que ver com a Matemática.

---

[5] Vide por ex. *What is Mathematics?* por *R. Courant* e *H. Robbins,* pg. 138.

[6] Para a demonstração, que não exige conhecimentos além dos rudimentos da Geometria Analítica, pode ver-se, por ex., o já citado *What is Mathematics?* pg. 120 e seg.

O Teorema de Euler sôbre os poliedros convexos e o número de poliedros convexos regulares

por **José da Silva Paulo**

Consideremos uma superfície poliédrica convexa obtida a partir dum poliedro convexo pela supressão de uma ou mais faces consecutivas. Esta superfície é aberta e termina por uma linha poligonal fechada plana ou enviezada. Demonstremos para uma tal superfície o seguinte:

Lema — *Numa superfície poliédrica convexa aberta, terminada por uma linha poligonal fechada plana ou enviezada, a soma do número de vértices é igual ao número de arestas aumentado de* 1.

Se designarmos por A, F e V o número de arestas faces e vértices da superfície o teorema traduz a seguinte igualdade: $A+1=F+V$. Demonstraremos o teorema por indução completa em F.

Verifiquemos, então, que êle é verdadeiro para o caso da superfície ter uma única face. Neste caso a superfície reduz-se a um polígono convexo para o qual é $F=1$ e $A=V$, logo

$$A+1=1+V.$$

Consideremos, agora, o teorema válido para o caso da superfície ter F faces e demonstremos, que nesse caso, o teorema verifica-se para uma superfície convexa aberta com $F+1$ faces. Acrescentemos para isso à primeira superfície uma face com n lados. Se a superfície continua aberta o perímetro da nova face não poderá coincidir inteiramente com a linha poligonal que termina a primeira superfície. Seja p o número de arestas comuns à face e à superfície poliédrica, será $p+1$ o número de vértices comuns. É então evidente que, se forem A', F', e V' o número de arestas, faces e vértices da superfície de $F+1$ faces, tem-se: $A'=A+(n-p)$, $F'=F+1$ e $V'=V+n-(p+1)$ donde $F'+V'=F+1+V+n-p-1=F+V+(n-p)$ e como $A'+1=A+1+(n-p)=F+V+(n-p)$ vem $F'+V'=A'+1$, c. q. d.

Êste lema permite-nos demonstrar o:

Teorema de Euler — *Em todo o poliedro convexo, o número de arestas aumentado de* 2 *é igual à soma do número de faces com o número de vértices.*

Sejam ainda A, F e V o número de arestas, faces e vértices do poliedro. Tiremos ao poliedro convexo uma face. Ficaremos com uma superfície poliédrica convexa aberta para a qual é $A+1=F+V$ e para o poliedro convexo que tem o mesmo número de arestas e vértices e mais uma face que a superfície poliédrica será

$$A+2=F+V \qquad \text{c. q. d.}$$

Nota — **Esta demonstração é devida a Cauchy.**

Consideremos finalmente o seguinte:

Teorema — *Não podem existir mais do que cinco espécies de poliedros convexos nos quais tôdas as faces tenham o mesmo número de lados e cujos ângulos sólidos tenham o mesmo número de arestas.*

Suponhamos, então, que no poliedro cada face tem n lados e cada ângulo sólido m arestas. Se considerarmos o número total de arestas faces e vértices, será: $mV=2A$ e também $nF=2A$.

Da fórmula de Euler tira-se

$$F=\frac{4m}{2(m+n)-mn}.$$

Ora F é um número inteiro positivo bem como m e n, o mesmo deverá suceder ao denominador da fracção anterior ou seja

$$2m+2n>mn$$

ou

$$m<\frac{2n}{n-2}.$$

Além disso m e n são superiores a 2 donde: $2n>3(n-2)$ ou $n<6$ e assim n só pode ter os valores 3, 4 e 5; teremos como soluções possíveis daquela desigualdade

$$n_1=3,\ m_1=3;\quad n_2=3,\ m_2=4;\quad n_3=3,\ m_3=5;$$
$$n_4=4,\ m_4=3;\quad n_5=5,\ m_5=3;$$

e pode formar-se o seguinte quadro:

n	m	F	V	A	
3	3	4	4	6	tetraedro
3	4	8	6	12	octaedro
3	5	20	12	30	icosaedro
4	3	6	8	12	hexaedro
5	3	12	20	30	dodecaedro

Se notarmos que num poliedro convexo regular tôdas as faces têm o mesmo número de lados e todos os vértices o mesmo número de arestas conclui-se que só existem 5 poliedros convexos regulares.

Nota — **A demonstração dêste último teorema é de E. Lucas, Théorie des Nombres.**

PEDAGOGIA

ORGANIZAÇÃO DUMA SALA DE MATEMÁTICA

*por **Ruy da Silva Leitão***

Falava-se, há uns bons trinta anos, entre os jóvens candidatos ao professorado de matemáticas elementares, do «método de laboratório» ou «de Perry»; conversava-se, e discutia-se por vezes com calor, sôbre a possibilidade da sua introdução no ensino liceal do nosso país. Havia passado a primeira década dêste século, e ainda não tinha principiado a guerra de 1914-1918. Fôra publicado em 1901, o trabalho de Perry: «O ensino da Matemática», pronunciado perante a Associação Britânica, e logo após, uma multidão de obras, artigos de revistas e jornais, relatórios, etc., surgiu, dando origem ao chamado «movimento de Perry» que ràpidamente alastrou. Denominado nos Estados-Unidos, quási desde a primeira hora, pelo nome de «método de laboratório» com que ficou conhecido e se tornou clássico, não foi recebido com grande entusiasmo no vélho continente, e foi pràticamente nula a sua influência nas reformas de ensino da Matemática de então. Perry, em várias conferências e artigos, tinha-se manifestado contra o ensino demasiadamente dogmático da geometria elementar, e teve uma parte importante na remodelação do ensino matemático em Inglaterra; havia lançado a semente, mas ela pouco ou nada produziu na Europa continental, particularmente nos países da vanguarda no domínio da Matemática, como a França e a Alemanha, nos quais se pensava em outros assuntos.

Estava-se então na fase da «aritmetização» das Matemáticas, e na cultura e desenvolvimento das construções formais lógicas; tinham desaparecido, havia poucos anos, Weierstrass e Hermite; viviam ainda, luzindo como estrêlas de primeira grandeza: Jordan, Klein, Darboux, Cantor, Picard, Hilbert, com o sol brilhante, que em breve se apagaria, e que foi Poincaré; chegavam até nós os primeiros volumes de Borel sôbre a «Teoria das Funções»; começava a falar-se na «Analysis Situs» e agitava-se a questão entre os partidários do infinito «actual» e os do «potencial»; apareciam as primeiras idéias sôbre os conjuntos e o seu cortejo de antinomias, e em voz baixa, quási confidencialmente, murmurava-se dum conceito novo, quiçá perigoso, os números «transfinitos» e dum misterioso «alef»; vinha à superfície o nome de Galois, e alguns mais ousados tentavam penetrar os umbrais da «Teoria dos Grupos»; na esteira de Poincaré, procurava Borel convencer Mittag-Leffler que o domínio das funções analíticas no sentido de Cauchy (monogéneas) era mais vasto que o de Weierstrass; dizia Picard, numa primeira revolta contra o formalismo e simbolismo excessivos, que êles eram o escolho das descobertas em Matemática, como incapazes de conduzir a um facto novo, e Poincaré, com a sua deliciosa ironia e o seu amável cepticismo, criticava os logísticos, a pasigrafia e os seus símbolos; passava as nossas fronteiras Einstein e a sua revolução, e os primeiros fascículos da tradução francesa da «Enciclopedia das Ciências Matemáticas»; era um alcorão o «Curso» de Picard e o de Jordan, êsse «explêndido monumento» como lhe chamou Lebesgue... Estavamos assim há trinta anos, os jóvens candidatos ao professorado... Em época de extrapolações audazes, julgou-se ver no «método de Perry», um sistema universal de ensino para todos os sectores da matemática elementar, uma panaceia que arredaria, duma vez para sempre, todos os obstáculos da didáctica da especialidade mesmo para os alunos menos bem dotados; a prática, a experiência, a vida, desfizeram ilusões e castelos que não tinham alicerces porque talvez não pudessem tê-los: o método seria inaclimatável à mentalidade dos nossos alunos que tanto ou mais ràpidamente, mas superficialmente por via de regra, logravam atingir uma determinada verdade, com uma demonstração ou uma simples figura no quadro, do que com um modêlo, com instrumento por êles construído ou que lhes era facultado já feito, porque, e especialmente para os dos anos mais elementares, na aparelhagem necessária para a aplicação do método, viam mais o objecto curioso, o brinquedo, do que o raciocínio demonstrativo ou do que a propriedade a verificar.

É de alguns anos mais tarde, e com poucos de vida profissional no professorado liceal, que data o relatório que a seguir se transcreve, não pelo valor que em si possue porque é nulo, mas como documento para a história de uma apagada tentativa do «método de laboratório» num modesto liceu, tentativa que não chegou a ultimar-se, em parte porque circunstâncias supervenientes o impediram, em parte porque a experiência trouxe a convicção que do método não resultava o efeito que se aguardava.

Inútil parece acrescentar que a relação das obras a adquirir para a constituïção de uma pequena biblioteca privativa de uma sala de trabalhos práticos de Matemática, deveria ser convenientemente actualizada, e que a transcrita só poderá servir como indicação e recordação do que, há um quarto de século, se supunha ser o necessário para aquêle objectivo.

RELATÓRIO

Tornando-se necessária para a boa realização do ensino da disciplina de Matemática, segundo a moderna orientação pedagógica, a criação de um «laboratório-tipo», é minha opinião que tal laboratório deverá ser dotado, conforme as normas seguidas em estabelecimentos congéneres nos países mais progressivos, da forma seguinte:

A) — Uma sala espaçosa, bem iluminada, com capacidade para uma média de 25 a 30 alunos.

B) — *Mobiliário* — *a)* Carteiras individuais, sòlidamente fixas ao solo, munidas de mesa ou prateleira adjunta, de material resistente (aço ou similar). *b)* Dois armários para guarda de modelos, instrumental, etc., incluindo uma pequena biblioteca (modelos n.º 91.040 *a* ou 91.040 *d*, pág. 1, catálogo da casa Koehler & Volkmar, Leipzig). *c)* Uma secretária para o professor, com cadeira giratória.

C) — *Quadros* — 3 das paredes da sala, forradas inteiramente com lousas de 1,20 m de alto, com o bordo inferior colocado 0,60 m acima do solo, divididos em quadros individuais de 0,80 m. de largura, permitindo o trabalho simultâneo de todos os alunos. A quarta parede será guarnecida com o quadro próprio das aulas teóricas, tendo colocado aos lados esquerdo e direito, dois quadros de lousa, de 1,20 m de altura e 1 m de largura, com quadricula gravada, tendo cada quadrado respectivamente 10 e 5 cm de lado. O quadro próprio para a exposição das lições pelo professor e aluno, é preferível ser composto de duas partes de 1,20 m de largura e 1,50 m de altura, permitindo subir e descer verticalmente por meio da roldana. Dois quadros ligados por charneira, permitindo fazer entre êles ângulo recto, sôbre um suporte (quadro em diedro recto), 80 cm por 80 cm. Três quadros ligados por charneira, em posição de triedro trirectangulo, sôbre um suporte, de aresta igual a 60 cm. 2 esferas de ardósia, uma com 50 cm de diâmetro e outra com 35 cm assentes sôbre um pé.

D) — *Iluminação* — Lâmpadas eléctricas de boa intensidade, com disposição de modo a fornecer uma iluminação uniforme e homogénea, sem sombras.

E) — *Água* — Água distribuída a dois lavatórios, fixos à parede, para uso do professor e alunos, tendo os lavatórios escoamento para o exterior.

F) — *Modelos e instrumentos*

I — *Modelos* — *a)* Sammlung mathematischer Modelle, in 17 Reihen, B. G. Teubner, Leipzig (autor: V. Wieners). *b)* Sammlung mathematischer Modelle, 73 Modellen, B. G. Teubner, Leipzig (autor; P. Treutleins). *c)* Modelos indicados no Catálogo da casa de Koehlers & Volkmar, A. G. & Cº, (Leipzig):

N.º 76.020, pág. 27 — Teorema de Arquimedes.
N.º 76.048, pág. 27 — Guenzel, Cálculo do círculo.
N.º 76.200, pág. 27 — Modelos e superfícies geométricas.
N.º 76.214, pág. 29 — Corpos geométricos, marca K-V. (Colecção III — 25 cm de altura).
N.º 76.222, pág. 29 — Poliedros regulares, 10 cm.
N.º 76.050, pág. 29 — Teorema de Pitágoras, lados inteiros.
N.º 76.051, pág. 29 — Teorema de Pitágoras, caso geral.
N.º 76.052, pág. 29-a) — Teorema de Arquimedes, Volumes.
N.º 76.053, pág. 29-b) — Cálculo da esfera.
N.º 76.104, pág. 29-b) — Hestermann-modelos de corpos geométricos decompostos, Grandeza III.ª, 25 cm de altura.
N.º 76.250, pág. 31 — Corpos geométricos de zinco laminado desarmaveis (32 corpos).
N.º 76.072, pág. 29 — Cilindros e cones planificáveis.
Colecção de Koepp — I — N.º 76610, pág. 31 — Figuras e planos.
Idem — II — N.º 76.612, pág. 31 — Figuras e planos.
Idem — III — N.º 76.614, pág. 31 — Cálculos no círculo.
Idem — Colecção IX — N.º 76.800, pág. 33 — (312 corpos).
N.º 76.123, pág. 33 — Cone e suas secções.
Seno e secante móveis — N.º 77.262, pag. 33 — (25 cm de diâmetro).
2 modelos de vidro — N.º 77.280, pág. 33 — Esfera.
Kreuschmer — N.º 77.292 — Semi-círculo trigonométrico para valores de funcões.
N.º 77.300 — Esfera com fuso.
N.º 77.302 — Esfera com sector de triângulo esférico.
N.º 77.304 — Esfera dividida em octantes.

II — *Instrumentos e utensílios* — *a)* Réguas de cálculo. *b)* Máquina de calcular, permitindo as 4 operações fundamentais. *c)* Réguas graduadas de 80 cm tendo uma pega metálica na extremidade. *d)* Transferidores com pega no centro, de madeira ou metal, (30 cm de diâmetro). *e)* Compassos de madeira para giz. *f)* Esponjas ou escovas para limpeza das ardósias. *g)* Dois ponteiros de madeira, um grande (2,5 a 3 metros) e outro pequeno (1,5 a 2 metros). *h)* Caixas de giz de côres (não caixas sortidas, mas sim caixas de giz de uma só côr) (branco, vermelho, amarelo e verde). *i)* Planímetro para determinação de áreas de figuras planas. Planímetro de Amsler e de Pritz. *j)* Um estojo de desenho (completo). *k)* Um compasso de redução. *l)* Um esquadro em T, de 80 cm de comprimento. *m)* Um esquadro graduado, em forma de triângulo rectângulo isósceles ($a=40$ cm; $b=c=28$ cm apròximadamente).

G) — Quadros murais

I — Quadros com os números primos até 1.000.

II — Quadro dando em função de n, os valores de $1/n$, n^2, $1/n^2$, n^3, $1/n^3$, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $1/\sqrt{n}$ e $1/\sqrt[3]{n}$.

III — Quadro com as diversas posições de uma recta em relação a dois eixos rectangulares no plano.

IV — Quadro com os gráficos do polinómio do 2.º grau, segundo a diversa natureza das raízes.

V — Quadro com alguns casos do polinómio do 2.º grau.

VI — Quadro com os gráficos do polinómio do 4.º grau, com potências pares da variável exclusivamente.

VII — Quadro com os gráficos da função exponencial e da função logarítmica.

VIII — Quadro representando a elipse, hiperbole e parábola para o estudo das suas propriedades em geometria sintética.

IX — Quadro representando em relação aos dois eixos coordenados vulgarmente empregados para o seu estudo em geometria analítica, a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola.

X — Quadro com os gráficos das funções trigonométricas em dois períodos $0-2\pi$, $2\pi-4\pi$.

XI — Quadro mostrando o círculo trigonométrico fundamental e as linhas trigonométricas dos quatro quadrantes.

XII — Quadro mostrando a noção geométrica de derivada, com representação das diferenciais e seu respectivo triângulo.

XIII — Alguns retratos de matemáticos ilustres (Arquimedes, Newton, etc.) (B. G. Tenbuer, Leipzig, ou Open Court & C°, Chicago).

H) — Biblioteca

a) — ARITMÉTICA

Joseph Bertrand. Traité d'Arithmétique. Hachette, Paris.

E. Humbert. Traité d'Arithmétique. Vuibert, Paris.

Beman and Smith. Higher Arithmetic. Ginn & C°, Boston.

E. Domant. Cours d'Arithmétique theorique et pratique. Vuibert, Paris.

J. Poirée. Précis d'Arithmétique. Gauthier-Villars, Paris.

Stolz und Gmeiner. Theoretische Arithmetik. Teubner, Leipzig.

P. Bachmann. Niedere Zahlentheorie. Teubner, Leipzig.

E. Cahen. Elements de la Theorie des Nombres. Gauthier-Villars, Paris.

Edouard Lucas. Theorie des Nombres. Gauthier-Villars, Paris.

M. Stuyvaert. Les nombres positifs. Van Rysselberghe & Rombaut, Gand.

E. Dumont. Arithmétique générale. Hermann, Paris.

G. B. Mathews. Theory of Numbers. Bell & Sons. London, Cambridge.

T. J. Stieltjes. Essai sur la Theorie des Nombres. Gauthier-Villars, Paris.

Ch. F. Gauss. Recherches arithmétiques. Hermann, Paris.

Luís Octavio de Toledo. Elementos de Arithmetica Universal. Madrid.

Legendre. Theorie des Nombres. Hermann, Paris.

C. Fazzari. Elementi di Arithmetica. Reber, Palermo.

F. Panizza. Arithmetica razionale. Hoepli, Milano.

Lejeune-Dirichlet (Edição Dedekind). Vorlesungen uber Zahlentheorie. Vieweg und Sons, Braunschweig.

A. Grévy. Arithmétique. Vuibert, Paris.

J. A. Serret. Traité d'Arithmétique. Gauthier-Villars, Paris.

C. A. Laisant et E. Lemoine. Traité d'Arithmétique. Gauthier-Villars, Paris.

b) — ÁLGEBRA

Joseph Bertrand. Traité d'Algébre. Hachette, Paris.

C. Smith. Elementary Algebra, with solutions. Macmillan, London.

C. Smith. A Treatise on Algebra, with solutions. Macmillan, London.

Todhunter. Algebra, with key. Macmillan, London.

G. Chrystal. Algebra. Macmillann, New York.

Fine. Number system in Algebra. Heath & C.º on Leach Boston, New York.

Bezodis. Cours d'Algébre. Garnier Fréres, Paris.

Ch. Briot. Leçons d'Algébre. Delagrave, Paris.

S. Pincherle. Lezioni di Algebra complementare. Zanichelli, Bologna.

Bourdon. Elements d'Algebre. Gauthiers Villard, Paris.

R. Marcolongo. Algebra (Collezionne di libri di testo di matematica. Francesco Perrela. Napoli.

R. Estève. Cours d'Algebre. Gauthier-Villars, Paris.

E. Netto. Elementare Algebra. Teubner, Leipzig.

E. Netto. Vorlesungen uber Algebra. Teubner, Leipzig.

H. Weber. Lehrbuch der Algebra (kleine Ausgabe in einem Bande). Wieweg und Sons. Brauschweig.

J. Serret. Cours d'Algébre supérieure. Gauthier-Village, Paris.

B. Niewenglousky. Cours d'Algébre. A. Colin, Paris.

Henry B. Fine. A college Algebra. Ginn & C.º, Boston.

Burnside and Panton. Theory of Equations. Hodges, Dublin.

Schuller. Arithmetik und Algebra. Teubner, Leipzig.

L. Zoretti. Leçons d'Algébre. Vuibert, Paris.

G. Bauer. Vorlesungen uber Algebra. Tubner, Leipzig.

c) — Geometria

Edouard Fouet. Leçons de Geometrie Elementaire. Vuibert, Paris.

Veronése. Elementi di Geometria. Drucker, Pádua.

A. Faifofer, Geometria. Tipografia Emiliana, Veneza.

Ch. Meray. Nouveaux elements de Geometrie. Dijon.

C. Alasia. Complementi di Geometria Elementare. Hoepli, Milano.

Niewenglowsky et Gérard. Leçons sur la Geometrie elementaire. Gauthier-Villars, Paris.

E. Duporcq. Prémiers principes de Geometrie moderne. Gauthier-Villars, Paris.

Guichard. Traité de Geometrie. Vuibert, Paris.

David Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Teubner, Leipzig.

F. Enriques e E. Amaldi. Elementi di Geometria.

T. L. Heath. The thirteen books of Euclid's Elements. University Press, Cambridge.

Hall and Stevens. School Geometry, with key. Macmillann, London.

F. Enriques. Questioni riguardanti da Geometria elementare. Zanichelli, Bologna.

Tresse et Thybaut. Cours de Geometrie analytique. A. Colin, Paris.

F. Carnoy. Cours de Geometrie analytique. Gauthier Villars, Paris.

Henrici und Treutlein. Lehrbuch der Elementargeometrie. Teubner Leipzig.

Felix Klein. Leçons sur certaines questions de Geometrie elementaire. Vuibert, Paris.

Treutlein. Geometrischer Anschauungsunterricht als Unterstufe... etc. Teubner, Leipzig.

Rausenberger. Die Elemetargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Teubner, Leipzig.

Russell. Elementary of pure Geometry. Oxford.

Ingrami. Elementi dela Geometria per le Scuole secondarie. Bologne.

E. Rouché et C. de Comberousse. Traité de Geometrie. Gauthier-Villars, Paris.

d) — Trigonometria

J. A. Serret. Traité de Trigonometrie. Gauthier-Villars, Paris.

Bourdon. Trigonometrie rectiligne et sphérique. Gauthier-Villars, Paris.

S. F. Lacroix. Traité elementaire de Trigonometrie. Gauthier-Villars, Paris.

Borchardt and Perrott. A new trigonometry for schools, with answers. Bell & Sons, London.

C. Pendlebury. Elementary trigonometry. Bell & Sons, London.

Hall and Frink. Trigonometry. Bell & Sons, London.

Hall and MacInnes. The elements of plane and spherical trigonometry. Macmillann, New York.

Todhunter. Plane Trigonometry, with key. Macmillann, London.

Carslaw. Plane Trigonometry. Macmillann, London.

J. B. Lock. A treatise on elementary and higher trigonometry. Macmillann, London.

e) — Cosmografia

Luc. Picart. Astronomie generale. A. Colin, Paris.

H. Comissaire. Leçons de Cosmographie. Masson & C.ª, Paris.

A. Grignon. Leçons de Cosmographie. Vuibert, Paris.

N. Lockier. Elementary lessons in Astronomy. Macmillann. London.

F. R. Moulton. An introduction to Astronomy. Macmillann, London.

B. Baillaud. Cours d'Astronomie. Gauthier-Villars, Paris.

H. Bruns. Vorlesungen uber Astronomie. Teubner, Leipzig.

Bernhard Schwalbe. Grundiss der Astronomie. Teubner, Leipzig.

G. Boccardi. Cosmografia. Hoepli, Milano.

H. Godfray. A treatise on Astronomy. Macmillann. London.

f) — Análise Infinitesimal

H. Sonnet. Prèmiers elements du calcul infinitesimal. Hachette, Paris.

Ernesto Césaro. Corso del Analisi Algebrica. Fratelli Bocca, Torino.

Jules Tannery. Léçons d'Algebre et Analyse. Gauthier Villars, Paris.

Réné Baire. Leçons sur les theories générales de l'Analyse. Gauthier-Villars, Paris.

F. Gomes Teixeira. Curso de Análise Infinitesimal. Universidade. Coimbra.

Jules Tannery. Introduction à la theorie des fonctions d'une variable. Hermann, Paris.

W. F. Osgood. A first course on the differential and integral calculus. Macmillann, New York.

A. Lodge. Differential and integral calculus for beginners. Bell & Sons, London.

L. Tesar. Elemente der Differential und Integralrechnung. Teubner, Leipzig.

G. Kowalewski. Grundzuge der Differential und Integralrechnung. Teubner, Leipzig.

g) — Exercícios e Problemas

C. A. Laisant. Recueil de problèmes de Mathématiques. Gauthier-Villars, Paris.

Tzaut et Morf. Exercices et problèmes d'Algèbre (avec solutions). Gauthier-Villars, Paris.

E. Barbarin. Recueil de calculs logarithmiques. Vuibert, Paris.

L. Zoretti. Exercices numériques et graphiques de mathématiques. Gauthier-Villars, Paris.

I. Juhel Renoy. Théorie et application des équations du second degré. Vuibert, Paris.

J. Wolstenholme. Mathematical Problems. Macmillann, London.

S. Pincherle, Esercizi di Algebra elementare. Hoepli, Milano.

Bachet de Méziriac. Problèmes plaisants et delectables que se font par les nombres. Gauthier-Villars, Paris.

E. Humbert. Problèmes d'Algèbre et exposé des principales théories. Vuibert, Paris.

P. Aubert et *J. Papelier.* Exercices de calcul numérique. Vuibert, Paris.

E. Bortolotti. 4.400 esercizi di algebra elementare. Albrighi, Segati & C.ª, Roma.

Desboves. Question d'Algèbre élémentaire. Paris.

H. Vuibert. Problèmes de Baccalaureát (Mathématiques). Vuibert, Paris.

G. Lemaire. Questions d'Algèbre élémentaire. Vuibert, Paris.

Georges Morel. Problèmes de Baccalaureát (Mathématiques). Paris.

Emile Gau. Calculs numériques et graphiques. A. Colin, Paris.

C. Alasia. Esercizi di Trigonometria piana. Hoepli, Milano.

S. Pincherle. Esercizi sulla Geometrie elementare. Hoepli, Milano.

I. Gherzi. Problemi di Geometria elementare. Hoepli, Milano.

Petersen. Méthodes et théories pour la réalisation des problèmes de constructions géométriques. Gauthier-Villars, Paris.

M. Auerbach. Graphic Mathematics. Allyn and Bacon, New-York.

G. Lemaire. Méthodes de résolution et discussion des problèmes de géometrie. Vuibert, Paris.

J. Poirée. Méthodes pour resoudre les problèmes de géometrie. Gauthier-Villars, Paris.

E. Humbert. Problèmes de Trigonometrie. Vuibert, Paris.

Marcel Ivon. Méthodes et problèmes de Géometrie moderne. Croville-Moraud, Paris.

J. Richard. Leçons sur les méthodes de la Géometrie moderne. Société d'Editions Scientifiques, Paris.

G. Larne. Exposé des méthodes pour résoudre les problèmes de Géometrie. Hermann, Paris.

Fitz-Patrick et *Chevrel.* Exercices d'Arithmétique. Hermann, Paris.

E. Bardey. Algebraische Aufgabensammlung (ed. Pietzker & Presler). B. G. Teubner, Leipzig.

P. Crantz. Arithmetische Aufgabensammlung. Teubner Leipzig.

C. Pendleboury. Exercises and examination papers (with answers and key). Bell & Sons. London.

T. Cooper Smith. Problems papers for preparatory schools (arithmetic). Bell & Sons, London.

Baker & Bourne. Examples in Algebra (complet with answers). Bell & Sons, London.

C. Pendleboury. Examples in Arithmetic (complet with answers). Bell & Sons, London.

C. O. Tuckey. Examples in Arithmetic (complet with answers). Bell & Sons, London.

E. Bardey. Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten, etc. Teubner, Leipzig.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. Muller & Kutnewsky. Teubner, Leipzig.

h) — Tábuas e Tabelas

L. Zoretti. Tables numériques usuelles. Gauthier--Villars. Paris.

P. Abbott. Mathematical Tables and Formulae. Longmann's Green & C°. London.

Sanguet. Tables trigonometriques centésimales. G. Villars. Paris.

Hervé de Saint-Paul. Tables des lignes trigonométriques naturelles des angles et des arcs variant de minute en minute depuis 0° jusqu'á 90°. Gauthier--Villars. Paris.

J. Houel. Tables de logarithmes á cinq décimales avec logarithmes de Gauss· Gauthier-Villars. Paris.

L. Schron. Tables de logarithmes à sept décimales. (Traduction de J. Houel). Gauthier-Villars, Paris.

i) — História, Filosofia e Pedagogia da Matemática

D. E. Smith. The teaching of elementary mathematics. Macmillann. New-York.

J. W. A. Young. The teaching of mathematics in the elementary and secondary schools. Longman's Green & C°. London.

Reports on the teaching of elementary mathematics (1902-1908). (Mathematical Association). Bell & Sons. London.

The teaching of elementary Algebra and numerical Trigonometry (Reports of the Mathematical Association). Bell & Sons. London.

The Reorganisation of Mathematics in secondary schools (Mathematical Association of America). General Education Board. New-York.

D. E. Smith. The teaching of Arithmetic. Boston.

D. E. Smith. The teaching of Geometry. New-York.

R. C. Archibald. The training of teachers of mathematics of secondary schools. Bureau of Education. Washington.

A. E. Hornbrook. Laboratory methods of teaching mathematics. New-York.

Hoefer. Histoire des Mathématiques. Hachette, Paris.

Boyer. Histoire des Mathématiques. Gauthier-Villars, Paris.

W. Rousse-Ball. Histoire des Mathématiques (trad. francaise). Hermann, Paris.

F. Cajori. History of mathematics. Macmillann, New--York.

G. Loria. Guida allo studio della storia della mathematiche. Hoepli, Milano.

A. Schultze. The teaching of mathematic in the secondary schools, Macmillann, New-York.

D. E. Smith. History of mathematics (2 vol). Ginn & C.°, Boston.

Conférences du Musée Pedagogique (varios auctores). (2 vol.). A. Collin, Paris.

Stuyvaert. Introduction á la methodologie mathématique. Van Rysselberghe & Rombaut, Gand.

Felix Klein. Conferences sur les mathématiques. Hermann & Fils, Paris.

Laissant. La Mathématique. Sa philosophie et son enseignement. G. Villars.

Rébiére. Mathematiques et mathematiciens. Vuibert, Paris.

G. Maupin. Opinions et curiosités touchant la mathematique. G. Villars.

L. Brunschvigc. Les étapes de la philosophie mathématique. F. Alcan, Paris.

Bustelli. Elementi di filosofia della matematica. Societá editrice Dante Alighieri, Roma.

j) — Diversos

Enzyklopädie der Elementar-mathematik (3 vol.). H. Weber & H. Wellstein. B. G. Teubner, Leipzig.

Felix Klein. Vorträge uber den Mathematischen Unterricht and den höheren Shulen. B. G. Teubner, Leipzig — (compreende duas partes): 1.ª Teil — Von der Organisations des Mathematischen Unterrichts. 2.ª Teil — Elementarmathematik vom höheren Standpunkteaus (2 vol.).

Feliw Muller. Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français (2 vol.). Gauthier Villards, Paris.

É também aconselhado, para um maior desenvolvimento dos alunos, e como um útil incentivo para a sua cultura matemática, que o «laboratório» faça a assinatura de um ou dois jornais ou revistas elementares e de acôrdo com o nível dos alunos. Nestas condições, poderão ser indicadas como correspondendo ao fim que se tem em vista, as duas seguintes:

L'Éducation Mathématique (para os alunos até à 5.ª classe). Vuibert, Paris.

Le Journal de Mathématiques élémentaires (para os alunos das 6.ª e 7.ª classes). Vuibert, Paris.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Nos actuais programas de matemática dos liceus, não são incluídos certos capítulos como, propriedades dos polinómios, equações transcendentes, aproximações numéricas, e outros, cuja necessidade é evidente, quer sob o ponto de vista de cultura geral, quer para a continuação de estudos superiores. A reforma dos programas prevendo a criação de um oitavo ano no curso liceal, deve ter deixado para inclusão nos seus programas, estas matérias. E porque o seu ensino no primeiro ano universitário acarretaria perdas de tempo em prejuízo de outros assuntos, entende-se que o seu estudo deve ser feito como preparação para a entrada nas Universidades. É assim que nos exames de aptidão aparecem questões sôbre aquêles capítulos. E porque assim é, e porque os candidatos necessitam preparação para êsses exames, a «Gazeta de Matemática», com o intuito de fornecer elementos de preparação nesse sentido, decidiu publicar nesta secção, a par de outros, artigos sôbre aquelas matérias, que já em tempo pertenceram ao ensino liceal. É dêste tipo o artigo seguinte.

ESTUDO DE ALGUMAS PROPRIEDADES DOS POLINÓMIOS INTEIROS

por ***J. J. Rodrigues dos Santos***

O — Definições.

Vamos fazer o estudo de algumas propriedades dos polinómios inteiros em x para o que representaremos por $y_n(x)$ o polinómio inteiro do grau n de coeficientes reais

(1) $y_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

Teorema I — *Um polinómio inteiro em* x *toma um único valor por cada valor atribuido à variável* x.

Se na expressão (1) substituirmos a variável x por um valor particular, qualquer, o valor que o polinómio toma é único, visto que o conjunto das operações a efectuar para calcular êsse valor, só pode conduzir a um único resultado por se tratar de operações uniformes. Se designarmos por x_i o valor particular atribuído a x designaremos por $y_n(x_i)$ o valor correspondente de $y_n(x)$.

Definição I — Diz-se que α é *raiz* ou *zero* dum polinómio inteiro em x, quando êste se anula para o valor α atribuído à variável. Isto é: se α é raiz do polinómio (1) ter-se-á: $y_n(\alpha)=0$.

1 — Condição de divisibilidade dum polinómio inteiro em x por $x-\alpha$.

Suponhamos efectuada a divisão do polinómio (1), do grau n, pelo binómio $x-\alpha$, onde α designa um número qualquer. O cociente será um polinómio do grau $n-1$, visto o divisor ser do 1.º grau, em x, e o resto, se o houver, não conterá x. Podemos escrever:

$$y_n(x)=y_{n-1}(x)\,(x-\alpha)+R$$

igualdade que é verdadeira qualquer que seja o valor atribuído a x. Então, ela será verdadeira para $x=\alpha$ o que se traduz por:

$$y_n(\alpha)=y_{n-1}(\alpha)\,(\alpha-\alpha)+R\,.$$

A primeira parcela do segundo membro da igualdade anterior, é nula, visto um dos factores ser nulo e $y_{n-1}(\alpha)$ não ser infinito. [1]

A igualdade reduz-se pois a $y_n(\alpha)=R$ o que, atendendo ao significado de $y_n(\alpha)$ e de R, nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema II — *O resto da divisão dum polinómio inteiro em* x *por* x$-\alpha$ *é o valor numérico que se obtém substituindo no polinómio* x *por* α.

Em particular, se fôr $R=0$, o polinómio será divisível por $x-\alpha$, e como $y_n(\alpha)=0$, em virtude da definição I, α é raiz do polinómio (1). Podemos então enunciar o

Teorema III — *Se* α *é raiz ou zero dum polinómio inteiro em* x *êsse polinómio é divisível por* x$-\alpha$.

Recìprocamente, se o polinómio (1) é divisível por $x-\alpha$, α é raiz dêsse polinómio. Com efeito, por hipótese $R=0$, donde:

$$y_n(\alpha)=y_{n-1}(\alpha)\,(\alpha-\alpha)=0$$

e α é raiz do polinómio.

O teorema III e o seu recíproco podem resumir-se no seguinte enunciado:

Teorema IV — *A condição necessária e suficiente para que* α *seja raiz dum polinómio inteiro em* x *é que êste seja divisível por* x$-\alpha$.

---

[1] Um polinómio inteiro em x toma valores finitos para valores finitos da variável, visto o grau do polinómio e os coeficientes serem números finitos. O produto $0\times\infty$ é como se sabe um símbolo de indeterminação, indeterminação esta que é muitas vezes aparente.

2 — Condição de identidade de dois polinómios.

Definição II — Dois polinómios inteiros em x dizem-se *idênticos* quando tomam o mesmo valor para qualquer valor atribuído à variável x.

Definição III — Um polinómio inteiro em x diz-se *idênticamente nulo* quando é nulo qualquer que seja o valor atribuído à variável.

Vamos agora determinar quais as condições que se devem verificar para que um polinómio inteiro em x seja identicamente nulo e, depois, as condições de identidade de dois polinómios.

Teorema V — *Quando um polinómio inteiro em* x *do grau* n *se anula para mais de* n *valores distintos atribuídos à variável, êle é identicamente nulo.*

Suponhamos que, conforme a hipótese do teorema, o polinómio (1) se anula para qualquer dos valores

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots\alpha_l\qquad l>n$$

da variável x. Em virtude do teorema III, visto α_1 ser zero do polinómio, podemos escrever:

$$y_n(x)=y_{n-1}(x)\,(x-\alpha_1)\,.$$

Mas anulando-se $y_n(x)$ para $x=\alpha_2$, o mesmo deverá acontecer ao segundo membro da igualdade anterior, visto que ela é válida qualquer que seja x. Ora $x-\alpha_1$ è diferente de zero para $x=\alpha_2$ (a menos que $\alpha_1=\alpha_2$ o que contraria a hipótese dos valores $\alpha_1\alpha_2\cdots$ serem todos distintos); logo deverá ser $y_{n-1}(x)=0$ para $x=\alpha_2$ ou $y_{n-1}(\alpha_2)=0$. Nèstas condições poderemos escrever, como anteriormente:

$$y_{n-1}(x)=y_{n-2}(x)\,(x-\alpha_2)\,.$$

Substituindo êste valor de $y_{n-1}(x)$ na expressão de $y_n(x)$ vem:

$$y_n(x)=y_{n-2}(x)\,(x-\alpha_2)\,(x-\alpha_1)\,.$$

A repetição do raciocínio feito, para os valores $\alpha_3\,\alpha_4\cdots\alpha_n$ levar-nos-ia a escrever:

$$y_n(x)=y_0\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\qquad(2)$$

onde y_0 é uma constante. Mas o polinómio $y_n(x)$ anula-se por mais de n valores atribuídos a x; designando por α_{n+1} um dos valores, diferente de $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, o primeiro membro de (2) deverá ser nulo para $x=\alpha_{n+1}$ e o mesmo se deve verificar com o segundo membro daquela igualdade. Como os factores binómios que nêle figuram não se anulam para $x=\alpha_{n+1}$ deverá ser $y_0=0$. Mas o facto de y_0 ser nulo implica que $y_n(x)$ seja nulo qualquer que seja o valor atribuído a x.

Teorema VI — *Se* y (x) *é nulo qualquer que seja* x *então os coeficientes são todos nulos.*

GEOMETRIA

a) GEOMETRIA PLANA

Triângulos e Quadriláteros. Ângulos, áreas, etc.: 1123 (**12**); 1221 (**13**); 1279 (**14**); 1562, 1566 (**18**).
Medidas angulares. Ângulos ao centro e excêntricos: 1271 (**14**); 1514 (**17**).
Proporcionalidade de segmentos: 1372 (**15**); 1467 (**16**).
Homotetia e semelhança. Conseqüências numéricas: 1114, 1123, 1126 (**12**); 1215, 1220 (**13**); 1355, 1372 (**15**); 1567 (**18**).
Polígonos regulares (inscritos e circunscritos à circunferência). Ângulos internos e externos. Áreas, etc.: 1105 (**12**); 1214 (**13**); 1354, 1378, 1379 (**15**).
Ciclometria: 1023 (**11**); 1123, 1125 (**12**); 1271 (**14**); 1378 (**15**).
Métodos geométricos. Problemas de construção: 1018, 1025 (**11**); 1122, 1126 (**12**); 1259 (**14**); 1362, 1372 (**15**); 1454 (**16**); 1518, 1526 (**17**).
Demonstrações várias: 1098, 1113 (**12**); 1202, 1209 (**13**); 1267 (**14**); 1349, 1367 (**15**); 1448, 1461 (**16**); 1525, 1534 (**17**); 1561 (**18**).

b) GEOMETRIA NO ESPAÇO

Rectas e planos: 1115 (**12**); 1562 (**18**).
Ângulos sólidos. Triedro: 1106 (**12**); 1513 (**17**); 1575 (**18**).
Poliedros regulares: 1214 (**13**); 1272 (**14**); 1355, 1380 (**15**).
Superfícies prismáticas e piramidais: 1450 (**16**).
Prismas e pirâmides (paralelipípedo e cubo): 1104, 1126 (**12**); 1210 (**13**); 1358 (**15**); 1468 (**16**).
Superfícies e sólidos de revolução: 1030 (**11**); 1104 (**12**); 1210, 1211, 1222 (**13**); 1258, 1268, 1280 (**14**); 1368, 1374 (**15**); 1462 (**16**); 1533 (**17**); 1568, 1574 (**18**).

Trabalho executado pelo cooperador Fernando R. Dias Agudo.

NOTA — Os números que antecedem os que vão destacados referem-se à ordem de publicação dos problemas, enquanto que os números destacados entre parêntesis se referem aos respectivos números da «Gazeta de Matemática» em que êsses problemas foram publicados. Exemplo: *Ciclometria* ... 1125 ... (12) indica o problema n.º 1125 publicado no n.º 12 da «Gazeta de Matemática».

Quadro de distribuïção, por assuntos, dos problemas dos pontos de

Exame de Aptidão às Escolas Superiores,

publicados na «Gazeta de Matemática» n.^{os} 11 a 18

ARITMÉTICA

Operações fundamentais : 1107 (12).
Sistemas de numeração : 1361 (15),
Divisibilidade : 1121 (12); 1373 (15); 1453 (16).
Números primos. Decomposição factorial. M. d. c. e m. m. c. 1026 (11); 1097 (12); 1216 (13); 1516, 1517 (17).
Números fraccionários. Dízimas : 1116 (12); 1201 (13); 1348, 1356 (15); 1447 (16); 1521 (17).
Divisão em partes proporcionais : 1032 (11); 1275 (14).

ÁLGEBRA

Decomposição em factores. Divisão de polinómios : 1028 (11); 1119 (12).
Potências e radicais : 1021 (11); 1110 (12); 1346, 1351, 1359 (15); 1558 (18).
Problemas do 1.º e 2.º graus : 1217 (13); 1275 (14); 1375 (15); 1463 (16); 1570 (18).
Sucessões. Limites. Progressões aritméticas e geométricas : 1128 (12); 1263, 1274 (14); 1529 (17); 1571 (18).
Funções. Sua classificação e representação gráfica : 1015 (11); 1124 (12); 1464 (16).
Funções inversas, exponencial e logarítmica : 1457 (16).
Função logarítmica. Definição e propriedades dos laritmos : 1101 (12); 1205 (13); 1364 (15).
Cálculo logarítmico : 1213 (13); 1256, 1270 (14); 1371 (15).
Análise indeterminada do 1.º grau. Equação de Diofanto : 1022 (11); 1093, 1100 (12); 1195, 1203 1218 (13); 1260 (14); 1556 (18).
Equação do 2.º grau a 1 incógnita. Discussão e relações entre os coeficientes e as raízes : 1020 (11); 1092, 1108 (12); 1204, 1212 (11); 1261, 1269 (14); 1441 (16); 1519 (17); 1557 (18).
Propriedades do trinómio do 2.º grau : 1345, 1359, 1376 (15); 1520, 1527 (17).
Desigualdades do 2.º grau : 1013 (11); 1091, 1099 (12); 1196 (13); 1269, 1276 (14); 1350, 1363 (15); 1451 (16); 1512, 1532 (17); 1565 (18).
Equação biquadrada : 1197 (13); 1255 (14); 1344, 1351, 1370 (15); 1456 (16); 1556 (18).
Arranjos, permutações e combinações : 1014, 1019 (11); 1109, 1120 (12); 1360, 1364 (15); 1443 (16); 1528 (17).
Binómio de Newton : 1262 (14); 1370 (15); 1441, 1452, 1455 (16); 1511 (17).

TRIGONOMETRIA

Funções circulares. Sua variação e representação gráfica : 1027 (11); 1118 (12); 1266 (14); 1369 (15); 1465 (16).
Relações entre as funções dalguns arcos. Redução ao 1.º quadrante : 1112 (12); 1366, 1369 (15); 1445 (16); 1531 (17); 1560 (18).
Funções circulares inversas : 1200, 1208 (13); 1315, 1353, 1357 (15); 1459 (16); 1532 (17).
Relações entre as funções dum mesmo arco. Fórmulas fundamentais : 1031 (11); 1095, 1103, 1119 (12); 1207 (13); 1265 (14); 1460 (16).
Verificação de identidades : 1094, 1127 (12); 1198 (13); 1347, 1366 (15); 1444 (16); 1522 (17); 1572 (18).
Adição e subtracção de arcos : 1199, 1219 (13); 1523 (17); 1569 (18).
Cálculo logarítmico com funções circulares : 1016, 1024, 1029 (11); 1449 (16); 1511 (17).
Relação entre os elementos dum triângulo rectângulo : 1277 (14), 1377 (15).
Resolução de triângulos rectângulos. Sua aplicação a outros problemas : 1017 (11); 1096, 1102, 1111, 1117 (12); 1206 (13); 1257, 1264, 1273, 1278 (14); 1346, 1352, 1365, 1369 (15); 1446, 1458, 1466 (16); 1524, 1530 (17); 1559, 1573 (18).

Consideremos o polinómio (1) que supomos nulo para qualquer valor de x, será também $y_n(0)=0$ e portanto $a_n=0$. O polinómio $y_n(x)$ pode então escrever-se com a forma

$$y_n(x)=x(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}).$$

Mas, tendo $y_n(x)$ nulo qualquer que seja x, o mesmo deve suceder ao parêntesis que figura no segundo membro da igualdade anterior. Concluímos assim que deve ser $a_{n-1}=0$ e, anàlogamente,

$$a_{n-2}=0\cdots a_1=0\,,\quad a_0=0.$$

A expressão (2) permite-nos afirmar:

Teorema VII — *Se um polinómio inteiro em* x *do grau* n *se anula para* n *valores distintos atribuídos à variável* x, $\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_n$ *êle é decomponível num produto de factores lineares da forma:*

$$y_n(x)=y_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

É fácil verificar que $y_0=a_0$, sendo a_0 o coeficiente da maior potência de x, ou seja, visto que supomos o polinómio ordenado segundo as potências decrescentes de x, o coeficiente do seu primeiro têrmo. É o que resulta da maneira como se obtém o primeiro têrmo do cociente da divisão de dois polinómios e de ser a unidade o coeficiente de x nos binómios $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.

Teorema VIII — *Quando dois polinómios inteiros em* x *dos graus* m *e* n $(m>n)$ *são iguais para mais de* m *valores distintos atribuídos à variável* x, *estes dois polinómios são idênticos, isto é, tomam o mesmo valor qualquer que seja* x.

Na hipótese do teorema, podemos mesmo afirmar que os polinómios são iguais: têm o mesmo grau e os têrmos semelhantes têm os mesmos coeficientes.

Êste teorema é conhecido por *Princípio das Identidades.* Sejam os dois polinómios

$$P=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots+a_mx^m$$
$$Q=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n.$$

Formemos a diferença

$$P-Q=a_0-b_0+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_n-b_n)x^n+ \\ +a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_mx^m.$$

Como P e Q são por hipótese iguais para mais de m valores distintos atribuídos à variável x, a diferença $P-Q$ será nula para mais de m valores de x, e como é do grau m, os teoremas V e VI permitem-nos escrever:

$$a_0-b_0=0\quad a_1-b_1=0\cdots a_n-b_n=0\quad a_{n+1}=0\cdots a_m=0$$

ou

$$a_0=b_0\quad a_1=b_1\cdots a_n=b_n\quad a_{n+1}=0\cdots a_m=0.$$

Note-se que êstes teoremas são verdadeiros se nos polinómios entrarem duas ou mais variáveis. Neste caso dir-se-ia:

Um polinómio inteiro a mais duma variável que se anula para qualquer sistema de valores atribuídos às variáveis é idênticamente nulo, isto é, são nulos todos os seus coeficientes.

Bastaria mesmo que o polinómio se anulasse para mais de m sistemas de valores distintos atribuídos às variáveis, sendo m o grau do polinómio em relação à variável que nêle figura com maior expoente. E o teorema VIII enunciar-se-ia assim:

Se dois polinómios dos graus m *e* n *são iguais para mais de* m $(m>n)$ *sistemas de valores distintos atribuídos às variáveis êles são idênticos, isto é, tomam o mesmo valor para qualquer sistema de valores atribuídos às variáveis.*

Em face dos teoremas I e VIII podemos afirmar que

Definição IV — Dois polinómios inteiros dizem-se *idênticos* quando, e só quando, os coeficientes dos respectivos têrmos semelhantes são iguais.

3 — Método dos coeficientes indeterminados.

O método dos coeficientes indeterminados, que é devido a Descartes, é de uso constante em matemática e a sua simplicidade é paralela à sua importância. Consiste o método numa aplicação do teorema VIII. Quando pretendemos determinar os coeficientes dum polinómio inteiro, cuja forma é conhecida e de que se conhecem certas propriedades, em número suficiente, a aplicação do princípio das identidades permite calcular os coeficientes do polinómio procurado, que são as incógnitas dum sistema de equações que traduz as condições ou propriedades a que aquela função inteira deve satisfazer. Para a aplicação dêste método é fundamental conhecer a forma da função inteira procurada e por vezes pretende-se também determinar o grau do polinómio.

Vamos fazer uma aplicação dos métodos de coeficientes indeterminados no cálculo do cociente e resto da divisão dum polinómio inteira em x, do grau n, por $x-\alpha$.

O cociente será um polinómio de grau $n-1$, inteiro e o resto uma constante. Então podemos escrever idênticamente:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n= \\ =(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1})+R$$

sendo $b_0, b_1\cdots b_{n-1}$ e R as constantes a determinar.

Efectuando as operações indicadas no 2.° membro e ordenando o resultado segundo as potências decrescentes de x, teremos:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = b_0 x^n + (b_1 - \alpha b_0) x^{n-1} + \\ + (b_2 - \alpha b_1) x^{n-2} + \cdots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2}) x + (R - \alpha b_{n-1}).$$

Como esta igualdade é verdadeira qualquer que seja x, o princípio das identidades permite-nos escrever:

$$a_0 = b_0 \quad a_1 = b_1 - \alpha b_0 \quad a_2 = b_2 - \alpha b_1 \cdots$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2} \quad \text{e} \quad a_n = R - \alpha b_{n-1}$$

ou:

$$a_0 = b_0 \quad b_1 = a_1 + \alpha b_0 \cdots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2} \quad R = a_n + \alpha b_{n-1}.$$

Destas igualdades resulta a regra de Rufini que se enuncia do seguinte modo: *o primeiro coeficiente do cociente é igual ao primeiro coeficiente do dividendo e cada um dos outros obtém-se do anterior, multiplicando êste por* α *e adicionando-lhe o coeficiente do mesmo índice do dividendo. O último valor obtido é o resto.*

Vejamos a maneira prática de dispor o cálculo num problema desta natureza. Seja, por exemplo, calcular o cociente e o resto de divisão do polinómio $2x^5 - 3x^3 + x^2 - 7$ por $x - 3$. Numa linha escrevem-se os coeficientes do polinómio dividendo, completando com zeros as faltas de termos de certos graus. Por baixo de cada coeficiente escrevem-se os produtos por $+3$ dos coeficientes do cociente que se vão obtendo, notando que o primeiro dêstes é igual ao primeiro coeficiente do dividendo, suposto êste ordenado segundo as potências decrescentes de x.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & -7 \\ & 6 & 18 & 45 & 138 & 414 \\ \hline 2 & 6 & 15 & 46 & 138 & 407. \end{array}$$

O cociente será, portanto, $2x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 46x + 138$ e o resto 407.

Vamos dar exemplos doutros problemas cuja solução se obtém fàcilmente pelo uso do método dos coeficientes indeterminados.

Seja, por exemplo, determinar os coeficientes dum polinómio do 4.° grau para que êle seja o quadrado do trinómio $b_0 x^2 + b_1 x + b_2$. O polinómio procurado será

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = (b_0 x^2 + b_1 x + b_2)^2$$

ou:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = b_0^2 x^4 + 2 b_0 b_1 x^3 + \\ + (b_1^2 + 2 b_0 b_1) x^2 + 2 b_1 b_2 x + b_2^2$$

igualdade que deverá verificar-se qualquer que seja x. Então pelo teorema VIII:

$$a_0 = b_0^2 \quad a_1 = 2 b_0 b_1 \quad a_2 = b_1^2 + 2 b_0 b_1 \quad a_3 = 2 b_1 b_2 \quad \text{e} \quad a_4 = b_2^2$$

Pelo problema inverso podemos extrair a raiz quadrada dum polinómio, suposto quadrado perfeito.

Seja agora resolver a equação $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$ que se sabe admitir a raiz $+1$. Em virtude dêste conhecimento podemos baixar o grau da equação dividindo-a por $x - 1$. (Teorema III).

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = (x-1)(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)$$

os coeficientes a_0, a_1 e a_2 podem ser calculados pela regra de Rufini. O resto deverá ser zero.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -6 \\ & 1 & 3 & +6 \\ \hline 1 & 3 & 6 & \underline{|0} \end{array}$$

Resolvendo agora a equação $x^2 + 3x + 6 = 0$ obêm-se as restantes raízes da equação proposta.

Faremos ainda uma aplicação do método dos coeficientes indeterminados na resolução do seguinte problema:

Decompor em fracções simples a fracção algébrica $\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2}$. Êste problema consiste em transformar a fracção dada numa soma de fracções cujos denominadores são os factores binómios que resultam da decomposição do denominador da fracção dada. No exemplo presente os factores binómios são $x-1$, $x+2$ e $(x+2)^2$. No caso do denominador não estar escrito com a forma de produto de factores binómios, é necessário determinar os seus zeros, para se conhecerem os factores binómios que são os denominadores das fracções pedidas. No caso presente pretende-se determinar A, B e C com a condição de ser:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Desembaracemos de denominadores:

$$2x + 3 = A(x+2)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x-1)$$

ou

$$2x + 3 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx - C.$$

Vamos agora ordenar o 2.° membro da igualdade anterior e, em seguida, identificar os coeficientes dos termos do mesmo grau, visto esta igualdade dever ser verdadeira qualquer que seja x.

$$2x + 3 = (A+B) x^2 + (4A + B + C) x + 4A - 2B - C$$

e

$$A + B = 0; \quad 4A + B + C = 2; \quad 4A - 2B - C = 3$$

donde

$$B = -5/9, \quad C = 1/3 \quad \text{e} \quad A = 5/9.$$

4 — Problemas propostos de aplicação do método dos coeficientes indeterminados.

— Achar o cociente e o resto da divisão

$$(3x^4-5x^2+6x+1):(x^2-3x+4)\,.$$

R: $\quad Q=3x^2+9x+10\,,\ R=-39\,.$

— Determinar m e n de modo que o polinómio x^4-3x^3+mx+n seja divisível por x^2-2x+4.

R: $\quad m=8\,,\ n=-24\,.$

— Achar a raiz quadrada do polinómio $4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$. R: $2x^2+3x-1$.

— Achar a condição necessária e suficiente para que a expressão $\dfrac{ay+bx+c}{a'y+b'x+c'}$ seja independente de x.

R: $a/a'=b/b'=c/c'$.

— Achar a condição necessária e suficiente para que o trinómio ax^2+bx+c, seja um quadrado perfeito.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1943)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo — 4 de Agôsto de 1943. — Ponto n.º 4.

I

1 — Determine m de modo que a equação: $(m-5)\,x^4-4mx^2+m-2=0$ tenha tôdas as raízes reais. R: *A resolvente deverá ter duas raízes positivas, devendo* m *satisfazer às condições seguintes:* $4m^2-(m-2)(m-5)\geq 0$; $4m/(m-5)>0$; $(m-2)/(m-5)>0$. *Destas relações se deduz* $m\leq -10/3$; $m>5$. *Podemos ainda procurar valores de* m *para os quais fôssem nulas as quatro raízes ou duas apenas (na resolvente, duas nulas ou uma nula e outra positiva, respectivamente); mas, no problema presente, para nenhum valor de* m *se verificaria qualquer dêstes casos.*

2 — Enuncie os teoremas que relacionam os coeficientes de uma equação do 2.º grau com as suas raízes e o teorema que permite decompor um trinómio do 2.º grau em factores binómios.

3 — Um grupo de pessoas alugou um carro por 210$00. No momento da partida apareceram mais 2 passageiros. Repartindo por todos o preço do aluguer, cada um dos passageiros do primeiro grupo pagou menos 12$00. ¿Quantas pessoas tinha o grupo inicial? R: *Da equação* $\dfrac{210}{x}=\dfrac{210}{x+2}+12$ *ou* $x^2+2x-35=0$ *se conclue que, inicialmente, o grupo tinha 5 pessoas.*

II

4 — Verifique a identidade:

$$\operatorname{sen} 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}\,.$$

R: $$\frac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-x)}=\frac{1-\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^2}=\frac{4\operatorname{tg}x}{2\,(1+\operatorname{tg}^2x)}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}x}{\sec^2 x}=2\operatorname{tg}x\cos^2x=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x\,.$$

5 — Escreva a expressão geral dos ângulos cujo coseno é 1/2 e as expressões dos ângulos cuja tangente é -1. R: $2n\pi\pm\pi/3$; $n\pi+3\pi/4$.

6 — Um triângulo isósceles tem de base 27,12 metros e de perímetro 103,75 metros. Usando o cálculo logarítmico, determine o ângulo oposto à base. R: *Designando por* 2α *o ângulo oposto à base temos:* $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{27{,}12/2}{(103{,}75-27{,}12)/2}=\dfrac{27{,}12}{76{,}63}$. *Aplicando logaritmos:* $\log\operatorname{sen}\alpha=\log 27{,}12+\operatorname{colog}76{,}63=1{,}43329+\bar{2}{,}11560=\bar{1}{,}54889$; $\alpha=20^\circ\,43'\,53'',3$ *ou* $2\alpha=41^\circ\,27'\,10'',6$.

III

7 — Figure uma circunferência de centro O e um diâmetro AB da circunferência. Trace duas perpendiculares ao diâmetro nos seus extremos A e B. Uma tangente à circunferência num ponto qualquer M desta linha corta as perpendiculares respectivamente nos pontos P e Q. Demonstre que: 1.º $\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{BQ}$, 2.º O ângulo POQ é recto. R: *Por ser* $[AOP]=[MOP]$ *e* $[BOQ]=[MOQ]$ *temos:* 1.º $\overline{PA}=\overline{PM}$, $\overline{QB}=\overline{QM}$. *Donde:* $\overline{PA}+\overline{QB}=\overline{PM}+\overline{QM}$ *ou* $\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{BQ}$, q.e.d. 2.º $P\hat{O}Q=90^\circ$ *por serem os seus lados as bissectrizes dos ângulos adjacentes suplementares* $A\hat{O}M$ *e* $M\hat{O}B$.

8 — Numa circunferência de raio r está inscrito um quadrado $[ABCD]$. Supõe-se que a figura experimenta uma rotação de 180º em tôrno de um eixo EE' paralelo a BC e passando pelo centro O da circunferência. Deduza, em função de r, a expressão do volume limitado exteriormente pela superfície esférica gerada pela circunferência e interiormente pela superfície gerada pelo quadrado. R: *Gerando a circunferência uma superfície esférica de raio* r *e o quadrado uma superfície cilíndrica de raio da base igual a* $r/\sqrt{2}$ *e altura dupla, tem-se:* $V=V_e-V_c=4/3\cdot\pi r^3-\pi r^2/2\cdot r\sqrt{2}=\pi r^3(8-3\sqrt{2})/6$.

Soluções dos n.os 1 a 8 de Fernando Dias Agudo, aluno do 1.º ano da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus — Outubro de 1943. — Ponto n.º 3.

9 — Resolva a inequação $(x^2+2x):(3-2x-x^2)<0$. R: *As raízes do numerador são* $x_1=0$ *e* $x_2=-2$ *e as do denominador* $x_1=1$ *e* $x_2=-3$. *Por isso o numerador será positivo (sinal do coeficiente do têrmo em* x^2*) para valores de* x *superiores a* 0 *ou inferiores a* -2; *e negativo para os valores de* x *compreendidos entre* -2 *e* 0. *O denominador será negativo (sinal do coeficiente de* x^2*) para valores interiores ao intervalo das raízes, isto é, tais que* $-3<x<1$, *e positivo para os valores de* x *tais que ou* $x<-3$ *ou* $x>1$. *A fracção será negativa para os valores de* x *que dão ao numerador o sinal contrário ao do denominador, que pela análise anteriormente feita se vê serem os valores de* x *tais que* $x>1$, $x<-3$ *e* $-2<x<0$.

10 — Defina combinações de m objectos p a p e escreva a fórmula que permite calcular o seu número. R: ${}^mC_p=m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-p+1):p\,!$

11 — Determine o logarítmo no sistema de base 4 de um número cujo logarítmo no sistema de base 2 é 12. R: *Como* $\log_b a=\log_c a:\log_c b$ *e como* $\log_2 4=2$ *pois é* $2^2=4$ *e* $\log_2 x=12$ *vem* $\log_4 x=12:2=6$.

12 — Determine a medida de um dos ângulos iguais de um triângulo isósceles cujo perímetro mede 58,6 metros e cuja base mede 17 metros. R: *Um dos lados iguais tem por medida* $(58{,}6-17):2=20{,}8$ m *e metade da base* 8,5 m. *Se considerarmos o triângulo rectângulo de hipotenusa igual a um dos lados iguais do triângulo dado e por um dos catetos metade do lado da base, e se designarmos por* α *o ângulo da base pedido será* $\cos\alpha=8{,}5:20{,}8$ *e por isso* $\log\cos\alpha=\log 8{,}5+$ $+\operatorname{colg} 20{,}8=0{,}92942+\bar{2}{,}68194=\bar{1}{,}61136$ *e* $\alpha=65^\circ\,52'\,45'',5$.

13 — Determine o valor de $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ sabendo que $\operatorname{cotg}\beta=3\operatorname{cotg}\alpha=\sqrt{3}$. R: *Como* $\operatorname{cotg}\beta=\sqrt{3}$ *é* $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{3}/3$ *e* $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ *donde* $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=(\sqrt{3}-\sqrt{3}/3):$ $:(1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/3)=\sqrt{3}/3$.

14 — Deduza a relação que existe entre a área de um octaedro regular e a do círculo circunscrito a uma das suas faces. R: *No octaedro regular as faces são triângulos equiláteros e a área do triângulo equilátero em função do raio do círculo circunscrito é* $3R^2\sqrt{3}:4$ *e a do octaedro será* $6R^2\sqrt{3}$; *como a área do círculo é* πR^2 *a relação entre as duas áreas é* $6R^2\sqrt{3}:\pi R^2=$ $=6\sqrt{3}:\pi$.

15 — Desenhe um ângulo agudo inscrito num arco $\overline{AB}$ de uma circunferência e o diâmetro que passa pelo vértice do ângulo. Indique: como varia a medida do ângulo quando, continuando os seus lados a passar por A e B, o vértice percorre o diâmetro em que existe; qual a posição que ocupa o vértice quando a medida do ângulo fôr dupla do seu valor primitivo, e qual a relação que existe entre êste valor e o da medida do ângulo quando o seu vértice coincide com a extremidade do diâmetro considerado. R: *O ângulo cresce desde um valor inicial* α *igual a metade da medida do ângulo ao centro cujos lados passam pelo ponto* A *e* B *até atingir, quando o vértice atinge o centro da circunferência, o valor* 2α; *continua a crescer até o valor* π, *qunndo os lados se tornam perpendiculares ao diâmetro sôbre que existe o vértice; daí por diante diminui até o vértice atingir novamente a circunferência momento em que atinge o valor* $\pi-\alpha$.

Soluções dos n.ºs 9 a 15 de J. da Silva Paulo.

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto — Outubro de 1943. — Ponto n.º 4.

16 — Simplifique a expressão: $(a^{-1}\,b^{3/2}\,x)^{1/3}:\sqrt{a^3\,by}$. R: $1/a\cdot\sqrt[6]{x^2:a^5\,y^3}$.

17 — Resolva a inequação

$$(x^2-4x-6):(x^2+7x+7)>0.$$

R: *Consideremos a hipótese de serem positivos ambos os termos da fracção. As raízes dos trinómios que figuram no numerador e no denominador são, respectivamente,* $x=-2\pm\sqrt{10}$ *e* $x=(-7\pm\sqrt{21}):2$. *Assim, o numerador será positivo para os valores de* x *que são dados por* $x>-2+\sqrt{10}$ *e* $x<-2-\sqrt{10}$, *e o denominador para os valores de* x *que verificam as desigualdades* $x>(-7+\sqrt{21}):2$ *e* $x<(-7-\sqrt{21}):2$ *e, portanto, a fracção será positiva para os valores* $x>-2+\sqrt{10}$ *e* $x<(-7-\sqrt{21}):2$.

Consideremos agora a hipótese de serem negativos ambos os termos da fracção. O numerador será negativo para os valores de x *que verifiquem a dupla desigualdade* $-2-\sqrt{10}<x<-2+\sqrt{10}$, *e o denominador para os valores de* x *que satisfaçam a* $(-7-\sqrt{21}):2<$ $<x<(-7+\sqrt{21}):2$, *e a fracção será positiva para os valores de* x *que verifiquem a dupla desigualdade:* $-2-\sqrt{10}<x<(-7+\sqrt{21}):2$.

18 — Determine o ângulo que faz com a base qualquer das faces laterais duma pirâmide recta de base quadrada, com tôdas as arestas iguais. R: *Como as arestas da pirâmide são tôdas iguais, as faces laterais são triângulos equiláteros. Se fizermos passar pelo vértice* V *da pirâmide um plano perpendicular a uma aresta da base e, se designarmos por* M *o pé desta aresta nesse plano, ter-se-á, sendo* O *o pé da perpendicular baixada de* V *sôbre a base:* $\cos\alpha=\overline{OM}:\overline{VM}$ *sendo* α *o rectilíneo do diedro formado pela base da pirâmide* *com cada uma das faces. Mas* $\overline{OM}=1/2$ *e* $\overline{VM}=1\sqrt{3}/2$ *donde* $\cos\alpha=1/2:1\sqrt{3}/2=1/\sqrt{3}$ *e* $\alpha=\text{arc}\cos 1/\sqrt{3}$.

19 — Determine por logaritmos com 5 decimais e com a aproximação que êstes permitem, os valores de x que satisfazem à equação

$$\operatorname{tg} x=-\sqrt{0{,}0014752\times\cos 300^\circ\, 12'\, 50''}\,.$$

R: $\operatorname{tg}(-x)=\sqrt{0{,}0014752\cdot\cos 59^\circ\, 47'\, 10''}$,
$\log\operatorname{tg}(-x)=1/2\cdot(\log 0{,}0014752+\log\cos 59^\circ\, 47'\, 10'')$,
$\log\operatorname{tg}(-x)=1/2\cdot(\bar{3},16885+\bar{1},70176)=\bar{2},43531$
donde $x=-1^\circ\, 33'\, 38''$.

A expressão geral dos arcos é

$$x=-1^\circ\, 33'\, 38''\pm K\cdot 180^\circ\,.$$

20 — Defina poliedro. Diga a que condições tem de satisfazer para ser regular e dêstes enumere os que conhece.

21 — Faça o desenvolvimento de $(1-1/x)^5$.
R: $1-5/x+10/x^2-10/x^3+5/x^4-1/x^5$.

22 — Diga sem efectuar a operação quais os restos da divisão do número 8257 por 4 e por 11. R: *Por* 4*:* $8257=\dot{4}+5\times 10+7=\dot{4}+5\,(\dot{4}+2)+7=\dot{4}+17=\dot{4}+1$. *Por* 11*:* $8257=8\cdot 1000+2\times 100+5\times 10+7=8\,(\dot{11}-1)+2\,(\dot{11}+1)+5\,(\dot{11}-1)+7=\dot{11}-8+2-5+7=\dot{11}-13+9=\dot{11}+20-13=\dot{11}+7$ *Os restos são respectivamente* 1 *e* 7 *e no cálculo está indicada a maneira como se obtêm.*

23 — A fórmula que determina a área dum triângulo mostra que as alturas dêste são inversamente proporcionais às respectivas bases. Partindo desta relação, como é que, com a régua e o compasso, construia o triângulo, dadas as três alturas? Qual o método ou métodos geométricos que empregou na resolução do problema? R: *Sejam* h_1, h_2 *e* h_3 *as alturas dadas e* b_1, b_2 *e* b_3 *os lados do triângulo procurado correspondentes àquelas alturas. De* $b_1 h_1=b_2 h_2=b_3 h_3$ *deduz-se* $b_1/b_2=h_2/h_1$. *Construamos um triângulo* [ABC] *de lados iguais a* h_1, h_2 *e* h_3. *Nêste triângulo verifica-se a seguinte relação entre os lados* h_1 *e* h_2 *e as alturas correspondentes* h'_1 *e* h'_2*:* $h_1/h_2=h'_2/h'_1$ *ou* $h'_1/h_2=h'_2/h_1$. *Construamos o triângulo homotético do triângulo* [ABC] *de razão igual a* h_2/h'_1, *em relação ao ponto* D *pé da altura relativa ao lado* $\overline{AC}$. *Êste triângulo é o triângulo pedido. O homotético do ponto* C *é o ponto* C' *tal que* $\overline{DC'}=h_2$. *Com efeito, dos triângulos* [ABC] *e* [A' B' C'] *serem homotéticos conclue-se que* $b_2/h_1=h_2/h'_1$ *e* $b_1/h_2=h_2/h'_1$ *visto a razão ser* h_2/h'_1 *e portanto* $b_2/h_1=b_1/h_2$ *e* $b_2 h_2=b_1 h_1$. *O problema foi resolvido pelo emprêgo do método de transformação de figuras por homotética.*

Soluções dos n.os 16 a 25 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Escola Superior Colonial — Agôsto de 1943. — 1.ª prova.

ÁLGEBRA

24 — Determine os valores de x que verificam simultâneamente as desigualdades: $3x-\dfrac{1-6x}{4}<2$ e $x-\dfrac{3x-1}{2}<1$. R: *A 1.ª desigualdade é equivalente a* $x<1/2$ *e a segunda a* $-x<1$; *logo os valores que simultâneamente as verificam são os que satisfazem à dupla desigualdade* $-1<x<1/2$.

25 — Determine a função inversa da função $y=\log_a x+1$. R: $x=a^{y-1}$.

26 — Calcule $\log(\log 4{,}56)$. R: $\log 4{,}56=0{,}65896$ *e* $\log 0{,}65896=\bar{1},81886$.

27 — Enuncie o teorema que permite escrever:

$$\sqrt[12]{a^2 x^2 y^6}=\sqrt[6]{axy^3}\,.$$

TRIGONOMETRIA

28 — Sabendo que $\operatorname{tg} x=\sqrt{2}$, calcule o valor de $\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$. R: $\cos^2 x=(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-1}=(1+2)^{-1}$ *e por isso* $\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x=1-1/3=2/3$.

29 — Reduza ao 1.º quadrante o cálculo de $\cos 1943^\circ\, 32'$. R: $\cos 1943^\circ\, 32'=-\cos 36^\circ\, 28'$.

GEOMETRIA

30 — O triângulo $[ABC]$ tem a base e a altura duplas da base e da altura do triângulo $[A'\,B'\,C']$. Calcule a razão entre as áreas do primeiro e do segundo. R: Ar [ABC] : Ar [A' B' C'] $=1/2\cdot 2b\times 2h:1/2\,bh=4$.

31 — Existe o triedro em que os três ângulos medem respectivamente 65°, 105° e 185°? Justifique a resposta. R: *Se se trata dos ângulos das faces existe, pois a soma dêstes deve estar compreendida entre* 0° *e* 360°. *Se trata dos ângulos diedros não poderá existir tal triedro, pois a soma daquêles diedros deve ser maior que* 2 *e menor que* 6 *rectos, e qualquer ângulo maior que a diferença dos outros dois e menor que a sua soma.*

Soluções dos n.os 24 a 31 de J. da Silva Paulo.

Licenciatura em Ciências Geográficas — Ponto n.º 3

32 — Discuta a natureza das raizes da equação $x^2-x=\sqrt{2}$. R: *Aplicando a fórmula resolvente tem-se:* $\alpha=1/2\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}/2$. *As raizes são reais e, mais particularmente, irracionais.*

Obs. — No enunciado em vez da palavra «discuta» deve ler-se «determine» porque, uma vez que os coeficientes da equação não dependem de parâmetros, não há que discutir a natureza das raizes.

33 — Escreva na base 3 os números 23 e 24 da base 10. R: *São respectivamente os números* 212 *e* 220.

34 — Num triângulo rectângulo, cujo cateto tem 16,3 metros e a hipotenusa 33,5, calcule o ângulo oposto ao cateto dado. R: $16{,}3=33{,}5\operatorname{sen}\widehat{C}$, $\log\operatorname{sen}\widehat{C}=$ $=\log 16{,}3+\operatorname{colog} 33{,}5=1{,}21219+\bar{2}{,}47496=\bar{1}{,}68715$, $\widehat{C}=29^\circ\,6'\,57'',7$.

Soluções dos n.^{os} 32 a 34 de J. J. Rodrigues dos Santos.

Instituto Superior de Agronomia — 2 de Agôsto de 1943 — Ponto n.º 3.

I

35 — Um joalheiro prepara uma liga de ouro e cobre com o intuito de obter 250 gramas de ouro com o toque de 0,900. ¿Que pêso de ouro e cobre deverá tomar, sabendo que durante a fusão daqueles metais se perde 1 % de ouro e 2 % de cobre? R: *Para ter o toque desejado,* 250 gr *da liga conterão* $250\times 0{,}9=$ $=225$ gr *de ouro e* $250\times 0{,}1=25$ gr *de cobre. Designando por* x *e por* y, *respectivamente, os pesos de ouro e de cobre pedidos ter-se-á* $x-x/100=225$ *e* $y-2y/100=$ $=25$ *donde* $x=\dfrac{225\times 100}{99}\sim 227{,}27$ gr *e* $y=\dfrac{25\times 100}{98}=$ $=25{,}51$ gr.

36 — ¿Que valor se deve atribuir a m para que a equação $(m-1)\,x^2-(2m-1)\,x+4=0$ admita raízes de sinais contrários, sendo negativa a de maior valor absoluto? R: *Os valores de* m *devem tornar negativos o produto e a soma das raízes, isto é:* $\dfrac{4}{m-1}<0\rightarrow m<1$ *e* $\dfrac{2m-1}{m-1}<0\rightarrow 1/2<m<1$, *sendo pois* $1/2<m<1$.

b) Dada a função $x=\dfrac{2^y-1}{3}$ escreva y, explicitamente, como função de x e determine em seguida os valores da variável x que tornam a função y negativa. R: $y=\log_2(3x+1)$. *É* $y<0$ *para* $0<3x+1<1$ *ou* $-1/3<x<0$.

II

37 — Calcule todos os ângulos α compreendidos entre 2π e 5π radianos que satisfazem à relação $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}875$. (Utilize as tábuas de valores naturais). R: *As tábuas de valores naturais dão-nos para* $\operatorname{sen}\alpha_1=$ $=0{,}875\rightarrow\alpha_1=61^\circ$. *Os arcos* α *tais que* $\operatorname{sen}\alpha=-0{,}875$ *são:* $180^\circ+61^\circ+k\,360^\circ$ *e* $360^\circ-61^\circ+k\,360^\circ$. *Entre* 360° *e* 900° *há as determinações* 601° *e* 659°.

38 — *a)* Sendo $\operatorname{colog}\sqrt[5]{\operatorname{tg}\alpha}=0{,}06796$ calcule α, supondo que α é um ângulo do 3.º quadrante. (Utilize a tábua de logarítmos). R: *De* $\operatorname{colog}\sqrt[5]{\operatorname{tg}\alpha}=0{,}06796$ *deduz-se* $\operatorname{colog}\operatorname{tg}\alpha=5\times 0{,}06796=0{,}33980=\log\operatorname{cotg}\alpha$. *Das tábuas tira-se:* $\alpha_1=24^\circ\,34'\,28'',2$ *e portanto* $\alpha=180^\circ+\alpha_1=204^\circ\,34'\,28'',2$.

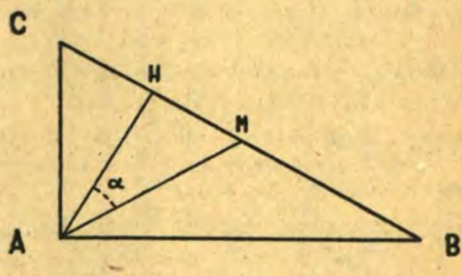
b) Sendo dado o triângulo $[ABC]$ de que se conhecem os lados a e b e o ângulo que êles formam $\hat{C}$, deduza a expressão da área do triângulo em função daqueles três elementos a, b e C. R: *A expressão da área* S *do triângulo é* $S=1/2\cdot ab\operatorname{sen}C$. *Basta notar, por exemplo, que a altura relativa ao lado* a *é* b sen C.

III

39 — Um plano secante determina numa superfície esférica de raio R duas calotes cujas áreas estão entre si como 1 está para 2. Exprima, em função de R, a distância do plano ao centro da esfera. R: *Área da calote* $S=2\pi Rh$. *Uma calote tem por altura* $R-d$ *e outra* $R+d$ *sendo* d *a distância referida.*

$$\frac{2\pi R\,(R+d)}{2\pi R\,(R-d)}=2,\quad R+d=2\,(R-d),\quad 3d=R,\quad d=R/3.$$

40 — Demonstre que, em qualquer triângulo rectângulo, a diferença entre os ângulos agudos é igual ao



ângulo formado pela altura e a mediana tiradas do vértice do ângulo recto. R: *Tese* $\hat{C}-\hat{B}=\alpha$. *Basta notar que* $H\hat{A}B=\hat{C}$ *(agudos e de lados perpendiculares),* $M\hat{A}B=\hat{B}$ *(visto ser isósceles o triângulo* [AMB]*) e finalmente que* $\alpha=H\hat{A}B-M\hat{A}B=\hat{C}-\hat{B}$, q. e. d.

Nota — Em cada um dos grupos I e II são de resposta obrigatória o problema n.º 1 e uma das questões do n.º 2. É também de resposta obrigatória uma das questões do grupo III.

Soluções dos n.^{os} 35 a 40 de Manuel Zaluar.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras 9 de Outubro de 1943. — Ponto n.º 3.

ARITMÉTICA

41 — Simplifique a fracção $\dfrac{n\,!\;p\,!}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n\;2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2p}$ e determine todos os valores possíveis, inteiros e positivos, de n e p tais que a fracção esteja compreendida entre $\dfrac{1}{1000}$ e $\dfrac{1}{2000}$. R: *A fracção dada pode escre-*

ver-se $\frac{n!\,p!}{2^n \cdot n!\, 2^p \cdot p!} = \frac{1}{2^{n+p}}$ *e, portanto, terá que ser* $1000 < 2^{n+p} < 2000$ *ou, como fàcilmente se vê,* $n+p=10$, *donde* $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9
$p=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$ e 1.

Álgebra

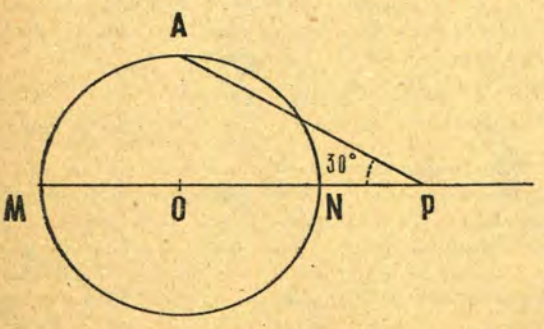
42 — Calcule os termos duma proporção contínua sabendo que a soma dos extremos é *a* e a soma dos quadrados dos extremos é *b*. R: *Seja a proporção* $x:y=y:z$. *Entre os seus têrmos verificar-se-ão as relações* $xz=y^2$, $x+z=a$ e $x^2+z^2=b$. *Desta última relação, conclui-se, fàcilmente, que* $(x+z)^2-2xz=b \rightarrow$ $\rightarrow a^2-2y^2=b \rightarrow y=\pm\sqrt{(a^2-b)/2}$. *Tendo em conta êste resultado, as duas primeiras relações:* $xz=(a^2-b)/2$ e $x+z=a$ *conduzirão à equação* $X^2-aX+(a^2-b)/2=0$ *cujas soluções são:* $X_1=x=[a+\sqrt{2b-a^2}]/2$ e $X_2=z=[a-\sqrt{2b-a^2}]/2$.

Cálculo Numérico

43 — Calcule o volume da esfera circunscrita ao cubo de aresta 22,01 metros. R: *Como a diagonal dum cubo inscrito numa esfera é o diâmetro desta, é fácil ver que* $R=a\sqrt{3}/2$, *sendo* R *o raio da esfera e* a *a aresta do cubo. Portanto:* $V=4/3\cdot\pi R^3=\pi a^3\sqrt{3}/2=$ $=\pi\cdot(22{,}01)^3\cdot\sqrt{3}/2$. *Tomando logaritmos:* $\log V=$ $=\log\pi+3\log 22{,}01+1/2\cdot\log 3+\operatorname{colog} 2=0{,}49715+$ $+4{,}02786+0{,}23856+\bar{1}{,}69897=4{,}46254$ *donde* $V=290{,}093\ \mathrm{m}^3$.

Geometria Plana

44 — *a)* Definição de lugar geométrico; exemplos de alguns lugares geométricos importantes no plano e no espaço. *b)* Dada a circunferência de raio $\overline{OM}=r$ da figura junta, determinar a distância $\overline{OP}$ de modo tal que o segmento $\overline{PA}$ seja igual ao diâmetro da circunferência.



R: *Como o ângulo em* P *é de* 30° *e* $\overline{PA}=2r$, *baixando de* A *uma perpendicular sôbre* $\overline{MN}$, *o triângulo rectângulo resultante pode ser considerado como metade dum triângulo equilátero de lado* 2r *e portanto será* O *o pé dessa perpendicular e* $\overline{OA}=r$. *Em tal triângulo rectângulo ter-se-á:* $\overline{OP}=r\sqrt{3}$.

Geometria no Espaço

45 — É dado um triedro trirectângulo de vértice *O* e um segmento de recta $\overline{OM}$, sendo *M* um ponto no interior do triedro. Calcule, em função do comprimento *a* do segmento $\overline{OM}$, a soma dos quadrados das projecções de $\overline{OM}$ sôbre as três faces do triedro. R: *Qualquer que seja o ponto M no interior do triedro trirectângulo considerado,* $\overline{OM}=a$ *pode ser considerado como a diagonal dum paralelipípedo rectângulo cujas faces são respectivamente paralelas às faces do triedro. As projecções de* $\overline{OM}$ *sôbre estas não são mais que as diagonais das faces do paralelipípedo. Designando por* x, y *e* z *três arestas do paralelipípedo concorrentes no vértice* O *e por* d_1, d_2 *e* d_3 *as diagonais das suas faces definidas repectivamente pelas arestas* (x, y), (y, z) *e* (z, x), *que, como dissemos, são afinal as projecções de* $\overline{OM}$ *sôbre as três faces do triedro, teremos as relações seguintes:* $x^2+y^2=d_1^2$, $y^2+z^2=d_2^2$ e $z^2+x^2=d_3^2$ *que somadas ordenadamente, darão:* $2(x^2+y^2+z^2)=$ $=d_1^2+d_2^2+d_3^2$. *Tendo em conta que, num paralelipípedo rectângulo de arestas* x, y *e* z *concorrentes no mesmo vértice, é* $x^2+y^2+z^2=a^2$ *(sendo* a *o comprimento da sua diagonal), virá:* $d_1^2+d_2^2+d_3^2=2a^2$.

Trigonometria

46 — Mostre que o produto

$$P=(\operatorname{sen} x+\operatorname{cosec} x)\cdot(\cos x+\sec x)\cdot(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)$$

é positivo, qualquer que seja *x* real. R: *Com efeito,*

$$P=\frac{\operatorname{sen}^2 x+1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\cos^2 x+1}{\cos x}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg} x}=$$
$$=\frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1+\cos^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}>0,$$

qualquer que seja x *real.*

NOTA — São obrigados quatro pontos, entre os quais o n.º 4.

Soluções dos n.ºs 41 a 46 de Orlando Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Outubro de 1943 — Ponto n.º 4.

47 — Um campo de forma rectangular tem o comprimento triplo da largura. Para facilidade de exploração, foi o campo dividido em talhões iguais. Mais tarde, o número de talhões diminuíu de 2, o que fêz aumentar de 20 ares a superfície de cada talhão. Anos depois, houve que abrir três valas da mesma largura, uma paralela ao comprimento do campo e duas paralelas à largura, que cobriram uma superfície de 2.982 metros quadrados. Calcule as dimensões do campo antes da abertura das valas e a largura destas, sabendo que o número de talhões em que o campo foi inicialmente dividido é 3/5 do número que exprime, em decâmetros, a largura do campo. R: *Seja* x *a largura do campo expressa em decâmetros. A área do campo é* $3x^2$. *Por outro lado o número de talhões que havia inicialmente é* $3x/5$ *e como a diminuição de* 2 *talhões fêz aumentar de* 20 *ares a área de cada talhão, a área total do campo é* $3x^2=(3x/5-2)\times(3x^2:3x/5+20)$ *o que dá* $x=20$ dam. *Por outro lado se fôr* y *a largura das valas será* $3xy+2xy=2982$ *se exprimirmos* x *e* y *em metros o que dá* $1000\,y=2982$ *e* $y=2{,}982$ m.

48 — Determine os valores do ângulo α, positivos e inferiores a 360°, pela condição das raízes da equação $x^4-\operatorname{sen}\alpha\, x^2+9/400=0$ ficarem em progressão aritmética. R: *Se duas das raízes forem* x_1 *e* x_2 *e tais que* $|x_1|\neq|x_2|$ *as outras duas serão* $-x_2$ *e* $-x_1$. *Podemos supor ser* x_1 *a maior das raízes e então será* $x_1>x_2>-x_2>-x_1$; *estando estas em progressão aritmética deverá ser* $x_2-x_1=-x_2-x_2$ *ou* $3x_2=x_1$; *por outro lado* $x_1^2+x_2^2=\operatorname{sen}\alpha$ *e* $x_1^2\,x_2^2=9/400$. *O sistema destas três equações resolvido dá:* $\operatorname{sen}\alpha=\pm 1/2$ *e por isso* $\alpha=30^\circ$ *ou* 150° *ou* 210° *ou* 330°.

49 — Verifique a identidade: $\operatorname{tg}(\pi/4+a/2)+\operatorname{cotg}(\pi/4+a/2)=2\sec a$. R: *Como é* $\operatorname{tg}(\pi/4+a/2)=(1+\operatorname{tg}a/2):(1-\operatorname{tg}a/2)$ *e* $\operatorname{cotg}(\pi/4+a/2)=(1-\operatorname{tg}a/2):(1+\operatorname{tg}a/2)$ *o primeiro membro da identidade pode escrever-se* $[(1+\operatorname{tg}a/2)^2+(1-\operatorname{tg}a/2)^2]:(1-\operatorname{tg}^2 a/2)=2\,(1+\operatorname{tg}^2 a/2):(1-\operatorname{tg}^2 a/2)=2\cdot(\cos^2 a/2+\operatorname{sen}^2 a/2):(\cos^2 a/2-\operatorname{sen}^2 a/2)=2\,\dfrac{1}{\cos a}=2\sec a$.

50 — O quadrilátero $[ABCD]$, em que o ângulo $B\widehat{C}D$ é recto e o vértice A projecta-se ortogonalmente sôbre $\overline{BC}$ no meio de $\overline{BC}$, está inscrito num círculo de raio R. Exprima em função de R e do lado $\overline{CD}$, os lados, as diagonais e a área dêste quadrilátero. R: *Como o ângulo* $B\widehat{C}D$ *é recto a diagonal* BD *é um diâmetro da circunferência e por isso a diagonal* $\overline{BD}=2R$ *e o lado* $\overline{BC}=\sqrt{4R^2-\overline{CD}^2}$. *Se fôr* M *o ponto médio de* $\overline{BC}$ *onde se projecta ortogonalmente o ponto* A, *o triângulo* [AMB] *é recto em* M *e o lado* $\overline{MB}=\overline{BC}:2=\left(\sqrt{4R^2-\overline{CD}^2}\right):2$; *além disso neste triângulo o lado* $\overline{AM}$ *existe sôbre um diâmetro da circunferência visto ser perpendicular ao meio da corda* $\overline{BC}$, *e por isso se fôr* O *o centro da circunferência é* $\overline{AM}=R+\overline{OM}$ *e* $\overline{OM}=\overline{CD}:2$, *visto os triângulos* [BOM] *e* [BCD] *serem homotéticos e a razão de homotetia ser* 2. *Assim* $\overline{AM}=R+\overline{CD}:2$. *O lado* $\overline{BA}$, *hipotenusa do triângulo rectângulo* [AMB], *é então dada por*

$$\overline{BA}=\sqrt{(4R^2-\overline{CD}^2):4+R^2+\overline{CD}^2:4+R\times\overline{CD}}=$$
$$=\sqrt{2R^2+R\times\overline{CD}}\,.$$

A diagonal $\overline{CA}$ *é evidentemente igual a* $\overline{BA}$, *e finalmente o lado* $\overline{AD}$, *cateto do triângulo rectângulo* [DAB], *pois o ângulo em* A *é recto, tem por medida*

$$\overline{AD}=\sqrt{4R^2-(2R^2+R\times\overline{CD})}=\sqrt{2R^2-R\times\overline{CD}}\,.$$

A área pode escrever-se sob a forma:

$$a=1/2(\overline{CD}\times\overline{BC}+\overline{AD}\times\overline{AB})=1/2(\overline{CD}+R)\sqrt{4R^2-\overline{CD}^2}\,.$$

51 — Um triângulo rectângulo isósceles $[ABC]$ faz uma rotação completa em tôrno de um eixo situado no seu plano, passando pelo vértice A do ângulo recto e exterior ao triângulo. Sabendo que o lado $\overline{AB}$ forma com o eixo o ângulo α, exprima em função de $\overline{AB}$ e de α o volume do sólido gerado. R: *O Teorema de Guldin diz-nos que: «quando uma figura plana gira em tôrno de um eixo contido no seu plano, eixo que não corte a figura, gera-se um sólido cujo volume é igual ao produto da área da figura geradora pelo perímetro da circunferência descrita pelo baricentro da dita figura». Ora como o baricentro do triângulo se encontra no ponto de encontro das medianas e êste está situado a dois terços de cada uma delas contados a partir do vértice, o baricentro* G *do triângulo dado dista de* A *de um comprimento* $\overline{GA}=\overline{AB}\sqrt{2}:3$. *Baixemos de* G *uma perpendicular sôbre o eixo* e *e seja* P *o pé dessa perpendicular em* e. *No triângulo rectângulo* [APG] *é* $P\widehat{A}G=\alpha+45^\circ$, *e o lado* $\overline{PG}$ *é o raio da circunferência descrita pelo baricentro, será por isso*

$$\overline{PG}=(\overline{AB}\sqrt{2}:3)\operatorname{sen}(\alpha+45^\circ)\,.$$

A área do triângulo [ABC] *é* $\overline{AB}^2/2$. *Temos pois todos os elementos que nos permitem calcular o volume pedido. Êste é assim dado pela expressão:*

$$V=1/2\ \overline{AB}^2\times 2\pi\cdot(\overline{AB}\sqrt{2}:3)\operatorname{sen}(45^\circ+\alpha)=$$
$$=\pi/3\cdot\overline{AB}^3\sqrt{2}\operatorname{sen}(45^\circ+\alpha)=\pi/3\cdot\overline{AB}^3(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha).$$

52 — As faces de um octaedro convexo são triângulos cujos vértices são os centros das faces de um paralelipípedo rectângulo. Exprima em função das dimensões do paralelipípedo o volume do octaedro e a área da sua superfície. R: *Os três eixos do octaedro têm por medidas respectivamente* a, b, c *se forem estas as medidas das arestas e por isso o seu volume é* $V=abc:6$. *Para determinarmos a área do octaedro notemos que:* 1.º) *tôdas as faces do octaedro são triângulos isósceles* *iguais:* 2.º) *o plano que contém dois eixos do octaedro determina neste um losango;* 3.º) *a altura dum dos triângulos isósceles forma com o segmento que une o centro do octaedro ao meio do lado base do triângulo, e com a metade do terceiro eixo, um triângulo rectângulo de que essa altura é a hipotenusa;* 4.º) *que o segmento que une o centro do octaedro com o meio da base do triângulo face do octaedro, é igual a metade dessa base, a qual é o lado do losango a que já nos referimos. Assim se os dois eixos que definirem o plano forem os que têm por medida* a e b *terá o lado do losango por medida* $(\sqrt{a^2+b^2}):2$ *e o segmento que une o centro do octaedro com o meio do lado* $(\sqrt{a^2+b^2}):4$. *Se fôr* c *o terceiro eixo, terá a altura do triângulo por medida* $\sqrt{(a^2+b^2):16+c^2:4}=1/4\cdot\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$ *e a área de cada face será* $A=1/4\cdot(\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2+4c^2})$, *donde* $A'=2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$ *a área do octaedro.*

Soluções dos n.os 47 a 52 de J. da Silva Paulo.

PROBLEMAS

Para êste número, especialmente dedicado aos candidatos dos Exames de Aptidão às Escolas Superiores, decidiu a Redacção juntar aos pontos de exames uma colecção de outros problemas. A maioria dêstes é acompanhada ou pela resolução completa redigida porém duma forma propositadamente concisa, ou por simples sugestões, suficientes para a resolução, ou ainda só dos resultados. No final são indicadas as respectivas fontes.

53 — Considere-se dois números inteiros a e b, tais que a^2+2b seja um quadrado perfeito: $a^2+2b=c^2$. 1.º) Demonstrar que $2b$ é o produto de dois números pares. 2.º) Pôr a^2+b sob a forma duma soma de dois quadrados. R: 1.º) *De* $2b=c^2-a^2$, *tira-se que* c^2 *e* a^2 *são ambos pares ou ambos ímpares; o mesmo se pode concluir para* c *e* a, *e, portanto* $c+a$ *e* $c-a$ *são pares; a igualdade* $2b=(c+a)(c-a)$ *demonstra o que se pretende.* 2.º) *Se juntarmos* a^2 *aos dois membros da igualdade dada, teremos* $2(a^2+b)=c^2+a^2$; *mas* $c^2+a^2=$ $=1/2\,[(c+a)^2+(c-a)^2]$, *logo* $a^2+b=\left(\frac{c+a}{2}\right)^2+\left(\frac{c-a}{2}\right)^2$; *sendo* $c+a$ *e* $c-a$ *números pares,* $\frac{c+a}{2}$ *e* $\frac{c-a}{2}$ *são números inteiros e* a^2+b *fica sob a forma duma soma de quadrados.*

54 — Mostrar que um número da forma:

$$y=(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)^2-a^n$$

não é nunca primo para $n>1$. R: *Como* $1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ *então o número precedente pode escrever-se:* $y=\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)^2-a^n$. *Desenvolvendo e reduzindo ao mesmo denominador vem:*

$$y=\frac{a^{2(n+1)}-a^{n+2}+1-a^n}{(a-1)^2}=\frac{a^{n+2}(a^n-1)-(a^n-1)}{(a-1)^2}=$$
$$=\frac{(a^n-1)(a^{n+2}-1)}{(a-1)^2}=\frac{(a^n-1)}{(a-1)}\times\frac{(a^{n+2}-1)}{(a-1)}.$$

Efectuando a divisão de cada um dos factores por $(a-1)$, *obtém-se:*

$$y=(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)\,(a^{n+1}+a^n+\cdots+a+1)$$

que é um produto de dois factores e o número y *só pode ser primo se o primeiro, que é de menor valor, fôr igual a* 1. *Mas não se pode dar êsse caso pois ter-se-ia* $a^{n-1}=1$ *donde* $n=1$ *o que é contra a hipótese. Se* $n=1$ *então* $y=a^2+a+1$ *e pode ser primo ou não como é fácil de verificar com alguns exemplos.*

55 — São dadas as sucessões de têrmos gerais $A_n=a^n-1$ e $B_n=a^{-n}+1$. *a)* Verifique que $(A_n-B_n)^2-(A_n+B_n)^2+4=0$. *b)* ¿Que valor deve ter a para que o têrmo de ordem p da primeira sucessão seja igual ao têrmo de ordem p da segunda? *c)* Prove que a sucessão de têrmo geral $C_n=A_{n+s}-A_n$ é uma progressão geométrica. R: *a)* $(A_n-B_n)^2-(A_n+B_n)^2=[(a^n-1)-(a^{-n}+1)]^2-[(a^n-1)+(a^{-n}+1)]^2=(a^n-a^{-n})^2-(a^n+a^{-n})^2=(a^{2n}-2+a^{-2n})-(a^{2n}+2+a^{-2n})=-4$. *Assim fica verificado o que pretendiamos.* *b) Será* $a^p-1=a^{-p}+1$, *ou* $a^p-2-a^{-p}=0$, *isto é,* $(a^p)^2-2a^p-1=0$, *donde* $a^p=1\pm\sqrt{2}$. *Logo* $a=\sqrt[p]{1\pm\sqrt{2}}$. *c)* $c_n=A_{n+s}-A_n=(a^{n+s}-1)-(a^n-1)=a^{n+s}-a^n=a^{n-1}(a^{s+1}-a)$. *Como se sabe o n-ésimo têrmo duma progressão geométrica é igual a* $u_1 r^{n-1}$ *sendo* u_1 *o primeiro têrmo e* r *a razão. Se fizermos* $u_1=(a^{s+1}-a)$ *e* $r=a$, *fica provado o que se deseja.*

56 — Sabendo-se que $x+y+z=a$; $x^2+y^2+z^2=b^2$; $x^3+y^3+z^3=c^3$, calcular o produto xyz. R: $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x(y^2+z^2)+3y(z^2+x^2)+3z(x^2+y^2)+6xyz$; *mas* $3x(y^2+z^2)+3y(z^2+x^2)+3z(x^2+y^2)=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)$. *Logo,* $(x+y+z)^3=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz$. *Tendo em conta as igualdades dadas, vem*

$$a^3=3ab^2-2c^3+6xyz \quad ou \quad xyz=\frac{a^3-3ab^2+2c^3}{6}.$$

57 — Achar os valores de λ para os quais o trinómio $(\lambda+1)x^2+(5\lambda-3)x+2\lambda+3$ é um quadrado perfeito. Escrever em cada caso as raízes do trinómio igualado a zero. R: *O trinómio será um quadrado perfeito se* $(5\lambda-3)^2-4(\lambda+1)(2\lambda+3)=0$, *isto é,* $17\lambda^2-50\lambda-3=0$. *Esta equação é satisfeita no caso de*

$\lambda_1=-1/17$, $\lambda_2=3$. *No primeiro caso o trinómio será* $1/17\cdot(16x^2-56x+49)=(4x-7)^2/17$ *e as raízes são* $x_1'=x_2'=7/4$. *No caso de* $\lambda_3=3$, *o trinómio será* $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$ *e as raízes são* $x_1''=x_2''=-3/2$.

58 — Determine o parâmetro k de modo que o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y+5=kx \end{cases}$ tenha uma solução única.
R: $k=\pm 3/4$.

59 — Se os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ estão em progressão aritmética, é condição necessária e suficiente para que as raízes sejam reais, que o valor da razão não esteja compreendido entre $a(3+2\sqrt{3})$ e $a(3-2\sqrt{3})$. R: *A razão da progressão será* $r=a-b=b-c$. *Será então* $b=a-r$ *e* $c=b-r=a-2r$. *Para que as raízes da equação proposta sejam reais é necessário e suficiente que* $b^2-4ac\geq 0$, *isto é,* $(a-r)^2-4a(a-2r)\geq 0$ *ou* $r^2+6ar-3a^2\geq 0$. *Os valores de* r *que satisfazem esta desigualdade são*

$$a(3+2\sqrt{3})\leq r\leq a(3-2\sqrt{3}).$$

60 — Determinar y de modo que os valores de x e y que satisfazem ao seguinte sistema, sejam simultâneamente positivos: $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1$, $127<x-y<217$. R: *Fazendo* $\sqrt[3]{x}=u$ *e* $\sqrt[3]{y}=v$, *tem-se* $u-v=1$, $u^3-v^3<217$, $u^3-v^3>127$ *ou* $u=1+v$, $v^2+v-72<0$, $v^2+v-42>0$; *logo* $u=1+v$, $-9<v<8$ *e* $v<-7$ *ou* $v>6$. *Portanto os valores de* v *que nos interessam são* $6<v<8$, *donde se conclui que* $216<y<512$.

61 — São dadas duas circunferências iguais e tangentes, e uma recta tangente comum às duas circunferências. Pretende-se calcular o raio duma circunferência tangente às duas primeiras e à recta dada.
R: *Sejam* O, *e* O′ *os centros das duas circunferências com o mesmo raio* R, *e tangentes num ponto* A. *Tracemos uma tangente comum* TT′ *e proponhamo-nos calcular o raio* x *duma circunferência tangente às precedentes e à recta* TT′. *Sabemos que o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a* (O) *e a* (O′) *é a tangente comum em* A. *Seja* w *o centro da circunferência cujo raio procuramos. Do triângulo rectângulo* [OAw] *tiramos:* $\overline{Ow}^2=\overline{OA}^2+\overline{Aw}^2$, *mas* $\overline{Ow}=R+x$, $\overline{OA}=R$, $\overline{Aw}=R-x$, *portanto:* $(R+x)^2=R^2+(R-x)^2$. *Logo* $x=R/4$.

62 — Construir um triângulo $[ABC]$ conhecendo $\overline{BC}=a$, $\hat{B}$ e a soma $\overline{AB}+\overline{AC}=l$. R: *Considerando o problema resolvido, sôbre o prolongamento de* $\overline{AB}$, *para o lado de* A, *determina-se o ponto* D *que se obtém pela rotação de* C *em tôrno de* A. *Teremos então* $\overline{BD}=l$. *Ora o triângulo* [BCD] *pode ser construido conhecendo o ângulo* B *e os dois lados adjacentes e, visto que* $\overline{AC}=\overline{AD}$, *levantar-se-á em seguida ao meio de* $\overline{CD}$ *a perpendicular* z *que cortará* BD *no ponto* A *procurado.*

63 — São dadas três rectas AB, $A'B'$ e AA'; as duas primeiras são paralelas entre si e a terceira é perpendicular às outras e encontra-as nos pontos A e A'. Sôbre as rectas AB e $A'B'$ marcam-se dum mesmo lado de AA' os comprimentos $\overline{AO}=x$, $\overline{A'O'}=y$, variáveis mas ligados pela relação $xy=a^2/4$, designando por a o comprimento $\overline{AA'}$. Tomando O e O' como centros, descrevem-se duas circunferências cujos raios são respectivamente x e y.

1.º) Mostrar que estas circunferências são tangentes entre si.

2.º) Achar o ponto de contacto.

3.º) Designando por M êste ponto, trace-se: o segmento $\overline{AM}$, que se prolonga até C', ponto de intersecção com $A'B'$ e o segmento $\overline{A'M}$ que se prolonga até C, ponto de intersecção com AB. Determinar x e y de maneira tal que o trapézio $[AA'CC']$ tenha uma área dada m^2. R: 1.º) *Calculemos* $\overline{OO'}$; *tem-se:* $\overline{OO'}^2=\overline{OP}^2+\overline{O'P}^2=(y-x)^2+a^2$, $\overline{OO'}^2=(y-x)^2+4xy=(y+x)^2$, $\overline{OO'}=x+y$. *Visto a distância dos centros ser igual à soma dos raios, as duas circunferências são tangentes exteriormente.* 2.º) *Seja* M *o ponto de contacto. Os triângulos* [AOM], [A′O′M] *são isósceles, porque* $\overline{OA}=\overline{OM}$, $\overline{O'A'}=\overline{O'M}$. *Logo, tem-se* $2O\hat{M}A=180°-A\hat{O}M$, $2O'\hat{M}A'=180°-A'\hat{O}'M$, $O\hat{M}A+O'\hat{M}A'=180°-\frac{(A\hat{O}M+A'\hat{O}'M)}{2}=90°$. *Como a soma dêstes dois ângulos é igual a um recto, o ângulo* AMA′ *é um ângulo recto, e o lugar geométrico do ponto* M *é a circunferência que tem* $\overline{AA'}$ *como diâmetro. Esta circunferência é tangente à recta* OO′, *visto* OA *ser uma tangente e* $\overline{OM}=\overline{OA}$. 3.º) *O triângulo* [MO′C′] *é isósceles logo* $\overline{O'C'}=\overline{O'M}=y$. *Do mesmo modo* $\overline{OC}=x$. *As bases do trapézio são então* 2x, 2y; *a sua área é igual a* $(x+y)a=m^2$. *Como, por outro lado, se tem* $xy=a^2/4$, x *e* y *são raízes da equação* $z^2-m^2/a\cdot z+a^2/4=0$. *O problema só será possível se* $m^2\geq a^2$. $m^2=a^2$ *corresponde ao caso do quadrado;* OO′ *é então paralela a* AA′.

64 — Considere-se uma circunferência invariável e sôbre ela dois pontos fixos A, B e um ponto móvel M. Seja D o ponto médio da corda $\overline{AB}$. Prolongue-se $\overline{BM}$ de $\overline{MC}=\overline{BM}$. Determinar o lugar geométrico do ponto P, intersecção de AM e CD. R: *O ponto* P *é o ponto de encontro das medianas do triângulo* [ABC], *portanto* $\overline{AP}=2/3\cdot\overline{AM}$. *Daqui resulta que o lugar geométrico dos pontos* P *é a circunferência* (c′) *homotética* *da circunferência dada* (c), *quando se toma* A *para centro de homotetia e* 2/3 *para razão de homotetia.*

65 — Determinar o lugar geométrico dos pontos tais que as duas tangentes a uma circunferência dada, tiradas por êsses pontos, e a corda dos pontos de contacto, formem um triângulo equilátero. Calcular o lado e a área do triângulo em função do raio do círculo dado. R: *Como o triângulo é equilátero, o ângulo formado pelas duas tangentes é* 60°, *e o ângulo ao centro definido pelos raios tirados para os pontos de contacto é o suplemento e portanto* 120°. *A corda que une os pontos de contacto subtende um arco de* 120° *e é igual ao lado do triângulo equilátero inscrito. Então, a distância do centro aos pontos do lugar geométrico procurado, é a hipotenusa dum triângulo rectângulo cujos catetos têm por medida* $R\sqrt{3}$ *e* R, *concluindo-se, portanto, que o seu valor é* 2R. *Logo, o lugar geométrico procurado é uma circunferência concêntrica de raio duplo do da circunferência dada. O lado e a área do triângulo pedido serão os do triângulo equilátero inscrito, isto é, respectivamente* $R\sqrt{3}$ *e* $3R^2\sqrt{3}/4$.

66 — Considere um triângulo isósceles $[ABC]$ com $\overline{AB}=\overline{AC}$. Construa as bissectrizes $\overline{BR}$ e $\overline{CS}$ dos ângulos B e C, respectivamente. Demonstre que: 1) As bissectrizes são iguais. 2) É isósceles o triângulo definido pelos pontos B e C e pelo ponto de intersecção das bissectrizes. R: *Demonstre que são iguais os triângulos* [BRC] *e* [CSB].

67 — Um triângulo rectângulo de perímetro $x+y+z=36$ m, sendo z a medida da hipotenusa, é semelhante a outro triângulo cujos lados medem, respectivamente, 3 m, 4 m e 5 m. Determine o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo de lados x, y, z em tôrno da hipotenusa. R: $V=814\ m^3$.

68 — Num cubo dividem-se as três arestas concorrentes num vértice em n partes iguais e tiram-se pelos pontos de divisão planos perpendiculares às referidas arestas. Demonstre que a soma dos volumes das esferas inscritas nos cubos parciais é igual ao volume da esfera inscrita no cubo global. R: *Seja* A *a aresta do cubo dado,* a *a aresta dos cubos obtidos,* V *o volume da esfera dada,* v *o das esferas obtidas e* N *o número de cubos contidos no cubo dado.. Teremos* $V=\pi A^3/6$, $a=A/n$, $v=\pi A^3/6n^3$, $N=n^3$. *Portanto* $V=\pi A^3/6=vn^3$.

69 — A uma esfera de raio R é circunscrito um cilindro cujo eixo corta a esfera nos pontos A e B. Além do plano da circunferência de contacto das duas superfícies, existe um outro plano perpendicular ao eixo AB que corta a esfera e o cilindro segundo 2 circunferências tais que os dois cones tendo um por base o primeiro círculo e por vértice o ponto A, e o outro o segundo e por vértice o ponto B, tenham áreas laterais equivalentes? R: *Supondo que o plano em vista existe entre o ponto* A *e a circunferência de contacto e está a uma distância* x *do centro da esfera, tem-se para área lateral do cone de base sôbre o cilindro:* $\pi R\sqrt{R^2+(R-x)^2}$. *Para o cone de base sôbre a esfera a área lateral é, notando que o seu raio é* $\sqrt{R^2-x^2}$ *e a sua geratriz* $\sqrt{2R(R+x)}$: $\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{2R(R+x)}$. *Igualando obtém-se uma equação em* x: $2x^3+3x^2-4R^2x=0$. *A solução* $x=0$ *é o plano diametral e constitui o caso da circunferência de contacto. As outras duas soluções são dadas pela equação:* $2x^2+3Rx-4R^2=0$. *Uma é positiva e menor que o raio, enquanto a outra é negativa e deve ser regeitada, porque conduz a uma solução para o outro lado do plano diametral, mas a uma distância inferior ao raio da esfera. Há portanto uma solução única entre o ponto* A *e o centro da esfera a uma distância:*

$$x=R/4\cdot(-3+\sqrt{41}).$$

70 — Cortar um cubo por um plano tal que a secção seja um hexágono regular. R: *Seja o cubo* [ABCDEFGH]; *consideremos os pontos* M, N, P, Q, R, S *meios respectivamente de arestas* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$; *vamos mostrar que êles estão num mesmo plano. Com efeito, os segmentos* $\overline{SP}$, $\overline{QM}$, $\overline{RN}$ *intersectam-se no centro* O *do cubo, portanto os quatro pontos* M, N, Q, R *estão num mesmo plano que contém a recta* SP, *visto ela conter o ponto* O *do plano e ser paralela a* MN. *Pode verificar-se que o plano do hexágono* [MNPQRS] *é perpendicular à diagonal* DF *do cubo, visto os lados do hexágono serem perpendiculares a esta diagonal. O ponto* O *é um centro de simetria do hexágono e os triângulos tais que* [OMN] *são todos equiláteros, portanto o hexágono é regular. Conclusão: obtém-se um hexágono regular cortando um cubo por um plano passando pelo centro e perpendicular a uma diagonal. Há quatro soluções que dão hexágonos iguais.*

71 — Quantos valores distintos de $\operatorname{sen} a/3$ existem, sendo dado $\operatorname{tg} a$? R: *Se fôr* α *um dos valores de* a, *todos os valores de* a *que têm a mesma tangente serão* $a=\alpha+k\pi$. *Portanto* $a/3=\alpha/3+k\pi/3$. *Logo os valores distintos de* $\operatorname{sen}\alpha/3$ *obtêm-se fazendo* $k=0,1,2,3,4,5$ *na expressão* $\operatorname{sen}(\alpha/3+k\pi/3)$.

72 — Considerando todos os arcos x que verificam a equação $m\operatorname{sen}x+(2-m)\cos x=1$, formar a equação que admite por raízes os valores de $\operatorname{tg}x/2$. Discutir. R: *Fazendo* $\operatorname{tg}x/2=t$, *teremos* $\operatorname{sen}x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. *A equação pedida é então* $2mt+(2-m)(1-t^2)=1+t^2$, *ou seja* $(3-m)t^2-2mt+m-1=0$. *Para que a equação proposta tenha soluções é necessário e suficiente que a equação em* t *tenha as suas* *raizes reais, isto é,* $m^2+(m-3)(m-1)=2m^2-4m+3\geq 0$. *Êste trinómio não tem raizes reais, é pois sempre positivo, e a equação* $(3-m)t^2-2mt+m-1=0$ *tem duas raizes* t_1 *e* t_2. *Existem dois arcos compreendidos no intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$ *tais que* $\operatorname{tg} x_1=t_1$ *e* $\operatorname{tg} x_2=t_2$; *as raízes da equação proposta são então dadas pelas fórmulas* $x/2=k\pi+x_1$, *e* $x/2=k\pi+x_2$ *ou* $x=2k\pi+2x_1$ *e* $x=2k\pi+2x_2$, *sendo* k *um inteiro qualquer.*

73 — Demonstre que a área de um quadrilátero convexo qualquer é igual a metade do produto das diagonais pelo seno do ângulo por elas formado. R: *No quadrilátero* [ABCD], *trace as diagonais* AC *e* DB; *considere a área pedida como soma das áreas dos triângulos* [ABC] *e* [CDA]; *determine as alturas dêste triângulo em função do seno do ângulo* α *das diagonais e de um segmento* $\overline{DB}$.

Os problemas n.os 58, 66, 67 e 73 são propostos por António A. Lopes, os n.os 55, 59 e 68 por José Morgado, o n.º 60 por R. Quaresma Rosa, e finalmente os restantes (53, 54, 56, 57, 61 a 65 e 69 a 72) são extraídos ou adaptados por R. Quaresma Rosa de problemas que figuram nas seguintes obras: *Problemi di Matematica dati agli esami di licenza d'Instituto Tecnico*, por Sebastiano Catania, Raffaelo Giusti, Edt., Livorno; *Problèmes de Baccalauréat*, por G. Morel, Vuibert Edt., Paris; *Méthodes de Résolution et de Discussion des Problèmes de Géométrie*, por G. Lemaire, Vuibert, Paris; *Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr* por A. Grèvy, Gauthier-Villars, Paris; e *Journal de Mathématiques Élémentaires*, Vuibert, Paris.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Álgebra e Trigonometria — Para os 4.º, 5.º e 6.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Aritmética e Álgebra — Para os 1.º, 2.º e 3.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Elementos de Aritmética Racional — Para o 7.º ano dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Elementos de Geometria — Para os 4.º, 5.º e 6.º anos dos Liceus, por Luiz Passos. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Estudo das propriedades do trinómio ax^2+bx+c pelo processo das ortogonais — Por António Palma Fernandes. Lisboa.

Exercícios de Aritmética Racional, Álgebra e Métodos Geométricos — Para o 7.º ano dos Liceus, por António do Nascimento Palma Fernandes. Livraria Cruz. Braga.

* **Exercícios de Geometria** — Para o 1.º ciclo dos Liceus e exame de admissão às Escolas do Magistério Primário, por António do Nascimento Palma Fernandes. Livraria Cruz. Braga.

* **Geometria** — Para os 1.º, 2.º e 3.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Geometria — Para os 4.º, 5.º e 6.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

A crítica das obras indicadas com * aparecerá no Boletim Bibliográfico do número 19 da «Gazeta de Matemática».

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO

Quadro da sua distribuïção por escolas e pelos números 1 a 18 da «Gazeta de Matemática»

Universidades de Coimbra, Lisboa e Pôrto				Universidade Técnica		
Faculdades de Ciências		Faculdades de Letras e Ciências	Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto	I. S. A.	I. S. C. E. F.	I. S. T.
Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo	Curso de Prof. desenho	Licenciatura em ciências geográficas				
1–2–3–4–6–7–8–9–10 12–13–15–16–17	1–3–8–9 12–15 18	3	1–2–3–5–7–8 10–11–12–14 15–16–17	1–8–10–13 14–15–16–17	1–2–3–4–5–6 7–8–9–10–11 12–13–14 15–18	1–3–5–7–8 10–13–14 15–16–18

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número extraordinário dedicado às
MATEMÁTICAS ELEMENTARES e EXAMES DE APTIDÃO

A publicação do presente n.º 22 da «Gazeta de Matemática», número extraordinário dedicado às Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão, faz-se em Março de 1944 para dêle se poderem utilizar ainda êste ano os candidatos aos exames de aptidão às nossas Escolas Superiores. É inteiramente independente dos outros números da «Gazeta de Matemática. Os números a publicar ainda em 1944 aparecerão respectivamente em Abril, n.º 19, Julho, n.º 20 e Outubro, n.º 21.

Os assinantes da «Gazeta de Matemática poderão durante o corrente ano (1944) beneficiar duma redução de preço dêste número extraordinário (6$50 em vez de 10$00) que não é incluído na assinatura anual.

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Preço de capa por cada número	6$50
Preço de assinatura anual dos quatro números 18 a 21 (Janeiro, Abril, Julho e Outubro)	20$00
Preço de capa do número extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	6$50

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 120$00 (colecção dos 17 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18) ao preço de Esc. 6$50 cada.

A Lógica Matemática e o Ensino Médio com aplicação aos métodos da matemática
por José Sebastião e Silva — Separata dos n.os 5, 6 e 7, Esc. 5$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial