GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VI **N.º 23** FEVEREIRO-1945

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 6$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO
J. da Silva Paulo

ADMINISTRADOR
Orlando M. Rodrigues

TESOUREIRO
J. de Oliveira Campos

CORRESPONDÊNCIA PARA Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO VI-N.º 23 GAZETA DE MATEMÁTICA FEVEREIRO-1945

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Exemplo de álgebras que admitem um tipo de involução particular

por **Ruy Luís Gomes**

1. Consideremos uma álgebra linear $\mathfrak{A}$ ou sistema hipercomplexo de ordem n [1] e representemos por letras latinas minúsculas $(a, b, c, \cdots)$ os seus elementos e por letras gregas $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ os elementos do respectivo corpo fundamental $\mathfrak{K}$. É sabido que uma álgebra associativa pode ser considerada como um anel [2] que admite o corpo fundamental como domínio operatório. E todo o elemento a se pode escrever sob a forma

$$(1) \qquad a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n ,$$

sendo $e_1, \cdots, e_n$ n elementos linearmente independentes e $\alpha_i \in \mathfrak{K}$.

Ora, colocando-se no caso particular de uma álgebra associativa com elemento um, u, cujo corpo fundamental é o dos números reais, e interpretando os números $\{\alpha_i\}$ como coordenadas cartesianas homogéneas de um ponto de um espaço de $n-1$ dimensões, conseguiu o Doutor Manuel Gonçalves Miranda [3], caracterizar a multiplicação $a \cdot b$ (da álgebra, considerada como anel) por maneira que a correspondência

$$(2) \qquad a \rightleftarrows b , \quad \text{com} \quad a \cdot b = \lambda u ,$$

defina uma *inversão pontual projectiva*. Neste artigo, a nossa intenção é retomar êste problema particular para o formular e resolver em termos puramente algébricos num plano mais geral — o das álgebras que admitem determinado tipo de involução.

2. Para isso, começamos por definir *involução*.

Considerada uma álgebra como grupo abeliano aditivo, uma involução J é um automorfismo

I) *operatório relativamente ao corpo fundamental:*

$$a \to J(a) , \quad b \to J(b)$$

implica

$$(3) \qquad \begin{array}{l} a+b \to J(a+b) \\ \lambda a \to \lambda J(a) ; \end{array}$$

II) *inverso com relação ao produto*

$$(4) \qquad ab \to J(ab) = J(b)\, J(a) ;$$

III) *de quadrado igual à identidade*

$$(5) \qquad J(J(a)) = a ,$$

qualquer que seja $a \in \mathfrak{A}$.

Teorema: *Os elementos do corpo* (λu), *isomorfo do corpo fundamental, são simétricos, quere dizer, coincidem com os seus transformados.*

Na verdade, de

$$au = ua = a ,$$

atendendo a II) (4), vem

$$J(u)\, J(a) = J(a)\, J(u) = J(a) .$$

E como se trata de um automorfismo e, portanto, $J(a)$ percorre tôda a álgebra, tem-se

$$J(u) = u .$$

Em segundo lugar, de I) (3), tira-se

$$J(\lambda u) = \lambda J(u) .$$

Logo,

$$(6) \qquad J(\lambda u) = \lambda\, J(u) = \lambda u , \qquad \text{c. q. d.}$$

Teorema: $aJ(a)$, $J(a)\, a$ *e* $a + J(a)$ *são elementos simétricos.*

Na verdade, de I) (3), III) (5) e de II) (4), III) (5), vem

$$J(a + J(a)) = J(a) + J(J(a)) = J(a) + a = a + J(a)$$

e

$$J(aJ(a)) = J(J(a))\, J(a) = aJ(a)$$
$$J(J(a)\, a) = J(a)\, J(J(a)) = J(a)\, a , \quad \text{c. q. d.}$$

Ora, deduzidos êstes teoremas, que são comuns a qualquer involução de uma álgebra com elemento um, vamos introduzir uma hipótese particular, quere dizer, fazer o estudo de *um certo tipo de involução*.

Assim, consideremos apenas as involuções que *não admitem como elementos simétricos senão os elementos do corpo* (λu), que é isomorfo do corpo fundamental.

Analìticamente,

$$a=J(a)\,,\ \textit{se, e só se,}\ a=\lambda u\,.$$

Mais tarde justificaremos esta hipótese, que ressalta imediatamente da interpretação geométrica do problema pôsto inicialmente pelo Doutor Manuel Miranda.

Agora, passemos ao estudo destas involuções.

TEOREMA: *a, $J(a)$ e u são linearmente dependentes.*

Na verdade, como $a+J(a)$ é simétrico, temos

$$a+J(a)=\lambda u\,, \qquad \text{c. q. d.} \tag{7}$$

TEOREMA: *é sempre possível determinar $n-1$ elementos anti-simétricos, e_i, $i=2\cdots n$, linearmente independentes de u e entre si.*

Na verdade, como se trata de uma álgebra de ordem n é sempre possível determinar $n-1$ elementos e'_i, linearmente independentes de u e entre si.

Ora, pelo teorema anterior, temos

$$e'_i+J(e'_i)+\lambda_i u=0\,.$$

E, considerando $\alpha'_i e'_i+\beta_i u$, quando não seja $\lambda_i=0$, vem

$$\begin{aligned} J(\alpha'_i e'_i+\beta_i u) &= \alpha'_i J(e'_i)+\beta_i u \\ &= -\alpha'_i e'_i-\alpha'_i \lambda_i u+\beta_i u \\ &= -(\alpha'_i e'_i+\beta_i u)+(-\alpha'_i \lambda_i+2\beta_i)\,u\,. \end{aligned}$$

Temos, pois,

$$J(e'_i)=-e'_i\,,\ \text{ para } \lambda_i=0$$
$$J(\alpha'_i e'_i+\beta_i u)=-(\alpha'_i e'_i+\beta_i u)\,,$$

para $\lambda_i\neq 0$ e $-\alpha'_i\lambda_i+2\beta_i=0$.

O sistema

$$\begin{matrix} e_i=e'_i\,, & \lambda_i=0 \\ e_i=\alpha_i e'_i+\beta_i u\,, & \lambda_i\neq 0 \end{matrix}\,, \tag{8}$$

é anti-simétrico

$$J(e_i)=-e_i\,, \tag{9}$$

e satisfaz manifestamente às outras condições de independência, c. q. d.

Na base,

$$u\,,e_2\,,\cdots,e_n\,,$$

temos

$$a=\alpha_1 u+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n$$

e

$$J(a)=\alpha_1 u-\alpha_2 e_2-\cdots-\alpha_n e_n\,.$$

Geomètricamente, o ponto $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ é transformado em $(\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_n)$: *a involução coincide com a simetria em relação ao ponto-imagem do elemento u da álgebra*. A inversa é igualmente verdadeira, como o leitor pode verificar imediatamente.

Estudemos agora o reflexo desta involução no produto ab da álgebra, considerada como um anel, calculando a tabela

$$e_i e_k=\alpha'_{ik} u+\alpha^r_{ik} e_r\,, \tag{10}$$

isto é, os coeficientes α'_{ik} e α^r_{ik}.

Ora, em virtude de I) (3), combinada com a anti-simetria dos e_i, temos

$$J(e_i e_k)=\alpha'_{ik} u-\alpha^r_{ik} e_r\,. \tag{11}$$

Por outro lado, de II) (4), combinada ainda com a anti-simetria dos e_i, vem

$$\begin{aligned} J(e_i e_k) &= J(e_k)\,J(e_i)=e_k e_i \\ &= \alpha'_{ki} u+\alpha^r_{ki} e_r\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Comparando agora (11) com (12), vem

$$\alpha'_{ik} u-\alpha^r_{ik} e_r=\alpha'_{ki} u+\alpha^r_{ki} e_r$$

donde

$$\alpha'_{ik}=\alpha'_{ki}\,,\quad \alpha^r_{ik}=-\alpha^r_{ki}\,. \tag{13}$$

Quere dizer, *uma involução do tipo considerado, quando a representação da álgebra se faz numa base constituída pelo elemento u e por $n-1$ elementos anti-simétricos $e_2,\cdots,e_n$, reflecte-se na tabela de multiplicação pela simetria dos coeficientes α'_{ik} e pela anti-simetria dos coeficientes α^r_{ik}. E, inversamente, uma álgebra com esta propriedade admite aquele tipo de involução.*

Estão, portanto, caracterizadas as álgebras que admitem êste tipo de involução e deve assinalar-se a circunstância de que, em tôda a análise anterior, *não se recorreu à propriedade associativa da multiplicação*. Ora, introduzamos essa propriedade e vejamos como dela resulta um novo aspecto algébrico da involução J.

Na verdade, como $aJ(a)$ e $J(a)\,a$ são simétricos, temos

$$aJ(a)=\lambda u$$
$$J(a)\,a=\mu u$$

Multiplicando a primeira destas igualdades, à esquerda, por $J(a)$, e recorrendo *à propriedade associativa da multiplicação,* vem

$$J(a)\,a\cdot J(a)=\lambda J(a)\,,$$

ou

$$\mu J(a)=\lambda J(a)\,,$$

o que exige, $J(a)=0$ e, portanto, $\lambda=\mu=0$; ou, então, $\lambda=\mu$. Em qualquer dos casos se tem, pois,

$$aJ(a)=J(a)\,a=\lambda u\,.$$

Quere dizer: $J(a)$ *é um zero, direito e esquerdo de* a, *hipótese* $\lambda=0$, *ou* $\frac{J(a)}{\lambda}$ *um inverso, direito e esquerdo, de* a, *hipótese* $\lambda \neq 0$.

E como
$$a+J(a)+\lambda' u=0,$$
segue-se que os zeros ou inversos a, $J(a)$, são, na representação geométrica, colinearescom a origem, que é o elemento u da álgebra.

Fica assim completamente justificada a interpretação da involução J como «inversão pontual projectiva», nos casos $J(a) \neq 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] *A. Adrian Albert.* Structure of Algebras (Amer. Math. Soc. New-York, 1939) — Cap. I, § 3., pág. 3.

[2] Sôbre as noções fundamentais — Anel, Corpo, etc. consultar as publicações 1 e 7, de *A. Almeida Costa*, na colecção do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto.

[3] Dissertação de Doutoramento—Multiplicações vectoriais, associativas e modulares — Representações geométricas». Pôrto, 1944 - pág. 97-102.

[4] *A. A. Albert.* Loc. cit. — Cap. X, pág. 151 e 152.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

Breves considerações a propósito de uma demonstração

por **Vergílio S. Barroso** (Bolseiro em Roma do I. A. C.)

1. Ao folhear uma obra (1) de um conhecido matemático italiano, depara-se-me um teorema que é bastante familiar ao aluno de um curso de Análise Superior e, terminada a leitura do enunciado e demonstração do mesmo, não posso deixar de me preguntar por qual motivo o autor terá preferido apresentá-lo sob uma forma que não parece ser a mais apropriada a elucidar o leitor e a despertar o seu interêsse. E esta pregunta, que surge a propósito de um caso particular, pode igualmente ser feita em relação ao modo por que, em geral, é ministrado o ensino da Matemática na maioria dos cursos superiores que conheço.

Antes de prosseguir, porém, transcreverei o enunciado do teorema a que me refiro, tal como se encontra na citada obra, para dar ao leitor a possibilidade de, por si, constatar se são, ou não, justas as observações que depois faço. Abramos pois o livro a páginas 6 e aí encontraremos, no parágrafo 3, n.º 1, o enunciado do «teorema da existência e unicidade do sistema de integrais de um sistema de equações diferenciais ordinárias», como segue:

Seja dado um sistema de equações diferenciais sob a forma normal

$$(1) \qquad y_i'=f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_m) \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

e suponhamos que, num rectângulo R *de centro* $(\alpha;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ *definido pelas limitações*

$$(2) \qquad |x-\alpha|\leq a \qquad |y_i-\beta_i|\leq b \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

onde a *e* b *são constantes positivas, as funções* $f_i(x;y_1,\cdots,y_m)$ *são unívocas e contínuas.*

Como conseqüência, temos que as funções f_i são limitadas em R e existe portanto um número M tal que, qualquer que seja o ponto $(x;y_1,\cdots,y_m)$ de R, se tem

$$(3) \qquad |f_i(x;y_1,\cdots,y_m)|\leq M \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

Suponhamos, além disso, que as funções f_i são lipschitzianas de 1.ª ordem em relação às variáveis y_i, isto é, que existem m constantes $L_1, L_2, \cdots, L_m$ para as quais se tenha

$$(4) \qquad |f_i(x;y_1,\cdots,y_k+h,\cdots,y_m)- -f_i(x;y_1,\cdots,y_k,\cdots,y_m)|\leq hL_i \qquad (k,i=1,2,\cdots,m)$$

Segue-se que, quaisquer que sejam os pontos

$$(x;y_1,\cdots,y_m) \quad \text{e} \quad (x;\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m)$$

de R, se tem, para $i=1,\cdots,m$,

$$(5) \qquad |f_i(x;\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m)-f_i(x;y_1,\cdots,y_m)|\leq L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k-y_k|$$

onde L indica a maior das constantes L_i.

Postas estas hipóteses sôbre as f_i, demonstremos o seguinte terema:

Seja δ *o menor dos números* a, b/4M; x_0 *um ponto do intervalo* $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$; $y_1^0,\cdots,y_m^0$ *um sistema de* m *valores iniciais que difiram em valor absoluto das correspondentes constantes* $\beta_1,\cdots,\beta_m$ *menos de* b/2, *isto é, tais que*

$$(6) \qquad |x_0-\alpha|\leq\delta \qquad |y_i^0-\beta_i|\leq b/2$$

(1) G. Sansone — Equazioni Differenziali nel Campo Reale — Parte prima. Monografie di Matematica Applicata — Ed. Zanichelli, Bologna 1941.

Existe então um, e um só, sistema de funções

$$y_1 = y_1(x) ; \cdots ; y_m = y_m(x)$$

tendo por campo de existência o intervalo $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

$$(7) \qquad |x - \alpha| \leq \delta$$

que satisfaz ao sistema (1) *e às condições iniciais*

$$(8) \qquad y_i(x_0) = y_i^0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ou, como se diz, o *problema de Cauchy* para o sistema (1) [e condições iniciais (8)] admite uma, e uma só, solução, chamada *solução de Cauchy*.

2. Tenho a impressão de que, na maioria dos casos, o aluno que acaba êste longo enunciado se sentirá um pouco desorientado, não ficando a ver com nitidez o problema que se lhe põe. Êste facto é conseqüência, em parte, da fadiga proveniente do prolongado esfôrço de atenção empregado na leitura, e em parte de uma certa perplexidade que nêle surgirá perante algumas das condições postas, cuja razão de ser não pode ver imediatamente e que lhe aparecerão por conseguinte com um aspecto pouco natural.

Ora vejamos quais são as condições postas no enunciado: *a)* «As funções f_i são unívocas e contínuas no domínio R» — esta é uma restrição bastante fraca imposta às f_i, que não parece ser estranho fazer logo de início. Mas já não aparecem tão naturalmente as seguintes: *b)* «as funções f_i são lipschitzianas em relação às variáveis y_k»; *c)* «seja δ o menor dos números a e $b/4M$ ·»; *d)* «seja $y_1^0, \cdots, y_m^0$ um sistema de *valores iniciais* tais que $|y_i^0 - \beta_i| \leq b/2$ · ·» Aqui o aluno preguntará, certamente: «mas... valores iniciais de quê? E porquê $b/2$ e não b?

É verdade que, depois, na demonstração do teorema, cada uma destas condições irá encontrar a sua justificação na altura em que fôr introduzida. Mas existe o perigo de que um aluno menos atento não se aperceba de *como* e *onde* cada condição intervém na demonstração. E êle chegará, dêste modo, ao fim sem ter compreendido, o que, com certeza, irá aumentar o desinterêsse que porventura se tenha criado no seu espírito, em conseqüência de um ensino defeituoso anteriormente recebido (devemos confessar que é êste, infelizmente, o caso mais corrente). Ora é êste desinterêsse do aluno que o professor deve procurar evitar, pois êle significa o insucesso de tôda a sua actividade de mestre. Deve, para o conseguir, procurar imprimir ao seu ensino um certo calor, uma certa vida, de modo a tirar à Matemática aquêle aspecto frio e árido com que, em geral, ela aparece aos olhos do aluno.

Creio que êste objectivo poderá ser atingido desde que, em vez de fazer um uso quási exclusivo do *método dedutivo* na sua exposição, o professor adopte de vez em quando — e sempre a propósito de questões fundamentais — o *método genético*, aquêle que foi, de facto, o método seguido pela investigador na descoberta da proposição a demonstrar. Com isto, além de familiarizar o aluno com a «técnica» da investigação, conseguirá fazê-lo interessar-se pela sua exposição, dando-lhe a sensação de «colaborar» como o mestre num trabalho construtivo. Estou certo de que êste facto contribuirá também para fazer aparecer ao aluno a actividade de um investigador sob um aspecto mais humano e portanto mais próxima de si, mais ao seu alcance.

Seguindo o *método genético*, ao apresentar ao aluno um teorema, dever-se-á começar por fazer-lhe um esbôço do problema que se pretende resolver sôbre um dado ente matemático, delineando-lhe a conclusão a que se pretende chegar (*tese do teorema*, cujo enunciado surgirá só no fim), impondo de início a êste ente matemático o menor número possível de condições restritivas (aquelas que se apresentarem mais naturalmente) e dizendo-lhe depois que o problema consistirá em determinar as restantes condições a que deverá satisfazer o referido ente para que se verifique a conclusão indicada. Estas condições a determinar irão depois constituir, juntamente com as condições postas de início, a *hipótese do teorema*.

Feita esta apresentação do problema, adopta-se o caminho que fôra seguido pelo investigador (ou outro que tenha sido ulteriormente proposto como preferível) e as condições procuradas irão depois surgindo naturalmente, na altura precisa em que se vir a necessidade de introduzi-las.

Concretizemos agora esta idéia, exemplificando com o teorema cujo enunciado transcrevi de início. Vejamos, pois, como êle poderia ser apresentado e demonstrado, de acôrdo com êste projecto.

3. É dado um sistema de equações diferenciais ordinárias sob a forma normal

$$\text{(I)} \qquad y_i' = f_i(x; y_1, \cdots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

onde as funções f_i são definidas numa região R *fechada* do espaço S_{m+1} dos pontos $P(x; y_1, \cdot, y_m)$, definida pelas limitações

$$\text{(II)} \qquad |x - \alpha| \leq a \qquad |y_i - \beta_i| \leq b$$

onde a e b são duas constantes positivas.

Ponhamos às f_i sòmente a restrição de serem *unívocas* e *contínuas* em R. A continuïdade na região fechada R traz como conseqüência a limitação das f_i

em R, isto é, a existência de um número positivo M tal que, para todo o ponto $P \in R$, se tenha

$$\text{(III)} \qquad |f_i(x; y_1, \cdots, y_m)| \leq M \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

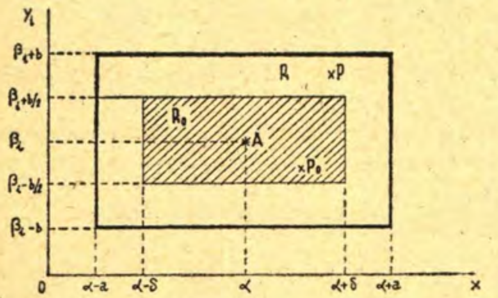
Propomo-nos resolver o seguinte problema:

«1.º — Determinar as restantes condições a que devem satisfazer as f_i para que exista um, e um só, sistema de m funções $y_i(x)$ $[i=1,2,\cdots,m]$ definidas no intervalo $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ (ou num intervalo contido nêste) e tomando num dado ponto x_0 do mesmo um sistema de m valores prèestabelecidos y_i^0

$$\text{(IV)} \qquad y_i(x_0)=y_i^0 \text{ sujeitos às condições}$$

$$\text{(V)} \qquad |y_i^0-\beta_i| \leq b$$

isto é, de modo que o ponto $P_0(x_0; y_1^0, \cdots, y_m^0)$ pertença a R (vidé representação simbólica da figura, que convém seguir por uma questão de comodidade);



2.º — Encontrar o modo de determinar essas funções $y_i(x)$.»

É fácil provar que um sistema de m funções $y_i(x)$ que satifaçam ao sistema (I) e às condições (IV), satisfaz também ao sistema de m equações integrais

$$\text{(VI)} \qquad y_i=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x; y_1, \cdots, y_m)\, dx \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

e recíprocamente.

Procuraremos, pois, resolver o problema para o sistema (VI).

Notemos, primeiro que, se as funções f_i não dependem das variáveis y_i, isto é, se o sistema (I) tem a forma

$$\text{(I}a\text{)} \qquad y_i'=f_i(x)$$

o sistema (VI) toma a forma

$$\text{(VI}a\text{)} \qquad y_i(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

o que nos dá, neste caso, imediatamente os integrais de (I) por meio de quadraturas, sem mais condições a impôr às f_i.

Tal não é, porém, o caso geral, em que seguiremos o processo das aproximações sucessivas de Picard-Peano. Procuraremos definir cada uma das funções $y_i(x)$ como limite de uma sucessão convergente de funções

$$\text{(VII)} \qquad y_i^{(1)}(x), y_i^{(2)}(x), \cdots, y_i^{(r)}(x), y_i^{(r+1)}(x), \cdots$$

obtidas do seguinte modo:

As $y_i^{(1)}(x)$ são dadas pelos 2.^{os} membros de (VI) onde os m variáveis y_i são substituídas ou pelos m valores iniciais y_i^0 ou por m *funções conhecidas* $u_i(x)$ definidas e contínuas em $(\alpha-a, \alpha+a)$ e satisfazendo a

$$\text{(V}a\text{)} \qquad |u_i(x)-\beta_i| \leq b \quad \text{para} \quad |x-\alpha| \leq a$$

ou seja $P(x; u_1, \cdots, u_m) \in R$ pois que, sendo R a região em que são definidas as f_i, só assim terão sentido as expressões $f_i(x; u_1, \cdots, u_m)$. Teremos pois

$$\text{(VIII)} \qquad y_i^{(1)}(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x; u_1(x), \cdots u_m(x))\, dx$$

Depois, para $r=1,2,\cdots$,

$$\text{(IX)} \qquad y_i^{(r+1)}(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(x; y_1^{(r)}(x), \cdots, y_m^{(r)}(x))\, dx$$

o que exige que $P^{(r)}(x; y_1^{(r)}, \cdots, y_m^{(r)}) \in R$ ou seja que

$$\text{(X)} \qquad |y_i^{(r)}(x)-\beta_i| \leq b \quad \text{para} \quad |x-\alpha| \leq a \quad (r, i=1,2,\cdots)$$

Determinemos, antes de prosseguir, as condições a impor aos dados do problema para que se verifiquem as (X).

Para $r=1$: De (VIII) conclui-se:

$$|y_i^{(1)}(x)-\beta_i| \leq |y_i^0-\beta_i| + \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x; u_1, \cdots, u_m)\, dx\right|$$

$$\leq |y_i^0-\beta_i| + M|x-x_0|$$

A condição $|y_i^{(1)}(x)-\beta_i| \leq b$ será pois satisfeita se se puzer

$$|y_i^0-\beta_i| + M|x-x_0| \leq b$$

e esta sê-lo-á pondo

$$|y_i^0-\beta_i| \leq b/2; \quad M|x-x_0| \leq b/2.$$

A 2.ª limitação verificar-se-á pondo

$$M|x-\alpha| \leq b/4 \quad \text{ou} \quad |x-\alpha| \leq b/4M$$

$$M|x_0-a| \leq b/4 \quad \text{ou} \quad |x_0-\alpha| \leq b/4M$$

pois que $M|x-x_0| \leq M(|x-\alpha|+|\alpha-x_0|)$.

Devem portanto verificar-se as condições

$$\text{(XI)}\qquad \begin{cases} |y_i^0-\beta_i|\leq b/2 \\ |x_0-\alpha|\leq\delta \\ |x-\alpha|\leq\delta \end{cases}$$

chamando δ ao menor dos números a e $b/4M$, pois que x e x_0 devem satisfazer também a

$$|x-\alpha|\leq a\,;\quad |x_0-\alpha|\leq a\,.$$

Supondo agora que $P^{(r)}\epsilon R$, isto é, que $|x-\alpha|\leq a$; $|y_i^{(r)}-\beta_i|\leq b$, um raciocínio análogo feito sôbre (IX) mostra que, *verificadas as* (XI), se tem $P^{(r+1)}\epsilon R$.

Conclusão: as condições (XI) são suficientes para que o 2.º membro da igualdade (IX) tenha um sentido para *todos os valores naturais de* r, e esta igualdade permite assim *dar a sucessão* (VII).

O que nos dizem as condições (XI) agora encontradas? *a)* Que o ponto inicial (chamemos-lhe assim) $P_0(x_0\,;y_1^0,\cdots,y_m^0)$ deve ser tomado na região $R_0\subset R$ (figura). *b)* Que as funções $y_i^{(r)}(x)$ vêm definidas no intervalo fechado $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ e não necessàriamente em $(\alpha-a,\alpha+a)$ quando $\delta<a$. E notemos que tais funções *são contínuas nêste intervalo,* atendendo ao modo como são obtidas.

Voltemos à sucessão (VII). Pretende-se que, *quando* $r\to\infty$, *para* x *variável em* $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$, *as funções* $y_i^{(r)}(x)$, *convirjam uniformemente*[2] *para respectivas funções limites* $y_i(x)$ *que satisfaçam ao sistema* (VI), *isto é, ao sistema* (I) *e condições* (IV).

Tal facto dar-se-á se a série

$$\text{(XII)}\quad u_i(x)+[y_i^{(1)}(x)-u_i(x)]+[y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)]+ +\cdots+[y_i^{(r+1)}(x)-y_i^{(r)}(x)]+\cdots$$

onde $S_0=u_i(x)$, $S_n=y_i^{(n)}(x)$, *fôr absoluta e uniformemente convergente em* $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. A maneira mais cómoda de o conseguir será a de fazer com que os seus termos sejam inferiores em valor absoluto aos termos correspondentes de uma série numérica convergente, e isto qualquer que seja $x\,\epsilon\,(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. Portanto, como primeira condição, os seus termos têm de ser limitados, o que realmente se verifica, pois todos êles são funções contínuas de x no intervalo fechado $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. Em particular existirão m números positivos C_i tais que $|y_i^{(1)}(x)-u_i(x)|\leq C_i$ para $x\,\epsilon\,(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. Consideremos o 3.º termo da série: atendendo a (VIII) e (IX) poderemos escrever:

$$\text{(XIII)}\quad |y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)\leq\Big|\int_{x_0}^{x}[f_i(x;y_1^{(1)}(x),\cdots,y_m^{(1)}(x)- -f_i(x;u_1(x),\cdots,u_m(x))]\,dx\,.$$

[2] A convergência uniforme é necessária para a continuïdade das funções limites $y_i(x)$.

A diferença entre colchetes é evidentemente inferior a M em valor absoluto, pois que os pontos $Q(x;u_1,\cdots,u_m)$ e $P^{(1)}(x;y_1^{(1)},\ \ ,y_m^{(1)})$ pertencem a R, mas esta condição não nos basta para encontrar uma série numérica majorante de (XII) pois que, com ela, apenas chegaríamos a provar que, a partir do 3.º, todos os seus termos são inferiores em valor absoluto a $M|x-x_0|$ e portanto a $2M\delta$, o que nada adianta Introduzamos então uma outra condição, um pouco menos simples. É evidente que a diferença $f_i(P^{(1)})-f_i(Q)$ depende de cada um dos acréscimos $y_j^{(1)}(x)-u_i(x)$ relativos a cada variável. Pois bem: admitamos que as f_i satisfazem à condição de existirem m números positivos $L_1,\ \ ,L_m$ tais que

$$|f_i(x;y_1,\cdots,y_r+h,\cdots,y_m)-f_i(x;y_1,\ \cdot,y_r,\ \ y_m)|\leq hL_i \qquad (r,i=1,2,\ \ \cdot,m)$$

que são as *condições de Lipschitz de 1.ª ordem* em relação às y_i. Verificam-se, pois, as condições (5), e pondo $C=\sum\limits_{1}^{m}C_i$ teremos, de (XIII),

$$|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|\leq L\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{m}|y_i^{(1)}(x)-u_i(x)|\,dx\right|\leq CL|x-x_0|$$

Repetindo o raciocínio para alguns termos seguintes, consegue-se provar, por indução, que

$$|y_i^{(r+1)}(x)-y_i^{(r)}(x)|\leq\frac{C}{m}\cdot\frac{[mL|x-x_0|]^r}{r\,!}\leq\frac{C}{m}\cdot\frac{[2mL\delta]^r}{r\,!}$$

e que portanto a série dos valores absolutos dos termos da (XII), excluídos os dois primeiros, é minorante da série cujo termo geral é $\dfrac{C}{m}\dfrac{[2mL\delta]^r}{r\,!}$ que converge e tem por soma $\dfrac{C}{m}[e^{2mL\delta}-1]$, como sabemos. Existem, pois, as funções limites

$$y_i(x)=\lim_{r\to\infty}y_i^{(r)}(x)$$

que são contínuas em $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$. E a demonstração prossegue, mostrando-se depois que tais funções satisfazem ao sistema (VI) e que o sistema de soluções $y_1(x),\cdot\ \ ,y_m(x)$ é único. Mas esta parte final não interessa já para o fim que eu tinha em vista, que era o de mostrar como, e em que altura, se deveriam fazer aparecer as condições a impôr às funções f_i, além das inicialmente postas da uniformidade e continuïdade em R. De facto, com a aparição das condições de Lipschitz, agora em último lugar, esgotou-se o conjunto das condições que procurávamos. O resto da demonstração faz-se sem ser necessário introduzir mais restrições às f_i.

Roma, Março de 1944.

PEDAGOGIA

EM GUISA DE CONTINUAÇÃO DE UM DEBATE

por ***Bento J. Caraça***

1. — Embora com um grande atrazo sôbre a publicação dos últimos depoimentos no debate que abrimos no n.º 17 da Gazeta (atrazo que não pudemos evitar), vimos hoje resumir e comentar o essencial dêsses depoimentos.

Digamos desde já que, sem ter sido tão largo quanto desejávamos, êste debate teve no entanto o mérito de permitir que se trouxessem à discussão alguns dos problemas mais importantes do nosso ensino secundário. Foram apontados males e descobertas feridas e andou-se portanto uma parte do caminho, necessário e doloroso, para a cura. Houve ainda alguns pontos que ficaram na sombra; já veremos quais são.

2. — Comecemos por uma *objecção técnica* que foi oposta às considerações do artigo do n.º 17 da Gazeta.

O nosso colaborador *W. L. Stevens* fez a análise estatística dos números que demos sôbre as reprovações nos grupos de candidatos vindos do Liceu e do ensino técnico e concluiu que «não há razões para suspeitar que as Escolas Técnicas sejam menos eficientes do que os Liceus no ensino das Matemáticas visto os dados não fornecerem evidência que justifique tal conclusão». (Gazeta, n.º 18).

Julgamos que houve aqui um equívoco do nosso colaborador *W. Stevens;* não afirmámos que as Escolas Técnicas são menos eficientes que os Liceus mas apenas que, contra o que seria de esperar, em 1943 as percentagens de reprovações foram superiores nos candidatos do ensino técnico, o que é, parece-nos, um pouco diferente.

Mas *contra o que seria de esperar* porquê? Porque o Liceu fornece uma preparação geral para tôdas as Escolas Superiores, ao passo que o ensino técnico comercial dá acesso *apenas* ao I. S. C. E. F. Seria portanto natural encontrar aqui uma coordenação mais perfeita entre o ensino médio e superior, a qual se traduzisse por uma percentagem menor de reprovações. Claro que os números apresentados não permitem conclusões (que não tirámos) mas chamam a nossa atenção para um problema.

Deixámos nessa altura a questão em suspenso, à espera de que alguém a levantasse. Como o caso não se deu, vamos agora tratá-la. Por muito estranho que pareça, é freqüente um aluno chegar ao fim do seu curso médio no ensino técnico comercial sem ter aprendido uma palavra de geometria elementar. E como não parece possível que sem ela se ensinem os rudimentos da *Geometria Analítica* ou do *Cálculo Diferencial,* incluem-se habitualmente preguntas de geometria elementar sintética nos pontos de resposta obrigatória do exame de aptidão ao I. S. C. E. F. Atribuo a êsse facto a elevada percentagem de reprovações nessa classe de candidatos.

É êste um exemplo típico de situações fornecidas pela nossa orgânica de ensino em que tem necessàriamente de haver vítimas — o candidato ou é obrigado a um trabalho suplementar, ou é reprovado. A outra hipótese não a queremos sequer pôr — haveria então vítimas a mais.

3. — Passemos agora a algumas questões importantes levantadas nos depoimentos.

Comecemos pelo problema dos alunos internos e externos dos Liceus, do ensino oficial e particular.

Os professores *Cardoso Guerra* e *António Augusto Lopes* coincidem na apreciação geral do problema. Deve distinguir-se, segundo as palavras precisas do prof. *António Lopes,* entre *alunos vindos do Liceu e alunos com o curso liceal.* Infelizmente não é possível, pelos dados existentes na Secretaria da Universidade Técnica, distinguir os dois grupos de candidatos, mas não nos repugna acreditar que os dois professores tenham inteiramente razão.

Os próprios números oficiais sôbre os resultados dos exames dos Liceus são de tal maneira reveladores que espanta como êles não tenham provocado já medidas drásticas da parte das entidades oficiais responsáveis pelo nosso ensino público. No n.º 34 de «*Liceus de Portugal*» vem publicado um mapa onde se vê que em 1943 a disciplina de Matemática no curso complementar de Ciências forneceu as seguintes percentagens de reprovações — alunos internos 19 %, alunos externos particulares 45 %, alunos externos individuais 69 %.

Noutro mapa, publicado no mesmo número da mesma revista, vê-se que do total de 67.230 exames efectuados no ano lectivo de 1942-43 nos Liceus do Continente, 21.280 foram de alunos internos (ensino oficial) 27.226 de alunos externos particulares e 18.724 de alunos externos individuais — estamos em pleno Eldorado do ensino particular!

Na totalidade, o primeiro grupo forneceu 9 % de reprovações, o segundo 24 % e o terceiro 50 %.

O Director Geral do Ensino Liceal, *Dr. Riley da Mota*, comenta ainda, no mesmo número de «*Liceus de Portugal*», êstes resultados com as seguintes palavras — «pelo mapa n.º 6 vê-se que o número total de exames continua a baixar (67.230 contra 70178 em 1942). O decréscimo maior nota-se nos exames de internos (vieram de 23.453 para 21.280). Os de maiores e emancipáveis aumentaram! E hão-de aumentar sempre, apesar-de para êles ter aumentado também a percentagem de reprovações... No 2.º ciclo e curso complementar de Letras superam em muito as outras modalidades. Terra de autodidactas!»

Estas são as palavras do Sr. Director Geral. A nós ocorre-nos preguntar — ¿para que se mantém na orgânica de ensino uma classe de estudantes de tão pequeno rendimento de aproveitamento?

Diminue o número de alunos do ensino oficial e aumenta o dos externos (o *despovoamento dos Liceus* a que se refere o prof. *Cardoso Guerra*). «E hão-de aumentar sempre! porquê? ¿Não é evidente que êste tão grande desequilíbrio em favor do ensino particular é um dos cancros do nosso ensino médio? ¿Por que razão se não ataca o mal? ¿Estamos porventura ligados a êste fenómeno do despovoamento dos Liceus como a uma espécie de fatalismo do mau tempo ou das pragas de gafanhotos?

A explicação que o Sr. Director Geral parece sugerir — terra de autodidactas — não nos convence!

Êste problema é de tal importância que não pode de modo nenhum considerar-se fechada a discussão sôbre êle. Que o país seja esclarecido por quem o puder esclarecer; mas que seja esclarecido.

4. — O *Dr. Hugo Ribeiro* chama a nossa atenção para um importante aspecto do problema — a preparação dos professores do ensino médio, na qual, como êle diz, a Matemática não é normalmente «*tomada como um objecto próprio, independente, de estudo*», na qual os futuros professores de Matemática, «não estudam normalmente Matemática senão na medida em que esta Ciência tem que ver directamente com certas aplicações especiais, certas técnicas, das quais se pode dizer, embora grosseiramente, que não interessam à sua profissão».

Não estamos convencidos de que os profundos males do nosso ensino médio sejam devidos, nem exclusiva nem mesmo principalmente, aos professores do mesmo ensino. Êles constituem um corpo em que a norma é a competência profissional e a dedicação; a raiz dêsses males está na orgânica, que torna inoperantes as melhores qualidades.

Mas nem por estarmos convencidos disso deixamos de reconhecer a importância do problema levantado pelo *Dr. Hugo Ribeiro* e a justeza do seu diagnóstico.

Na verdade, sem discutir agora a orgânica da licenciatura em Ciências Matemáticas, é de preguntar se ela, tal como existe, é a mais própria preparação para um futuro professor de Matemática no ensino médio. A resposta parece-nos dever ser *redondamente negativa*. Encontram-se no quadro de estudos dessa licenciatura, muitas matérias de que o futuro professor do ensino médio nem de perto nem de longe terá que vir a lançar mão e faltam-lhe, em compensação, as coisas mais urgentes e essenciais. Para dar apenas um exemplo, ¿Com que conhecimentos de *Matemáticas Elementares* — aquelas que mais tarde tem de manejar todos os dias, (e ensinar!) — está apetrechado um licenciado à saída da sua Escola? os mesmos que possuía quando para lá entrou!

Parece estarmos aqui, como em outros sectores da nossa vida intelectual, ainda em pleno século XIX, não no final, aí pelos meados.

No ensino médio técnico as coisas são ainda peores, porque o recrutamento e distribuïção de professores se faz ainda com menos cuidado do que nos Liceus. Aqui a situação atinge os limites do inconcebível, chegando-se a distribuir turmas de aritmética a professores provisórios (o quadro dos professores efectivos não chega para um quinto das necessidades) que nem sequer freqüentaram uma cadeira de Matemática numa Escola Técnica Superior! Só com o seu 7.º ano, ou o curso duma escola média! em estado de pureza virginal!

Isto para não falar já das condições gerais de ensino, ministrado em casas de empréstimo ou em pardieiros, sem material didáctico, sem espaço, sem luz, sem alegria! Aqui parece que não poderá vir a aproveitar-se nada quando êstes problemas puderem entrar em caminho de solução.

5. — Um dos elementos que mais influiu na criação do automatismo e falta de espírito crítico a que nos referimos no nosso artigo foi, sem dúvida, a maneira de fazer os exames e a subordinação aos pontos modêlos. «Um autêntico desastre para o ensino» diz o prof. *Cardoso Guerra*.

Como porém êsse regime parece estar enterrado, passemos adiante, de lenço no nariz.

6. Há alguns pontos do depoïmento do prof. *António Lopes* com os quais não podemos concordar, a pesar de estarmos de acôrdo, e vivamente, com a generalidade dêle.

Diz o mesmo professor que os dados fornecidos pelos exames de aptidão não são de muito interêsse para o problema da coordenação do ensino secundário com o superior porque «os actuais programas do ensino liceal, na disciplina de Matemática, contêem tôda a matéria exigida para a entrada nas Universidades».

Parece-nos que o problema da coordenação é mais vasto que o da afinação e ligação de programas. Os programas são elemento fundamental dessa coordenação, mas não tudo.

Mais adiante diz o prof. *António Lopes* que não acredita que os resultados dos mesmos exames possam dizer alguma coisa sôbre o nível do ensino, por considerar êsses resultados insuficientes em número e qualidade.

Não os apresentámos com pretensões a serem completos e isso foi dito explicitamente, cremos nós; pretendemos apenas levantar problemas.

Se os resultados doutras experiências tivessem vindo a público, teriamos talvez um material que permitisse um primeiro esbôço de conclusão. Os exames de aptidão, mesmo da maneira deficientíssima como estavam sendo feitos (julgamos conhecer razoàvelmente essas deficiências, visto estarmos metido nêles desde o princípio) poderiam servir de *test* quanto ao nível do ensino no Liceu, assim como os concursos e, duma maneira geral, o comportamento na vida, servem de *test* para o nível do ensino nas Universidades.

7. — Finalmente, não foi abordada nêste debate uma questão que é, de longe, a mais importante de tôdas — a da orgânica geral do ensino.

É um facto que se pode ter como assente que os alunos chegam ao ensino superior com uma preparação deficiente em Matemática, a qual obriga a um abaixamento do nível dos cursos nos primeiros anos das Universidades.

Por outro lado, é evidente que, com a organização actual. é impossível sobrecarregar demasiadamente os programas se bem que, por razões que ainda não vimos completamente esclarecidas, estejam hoje suprimidas matérias (e em quantidade razoável) que há vinte anos estavam ao alcance da média dos alunos sem necessidade de aleijão mental ou físico.

A questão é aparentemente insolúvel, mas só aparentemente. Encontramos a possibilidade dum caminho de saída se nos pusermos, em tôda a sinceridade e boa vontade, estas questões — ¿ qual é a finalidade do ensino médio? ¿ qual é o tipo de cidadão que se entende que êle deve formar? ¿ justifica-se hoje a separação em compartimentos estanques de ensino médio geral (liceal) e técnico? ¿ Está essa distinção à altura das necessidades da nossa época e do nosso país? Vamos mais ao fundo — ¿ justifica-se a distinção entre ensino primário e secundário, tal como existe entre nós? ¿ Não é isso um anacronismo, rejeitado pelos países mais progressivos, e que pesa sôbre nós, sôbre tôda a nossa vida mental, como uma nuvem negra asfixiante e encobridora de perspectivas?

Aquilo que poderia talvez ser defensável há cem anos – que a nossa instrução primària, ler, escrever e contar, seja suficiente para a grande maioria dos portugueses — ¿ é justo e aceitável ainda hoje? A esta pregunta — que envolve a questão mais importante de tôdas — *respondemos, pela nossa parte, com uma negativa formal.*

Não julgamos que possa fazer-se qualquer coisa de sério em instrução no nosso país sem uma mudança radical, baseada no prolongamento da escola até pelo menos aos quinze anos. Nessa escola, que seria *única* (portanto sem distinção entre ensino técnico e clássico) e *para todos*, se ministrariam os conhecimentos (matemáticos e das outras disciplinas) *indispensáveis a todo o cidadão português.* Nos dois ou três anos seguintes, com um comêço de especialização, haveria tempo para dar sólidas bases em cada uma das disciplinas sôbre as quais se pudesse edificar um ensino superior digno dêsse nome.

Enquanto tal se não fizer, parece-nos que estaremos condenados a passar a vida a deitar remendos num pano cada vez mais esburacado. Com todos os inconvenientes dessa triste sina — o menor dos quais não é a dificuldade de nos entendermos uns aos outros.

ANTOLOGIA

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

CICLO DE PALESTRAS RADIODIFUNDIDAS PROMOVIDAS PELA «JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA» (*)

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA AO SERVIÇO DA SAÚDE

por ***Corino de Andrade***

Nos tempos que atravessamos cheios de dificuldades, para os indivíduos e para os povos, todos nós compreendemos hoje, duma maneira mais clara do que no passado, a importância da saúde, como factor fundamental para a economia e vida individual e colectiva.

Não há rico nem pobre que não sinta e não compreenda que a sua saúde é o factor por vezes decisivo para as tarefas que temos que empreender e outras do nosso próprio destino; e, o que é verdade para os indivíduos também o é para as Nações.

A saúde pública é um capital da Nação, e a ela cumpre vigiá-lo e protegê-lo com o mesmo carinho e zêlo com que protege tôdas as suas outras riquezas públicas.

(*) Já publicadas na «Gazeta de Matemática»: «O valor social da investigação científica», por Ruy Luís Gomes — G. M. n.º 19; «Os objectivos da Junta de Investigação Matemática», por António Monteiro — G. M., n.º 21.

A saúde do vizinho interessa ao vizinho, ao patrão, duma maneira geral a todos os que o rodeiam Um homem doente constitue um perigo para os que o cercam, pelas perturbações que comunica ao meio onde actua e vive, pela baixa de rendimento de trabalho na repartição, na oficina, na escola, e, até na direcção das coisas públicas. *A saúde dos povos interessa às Nações*, pois sem homens fortes de alma e de corpo estas não podem suportar os esforços que a história lhes impõe. Esta noção simples e quási lugar comum é no entretanto o produto duma longa evolução histórica; actualmente ainda só em algumas Nações da idéia se passou à acção, e, a luta contra os males que afligem o homem se transformou numa batalha rude e tenaz.

Essa luta contra as causas da doença, o combate ao sofrimento, a recuperação tão completa quanto possível do valor social do homem doente, só podem ser empreendidas se conhecermos os agentes que produzem as doenças, as condições em que elas actuam, as reacções do organismo, etc.

Todos conhecem, por terem sofrido, observado ou ouvido contar, os males que as sezões provocam; poucos sabem no entretanto que o combate ao sezonismo exige hoje um conjunto de técnicos e investigadores os mais variados, que trabalham cada um no seu campo mas com sentido convergente. O Entomologista que estuda os mosquitos e os seus hábitos, o Climatologista, o Parasitologista que estuda o Plasmodium, ou seja o agente que produz as sezões, o Químico que estuda a composição das drogas e procura realizar a sua síntese, o Médico ou o Patologista que observa as acções dos medicamentos no seu doente, e as suas reacções, todos êstes indivíduos colaboram numa obra comum a de nos libertar dêsse flagelo; e o que acabo de dizer a propósito das sezões poderá aplicar-se a tantas outras doenças como, por exemplo, a sífilis, a tuberculose, a lepra, etc.

Entre os problemas que a guerra obrigou a estudar com muita atenção sob múltiplos aspectos destaca-se o da alimentação. Sob a ameaça do bloqueio, obrigados a transportar a grandes distâncias alimentos em bom estado de conservação, os países em guerra, e até os neutros, foram obrigados a aprofundar os conhecimentos sôbre os problemas da alimentação, e aí, como no caso do sezonismo, tôda uma massa de investigadores se lançou com ardor ao trabalho, sob o império das necessidades. Clínicos, Bioquímicos, Fisiologistas, Higienistas, todos congregaram os seus esforços, centraram as suas energias sôbre êste grande problema. Não nos parece ousado dizer, que o conhecimento mais exacto dos problemas da alimentação, conexo como está com o da nutrição dos tecidos e órgãos, poderá permitir-nos, num futuro mais ou menos próximo, compreender melhor e evitar as doenças degenerativas tais como a artéria esclerose, etc. Morrem, por dia, milhares de pessoas por doenças das artérias; pois bem, apesar do muito estudo nos doentes e investigação experimental nos animais, ainda nada se concluíu até agora que tenha valor prático.

Estes exemplos que escolhi por me parecerem bastante demonstrativos e de fácil compreensão a pessoas não especializadas, mostram que a atitude em face da doença deve ser uma atitude de luta activa, e que do mesmo modo que nenhum exército poderá dar batalha com probabilidades de vitória, sem conhecer o mais detalhadamente possível o inimigo, os meios de luta de que êle dispõe, o terreno onde vai empenhar-se, assim também o médico e o higienista não poderão com eficiência atacar ou prevenir os males se não existir a investigação científica organizada.

Todos conhecemos hoje que a investigação científica é mais de que o produto duma mera curiosidade do espírito, uma atitude do homem em face do desconhecido; obrigado pela evolução das necessidades a resolver os problemas técnicos, surje hoje ao lado da investigação pura, cujos resultados não têm aplicação imediata, a investigação ligada aos problemas da vida prática.

A América, a Inglaterra, a Alemanha, a Rússia e outros países, há já muitos anos que organizaram a investigação criando institutos de investigação pura, centros de investigação junto das indústrias, dos hospitais, dos serviços de saúde, etc. As grandes emprêsas industriais como a Krup compreenderam o valor da ciência para as indústrias, comércio, agricultura, duma maneira geral para a riqueza pública e criaram um fundo que permitiu a criação do Kaiser Wilhelm Institut, onde os investigadores alemães puderam nos últimos 25 anos contribuir para a resolução de vários problemas e abrir novos estradas à investigação. A Inglaterra criou vários centros de investigação médica de onde se estudam os problemas da medicina que mais interessam ao povo britânico.

Ao lado da Universidade, diferencia-se actualmente uma organização que tem como função a investigação científica. É na investigação, na vivência dos problemas, que se formam os homens capazes de resolverem os problemas que surgem. A educação livresca, meramente informativa, gera pedantes da cultura, incapazes de resolverem o caso concreto, o caso vivido, homens que sabem tudo, mas que chamados um dia a solucionar e a prever, fogem diante das dificuldades, com raptos de erudição, burocratizam as suas funções e comprometem assim o futuro de muitas gerações.

A investigação científica tem, além da função que lhe assinalamos, uma função pedagógica. Fazer observar, reflectir sôbre os dados da observação, formular hipóteses de trabalho baseadas sôbre êsses dados, subir às generalizações mais abstractas, mergulhar na vida, e encontrar nela os estímulos e sugestões para novos problemas, todo êsse caminho árduo e fecundo, o investigador o tem de percorrer cada vez que se encontra face a face com o desconhecido que pretende desvendar e dominar.

Nós, portugueses, encontramo-nos hoje como os outros povos, numa encruzilhada histórica. Temos que, desde já, começar a preparar-nos para as tarefas que vão surgir; elas vão exigir, do nosso povo, resistência física e moral. Temos que considerar a saúde pública como um bem público, como uma batalha a ganhar, e para isso temos que começar por estudar, in-loco, os nossos males, as doenças que nos afligem; temos que formar técnicos e investigadores, enviando uma grande massa de jóvens, libertos de vícios, para os centros estrangeiros, onde se trabalha e investiga. Temos de criar progressiva e cuidadosamente as condições necessárias para a organização de centros de investigação de estudos médicos, centros que sejam focos de trabalho criador e não cemitérios de ciência onde só se ouvem orações fúnebres.

Junho de 1944

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E A DEFESA DA PRODUÇÃO VEGETAL

*por **Branquinho d'Oliveira***

Esquecer o valor da investigação científica, como elemento propulsor do aperfeiçoamento humano, é retrogradar tanto material como moralmente. A saúde, a segurança, o confôrto que o homem medieval não sentiu, e que caracteriza os nossos dias de paz, só foram possíveis porque as hipóteses deixaram de ter o valor de dogmas, para serem apenas um estímulo ao trabalho.

Na ciência contemporânea, os problemas deixaram de ser apreciados ùnicamente pelo raciocínio, para serem tratados no cadinho da experimentação. O homem, mesmo sem grande preparação científica, começou a querer indagar o «porquê» das coisas.

Adoece-se com determinada enfermidade desconhecida, e pregunta-se: porquê? o problema põe-se em bases experimentais, até que se encontre a cura.

Os gados desenvolvem-se mal, ou morrem mesmo, quando lhes é dada certa alimentação, e inquire-se: porquê? até sabermos como lhes podemos dar uma ração saùdável.

Uma terra é improdutiva, ou determinada planta não se desenvolve nela, investiga-se a causa até descobrir como podemos corrigir o defeito.

Os operários numa fábrica baixam o rendimento, não se pune antes de procurar saber as causas e de as remediar.

A Humanidade ganhou com a investigação a segurança do pão de cada dia. Quando, ainda no princípio do século passado, se julgava que a cultura da terra não permitiria um grande incremento da população, por não se poder aumentar o rendimento agrícola, a investigação por si só, trouxe um tal acréscimo na produção, que a balança económica mundial acusou um desiquilíbrio. Mas os povos, em vez de utilizar êsse excesso, elevando o nível de vida dos que viviam em carência, queimaram trigo, café e algodão, limitaram a cultura da vinha, da cana e da beterraba sacarina, diminuiram a criação dos gados e a produção de leite, lançaram ao mar o peixe depois de pescado, baixaram propositadamente o rendimento das minas e das fábricas.

A ciência se não deu ainda ao homem a confiança na abastança e em si próprio, é apenas porque não tem podido estudar os problemas económicos e sociais nos moldes da experimentação. É, acima de tudo, porque muitas vezes as relações entre os povos se inspíram no interêsse de algumas classes e não, como devia ser, num humano sentimento de fraternidade.

*

Seja de que ponto de vista for que olhemos a baixa produção agrícola portuguesa, e a sua repercussão económica e social, quer na saúde pública, quer nas condições materiais e morais da nossa gente, vemos sempre como única saída para o problema, não um aumento de esfôrço a pedir ao trabalhador, mas a estrada da investigação.

¿Corremos o risco de ver diminuir, de ano para ano, a nossa área cultural, pelo arrastamento de terras das montanhas e encostas, e pelo cascalho que entulha as nossas várzeas? Procuremos as causas dessa erosão e combatamo-las cientìficamente nas suas origens.

¿Somos deficitários em cereais? Indaguemos as razões dessa deficiência, de modo a melhorar o fundo de fertilidade das nossas terras, criando variedades mais produtivas, de maior poder alimentar, mais resistentes à secura, às intempéries e às doenças.

¿Temos uma baixa capitação de alimentos ricos, principalmente de carne, ovos e gorduras animais? ¿Temos quási sempre maus gados e pouco leite? Estudemos experimentalmente o aumento da produção forrageira, de forma a reduzir os pouzios, a obter plantas de maior rendimento e valor nutritivo, cuidemos de melhorar e selecionar as nossas raças pecuárias, defendendo-as da doença e da fome.

¿Há culturas que entram na ruína, não por falta de mercado para os seus produtos, mas devido a certas doenças? Pois bem, só o estudo das causas dessas doenças poderá encontrar a forma de as debelar. E que maravilhosas descobertas a ciência nos tem dado neste campo! Só um exemplo, passado com a cultura da cana sacarina.

Em Java, por volta de 1880, a principal fonte de riqueza era a exportação do açúcar de cana. Sucedeu por essa altura, porém, que a mais apreciada das variedades de cana sacarina ali cultivada, foi atacada por uma doença que levou a indústria açucareira à ruína e a população da ilha à ameaça da miséria. O trabalho de investigação que então se iniciou foi longo e penoso. Primeiro, os investigadores procuraram encontrar, entre as amostras de cana obtidas de todo o mundo, uma variedade que não fôsse atacada pelo mal. Como os resultados não fôssem satisfatórios, em breve se lhe segue uma equipa de trabalhadores que enceta a gigantesca obra de melhoramento para a obtenção de formas resistentes, por meio de cruzmentos exeperimentais, e que havia de levar cêrca de quarenta anos! Obtiveram-se milhares de hibridos e experimentaram-se milhões de plantas com o fim de conhecer a sua resistência à doença, a sua produção por unidade de superfície, o seu conteúdo em açúcar. Não são já só agrónomos ou genetistas que trabalham; tecnologistas, químicos e outros especialistas prestam o seu concurso. E, finalmente, depois de muitas esperanças ilusórias, após tantas tentativas fracassadas, Java, ganhou em 1921, uma das maiores batalhas que a ciência do melhoramento de plantas tem travado. A célebre variedade de cana P. O. J. 2878, obtida pelo trabalho de investigação, salvou da ruína a exploração açucareira de Java e espalhou a abastança por muitas partes do mundo. Esta vitória da ciência é também uma honra para o trabalho inteligente da colonização holandesa.

Dentro do quadro nacional, embora presentemente não exista nenhuma cultura em ruína, algumas daquelas sôbre que, de certo modo, assenta a nossa economia são de colheitas tão irregulares que motivam graves crises ocasionais.

A nossa produção cerealífera sofre oscilações cuja explicação não se pode encontrar só nas condições climatéricas. Bastaria criarmos trigos resistentes às alforras, para aumentarmos o rendimento deste cereal em 15 %, pelo menos, ou sejam mais 90.000 contos de réis em dinheiro de antes da guerra e, o que é mais, para garantirmos pão a alguns milhares de bôcas.

Se conseguíssemos obter variedades de videira resistentes ao míldio, evitaríamos a perda de 810.000 pipas de vinho, como aconteceu em 1936; dispensaríamos, além disso, a importação anual de 10.000 toneladas de sulfato de cobre, que custam uma larga soma à economia nacional.

Se conseguissemos eliminar a môsca e a gafa da azeitona, não teríamos prejuízos anuais em azeite que oscilam entre 60 e 100.000 contos.

E a nossa produção de cortiça? Embora não seja fácil traduzir em números os estragos causados nos nossos montados pelos agentes patológicos, podemos dizer que mais do que uma praga e mais do que uma doença ameaçam já a sua produção e virão certamente a contribuir para limitar o rendimento desta preciosa espécie.

Muitas outras culturas, talvez de valor económico menos elevado, mas possivelmente de maior importância social, como a da batata por exemplo, correm grave risco de ser devastadas por inimigos de várias naturezas.

E agora outro aspecto da questão. São, na verdade, só aqueles valores monetários que se perdem para a nossa balança económica? Não. O azeite, a carne, o leite, os legumes, a fruta, o vinho e o pão que se deixam de colher em virtude dos estragos causados pelas doenças das plantas, fazem falta em muitos lares, são causa de desconfôrto e da carência em tantas famílias portuguesas.

Êste pequeno parêntesis no panorama da defesa da produção agrícola chama-nos a atenção para a importância social da investigação, não apenas agronómica, mas na sua forma mais lata, isto é, em todos os ramos da ciência. As diferentes especialidades têm entre si ligações íntimas, e não são os cursos nem as faculdades que podem estabelecer barreiras ao saber humano ou ao espírito de investigação. Um homem de laboratório ou um técnico, no estudo dos seus problemas, ao encetar uma pesquiza nunca sabe onde os resultados o poderão levar, pois êstes é que conduzem o investigador através do método experimental. Pasteur é disto um exemplo vivo.

A obra científica a realizar no nosso país é gigantesca e necessita ser impulsionada tanto no Continente como no Ultramar. Para a sua efectivação não podemos dispensar nem o mais modesto dos nossos investigadores: de todos precisamos para fazer entrar a investigação nas normas das nossas Universidades e para ajudar a transformar o carácter do nosso ensino. É urgente também elaborar um programa de apetrechamento científico nacional e, de acôrdo com êle, mandar educar no estrangeiro naqueles ramos em que não tenhamos bons elementos, novas equipas de investigadores, que venham renovar as nossas escolas, dar real significado aos nossos laboratórios, fertilizar o nosso espírito e criar novos vâlores morais.

Se a Nação se não apercebe da necessidade e da importância da investigação, se a não utiliza na solução dos seus problemas internos, cai fatalmente no atrazo e na rotina, podendo arruïnar-se mesmo em plena paz.

A investigação científica, penetrando as trevas do futuro, como um poderoso facho de luz, põe em evidência obstáculos e precipícios que poderiam ser fatais se permanecessem ignorados. E, por outro lado, garantindo o pão farto da grei, defendendo a saúde pública, melhorando as condições do trabalho e regulando uma mais equitativa distribuïção das riquezas, ela é o propulsor do progresso, do bem estar e da ordem social.

Janeiro de 1945.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Em 22 de Janeiro de 1945 reüniu a Assembleia Geral da S. P. M. tendo-se aprovado por unanimidade o relatório da Direcção. Foram eleitos na mesma sessão para o biénio de 1945-46:

Mesa da Assembleia Geral: *Presidente*, Dr. Manuel A. Peres Júnior, Director do Observatório Astronómico de Lisboa; *Secretários*, Dr. D. Maria Henriqueta Trigo de Sousa Zanatti, professor do Liceu e Dr. D. Maria Antónia Rego Chaves, do Instituto Geográfico e Cadastral.

Direcção: *Presidente*, Dr. António A. Ferreira de Macedo, professor do I. S. T.; *Vice-Presidente*, Dr. Luís Passos, professor do Liceu; *Secretário-Geral*, Dr. António J. Baptista dos Santos, do Observatório Astronómico de Lisboa; *Tesoureiro*, Dr. João Remy T. Freire, assistente do I. S. C. E. F.; *1.º Secretário*, Dr. António da Costa Leão, actuário do I. N. T.; *2.º Secretário*, Dr. Raúl de Carvalho, eng. geógrafo do Ministério O. P.; *Vogal*, Dr. Fernando F. Viçoso, do Instituto Geográfico e Cadastral.

Delegados à Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências: Dr. Bento de Jesus Caraça, professor do I. S. C. E. F. e Dr. Carlos A. Fernandes Carvalho, chefe dos Serviços Actuariais do I. N. T.

Foi também aprovado um voto de agradecimento à imprensa, em especial, á *Gazeta de Matemática*, pelo interêsse manifestado com a actividade da S. P. M.

FACULDADE DE CIÊNCIAS DO PÔRTO — DOUTORAMENTOS

Por lamentável lapso não fizemos referência no n.º 21 da *Gazeta de Matemática* ao doutoramento do assistente da F. C. P., Manuel Paulo Barros. O acto teve lugar nos dias 24 e 25 de Novembro de 1944 na Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto. A tese apresentada intitulava-se «Registo fotográfico das observações meridianas» e foram argüentes os Profs. Doutor Victor Hugo D. de Lemos (Universidade de Lisboa) e Doutor Abílio Aires. Dos pontos «Movimentos rígidos com um ponto fixo; efeito giroscópio» e «Determinação das leis de probabilidade de uma variável aleatória» — foram argüentes os Profs. Doutor Rodrigo Sarmento de Beires e Doutor Abílio Aires.

MOVIMENTO MATEMÁTICO ESPANHOL

A «Gazeta de Matemática» apresenta aos seus leitores uma resenha informativa sôbre o movimento matemático em Barcelona relativo ao ano escolar 1943-44.

A notícia que publicamos é devida ao nosso colaborador em Barcelona, Prof. Dr. Francisco Sanvisens.

CURSOS COMPLEMENTARIOS DESARROLLADOS EN EL SEMINARIO MATEMATICO DE BARCELONA

Transformaciones birracionales, por el doctor D. Antonio Torroja

1. Sistemas lineales de curvas planas. — 2. Estudio de la transformación cuadrática en el plano. Elementos fundamentales. Casos limites. — 3. Transformada de una curva algébrica. Análisis de sus elementos singulares. Invariantes. — 4. Transformaciones birracionales en el plano. Elementos fundamentales. — 5. Transformada de una curva algébrica. — 6. Producto de transformaciones birracionales. Teorema de Clifford-Noether-Rosanes. — 7. Sistemas lineales de superficies. — 8. Transformaciones birra-

cionales en el espacio. Estudio de sus elementos fundamentales. — 9. Transformaciones birracionales particulares. — 10. Transformación cuadrática. — 11. Transformadas de una curva y de una superficie algébricas. Análisis de sus elementos singulares. — 12. Grupos de transformaciones birracionales.

Curso de Análisis superior, por el Prof. J. M. Orts

I — *Los teoremas de Picard.* — 1. Estudio de las correspondencias definidas por funciones holomorfas. 2. La homografia en el plano complejo y el principio elemental de simetria. — 3. El grupo modular y su dominio fundamental. — 4. El principio de simetria y la prolongación analítica. — 5. Estudio de la función modular. — 6. Los teoremas de Picard. — 7. Teoremas de Landau, Caratheodory y Schottky.

II — *Los conjuntos normales de funciones y el problema de la representación conforme.* — 1. Sucesiones convergentes de funciones. — 2. Sucesiones de funciones holomorfas. — 3. Propriedades de los conjuntos de funciones holomorfas. — 4. Conjuntos normales. — 5. Regiones lagunares o excepcionales. — 6. Conjuntos que admiten dos valores excepcionales. — 7. Los conjuntos normales y los teoremas de Picard. — 8. Conjuntos casi-normales de funciones holomorfas. — 9. Aplicación de los conjuntos normales al problema de la representación conforme.

Iniciación de la Mecánica atómica, por el Prof. Polit

1. Nociones de Dinámica analítica. — 2. Cuantización de movimentos periódicos con especial aplicación a los átomos hidrogenoides. — 3. Paso de la Mecánica clásica a la Mecánica ondulatoria. — 4. Ecuación de Schrödinger; aplicación a los átomos hidrogenoides. — 5. Métodos aproximados para la integración de la ecuación de Schrödinger.

Curso de Geometria superior, por el Prof. Botella Raduán

I — Geometría diferencial de una superficie. — Geometria diferencial de una curva. Fórmulas de Frenet. Primera y segunda fórmula fundamental de la geometría diferencial de una superficie. Teorema de Meussnier. Fórmula de Euler. Curvatura total y media. Líneas asintóticas y conjugadas. Direcciones principales. Líneas de curvatura. Sistema ortogonal triplemente infinito de superfícies. Teorema de Olinde-Rodrigues. Superfícies de curvatura constante. Superfícies de área mínima. Superfícies regladas. Desarrollables.

II — *Geometría intrínseca de una superficie.* — Coordenadas curvilíneas. Ecuaciones de Gauss y Codazzi. Fórmulas de Weingarten. Símbolos de Christoffel. Consideraciones sobre la aplicación de los resultados anteriores al estudio intrínseco. Vector respecto de la superficie, con sentido independiente del ambiente. Tensor. Tnsor fundamental. Vector diferencial con sentido intrínseco para la superficie. Derivación covariante. Paralelismo en la superficie. Desplazamiento de Levy-Civita. Geodésicas. Coordenadas geodésicas. Estudio de especiales sistemas de coordenadas. Estudio de relaciones vectoriales respecto de la superficie a través del paralelismo en el plano osculador. Consecuencias. Sentido intrínseco de la curvatura. Curvatura íntegra.

III — *Espacios a conexión afin y proyectiva.* — Generalización del estudio intrínseco de una superficie. Espacios de Riemann. Propriedades características. Espacios a conexión afín. Vector en el espacio. Paralelismo y equipolencia. Tensores. Sentido geométrico de un espacio a conexión afín en relación con el ambiente. Geodésicas. Coordenadas geodésicas. Estudio de espacios a conexión afin especiales que cumplen ciertas condiciones vectoriales deducidas de la consideración del paralelismo y equipolencia en el espacio osculador. Espacios a conexión afín métrica. Condiciones. Sentido geométrico del espacio-métrico en relación con el ambiente. Grupo de movimientos. El espacio de Riemann como caso particular del espacio métrico. Curvatura. Expresión analítica de la curvatura. Casos especiales. Espacios a conexión proyectiva.

IV — *Propiedades de los sistemas de coordenadas de un espacio.* — Equipolencia en un ciclo. Expresión analítica de la curvatura según el sistema de coordenadas.

Curvatura en un espacio de Riemann con discontinuidades de los componentes del tensor fundamental. Curvatura lineal, según Cartán. Una definición de curvatura superficial en sistemas especiales de coordenadas.

Curso de Mecánica celeste, por el Prof. D. Francisco Sanviséns

Tema: Figuras de equilibrio de una masa líquida en rotación.

CUESTIONARIO

I. — *Preliminares:* Teoría del potencial. Polinomios de Legendre. Funciones esféricas. Funciones de Lamé. Productos de Lamé. Funciones de Lamé de segunda especie.

II. — *Figuras de equilibrio de una masa homogénea en rotación:* Elipsoides de Maclaurin. Elipsoides de Jacobi. Figuras de equilibrio vecinas de los elipsoides de Maclaurin y de Jacobi. Trabajos de Poincaré y Liapounoff. Elipsoides de bifurcación. Estabilidad de las figuras de equilibrio. Equilibro de una masa líquida homogénea en rotación sometida a la tensión superficial.

III — Figuras de equilibrio de una masa heterogénea en rotación: Condiciones generales de equilibrio hidrodinámico. Evolución de las figuras de equilibrio. La figura de la Tierra. Problemas de Clairaut y de Poincaré. Cálculos en segunda aproximación.

Curso sobre Teoria de grupos y Algebra lineal, por el prof. D. Juan Augé Farreras

Ideas generales sobre teoría de conjuntos. Potencia, número cardinal, ordenación.

Teoría de grupos. Subgrupos, divisores normales, clases adjuntas. Isomorfismo y homomorfismo. Grupo factor.

Estruturas algebraicas: Anillos, campos de integridad, hemicuerpos, cuerpos, espacios vectoriales, sistemas hipercomplejos. Homomorfismos e isomorfismos. Ideales, clases de restos. Campo de polinomios.

Grupos con operadores. Series normales y series de composición. Producto directo.

Algebra lineal. Módulo de formas lineales. Matrices. Módulo con relación a un hemicuerpo. Ecuaciones lineales. Módulos en anillos euclídeos Divisores elementales de Weierstrass. Teorema fundamental sobre grupos abelianos. Forma normal para una matriz en um cuerpo conmutativo. Formas cuadráticas y hermitianas. Teoría general de la representación de grupos.

Escuela especial de ingenieros industriales

Por D. Damián Aragonés Puig, Ingeniero Industrial y Profesor titular de dicha Escuela, fué desarrolado un curso de seis conferencias sobre los seguientes temas: 1. Funciones de variable compleja. — 2. Derivación. — 3. Integración. — 4. Integral de Cauchy.—5. Desarrollo en serie.—6. Representación conforme.

Ingreso del Prof. Dr. D. José M. Orts Aracil en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

A mediados del curso pasado, tuvo lugar el ingreso en dicha corporatión, del Académico electo Dr. D. José M.ª Orts y Aracil, Profesor de Análisis matemático en la Universidad de Barcelona y Miembro del Consejo Superior de Investigaciones Cientificas.

El trabajo del recipiendario versó sobre el tema: «Convergencia de variables aleatorias» que constituye uno de los capítulos centrales de la moderna teoría de dichas variables, no solo en el orden puramente especulativo, sino también por sus repercusiones en los problemas de la física actual.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

Licenciaturas em ciências fisico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo — I.ª prova — Julho de 1944 — Ponto n.º 4.

1926 — Determine m de modo que a equação $(2m-1)x^2+2(1-m)x+3m=0$ tenha a soma dos quadrados das raízes igual a 4. R: *Designemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação. Pelo enunciado do problema é* $x_1^2+x_2^2=4$. *Por outro lado é* $x_1+x_2=-2(1-m):(2m-1)$ *e* $x_1x_2=3m:(2m-1)$. *Da igualdade* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, *deduz-se, por substituição, que,* $4(1-m)^2:(2m-1)^2-2\ 3m:(2m-1)=4$ *ou seja* $12m^2-7m=0$, *equação cujas raízes,* $m_1=0$ *e* $m_2=7/12$, *são as soluções do problema.*

1927 — Indique o número de soluções inteiras e positivas de cada uma das equações seguintes:
1.ª $2x-4y=7$; 2.ª, $2x-4y=6$. Justifique a resposta. R: *A primeira não tem soluções inteiras por os coeficientes das incógnitas admitirem um divisor comum que não divide o termo independente. A segunda tem uma infinidade de soluções inteiras e positivas porque, admitindo soluções inteiras, os coeficientes das incógnitas são de sinais contrários.*

1928 — Determine dois números ímpares consecutivos tais que a diferença dos seus quadrados seja 8.000. R: *Sejam* $2x-1$ *e* $2x+1$ *os dois inteiros ímpares consecutivos. Será, pelo enunciado,* $(2x+1)^2-(2x-1)^2=8000$ *ou* $8x=8000$ *e* $x=1000$, *e os inteiros são* 1999 *e* 2001.

1929 — Verifique a identidade $\operatorname{tg} a=\dfrac{\operatorname{tg} 2a}{1+\sec 2a}$
R: $\operatorname{tg} 2a:(1+\sec 2a)=(\operatorname{sen} 2a/\cos 2a):(1+1/\cos 2a)=\operatorname{sen} 2a:(1+\cos 2a)=2\operatorname{sen} a\cos a:(1+\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a)=2\operatorname{sen} a\cos a:2\cos^2 a=\operatorname{tg} a$.

1930 — Numa circunferência cujo diâmetro mede $35{,}43\,m$ está traçada uma corda cujo comprimento é $13{,}25\,m$. Calcule, por logarítmos, o ângulo que a corda faz com a semi-recta tirada de um dos seus extremos para o centro. R: *Como se sabe, se fôr* l *a corda,* R *o raio do círculo e* $\alpha/2$ *a medida de metade do arco que* *subtende a corda, é* $l=2R \operatorname{sen} \alpha\ 2$, *e como o ângulo pedido,* β, *é complementar da metade do ângulo ao centro correspondente ao arco* α, *será* $l=2R\cos\beta$. *No nosso caso teremos* $\log\cos\beta=\log l+\operatorname{colog} 2R=\log 13{,}25+$ $+\operatorname{colog} 3\ ,43=1{,}12222+\bar{2}{,}45063=\bar{1}{,}57285$ *e. portanto,* $\beta=68^{0}\,2''\,20''$.

1931 — Notando que $75=30+45$, calcule, sem recorrer às tábuas de logarítmos, os valores de $\operatorname{sen} 75^{o}$ e de $\cos 75^{o}$. R: *Como* $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ *e* $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$, *e como* $\operatorname{sen} 45^{o}=$ $=\cos 45^{o}=\sqrt{2}/2$ *e* $\operatorname{sen} 30^{o}=1/2$ *e* $\cos 30^{o}=\sqrt{3}/2$, *será* $\operatorname{sen} 75^{o}=\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2+\sqrt{2}/2\cdot 1/2=\sqrt{2}/4(\sqrt{3}+1)$ *e* $\cos 75^{o}=\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2-\sqrt{2}/2\cdot 1/2=\sqrt{2}/4(\sqrt{3}-1)$

1932 — Figure um quadrilatero convexo e as bissectrizes dos seus ângulos. Os pontos comuns às bissectrises dos ângulos consecutivos são os vértices de um novo quadrilátero. Demonstre que os ângulos opostos dêste segundo quadrilátero são suplementares. R: *Para que, como se diz no enunciado, se forme um novo quadrilátero, é necessário que o primitivo quadrilátero convexo não seja nem um quadradro nem um losango. Consideremos então o quadrilátero* [ABCD] *convexo nestas condições e seja* [A′ B′ C′ D′] *o novo quadrilátero. Consideremos o ângulo interno em* A′ *dêste último e o ângulo interno em* C′; *e sejam* α, β, γ *e* δ *os ângulos internos do quadrilátero* [ABCD]. *Do triângulo* [ABA′] *tira-se* $\hat{A}'=180^{o}-(\alpha+\beta):2$ *e do triângulo* [C′ DC], $\hat{C}'=180^{o}-(\gamma+\delta):2$ *e destas duas igualdades se conclue que* $\hat{A}+\hat{C}=360^{o}-(\alpha+\beta+\gamma+\delta):2$; *ora sendo* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^{o}$ *vem* $\hat{A}'+\hat{C}'=180^{o}$, c. q. d. *De modo análogo se demonstra que* $\hat{D}'+\hat{B}'=180^{o}$.

1933 — Determine o lugar geométrico dos meios das cordas que passam por um ponto A de uma circunferência de centro C. R: *Veja* Gazeta de Matetica, *n.º 2, pág. 5, problema n.º 130.*

Soluções dos n.ºs 1926 a 1933 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia — 1.ª prova escrita — 4 de Agosto de 1944 — Ponto n.º *2.*

1934 — Determine os números inteiros, de módulo superior a 4, tais que o seu quadrado seja menor que a diferença entre 21 e o seu quádruplo. R: *Os números a determinar têm de satisfazer, simultâneamente, às condições:* $|x|>4$ *e* $x^2<21-4x$. *A 2.ª inequação* $x^2+4x-21<0$ *ou* $(x-3)(x+7)<0$ *é satisfeita para* $-7<x<3$. *Atendendo a* $|x|>4$ *conclue-se que os únicos números inteiros que convêm são* -5 *e* -6.

1935 — Determine os valores de m e n para os quais a equação $6x^4-7x^3+mx^2+14x+n=0$ admita as raizes $x_1=-3$ e $x_2=2/3$. R: m *e* n *são solução do sistema de equações* $9m+n=-633$ *e* $4m+9n=-76$, *resultado da substituição na equação dada de* x *por* x_1, *e* x_2, *respectivamente. Resolvendo obtém-se* $m=-73$ *e* $n=24$.

1936 — Considere dois planos paralelos que determinam sôbre a superfície de uma esfera circunferências iguais com 8,5118 metros de diâmetro. Um diâmetro da esfera com os extremos situados sôbre os planos secantes faz com êstes um ângulo $\alpha=38^{o}\,27',8$. Determine a distância d entre os dois planos secantes. R: *Considerando uma secção meridiana deduz-se* $d=8{,}5118\cdot\operatorname{tg} 38^{o}\,27'\,48''$, *donde* $\log d=0{,}93002+$ $+\bar{1}{,}90004=0{,}83006$ *ou* $d=6{,}7617$ m.

1937 — Calcule $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ sendo $\operatorname{sen} x=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

R: *Tem-se* $\dfrac{2\operatorname{tg} x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ *donde* $ab\operatorname{tg}^2 x/2-$ $-(a^2+b^2)\operatorname{tg} x/2+ab=0$ *ou, supondo* $ab\neq 0$, $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1=0$, *equação cujas raízes são* a/b *e* b/a.

Observ. — Note-se que a função dada pode escrever-se, dividindo ambos os têrmos por a^2 ou b^2, sob as formas $\dfrac{2\,b/a}{1+(b/a)^2}$ *e* $\dfrac{2\,a/b}{1+(a/b)^2}$ e o resultado é então imediato.

1938 — Demonstre que o volume V de um cone circunscrito a uma esfera é igual ao produto da área total A do cone multiplicada pelo têrço do raio r da esfera. R: *Tem-se* $V=\pi R^2 H/3$ *e* $A=\pi R(G+R)=$ $=\pi R\left(\sqrt{H^2+R^2}+R\right)$ *designado por* H, G *e* R *as medidas da altura, geratriz e raio da base do cone. Duma secção meridiana deduz-se fàcilmente:*

$$\frac{r}{R}=\frac{H-r}{\sqrt{H^2+R^2}}=\frac{H}{R+\sqrt{H^2+R^2}} \quad ou \quad R+\sqrt{H^2+R^2}=\frac{HR}{r}.$$

Vem pois $A=\pi R^2 H/r$ *e* $V=\dfrac{\pi R^2 H}{r}\cdot\dfrac{r}{3}=A\cdot r/3$, c.q.p.

1939 — Demonstre que em todo o triângulo o ângulo compreendido entre uma altura e uma bissectriz interior tiradas de um mesmo vértice é igual à semi-diferença dos ângulos do triângulo relativos aos outros dois vértices. R: *Seja* [ABC] *o triângulo,* α *o ângulo formado pela bissectriz e altura relativas ao vértice* A, *por exemplo, e* E *o ponto de encontro da bissectriz com o lado* BC. *Dos triângulos* [ABE] *e* [AEC] *deduz-se:* $A/2+B+90^{o}+\alpha=180^{o}$ *e* $A/2+C+90^{o}-\alpha=180^{o}$ *donde* $C-B=2\alpha$, c. q. p.

Soluções dos n.ºs 1934 a 1939 de Manuel Zaluar.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º Exame de freqüência — 25 de Fevereiro de 1944.**

1940 — Seja S um sistema de n equações a n incógnitas, em cuja solução (única) x_1 é diferente de zero. Troquem-se ordenadamente os coeficientes de x_1 com os têrmos conhecidos. Que relações ligam a solução de S à de S'? R: *Seja*

$a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \cdots + a_i^h x_h + \cdots + a_i^n x_n = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$ *o sistema* S *e*

$b_i x_1 + a_i^2 x_2 + \cdots + a_i^h x_h + \cdots + a_i^n x_n = a_i^1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ *o sistema* S'. *A solução de* S *é*

$$x_h = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots a_1^{h-1}\, b_1\, a_1^{h+1} \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots a_n^{h-1}\, b_n\, a_n^{h+1} \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_h}{\Delta} \quad (h=1,2,\cdots,n)$$

com $\Delta = |a_i^k|$. *Para o sistema* S' *temos*

$$x_1' = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots a_1^h \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots a_n^h \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1\, a_1^2 \cdots a_1^h \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n\, a_n^2 \cdots a_n^h \cdots a_n^n \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{1}{x_1}; \quad \textit{e, em geral}$$

(*para* $h=2,3,\cdots n$)

$$x_h' = \frac{\begin{vmatrix} b_1\, a_1^2 \cdots a_1^{h-1}\, a_1^1\, a_1^{h+1} \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n\, a_n^2 \cdots a_n^{h-1}\, a_n^1\, a_n^{h+1} \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\Delta_1} =$$

$$= \frac{(-1)^{2h-3} \begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots a_1^{h-1}\, b_1\, a_1^{h+1} \cdots a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots a_n^{h-1}\, b_n\, a_n^{h+1} \cdots a_n^n \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= -\frac{\Delta_h}{\Delta_1} = -\frac{\Delta_h}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{\Delta_1} = -x_h \cdot \frac{1}{x_1}.$$

As soluções de S' *e* S *estão pois ligadas pelas relações* $x_1' = 1/x_1$; $x_h' = -x_h/x_1 \; (h \neq 1)$.

1941 — Determinar os números característicos da quádrica $u^2+3v^2-2x^2-2uv-2ux+2uy+2vx+2vy+4xy$. R: *Por ser nulo o seu discriminante, a quádrica é degenerescente. Tomando* $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$ *para determinante principal, os seus números característicos serão os da quádrica em que ela se converte pelo anulamento da variável não principal* y. *A cadeia de menores principais (completada com a unidade):* $\Delta_3 = -6$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $\Delta_1 = 1$; 1 *apresenta uma única variação de sinal e os números característicos serão* $q=1$, $p=2$, *isto é, a quádrica resolve-se numa soma de dois quadrados positivos e um negativo.*

1942 — Achar o ângulo do plano dos pontos $P(1,2,3)$, $Q(3,2,1)$ e $R(2,1,3)$ com a recta que passa pela origem e pelo meio do segmento PQ. R: *A equação do plano é* $x+y+z=6$ *e as da recta são* $x=y=z$ [*pois é definida pelos pontos* $(0,0,0)$ *e* $(2,2,2)$]. *o que mostra ser* 90º *o ângulo da recta com o plano (eixos coordenados rectangulares).*

1943 — Supondo A irracional, por que motivo $A \cdot \frac{1}{A} = 1$? R: *Porque* $A \cdot \frac{1}{A}$ *é fecho comum de duas secções, uma de números* $a_1 \cdot \frac{1}{a_2}$ *inferiores a* 1, *outra de números* $a_2 \cdot \frac{1}{a_1}$ *superiores a* 1.

1944 — Por que construção geométrica se transforma a figura F dos pontos z na figura F' dos pontos $z' = \frac{1}{z-a}$? R: *Obtida a figura dos pontos* $z'' = z - a$ *por uma translação paralela ao eixo dos* xx, *passa-se dum ponto* z'' *para o homólogo* z' *marcando sôbre um raio vector* OZ', *simétrico de* OZ'' *em relação a* OX, *um comprimento inverso de* $\overline{OZ}''$.

1945 — Desenvolver a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{bmatrix}.$$

$$\text{R:} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\;x+b\;y+c\;z \\ a'\;x+b'\;y+c'\;z \\ a''\;x+b''\;y+c''\;z \end{bmatrix}$$

e portanto
$$\begin{aligned} a\;x+b\;y+c\;z &= d \\ a'\;x+b'\;y+c'\;z &= d'\,. \\ a''\;x+b''\;y+c''\;z &= d'' \end{aligned}$$

1946 — Como se há-de formar o quadrado de um determinante para que fique com a matriz simétrica? Justifique a resposta. R: *Deve fazer-se a multiplicação por filas do mesmo nome. Com efeito,*

$$c_{hk}=\sum_{i=1}^{n} a_h^i\, a_k^i=\sum_{i=1}^{n} a_k^i\, a_h^i=c_{kh} \quad \textit{(por linhas)};$$

e $$c_{hk}=\sum_{i=1}^{n} a_i^h\, a_i^k=\sum_{i=1}^{n} a_i^k\, a_i^h=c_{kh} \quad \textit{(por colunas)}.$$

1947 — Defina determinante hemi-simétrico e enuncie algumas das suas propriedades. R: *Um determinante diz-se hemi-simétrico quando* $a_i^k=-a_k^i$, $a_i^i=0$.

1948 Que relações ligam os complementos algébricos de duas filas paralelas em determinante nulo? e qual a origem de tais relações? R: *São proporcionais, como resulta da igualdade*

$$\begin{vmatrix} A_i^1 & A_i^2 \\ A_j^1 & A_j^2 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} A_i^1 & A_i^3 \\ A_j^1 & A_j^3 \end{vmatrix}=0;\cdots;\ \begin{vmatrix} A_i^1 & A_i^n \\ A_j^1 & A_j^n \end{vmatrix}=0$$

cujos primeiros membros são menores de 2.ª ordem do adjunto de Δ *(suposto nulo).*

1949 — Que são quádricas equivalentes? e por que têm igual característica? R: *São aquelas que se convertem uma na outra por uma transformação linear. Têm igual característica porque, se fôr* Δ_μ *o determinante principal duma, terá de haver no discriminante da outra um menor não nulo de ordem* μ *e atendendo a que os papéis das duas são permutáveis.*

1950 — Que é equação normal de uma recta? e que significam os coeficientes de tal equação? R: *É a equação* $x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha=p$, *onde* p *é o comprimento e* α *o ângulo com* OX *do segmento da perpendicular baixada da origem para a recta.*

1951 — É a recta $x/A=y/B=z/C$ sempre ortogonal ao plano $Ax+By+Cz+D=0$? R: *Só em eixos rectângulares.*

1952 — Escrever a equação do plano definido pelo ponto $M(1,1,1)$ e pela recta $r\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$.
R: $x-2y+z=0$.

Soluções dos n.os 1940 a 1952 de F. Roldão Dias Agudo (aluno do 2. ano da F. C. L.)

I. S. C. E. F. — I.ª cadeira — I.º Exame de freqüência ordinário, Prova p ática, 3-2-944.

1953 — Dados $X=a+bi$ e $\bar{X}=a-bi$, calcular:

$$X^n+\bar{X}^n,\quad X^n\cdot\bar{X}^n,\quad \frac{X^n}{\bar{X}^n}+\frac{\bar{X}^n}{X^n},\quad X^n-\bar{X}^n \quad \text{e} \quad \frac{X^n+\bar{X}^n}{X^n-\bar{X}^n}$$

(n inteiro e positivo)

e mostrar que as três primeiras expressões são reais e as duas últimas imaginários puros. R: *Seja* $X^n=A+Bi$ e $\bar{X}^n=A-Bi$ *onde, como se sabe:*

$$A=a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4-\cdots$$

e

$$B=\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$$

então:

$$X^n+\bar{X}^n=A+Bi+A-Bi=2A$$
$$X^n\cdot\bar{X}^n=(A+Bi)(A-Bi)=A^2+B^2$$
$$\frac{X^n}{\bar{X}^n}+\frac{\bar{X}^n}{X^n}=\frac{A+Bi}{A-Bi}+\frac{A-Bi}{A+Bi}=\frac{2(A^2-B^2)}{A^2+B^2}$$
$$X^n-\bar{X}^n=A+Bi-(A-Bi)=2Bi$$
$$\frac{X^n+\bar{X}_n}{X^n-\bar{X}^n}=\frac{2A}{2Bi}=-\frac{A}{B}i.$$

1954 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} iz+(1+i)\,\omega=3+i & z=x+iy \\ (1+i)\,\bar{z}-(6+i)\,\bar{\omega}=4 & \omega=u+iv \end{cases}.$$

R: *Substituindo e simplificando:*

$$\begin{cases} -y+u-v+i\,(x+u+v)=3+i \\ x+y-6u-v+i\,(x-y-u+6v)=4 \end{cases}$$

que, por definição de igualdade para números complexos, se desdobra em:

$$\begin{cases} -y+u-v=3 \\ x+u+v=1 \\ x+y-6u-v=4 \\ x-y-u+6v=0 \end{cases}$$

que resolvido, fornece:

$$z=\frac{37}{15}-\frac{13}{15}i \quad \text{e} \quad \omega=-\frac{8}{15}-\frac{14}{15}i.$$

1955 — Estudar o sistema:

$$\begin{cases} u=x+y\,\mathrm{sen}\,\alpha+z\,\mathrm{sen}\,\beta \\ v=x\,\mathrm{sen}\,\alpha+y+z\,\mathrm{sen}\,\gamma \\ w=x\,\mathrm{sen}\,\beta+y\,\mathrm{sen}\,\gamma+z \end{cases}$$

onde α, β e γ são os ângulos interiores dum triângulo rectângulo. Podem exprimir-se x, y e z em funções lineares de u, v e w? Justificar a resposta. R: *Pode tomar-se* $\alpha=\pi/2$ *e* $\gamma=\pi/2-\beta$, *donde,* $\mathrm{sen}\,\alpha=1$ *e* $\mathrm{sen}\,\gamma=\cos\beta$ *e então o sistema pode escrever-se*

$$\begin{cases} x+y+z\,\mathrm{sen}\,\beta-u=0 \\ x+y+z\cos\beta-v=0 \\ x\,\mathrm{sen}\,\beta+y\cos\beta+z-w=0 \end{cases}$$

cuja matriz é:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{sen}\,\beta & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cos\beta & 0 & -1 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

onde o determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

mostra que o sistema é triplamente indeterminado.

x, y *e* z *podem exprimir-se linearmente em* u, v *e* w *se fôr diferente de zero o determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \operatorname{sen}\beta \\ 1 & 1 \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta\cos\beta & 1 \end{vmatrix}$$

o que se verifica se $\beta \neq \pi/4$, *isto é, se o triângulo não fôr isósceles.*

Soluções dos n.os 1953 a 1955 de J. Rémy T. Freire.

I. S. C. E. F. — I.ª cadeira — I.º Exame de freqüência ordinário. Prova teórica, 4-2-944.

1956 — A operação de divisão; seu estudo através dos vários campos numéricos; suas relações com o conceito de campo. ¿ É o conjunto

$$\cdots 1/2^n, \cdots, 1/2, 0, 1, 2, \cdots, 2^n, \cdots$$

um campo? ¿ É um domínio inteiro? Justifique as respostas.

1957 — Conceito de monotonicidade; sua importância na teoria dos números reais e na das funções.

1958 — A função $y = \operatorname{sen} 1/x$ é invertível no intervalo $(-\pi/4, \pi\ 4)$? e no intervalo $(\pi/4, \pi/2)$? Justifique as respostas.

1959 Seja no plano Oxy uma circunferência de centro na origem e raio 1 e o conjunto (E) dos números complexos $r+is$ com r e s racionais e tais que os seus afixos estão dentro dessa circunferência. Determinar os pontos de acumulação do conjunto (E).

I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — **I.ª Prova extraordinária, 15-2-944** — Exame prático.

1960 — Provar, a partir da fórmula de Moivre generalizada, que o produto das n determinações de $\sqrt[n]{\alpha}$ (α real ou complexo) é igual a $-\alpha$ ou a $+\alpha$ conforme n é par ou ímpar. R: *Seja* $\alpha = \rho(\cos\Theta + i \operatorname{sen}\Theta)$. *Portanto:*

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\Theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\Theta+2k\pi}{n}\right)$$
$$(k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

O produto P *das* n *determinações é:* $P = \rho(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ *com* $\beta = \sum_{k=0}^{n-1} (\Theta + 2k\pi)/n = \Theta + (n-1)\pi$. *Atendendo a que* $\cos[\Theta + (n-1)\pi] = (-1)^{n-1}\cos\Theta$ *e* $\operatorname{sen}[\Theta + (n-1)\pi] = (-1)^{n-1}\operatorname{sen}\Theta$, *tem-se:* $P = (-1)^{n-1}\cdot\alpha$, *como se pretendia.*

1961 — Determinar o complexo $z = x+iy$ de modo tal que $\dfrac{1+iz}{1+i\bar{z}} = 1+i$. R: *Efectuando as operações indicadas tem-se:* $x-2y-i(1+y)=0$ *ou* $x-2y=0$ *e* $1+y=0$, *donde* $x=-2$ *e* $y=-1$ *e, portanto,* $z=-2-i$.

1962 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y+4z+\ u=2 \\ -\ x+3z+2u=2 \\ 5x-2y-2z-3u=-2 \\ -4x+2y-\ z+\ u=0. \end{cases}$$

¿ Qual é o número máximo de valores nulos que pode aparecer numa solução? Justifique a resposta.
R: *A 2.ª equação obtem-se somando ordenadamente a 1.ª com a 4.ª, e a 3.ª obtem-se multiplicando a 1.ª equação por* -1, *a 4.ª por* -2 *e somando. O sistema proposto é pois equivalente a* $\begin{matrix} 3x-2y+4z+u=2 \\ -4x+2y-\ z+u=0 \end{matrix}$ *em que* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ *que resolvido dará:* $\begin{cases} x = 2u+3z-2 \\ y = (13z+7u-8)/2. \end{cases}$ *Não se trata dum sistema homogéneo o que exclui a possibilidade de figurarem 4 valores nulos numa solução. Como o sistema é duplamente indeterminado e atendendo a que nem* x *nem* y *estão expressos em funções lineares e homogéneas de* u *e* z, *só poderão aparecer dois valores nulos.*

Soluções dos n.os 1960 a 1962 de Orlando Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo — **I.º Exame de frequência — 1943-44** — Ponto n.º 1.

I

1963 — Calcular $I = \int x\cos^2 x\, dx$.

$R: I = \int x(\cos 2x + 1)/2 \cdot dx = x/4 \cdot \operatorname{sen} 2x + 1/8 \cdot \cos 2x + x^2/4 + C$.

1964 — Dada a equação $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$ mudar as variáveis independentes sendo $u = (y-e^x)/2$, $v = e^x$. R: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + e^{2x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

1965 — Determinar os máximos e mínimos de z definida pela equação $2z^4 + (y-1)^2 + 2(x-1)^2 - 2 = 0$. R:

Temos $x=1, y=1, z=\pm 1$ *e* $r=\mp 1/2, s=0, t=\mp 1/4$. *Para* $(1,1,1)$ *vem* $s^2-rt<0$ *e* $t<0$ — *máximo e para* $(1,1,-1)$ *vem* $s^2-rt<0$ *e* $t>0$ — *mínimo.*

II

1966 — Calcular $\int_2^\infty \frac{dx}{4x^2-5}$. R: $\frac{1}{4\sqrt{5}}\log\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}$.

1967 — Determinar o verdadeiro valor de $y=x^3\log x$ para $x=0$. R: $\lim_{x=0} y=0$.

1968 — Calcular $I=\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

R: $I=1/2 \,.\, \text{arc sen}\, a^2$.

Nota — O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios, um dos quais do grupo I.

F. C. P. — CÁLCULO — **1.º Exame de frequência — 1943-44** — Ponto n.º 2.

I

1969 — Calcular $I=\int \frac{4x^3+2x^2-x+1}{x(2x^2+1)(2x-1)}dx$.

R: $\frac{4x^3+2x^2-x+1}{x(2x^2+1)(2x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2x+1}{2x^2+1}+\frac{2}{2x-1}$

$I=-\log x+\frac{1}{2}\log(2x^2+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\sqrt{2}x+$

$+\log(2x-1)+C=\log\frac{(2x-1)\sqrt{2x^2+1}}{x}+$

$+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arc tg}\sqrt{2}x+C$.

1970 — Dada a equação $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-4=0$, mudar de variáveis, sendo $y=2z+3t$ e $x=e^t$, em que t é a nova variável dependente.

R: $\frac{dy}{dx}=e^{-t}\left(2\frac{dz}{dt}+3\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(2\frac{d^2z}{dt^2}-2\frac{dz}{dt}-3\right)$.

Substituindo vem: $\frac{d^2z}{dt^2}-2=0$.

1971 — Determinar os máximos e mínimos de y dado pela equação $y^3+3y^2-(x-2)^2(x+1)=0$.

R: $\begin{cases} y^3+3y^2-(x-2)^2(x+1)=0 \\ -2(x-2)(x+1)-(x-2)^2=0, \end{cases}$ *donde* $x=2, y=0$; $x=2, y=-3$; *e* $x=0, y=1$.

Derivando duas vezes a equação dada:

$-2(x+1)-4(x-2)+(6y+6)y'^2+(3y^2+6y)y''=0$.

Em $(2,0)$ *tem-se* $-6+6y'^2=0$ $y'=\pm 1$ *ponto duplo*

$(2,-3)$ $-6+9y''=0$ $y''>0$ *mínimo*

$(0,1)$ $6+9y''=0$ $y''<0$ *máximo*

II

1972 — Calcular $\int_0^{\sqrt{7/3}} \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$. R: $I=\pi\sqrt{3}/6$.

1973 — Determinar o verdadeiro valor de $y=\sqrt{4x^2+3x+1}-2x$ para $x=\infty$. R: $\lim_{x=\infty} y=3/4$.

1974 — Calcular $I=\int_{\pi/4}^{0} \text{cotg}^2 x\,dx$.

R: $I=1-a+\pi/4-\text{cotg}\, a$.

Nota — O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios, um dos quais do grupo I.

Soluções dos n.os 1963 a 1974 de J. Rios de Souza.

I. S. C. E. F. — 2.ª cadeira — 1.º Exame de freqüência — Fevereiro, 1944.

1975 — Mostrar que o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n+k}\right)e^{\frac{x}{n}}\right]$$

é absolutamente convergente, qualquer que seja x. [k é uma contante que não é um número inteiro negativo]. R: *O têrmo geral da série a estudar é:*

$$u_n=\left[\left(1-\frac{x}{n+k}\right)e^{\frac{x}{n}}-1\right]=\frac{2k\,x-x^2}{2n(n+k)}+T$$

em que T *representa os têrmos da ordem de* $\frac{1}{n^3}$.

(Desenvolveu-se em série $e^{\frac{x}{n}}$ *e efectuaram-se as operações). Por comparação, com a série de Derichlet,* $v_n=\frac{1}{n^2}$, *conclui-se que* (u_n) *converge absolutamente, qualquer qu seja* x, *o mesmo sucedendo ao produto infinito.*

1976 — Calcular o integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x^n)(2x^n-1)^{\frac{1}{2n}}}\ (n \text{ inteiro}).$$

R: *Fazendo* $x^n=t$ *virá:*

$$I=\frac{1}{n}\int\frac{t^{\frac{1-n}{n}-\frac{1}{2n}}}{(1-t)(2t-1)^{\frac{1}{2n}}}dt=\frac{1}{n}\int\left(\frac{t}{2t-1}\right)^{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{dt}{t(1-t)}$$

Fazendo agora: $\frac{t}{2t-1}=z^{2n}$ *ter-se-à* $I=2\int\frac{dz}{1-z^{2n}}$ *que é um integral duma função racional.*

1977 — Estudar a convergência do integral impróprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1-2 \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)^{1-a}}.$$

R: *Fazendo* $\operatorname{sen} x = u$, *tem-se:* $I = \int \frac{du}{(1-2u)\,u^{1-a}}$, *integral impróprio de Cauchy nos pontos* $u=0$ (*com* $a<1$) *e* $u=1/2$. *Por ser:*

$$\lim_{u \to 1/2} (u-1/2)^k \cdot \frac{1}{(1-2u)\,u^{1-a}} = \frac{-1}{2^a} \neq 0 \quad com \quad k=1,$$

o integral diverge.

Soluções dos n.os 1975 a 1977 de O. Morbey Rodrigues.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

43 — KENDALL, M. G. — **The Advanced Theory Of Statistics** — vol. I, pp. XII + 457 — Charles Griffin and Co., London, 1943. 42 s.

Será um verdadeiro prazer para qualquer estatístico matemático possuir um volume tão bem acabado como êste. Deve realmente felicitar-se o Sr. Kendall pela energia e firme preseverança necessárias à realização da sua pesada tarefa e insuflar-lhe ainda a inflexível energia que será necessária para escrever o segundo volume. Até à altura em que levou a cabo o seu trabalho, fêz certamente qualquer coisa para manter o crédito da Inglaterra no campo do ensino da matemática.

No prefácio o autor explica que a intenção original era escrever o livro em cooperação com outros quatro distintos estatísticos. Felicitemo-nos entretanto pelo afortunado facto de que a intervenção da guerra o obrigou a realizar o trabalho segundo o seu próprio plano e sem a ajuda e complicações resultantes de tal colaboração.

Nas muitas ocasiões em que tenho sido consultado sôbre a possibilidade e conveniência de publicar um trabalho em grande escala sôbre estatística matemática tenho frizado a circunstância desalentadora de que os progressos das recentes décadas têm sido tão revolucionários, não sòmente em relação aos métodos, mas também em relação aos pontos de vista sob os quais são encarados os problemas estatísticos, que qualquer exposição, contendo material esperado e aceitado pelos orientadores de uma geração anterior, corre o risco de em breve ser considerada obsoleta e sem finalidade. O Sr. Kendall rodeia esta dificuldade habilidosamente sem todavia a resolver completamente. Assim à primeira vista presta pelo menos respeito formal à velha convenção de expôr os métodos estatísticos subordinando-os aos títulos: medidas de posição, medidas de dispersão e finalmente, coroando o arco, medidas de correlação. Os últimos quatro dos dezasseis capítulos dêste volume são destinados a vários coeficientes de correlação, não totalmente, é verdade, no velho estilo porque os assuntos são tratados como uma competência matemática, baseada numa larga familiariedade com a literatura, muito para além de tudo prèviamente tentado, mas, é-se tentado a dizer, também para além do interêsse intrínseco ou utilidade prática dos métodos discutidos. Porque razão desejaria hoje qualquer pessoa calcular uma correlação ordenada ou um coeficiente de contingência?

O leitor moderno, por outro lado, gostaria de ver o Capítulo 10 sôbre as distribuïções exactas em amostras casuais mais completamente desenvolvido e uma exposição mais extensa e variada dos usos da distribuïção de χ^2, do que a dada no Capítulo 12. Em ambos os capítulos, cujos assuntos são da maior importância para o leitor especializado em estatística, o estudo é dificultado por uma introdução algébrica de complexidade completamente desnecessária. O tratamento negligente do χ^2 sugere que o Sr. Kendall não é imune à fraqueza dos autores sobrecarregados de trabalho, de desprezar as partes da matéria em que não estão particularmente interessados.

A mesma atitude perfunctória emerge a páginas 59 numa curta secção destinada ao cálculo dos momentos factoriais por adição sucessiva. O autor diz: «O uso do método na prática reside no facto de que para certas máquinas de calcular a adição progressiva é mais fácil de efectuar do que os processos envolvidos no método do Exemplo 3.1».

Entre estatísticos perfeitamente equipados com a maquinaria necessária, isto pode ser um tanto verdadeiro, embora seja com certeza depreciativo para um método qne substitui um grande número de multiplicações por igual número de adições. O trabalho poupado é evidentemente muito importante quando não se dispõe de máquina alguma, condição em que, mesmo o mais bem equipado de entre nós, é ocasionalmente obrigado a trabalhar. O método de abreviar ainda mais o processo somando a partir das extremidades para uma origem escolhida não é dado de modo que o leitor, a menos que possua informação independente, não está em posição de julgar da valia real do método.

A apresentação da parte puramente matemática é, falando de modo geral, cuidadosa, embora, como já foi sugerido, se usem às vezes demonstrações complicadas justamente onde, tendo em vista a utilidade geral do livro, deviam ser evitadas. Dois pontos de somenos importância e um de grande importância são talvez dignos da atenção do autor com vista às edições subseqüentes.

Dizer, como a páginas 53, que «O momento de ordem $2r$ em relação à média, se existe, é dado por» uma certa expressão, não é lògicamente o mesmo que dizer que é definido pela expressão e portanto existe se esta tem um significado. A forma da afirmação de Kendall sugere, contràriamente suponho eu às suas intenções, que há uma outra condição necessária para a existência do momento.

Nos exemplos 3. 7 (p. 59) e 3. 8 (p. 66) os símbolos μ e ν apropriados à população são aplicados a estimativas derivadas de uma amostra. É verdade que a amostra é grande, visto dar as alturas de mais de 8000 homens, e portanto os êrros de amostragem casual serão diminutos, mas é apesar de tudo uma pena lançar o estudante na confusão, nesta altura do livro, confundindo uma distinção que mais tarde requererá tôda a sua atenção. Os outros exemplos 3 . 9—3 . 11 são convenientemente aplicados a distribuições.

O Sr. Kendall revela muito interêsse pela álgebra um tanto formidável das funções simétricas usadas em estatística matemática. Assim as fórmulas para transformar os momentos em cumulantes e vice-versa são dadas completas até à décima ordem a páginas 61-64 e, noutras partes do livro, atribui-se uma boa parte do espaço a demonstrações que estabelecem relações semelhantes. Na minha opinião a introdução a todo o trabalho desta espécie é grandemente facilitada para a maioria dos estatísticos por uma consideração preliminar da natureza das partições e da notação e terminologia apropriadas. Enquanto no Capítulo 3, sôbre momentos e cumulantes, parece evitar-se cuidadosamente mencionar o que se entende por partições, o leitor no Cap. 11, no qual se desenvolvem métodos de análise mais compreensivos, é confrontado sem aviso ou preparação com as noções de (*a*) partições (*b*) partições de números multipartidos (*c*) separações de partições, como idéias essenciais a cada uma das difíceis etapas do raciocínio. O facto é que alguns estatísticos pensam em partições e em termos da notação correspondente enquanto outros não procedem assim. Êstes não serão auxiliados mas apenas intrigados pela maneira como se introduzem aqui as idéias.

Cada capítulo é seguido por uma série de exercícios alguns dos quais excepcionalmente bons. Certos exemplos no texto são igualmente difíceis para o leitor ancioso de compreender a solução. Assim no exemplo 7 . 2 emprega-se o raciocínio seguinte para demonstrar a fórmula recorrente que dá muito elegantemente as séries de sub-factoriais desenvolvida por Euler no problema do jôgo do *Rencontre*: «Suponhamos que u_n é o número de maneiras em que tôdas as letras vão mal. Consideremos duas letras quaisquer. Se cada uma destas ocupar o envelope da outra o número de maneiras em que as restantes $n-2$ letras podem ir mal é u_{n-2} ; e há $n-1$ maneiras segundo as quais duas letras podem ser trocadas. Mas se uma letra ocupa o lugar de uma outra e não vice-versa, o que pode acontecer de $n-1$ maneiras, há u_{n-1} maneiras segundo as quais as outras podem ir mal». Não tenho feito a experiência em larga escala, mas julgo que muito poucos matemáticos, não familiarizados com êste tipo particular de raciocínio, seriam capazes de ver, a partir desta forma de expôr, donde vêm na realidade os dois factores $(n-1)$.

(de R. A. Fisher em «Nature», vol. CLI, 1943 —Trad. de F. A. C. Araújo)

44 — MATHER, Dr. K. — **Statistical Analysis in Biology** — Methuen and Co., London, 1943.

O livro do Dr. Mather abre com a afirmação, digna de notar-se, que «a estatística é a matemática da experimentação». Ora, de facto, a estatística teve a sua orígem no domínio da demografia e da economia, onde a experimentação é difícil, perigosa, e raramente científica ; e entre os domínios em que a sua aplicação logrou êxito encontra-se a astronomia onde a experimentação é completamente impossível. Talvez seja esta a razão por que o Dr. Mather esquece completamente as tábuas da mortalidade, e estas não são só fundamentais para a biologia humana mas estão também tomando uma importância crescente na biologia animal. Não há ali qualquer sugestão para o tratamento da estatística da fertilidade, como é feito na obra de Salisbury «A capacidade reprodutiva das plantas». Todavia, qualquer teoria da evolução deve basear-se em dados como êstes.

Na sua análise matemática, «O conceito fundamental de estatística» — afirma o Dr. Mather — «é o de população hipotética infinitamente grande, da qual constitui uma amostra o conjunto dos dados observados». Decerto que a estatística teórica deve construir-se sôbre êste conceito. Mas também o pode ser sôbre o de variável casual ou o de probabilidade de acôrdo com axiomas como os de Jeffreys. Muitos escritores, consideram uma, ou ambas, destas últimas aproximações lògicamente sólidas, quanto mais não seja por não necessitarem do conceito de verosimilhança, que não é derivável do de população infinita.

O campo abrangido pelo Dr. Mather, é o, já em grande parte, considerado pelo Prof. R. A. Fisher em «Statistical Methods for Biologists» e «The Design of Experiments» e o que se deve a Fisher é óbvia e completamente reconhecido. Comparado com êstes livros o do Dr. Mather dá um apanhado mais completo de alguns métodos aritméticos. A sua discussão das interrelações da variável normal, χ^2, distribuïção de Student, e a de z, é esclarecedora, bem como a sua detalhada partição dos graus de liberdade.

Mas, como se poderia talvez esperar dos primeiros parágrafos, os métodos seguidos pelo Autor são, algumas vezes, lògicamente incorrectos. Assim, depois de calcular para χ^2 o valor 1,17 duma tabela de contingência 2×2, a págs. 193, acrescenta que tal mostra «não existir interacção entre as classificações, isto é, que o tipo de água não afecta a germinação». Ora tal não prova nada disto. O que simplesmente mostra é que se a água lodosa provoca melhor germinação, ou inversamente, um ensaio com uma centena de sementes é inadequado para comprovar o facto. É, porém, inteiramente possível que um ensaio com alguns milhares de sementes mostrasse 15 % mais de germinação com água lodosa do que com água das chuvas. Talvez que se o Autor estivesse acostumado a pensar em termos de probabilidade de preferência aos de população infinita não tivesse cometido êste elementar êrro de interpretação. É muitas vezes tão importante compreender o que a estatística não prova como o que prova.

No todo, o desenvolvimento de Fisher é não só mais lógico nos livros indicados do que no do Dr. Mather, mas é também provàvelmente mais inteligível para um principiante. No entanto, Mather esclareceu um grande número de pontos que Fisher tratava bastante ràpidamente, quando os tratava.

O livro ideal sôbre métodos estatísticos para os biólogos ainda não foi escrito e talvez nunca o seja. Mas vale a pena especular sôbre o seu conteúdo. Incluiria a prova matemática de todos os métodos usados. É perfeitamente verdade que a maioria dos estudantes de biologia deseja possuir métodos estatísticos para os utilizar como faz com os microscópios. Mas os que possuem espírito científico em mais larga escala insistirão, certamente, na compreensão da aberração cromática, por um lado, e na das distribuïções de freqüência assimétricas, por outro. Na realidade, a matemática necessária poude ser condensada num espaço mais reduzido do que poderíamos supor.

Em segundo lugar trataria da história da biometria que tem algumas relações com a sua presente situação. Há quarenta anos um espectador da controvérsia entre Bateson e Pearson poderia ter dito: «Eu não sei quem tem razão, mas o que é certo é que ambos não a podem ter». Na realidade, ambos tinham, em grande parte, razão. Hoje os pontos de vista de certos estatísticos parecem ser completamente irreconciliáveis. Uma retrospectiva histórica mostra que todos podem ter interêsse. Assim, Neymann e Pearson, Fisher e Jeffreys, usam diferentes critérios de significância, cada um defendendo o seu próprio ponto de vista com considerável fôrça. Têm principalmente tratado de problemas que dizem respeito a produtos industriais, organismos vivos e tremores de terra, e cada um escolheu o melhor método no seu campo; êstes métodos, porém, podem ter algum valor fora daqueles campos.

Em 3.º lugar, trataria de tôdas as importantes aplicações da estatística à biologia. Um rápido apanhado mostraria como a estatística tem sido aplicada por forma desigual. Assim, por óbvias razões de economia, a preparação das tábuas de vida baseia-se numa técnica muito complexa e meticulosa enquanto que a das curvas de crescimento está numa fase embrionária.

O livro que analisamos não satisfaz a nenhuma destas condições nem se vê manifesta tal pretensão. São dadas as fórmulas das principais distribuïções teóricas de maneira alguma mais compreensivas pelo facto de conterem factoriais de fracções, cujo significado em parte alguma é explicado; e a afirmação a págs. 35 de que «os momentos de ordem maior do que 2 não são freqüentemente utilizados» ainda que verdadeira, sugere apenas que a biometria está numa fase um tanto decadente. A suposição de que qualquer distribuïção pode ser tratada como normal conduziu, recentemente, a sérios êrros, em especial na comparação das taxas de mutação e na descoberta do ligamento.

O Dr. Mather procura estar a par das mais recentes idéias. O coeficiente de correlação — afirma êle — ocupou um lugar muito importante em estatística mas o seu emprêgo está em gradual declínio, visto o método de regressão conduzir sempre a uma solução ou igualmente boa ou freqüentemente melhor. Não há dúvida que em casos individuais os coeficientes de regressão nos dizem um pouco mais do que os coeficientes de correlação, mas não nos permitem comparar as relações das diferentes variáveis casuais; por exemplo não nos permitem decidir qual dos casos é melhor, se predizer o pêso do cérebro a partir do pêso do corpo, se a partir do perímetro craniano. Também são essenciais ao estudo da hereditariedade, não só de acôrdo com os métodos de Pearson, mas também com os de Sewall Wright, que são inteiramente aplicáveis aos casos mendelianos. Quanto mais extensa fôr a generalização mais marcada é a superioridade da correlação em relação à regressão. Estas opiniões podem explicar-se pelo limitado campo de que o Dr. Mather tira os exemplos. Encontra-se por exemplo forte variação assimétrica nas distribuïções de pêsos, tolerância às drogas, esperança de vida, e fertilidades, mas estas não são consideradas.

Feitos todos estes reparos, o livro — podemos afirmá-lo — será de valor para grande número de biólogos. As tabelas do fim são muito sucintas e suficientes em muitos casos. O tratamento é muitas vezes mais detalhado do que em outro livro semelhante. Há finalmente uma grande probabilidade de que um investigador encontre aqui, e em mais nenhuma outra parte, uma pormenorizada descrição do método apropriado ao respectivo problema particular. Mas justamente porque «Statistical Analysis in Biology» preenche uma lacuna é essencial apontar as suas limitações reais.

(De J. B. S. Haldane em «Nature», Vol. CLI. n.º 3841 — 1943, Junho 2 — Trad. de M. Zaluar)

PERIÓDICOS CIENTÍFICOS RECEBIDOS

NACIONAIS

Portugaliae Physica — Vol. 1, Fasc. 3 — J. Palacios et L. Lozano Calvo — *L'aimantation du nickel par compression unilatérale.* — Guido Beck — *Remarque sur la notion du champ électromagnétique dans la théorie de Dirac.* — G. Dedebant et Ph. Wehrlé — *Mécanique aléatoire* - 1ère partie : *Le calcul aléatoire.* — Marieta da Silveira — *Sur l'absorption du rayonnement* γ *émis par l'uranium* I *et leur descendants immédiats.* — Carlos A. C. Braga — *Étude de la transmutation* Ra D → Ra E *par spectrographie magnétique du rayonnement* β *de conversion interne.*

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral:

Caderno n.º 12 — *Topologia Geral — Conjuntos Compactos* — por A. Pereira Gomes.

ESTRANGEIROS

Argentina

Boletin Matematico — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matematica — Ano XVII, n.os 6 e 7—1944.

Espanha

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones Tomo IV, n.º 46, Dezembro de 1944 e Tomo V, n.os 47 e 48, Janeiro e Fevereiro de 1945.

Inglaterra

The Quarterly Journal of Mathematics — Oxford Series — Vol. 15, n.os 59-60, Setembro-Dezembro, 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do «Instituto Britânico em Portugal».

OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Afinidades — (Lisboa) — Revista de Cultura Luso-Francesa — n.os 9/10, 1944.

Agros — (Lisboa) — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XVII, n.os 1 e 2, 1944.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.os 151, Dezembro de 1944, 152 e 153, Janeiro e Fevereiro de 1945.

Álgebra Prática *(Exercícios)* 6.º ano — Américo Areal — Editora Educação Nacional, Lda — Pôrto, 1945.

Círculos que se perspectivam em círculos - Augusto Queiroz e Jayme Ríos de Souza — Separata dos «Anais da Faculdade de Ciências do Pôrto» — Pôrto, 1944.

Conceitos Fundamentais de Matemática — Bento de Jesus Caraça — Biblioteca Cosmos, n.os 2 e 18 — Lisboa, 1942.

Multiplicações vectoriais, associativas e modulares — Representações geométricas — (Dissertação para o doutoramento em Ciências Matemáticas, na Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto) — Manuel Gonçalves Miranda — Pôrto, 1944.

Obras oferecidas pelo «British Council»:

Craftsmanship in the Teaching of Elementary Mathematics — F. W. Westaway — Blackie & Son, Ltd. — London, 1943.

Studies in Arithmetic — Vols. ~~I e~~ II — (The Scottish Council for Research in Education n.os 13 e 18) — University of London Press, Ltd—London, 1939 ; 1941.

Teaching the Essentials of Arithmetic — P. B. Ballard — University of London Press, Ltd — London, 1941.

The Essentials of Arithmetic — A manual for teachers — Robert Walker — George G. Harrap & Co., Ltd. London, 1933.

The Theaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School — American Teachers Series — J. W. A. Young — Longmans, Creen and Co. New-York — London, 1937.

The Teaching of Geometry in Schools — A report prepared for the Mathematical Association — London, 1944.

Senior School Mathematics — Board of Education, Educational Pamphlets, N.º 101 — London, 1935.

NÃO É PAGO ANÚNCIO ALGUM DESTE NÚMERO