

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VI

N.º 24

MAIO-1945

## SUMÁRIO

- Álgebras em involução, por *A. de Mira Fernandes*  
Astronomia  
Causas das irregularidades do movimento de rotação da Terra,  
por *António Perestrello Botelho*  
Estatística Matemática  
Um problema histórico, por *Fernando de Carvalho Araújo*  
Antologia  
Palestras sobre a Investigação Científica promovidas pela «Junta  
de Investigação Matemática»:  
A Investigação Científica nas ciências sociais,  
por *Fernando Pinto Loureiro*  
A Investigação Científica em Biologia e sua importância prática,  
por *José Antunes Serra*  
Características que permitem reconhecer que una Universidad  
es de primera clase, por *Bernardo A. Houssay*  
Pedagogia  
Novo Parágrafo, por *Nicodemos Pereira*  
Proposições Matemáticas, por *A. Lobo Vilela*  
Notícia sobre o ensino de Matemática em Zürich,  
por *Maria do Pilar Ribeiro*  
Movimento Matemático  
Movimento matemático espanhol — Sociedade Portuguesa  
de Matemática  
Matemáticas Elementares  
Pontos de exames de aptidão às Escolas Superiores (1944)  
Matemáticas Superiores  
Pontos de exames de frequência  
Boletim Bibliográfico — Publicações recebidas

NÚMERO AVULSO: ESC. 10\$00

---

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA



# GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO

*J. da Silva Paulo*

ADMINISTRADOR

*Orlando M. Rodrigues*

TESOUREIRO

*J. de Oliveira Campos*

## REDACÇÃO

Redactor principal

*Manuel Zaluar*

### RESPONSÁVEIS DE SECÇÕES:

PEDAGOGIA	Bento J. Caraça
ASTRONOMIA	Manuel Peres Júnior
ESTATÍSTICA MATEMÁTICA	W. L. Stevens
MATEMÁTICAS ELEMENTARES	António A. Lopes, J. Calado, J. J. Rodrigues dos Santos, J. da Silva Paulo
MATEMÁTICAS SUPERIORES	A. Pereira Gomes, L. G. Albuquerque
PROBLEMAS	A. Ferreira de Macedo, M. Alenquer

### OUTROS COMPONENTES:

EM LISBOA	F. Carvalho Araújo, J. Rémy Freire, Luís Passos, R. Quaresma Rosa.
PORTO	A. Almeida Costa, J. Delgado d'Oliveira, J. Rios de Souza, L. Neves Real, Ruy Luís Gomes
BARCELONA	Francisco Sanvisens
LOURENÇO MARQUES	José H. Arandes
MADRID	Sixto Rios Garcia
ROMA	J. Ribeiro de Albuquerque, J. Sebastião e Silva, V. Barroso
RIO DE JANEIRO	António A. Monteiro
ZÜRICH	A. Sá da Costa, Hugo B. Ribeiro, Maria do Pilar Ribeiro

COOPERADORES: *A. Marques de Carvalho, C. A. Gonçalves Gomes, C. M. Cencela, F. Roldão Dias Agudo e J. Marujo Lopes*

CORRESPONDÊNCIA PARA Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º eq. — Lisboa

### PUBLICAÇÕES RECENTES:

PORTUGALIAE PHYSICA — Vol. 1 - Fasc. 3

CADERNOS DE ANÁLISE GERAL (Junta de Investigação Matemática)  
N.º 12—Topologia geral - 6. *Conjuntos Compactos*, por A. Pereira Gomes

### NO PRELO:

PORTUGALIAE MATHEMATICA — Vol. 4 - Fasc. 4.



## ÁLGEBRAS EM INVOLUÇÃO \*

por A. de Mira Fernandes

1. — Tõda a involução duma álgebra com elemento unidade, cujo corpo fundamental é o dos números reais, gosa da seguinte propriedade:

Todo o elemento  $a$  admite a decomposição  $a = a' + a''$ , sendo  $a' = \frac{a + J(a)}{2}$  simétrico e  $a'' = \frac{a - J(a)}{2}$  anti-simétrico.

Com efeito,

$$J(a') = 1/2 \cdot \{ J(a) + J[J(a)] \} = 1/2 \cdot [J(a) + a] = a'$$

$$J(a'') = 1/2 \cdot \{ J(a) - J[J(a)] \} = 1/2 \cdot [J(a) - a] = -1/2 \cdot (-2a'') = -a''.$$

Se a álgebra é de ordem  $n$  e  $(u, e'_2, e'_3, \dots, e'_n)$  uma base, seja  $e'_i = \bar{e}_i + e_i$ , onde  $\bar{e}_i$  é a parte simétrica e  $e_i$  a parte antisimétrica de  $e'_i$ . Para qualquer elemento  $a$ , será  $a = \alpha_1 u + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n = (\alpha_1 u + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n) + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ .

Se os únicos elementos simétricos são os do corpo  $(\lambda u)$ , será  $\bar{a} = \alpha_1 u + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \alpha_0 u$  a parte simétrica de  $a$ ; e

$$(1) \quad a = \alpha_0 u + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

sendo  $e_2 \dots e_n$  antisimétricos.

Como se trata duma álgebra de ordem  $n$  e (1) se verifica para qualquer  $a$ , nenhum dos elementos  $e_i$  será nulo. Isto é, nenhum dos elementos  $e_i$  da base inicial será simétrico (o que era evidente à priori).

Como  $J(a) = \alpha_0 u - \alpha_2 e_2 - \dots - \alpha_n e_n$  seguem-se tôdas as considerações geométricas da Nota anterior do Prof. Ruy Luis Gomes.

No caso geral,  $a = \bar{a} + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$  e

$$J(a) = \bar{a} - \alpha_2 e_2 - \dots - \alpha_n e_n.$$

Mas agora, alguns dos  $e_i$  podem ser nulos: os que correspondem aos  $e'_i$  que são simétricos, sem pertencerem ao corpo  $(\lambda u)$ . E então a involução é ainda uma simetria, mas em relação ao hiperplano-imagem do sistema dos elementos da base que são simétricos.

Note-se que os  $e'_i$  não podem ser todos simétricos sem que a involução seja a identidade. Mas podem

ser todos anti-simétricos, porque lá está o  $u$  (simétrico) para o impedir.

2. — Numa álgebra linear  $\mathfrak{A}$ , com elemento unidade  $(u)$ , no corpo fundamental dos números reais, seja  $e'_1 = u, e'_2, \dots, e'_n$  uma base. Seja  $J$  uma involução.

Seja  $e'_i = \bar{e}_i + e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) onde  $\bar{e}_i$  é a parte simétrica e  $e_i$  a parte antisimétrica do elemento  $e'_i$  em relação a  $J$ . Evidentemente, cada um dos elementos  $e_i$  é linearmente independente dos  $\bar{e}_i$ ; e cada um dos  $\bar{e}_i$ , linearmente independente dos  $e_i$ .

Entre os elementos  $\bar{e}_i$  (pelo menos um  $(e_1 = u)$  não é nulo) haverá  $p$  linearmente independentes. Representemo-los por  $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_p$ .

Entre os elementos  $e_i$  (pelo menos um não é nulo, senão a involução era uma identidade), haverá  $q$  linearmente independentes. Representemo-los por  $g_1, g_2, \dots, g_q$ .

Será, manifestamente,  $p + q = n$ . Para qualquer elemento  $a$  será

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^p \gamma_i \bar{g}_i + \sum_{i=1}^q \lambda_i g_i.$$

Os elementos  $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_p, g_1, g_2, \dots, g_q$  ( $p + q = n$ ) formam uma base, em que todos os elementos são *simples*: isto é, ou simétricos ou antisimétricos. Chamar-lhe-emos uma *base normal*, em relação a  $J$ .

Se  $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_{p'}, h_1, h_2, \dots, h_{q'}$  ( $p' + q' = n$ ) fôr outra base normal, devendo ser

$$\bar{h}_k = \sum_{i=1}^p \delta_{ik} \bar{g}_i \quad (k = 1, 2, \dots, p')$$

e

$$\bar{g}_k = \sum_{i=1}^{p'} \mu_{ik} \bar{h}_i, \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

é evidentemente  $p = p'$  (e portanto,  $q = q'$ ). Isto é, duas bases normais duma álgebra linear, em relação à mesma involução  $J$ , têm o mesmo número de elementos simétricos e o mesmo número de elementos anti-simétricos (*Lei de inércia*). O hiperplano dos elementos simétricos é de simetria em relação a  $J$ .

\* Duas Notas enviadas à Redacção pelo Prof. Ruy Luis Gomes para publicação.



# ASTRONOMIA

## CAUSAS DAS IRREGULARIDADES DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DA TERRA \*

por António Perestrello Botelho

Com uma velocidade de cêrca de 600 quilómetros por segundo tóda a Galáxia, na qual se encontra integrada a Terra, se dirige para um ponto da constelação do Capricórnio. Êste movimento, há poucos anos descoberto (1916), é um dos catorze de que a Terra está animada; os restantes ou são comuns a todo o nosso sistema solar ou são próprios dela. Entre êstes últimos, o de rotação oferece para nós um interêsse particular por ser o «padrão» da nossa medida de tempo.

Durante muitos anos foi o movimento de rotação da Terra considerado um movimento uniforme, e Laplace chegou a dizer que, sôbre essa uniformidade, repousava tóda a Astronomia.

Mais tarde reconheceu-se que as marés oceânicas actuam como um «freio» originando um atrazo constante dêste movimento e que, além disso, êle está sujeito a irregularidades imprevisíveis, possivelmente dotadas de um carácter de periodicidade. De facto, nos anos de 1788 e 1898 houve modificações bruscas na rotação da Terra, cataclismos que provocaram «saltos» na sua marcha.

Quais serão as causas que determinam estas variações da marcha do nosso relógio fundamental?

Não possuímos ainda hoje elementos bastantes que nos habilitem a responder satisfatoriamente a esta pergunta; é possível, no entanto, limitar o campo das investigações facilitando, desta maneira, a resolução do problema.

Com efeito, a causa perturbadora pode ter uma origem externa, isto é, pode residir noutro ou noutros planetas, ou pode situar-se na própria Terra. Nesta última hipótese teremos ainda de ver se a séde da perturbação está no interior ou à superfície do planeta em que habitamos.

*Causas externas* — A Mecânica ensina-nos que a velocidade de rotação de um corpo é inversamente proporcional à massa dêsse corpo, quer dizer, qualquer acréscimo da massa implicará um atrazo no movimento.

Assim, se a massa da Terra aumentar, será num tempo mais longo que ela efectuará o seu movimento de rotação.

A massa da Terra é aproximadamente representada, em toneladas, pelo algarismo seis seguido de vinte e um

zeros. Ora todos os dias milhares de estrêlas cadentes atravessam a nossa atmosfera, com velocidades que chegam a atingir 70 quilómetros por segundo, aumentando dêste modo a massa da Terra. Atribuindo a cada meteoro o pêso médio de cinco gramas o acréscimo diário que resulta para a massa da Terra é de 100 toneladas. Para se fazer idéia de quanto é pequeno êste aumento basta dizer-se que, neste ritmo, cêrca de 400 milhões de anos seriam necessários para que o raio soffresse uma variação de um centímetro. Assim, o atrazo originado por êste efeito é mínimo: êle não atingiria um milésimo de segundo passado um milhão de anos.

Vejam agora se o atrito das marés oceânicas poderá provocar os «saltos» verificados na marcha da Terra.

Para avaliarmos bem a acção dêste atrito temos de considerar uma grandeza de importantes applicações em Astronomia e que se chama o «momento angular». Para um corpo no espaço o momento angular é representado pelo produto de quatro quantidades: a massa, a velocidade angular, o quadrado do raio e uma constante que depende da maneira como a massa está distribuída no interior do corpo.

O cálculo prova que o momento angular de um corpo é indestrutível; se considerarmos um sistema de corpos, a soma dos respectivos momentos angulares é invariável, quer dizer, se o momento angular de um ou mais corpos aumentar pela acção doutro corpo, a reacção dos primeiros sôbre o segundo faz com que o momento angular dêste diminua de uma quantidade igual. É o «princípio da conservação do momento angular».

Como a velocidade de rotação da Terra está diminuindo por efeito do atrito das marés deluz-se que o seu momento angular, que é função da mesma velocidade, diminui também. Pelo princípio acima enunciado haverá uma transferência de momento angular para o nosso satélite do qual resulta uma ampliação da sua órbita. A Lua afastar-se-há da Terra, o período de uma revolução na órbita — o mês — será maior. Sucede, contudo, que essa transferência não pode explicar as irregularidades do movimento de rotação da Terra pois mesmo que tomemos na sua totalidade o efeito do atrito das marés êle é ainda muito inferior às variações observadas.

\* Veja o N.º 19 da «Gazeta de Matemática».



Não podendo o aumento da massa da Terra nem a alteração que sofre o seu momento angular justificar o que pretendemos, resta-nos ver se haverá alguma outra causa externa que possa alterar o arranjo, a distribuição das massas.

A acção conjunta do Sol e da Lua, que é a causa das marés, é a única força externa susceptível de o fazer. Acontece, todavia, que esta força actua de uma maneira contínua e perfeitamente regular, o que contrasta singularmente com a grande irregularidade do efeito que estudamos.

Dêste modo, somos conduzidos a pôr de parte a primeira hipótese que admitimos: a causa das variações irregulares da rotação da Terra não é externa.

*Causas de superfície* — Analisemos em seguida as causas a que chamaremos «de superfície»: haverá algum agente meteorológico capaz de remover massas bastantes que justifiquem as irregularidades da nossa rotação? Poderão elas atribuir-se a fenómenos vulcânicos?

Inúmeras são as investigações que neste sentido se têm realizado e todas elas têm conduzido a resultados negativos.

Laplace mostrou que a massa da nossa atmosfera é pequena demais para que os seus movimentos tenham algum efeito.

A acumulação dos gélos nos polos foi objecto de numerosos cálculos: todos eles mostram que se fôsse esta a causa dos «saltos» da rotação terrestre ter-se-ia dado, por ocasião do máximo de 1898, uma subida do nível médio dos mares superior a trinta centímetros, o que não se verificou.

Por outro lado, de Sitter calculou que mesmo que se conseguisse transportar para os polos todo o volume de terras que constituem o Himalaia e o Kuen-Lun apenas se atingiria uma fração do efeito considerado.

As acções vulcânicas igualmente foram estudadas: massas consideráveis são deslocadas pela acção dos vulcões e em pouco tempo o relêvo pode ser completamente modificado. Em menos de um mês elevou-se num vale do México, no século XVIII, o vulcão de Jorullo com 500 metros de altura. O Krakatoa, nas ilhas Hawaï, expeliu em pouco tempo 18 quilómetros cúbicos de detritos.

Podíamos repetir os exemplos em que grandes quantidades de massa são arrastadas por fenómenos de vulcanismo. Admitindo um vulcão situado nas condições mais desfavoráveis, em que o transporte radial de massa tem mais influência, mesmo nestas condições o cálculo mostra que as consequências que adviriam para o movimento de rotação da Terra seriam praticamente nulas

*Causas internas* — Eliminadas as causas de superfície como o foram as exteriores, é no interior da crusta terrestre que teremos de procurar a explicação para as irregularidades da nossa unidade de tempo.

Encontramo-nos agora num campo de difícil investigação, erizado de dificuldades, por falta de dados suficientes para sobre elles se fazer um estudo sério. De facto, o problema do interior da Terra está longe de estar resolvido: muito pouco se conhece sobre a composição interna do glôbo terrestre e nenhuns dados possuímos acêrca da agitação contínua em que se devem encontrar as massas constituintes do núcleo.

Directamente, quer por sondagens quer pelos trabalhos mineiros, não atingimos ainda um milésimo do raio terrestre!

Modernamente admite-se que no interior da crusta terrestre se passam fenómenos tais que, por causas ainda desconhecidas, provocam uma variação do raio da Terra, de modo semelhante ao que sucede a certas estrelas «variáveis».

Por «variáveis» designam-se em Astronomia aquelas estrelas que estão sujeitas, periódicamente ou não, a mudanças de brilho.

Entre as «variáveis periódicas» (o período pode oscilar entre poucas horas e dois anos) há umas que têm para nós um interesse muito especial: são as que pertencem ao chamado grupo das Cefeidas, constituído por estrelas gigantes, e que tem por tipo a estrela  $\delta$  da constelação do Cefeus.

Para explicar as variações de brilho destas estrelas foi proposta por Shapley uma teoria — a «teoria da pulsação» — a que Eddington deu um completo desenvolvimento matemático, e segundo a qual as Cefeidas periódicamente se dilatam ou se comprimem, devido à acção combinada da gravitação e da elasticidade dos gases que entram na constituição das estrelas. Dêste modo a superfície alternadamente aumenta ou diminui e daqui a oscilação que sofre o brilho.

Um fenómeno semelhante ao que sucede nestas estrelas se passará na Terra: é possível que a Terra seja, como elas, um astro pulsátil.

A origem destas pulsações e o seu mecanismo escapam-nos ainda; mas se a compressão e a dilatação se derem de uma maneira uniforme através de toda a massa bastará uma variação do raio terrestre de pouco mais de dez centímetros para explicar as irregularidades do nosso movimento de rotação. Se as acções que se passam nas massas internas da crusta tiverem lugar a profundidades relativamente pequenas é evidente, então, que será necessária uma muito maior amplitude na variação do raio.

Jolly tentou, em 1925, explicá-las admitindo a existência de uma grossa camada de basalto à profun-



didade de trinta quilómetros a qual, sob a acção térmica do radio, ora se liquefazia ora se solidificava.

King sugere, em 1929, uma nova explicação por analogia com o que sucede a uma barra de ferro quando se encontra sob a acção de um campo magnético: se o campo é intenso a barra torna-se mais curta; se é moderado ela aumenta de comprimento. Dêste modo, se o interior da Terra fôr constituído por ferro, como geralmente se admite, êle deve contrair-se ou dilatar-se sempre que o campo magnético é ou não intenso. Mas, ocorre perguntar, a que obedecerão estas variações do campo magnético terrestre? Às manchas solares, que com tanta frequência se invocam hoje para explicar as mais variadas coisas?

Possivelmente por falta de elementos suficientes, tôdas as tentativas de King para encontrar uma correlação nítida entre os dois fenómenos foram infructíferas.

Finalmente, em 1937, Brown imagina a existência a pouca profundidade de uma camada situada a uma temperatura crítica, isto é, a uma temperatura tal que

qualquer pequena variação causará uma considerável, mudança de volume.

Se houver uma camada em tais condições, com a espessura de quilómetro e meio, é suficiente uma mudança do seu volume de menos de um por cento para explicar as irregularidades do movimento de rotação da Terra.

Do que acabamos de ver se conclui que êste arfar gigantesco da Terra deve ser causado por movimentos, no sentido radial, de massas no interior do globo. Para explicar êsses movimentos só dispomos ainda hoje de hipóteses.

No entanto, o desenvolvimento notável que nos últimos anos tem tomado a técnica sismológica e o grande incremento atingido pelo estudo das propriedades elásticas das rochas levam-nos a supôr que num prazo não muito longo dados precisos se hão-de obter para completa elucidação de um problema de tanto interêsse sob vários pontos de vista.

## ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

### UM PROBLEMA HISTÓRICO

por *Fernando de Carvalho Araújo*

Uma urna contém  $n$  esferas numeradas de 1 a  $n$ . Fazem-se  $n$  extracções sucessivas sem reposição. Qual é a probabilidade: (1) De que nenhuma esfera saia no lugar correspondente ao seu número; (2) De que pelo menos uma esfera saia no lugar que lhe corresponde; (3) De que  $r$  esferas saiam nos seus lugares. \* (Problema estudado por De Montmort há mais de duzentos anos em «Essai d'analyse sur les jeux de hasard» - 2.<sup>a</sup> ed., Paris, 1713. - Vide Boletim Bibliográfico n.º 45, G. M., n.º 23, crítica do Prof. R. A. Fisher).

Seja  $u_n$  o número de ordens que satisfazem à condição (1). Suponhamos agora que a esfera 1 ocupa o lugar da esfera  $k$  e que esta ocupa o lugar daquela. Com 1 e  $k$  nestas posições há  $u_{n-2}$  ordens em que as restantes esferas satisfazem à condição (1).

Como  $k$  designa qualquer das esferas 2, 3, ...,  $n$ , o número total de ordens satisfazendo a (1), mas com 1 no lugar de  $k$  e  $k$  no lugar de 1, é  $(n-1)u_{n-2}$ . Por outro lado, se 1 ocupar o lugar de  $k$  mas  $k$  não ocupar o lugar de 1, o número de ordens das  $(n-1)$  esferas restantes satisfazendo a (1) é  $u_{n-1}$ , mas como a esfera 1 pode tomar  $(n-1)$  posições distintas o número total de ordens satisfazendo a (1) em que 1 toma a lugar de  $k$  mas não  $k$  o lugar de 1, é  $(n-1)u_{n-1}$ .

\* Vide Boletim Bibliográfico n.º 45 - «Gazeta de Matemática n.º 25 - crítica à obra *The Advanced Theory of Statistics* de Kendall, feita pelo Prof. R. A. Fisher.

Logo  $u_n = (n-1)(u_{n-1} + u_{n-2})$

ou  $u_n - nu_{n-1} = -(u_{n-1} - (n-1)u_{n-2}) = \dots = (-1)^n (u_2 - 2u_1)$  mas como  $u_2 = 1$   $u_1 = 0$  será  $u_n - nu_{n-1} = (-1)^n$ .

Teremos então

$$\frac{u_n}{n!} - \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\frac{u_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{u_{n-2}}{(n-2)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{u_2}{2!} - u_1 = \frac{1}{2!}$$

e finalmente somando

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Como

$$\left| \frac{u_n}{n!} - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{(n+1)!}$$

a probabilidade é praticamente  $1/e$  excepto para pequenos valores de  $n$ . Com efeito, para  $n=1, 2, 3, \dots, 11$  as probabilidades correspondentes são

$$p_1 = 0,000000 \quad p_2 = 0,500000 \quad p_3 = 0,333333$$

$$p_4 = 0,375000 \quad p_5 = 0,366667 \quad p_6 = 0,369056$$

$$p_7 = 0,367857 \quad p_8 = 0,367881 \quad p_9 = 0,367879$$

$$p_{10} = 0,3678795 \quad p_{11} = 0,3678794$$



No caso (2) a probabilidade é evidentemente

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

e no caso (3), como as  $r$  esferas podem ser escolhidas de  $\binom{n}{r}$  maneiras e o número de ordens em que nenhuma das restantes  $n-r$  ocupa o seu lugar é  $u_{n-r}$ , a probabilidade será  $\frac{1}{n!} \binom{n}{r} u_{n-r} = \frac{1}{r!} \cdot \frac{u_{n-r}}{(n-r)!} = \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-r} \frac{1}{(n-r)!} \right\}$ .

O problema pode resolver-se de maneira um pouco diferente, por indução.

Consideremos  $r$  esferas determinadas, por exemplo, as esferas 1, 2, 3, ...,  $r$ , das  $n$  esferas dadas e calculemos a probabilidade de que nenhuma delas ocupe o seu lugar.

Representemos por  $N_{k, n, \dots, x, y}$  o número de ordens em que as esferas  $k$  e  $y$  ocupam os seus lugares e as esferas  $m$  e  $x$  não ocupam os seus.

Será

$$(1) \quad N_1 = n! - (n-1)!$$

$N_{12}$  obtém-se subtraindo a (1)  $N_{12}$ . Ora  $N_2 = (n-1)!$  e  $N_{12} = (n-2)!$  portanto  $N_{12} = (n-1)! - (n-2)!$  número que se obtém substituindo em (1)  $n$  por  $n-1$ . Logo

$$(2) \quad N_{12} = n! - (n-1)! - (n-1)! - (n-2)! = n! - 2(n-1)! + (n-2)!$$

Para obter  $N_{123}$  basta subtrair a (2)  $N_{123}$ . Como  $N_3 = (n-1)!$ ,  $N_{123} = (n-3)!$ ,  $N_{123} = (n-2)! - (n-3)!$ ,  $N_{123} = (n-2)! - (n-3)!$  donde  $N_{123} = (n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$ , número que se obtém substituindo em (2)  $n$  por  $n-1$ , será

$$(3) \quad N_{123} = n! - 3(n-1)! + 3(n-2)! - (n-3)!$$

Para obter  $N_{1234}$  temos que subtrair a (3)  $N_{1234}$ . Da mesma maneira, como

$$\begin{aligned} N_4 &= (n-1)! \quad N_{1234} = (n-4)! \quad N_{1234} = (n-3)! - (n-4)! \\ N_{1234} &= (n-3)! - (n-4)! \quad N_{1234} = (n-3)! - (n-4)! \\ N_{1234} &= (n-2)! - 2(n-3)! + (n-4)! \\ N_{1234} &= (n-2)! - 2(n-3)! + (n-4)! \\ N_{1234} &= (n-2)! - 2(n-3)! + (n-4)! \end{aligned}$$

vem

$$N_{1234} = (n-1)! - 3(n-2)! + 3(n-3)! - (n-4)!$$

número que se obtém substituindo em (3)  $n$  por  $n-1$ .

Logo

$$N_{1234} = n! - 4(n-1)! + 6(n-2)! - 4(n-3)! + (n-4)!$$

O método é completamente geral. O número de ordens em que as  $r$  esferas não ocupam os seus lugares é assim

$$N_{12 \dots r} = n! - \binom{r}{1} (n-1)! + \binom{r}{2} (n-2)! + \dots \pm \binom{r}{r} (n-r)!$$

donde se tiram facilmente os resultados a que fomos conduzidos pelo primeiro processo.

O problema é um caso particular do teorema seguinte:

**TEOREMA** — Consideremos  $n$  acontecimentos compatíveis  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ . Indiquemos por  $p_h$  a probabilidade de que se realize  $E_h$  só ou em conjunto com os outros, por  $p_{hi}$  a probabilidade de que se realizem  $E_h$  e  $E_i$  só ou associados aos outros, etc., etc. A probabilidade de que pelo menos um dos acontecimentos  $E_1, E_2, \dots$  se verifique é

$$P = \sum_h p_h - \sum_{hi} p_{hi} + \sum_{hik} p_{hik} - \dots$$

No caso considerado, como a probabilidade de que  $r$  esferas quaisquer saiam nos lugares que lhes correspondem é  $1/r!$ , a fórmula anterior dá imediatamente para a probabilidade do caso (2)

$$P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

Vale a pena ainda, para finalizar o assunto, citar, modificando-a ligeiramente, a forma dada ao teorema por um colega de Coolidge.

«Se todos os habitantes de Lisboa se retinsem num único lugar e resolvessem festejar o S. Martinho com tôdas as regras, a probabilidade de que pelo menos um chegasse a casa, é aproximadamente  $2/3$ ».

### BIBLIOGRAFIA

Ball, R. W. *Mathematical Recreations & Essays*—Macmillan, London, 1944.  
 Bertrand, J. *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1907.  
 Castelnuovo, G. *Calcolo Delle Probabilità*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1933.  
 Coolidge, J. *An Introduction To Mathematical Probability*, Clarendon Press, Oxford, 1925.  
 Crystal, G. *Algebra*—A. & C. Black Ltd., London.  
 Kendall, M. *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Griffin, London, 1943.  
 Levy, H. and Roth, L. *Elements of Probability*—Clarendon Press, Oxford.  
 Plummer, H. *Probability And Frequency*, Macmillan, London, 1940.



# ANTOLOGIA

## A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

CICLO DE PALESTRAS RADIODIFUNDIDAS PROMOVIDAS PELA «JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA» (\*)

### A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA NAS CIÊNCIAS SOCIAIS

por **Fernando Pinto Loureiro**

Ainda hoje se discute sobre a natureza e a classificação das *ciências sociais*, algumas vezes chamadas também «ciências do homem», «ciências morais» e «ciências da sociedade». Supomos que, num ponto de vista prático e concreto, importa não atribuir grande importância a considerações metodológicas, mais formais que substanciais, a respeito de compartimentação e definição.

A ciência é a totalidade do saber verificado à luz da contraprova prática de previsões que a experiência revelou serem exactas. Como conjunto de saber acumulado, sistematizado e controlado, a Ciência é um corpo unitário. E, como disse alguém, se as ciências naturais traduzem o domínio do homem sobre a natureza, as ciências sociais começam a traduzir — e devem traduzir cada vez mais — o domínio do homem sobre a sociedade, isto é, sobre a sua própria natureza também. Nesta ordem de idéias, ponderadas as interdependências que ocorrem entre a natureza e a vida social e recordado o carácter humano de todas as actividades do homem, bem pode dizer-se, que a Ciência é uma só e que não podem conceber-se ciências tão rigidamente apartadas que entre elas se perca a possibilidade de quaisquer contactos. Todos os investigadores da Ciência, independentemente das suas especializações respectivas, encontram perante si problemas metodológicos análogos e obstáculos e dificuldades do mesmo tipo, no que se refere especialmente às possibilidades práticas da investigação.

Com isto não se quer dizer que nas ciências sociais não haja problemas específicos nem que a imprecisão do próprio conceito de ciências da sociedade não tenha a sua importância; quer-se apenas sublinhar que nas ciências sociais predomina ainda o que um historiador chamou o «artesanado intelectual» e que portanto se torna urgente alargar às ciências sociais os benefícios indiscutíveis da investigação científica organizada.

À imprecisão de fronteiras das várias ciências que estudam a vida social não deve constituir obstá-

culo à eficiência do trabalho científico neste domínio: não é um problema de classificação de ciências que deve preocupar mais, antes a solução concreta das questões práticas suscitadas pela vida real, comandadas pelas exigências prementes do progresso social. Ora, é de somenos importância que as soluções sejam obtidas pela incidência de feixes de luz vindos de ciências diversas. É mesmo desejável que tal aconteça.

Praticamente, o problema da investigação científica nas ciências sociais traduz-se em duas exigências imediatas: *organização* e *trabalho efectivo*.

*Organização* quer dizer: resposta realista às exigências da vida nacional; possibilidade de coordenação, hierarquização e colaboração estreita dos vários ramos de investigação das ciências sociais; dcações indispensáveis para o funcionamento dos serviços; selecção dos investigadores com base na sua capacidade para o trabalho científico, não esquecendo que as verdadeiras vocações para tarefas apagadas e pouco valorizadas socialmente, são muitas vezes o pressuposto do mais fecundo trabalho de «equipe»; elaboração dos quadros de pessoal técnico, estabelecimento de bolsas e criação de estímulos ao aparecimento da profissão de «investigador das ciências sociais», profissão ainda hoje quasi inexistente e mal apreciada em muitos países.

Se organização quer dizer isto, *trabalho efectivo* significa sentido das realidades no planeamento do que tem de fazer-se e instalação imediata dos serviços indispensáveis.

A presente situação da investigação científica nas ciências sociais, num país como o nosso e no momento presente, poderia encontrar um princípio de solução, com a criação de um centro, instituto ou junta em que trabalhassem os melhores investigadores que pudessem mobilizar-se e em que fôsem atacados os problemas cruciais e urgentes da vida nacional. Nêsse instituto, proceder-se-ia:

1.º — Ao inquérito sistemático das possibilidades

(\*) Já publicadas na «Gazeta de Matemática»: «O valor social da investigação científica», por Ruy Luís Gomes — G. M., n.º 19; «Os objectivos da Junta de Investigação Matemática», por António Monteiro — G. M., n.º 21; «A investigação científica ao serviço da saúde», por Corino de Andrade; «A investigação científica e a defesa da produção vegetal», por Brantinho d'Oliveira — G. M., n.º 23.



produtivas do país, no campo da energia, das matérias primas, dos transportes e dos tipos de produção;

2.º — à documentação histórica e estatística dos aspectos fundamentais da vida económico-social do país;

3.º — Ao estudo prospectivo dos problemas de coordenação e equilíbrio económico e social nos planos local, regional e nacional; e

4.º — à revisão das idéias-feitas a respeito das nossas possibilidades, quer no tocante às forças produtivas materiais, quer no respeitante à nossa capa-

cidade de trabalho, idéias-feitas de grande repercussão dos juízos correntes da opinião pública.

Seria descabido fazer *mais uma* sugestão—a acrescentar a tantas!—no sentido de se criar *mais um* instituto. Mas, quando o nível de vida de um país e as garantias do seu progresso social dependem de se fazer alguma coisa que pode e deve fazer-se, não há que hesitar em dar publicamente apoio a uma idéia que há muito encontrou os seus precursores, as suas «vozes clamantes no deserto» e só não encontrou ainda a sua concretização indispensável.

## A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA EM BIOLOGIA E SUA IMPORTÂNCIA PRÁTICA

por José Antunes Serra

Podemos, com um quasi nada de imaginação e alguma fantasia, supor o que teriam sido as condições de existência dos Homens primitivos. Obrigados a procurar o seu sustento, refugiavam-se em cavernas ou viviam em tóscas cabanas, colhendo os frutos silvestres, caçando e pescando. Cedo a doença começou a afligi-los. As dores vinham lembrá-los da necessidade de procurar um alívio.

Principiaram a procurar remédios para as suas doenças, observavam a anatomia dos animais e deles extraíam supostos meios de cura, tentavam conhecer as plantas que davam os melhores frutos e as que possuíam virtudes para a doença.

A esta necessidade, juntava-se ainda o espírito de curiosidade, que os levava a pensar na morte e por um contraste, a considerar a vida.

Então, é natural que se interrogassem e procurassem resolver alguns dos problemas que a sua existência, bem como a de outros seres, impunha ao seu entendimento. Desta maneira, nasceu o impulso que mais tarde fez desenvolver a Biologia — ciência que estuda a vida nas suas manifestações e nas formas que reveste.

\*

Mas se o Homem desde o princípio deve ter possuído o espírito de inquérito que o leva a interessar-se pelo problema que envolve a vida, só há relativamente pouco tempo é que o conhecimento exacto, baseado em observações e em raciocínios lógicos, permitiu erigir a Biologia em uma Ciência. De facto, a Biologia começou a transformar-se em uma ciência exacta só depois da Renascença. Anteriormente havia já conhecimentos relativamente avançados em Geometria, em Astronomia, em Física, enquanto que as ciências de estudo da vida continuavam limitadas a idéias gerais de carácter pouco mais que especulativo e sem valor real.

Raros espíritos objectivos durante a Idade-Média

procuraram fazer observações e induções exactas, mas a avalanche das opiniões fundadas antes na «autoridade» dos antigos, principalmente de Aristóteles, submergia essas tentativas. E só quando um novo espírito surgiu, quando se começou a voltar às fontes, primeiro ao estudo directo dos escritos da antiguidade e depois, rôtas as peias que prendiam os homens às opiniões do passado, à observação directa e à indução, à objectividade e à exactidão, é que se pode dizer que nasceu a Biologia.

Logo de início, a nova maneira de procurar a verdade trouxe descobertas sensacionais, como a da anatomia exacta do corpo humano, de Vesalius, (1514-1564) e a circulação de sangue, de Harvey (1578-1657).

Os grandes progressos, que vêm em linha recta até aos tempos actuais, começaram, porém, quando o microscópio, que se foi aperfeiçoando pouco a pouco, entrou a ser aplicado à anatomia dos animais e das plantas, nos meados do século XVII. Nas mãos de Malpighi (1628-1694), Grew (1628-1712) e Leeuwenhoek (1632-1723) e os novos poderes de observação permitiram descobertas dum enorme alcance, como a substituição dos órgãos dos animais e plantas à custa de células agrupadas em tecidos. Ao mesmo tempo os conhecimentos iam sendo integrados em «idéias gerais do mundo» ou em sistemas filosóficos de geniais pensadores, como Descartes (1596-1650), Spinoza (1623-1677), Leibniz (1646-1716) e Voltaire (1694-1778). Assim iam crescendo os detalhes da observação e as teorias da vida tomavam ao mesmo tempo o aspecto unitário que caracteriza a Ciência moderna.

\*

Esta breve menção de alguns padrões da história da Biologia trouxe-nos um pouco de perspectiva para considerarmos o desenvolvimento actual da ciência da vida.



Como tôdas às ciências, a Biologia no nosso século, é cultivada por um grande número de pessoas, que ensinam às novas gerações os conhecimentos anteriormente adquiridos enquanto outros ou muitas vezes os mesmos que difundem, procuram novos factos ou novas interpretações dos fenómenos da vida.

No período de desbravamento do desconhecido, é possível sempre, aqui como em outras ciências, ligar as descobertas ao nome de um homem, aos pioneiros. Actualmente, porém, as observações mais simples já estão feitas e as novas descobertas são filhas de novos métodos, mais aperfeiçoados e mais completos. O desenvolvimento das ciências chegou a tal ponto que é geralmente preciso o concurso de vários trabalhadores científicos para se poder resolver qualquer novo problema e a existência do material custoso e fontes bibliográficas ricas.

Ou por outras palavras, a investigação científica, a procura da verdade com o fim de aumentar o conhecimento da natureza e do espírito para o bem da humanidade, só se faz geralmente em laboratórios apropriados e por pessoal que trabalha em conjunto e que passou longos anos por um treino e uma educação que permitiu absorver parte dos conhecimentos acumulados e aperfeiçoados pelas gerações anteriores. Isto é, deixou de haver investigadores solitários para haver escolas e oficinas de investigação.

\*

Em tôda a parte onde a civilização europeia tem chegado, um grande número de pessoas continuam essa luta contra a obscuridade, para alargar o campo dos conhecimentos, cada vez mais. Em todos os países progressivos se aplica o método científico à resolução de problemas que importam à comunidade, ao país de que se trata, ou a tôda a Humanidade. Em muitos pontos edificam-se e apetrecham-se laboratórios e organiza-se a investigação científica como uma actividade do espírito digna de todo o auxílio e credora da admiração e do reconhecimento das gentes.

No domínio da Biologia, desde o início se notam as três principais tendências que a têm feito progredir: conhecimento da forma dos animais e plantas, conhecimento do funcionamento dos órgãos e células e finalmente estudo do Homem normal e do Homem na doença. Muitos dos cultores da Biologia foram médicos e a observação e experimentação em animais tem frequentemente tido por fim chegar à compreensão do que se passa no homem. Outras vezes, porém, as grandes descobertas estão ligadas à resolução de problemas filosófico-biológicos que vinham subsistindo através dos séculos e que novos métodos ou um novo espírito, permitiram atacar mais a fundo.

Desejo aqui lembrar apenas um exemplo destes

grandes problemas e das conseqüências práticas que acarreta a sua investigação.

Uma das preocupações dos homens consistia há muitos anos em explicar o aparecimento da vida. Os antigos, como Aristóteles e Plínio, supunham que os seres inferiores nasciam espontaneamente do lodo ou da terra, e até no século xvii um pensador com tendências místicas — van Helmont — afirmava que num vaso em que tinha pôsto alguns trapos e farelos apareceram espontaneamente, saídos destes ingredientes, nada menos do que ratinhos bem vivos! Isto demonstra a mistura de superstição e incerteza que era em parte ainda a actividade científica de então.

A observação exacta começou depois a desfazer tão grosseiros erros. Redi (1626-1698) observou que os «vermes» da carne eram produzidos por ovos de mós-cas. Swammerdam e Harvey também contribuíram com outras observações. No século xvii o microscópio possibilitou a descoberta de seres muito mais pequenos que os denominados pelos antigos de «vermes». Esses seres viviam em infusões de detritos orgânicos em putrefacção e foram chamados Infusórios. Tais Infusórios poderiam aparecer de duas maneiras: ou à custa de ovos ou germes trazidos pela água, pelo ar, ou pelos materiais em decomposição; ou, pelo contrário, seriam o resultado directo da putrefacção, formando-se aí por geração espontânea. E a contenda entre os partidários das duas teorias continuou no século seguinte, com experiências às vezes cheias de erros, de resultados imprecisos. Nela estavam empenhados homens como Needham e Buffon que acreditavam na geração espontânea, e outros como Spallanzani, que a negavam.

A questão passou para o século xix, juntamente com a observação de seres cada vez mais pequenos. Para a sua resolução contribuíram muitos biólogos, alguns químicos e físicos e o engenheiro Latour com a sua teoria de que os fermentos eram organismos. Alguns dos maiores foram Franz Schulze, Schwann, Pouchet, Tyndall, Pasteur e Koch. Particularmente Pasteur (1822-1895) e Koch (1843-1910) trouxeram a demonstração de que a decomposição é provocada pelos micróbios, cujos germes são trazidos pelo ar ou pelas substâncias não esterilizadas.

Isto permitiu, por um lado a descoberta dos agentes de doenças que afligiam a humanidade, por outro a cirurgia aséptica começada por Lister (1867) e que é a cirurgia dos nossos dias.

A conquista do cada vez mais pequeno, nos seres vivos, levou assim a conseqüências práticas dum enorme valor para Humanidade. Os micróbios, e as doenças que eles causam bem como os meios de cura, desinfecções, vacinas, a cirurgia — enfim tôdas as possibilidades da moderna medicina dependeram da



resolução de problemas biológicos e da investigação ligada a questões como a da geração espontânea e dos seres mais pequenos.

Ao mesmo tempo, dentro da célula iam-se descobrindo o núcleo e os cromosomas, a doutrina do protoplasma como substância viva tomava corpo, desvendavam-se as leis da hereditariedade, e mais moderadamente ainda, analisam-se os seres ainda menores que as bactérias, os virus filtráveis.

Cada nova descoberta biológica torna possíveis, não só o alargamento dos nossos conhecimentos sobre a natureza viva, mas traz mais tarde ou mais cedo consequências práticas que podem revolucionar a vida. Basta pensar no que eram as epidemias de hexigas antes da vacina, ou a morte por gangrena antes da desinfecção.

De facto, toda a higiene e a medicina modernas são o fruto da investigação em Biologia.

Da Biologia no sentido lato fazem parte, além da Medicina, a Agronomia e a Veterinária.

São bem conhecidos os progressos que nos últimos anos têm sido efectuados nestes domínios. Por exemplo na cultura das plantas que constituem uma das bases da nossa alimentação; a selecção de variedades apropriadas aos ambientes especiais e resistentes às doenças, o combate às pragas, a escolha de novos processos de cultura. Desde há muitos anos os homens, quando passaram da vida nómada à vida agrícola, tinham escolhido umas tantas plantas para os campos de cultura. As conquistas aumentaram no tempo dos descobrimentos marítimos, com plantas originárias de outras regiões. Mas todo este domínio tinha um carácter de incerteza, resultante do descobrimento dos factos basilares. Só a descoberta das leis de hereditariedade, nos fins do século passado, permitiu unificar as práticas empíricas, mais ou menos de acaso, e revolucionar por completo a situação. Hoje criam-se plantas, segundo um plano científico e exacto e muitas dessas plantas têm provado ser valiosas para a economia agrícola.

\*

Eis, pois, que os progressos da Biologia e suas aplicações, têm aumentado o domínio do homem sobre a natureza, têm melhorado a sua saúde, têm multiplicado a produção agrícola e a criação de gados.

Tal é o fruto da actividade de muitos investigadores trabalhando segundo um plano ordenado. Alguns têm sido famosos, outros ficarão para sempre no esquecimento de quem mais tarde colhe os frutos do seu labor. Mas quasi todos têm em mira, além de contribuir para o alargamento da cultura, possibilitar uma vida melhor para a Humanidade.

Alguns cientistas haverá que foram mesquinhos e

egoístas, mas esses são os mais raros. O impulso íntimo, sem dúvida inato, mas que se aperfeiçoa pela cultura, de descobrir a verdade, é apenas um dos motivos iniciais para a investigação; o outro estímulo poderoso é sentir que contribui para melhorar a vida dos homens, de todos os que possam receber os frutos do seu trabalho, no mundo inteiro. Este é o segredo de tantas vidas gastas em laboratórios, quantas vezes incompreendidas, de tantas actividades dedicadas à ciência apesar das lutas a sustentar e das dificuldades que frequentemente a incompreensão ou a inveja levantam em volta do investigador. Na verdade, todo o investigador digno dêsse nome possui ideais alevantados, de puro humanitarismo.

\*

O fim da investigação científica é muito simples: Resume-se em desejar que as possibilidades de descoberta da verdade sejam utilizadas; que o espírito de curiosidade de que é dotada a nossa espécie, seja usado plenamente; que as faculdades intelectuais do homem sejam aproveitadas para engrandecer a cultura e, acima de tudo, para melhorar a vida e torná-la digna de ser vivida por seres que pensam e vêem bem que as condições de existência actuais são ainda muito precárias.

Para que isso se realize, os trabalhadores científicos estão prontos a dar o seu melhor esforço exigindo apenas modestas recompensas. Grandes problemas biológicos aguardam solução. Não se conhece quasi nada do funcionamento da matéria viva, ainda se não sintetizaram os mais simples seres vivos; o problema do crescimento das células sem controle — o problema do cancro — continua a ser uma incógnita; só se conhecem pequenos fragmentos da fisiologia dos mais simples tecidos e órgãos; muitas doenças microbianas e não micobrianas continuam incuráveis.

Noutra ordem, o conhecimento do homem doente e do homem são, da Medicina e da Antropologia, são ainda rudimentaríssimos. Da nossa própria natureza só divisamos alguns factos incompletos e que não chegam para se poder formar uma ideia geral.

Restam, pois, em Biologia, grandes problemas para resolver; todos os investigadores que venham contribuir para a sua solução não serão demais. Precisa-se aumentar a investigação biológica.

No que respeita ao nosso País, todos os que têm a cultura como um valor humano dos mais estimáveis e que ambicionam uma vida sempre melhor para todos os portugueses — pensam que a investigação científica ajudar-nos-á a realizar os ideais de engrandecimento da Pátria como parte integrante da Humanidade civilizada e culta.

Em toda a vida nacional, qualquer renovação pres-



supõe a existência de técnicos, cientistas e profissionais, que possam solucionar os nossos problemas. A transplantação das resoluções desses problemas «lá fora» resulta geralmente em grosseiros erros; o ambiente é diferente, os materiais de que se pode lançar mão são diferentes, os fins são às vezes outros. Temos que investigar por nós e para nós, temos que formar espíritos científicos capazes de atacarem os problemas

com métodos exactos, mas adaptados aos nossos fins e aos nossos meios. Temos que formar homens capazes de servir as necessidades da Nação, e se a tanto se chegar, da Humanidade em geral. E na verdade, a aquisição do espírito científico, objectivo e exacto, é bem necessário na nossa vida prática; este é um dos pontos essenciais de toda e qualquer tentativa de melhorar o nível de vida dos portugueses.

## A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E A CONCEPÇÃO MODERNA DE UNIVERSIDADE

CARACTERÍSTICAS QUE PERMITEN RECONOCER QUE UNA UNIVERSIDAD ES DE PRIMERA CLASE \*

por *Bernardo A. Houssey*

- 1) Sus profesores y docentes se consagran exclusivamente a la docencia y a la investigación.
- 2) Realizan investigaciones originales y forman investigadores.
- 3) La enseñanza está basada en el espíritu científico o sea en la investigación.
- 4) Forma hombres superiores por su capacidad técnica, su cultura y su conducta.
- 5) Desarrolla la inteligencia, la iniciativa, la independencia de juicio y un patriotismo profundo racional e ilustrado.
- 6) Ayuda intensamente a la formación y adelanto de los jóvenes mediante muchas becas de perfeccionamiento o de investigación.
- 7) Hay mucho contacto directo y franco entre los

profesores, sus colaboradores y los alumnos. El número de alumnos está en relación con la capacidad docente (sitios de trabajo y recursos).

8) Posee una biblioteca moderna muy completa y con plena vitalidad, dinámica y no estática.

9) Las materias científicas básicas son favorecidas con los mayores recursos posibles.

10) Hay amplia colaboración, culto escrupuloso de la verdad, amistad y corrección del trato entre sus miembros; no prospera la maledicencia.

En resumen, se reconoce que una Universidad es de clase superior porque realiza investigación original, porque forma los mejores graduados, es innovadora y progresista, tiene profesores full-time, buena biblioteca, laboratorios activos y eficaces.

\* Extraído de «Ciencia e Investigación» — Revista patrocinada por la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias, Buenos Aires, año I, n.º 1, Enero, 1945.

## PEDAGOGIA

### NOVO PARÁGRAFO

por *Nicodemos Pereira*

O debate sobre os resultados dos exames de aptidão para as Escolas do Ensino Superior que se tem realizado na «Gazeta de Matemática» está, a meu ver, longe de se poder considerar encerrado ou mesmo completamente esclarecido.

Num artigo da autoria do Dr. Júlio Martins, sob o título «Exames de Aptidão», inserido no N.º 39 dos «Liceus de Portugal», que é uma publicação do Ministério da Educação, é apresentada uma estatística comparativa das classificações obtidas por alunos internos dos liceus, no exame do 7.º ano e nos exames de aptidão para algumas escolas do Ensino Superior.

Transcrevemos do referido artigo essa estatística e as condições em que foi organizada.

Seguem as transcrições:

«... Comparação estabelecida entre as classificações obtidas em *Matemática*, no 7.º ano liceal, e as obtidas, na mesma disciplina, no exame de aptidão para a Universidade Técnica.

Para que a comparação seja válida, apenas se consideram os examinandos que, na mesma época (Julho de 1944), prestaram as provas da referida disciplina no liceu e na Universidade, por conseguinte com um intervalo de cerca de quinze dias.

A classificações de 10 valores obtida, nos liceus, por 22 examinados, corresponderam as seguintes no exame de aptidão:



- No I. S. T. : 7 valores.  
 No I. S. A. : 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 13 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 7, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 13 valores.
- A 11 valores obtidos por 12 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 6 valores.  
 No I. S. A. : 8, 9, 10, 11, 11, 12, 14 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 7, 8, 10, 10 valores.
- A 12 valores obtidos por 16 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 3 valores.  
 No I. S. A. : 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 15 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 7, 10, 10 valores.
- A 13 valores obtidos por 16 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 7, 8, 8, 11, 11, 16 valores.  
 No I. S. A. : 7, 8, 8, 9, 11, 13, 14 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 7, 12, 12 valores.
- A 14 valores obtidos por 21 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 5, 8, 10, 12, 12, 15, 16 valores.  
 No I. S. A. : 10, 12, 13, 13, 14, 14, 18 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 7, 10, 10, 11, 12, 12, 13 valores.
- A 15 valores obtidos por 5 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 8, 14 valores.  
 No I. S. A. : 12, 12, 14 valores.
- A 16 valores obtidos por 9 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 9, 10 valores.  
 No I. S. A. : 11, 13, 15, 15 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 8, 10, 12 valores.

- A 17 valores obtidos por 11 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 8, 8, 9, 15 valores.  
 No I. S. A. : 11, 12, 13 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 11, 12, 14, 15 valores.
- A 18 valores obtidos por 4 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 10, 12 valores.  
 No I. S. A. : 9, 13 valores.
- A 19 valores obtidos por 3 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 9, 13 valores.  
 No I. S. C. E. F. : 16 valores,
- A 20 valores obtidos por 2 examinados corresponderam :  
 No I. S. T. : 10, 12 valores».

Esta estatística mostra novos aspectos da questão debatida na Gazeta de Matemática e que há novas directrizes a seguir para que o seu estudo seja completo. Abre-se um novo parágrafo.

Podem formular-se — e para todos os gostos — muitas e variadas hipóteses para explicar a disparidade destes resultados.

Os detentores de *certezas*, que farejam a verdade como se fôsse delicioso pitéu, pela simples leitura desta estatística, à priori, ficam sabendo, sem sombra de dúvida, as causas que determinam tais divergências.

Mas, os outros, *os não iluminados*, infelizmente, só podem pronunciar-se depois de aturado estudo que envolva tôdas as hipóteses em causa.

Esse estudo só poderá ser feito pelas estâncias superiores ou com sua autorização, pois os elementos que lhe deverão servir de base (e são muitos e dispersos) não podem ser compulsados por qualquer pessoa que deseje fazê-lo.

## PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS

por A. Lobo Vilela

As reflexões sobre os fundamentos da Geometria, que constituem o tema d'este artigo, foram escritas com o propósito de sistematizar algumas noções e apresentá-las de uma forma acessível aos alunos dos liceus. Por isso mantemos a distinção entre postulados e axiomas, a despeito da sua identidade lógica, e reduzimos a vários tipos as proposições teorematias.

Gostaríamos de que estas reflexões suscitassem o interesse dos professores de matemática e de lógica, e fôsem o ponto de partida para estudos mais substanciais e elucidativos.

1 — Mau grado as suas origens intuitivas e a sua projecção no real, a matemática é uma ciência abstracta; occupa-se de seres ideais, os números e as figuras, cujos elementos foram sugeridos pela experiência, mas que o espírito elaborou depurando-os de tudo o que, nos dados dos sentidos, é precário

e contingente. Sem êste trabalho de idealização, os conceitos ficariam sujeitos às restrições e imperfeições da experiência e a uma indeterminação essencial, pois não seria possível fixá-los através duma realidade instável e fugidia, complexa e caprichosa, cujas leis nos escapam.



Tôda a ciência se matematiza na medida em que substitui os dados empíricos, inconstantes e irregulares, por conceitos puros do espírito, fixados por meio das suas propriedades características. Assim se explica o carácter racional que tomaram vários ramos da física e o papel cada vez mais importante que a matemática desempenha na vida moderna.

Como ciência abstracta, a matemática constrói-se a partir de conceitos abstractos pela simples aplicação das regras da lógica (<sup>1</sup>). A êste processo de construção lógica dá-se o nome de *dedução*.

As proposições matemáticas enunciam propriedades dos entes matemáticos ou relações entre elas.

2—Em todo o sistema dedutivo há proposições fundamentais que enunciam as propriedades elementares ou as relações lógicas possíveis, e proposições derivadas das precedentes. Conforme o seu carácter e o papel que desempenham na estrutura matemática, estas proposições recebem diversos nomes:

#### I) Proposições fundamentais:

a) *postulados*: enunciam as propriedades elementares dos seres primitivos, indefiníveis por natureza;

b) *princípios lógicos*: enunciam as leis que regulam tôda a actividade mental;

c) *axiomas*: enunciam as propriedades mais gerais e mais simples das grandezas.

#### II) Proposições derivadas:

d) *definições*: constroem os conceitos secundários à custa dos conceitos primitivos;

e) *teoremas*: enunciam relações entre as propriedades dos entes matemáticos, estabelecidas por demonstração;

f) *problemas*: enunciam determinadas propriedades e propõem a descoberta dos seres que delas gozam.

As proposições indemonstráveis num dado sistema dedutivo chamam-se *premissas*. Os postulados e as definições são *premissas matemáticas*; os princípios lógicos e os axiomas são *premissas lógicas*. Os teoremas e os problemas obedecem ao critério de necessidade lógica fixado pelas premissas.

É para notar que a mesma proposição pode figurar como premissa num dado sistema e como teorema noutro sistema. Com efeito, a proposição: «por três pontos não em linha recta pode fazer-se passar um plano e só um», por exemplo, pode apresentar-se como *postulado* para determinar o plano. Neste caso,

postulando ainda que «uma recta fica determinada por dois quaisquer dos seus pontos», a proposição «uma recta e um ponto situado fora dela determinam um plano e só um» demonstrar-se-ia a partir de queles dois postulados e seria, portanto, um *teorema*. Tomando esta última proposição para postulado, seria a primeira um teorema.

3—As proposições matemáticas têm a pretensão de ser verdadeiras. As verdades matemáticas são universais e necessárias: universais por virtude da universalidade dos conceitos que relacionam; necessárias pelo carácter das relações que exprimem. A evidência intuitiva que inspirou os fundamentos da matemática cedeu lugar à evidência lógica, garantia única de validade dos seus mais amplos desenvolvimentos.

O processo que fundamenta a verdade ou falsidade duma proposição na verdade ou falsidade de outras chama-se *demonstração*; e as verdades que resultam ou decorrem necessariamente de outras dizem-se *consequências*.

A necessidade de demonstração é um índice de insuficiência, pois um espírito que apreendesse intuitivamente e dum modo infalível as mais complexas relações não precisaria de demonstrar. Todavia é já uma vantagem apreciável dispormos dum critério infalível de alcançar a certeza, mediante a demonstração.

### I — Postulados

4—Tôda a ciência se constrói à custa de conceitos e êstes, para serem susceptíveis de tratamento lógico, precisam de ser rigorosamente determinados para que não subsistam ambigüidades e não conduzam a contradições.

Há, evidentemente, um limite para a possibilidade de definir. Os conceitos primitivos por meio dos quais se definem todos os outros não podem ser definidos. Todavia é necessário fixá-los de algum modo, e, como não é possível reduzi-los a outros conceitos mais simples, procura-se caracterizá-los pelas suas relações elementares.

As proposições que enunciam as relações elementares entre os conceitos fundamentais e que indirectamente as determinam chamam-se *postulados*. Êles desempenham, em relação aos conceitos primitivos, o papel de definições. A distinção entre conceitos primitivos e conceitos derivados é convencional, pois, em geral, um conceito que serve para definir outros pode também ser definido a partir dêles. Assim, por exemplo, o conceito de congruência pode ser definido a partir do conceito de movimento ou tomado para conceito primitivo.

(<sup>1</sup>) Quanto às relações da lógica com a matemática, as opiniões divergem. Weyl e Brouwer sustentam que a lógica se fundamenta na matemática; Russel e Behmann quasi as identificam.



Embora os conceitos primitivos sejam, por natureza, indefiníveis, apreende-se alguma coisa do que significam investigando como se formam. É isso que nos propomos fazer antes de escolhermos os conceitos primitivos. Saímos assim do âmbito da lógica e invadimos o domínio da psicologia.

5— O conceito mais universal que a experiência nos sugere é a idéia de ser. Assim, a primeira condição a que uma ciência deve satisfazer é que *existam* os objectos de que se ocupa. Como os conceitos secundários são construídos à custa dos primitivos, a sua existência é condicionada pela existência destes. A existência dos seres primitivos só pode ser estabelecida por meio de postulados a que chamaremos *existenciais*. Todos os outros conceitos resultam do conceito de «ser», por sucessivas determinações.

Os sentidos revelam-nos a existência de corpos cuja comparação nos leva a construir esquemas gerais, conceitos abstractos que resultam da sua decomposição mental e da associação dos elementos comuns em novas sínteses. A operação do espírito por meio da qual eliminamos das sensações os caracteres que individualizam os objectos e os distinguem, para considerarmos apenas as suas propriedades gerais é a *abstracção*. O espírito humano generaliza na medida em que abstrai.

Assim se elaboram as idéias de *forma* e de *extensão*. Além destas propriedades intrínsecas, há outras extrínsecas que decorrem, como elas, de intuições: as idéias de *posição*, de *movimento* (variação) e de *repetição* (que gera a idéia de número). Sobre estes dados primitivos se constróem os conceitos fundamentais da matemática.

Pela disposição especial dos canais semi-circulares do ouvido, só podemos ter a intuição de corpos a três dimensões. No entanto, abstraíndo sucessivamente de cada uma dessas dimensões, concebemos *superfícies, linhas e pontos*. Este processo de abstracção é, aliás, sugerido pela observação de corpos que parecem realizá-lo materialmente. Efectivamente, a espessura dum corpo pode reduzir-se até que este pareça ter apenas duas dimensões, como uma folha de papel; um fio de sêda parece reduzido a uma única dimensão; um grão de areia fina parece desprovido de dimensões.

Para que estas noções se convertam em conceitos puros do espírito é necessário despojá-las do seu conteúdo material e reconstruí-las idealmente; obtêm-se assim os conceitos abstractos de *corpo* (ou *sólido*) *geométrico*, de *superfície*, de *linha* e de *ponto*. Levando mais longe a abstracção, constrói-se o conceito de *espaço*, esquema geral de toda a existência extensiva, que, por sucessivas determinações, produz

tôdas as *figuras geométricas* e se refaz por um processo inverso.

6— As limitações dos nossos sentidos colaboram no processo de abstracção por meio do qual se elaboram os conceitos matemáticos e estabelecem as relações fundamentais. Efectivamente, se a vista nos permitisse notar a estrutura descontínua da matéria difficilmente poderíamos conceber figuras geométricas; sem isto, faltariam materiais intuitivos para se construir a teoria do contínuo, e a medição reduzir-se-ia a um processo de contagem. Se a par dessa estrutura lacunar percebêssemos os movimentos incessantes que nela se produzem, o conceito de *ordem* linear não encontraria representação no espaço mas simplesmente no tempo sob o aspecto de sucessão temporal. Nestas condições o conceito de *congruência* (coincidência no espaço) seria difficil de estabelecer num universo onde parecia não haver repouso e só a noção de simultaneidade (coincidência no tempo) seria sugerida pela experiência. Em suma, era natural que a geometria e a mecânica fôsem bem diferentes das nossas, pois o movimento rectilíneo não existiria aparentemente nesse universo e seria difficil, senão impossível, conceber-se um sistema rígido ou um ponto material subtraído à acção de qualquer força.

O certo, porém, é que os objectos materiais parecem rígidos e indeformáveis e susceptíveis de ser divididos indefinidamente em partes. Ainda aqui as limitações dos sentidos contribuíram para facilitar o papel da abstracção e simplificar os conceitos de figuras geométricas permitindo atribuir-lhes propriedades meramente ideais: invariabilidade, homogeneidade e continuidade.

Dêste modo, os postulados existenciais podem enunciar ao mesmo tempo algumas propriedades dos entes a que se referem, realizando assim uma primeira determinação.

Estes postulados podem enunciar-se:

1.º) *Existe um ente chamado espaço que é contínuo, homogêneo, penetrável, fixo e ilimitado.*

2.º) *Existem porções do espaço chamadas corpos geométricos ou sólidos.*

3.º) *Existem superfícies que dividem o espaço ou os sólidos em partes.*

4.º) *Existem linhas que dividem em partes as superfícies.*

5.º) *Existem pontos que dividem em partes as linhas e não são decomponíveis em elementos mais simples.*

7— Os sólidos geométricos, as superfícies e as linhas constituem uma *classe de grandezas contínuas* para as quais é preciso fixar os conceitos de igual-



dade e de medida. Ora a igualdade de figuras geométricas apresenta-se sob um duplo aspecto: a igualdade de forma (semelhança) e a igualdade de grandeza (equivalência), reservando-se a designação de congruência para a dupla igualdade de forma e de grandeza. Podíamos, pois, tomar como primitivo o conceito de congruência (como fazem Pasch, Veronese e Hilbert) e caracterizá-lo por meio de postulados. Todavia definiremos congruência e partir das noções de *movimento* e de *coincidência*. É necessário, portanto, postular as condições em que as figuras geométricas se podem deslocar no espaço. Teremos então os *postulados do movimento*:

1.º) *Uma figura pode mover-se no espaço de modo que qualquer dos seus pontos coincida com determinado ponto do espaço.*

2.º) *Uma figura pode mover-se conservando-se fixo um dos seus pontos.*

3.º) *Uma figura pode mover-se conservando-se fixos dois dos seus pontos.*

4.º) *Um ponto em movimento gera uma linha; uma linha em movimento resvala sobre si mesma ou gera uma superfície; uma superfície em movimento resvala sobre si mesma ou gera um sólido.*

5.º) *O movimento não altera a forma nem a grandeza (propriedades métricas) das figuras geométricas, isto é, uma figura geométrica móvel conserva-se invariável (postulado da invariabilidade) (1).*

6.º) *Os movimentos do espaço são transformações pontuais que constituem um grupo isto é, as transformações inversas e as que resultam da composição (produto) de dois ou mais movimentos são movimentos (pertencem ao mesmo conjunto de transformações).*

Pósto isto, o conceito de congruência pode ser estabelecido por *definição*: duas figuras geométricas dizem-se congruentes quando é possível levá-las a coincidir por meio dum movimento (cu quando se podem transformar uma na outra por meio dum movimento).

8—Entre as figuras geométricas, as mais simples de cada espécie são o *ponto*, a *recta* e o *plano*, que por isso se tomam para base do estudo da geometria e permitem construir tôdas as outras. Daí lhes vem o nome de *elementos geométricos*. Como noções fundamentais só podem ser caracterizados pelas suas propriedades relativas.

*Postulados da recta:*

1.º) *A recta é uma linha indefinida.*

2.º) *Uma recta fica completamente determinada por dois quaisquer dos seus pontos.*

3.º) *Uma recta fica dividida em duas partes opostas (semi-rectas) por qualquer dos seus pontos.*

4.º) *Cada uma das partes em que uma recta fica dividida por um dos seus pontos, girando em tórno dêsse ponto, pode passar por qualquer ponto do espaço.*

*Postulados do plano:*

1.º) *O plano é uma superfície indefinida que divide o espaço em duas partes.*

2.º) *Se uma recta passa por dois pontos dum plano, fica tôda assente nele e divide-o em duas partes (semi-planos).*

3.º) *Um plano pode deslocar-se sobre si mesmo, ao longo de uma das suas rectas, em dois sentidos opostos.*

4.º) *Um plano pode deslocar-se sobre si mesmo em tórno de um dos seus pontos, em dois sentidos opostos.*

5.º) *Um plano pode girar em tórno duma das suas rectas de modo que cada um dos semi-planos passe por qualquer ponto do espaço.*

Esta última proposição equivale à determinação do plano por meio duma recta e dum ponto. Ora, como por sua vez a recta foi determinada por dois dos seus pontos, reconhece-se que neste sistema de postulados a proposição: «por três pontos não em linha recta pode fazer-se passar um plano e só um» — é susceptível de ser demonstrada e constitui, portanto, um teorema. (Veja-se § 2).

9—Ao conceito de linha recta estão associados outros conceitos importantes como o de *directão*, *sentido*, *ordem linear*, *distância*.

Intimamente relacionado com os conceitos de espaço e de movimento está o conceito de continuidade que serve de base à teoria da medida e é regulado pelo *postulado de Arquimedes* (2):

— *Dados dois segmentos desiguais (e dum modo geral quaisquer grandezas da mesma espécie, homogéneas e finitas) existe sempre um múltiplo do menor que excede o maior.*

Acrescentando aos precedentes o famoso *Postulatum de Euclides*, o menos intuitivo de todos os que apresentamos, ficam os seres fundamentais suficientemente caracterizados. Hilbert entende ser necessário ainda um postulado por meio do qual se estabelece a impossibilidade de ampliar o conjunto dos

(1) Este postulado não impede que as figuras geométricas sejam deformáveis por uma causa diferente do movimento. Quando não houver indicação contrária, as figuras geométricas consideram-se *imóveis*; e, quando se lhes atribui movimento, supõem-se *indeformáveis*.

(2) Embora atribuído a Arquimedes, este postulado deve-se a Eudoxo que nele baseia a teoria geral das razões — P. Tannery: *Noções Históricas*.



elementos geométricos (pontos, rectas e planos) sem afectar a validade dos postulados anteriores. A esta proposição chama-se o *postulado de integralidade*.

É particularmente interessante notar que os postulados geométricos anteriores são logicamente equivalentes aos postulados necessários para se construir o conjunto dos números reais.

10— *Um sistema de postulados deve satisfazer a duas condições:*

- a) ser isento de contradição;
- b) ser constituído por proposições logicamente independentes, isto é, que não possam deduzir-se umas das outras.

A primeira condição é necessária à própria construção lógica da teoria matemática; a segunda, embora não afectando a possibilidade de construção lógica, deve respeitar-se por motivos de elegância. Pela mesma razão deve ser reduzido ao mínimo o número de conceitos primitivos. Isto, porém, apre-

senta o inconveniente de suprimir dos fundamentos da matemática certas noções intuitivas e deduzi-las a partir de outras mais artificiais. Peano mostrou que as noções de *ponto* e de *segmento* são suficientes para se construir a geometria de posição; e basta acrescentar-lhes a noção de movimento para se construir a geometria métrica. Pieri levou ainda mais longe a simplificação mostrando que toda a geometria se pode construir com as noções de *ponto* e *distância*.

É para notar ainda que a intuição sensível, embora valioso guia na escolha das premissas lógicas, não pode inspirar absoluta confiança, eivada como está das limitações sensoriais que só o espírito corrige. A *rigidez* e a *penetrabilidade*, por exemplo, são conceitos empiricamente contraditórios, mas idealmente compatíveis e de tal modo que fizemos deles atributos das figuras geométricas, para estabelecermos a congruência.

(*Continua*)

## NOTÍCIA SÔBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA EM ZÜRICH

por *Maria Pilar Ribeiro*

Já em artigos na Gazeta de Matemática dei informações sôbre alguns aspectos do ensino da Matemática na Escola Politécnica Federal de Zürich. Agora, depois de ter assistido regularmente a lições de Matemática e de Geometria Descritiva numa Escola secundária, a Oberrealschule, de Zürich, julgo útil comunicar alguns resultados das minhas primeiras observações<sup>(1)</sup>.

Vou dizer primeiramente o que é a Oberrealschule. Para isso duas palavras rápidas sôbre a maneira como está organizado o ensino em Zürich: O ensino compreende 6 anos de escola primária para a qual as crianças entram aos 6 anos. Terminados êstes os alunos podem ingressar, mediante exame de admissão, no Ginásio, onde depois de 6 anos e meio de curso, terminarão um de dois tipos de «maturité» (que permite a entrada nas escolas superiores) tipos entre os quais os alunos se repartem a partir do 3.º ano (repartição correspondente à das nossas letras e ciências). Se não desejam ingressar no ginásio, entram na Escola secundária que compreende 3 anos. No fim do 2.º ano da Escola secundária poderão ingressar, também depois dum exame de admissão, na Oberrealschule cujo curso com a duração de 4 anos e meio (repartidos em semestres) permite obter um novo tipo

de «maturité», (tipo C.) É com êste tipo de maturité que os alunos têm preparação para a Escola Politécnica Federal ou secção de Matemática das Universidades (também pode tê-la, é claro, depois do Ginásio, mas com maior dificuldade).

O fim do ensino desta escola é «procurar, por meio do ensino filológico-histórico e da matemática e ciências da natureza atingir o seguinte objectivo geral: Preparação para abordar todos os estudos científicos modernos, em particular os estudos técnicos superiores; hábitos de idéias e juízos lógicos e suas expressões claras e simples; autonomia intelectual e conhecimento dos deveres, compreensão da vida e claro sentimento de responsabilidade; interêsse pelos problemas da Sociedade e do Estado; compreensão pela cultura moderna e vida intelectual».

A escola realiza êstes objectivos por meio das seguintes disciplinas obrigatórias: Alemão, Francês, Inglês, História, Geografia, Matemática, Geometria Descritiva, Física, Prática de Física, Química, Laboratório de Química, Ciências Naturais, Desenho, Ginástica e das seguintes facultativas: Italiano, Latim, Exercícios nos laboratórios de Química, Ciências Naturais e Física, Desenho, Canto, Orquestra, Dactilografia, Stenografia e Religião.

A Matemática ocupa um número de horas semanais maior do que as outras disciplinas, e distribuídas por classes e semestres como segue: 1.ª classe 8,8; 2.ª classe 8,8; 3.ª classe 5,5; 4.ª classe 5,5 e 5.ª classe 5.

<sup>(1)</sup> Foi devido à intervenção amável do prof. Gonseth da Escola Politécnica Federal e ao franco acolhimento dos profs. Rueff e Mettler da Oberrealschule, que tive a possibilidade de seguir o ensino da matemática nesta escola.



O seu objectivo é: «Agilidade e segurança no cálculo numérico e solução de problemas da vida prática; cultivo do pensamento e demonstração lógicas; capacidade para reconhecer e analisar a matemática nos fenómenos mais simples da natureza e da técnica. Por meio de continuos exercícios: educação para o trabalho rápido e seguro».

Os alunos, ensinados desde os 14 anos, por professores (que são doutores em matemática) têm à saída da escola uma capacidade de raciocínio em matemática que julgo poder, sob muitos aspectos, nivelar-se à dos nossos alunos do 3.º ano do curso de matemática, e uma informação muito superior à exigida, oficialmente, aos alunos que saem dos nossos liceus. Assim é já, por exemplo, do domínio dos seus conhecimentos: Na álgebra: a noção de derivada e suas aplicações, em particular a problemas de máximos e mínimos; a noção de integral e aplicações. Na geometria: as noções fundamentais de geometria analítica, coordenadas rectangulares oblíquas e polares, noções de geometria vectorial, transformações de coordenadas, áreas de triângulos e polígonos, equações da recta, distância dum ponto a uma recta, ângulos de duas rectas, equação da circunferência e sua tangente, polo e polar, equações das cônicas, tangentes, polos e polares, aplicações a exercícios de lugares geométricos, introdução na geometria analítica do espaço e exercícios simples. Na trigonometria: o estudo dos triângulos oblíquângulos e estudo dos triângulos esféricos com aplicações à Astronomia.

Independentemente da matemática a cadeira de Geometria Descritiva é dada a partir do 3.º ano e ocupa um número de horas semanais assim distribuído: 3.ª classe 2,3; 4.ª classe 3,3; 5.ª classe 3. O objectivo do seu ensino é: «Educação dum clara visão dos corpos no espaço e das construções; agilidade na exacta representação das superfícies e corpos; segurança na resolução de exercícios estereométricos por meio de frequentes construções». Aqui o domínio dos conhecimentos chega à construção de sombras próprias e projectados do cilindro, cone e esfera, à representação das secções planas das superfícies de revolução, a colineação central, e transformação colinear da circunferência e às propriedades, que por aí resultam, das secções cônicas.

Os livros para o ensino secundário editados pela «Associação dos Professores de Matemática Suíços» são escritos por grupos de dois professores, escolhidos por aquela associação, e por vezes um dos professores encarregado é professor dum escola superior. O que acima aponto é só um esquema que possa permitir situar a Oberrealschule entre as escolas de Zürich.

Desde Maio do ano passado que tenho assistido às lições de Matemática e algumas de Geometria Descri-

tiva. Tenho procurado seguir aulas de tôdas as classes. O número de alunos em cada sala nunca ultrapassa 25 o que já é considerado, pelos professores, como excessivo.

O primeiro facto que me impressionou nas lições dos 1.ºs anos foi o de os alunos possuírem uma técnica de cálculo mental muito desenvolvida. Esta técnica deve começar a ser adquirida nos 3 primeiros anos da escola primária, onde se faz cálculo mental. Depois, foi a seriedade com que os alunos trabalham nas aulas. Dir-se-ia estarmos a assistir a aulas dadas a adultos cheios de curiosidade. O estudo é um trabalho muito sério e aquêles 50 minutos de aula são completamente aproveitados. Os alunos tomam uma parte activa na lição que é sempre executada tanto por êles como pelos professores, donde resulta que, fora da escola, poucas tarefas têm a executar (algum exercício que não houve tempo de levar até ao fim). Nunca vi, numa aula um aluno distraído; e é normal, durante todo o tempo de aula, tôdas as atenções convergirem para a execução dum problema ou demonstração dum teorema; e só no final os alunos tomam as suas notas. Nisto são êles também orientados pelos professores que, tendo o cuidado, nos primeiros anos, de lhes indicar o que é indispensável que escrevam, os ensinam a saberem tomar as notas nos cursos futuros.

Sempre a preocupação de economia, aliada a segurança e não automatismo leva a que na resolução quer de exercícios quer de problemas, se fuja sempre à aplicação de regras feitas ou de fórmulas. É assim que, na resolução dum equação do 2.º grau só é aplicada a fórmula resolvente se é impossível determinar imediatamente as raízes; que, por exemplo, na resolução do seguinte sistema (na 2.ª classe):

$$\frac{xy}{4x+3y} = 1, \quad \frac{xz}{5x+3z} = 1, \quad \frac{yz}{5y+4z} = 1 \text{ equivalente a}$$

$$1 = \frac{4}{y} + \frac{3}{x}; \quad 1 = \frac{5}{z} + \frac{3}{x}; \quad 1 = \frac{5}{z} + \frac{4}{y} \text{ utilizou-se a}$$

$$\text{mudança de variáveis: } \frac{3}{x} = u; \quad \frac{4}{y} = v; \quad \frac{5}{z} = t \text{ trans-}$$

formando-o num de solução imediata.

É isto é uma preocupação de todos os momentos não só da parte dos professores, como dos próprios alunos: a preocupação de executarem um trabalho mínimo de cálculos e jogarem com o máximo de idéias.

O tempo de aulas dedicado à Geometria é aproximadamente igual ao dedicado à Aritmética e Álgebra (são dadas simultaneamente durante todo o ano e se alguma é favorecida em tempo é talvez a Geometria). Talvez por isto os alunos têm uma facilidade que espanta nesta disciplina. É chocante em particular em relação à geometria no espaço, onde não encon-



tram dificuldade em imaginar e desenhar as diferentes relações entre as figuras no espaço e nunca vi, além dumas 3 tôscas régua, que funcionavam como rectas, utilizar material didactico para este fim. ¿Estará isto em relação com o facto de estudarem geometria descriptiva desde a 3.ª classe? Não sei responder ainda.

Este ano um dos professores encarregado de escrever um livro de geometria analítica, para o ensino secundário, experimentou o ensino desta disciplina (que faz parte do programa da 4.ª e 5.ª classes), empregando quasi exclusivamente, o cálculo vectorial. As vantagens que resultam deste ensino são bem conhecidas.

Na 1.ª classe quer as operações com fracções numéricas, quer as operações com fracções algébricas e simplificações são feitas durante as lições com a execução de centenas de exercicios. Dir-se-há que em cada lição não é possível executar mais do que meia dúzia e estes simples. Isto é verdade se se perde tempo a escrevê-los e a efectuá-los na pedra, mas se o professor e alunos possuírem um livro onde essas centenas de exercicios estão enunciados e se a sua resolução se puder fazer mentalmente, então em poucas lições se

terá chegado à centena (por exemplo:  $\frac{30(a^4c - b^4c)^2}{16(ac + bc)}$

ou  $\frac{5}{a^2 - b^2} + \frac{3b^2}{a^4 - b^4}$ ). É esta prática que permite na

5.ª classe quando o professor quer resolver (digo quer resolver, porque os alunos não saem nunca dos seus lugares e são sempre os professores que executam na pedra o que eles lhes vão dizendo) o seguinte problema: Se  $X_1, X_2$  e  $X_3$  são as raízes da equação  $X^3 - 2X^2 + 3X - 4 = 0$  determinar os coeficientes da equação  $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$  de raízes  $\frac{X_1 + X_2}{X_3}$ ,

$\frac{X_2 + X_3}{X_1}$ ,  $\frac{X_3 + X_1}{X_2}$  que êle se execute rapidamente,

visto que só houve necessidade de escrever o seguinte:

$$-a = \frac{X_1 + X_2}{X_3} + \frac{X_2 + X_3}{X_1} + \frac{X_3 + X_1}{X_2} =$$

$$= \frac{X_1 X_2 (X_1 + X_2) + X_2 X_3 (X_1 + X_3) + X_1 X_3 (X_2 + X_3)}{X_1 X_2 X_3} =$$

$$= \frac{(X_1 + X_2 + X_3)(X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_1) - 3 X_1 X_2 X_3}{X_1 X_2 X_3}$$

$$b = \frac{(X_1 + X_2)(X_2 + X_3)}{X_3 X_1} + \frac{(X_2 + X_3)(X_3 + X_1)}{X_1 X_2} +$$

$$+ \frac{(X_3 + X_1)(X_1 + X_2)}{X_2 X_3} = \frac{1}{X_1 X_2 X_3} \left\{ 3 X_1 X_2 X_3 + \right.$$

$$\left. + (X_1 + X_2 + X_3)(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \right\}$$

$$-c = \frac{(X_1 + X_2)(X_2 + X_3)(X_3 + X_1)}{X_1 X_2 X_3} = \frac{1}{X_1 X_2 X_3} \left\{ 2 X_1 X_2 X_3 + \right.$$

$$\left. + X_1 X_2 X_3 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) - (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) \right\}.$$

Finalmente, vou dar o sumário duma lição, uma lição de geometria numa 2.ª classe: Teoremas de semelhança de triângulos. Comparação com os teoremas de igualdade de triângulos. Foram demonstrados 3 teoremas: 1.º teorema de semelhança: dois triângulos de lados  $a_1, b_1, c_1$  e  $a_2, b_2, c_2$  e ângulos  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  e  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  respectivamente, são semelhantes se  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$  e  $\gamma_1 = \gamma_2$ , e comparação com o teorema de igualdade  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, \gamma_1 = \gamma_2$ . 2.º teorema de semelhança:  $\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$  e comparação com o teorema de igualdade  $a_1 = a_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$ . 3.º teorema de semelhança:  $a_1 : b_2 = b_1 : c_2 = c_1 : c_2$  e comparação com o teorema de igualdade  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ .

Junto alguns pontos dos exames de «maturité» do ano de 1944.

Zürich, Março de 1945

Alguns pontos de exames dos liceus — Matemática e Geometria Descritiva — exigidos para a matrícula nas Universidades e Escola Politécnica Federal. Idade média 18 anos.

### I

— 1 — Procure uma fórmula para a soma:  $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$ .

Observação: A expressão pode considerar-se como a derivada duma progressão geométrica.

— 2 — Discuta a função  $y = x - 5 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$  e represente-a gráficamente.

— 3 — Intersecte a curva  $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 7$  com as rectas  $y = ux + q$  e determine  $u$  e  $q$  de modo que cada dois dos pontos da intersecção coincidam (tangente dupla). Que coordenadas têm os pontos de tangência desta tangente dupla?

— 4 — A equação da cardioide em coordenadas polares é  $r = 2a(1 + \cos \varphi)$ . Quais os pontos da curva que estão a maior distância do eixo de simetria? Em que pontos da curva são as tangentes normais ao eixo de simetria? (Use coordenadas polares). Esboce a curva.

— 5 — Uma ellipse e uma hipérbole têm os mesmos focos com a distância focal igual a  $2c$  e os eixos menores também iguais a  $2b < 2c$ . Sob que ângulos se cortam as curvas? Quais as distâncias dos pontos de intersecção ao centro?

— 6 — Por um ponto  $P_1(x_1, y_1)$  deve passar uma circunferência  $K$ , tangente à recta  $g \equiv x = 0$  e que corta ortogonalmente a circunferência  $k \equiv x^2 - 2rx + y^2 = 0$ .

a) Determine, com régua e compasso o centro  $M$  de  $K$  quando  $x_1 = 1$  cm.,  $y_1 = 3$  cm.;  $r = 3,6$  cm..

Observação: Inversão, círculo de inversão passando por  $P_1$  e normal a  $k$ .



b) O cálculo das coordenadas de  $M$  conduz a equações do 2.º grau. A que condições devem satisfazer as coordenadas de  $P_1$  para que estas equações tenham soluções reais? Interprete geomêtricamente as condições.

c) Onde ficam os centros de tôdas as circunferências que são tangentes a  $g$  e cortam  $k$  ortogonalmente?

Oberrealschule, 14-VI-1944

Dr. J. Hablützel

## II

— 1 — Esboce o gráfico da função  $y = \frac{x^2(x+2)}{(x-1)^2}$ .

— 2 — Sejam  $x_1, x_2, x_3$ , as raízes da equação  $x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$ . Pede-se a equação cúbica cujas raízes são  $x_1 x_2 / x_3, x_2 x_3 / x_1, x_3 x_1 / x_2$ .

— 3 — Num triângulo isósceles de base  $a$  e de altura relativa à base  $h$  está inscrita a maior elipse. Determine os semi-eixos e a área.

— 4 — Pede-se o traçado da cônica  $x^2 - xy - 2y^2 + x - 5y + 7 = 0$ .

— 5 — São dadas a parábola  $y^2 = 2px$  e a circunferência de centro  $A(a, 0)$  que é tangente à parábola em dois pontos. Qual é a curva sôbre a qual ficam os pontos de tangência quando  $p$  é tomado como parâmetro?

— 6 — É dado o segmento  $\overline{AB} = 2a$ . Qual é o lugar geométrico dos pontos tais que o produto das distâncias a  $A$  e a  $B$  é igual a  $a^2$ ?

— 7 — Qual é a envolvente das polares relativamente ao círculo  $K(0, 0; a)$  dos pontos da elipse  $E(0, 0; a, b)$ ?

— 8 — Quando é que as curvas de 2.ª ordem, e curvas planas de 3.ª e 4.ª ordens, se decompõem? Justificação.

Oberrealschule, 14-VI-1944

Dr. Mettler

## III

— 1 — As raízes  $x_1, x_2, x_3$  da equação cúbica:  $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$  deverão constituir uma progressão geométrica. A que condição satisfazem os coeficientes?  $x_1, x_2, x_3$ ?

— 2 — Calcule o m. d. c. dos polinômios  $f_1(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$ ;  $f_2(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$  e resolva as equações  $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$ .

— 3 — Resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &= 0 \\ xy - 2x - 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

algébrica e gráficamente.

— 4 — Em que ponto tem a curva exponencial  $y = e^x$  a sua maior curvatura? Qual é a sua abcissa?

— 5 — Determine o tipo, a posição dos eixos e os

comprimentos dos semi-eixos de  $k_2 \equiv 5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ .

— 6 — Determine as intersecções das tangentes a  $k_3 \equiv y^2 = x^3$  com a curva e o lugar geométrico dos meios de tôdas as cordas existentes nessas tangentes. (gráfico).

— 7 — Para a família de normais à parábola  $y^2 = 2px$ , determine o lugar geométrico dos polos relativamente à parábola e discuta. (gráfico).

Oberrealschule, 14-VI-1944

Dr. G. Grimm

## IV

— 1 — Dum octaedro regular são dados o centro  $M(0; 5; 5)$  e a recta  $g \{ S_1(0; 12; 0), S_2(6; 0; 7) \}$ , que contém uma aresta. Represente o octaedro pelas suas projecções.

— 2 — É dado um parabolóide de rotação pelo foco  $F(0; 6; 6)$  e pelo vertice  $S(0; 6; 7)$  e a recta  $g$  que contém os pontos  $A(0; 6; 10)$  e  $B(-8; 6; 0)$ . Conduza por  $g$  os planos tangentes ao parabolóide.

— 3 — Dum elipsoide de rotação cujo eixo ( $2a = 12$  cm.) é perpendicular ao plano horizontal, toma-se a metade superior obtida por secção pelo plano horizontal passando pelo centro  $O(0; 6; 6)$  (raio do círculo da secção 3,5 cm.). Desenhe os limites da sombra própria e da sombra projectada no interior da metade inferior do elipsoide. (raios de luz paralelos ao plano vertical, inclinação 30°).

— 4 — Determine a curva de intersecção do cone circular recto de vértice  $S(0; 5; 8)$ , de eixo normal ao plano horizontal e com metade do ângulo de abertura igual a 30°, com a esfera:  $M(3; 7; 4), r = 3,5$  cm.

— 5 — São dados os 3 pontos  $A(6; 4; 3,5)$ ,  $B(4; 6; 3,5)$  e  $C(-2; 3; 1,5)$ . Desenhe os traços dos planos que distam  $a = 3,5$  cm. de  $A$ ,  $b = 2,5$  cm. de  $B$  e  $c = 1,5$  cm. de  $C$ .

— 6 — O plano  $E$  é dado pelos 3 pontos  $A(-7; 0; 0)$ ,  $B(0; 12; 0)$  e  $M(0; 5; 4)$ .  $M$  é o centro duma circunferência do plano  $E$ . Determine o raio da circunferência de modo que a sua sombra obtida a partir do centro de luz  $L(7; 3; 7)$  sôbre o plano horizontal seja uma parábola, e desenhe esta parábola.

Oberrealschule, 17-VI-1944

Dr. Billeter

## V

— 1 — Duma esfera são dados o plano tangente  $\pi_1^*$ , a recta  $S_1(0; 7; 0)$ ,  $B(4; 3; 4)$  tangente no ponto  $B$  e o ponto  $P(-1; 2; 6)$ . Determine o centro e o raio.

‡ Nota do tradutor:  $k_n$  designará sempre uma curva de ordem  $n$ .



— 2 — São dados dois planos paralelos  $E_1$  e  $E_2$  (pontos de intersecção dos traços em  $-4$  e  $-10$ ; os traços horizontais fazem um ângulo de  $60^\circ$  e os verticais de  $30^\circ$  com o semi-eixo positivo dos  $xx^*$ ) e uma recta  $g$  pelos seus traços  $S_1 (0; 2; 0)$ ,  $S_2 (-2; 0; -3)$ . Determine os traços dum plano que passe pela recta  $g$  e corte os dois planos paralelos dando uma banda de largura 5. (Dar ambas as soluções).

— 3 — São dados um prisma oblíquo com uma base regular de 6 lados, assente no plano  $\pi_1^*$ , e um octaedro regular. Determine, para a iluminação convencional, a sombra do octaedro sobre o prisma. (Disposição prescrita).

— 4 — Um cilindro circular oblíquo e um cone circular oblíquo têm o mesmo círculo director em  $\pi_1^*$  de centro  $M (-3; 11; 0)$  e raio 4. O eixo do cilindro é uma recta de frente cuja projecção vertical faz um ângulo de  $135^\circ$  com a parte positiva do eixo dos  $xx^*$ . O vértice do cone é  $S (5; 0; 5)$ . Desenhe a intersecção das duas superfícies, em particular os pontos de tangente horizontal e de frente.

— 5 — Dum paraboloide de rotação aberto para baixo são dados o foco  $F (3; 6; 9)$  e o plano horizontal com a cota 11 como plano director. O paraboloide é cortado pelo plano horizontal de cota 7 e fechado para baixo por uma esfera tangente. Determine a sombra própria da superfície oval assim construída por iluminação de centro  $L (-2; 6; 9)$ .

— 6 — São dados uma esfera de centro  $M (0; 6; 4)$  tangente ao plano  $\pi_1^*$  e uma superfície cónica de rotação com o vértice  $S (-3; 6; 8)$ ; uma secção plana axial deste cone é obtida pela projecção horizontal de  $S$  e pela paralela ao eixo dos  $xx^*$  passando por  $S$ ; o eixo corta a superfície esférica. Desenhe as duas projecções da intersecção das superfícies e determine em particular as tangentes no ponto duplo.

Oberrealschule, 16-VI-1944

Dr. M. Rueff

\* Nota do tradutor:  $\pi_1$  representa o plano horizontal de cota 0 e o eixo dos  $xx$  a linha de terra.

## MOVIMENTO MATEMÁTICO

### MOVIMENTO MATEMÁTICO ESPANHOL

De novo a «Gazeta de Matemática» tem o prazer de apresentar aos seus leitores algumas notas sobre a actividade dos centros científicos de Barcelona no campo das ciências matemáticas. A notícia que segue é devida ao Prof. Dr. Francisco Sanviséns, nosso colaborador em Barcelona.

#### Trabajos de investigación

Entre los trabajos de investigación realizados por los Profesores y Colaboradores del Seminario Matemático de Barcelona en el año de 1944, cabe citar los siguientes, publicados en la «Revista Matemática Hispano-Americana»:

«Nota sobre los fundamentos de la geometría intrínseca de un espacio de Riemann», por F. Botella Raduán. — «Las indicatrices de los funcionales analíticos  $n$ -lineales y su aplicación a la integración de funciones racionales», por F. Sanviséns. — «Convergencia de algunos valores medios», por J. M<sup>a</sup> Orts. — «Caracterización de un funcional lineal por los valores que toma sobre una línea analítica», por J. Augé. — «Sobre ciertas probabilidades iteradas», por J. M<sup>a</sup> Orts.

También los becarios de dicho Seminario Matemático han colaborado en «Matemática Elemental», habiendo merecido el artículo del becario E. Figueras Calsina, «Distribución de las sobreaceleraciones en un movimiento rígido plano», el premio que otorga dicha publicación en el Concurso anual.

#### Cursos monográficos

A raíz de la concesión de validez académica para el Doctorado en Ciencias Matemáticas a los cursos superiores profesados en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona, honor de carácter singular y por primera vez concedido a una Universidad de provincias, en el año escolar 1944-45 han sido desarrollados los siguientes cursos monográficos:

Profesor Dr. D. José M<sup>a</sup> Orts: Curso de Análisis Superior: I. Los teoremas de Picard. — II. Familias normales de funciones analíticas.

Profesor Dr. D. Francisco Botella: Curso de Estudios superiores de Geometría: Geometría diferencial y de los espacios.

Profesor Dr. D. Francisco Sanviséns: Curso de Mecánica Celeste: estudio del estado actual del problema de los tres cuerpos e Introducción a la Teoría de las perturbaciones.

Profesor Dr. D. Juan Augé: Ecuaciones integrales y Cálculo de variaciones.



### Exposición bibliográfica del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Durante el pasado mes de abril, tuvo lugar en Barcelona la Exposición de los trabajos realizados en el último quinquenio por los diversos Institutos y Centros cuyas actividades se desarrollan bajo los auspicios del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. En dicha Exposición se hizo patente la aportación del Seminario Matemático de Barcelona al intenso movimiento cultural, realizado en España bajo el patronato del citado Consejo.

### Trabajo del Prof. J. M<sup>a</sup>. Orts, en la Academia de Ciencias de Barcelona

El Director del Seminario Matemático Prof. Dr. D. J. M<sup>a</sup>. Orts, ha presentado recientemente una Memoria acerca del «Método recurrente en Cálculo de probabilidades», en donde a más de exponer las ventajas de dicho método para la rápida evaluación de ciertas probabilidades, se hace patente su importancia dentro de las cuestiones de convergencia que se plantean dentro de la teoría de las variables aleatorias en cadena.

## SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Num hem elaborado relatório, que Sua Ex.<sup>a</sup> o Ministro da Educação Nacional se dignou de aceitar no louvável propósito de nada desprezar de quanto possa trazer beneficios reais ao ensino liceal, emitiu a S. P. M. o seu parecer sobre a nova organização do ensino da Matemática nos Liceus.

Dada a categoria científica das pessoas que elaboraram esse parecer e a sua longa prática no ensino da Matemática, não ficaríamos surpreendidos se a própria Secção de Matemática da Comissão da Reforma o tomasse como base de discussão.

A Direcção da S. P. M. está actualmente empenhada numa grande campanha de propaganda pró Sociedade, em todo o País. Se o resultado immediato dessa campanha se pretende que seja a inscrição de novos sócios, ela não deixa de constituir um verdadeiro inquérito sobre o interesse e boa vontade dos que se dedicam à Matemática.

Foram já dirigidas circulares aos licenciados e engenheiros geógrafos pela Faculdade de Ciências de Lisboa. Para elas chamamos a atenção dos leitores da *Gazeta* que ainda não são sócios da S. P. M.

Está já constituída a Comissão de Propaganda do Pôrto, que vai iniciar os seus trabalhos, e em via de constituição a Comissão de Coimbra. Seria interessante que estas Comissões conseguissem um número de sócios suficiente para a criação de núcleos com auto-

nomia científica como é previsto nos Estatutos da Sociedade.

Oportunamente será dado a conhecer o plano geral dos trabalhos científicos da Sociedade, que está sendo elaborado pela Direcção.

Podemos, porém, desde já anunciar uma série de conferências, sob o tema geral «**Alguns aspectos actuais da Matemática na Física**» que, obsequiosamente, vêm realizar na Faculdade de Ciências de Lisboa alguns professores da Faculdade de Ciências do Pôrto.

São as seguintes as lições:

RUI LUÍS GOMES, *Espaço de Hilbert e Mecânica Quântica*, em 23 de Maio.

ANTÓNIO ALMEIDA E COSTA, *Álgebras e Mecânica Quântica*; Os grupos de representação em Quântica — Representação das Álgebras, em 25 e 26 de Maio.

LUÍS NEVES REAL, *Teoria da Medida e Mecânica Clássica*; Transformações que conservam a medida — Ergodicidade e transitividade métrica, em 28 e 29 de Maio.

ALFREDO PEREIRA GOMES, *Topologia e ergodicidade*; A definição de uma topologia — Os automorfismos ergódicos como sub-conjunto dum grupo topológico, em 31 de Maio e 1 de Junho.

RUI LUÍS GOMES, *Teoria da medida e Mecânica Quântica*, em 2 de Junho.

## MATEMÁTICAS ELEMENTARES

### EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

Licenciatura em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo — Agosto de 1944 — Ponto n.º 2

1978 — Determine  $a$  de modo que as duas equações:  $x^2 + ax + 1 = 0$ ;  $x^2 + x + a = 0$  tenham uma raíz comum. R: Se fôr  $x_1$  a raíz comum vem  $(a-1)x_1 = a-1$ ;

$x_1 = 1$  e portanto  $a = -2$ . Para  $a = 1$  as equações não seriam distintas.

1979 — Utilizando a fórmula do binómio de Newton, desenvolva  $(a+b+c)^3$ . R:  $(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc)$ .



**1980** — Uma pessoa viaja fazendo 7 léguas em 5 horas. Passadas 8 horas outra pessoa parte do mesmo local e segue o mesmo itinerário fazendo 5 léguas em 3 horas.  $\zeta$  Quantas léguas percorrerá a primeira antes de ser atingida pela segunda? R: Como a primeira se atraza por hora  $5/3 - 7/5 = 4/15$  de légua, deverá caminhar durante  $8 + \frac{8 \times 7/5}{4/15} = 50$  horas e percorrerá portanto 70 léguas.

Da fórmula  $t = e/v$  deduz-se para equação do problema  $\frac{x}{7/5} = \frac{x}{5/3} + 8$ , que nos dá também  $x = 70$  léguas.

**1981** — Verifique a identidade  $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} a}{1 + \cos a}$ .

R:  $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} a/2}{\cos a/2} = \frac{2 \operatorname{sen} a/2 \cos a/2}{2 \cos a/2 \cos a/2} = \frac{\operatorname{sen} a}{1 + \cos a}$ .

**1982** — A corda de uma circunferência cujo diâmetro mede  $27^m,56$  tem de comprimento  $15^m,33$ . Calcule por logaritmos o ângulo das duas semi-rectas que unem o centro da circunferência com os extremos da corda.

R:  $\operatorname{Sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{15,33}{27,56}$ . Aplicando logaritmos:

$\log \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \log 15,33 + \operatorname{colog} 27,56 = 1,18554 + 2,55972 = 1,74526$ .

$\frac{\alpha}{2} = 33^\circ 47' 44'',2$  ou  $\alpha = 67^\circ 35' 28'',4$ .

**1983** — Sem recorrer às tábuas de logaritmos, calcule as funções circulares (seno, coseno, tangente, cotangente e cosecante) do ângulo  $-1125^\circ$ .

R:  $-1125^\circ = -3 \times 360^\circ - 45^\circ$  e portanto:

$-\operatorname{sen}(-1125^\circ) = \operatorname{cos}(-1125^\circ) = \sqrt{2}/2$

$\operatorname{tg}(-1125^\circ) = \operatorname{cotg}(-1125^\circ) = -1$

$\operatorname{sec}(-1125^\circ) = -\operatorname{cosec}(-1125^\circ) = \sqrt{2}$ .

**1984** — Duas circunferências são tangentes interiormente no ponto A. Pelo ponto B diametralmente oposto a A, na circunferência de maior raio, tire a corda BC, tangente à circunferência interior num ponto D. Demonstre que AD é a bissetriz do ângulo BÂC. R: Seja O o centro da circunferência de maior raio. Como AC||OD por serem ambas perpendiculares a BC, CÂD = ADO. Finalmente, por ser isósceles o triângulo [AOD], CÂD = DÂB, q. e. d.

**1985** — Indique como se devem determinar os centros das circunferências de raio dado R e que interceptam, sobre duas rectas concorrentes dadas, cordas de comprimentos  $c_1$  e  $c_2$  também dados. ( $c_1 < 2R$ ;  $c_2 < 2R$ ). R: Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as rectas dadas. O lugar geométrico dos centros das circunferências que determinam em  $r_1$  cordas de comprimento  $c_1$  é constituído por duas rectas a e a', paralelas a  $r_1$  e à distância  $d_1 = \sqrt{4R^2 - c_1^2}/2$

desta recta. O lugar dos centros das circunferências que em  $r_2$  determinam cordas de comprimento  $c_2$  será formado pelas duas rectas b e b' paralelas a  $r_2$  e que distam dela  $\sqrt{4R^2 - c_2^2}/2$ .

As rectas a, a', b, b', interceptam-se em 4 pontos que satisfazem ao problema.

Soluções dos n.ºs 1978-a-1985 de Fernando Roldão Dias Agudo (aluno do 2.º ano da F. C. L.)

**I. S. C. E. F. — Exame de aptidão — Julho 1944 — Ponto n.º 1.**

As respostas e as passagens essenciais das resoluções devem ser justificadas. Afirmações não justificadas consideram-se como não feitas.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais o n.º 1.

**1986** — A proporcionalidade na geometria; propriedades mais importantes.

ARITMÉTICA

**1987** — Verificar a identidade

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \dots n} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot n} = \frac{1}{2(n-2)!}$$

R: Notando que  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)(k+1) \dots n = n!/k$ , o 1.º membro pode escrever-se

$$\frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + \frac{3}{n!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = \frac{n(n-1)}{2} : n! = \frac{1}{2(n-2)!}$$

c. q. p.

ÁLGEBRA

**1988** — Resolver a inequação  $(x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x^2-x-6) > 0$ . R: Por ser  $(x+1)^2 > 0$  qualquer que seja  $x \neq -1$  real, bastará estudar o sinal do produto  $(x-2)(x^2-x-6)$  que é positivo para  $-2 < x < 2$  e  $x > 3$ . Do intervalo  $(-2, 2)$  deve excluir-se o valor  $x = -1$  que anula o 1.º membro da desigualdade.

GEOMETRIA

**1989** — São dados um cilindro e um tronco de cone, ambos com a mesma altura e tais que a base maior do tronco coincide com uma das bases do cilindro. Determinar a razão dos raios das bases do tronco de modo que o volume do cilindro seja n vezes o do tronco.  $\zeta$  Existe algum valor que n não possa ultrapassar? R: Considerem-se um cilindro e um tronco de cone de revolução nas condições do problema, de altura comum h, de volumes respectivamente  $V_1 = \pi R^2 \cdot h$  e  $V_2 = \pi h/3 \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$  sendo R e r ( $R > r$ ) os raios das bases do tronco. Terá que ser  $V_1 = n V_2$  ou  $(n-3)z^2 + nz + n = 0$ , sendo  $z = R/r$ , ( $r \neq 0$ ); portanto,  $z = (-n \pm \sqrt{n(12-3n)})/2(n-3)$ .



É evidente que  $n$  não pode ultrapassar o valor 3 caso em que o tronco de cone se reduziria a um cone. Tal resultado se concluiria da discussão da equação acima. Das 2 soluções apenas convém ao problema,

$$z = (-n - \sqrt{n(12-3n)}) / 2(n-3).$$

## TRIGONOMETRIA

**1990** — Calcular a soma das potências de expoente  $n$  dos senos de quatro ângulos em progressão aritmética de razão  $\pi/2$ . Discussão.

$$R: S = \sin^n(\alpha - \pi/2) + \sin^n \alpha + \sin^n(\alpha + \pi/2) + \sin^n(\alpha + \pi) = (-1)^n \cdot \cos^n \alpha + \sin^n \alpha + \cos^n \alpha + (-1)^n \sin^n \alpha.$$

$$\text{Se } n = 2K \rightarrow S = 2(\cos^n \alpha + \sin^n \alpha)$$

$$\text{Se } n = 2K+1 \rightarrow S = 0. \quad (K \text{ inteiro}).$$

## CÁLCULO NUMÉRICO

**1991** — Calcular o valor numérico da expressão

$$X = \frac{(1-1/x)^3 \cdot (1+1/x)^3}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \text{ para } x = \sin 18^\circ 30'.$$

R: Efectuando as operações e simplificando vem:

$$X = \frac{(x^2-1)(x+1)}{x^6} = \frac{-\cos^2 \alpha (\sin \alpha + 1)}{\sin^6 \alpha} \text{ (com } \alpha = 18^\circ 30')$$

Tendo em conta que

$$\sin a + \sin b = 2 \sin(a+b)/2 \cdot \cos(a-b)/2 \text{ virá:}$$

$$|X| = \frac{2 \cos^2(18^\circ 30') \sin(54^\circ 15') \cos(35^\circ 45')}{\sin^6(18^\circ 30')}$$

Aplicando logaritmos e efectuando as operações ter-se-ia  $X = -1160,75615$ .

Soluções dos n.ºs 1987 a 1991 de O. Morbey Rodrigues.

**I. S. T.** — 1.ª prova escrita — 19 de Outubro de 1944  
Ponto n.º 4.

**1992** — Três sócios constituem uma sociedade com as cotas de 130, 42 e 780 contos, respectivamente.

Cada um deles deverá exercer a gerência na ausência dos outros dois e estipula-se que o número de dias de trabalho de cada um será inversamente proporcional à respectiva cota.

Supondo que em cada ano há apenas 305 dias úteis, quantos desses dias deve durar a gerência de cada sócio? R: Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente os números de dias úteis de trabalho que deve durar a gerência de cada um dos sócios. Dada a primeira condição (proporcionalidade inversa) deverá ser  $130x = 420y = 780z$ . Por outro lado, dado que a gerência de cada um se efectua na ausência dos outros dois sócios, é  $x + y + z = 305$ . O sistema constituído pelas equações  $13x = 42y$ ;  $x = 6z$

$$\text{e } x + y + z = 305, \text{ cujas soluções são } x = 206 \frac{19}{31}, y = 63 \frac{59}{62}$$

$$\text{e } z = 34 \frac{27}{62}, \text{ resolve o problema.}$$

**1993** — Verifique que é igual a 1 o valor numérico da expressão  $(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{1/2}(1-bx)^{-1/2}$  para  $x = a^{-1}(2a/b-1)^{1/2}$ . R: Pelo enunciado do problema temos:  $ax = b^{-1/2}(2a-b)^{1/2}$  e  $bx = a^{-1}b^{1/2}(2a-b)^{1/2}$  e por substituição na expressão dada obtém-se:

$$[1 - b^{-1/2}(2a-b)^{1/2}] \cdot [1 + b^{-1/2}(2a-b)^{1/2}]^{-1} \cdot$$

$$\cdot [1 + a^{-1}b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{1/2} \cdot [1 - a^{-1}b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{-1/2}.$$

Ora os dois últimos colchetes podem escrever-se sob a forma

$$a^{1/2} a^{-1/2} [a + b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{1/2} \cdot [a - b^{1/2}(2a-b)^{1/2}]^{-1/2}$$

e transformando os dois últimos factores, que são radicais duplos, na soma e diferença de radicais simples obtém-se para valor da expressão o seguinte:

$$\begin{aligned} & 1 - \sqrt{\frac{2a-b}{b}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2a-b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}}{\sqrt{\frac{2a-b}{b}} + \sqrt{\frac{2a-b}{2}} - \sqrt{\frac{2a-b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}} = \\ & 1 + \sqrt{\frac{2a-b}{b}} - \frac{\sqrt{\frac{2a-b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}}{\sqrt{\frac{2a-b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}} = \\ & \frac{\sqrt{\frac{2a-b}{2}} + \frac{b}{2} - \frac{2a-b}{\sqrt{2b}} - \sqrt{\frac{2a-b}{2}}}{\sqrt{\frac{2a-b}{2}} + \frac{b}{2} - \frac{2a-b}{\sqrt{2b}} + \sqrt{\frac{2a-b}{2}}} = 1. \end{aligned}$$

**1994** — Num triângulo isósceles os raios das circunferências circunscrita e inscrita medem 8 e 3 centímetros, respectivamente. Quanto medem a base e a altura? R: Seja o triângulo  $[ABC]$  de base  $\overline{BC} = 2a$  em que  $M$  é o ponto médio de  $\overline{BC}$ , isto é,  $\overline{MB} = \overline{MC} = a$ . Sejam  $\overline{AB} = \overline{AC} = b$  os lados iguais,  $I$  o centro da circunferência inscrita e  $O$  o centro da circunferência circunscrita ao triângulo; será então  $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = 8$  cm,  $\overline{MI} = 3$  cm, existindo  $I$  e  $O$  sobre o segmento  $\overline{AM}$ , altura do triângulo, que designaremos por  $h$ . Designaremos ainda por  $2\beta$  o ângulo que cada lado igual forma com a base e por  $2\alpha$  o ângulo oposto à base. Do triângulo  $[ABM]$  tira-se: (1)  $h = a \operatorname{tg} 2\beta$ , (2)  $\sin \alpha = a : (h^2 + a^2)^{1/2}$  e (3)  $\cos \alpha = a : (h^2 + a^2)^{1/2}$ . Do triângulo  $[IMB]$  tira-se: (4)  $\operatorname{tg} \beta = 3 : a$ , (5)  $\sin \beta = 3 : (a^2 + 9)^{1/2}$  e (6)  $\cos \beta = a : (a^2 + 9)^{1/2}$ . Finalmente do triângulo  $[BOI]$  deduz-se (7) 8:  $\cos \beta = (h-11) : \sin(\beta-\alpha)$ . Ora (8)  $\sin(\beta-\alpha) = (3h-a^2) : [(a^2-9)^{1/2} \cdot (h^2+a^2)^{1/2}]$  e como de (1) e (4) se deduz  $h = 6a^2 : (a^2-9)$  ou (9)  $a = 3h^{1/2} (h-6)^{-1/2}$  virá por substituição em (8) e (7):  $24h - 8a^2 = a(h-11) \cdot (h-3) \cdot h^{1/2} (h-6)^{-1/2}$  ou  $24h - 216 = 3 \cdot (h-3)(h-11)$  e finalmente  $h^2 - 22h + 105 = 0$  o que dá  $h_1 = 15$  e  $h_2 = 7$  valores que substituídos em (9) dão  $a_1 = \sqrt{15}$  e  $a_2 = 3\sqrt{7}$ . De modo que o problema tem duas soluções  $h_1 = 15$  e  $2a_1 = 2\sqrt{15}$  e  $h_2 = 7$  com  $2a_2 = 6\sqrt{7}$ .



**1995** — A área de um círculo menor de uma esfera de raio  $r$  é igual à diferença das áreas das zonas em que esse círculo divide a superfície esférica. Determine a distância do centro dessa esfera: 1.º Ao plano do círculo considerado; 2.º Ao vértice do cone tangente à esfera segundo o círculo. R: Se for  $h$  a distância do centro da esfera ao plano do círculo considerado será  $\sqrt{r^2 - h^2}$  o raio desse círculo e por isso a sua área é  $\pi(r^2 - h^2)$ ; por outro lado as alturas das duas zonas em que a esfera fica dividida são  $r-h$  e  $r+h$  de modo que a diferença das suas áreas é  $2\pi r(r+h) - 2\pi r(r-h) = -4\pi rh$  logo  $r^2 - h^2 = 4rh$  e  $h^2 + 4rh - r^2 = 0$  ou  $h = -2r \pm \sqrt{4r^2 + r^2} = r(-2 \pm \sqrt{5})$ , donde a distância pedida na primeira alínea  $h = r(\sqrt{5} - 2)$ . Se for  $d$  a distância da esfera ao vértice do cone referido na segunda alínea é  $r^2 = h \cdot d$  e por isso  $d = r^2 : [r(\sqrt{5} - 2)] = r(\sqrt{5} + 2)$ .

**1996** — Determine  $\sin \frac{a}{2}$ ,  $\cos \frac{a}{2}$ , sabendo que  $\operatorname{tg} a = -24/7$ .

R: Como  $\cos a/2 = \pm \sqrt{[(1 + \operatorname{tg}^2 a)^{1/2} + 1] : [2(1 + \operatorname{tg} a)^{1/2}]}$  vem  $\cos a/2 = \pm 4/5$  ou  $\cos a/2 = \pm 3/5$  e como  $\sin a/2 = \pm \sqrt{[(1 + \operatorname{tg}^2 a)^{1/2} \mp 1] : [2(1 + \operatorname{tg}^2 a)^{1/2}]}$  vem  $\sin a/2 = \pm 3/5$  ou  $\sin a/2 = \pm 4/5$ , correspondendo-se como se reconhece facilmente  $\sin a/2 = \pm 3/5$  com  $\cos a/2 = \mp 4/5$  e  $\cos a/2 = \pm 3/5$  com  $\sin a/2 = \pm 4/5$ .

**1997** — Mostre que a relação  $\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$  arrasta ou  $a-b = k\pi$  ou  $a+b = k\pi + \pi/2$ . R: Como  $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$  vem  $\sin(a-b) = \sin(a-b) \cdot \sin(a+b)$ , igualdade que é verificada quando  $\sin(a-b) = 0$  e então  $a-b = k\pi$ ; ou quando  $\sin(a+b) = 1$  e então  $a+b = \pi/2 + k\pi$ .

Soluções dos n.ºs 1992 a 1997 de J. da Silva Paulo.

## MATEMÁTICAS SUPERIORES

### PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

### ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

**F. C. C.** — ÁLGEBRA SUPERIOR — 2.º Exame de frequência, Maio de 1944.

**1998** — Prove que a equação  $x^n - x^{n+4} + k = 0$  não pode ter raízes inteiras quando  $k$  é ímpar. R: Se  $f(x)$  admite a raiz inteira  $a$ , em virtude da igualdade  $f(N) = (N-a) \cdot Q(N)$  ( $N$  inteiro), será:  $f(1) = k$  múltiplo de  $a-1$  e  $f(0) = k$  múltiplo de  $a$ . Como  $a$  e  $a-1$  são números consecutivos, um deles, com  $f(1)$  ou  $f(0)$ , será divisível por 2, o que é manifestamente impossível por  $k$  ser ímpar. c. q. d.

**1999** — Calcule pelo método das partes proporcionais a raiz negativa da equação  $3x^3 - 7x^2 + 4 = 0$ . R: Numa primeira aproximação o valor da raiz é  $-17/23$ .

**2000** — Prove que num triângulo esférico retângulo se tem  $\operatorname{tag} b \cdot \operatorname{tag} c = 2$  quando  $a+b+c = 180^\circ$ . R: Pelas fórmulas de Nepper (1)  $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ ; mas também (2)  $\cos a = \cos [180^\circ - (b+c)] = -\cos b \cos c + \sin b \sin c$ . Somando as duas igualdades e dividindo o resultado por (1), vem:  $2 = \operatorname{tag} b \cdot \operatorname{tag} c$ . c. q. d.

**2001** — Determine a equação do plano que passa pelo ponto  $(0, 1, 2)$ , é perpendicular ao plano  $y - 2z = 1$  e define com os planos coordenados um tetraedro de volume  $1/3$ . R:  $16x + 2y + z = 8$ .

Soluções dos n.ºs 1998 a 2001 de Carlos Pedro de Jesus, aluno do 2.º ano da Faculdade de Ciências de Coimbra.

**I. S. C. E. F.** — ÁLGEBRA SUPERIOR — I.ª cadeira — I.ª Prova de frequência teórica. 16-2-944.

**2002** — A operação de potenciação. Seus problemas. Seu estudo através os vários conjuntos numéricos.

**2003** — Mostrar que o conjunto dos números complexos da forma  $m + in$  onde  $m$  e  $n$  são inteiros quaisquer, positivos ou negativos, é um domínio inteiro. É esse conjunto também um campo? Justifique a resposta. Examine as mesmas questões na hipótese de  $m$  e  $n$  serem inteiros e positivos.

**2004** — Estudar a invertibilidade da função  $y(x)$  assim definida:

$$x \text{ racional} \rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$x \text{ irracional} \rightarrow y = -\frac{1}{x} \quad (x \text{ variável real}).$$

O que pode dizer a respeito da imagem geométrica da função  $y(x)$  e da sua inversa, se existe?

**I. S. C. E. F.** — I.ª Cadeira — 2.º Exame de Frequência (15-6-944).

**2005** — Conceito de convergência; sua importância, seus aspectos; problemas que resolvem.



**2006** — No intervalo  $(0,1)$  é definida uma função real de variável real  $y(x)$  do modo seguinte  
 $0 \leq x < 1/4$   $y = x/2$ ;  $1/4 \leq x < 1/2$   $y = x - 1/8$ ;  
 $1/2 \leq x < 3/4$   $y = x/2 + 1/8$ ;  $3/4 \leq x \leq 1$   $y = x - 1/4$   
 Representa-la geomêtricamente.

Estudar e representar geomêtricamente a sua derivada.

É aplicável à derivada  $y'(x)$  o teorema de Darboux? E o teorema sobre a natureza das descontinuidades das funções derivadas? Razões.

**I. S. C. E. F. — 2.º Exame de frequência — (22-6-1944).**

**2007** — No livro «Exposition élémentaire des calculs supérieures» de Simon L'Huilier, publicado em 1786, encontra-se a seguinte passagem:

«Se uma quantidade variável, susceptível de limite, goza constantemente duma certa propriedade, o seu limite goza da mesma propriedade».

Comente esta passagem.

Nalguns casos, procuraram-se modificações dos conceitos de modo tal que a afirmação de L'Huilier seja verdadeira. Quais? e como?

**2008** — Na teoria dos complexos prova-se que as potências de expoente inteiro de complexos conjugados são complexos conjugados. Examine se esta propriedade se mantém para expoente real qualquer.

**2009** — Estude o comportamento da função  $y = e^{\log \frac{1}{x}}$  na vizinhança do ponto  $x=0$ .

**I. S. A. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame, Maio de 1944.**

**2010** — Calcule  $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{tg^2 x - tg^2 a}{x - a}$ .

$$R: L = \lim_{x \rightarrow a} \left( tg x + tg a \right) \cdot \frac{tg x - tg a}{x - a} =$$

$$= 2 tg a \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x-a)}{(x-a) \cos x \cos a} = 2 tg a \cdot \frac{1}{\cos^2 a}$$

Pode chegar-se, mais rapidamente, ao mesmo resultado notando que o limite em questão é a derivada, no ponto  $a$ , da função  $tg^2 x$ , isto é  $L = \left( tg^2 x \right)'_{x=a} =$

$$= \left( 2 tg x \sec^2 x \right)'_{x=a} = 2 tg a \sec^2 a.$$

**2011** — Represente gráficamente as funções:

a)  $y = 3x - 1$ , b)  $y = 2|x| + 3$  e c)  $y = x \cdot I(x) - 1$  (esta última só no intervalo  $[0, 3]$ ). Indique os contradomínios correspondentes. R: a) Representa uma recta. O contradomínio é o eixo das ordenadas. b) Representa duas semi-rectas com o ponto comum  $(0, 3)$ . Tem-se

$$y = 2|x| + 3 = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x \geq 0 \\ -2x + 3 & \text{para } x \leq 0. \end{cases}$$

O contradomínio é a semi-recta  $x=0$   $y \geq 3$ . c) O gráfico é o conjunto dos 3 segmentos rectilíneos definidos por  $0 \leq x < 1$   $y = -1$ ;  $1 \leq x < 2$   $y = x - 1$ ; e  $2 \leq x < 3$   $y = 2x - 1$  e do ponto  $(3, 8)$ .

**2012** — Determine a probabilidade de uma soma de pontos pelo menos igual a 10 no lançamento de 2 dados. R: Os casos favoráveis que correspondem a somas de pontos iguais a 10, 11 e 12 são em número, respectivamente, de 3, 2 e 1.

O número de casos igualmente possíveis é  $6^2$ .

$$A \text{ probabilidade pedida é pois } \frac{3+2+1}{36} = \frac{1}{6}.$$

**2013** — Defina e dê exemplos de funções monotónicas num intervalo. O mesmo para funções pares, ímpares e periódicas.

Soluções dos n.ºs 2010 a 2012 de António Gonçalves dos Santos Júnior (aluno do 2.º ano do I. S. A.).

## CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

**I. S. A. — CÁLCULO — 2.º Exame de frequência — 24 de Maio de 1944.**

**2014** — Dada a função  $z = (\text{sen } x)^{\log \cot x}$  calcule  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**2015** — Calcule  $I = \int x \cos^3 x \, dx$ . R: Fazendo  $u = x \cos x$ ,  $dv = \cos x$ , vem

$$I = \frac{x \cos x \text{ sen } x}{2} - \frac{\text{sen}^2 x}{4} + \frac{x^2}{4} + C.$$

**2016** — Mostre que se a função  $y = f(x)$  derivável, é crescente na vizinhança do ponto  $(x, y)$ , a sua deri-

vada de primeira ordem é positiva na vizinhança do mesmo ponto.

**2017** — Um círculo de raio  $r$  é dividido em dois segmentos por uma linha recta  $g$  à distância  $h$  do centro. Qual é o rectângulo de área máxima que se pode inscrever no mais pequeno dos segmentos? R: Designando por  $l$  a altura do rectângulo é

$$A = 2 \sqrt{r^2 - (h+l)^2} \cdot l \text{ donde } l = \frac{-3h + \sqrt{9h^2 + 8r^2}}{4}.$$

**2018** — Calcule, aplicando directamente a definição de integral como limite de uma soma,  $\int_0^b x^3 \, dx$ .



$$R: I = \int_0^b x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j^3 \Delta x; \text{ mas } x_j = j \Delta x \text{ e } \Delta x = b/n, \text{ logo } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (j \Delta x)^3 \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (n+1)^3 b^4}{4 n^4} = \frac{b^4}{4}.$$

**2019** — Calcule, aplicando directamente a definição de integral como limite de uma soma,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1^2 + n^2} + \frac{1}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right) n. \text{ R: Pode escrever-se } L = \lim_{j=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n^2}{j^2 + n^2} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{j=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + x_j^2} \Delta x \text{ se fizermos } \frac{1}{n} = \Delta x \text{ e } x_j = j \Delta x, \text{ donde } L = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

**2020** — A soma de  $n$  quantidades variáveis reais e positivas é constante e igual a  $C$ . Para que valores dessas quantidades é máximo o seu produto? R: Da função  $F_1 \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$  e da equação de condição  $F_2 \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n - C = 0$  obtém-se o sistema de estacionariedade  $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = C \\ \delta(F_1, F_2) \\ \delta(x_1, x_j) \end{cases} = 0 \text{ (} j=2,3,\dots,n \text{) donde } x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{C}{n}.$

Soluções dos n.º 2014 a 2020 de F. de Carvalho Araújo.

**I. S. T. — CÁLCULO — 1.º Exame de frequência — 1944**

**2021** — Determinar as ordenadas máximas e mínimas da cónica  $x^2 + 4y^2 + 2x + y + 1 = 0$ . R: Do sistema de estacionariedade:  $\begin{cases} f = x^2 + 4y^2 + 2x + y + 1 = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta x} = 2x + 2 = 0 \end{cases}$

deduz-se:  $x = -1, y = 0$  (máximo) e  $x = -1, y = -1/4$  (mínimo) não havendo necessidade de calcular as derivadas de 2.ª ordem para se concluir da natureza dos pontos de estacionariedade por se tratar de uma elipse.

(Note-se que o anulamento de  $\frac{\delta f}{\delta x}$  promove de facto o anulamento de  $\frac{dy}{dx}$ ; visto não se anular  $\frac{\delta f}{\delta y} = 8y + 1$  tanto para  $y = 0$  como para  $y = -1/4$ ).

**2022** — Calcular:  $I = \int \frac{x^{-1/2} dx}{(1-x^3)(2x^3-1)^{1/6}}$ .

R: Fazendo a mudança de variável:  $2x^3 - 1 = x^3 u^6$  donde  $dx = 2x^4 u^5 du$ , racionaliza-se a função integranda:  $I = 2 \int \frac{u^4 du}{1-u^6} = 2 \int \frac{u^4 du}{(1-u)(1+u)(1+u+u^2)(1-u+u^2)}$ .

Aplicando a regra de Fubini:

$$I = \frac{1}{6} \log \frac{(1+u)^2 (1+u+u^2)}{(1-u)^2 (1-u+u^2)} - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{3} \cdot \frac{u}{1-u^2} \right] + c, \text{ onde: } u = (2-x^3)^{1/6}.$$

**2023** — Estudar a convergência do integral:

$$I = \int_0^{\infty} \left[ \frac{2-x e^{-x}}{2x^2} + \frac{1}{x(1-e^x)} \right] dx.$$

R: O integral é impróprio de 2.ª espécie.

Temos:  $I = \int_0^{\infty} \frac{2e^x - 2e^{2x} - x + 3x e^x}{2x^2 \cdot e^x (1-e^x)} dx = \int_1^{\infty} \frac{2t - 2t^2 - \log t + 3t \log t}{2t^2 (1-t) (\log t)^2} dt$ , fazendo a mudança de variável:  $e^x = t$ .

Aplicando o 2.º critério de Bertrand, [se  $f(x)$  é da ordem de  $x^{-1} (\log x)^{\lambda-1}$  quando  $x \rightarrow \infty$ , o integral  $\int_A^{\infty} f(x) dx$  é absolutamente convergente se  $\lambda < 0$ ] vem:

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t - 2t^2 - \log t + 3t \log t}{2t^2 (1-t) (\log t)^2 \cdot t^{-1} (\log t)^{\lambda-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t - 2t^2 - \log t + 3t \log t}{2t(1-t)} = 1 \text{ (aplicando, por exemplo, a regra de L'Hôpital duas vezes). Logo o integral é convergente (absolutamente).}$$

Soluções dos n.ºs 2021 a 2023 de Olívio de Sousa Bento.

**I. S. T. — CÁLCULO — 2. Exame de frequência 1944.**

**2024** — Sôbre uma esfera de centro na origem é definido o vector  $\alpha = (y-z) I + (z-x) J + (x-y) K$ . Verificar, para êste vector, e para qualquer calote esférica de base paralela ao plano  $xy$  o teorema de Stokes.

**2025** — Integrar a equação  $\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ .

Determinar a curva integral particular que tem ordenada mínima  $y$  no ponto  $(0,1)$ , sendo igual à unidade o raio de curvatura nêsse ponto.

**2026** — Integrar a equação  $y(x-1) = \Phi x^2$  ( $p=y'$ ) pelo método da dualidade.

**I. S. T. — CÁLCULO — 2.º Exame de frequência — 1944 — 1.ª chamada — (exame teórico).**

**2027** — Representação conforme duma superfície sôbre outra. Relações dêste conceito com o de função analítica. Superfícies aplicáveis. Mostrar que a representação conforme é, em geral, possível de infinitas maneiras. Mostrar que a aplicação é, em geral, impossível.

**2028** — Relações entre as duas curvaturas duma curva torsa. Equações intrínsecas.



F. C. P. — ANÁLISE SUPERIOR — I.º Exame de frequência, Março, 1944.

2029 — a) Integrar a equação  $pq=2yz$ ; b) Determinar a superfície integral que passa pela linha  $z=0, y^2=x$ ; c) Do integral completo deduzir a solução  $z=(x+y^2)^2/4$ .

R: a) O sistema  $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{2py} = \frac{dq}{2qy+2z}$  admite a solução  $y^2+c_1=p$ ; da equação proposta deduz-se, então,  $q = \frac{2yz}{y^2+c_1}$ , e tem-se  $dz = (y^2+c_1) dx + \frac{2yz}{y^2+c_1} dy$ . Integrando, obtém-se finalmente  $z = (x+c_2)(y^2+c_1)$ . b) Eliminando  $y$  e  $z$  entre as equações  $y^2=x, z=0, z=(x+c_2)(y^2+c_1)$ , vem  $(x+c_2)(x+c_1)=0$ ; obrigando esta equação a ter uma raiz dupla, obtém-se a relação  $c_2=c_1$ , que define uma sub-família das superfícies representadas pelo integral completo, a que a linha dada é tangente em cada um dos seus pontos:  $z=(x+c_1)(y^2+c_1)$ . A superfície integral pedida é a envolvente desta sub-família:  $z = -(x-y)^2/4$ . c) Igualando as derivadas parciais de  $z$  obtidas do integral completo e da solução dada, obtém-se:  $c_1=(x-y^2)/2, c_2=(y^2-x)/2$ .

2030 — Calcular  $\int \frac{e^{\pi z}}{z^2(z^2+1)} dz$  em que  $S$  é uma

circunferência com o centro na origem e raio  $R \neq 1$ . R: a)  $R < 1$ ; o único polo interior ao contorno  $S$  é  $z_1=0$ , e o respectivo resíduo  $A_1=\pi$ ; o valor do integral é, portanto,  $I=2i\pi^2$ . b)  $R > 1$ ; além de  $z_1$ , há a considerar os polos  $z_2=i, z_3=-i$ , cujos resíduos são, respectivamente,  $A_2=-i/2, A_3=i/2$ . A soma dos resíduos é  $\pi$ , e, portanto,  $I=2i\pi^2$ .

2031 — Determinar pelo cálculo simbólico uma solução da equação  $y''' - \int_0^x y dx + 1 = 0$ , tal que  $y_0 = y'_0 = y''_0 = 1$ . R: Tomando as imagens, teremos  $p^3 \bar{y} - p^2 y_0 - p y'_0 - y''_0 - \frac{1}{p} \bar{y} + \frac{1}{p} = 0$  ou  $\bar{y} = \frac{p^3}{p^4-1} + \frac{p^2}{p^4-1} + \frac{p}{p^4-1} - \frac{1}{p^4-1}$ , onde  $\bar{y}$  é a imagem de  $y$ ,  $\bar{y} \doteq y$ . Ora  $\frac{1}{p^4-1} = \frac{1/4}{p-1} - \frac{1/4}{p+1} - \frac{1/2}{p^2+1}$ ; portanto,  $\frac{1}{p^4-1} \doteq \frac{e^x}{4} - \frac{e^{-x}}{4} - \frac{\text{sen } x}{2}$ . Notando que se  $\bar{\varphi}(p) \doteq \varphi(x)$  e  $\varphi(0) = 0$ , é  $p \bar{\varphi}(p) \doteq \varphi'(x)$ , vem no nosso caso:  $\frac{p}{p^4-1} \doteq \frac{e^x}{4} +$

$\frac{e^{-x}}{4} - \frac{\cos x}{2}$ ;  $\frac{p^2}{p^4-1} \doteq \frac{e^x}{4} - \frac{e^{-x}}{4} - \frac{\text{sen } x}{2}$ ;  $\frac{p^3}{p^4-1} \doteq \frac{e^x}{4} + \frac{e^{-x}}{4} + \frac{\cos x}{2}$ ; donde  $\bar{y} \doteq \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} + \text{sen } x$ . A solução pedida é, pois,  $y = e^x/2 + e^{-x}/2 + \text{sen } x$ .

F. C. P. — ANÁLISE SUPERIOR — 2.º Exame de frequência — Maio 1944.

2032 — Calcular, pela teoria dos integrais eulerianos,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\lg x} dx. \quad R: I = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{1/3} x \cos^{-1/3} x dx;$$

$$\text{pondo } \text{sen}^2 x = y, \text{ vem: } I = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{-1/3} (1-y)^{-2/3} dy = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(1/3)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\text{sen } \pi/3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2033 — Pelo teorema de Mittag-Leffler, obter o desenvolvimento de  $\text{cosec } z$ .

R: Polos:  $a_k = \pm k\pi, k=0, 1, 2, \dots$ ;

$$\text{resíduos: } r_k = \lim_{z \rightarrow \pm k\pi} \frac{1}{\cos z} = (-1)^k$$

$$\text{cosec } z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z \mp k\pi} + \frac{(-1)^k}{\pm k\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2 \pi^2}$$

2034 — Calcular  $I = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$  ao longo do cami-

nho seguinte: de  $0$  a  $-2-2i, y=x$ ; de  $-2-2i$  a  $1-2i, y=-z$ ; de  $1-2i$  a  $1, x=1$ .

$$R: I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + 2i \int_{-1}^0 \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = -\log(\sqrt{2}-1) + i\pi.$$

2035 — Calcular, com as funções de Weierstrass,

$$I = \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^3 + 3z^2 - 4z - 12}}. \quad R: \text{Tem-se } I = 2J_2,$$

$$\text{onde } J_2 = \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{4x^3 - 28x - 24}}.$$

$$\text{Obtém-se } 2J_2 = \frac{\sqrt{4x^3 - 28x - 24}}{24(x-1)} - \frac{1}{3} J_1 - \frac{1}{12} (I_1 - I_0)$$

Pondo  $x=p(u)$ , onde  $g_2=28, g_3=24$ , e sendo  $v$  tal que

$$p(v)=1, \text{ vem: } I = 2J_2 = \frac{p'(u)}{24[p(u)-p(v)]} + \frac{1}{3p'(v)} [\log \sigma(u+v) - \log \sigma(u-v) - 2\zeta(v) \cdot u] + 1/12 \cdot [\zeta(u)+u] + u_0 \text{ onde } u_0 \text{ é uma constante arbitrária.}$$

Soluções dos n.ºs 2029 a 2055 de A. Pereira Gomes.



## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

**45 — TURNEY, T. H. — Heaviside's Calculus Made Easy** — Chapman and Hall, London, 1943.

Tem êste livro por objectivo expor, a estudantes de electrotécnica cuja cultura matemática não vai além do nível das nossas escolas médias, o cálculo operacional de Heaviside, com o fim da sua imediata utilização no estudo dos circuitos eléctricos.

O primeiro capítulo faz breve referência às leis mais importantes dos circuitos eléctricos lineares e explica como essas leis intervêm na formação das equações diferenciais relativas a êsses circuitos.

Nos três capítulos seguintes é introduzido o operador «p» de Heaviside e são integradas várias equações diferenciais lineares, aplicadas a casos concretos, quer pela aplicação sistemática de desenvolvimento em série, quer pela utilização do teorema da expansão de Heaviside.

Tudo nêstes capítulos é exposto de maneira intuitiva não recorrendo o autor, propositadamente, a estudos mais rigorosos de convergência. Há que assinalar uma ou outra imprecisão evitável como, por exemplo, a não especificação do significado do operador  $\frac{1}{p}$ , afirmando-se simplesmente que é uma integração, sem haver a preocupação de dar os limites do integral.

O estudo das linhas com a dedução da equação dos telegrafistas e a sua expressão operacional com a análise, mais minuciosa, da linha não dissipativa e da linha sem distorsão, faz-se nos capítulos IV e V. Parece-nos, todavia, que o autor devia ocupar-se do caso duma linha com resistência e capacidade, afim de não surpreender o leitor com a linha semi-diferenciadora de que fala no final do último capítulo. Sabemos

que o autor não detalhou mais o estudo das ondas nas linhas porque isso exigiria da parte do leitor uma maior soma de conhecimentos de Análise. Porém, com um pouco mais, poder-se-ia ir mais além da linha não dissipativa e da linha sem distorsão, tanto mais que êsse maior número de conhecimentos não é poupado ao leitor na leitura dos dois capítulos finais.

O capítulo III faz breve referência à série de Fourier e ao integral de Fourier relativo à função [1] de Heaviside com o objectivo de interpretar fisicamente o significado da expressão operacional p [1] que corresponde à conhecida função impulsiva de Dirac  $\delta(t)$ .

O último capítulo procura dar, rapidamente, e de maneira intuitiva, uma idéia da relação entre a expressão operacional da admitância indicadora e a própria admitância indicadora. Estabelece-se assim uma correspondência biunívoca que, por um lado, é dada pela transformação de Laplace com o aspecto que lhe deu Carson e, pelo outro, por uma transformação similar a que o autor deu o nome de integral de Heaviside. Cremos que o ponto de vista do autor, embora com outro aspecto, é o mesmo que o adoptado por Bush no seu livro «Operational Circuit Analysis» a páginas 156 e seguintes.

É negável que a leitura do livro em questão é de utilidade incontestável para quem deseje iniciar-se no estudo do Cálculo Operacional com fins de aplicação imediata ao cálculo dos fenómenos transitórios. Outro tanto já não sucede, dada a brevidade com que o assunto é tratado, quando se pretende extrair do livro resultados positivos para o estudo da propagação nas linhas.

Fernandes Viana

## PERIÓDICOS CIENTÍFICOS RECEBIDOS

**Argentina**

**Revista de la Unión Matemática Argentina** — (Buenos Aires) — Volumen IX, n.º 1, 2, 3, 4 e 5 — 1943.

**Espanha**

**Euclides** — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones. Tomo V, n.º 49, Março, 1945.

**Matemática Elemental** — Madrid — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série, tomo III, n.º 8, 1943; tomo IV, n.º 1 a 8, 1944.

**Estados Unidos da América do Norte**

**Scripta Mathematica** — (New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics. Vol. IX — N.º 1, 2, 3 e 4 — 1943.



## OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

**Revista Politécnica** — (S. Paulo) — Ano n.º 39, n.º 145, Setembro de 1945.

**Tecnica** — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. n.º 154, Março de 1945.

**Processos de redução das observações meridianas em ascensão recta** por *José António Madeira* — Publicações do Sindicato Nacional dos Engenheiros Geógrafos, 3.ª série — N.º 3 — 1944.

*Obras oferecidas pelo «British Council»:*

**The Teaching of Mathematics to Evening Technical Students** — Report of a Sub-Committee appointed by the General Teaching Committee of the Mathema-

tical Association — G. Bell and Sons, Ltd. — London, 1926.

**The Simple Calculation of Electrical Transients** — *G. W. Carter* — Cambridge University Press — 1944.

**The Royal Society 1660-1940** — A History of its Administration under its Charters — *Sir Henry Lyons* — Cambridge University Press, 1944.

**Lectures on the Theory of Fonctions** — *J. E. Littlewood* — Oxford University Press, 1944.

Publicações da Embaixada Britânica.

Publicações da Embaixada dos Estados Unidos da América do Norte.

## Da Administração aos Leitores

A Administração da «Gazeta de Matemática» lamenta ter de proceder a um agravamento dos preços da revista como a seguir indica.

Decerto que os nossos assinantes e leitores compreenderão devidamente esta alteração, reflexo afinal do encarecimento gradual que se vem registando em todos os sectores da produção.

De sobejo é do conhecimento de todos que, a não ser um ou outro trabalho na altura das expedições, nenhum dos serviços de colaboração na revista é pago. É à boa vontade da Redacção, ao interesse dos nossos assinantes e leitores e aos prestimosos serviços dos cooperadores, que a «Gazeta de Matemática» deve a sua existência.

Em vão temos tentado manter o nível dos nossos preços; porém a situação actual e a previsão do que vai ser o corrente ano de publicação, determinam o aumento de preços a que nos referimos como a única via que garanta o mínimo indispensável à manutenção da revista, já porque, convencidos estamos de que a sua existência se impõe hoje como uma necessidade imperiosa de qualquer estudante de Matemáticas, já porque, embora modestamente, a «Gazeta de Matemática» coopera e cooperará cada vez mais no progresso e maior interesse do estudo da Matemática em Portugal.

Indicamos a seguir alguns resultados que por si justificam a atitude tomada.

*A. Despesas gerais realizadas de Novembro de 1943 a Novembro de 1944 (incl.):* Cobrança, 666\$10; Expedição de exemplares, 1.468\$10; Artigos de expediente, 1.520\$85; Renda de casa, 1.960\$00; Propaganda, 507\$00; Contribuições, 270\$10. Total, 6.392\$15.

*B. Despesas com a composição, impressão, papel, brochura, desenhos e gravuras, no mesmo período:* N.º 17, 4.694\$00; N.º 18, 4.824\$50; N.º 19, 4.425\$00; N.º 20, 5.116\$00. Total, 19.059\$50.

*C. Custo médio de cada um destes números:* 6.363\$00.

De acôrdo com o orçamento de 26 de Março de 1945, da «Sociedade Industrial de Tipografia, Ltd.» o custo médio relativo à composição, impressão, papel, brochura, desenhos e gravuras dum número de 32 páginas, é cêrca de 6.100\$00.

Partindo da hipótese de que as despesas gerais se mantêm, sem alteração notável durante o corrente ano, hipótese que, aliás, nos parece demasiado optimista, poderá prever-se, para cada número, uma cota parte nas despesas gerais anuais, à roda de 1.00\$00, o que eleva o custo total de cada número para aproximadamente 7.700\$ 0.

Do exposto se conclue um aumento anual das despesas da revista de mais de 5.300\$00.

Os números indicados levam-nos a tomar uma das duas atitudes: a) Ou reduzir de um número a publicação anual da revista; b) Ou aumentar os preços com que vimos trabalhando.

A segunda atitude, materialmente mais penosa, parece impor-se à primeira, porquanto julgamos indispensável, embora à custa de maiores sacrificios, prosseguir que retroceder.

Portanto, de oravante os preços da «Gazeta de Matemática» passam a ser:

Para o público em geral — número avulso	10\$00
» assinantes . . . . .	7\$50
Preço de assinatura anual (por 4 números)	30\$00

Maio de 1945.

O. M. R. e J. C. O.



## **“EUCLIDES,”**

Revista de ciências matemáticas, físicas, químicas e naturais

●  
REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO: ANTÓNIO MAURA, 7 — MADRID

Para efeitos de assinatura em Portugal, dirigir-se a  
Prof. Manuel Zéluar                      Rua de Serpa Pinto, 17, 4.º Esq. — Lisboa

## PORTUGALIAE MATHEMATICA

Revista trimestral de colaboração internacional, editada por A. Monteiro

É a única revista portuguesa que publica exclusivamente trabalhos originais de Matemática

Volume 1 (1937-1940) — 200\$00; Volume 2 (1941) — 150\$00

Volume 3 (1942) — 150\$00; Volume 4 (1943-44) publicados: fasc. 1, 2 e 3

No prelo: Vol. 4, fasc. 4

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática:

Volume 1: 100\$00; Volume 2, e seguintes: 50\$00

## PORTUGALIAE PHYSICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

●  
REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

LABORATÓRIO DE FÍSICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

●  
Publicados: fascs. 1, 2 e 3 do Vol. I — assinatura por volume: 150\$00

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Física e Química, redução de 50%

OS ANÚNCIOS DÊSTE NÚMERO NÃO SÃO PAGOS



---

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

## Número extraordinário dedicado às MATEMÁTICAS ELEMENTARES e EXAMES DE APTIDÃO

Foi publicado, em Março de 1944, o n.º 22 da «Gazeta de Matemática», número extraordinário dedicado às Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão e inteiramente independente dos outros números.

Os assinantes da «Gazeta de Matemática» poderão beneficiar durante o ano de 1945 duma redução de preço neste número extraordinário (8\$00 em vez de 10\$00).



### AOS ASSINANTES

#### CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Preço de capa por cada número (24 e seguintes) . . . . .	10\$00
Preço de assinatura anual de quatro números . . . . .	30\$00
Preço de capa do número extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10\$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc. . . . .	8\$00

---

### NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Officiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 250\$00 (colecção dos 22 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 12 a 21 e 23), ao preço de Esc. 6\$50 cada.

---

### ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial

---

LEIA UM LIVRO MODERNO  
PARA O ENSINO LICEAL

## ARITMÉTICA RACIONAL

Por ANTÓNIO A. MONTEIRO e JOSÉ S. PAULO

---

---