GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VI **N.º 26** NOVEMBRO-1945

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Editor	Administrador	Tesoureiro
Gazeta de Matemática, Lda.	*Orlando M. Rodrigues*	*J. de Oliveira Campos*

CORRESPONDÊNCIA PARA Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição: Tipografia Matemática, Limitada — Rua Almirante Barroso, 20-r/c. — Lisboa
Impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — R. Almirante Pessanha, 3 e 5 — Lisboa

ANO VI-N.º 26 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO-1945

REDAC. PRINC.: *M. Zaluar* ▪ EDITOR: *Gazeta de Matemática Lda.* ▪ ADMINIST.: *O. M. Rodrigues*

Composto na Tipografia Matemática Limitada — Impresso na Sociedade Industrial de Tipografia Limitada

Sobre la permutación de los operadores: d/dx y E_x

por **J. Gallego Diaz** (Universidad de Madrid)

Es sabido que cada día adquiere mayor importancia en Economía Matemática el estudio de la elasticidad de una función.

Se define así el produto $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$ y se representa por el símbolo $E_x(y)$; de modo que:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{d\,(Ly)}{d\,(Lx)}$$

El objeto de esta breve nota es determinar aquellas funciones para las cuales pueden permutarse los operadores $E_x(\,)$ y $\frac{d}{dx}(\,)$; es decir, para los cuales se pueda escribir:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dx}\,[E_x(y)] = E_x\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Al tener presente que:

$$E_x(y') = y'' \, \frac{x}{y'}$$

en virtud de la propia definición de la elasticidad y, que:

$$\frac{d}{dx}\left(y' \cdot \frac{x}{y}\right) = y'' \, \frac{x}{y} + y' \, \frac{y - xy'}{y^2}$$

la ecuación (1) se convierte en la:

$$\frac{xy''}{y} + \frac{yy' - x\,(y')^2}{y^2} = y'' \, \frac{x}{y}$$

y operando resulta:

$$\text{(2)} \qquad xy\,(y - y')\,y'' - (y')^2\,(y + xy') = 0$$

siendo la ecuación (2) equivalente a la (1). Para resolver la ecuación (2) efectuemos el cambio de variable: $y = e^t$. Se verificará: $y' = e^t \cdot t'$ $y'' = e^t\,[(t')^2 + t'']$ y sustituyendo y simplificando queda:

$$\text{(3)} \qquad x\,(1 - t')\,t'' + (t')^2\,(x - 1) = 0$$

ecuación de Bernoulli en la que es plausible el cambio: $t' = \frac{1}{u}$, $t'' = -\frac{u'}{u^2}$ con lo cual (3) se convierte en

$$\text{(4)} \qquad xu'\,(1 - u) + u\,(x - 1) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{du}{dx}\,\frac{1 - u}{u} = \frac{1 - x}{x}$$

$$du\left(\frac{1}{u} - 1\right) = dx\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

ecuación diferencial de variables separadas que por integración immediata dá:

$$\text{(5)} \qquad Lu - u = Lx - x + k$$

que también puede escribirse:

$$\text{(6)} \qquad \frac{u}{e^u} = k_1 \, \frac{x}{e^x}$$

Como de (6) no puede despejarse explicitamente u en función de x, podemos suponer, teóricamente al menos que $\qquad u = \varphi\left(\frac{e^x}{x}\right)$

Por tanto: $\qquad t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} = \psi\left(\frac{e^x}{x}\right)$

y $\qquad t = \int \psi\left(\frac{e^x}{x}\right) dx$

y finalmente: $\qquad y = e^{\int \psi\left(\frac{e^x}{x}\right) dx}$

lo cual nos indica que la función buscada es una función de la función trascendente conocida con el nombre de *integral-logaritmo* o integral de Soldner.

Sôbre o método axiomático

por **José Sebastião e Silva** (bolseiro do I. A. C. em Roma)

Representemos por U a classe dos seres humanos, e convencionemos escrever $x \prec y$, com o significado de *x é descendente de y*.

As letras x, y representam, naturalmente, elementos *indeterminados* da classe U (*variáveis sôbre* U), e desempenham portanto uma função equivalente à dos têrmos *Fulano, Beltrano, Cicrano.*

Podemos dizer então que «$x \prec y$» é uma *proposição, condicional em x, y, definida em U*. (Em particular, tal proposição será verificada, se x fôr filho de y, ou se x fôr neto de y, etc.).

Por outro lado, diremos que o símbolo $\prec$ representa uma *relação binária, definida em* U.

Posto isto, notemos que as proposições:

α) *Se $x \prec y$, então $x \neq y$;* [1]

β) *Se $x \prec y$ e $y \prec z$, então $x \prec z$;*

serão incondicionalmente verdadeiras, de acôrdo com as convenções anteriores. (Chamaremos à primeira «*propriedade antireflexiva*», e à segunda «*propriedade transitiva*», da relação $\prec$)

Mas é claro que, se as proposições α, β são verdadeiras, também a proposição

γ) *Se $x \prec y$, não pode ter-se $y \prec x$;*

não poderá deixar de ser verdadeira, pois que, se fôsse falsa, isto é, se, a respeito de dois indivíduos x, y, se tivesse ao mesmo tempo $x \prec y$, $y \prec x$, ter-se-ia (em virtude de β) $x \prec x$, o que, segundo α, é impossível. (Chamaremos a γ «*propriedade antisimétrica*» da relação $\prec$).

Vê-se pois que, uma vez admitida a veracidade das proposições α, β, a proposição γ não poderá deixar de ser admitida como verdadeira, *qualquer que seja o significado atribuído aos símbolos* U, $\prec$. Assim, onde dissémos «*classe dos seres humanos*», podiamos ter dito «*classe das aves*» atribuindo ao símbolo $\prec$ o significado «*ascendente de*»; podíamos ter dito «*classe dos números naturais*» interpretando «$x \prec y$» como a proposição «*x é um divisor próprio de y*»; podíamos ter dito «*classe das funções reais de variável real*», considerando a expressão $\varphi \prec \psi$ como uma abreviatura desta outra «$\varphi(x) < \psi(x)$, *qualquer que seja x*»; podíamos ter dito «*classe dos números complexos*», escrevendo $x \prec y$, se a parte real de x é menor do que a parte real de y, ou se, sendo iguais as partes reais, o coeficiente de i é maior em x, do que em y; etc, etc. Em qualquer dêstes casos, as proposições α, β são verdadeiras, e o mesmo sucederá, necessàriamente, a respeito da proposição γ.

E é claro que não só γ, mas infinitas outras proposições poderão ser *deduzidas,* sucessivamente, das proposições α, β, tomadas como *axiomas* (isto é, admitidas como verdadeiras, sem atender ao significado de $\prec$). Dêste modo, a partir de tais axiomas será desenvolvida uma *teoria dedutiva,* que podemos chamar *teoria das relações binárias antisimétricas transitivas,* ou ainda, como se diz de preferência, *teoria dos sistemas parcialmente ordenados* [1].

Ora é nisto, afinal, que consiste a moderna orientação *axiomática, formal* ou *abstracta* da Matemática: — em reduzir a uma teoria única, condensada numa axiomática, o estudo de uma série de propriedades que, mediante convenientes interpretações de linguagem, se revelam comuns a infinitos sistemas possíveis.

Vantagem imediata dêste método: economia extraordinária de pensamento, resultante da possibilidade de aplicar, a infinitos campos concretos, um mesmo aparelho lógico, constituído por uma rêde de raciocínios, *efectuados uma vez por tôdas.* Os princípios de dualidade e de transporte, tão fecundamente utilizados em Geometria, constituem já um exemplo de aplicação do método axiomático.

Todavia, contra êste método aponta-se, entre outros, o inconveniente de que, esvaziando os conceitos primitivos de todo o conteúdo intuïtivo, êle romperia aquêle contacto entre o investigador e a realidade, sem o qual tôda a actividade matemática se reduz a um jôgo inteiramente estéril de símbolos e de fórmulas. Ora a verdade é que nada impede o investigador, ao desenvolver uma teoria segundo o método axiomático, de apoiar a imaginação sôbre algum, ou melhor, sôbre vários dos modêlos que verificam a axiomática.

É claro que se trata de um *instrumento,* que, como

[1] Ao sinal $\neq$ atribui-se aqui, naturalmente, o significado de «distinto de», «não coïncidente com». Trata-se portanto de um conceito puramente lógico.

[1] Interessa notar que, adoptando a escrita simbólica da Lógica matemática, as proposições α, β, γ assumem a forma:

α) $(x \prec y) \xrightarrow[x,y]{} (x \neq y)$;

β) $[(x \prec y) \cap (y \prec z)] \xrightarrow[x,y,z]{} (x \prec z)$;

γ) $(x \prec y) \xrightarrow[x,y]{} \sim (y \prec x)$;

em que os símbolos $\xrightarrow[x,y]{}$, $\cap$, $\sim$, $\neq$ representam «conceitos lógicos, isto é, conceitos comuns às diferentes teorias dedutivas.

todos os instrumentos, será útil ou nocivo, conforme o uso que dêle se fizer. Não se justifica portanto o horrôr que a certos espíritos infunde aquilo a que desdenhosamente chamam a *«mecanização do pensamento matemático»*. Se alguém se lembrar de dizer que os princípios de dualidade e de trasnporte constituem máquinas de fabricar teoremas — nem sequer estará longe da verdade. Mas não ousará, por êste facto, converter em desgraça o que é apenas uma felicidade, e propôr assim que tais princípios sejam pura e simplesmente excluídos do domínio da Matemática.

Nota — Êste esbôço, baseado sôbre um parágrafo dum trabalho meu recentemente escrito, tem por objectivo dar uma primeira idéia do método axiomático, procurando desfazer certas lendas que se criaram à volta dêste assunto.

É certo que o teorema γ, que nos serviu de exemplo, não passa de uma trivialidade; mas não devemos esquecer que a Matemática é feita assim — de excessivas trivialidades, tão hàbilmente e tão complexamente encadeadas que o resultado deixa de ser uma trivialidade.

Recordemos, por último, que, além dos *teoremas* (que se *deduzem* dos *axiomas*, por meio das *regras da Lógica*), há a considerar nas teorias dedutivas os *conceitos derivados*, que se *definem* a partir dos *conceitos primitivos*, por meio das *operações da Lógica*. Assim, por exemplo, a partir do conceito de *«descendente»* atrás considerado, podem definir-se os conceitos de *«filho (a)»*, de *«tio (a)»* de *«primo (a)*, de *«geração»*, de *«grau de parentesco»*, etc. etc. Estas noções de parentesco prestam-se, como se sabe, a curiosos problemas — *que são problemas de Matemática.*

Da importância da topologia na matemática moderna [1]

por **Achille Bassi**

As idéias e os problemas da topologia, como frequentemente acontece com as doutrinas que trazem em si uma profunda razão de ser, têm sua primeira origem em fatos comuns experimentais que se relacionam com a vida quotidiana. A topologia, bem como qualquer outro ramo de Matemática, pode, com efeito, dar origem a problemas que se prestam para ser enunciados e compreendidos por quem é leigo, ou quasi, a respeito de noções matemáticas. A matemática divertida lhe é portanto, devedora de um grande numero de pequenos passatempos ou jogos que se relacionam com problemas topologicos de enunciado elementar.

Mas, este aspeto que, muitas vezes, aproxima o leigo da topologia é, talvez, ainda o que concorreu para afastar da topologia alguns dos melhores intelectos, porventura não atraidos por questões que por demais se assemelhavam a pequenos jogos.

Com efeito, embora os primórdios dos conceitos topológicos se confundam com os da geometria e, apesar das questões e dos problemas de caráter topológico serem conhecidos ha bastante tempo, a topologia só se afirma como uma teoria séria e importante em época recente e, especialmente, com a obra de Riemann, por volta da metade do século passado. Êste matemático, como é sabido, foi o primeiro a revelar com clareza a importancia que os principios topológicos têm para estudo das funções de variável complexa.

Outros que contribuiram eficazmente para o progresso da topologia, quer com uma atividade ocasional e, por vezes, inconcientemente, quer com um trabalho sistemático, são, por exemplo, Betti, Poincaré, Cantor, Peano, Brouwer, Fréchet, etc. homens esses que pertenceram ou pertecem ao escol dos cientistas do fim do seculo passado e do começo do atual.

Betti e Poincaré desenvolveram as idéias originais de Riemann, sobretudo no sentido, até hoje reconhecivel na topologia moderna, denominado da topologia combinatória; os outros deram impulso, principalmente áquele ramo hoje denominado da topologia dos conjuntos ou topologia punctual.

A importância que, na atualidade, tem a topologia em matemática, já foi assinalada pela obra desses grandes vultos. Verifica-se, efetivamente, cousa muito significativa, que os progressos da topologia devidos a êstes cientistas estão todos, ou quasi todos, ligados a descobertas que tiveram grande valor para o progresso da matemática em geral.

Quem estuda a gênese dos conceitos e das teorias da topologia tem, para logo, sua atenção atraida pela enorme diversidade dos problemas e dos campos de pesquisa habituais, dos quais aqueles cultores da ciência partiram para chegar a considerar questões de topologia.

---

[1] Conferência feita na Faculdade de Filosofia da Universidade do Brasil como preleção do curso de Geometria Superior.

N. R. — Não se alterou a ortografia adoptada no artigo transcrito.

Poincaré partiu principalmente de questões de dinâmica celeste, Riemann, do estudo das funções de variavel complexa, Cantor, das suas considerações, de capital importância, visando dar uma sistematização satisfatoria aos problemas do infinito matemático Peano de estudos críticos geniais sôbre as funções de variaveis reais, Brouwer de problemas que se podem considerar como a extensão natural de outros problemas formulados pela álgebra clássica dos séculos XVI e XVII, Fréchet, de uma análise filosófica do que se deve entender por espaço matemático.

Partindo de tal grandissima diversidade de origens, êstes autores foram a pouco e pouco levados para uma única corrente de idéias: a atual topologia. Esta, pela sua vastidão, hoje, quasi dá vertigens às mentes mais propensas para a síntese e mais ávidas pela mesma. Ha trinta anos, era, por certo, menos fácil vislumbrar a unidade subtancial das novas idéias que se iam delineando na matemática e estava-se, ainda longe de poder compreender toda a nova e fecunda vitalidade que estas idéias teriam trazido à propria matemática. Todavia, mesmo então, os melhores intelectos não puderam deixar de sentir a sua fascinação e de presagiar, ao menos em parte, a importância de quanto se estava amadurecendo.

Poincaré, por exemplo, nos primeiros anos deste século, surpreendido pelo grande número de vezes em que foi levado ao estudo da topologia, apesar de ir trabalhando em teorias bem difreentes, saiu-se com estas simples e ponderadas palavras: «*Se a importância da Analysis Situs não é compreendida por todos, é porque nem todos têm refletido suficientemente sôbre isso*».

Para um topólogo moderno é motivo de curiosidade observar o modo com o qual Poincaré justifica, a seus olhos, a importância da nova teoria: «*A geometria corriqueira*» — êle declara como premissa — «*é a arte de raciocinar bem sôbre figuras mal feitas*». Assim, um triângulo sôbre o qual se raciocine, pode ser desenhado com mão incerta, de forma que, na realidade, os seus lados não sejam retos, mas um pouco arqueados ou sinuosos. Êle observa, doutra parte, que ha limites para a imprecisão do desenho. Por exemplo, as curvas que representam os lados não devem ter pontos comuns diferentes dos vértices; nêste caso, uma criança que se valesse do desenho de um triângulo para encontrar ajuda no raciocinar sobre o mesmo, não acharia mais o usual auxílio na figura considerada, porquanto esta lhe traria confusão. Poincaré diz, a êste respeito, que na figura «*mal feita*», afim de que ela possa ser verdadeiramente util, devem se conservar todas as propriedades qualitativas das figuras abstratas, propriedades que êle faz coincidir com as topológicas; ao passo que podem perder-se, sem dano algum, as propriedades quantitativas. E, então, conclue assim: «*A topologia nos fará conhecer no espaço pluridimensional as propriedades qualitativas e nos poderá, portanto, prestar bons serviços, análogos aos das figuras na geometria plana ou dos sólidos*».

Estas considerações são expostas por Poincaré duma fórma agradavel e são, de certo, interessantes e engenhosas; contudo, deve-se considerar que não satisfariam completamente a um topólogo moderno.

Desde os tempos de Poincaré esboçaram-se novas mudanças. A topologia rejuvenesceu um número tal de teorias matemáticas, realizou tais construções e, embora surgida de problemas de caráter antigo, está tão orientada para o futuro, que deixou quasi completamente esquecidas as próprias origens. A meta que, para Poincaré parecia tão atraente, depara-se-nos, hoje, tão restrita que dificilmente um topólogo moderno a declararia como própria.

O tempo foi, nestes últimos anos, um devorador de esquemas, de imagens e de teorias. Creio que o progresso da topologia deva ser aquilatado pelos esquemas que ela ultrapassou, isto é, pelos fins que, de ano para ano se propunha, com um ritmo que renovou a mentalidade do matemático moderno.

Eu mesmo tive oportunidade de experimentar a rapidez dêste progresso, quando, em 1935, fui aos Estados Unidos para conhecer os últimos passos da topologia. Efetivamente, verifiquei, com surpreza, que os topológos da América falavam uma linguagem matemática que me era difícil compreender [1]. A razão disso era que os meus conhecimentos chegavam então ao que era aproximadamente a topologia em 1932. Mas, entrementes, uma quantidade de ideias novas tinham sido divulgadas ou apresentadas. Tinha-se caminhado com um passo tão acelerado que em poucos anos se transformara a atmosfera de muitos discursos cientificos.

*

A topologia moderna, alem de proporcionar conhecimentos e apontar teorias de grande beleza e de grande futuro, dá os elementos para uma compreensão mais simples e mais facil de um grande número de outras teorias matemáticas, ou, pelo menos, da natureza de fatos importantes e essenciais destas teorias.

Assim, eu creio que, para todo o jovem que queira

---

(1) Eram, então, assuntos ordinários na conversa ão, por exemplo: a álgebra topológica, os espaços bi-compatos, os grupos de co-homologia, etc. Este último conceito tinha sido trazido para a ciência precisamente em 1935, simultaneamente por Alexander, em Princeton, por Withney, em Harward, e por Kolmogoroff, em Moscou.

apoderar-se dos conhecimentos vivos da matemática moderna, seja de suma importância familiarizar-se, em primeiro logar, com a topologia.

Conhecida esta, então, muitas teorias parecerão quasi familiares, mesmo antes de iniciar o seu estudo, porque se apresentarão numa transparente perspectiva que deixará compreender os seus segredos e, portanto, nas condições mais favoraveis para serem possuidas com facilidade. Penso que não exagero dizendo que a aquisição de muitas outras teorias modernas fará, então, o efeito de uma fácil descida e não o de uma penosa ascensão.

Reflita-se na verdadeira natureza das propriedades estudadas pela *geometria algébrica!* Aludo ao fato conhecídissimo de que a maior parte de tais propriedades são topológicas. Repito uma incisiva frase que ouvi de S. Ex. Severi: «Oitenta por cento das propriedades da geometria algébrica é de natureza topológica».

De fato estas propriedades topológicas constituem pode-se dizer, o núcleo fundamental da geometria algébrica.

Bem cohecemos a importância que a topologia tem para o *Cálculo funcional* e, portanto, de modo particular, para o Cálculo das Variações. Fizeram-se, a esse respeito cousas muito interessantes: lembremos a obra de Morse, de Lusternick e de Schnerelmann, exposta já, em parte, em volumes e monografias, e de outros ainda. É certo que o Cálculo Funcional vai assumindo rapidamente caracteres topológicos em todas aquelas nações em que não foram descurados nem o cálculo funcional nem a topologia: esta cousa é, com efeito, patente nos dias que correm.

Outra teoria que, mercê da topologia, encontrou uma vitalidade nova é a velha e gloriosa *teoria de transformações*. A topologia vivificou velhos conceitos, introduziu outros novos, fecundos, permitindo a construção de uma nova teoria que tem como arcabouço a antiga.

Teve-se, assim, a teoria dos grupos topológicos, das variedades grupo, etc..., obra tão cheia de fascinação e de futuro graças a Cartan e Schreier e aos jovens valorosos topologos da escola holandêsa, Van Danzig e outros.

Teorias profundas das quais muitas cousas para a matemática ha ainda que esperar.

Nêste ponto não posso furtar-me de lembrar um interessantissimo gênero de pesquisas recentemente iniciadas: o estudo das propriedades topológicas, em grande, das variedades diferenciais, de Riemann, que demonstra como as propriedades topológicas, «em grande» destas variedades sejam consequências das propriedades diferenciais, «em pequeno», da própria variedade. Fato eminentemente sugestivo!

Fundem-se, nêste estudo, duas célebres diretrizes distintas dadas à geometria moderna por parte de uma mesma pessoa, Riemann, isto é, a diretriz topológica e a diretriz diferencial inaugurada com a famosa monografia: «*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*». E' um admiravel estudo de puro caráter clássico que encara fatos que talvez o mesmo Riemann já tivesse pensado que teriam podido existir. Certo, se êle tivesse conhecido os conceitos e os instrumentos da topologia moderna e da geometria diferencial, teria tido a alegria de a êles se poder dedicar!

De resto, ainda que se prescinda desta pesquisa que, como cada um vê, tem para a matemática um profundo interesse, as relações que intercorrem entre a geometria diferencial e a topologia tornaram-se bastante estreitas: tanto que o Seminário Matemático de Hamburgo sentiu a necessidade de dedicar ao assunto uma série especial de artigos: «*Topologische Fragen der Differentialgeometrie*», a qual, apesar de ter sido iniciada ha poucos anos, já conta mais de uma centena de trabalhos sobre o assunto!

Estas são algumas entre as mais significativas aplicações da topologia. Mas ha ainda muitas outras, tambem importantes, pois que se encontram em quasi todos os ramos da matemática. Todavia, por amor de brevidade não me detenho em considerá-las.

*

Vamos, agora, procurar de dar algumas idéias do interesse e da importância de, ao menos, algumas das teorias da topologia pròpriamente dita.

Comecei com o referir algumas aplicações, pensando que isto fosse mais aceito por pessoas de varia e dispar cultura, a ponto de induzí-las a seguir-me mais facilmente ainda no resto da minha exposição.

Mas, na realidade, a importância da topologia, não reside somente nas aplicações, porquanto elas sejam vastas e fecundas de progresso para muitos outros ramos da matemática, mas reside no valor excepcionalmente elevado das suas teorias, para o conhecimento da matemática.

O interesse da topologia é dado pela importância, às vezes, tambem filosófica dos conceitos que ela introduz e pela extraordinária capacidade de síntese que revela quando é aplicada a problemas concretos; tudo quanto já se fez sôbre o assunto justifica os mais favoraveis prognósticos para o futuro.

Seria muito interessante fazer uma resenha das teorias mais admiraveis que a topologia desenvolveu, mas destas ainda, as importantes são já em número tão grande que devo, aqui também, limitar-me a pouquissimos exemplos, escolhidos entre os mais significativos, de modo a persuadir, eu espero, do excepcional interesse que apresenta esta nova doutrina.

Refiramo-nos, por exemplo, à moderna teoria da dualidade. Como é sabido, em 1895, Poincaré demonstrou na célebre monografia dos «*Annales de l'Ecole Polytéchnique*» que os números de Betti de uma variedade orientável fechada, relativos a dimensões complementares com relação à da variedade, eram iguais. Foi esta uma bela descoberta para a época. Por volta daquêles mesmos anos, Jordan conseguia provar que um logar geométrico dos pontos do plano, homeomorfo a uma circunferência, corta em duas partes o mesmo plano. Esta propriedade sugeriu a denominação de *curva*, que depois foi chamada de Jordan dada a tal logar geométrico. A esta definição foi levado, como se sabe, pelos estudos despertados, em virtude da famosa crítica de Peano à definição anteriormente dada de curva, como de imagem contínua de um segmento ou de uma circunferência (crítica em que demonstra que tal imagem pode, mesmo, preencher um quadrado inteiro ou um cubo).

Pois bem, um exame embora atento destes dois resultados de Poincaré e de Jordan não dá logar à suposição de que haja alguma ligação entre si. O primeiro com efeito, concerne uma propriedade de invariantes de variedades topológicas a muitas dimensões; o segundo, uma propriedade do plano euclideano ou da esfera, com relação a alguns seus sub-conjuntos de pontos, oportunamente definidos.

Nem o espirito mais penetrante podia, então, pensar que estes dois fatos poderiam estar ligados entre si, num conjunto mais compreensivel de conceitos.

Todavia, assim é. Pontrjagin, com efeito, mostrou que as duas mencionadas propriedades são casos particulares de relações, bem mais gerais,também chamadas de dualidade, que se podem atribuir a um único ciclo de idéias! Admiravel e formidavel síntese de fatos geométricos fundamentais, tendo o aspecto mais diferente!

Creio que este exémplo colhido mesmo isoladamente, seja deveras tal que convença, mesmo os mais céticos, da importância e do valor da topologia. Efetivamente o valor de uma teoria se aquilata da sua fôrça coordenadora de fenômenos, isto é, da capacidade de colocar um conjunto de fatos, os quais por si sós não dariam um conhecimento científico dos fenômenos, em perspectivas harmónicas, fazendo com que derivem de poucos e simples princípios.

Mas vamos a outro exemplo. Um dos mais antigos *desiderata* da álgebra é, como se sabe, a resolução das equações algébricas. Do desejo de ter as raízes expressas de determinada maneira, por meio de coeficientes, nasce a orientação de pesquisas que, partindo dos sucessos da escola matemática italiana de 1500 e através dos estudos dos analistas de 1700, vai desaguar na obra de Ruffini, de Abel e de Galois.

Por outro lado, do desejo de ter um valor numérico aproximado das raízes, originaram-se os bem conhecidos métodos de aproximação. Mas, numa categoria bastante importante de problemas, não é preciso conhecer o valor particular das raízes ou a sua exprimibilidade com meios dados; ao contrário, é preciso saber sómente se as raízes existem. Este desejo é satisfeito pelo teorema fundamental da álgebra.

Pois bem, este teorema, demonstrado pela primeira vez, com rigor, há mais de um século, é, como já alguém o fez notar, de natureza essencialmente topológica. O seu enunciado, equivale, por exemplo, a afirmar que certa transformação topológica de uma esfera em si, tem, pelo menos, dois pontos unidos distintos.

Ora é significativo observar que êste mesmo teorema que, encarado segundo as linhas clássicas, é o ponto de chegada de um ciclo secular de idéias e foi digno das meditações do sumo Gauss, seja, de há uns vinte anos a esta parte, para a topologia moderna, o trampolim para outro ciclo de considerações belissimas e fecundas. Quero aludir à pesquisa dos pontos fixos dos homeomorfismos ou das transformações de uma variedade ou ou de um espaço em si. Pesquisa a que se reduz um número enorme de questões de matemática pura e aplicada. E, neste campo, obtiveram-se, nos últimos 15 anos, resultados verdadeiramente belos.

*

Vamos nos ocupar agora, de um assunto um pouco delicado da matemática moderna. Queremos nos referir aos espaços abstractos. São êles os responsáveis pela introdução na matemática de um grande número de denominações novas que talvez tenham contribuido para afastar dela alguns geômetras e a torná-los desconfiados.

Tal abundância de denominações foi devida, a meu vêr, ao desenvolvimento febril da topologia que não permitiu, num primeiro momento, de avaliar e prever todo o valor e o alcance exato das noções que se iam introduzindo. Foram elas o fruto de uma urgente necessidade de pesquisa e de construção e ressentem-se da pressa com que as teorias foram levantadas.

Creio que o tempo, uma experiência maior e uma conciência mais precisa dos fins para os quais foram estas noções introduzidas, farão obra esclarecedora, eliminando o que é supérfluo. [1]

[1] Apraz-me realçar que é, exatamente, na compreensão da necessidade de tal obra que se inspira a recente monografia de A. Weil — *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* (Hermann, éditeurs, 1937).

Então poder-se-á ver, ainda melhor do que hoje, o interesse e a importância da nova doutrina.

Em suma que se fez quando se admitiram tais espaços? Fez-se no fundo, isto: analisaram-se as propriedades topológicas do espaço ordinário, deu-se-lhes uma forma racional, eliminaram-se algumas propriedades por acessórias ou menos importantes e depois chamou-se espaço a cada coleção de entidades (os pontos do nosso espaço) entre as quais subsistem propriedades que, abstratamente consideradas, fossem idênticas às preestabelecidas.

O processo que se seguiu é, afinal, muito simples. Ás entidades assim admitidas e às teorias conexas deu-se, logo, uma grande divulgação, nos países em que a topologia já era cultivada e nos quais havia maior preparação par recebê-las.

A maioria dos matemáticos modernos é, hoje, de parecer que êstes espaços abstratos trazem uma grande economia de pensamento. Releva notar o fato fundamental, de que êles agora constituem *o ambiente mais natural da topologia*.

Logo que apareceram, suscitaram, como era de prever críticas e objeções. Creio, todavia, que tais críticas e objeções não subsistam após serena reflexão. São de caráter puramente psicologico e perfeitamente análogas às que se fizeram, por exemplo, quando da introdução dos números complexos ou da quarta dimensão. Estou que o tempo as fará cair por terra.

Parece-me que se deva dar relevo, incidentalmente, a que o adjetivo «abstratos» dado a êstes espaços não é dos mais felizes; pela mesma razão porque não é dos mais felizes, como já ha tempos se observou, o apelativo de «imaginários» dado aos números que ainda levam êste nome.

Tais espaços, não são, em verdade, noções matemáticas mais abstratas do que as outras, assim como os números imaginários não são entidades mais imaginárias do que as outras.

Adjetivos da natureza dos que agora são recordados, foram, às-vezes, usados em matemática, quando se nos depararam, pela primeira vez, noções ou fenômenos novos que despertaram maravilha e tocaram a fantasia de maneira particular. Uma compreensão mais serena e profunda subentra a êste primeiro estado de espirito e permite considerar êsses fenômenos com mentalidade diferente e inserí-los num povo e harmônico ciclo de idéias. E a mim me parece que, quando nos limitamos a considerar fatos espirituais, nesta obra ordenadora e harmonizadora esteja o verdadeiro fim a que deve mirar a ciência, e na nova mentalidade que ela crea a pouco e pouco, o seu mais benéfico fruto.

Como já observou Giambattista Vico, o homem, primeiramente *«sente con animo perturbato è commosso»* depois *«riflette con mente pura»*.

As denominações do gênero das que referimos, provam que o homem passa através dêstes dois estados, ainda que defronte conceitos ou fatos ciêntificos. Tais denominações são creadas, evidentemente, quando nos achamos no primeiro dos estados mencionados: mas é frequente que elas se conservem na linguagem e nos textos, ainda quando já tenha passado êsse estado do nosso espírito.

*

Parece-me util observar que o conceito de espaço sofre com a admissão dos espaços abstratos, uma evolução análoga à já percorrida, antes, pelo conceito de número.

Como é bem sabido, para um matemático moderno, um número não é mais sómente um simbolo que se usa para representar quantas moedas estão na bolsa, ou o comprimento de um segmento, mas, em vez disso, um elemento de uma classe de entidades entre as quais definem-se certas relações e certas operações (ou correspondências) que gosam de determinadas propriedades.

Ora são bem conhecidos os beneficios que deram à matemática as sucessivas extensões do conceito do número, as quais se subordinam ao mencionado princípio.

Uma grande parte dos progressos de matemátida é consequência direta ou remota desta feliz extensão: dão disso exemplo, a teoria das funções de variavel complexa, dos números hipercomplexos, a dos números algébricos, a teoria das algébras, etc. ... Isto no que se refere sómente às consequências especificas e diretas da extensão do conceito de número. As consequências remotas são tais e tantas que não podem ser isoladas e desentranhadas do conjunto das outras teorias, porque, ao fim de contas, são intima parte do próprio espirito das mesmas.

Já ficou patente que a extensão do conceito de espaço propiciada pelos espaços abstratos dá à matemática beneficios do mesmo gênero daqueles provocados pela extensão do conceito de número. A cousa foi sentida tão nitidamente que hoje *há a tendência de fazer análise especialmente nos espaços abstratos.*

Esta orientação é evidentissima em muitos países em que são realizados cursos inteiros inspirados por esta tendência que, de frequente, é quasi exclusiva nos jovens. Ela data de muito poucos anos, mas propagou-se com grandissima rapidez.

*

Seja-me consentido, a esta altura, responder a uma eventual objeção. De vez que, como também eu procurei ressaltar, a admissão dos espaços abstratos constitue, à luz dos exemplos oferecidos pela evolução da matemática, uma creação bastante *natural* do pensamento matemático, poder-se-ia acreditar que tal invenção seja cousa simples e espontânea, porque bastante lógica, quasi como um «ovo de Colombo» e, portanto seja de escasso merecimento.

A tal objeção, responderei observando que, a meu ver, é sempre no terreno da dificuldade psicológica e nunca no da dificuldade lógica que se mede o valor de uma descoberta, uma vez que todas as descobertas sempre se verificaram quando já estavam cientificamente amadurecidas, isto é quando sob o aspeto lógico faltava sómente um passo para alcançá-las. A dificuldade em dar tal passo depende sempre tão só do fato de que opiniões enraizadas ou uma mentalidade instintiva impedem ao homem, não ao homem «lógico», abstração que não existe, mas ao verdadeiro homem, ao homem por inteiro, com os seus preconceitos, de compenetrar-se de como verdadeiramente podem estar as cousas; só porque mudaram inesperada e radicalmente quanto ao modo de pensar, as grandes descobertas foram difíceis de se fazer, e uma vez feitas, são deveras dignas de admiração.

Ora, deve-se considerar que no campo psicológico a invenção dos espaços abstratos não é uma cousa simples e intuitiva, porque é uma profunda mudança de um modo instintivo de pensar que, afinal, já tinha tradições bastante enraizadas.

Creio que agora resultará clara a razão de ser possível considerar que a admissão destes espaços seja um progresso verdadeiramente importante do pensamento matemático.

*

Vejamos, por fim, um quarto e, para não enfadar, último exemplo das admiráveis teorias que a topologia soube crear. O exemplo já considerado dos espaços abstratos era dado para mostrar a importância lógico-filosófica de alguns conceitos introduzidos com a topologia.

O exemplo que vou citar tem em mira, ao invés disso, dar uma idéia adequada da importância *técnica* de alguns entre êsses conceitos. Trata-se do conceito de *representação contínua ou imagem contínua,* isto é, transformação dos pontos de um conjunto A nos pontos de um conjunto B mediante uma operação contínua f. Pode ser definida como a operação mais geral que conserva o limite.

Portanto, não parecerá estranho que seja, com frequência, considerada como a operação mais fundamental da análise.

Pois bem, um capítulo verdadeiramente admiravel da topologia, estuda as propriedades desta operação. Elas tem sido objeto, nêstes últimos anos, de tal interesse que sobrelevam, acredito, mesmo o dos homeomorfismos.

Uma representação $f(A)$ de um espaço A sôbre um espaço B, se chama *essencial* quando, para cada ponto b de B existe ao menos um ponto a de A pelo que $f(a)=b$, e quando esta propriedade se mantem qualquer que seja a modificação de f de modo continuo. Para dar interesse à teoria das representações é necessário introduzir esta concepção.

Ora, dados dois espaços ou duas variedades, nasce o problema que consiste em saber se um dêstes A seja capaz de ser representado sôbre o outro B de modo essencial. Se A e B são duas variedades orientáveis e sem contorno da mesma dimensão n, demonstra-se que deveremos ter

$$R_p(A) \geq R_p(B) \text{ [1]} \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq n-1 .$$

Em geral, afim de que A possa ser representado sôbre B, é preciso que o espaço B seja, como diz bem Hopf, de uma estrutura «mais simples» do que A. Mas que cousa deve significar, *com precisão,* esta locução «mais simples» ainda nos é desconhecido.

Um grupo de questões de alto interesse e que se liga tambem a problemas de topologia clássica, como, por ex. a hipótese de Poincaré [2], concerne o eventual homeomorfismo de duas variedades das mesmas dimensões que se supõem representaveis cada uma delas sôbre a outra de modo particularmente simples.

A êstes quesitos, em geral, não se sabe que responder. Via de regra não sabemos ainda remontar de hipóteses concernentes simples representações a conclusões que se relacionem com os homeomorfismos; em muitos casos somos reconduzidos a variedades cujo homeomorfismo não sabemos provar e que, no entanto, têm todos os invariantes conhecidos iguais.

Um belo quesito é o seguinte: dado um segmento, qual é a sua imagem continua mais geral? Peano mostrou que esta imagem pode ser um quadrado, um cubo ou um hipercubo.

Vê-se logo que, qualquer que seja a função representativa, a imagem de um segmento é conexa, compata e localmente conexa.

Pois bem, um resultado extraordinário, obtido por Hahn e Mazurchiewitz, permite caracterizar, na imensa categoria dos espaços abstratos, as imagens continuas dos segmentos. Estes dois cientistas che-

---

[1] $R_p(A)$ é o número de Betti das variedades A relativas à dimensão p.

[2] Poincaré aventou a hipótese de que uma variedade a n dimensões, privada de contorno, tendo os mesmos grupos de homologia de uma n-esfera e com o grupo de Poincaré igual à identidade, seja homeomorfa a uma esfera.

garam a demonstrar que a observação precedente se pode inverter, isto é, que *cada espaço abstrato conexo, compato e localmente conexo é a imagem contínua de um segmento.*

A imagem contínua de um segmento assume, portanto, os aspectos mais inesperados e que menos facilmente se podem conceber. Pode ser, por exemplo, um paralelótopo do espaço hilbertiano e espaços muito mais complicados.

O referido resultado é, certamente, um dos mais interessantes da análise moderna.

Naturalmente a dimensão que, na geometria clássica, tinha permanecido um conceito, por assim dizer, tabú, nestas novas teorias é bem maltratada. Mas, por pouco tempo, pois dois interessantes teoremas de Hurewicz vem regular, com um critério muito simples, as variações dimensionais que podem sofrer as imagens topológicas de um espaço.

Eis, agora, como conceitos de matemática clássica vêm em nossa ajuda. A imagem de um segmento é, como já se disse, um espaço compato e conexo e localmente conexo. Os primeiros dois adjectivos são, frequentemente, considerados como equivalentes ao de «contínuo».

A imagem de um segmento é, pois, um espaço contínuo localmente conexo. Mas, se tomo tal espaço e procuro a sua imagem contínua genérica, obtenho, evidentemente, ainda um espaço contínuo localmente conexo. A esta altura os topólogos não se fizeram esperar para concluir. Partindo de uma curva e aplicando uma representação contínua, obtem-se um espaço contínuo localmente conexo; aplicando a êste espaço a mesma operação obtem-se novamente um espaço com as mesmas propriedades; portanto, êstes espaços constituem ùma categoria, por assim dizer, fechada, com relação à operação de transformação contínua, porque tais transformações mudam um elemento de determinada classe em um elemento da mesma classe. E de vez que entre êsses elementos estão as curvas ordinárias que podemos tomar por modelo dos conjuntos capazes de serem obtidos, bôa parte dos topólogos chama logo de *curvas contínuas* aos elementos de tal classe, isto é, os segmentos ou as suas imagens, as quais são os contínuos localmente conexos.

Assim, por meio de conceitos adequados, conseguiu-se estender pontes entre perspectivas ilimitadas de fatos geométricos que ha bem pouco tempo a mente humana nem chegara a conceber.

*

Poder-se-ia, agora, perguntar: é verdade que a topologia apresenta as mais amplas perspectivas de fatos geométricos e introduz concepções capazes de dominá-los, mas não apresenta além disso, problemas simples, que de relance, porém, parecem-nos fundamentais e que concernem figuras particulares, com que estamos familiarizados? Problemas que os franceses chamariam «bien posés» de enunciado elementar e que persuadem logo, mesmo aos leigos, graças à à sua simplicidade?

Sim! Tais problemas encontram-se até a cada passo e já observei, ao princípio, que quando a topologia surgiu, foi frequentemente inspirada, até, por problemas de carácter tão simples a ponto de serem incluidos nos manuais de matematica divertida. Basta que se pense nos problemas das sete pontes de Koenigsberg, nos vários problemas concernentes aos «graphs», ou complexos de uma só dimensão, no problema das quatro côres; problemas que muita vez parecem ser dados pela natureza para desafio e escárneo da presunção humana, visto que, alguns dêles, ainda não puderam ser resolvidos, como por exemplo o das quatro côres; argumento êste último sôbre o qual já se fizeram estudos que sobem a mais de uma centena!

Mas desejo aqui, referir-me como última cousa, a uma categoria de problemas de enunciado bastante simples no tocante às representações contínuas: problemas sôbremodo sugestivos e que não são praticamente inatacaveis, como alguns dos precedentes, porque já em alguns casos especiais, foram resolvidos.

Aludo, por exemplo, a êste elegantíssimo problema:

Dadas duas esferas S_m e S_n a m e n dimensões, sendo $m > n$ quando é que S_m pode ser representada essencialmente sôbre S_n?

Creio que o bom gôsto e a simplicidade dêste problema não escapará a ninguem [1].

Pois bem, nasce daí um problema dependente dos inteiros m e n. Este problema, no caso geral, não está ainda resolvido, mas possuimos, a seu respeito, muitos resultados particulares, para classes de tais pares de números. Eis, a titulo de exemplo, duas soluções:

1.º) Um resultado afirmativo de Hopf, segundo o qual

---

(1) Eis o que pensa, a respeito, o eminente topólogo Hopf: *Je considère la rèponse gènèrale à cette question comme une tâche des plus importantes et des plus attrayantes; non seulement en ce qui concerne la thèorie, mais aussi parce que nous dèvrions connaître complètement et sous chaque point de vue des figures aussi simples et aussi importantes que les sphères!*

(2) Resultado comunicado ao Congresso Internacional dos Matemáticos, de Oslo, em 1936.

Outros resultados, sôbre êste assunto, foram recentemente obtidos por Freudenthal.

a representação é possível quando $n=2k$ $(k=1,2,\cdots)$ e $m=4k-1$;

2.º) Um resultado negativo de Pontrjagin [2] quando $m=n+2>4$.

Acredito ter mostrado, com êstes exemplos, como a topologia possa satisfazer, e do melhor modo, também a quesitos do tipo que acabamos de assinalar.

*

Considero que os exemplos referidos, conquanto só possam dar uma idéia muito fragmentária do desenvolvimento atual da topologia, sejam capazes de persuadir, completamente, acerca da evidente verdade daquela afirmação que antecipamos: isto é, que ela constitue o meio mais rápido para entrar na posse de muitos dos conceitos mais importantes da matemática moderna e de um grande número das suas teorias mais significativas.

Com isto parece-me ter dito muita cousa. Entretanto nêste ponto, uma grande parte de topólogos sentiria que não disse tudo.

É que a topologia, como toda teoria que não só amplia e aperfeiçoa os conhecimentos técnicos, como tambem transformam profundamente a visão, e a própria mentalidade científica do pesquizador, exerce sôbre o ânimo dos seus cultores uma fascinação toda particular.

Ela provocou um «pathos» bem sensível nos centros em que a topologia está realizando os seus progressos mais significativos e um interesse que se projeta alem do circulo dos seus cultores; fato êste bastante raro para uma teoria matemática.

Lembro, a êste respeito, como em Princeton, das conferências de topologia de carácter não muito particular, participava sempre um auditório notavelmente mais vasto e interessado do que o normal, constituído não sómente de matemáticos. Isto não é cousa de somenos importância, ainda que não produz para a ciência efeitos imediatos, porque é, precisamente, inspirando simpatia e confiança em círculo mais vasto possível de pessoas inteligentes que um ramo da ciência (sôbretudo quando, como a matemática, nem sempre dá para logo, aplicações práticas) provoca aquela compreensão e, onde fôr preciso, aqueles auxilios materiais e morais que impedem a sua decadência e que estimulam homens de valor a dedicarem-se ao seu desenvolvimento.

Estou que sómente outra teoria contemporânea possa, no campo físico-matemático, orgulhar-se de ter a seu crédito a formação de uma análoga paixão: a física atômica. Ambas estas teorias tiveram, em consequência de descobertas inovadoras, um desenvolvimento simultâneo rapidissimo e transformaram respectivamente os dois campos da matemática e da física teórica.

É lei da natureza que onde é mais difícil a vida, aí, às vezes se desenvolvem os organismos mais bem dotados. O período de formação de uma teoria nova é sempre árduo para o trabalho científico, porque nesta fase da pesquisa se enturvam as analogias que são a guia perene do cientista. Mas, em compensação o mistério de que se cerca o ambiente, excita de tal modo a sensibilidade e a fantasia que supre, em parte, a experiência que falta.

Com efeito, em tal ambiente apaixonado se desenvolvem frequentemente as personalidades científicas fora do comum. Estas abundam entre os cultores da topologia.

Entre os muitos que merecem ser lembrados, citarei para ser breve, um só: Leon Pontrjagin.

Este jovem é um dos mais profundos geômetras da última geração. Pesa sôbre êle a terrivel sina de ser cego, como me dizem, desde o nascimento; exemplo, talvez, único entre os matemáticos e, com maior razão entre os geômetras. Êle dita à irmã os resultados de pesquisas sôbre cousas que nunca pôde ver; pesquisas, muitas das quais, deram um impulso vivo e essencial ao progresso da topologia.

É conhecido o agarramento, todo especial, que os topólogos têm para a topologia.

A propósito, lembro-me da singular resposta que me foi dada por valoroso topólogo, apreciado, também, por seus trabalhos de geometria diferencial, ao perguntar-lhe se gostaria de volver aos seus estudos precedentes: «voltar a tais estudos parecer-me-ia caminhar para trás».

Essa resposta não deixou de me surpreender no primeiro momento.

É fato evidente que todo o matemático embora tendo trabalhado na topologia, pode entregar-se a pesquisas não topológidas, sem por isso, diminuir de modo algum o interesse e a importância da própria atividade. Parece tão claro que o interesse de um trabalho científico decorre principalmente das idéias novas que êle desvenda ou dos resultados que apura, isto é, das novas ligações que estabelece entre idéias e conceitos já determinados! Mas, um topólogo conserva sempre, mesmo em pesquisas não topológicas a nova mentalidade devida aos seus conhecimentos de topologia. A topologia, em suma, proporciona ao matemático um modo de vêr os problemas ao qual não mais renuncía, mesmo quando se dedica a outras questões. Neste sentido, provàvelmente, pode justificar-se a frase que acima recordei.

Nos ambientes em que a topologia é mais cultivada são bem comuns frases entusiásticas que é oportuno referir. Tais frases são, por exemplo: «êste é o século da topologia», ou «nada há na matemática, além da álgebra e da topologia».

É preciso que nos detenhamos no exame, ao menos da primeira frase. Outras vezes, com efeito, acreditou-se poder sintetizar a operosidade desenvolvida na matemática, em dado periodo histórico, esquematizando-a num dado dominio da própria matemática. Assim, o século passado teria sido o século da teoria das funções e o século XVIII o do cálculo infinitesimal.

Estas afirmações tomadas ao pé da letra, estão evidentemente bem longe de ser exatas, porque é óbvio que cada época deu a sua contribuição para o progresso de muitas teorias diferentes da matemática e não de uma só. No entanto frases dêsse gênero sempre foram ouvidas e têm uma razão de ser, ou seja, que é verdade que nos varios periodos históricos os cientistas foram, muita vez atraídos por algumas teorias que exerceram fascinação particular e às quais atribuiram maior importância.

Entre as partes de que se compõe uma ciência como a matemática, quando estas são abstratamente consideradas, não se pode estabelecer uma hierarquia. Com efeito, qualquer raciocínio, qualquer declaração tendo tal escopo, conduziu sempre a afirmações contraditorias e choca-se, frequentemente, contra o sentido de harmonia em face do belo que cada um tem em si.

Mas, as cousas mudam se as várias teorias científicas em logar de serem consideradas fora do tempo e do ambiente científico em que se desenvolveram, se consideram no seu desenvolvimento histórico.

Muitas vezes uma teoria nova, cuja introdução tenha sido desejada por muito tempo, se desenvolve com grande rapidez, muito maior do que a de outras, quasi como um organismo tambem biologicamente jovem; e, por assim dizer, impregna de si mesma, por algum tempo quasi todas as partes da matemática que dela recebem novos meios e alcance. *A topologia acha-se, agora, em semelhante periodo de desenvolvimento.*

Esta doutrina baseia-se, em grande parte em conceitos que preexistiam na matemática de ha algum tempo. Portanto, poderia parecer estranho que se desenvolva principalmente agora e alguem poderia vêr nisso um sinal de que êste desenvolvimento seja favorecido ainda por fatores não intrinsecos, como, por ex., uma espécie de «moda».

A meu vêr, entretanto, nada está mais longe da realidade do que esta opinião.

Parece-me que o ritmo do desenvolvimento, através da história das várias partes de uma ciência, tenha sempre, ainda quando não transparece que seja devido a evidentes necessidades, uma intrínseca razão de ser. As fases de desenvolvimento do pensamento científico são muito frequentemente determinadas pelo instinto de tornar o mais possìvelmente eficaz o trabalho de pesquisa. O fato de que, depois de se ter chegado a possuir certos meios de pesquisa, se prefira estudar certas partes da ciência em logar de outras que também teriam possivel desenvolvimento, estou que se deva atribuir à necessidade de utilizar ao máximo o pensamento humano naquele modo com que se pensa de obter, com o tempo e com os meios de que em dado momento se dispõe, a maior cópia de resultados. Trata-se, portanto, de uma necessidade de carácter sério, cuja satisfação favorece de certo o progresso científico.

A topologia tomou tal impulso que faz brotar e aceitar a referida frase sómente porque intuiu que constituia um campo de pesquisas no qual se trabalha com o maior aproveitamento para o progresso de tôda a matemática.

O fato de que, especialmente agora, a topologia seja cultivada não nos deve espantar: porque a ciência não se subordina nunca, no seu desenvolvimento, a esquemas abstratos, mas àquelas leis que mais a fazem prosperar.

A frase acima mencionada não é pois, de se atribuir a unilateralidade ou exaltação, como alguem numa primeira hora, poderia presumir, mas é de preferência, um entusiástico grito de ação, fruto de intuição feliz.

Para terminar, quero observar que um aspeto exterior, mas impressionante, do rápido progresso da topologia é a atual absorvente difusão geográfica das suas escolas.

Com efeito, há, hoje, escolas de topologia nos seguintes países: Alemanha, Suiça, Dinamarca, Holanda, Inglaterra, Russia, China, Japão, Estados Unidos. Houve, tambem, em Viena, Praga e Varsóvia. As melhores são as dos Estados Unidos, a russa e a polonesa. Nesses países quasi todos os jovens que estudam matemática dedicam-se, no todo ou em parte à topologia ou, pelo menos, conhecem-na bem. Há, ainda, cultores isolados na Itália, na França e em quasi todos os outros países. Estes são, em complexo, centenas. A topologia é, portanto, hoje em dia, a teoria matemática recente, mais difundida e geogràficamente mais universal.

Cerca de 40 % dos trabalhos de geometria não elementar, concernem a topologia, bem como a maioria dos trabalhos de geometria, escritos por autores jovens.

Também isto é sinal mais claro de que por muito tempo o desenvolvimento da geometria e de bôa parte da matemática depende indissoluvelmente do da topologia.

ANTOLOGIA

EL PROFESOR GEORGE D. BYRKHOFF Y SU INFLUJO EN LA ARGENTINA*

*por **J. Rey Pastor***

Todos los miembros de la Unión Matemática Argentina que conocieron al profesor Birkhoff, y al conocerlo quedaron prendidos en los lazos de su amistad y encantados por la simpatía que irradiaba su excepcional personalidad, rinden en esta breve página dolorido homenaje al que fué su colega honorario, elegido por aclamación, quien apreció como nadie la tesonera labor de nuestra asociación, que consideraba admirable y hasta heroica, en ambiente tan poco propicio.

En el confín de los dos siglos, el gigante país del norte había alcanzado ya su plenitud física; pero los valores culturales más nobles apenas se insinuaban. En el campo matemático pudo Birkhoff proseguir la obra iniciada por Peirce, Gibbs, Bôcher, Moore, Osgood, luchando con la falta de ambiente, natural en todo país nuevo, regido por el pragmatismo de los esforzados pioneers que edificaron la nación y organizaron la explotación de sus riquezas.

Quien luchó por aclimatar la investigación científica en país de gloriosa estirpe intelectual, pero de orientación utilitaria, urgido de prisa en cosechar tempranos frutos, sabía por experiencia propia cuán delicada planta es la investigación desinteresada en las ciencias abstractas y cuán fácilmente se malogra su raquíta vida, nacida casualmente de la milagrosa germinación de algunas raras semillas finas, entreveradas en el copioso grano vulgar; sabía la trascendencia que para el porvenir de un país tiene el defender esa frágil vida de la injuria del inevitable viento y del pisotón brutal; hasta que las raíces se extiendan y vigoricen, y su vida quede, no ya tolerada, sino protegida por el Estado, como importante función social.

Muchos de los muchos sabios extranjeros que hicieron su *tournée* sudamericana, sabían muy bien esto mismo; todos ellos se dieron cuenta de la mísera vida de esta incipiente investigación, porque no encaja en nuestra política universitaria, que antes necesita nuevas cátedras, con miras electorales; todos lo vieron y comentaron en privado, pero todos se callaron con egoísta discreción; uno sólo se interesó por nuestro vital problema e hizo cuanto pudo para resolverlo, con generosa solicitud.

Recordemos con gratitud emocionada su inquisitivo interés por el progreso argentino, desde el mismo día de su llegada. Muy cortesmente supo romper el cerco que en torno de cada egregio visitante suele formar el pintoresco círculo de seudosabios exhibicionistas, entremezclados con algún vividor; y dedicando un tiempo mínimo a cumplir exquisitamente los deberes de cortesía, consagró todo su tiempo y su alma entera a descubrir los «jóvenes que prometen». Bajo su amistosa pero insistente presión hubo que realizar una caza metódica en las diversas zonas universitarias, presentándoselos uno a uno, como él quería, para confesarlos a solas, con sigilo de sacramento. Entre los muchos jóvenes promisores descubrió con tan óptimo método a los pocos que algo podrán dar de sí; y entre ellos a los poquísimos que ya dan algo. Y preparando, tras el minucioso reconocimiento del terreno, su estratégico plan de acción, contando con la ayuda financiera de las generosas instituciones que desparraman su protección sobre los países capaces de aprovecharla eficazmente, dirigió su acometida a las autoridades y personajes oficiales de diversa categoria. También éstos son hombres que prometen. Y tras esta consoladora conclusión, que nadie ignoraba entre nosotros, terminaron sus esperanzas y también las nuestras.

Quien desconozca los argumentos de suprema dignidad que suelen ser usados para defender se de tales sospechosas donaciones, puede encontrarlos entre los que usó el suspicaz cabildo montañés — según nos relató Pereda —, para rechazar el reloj destinado a la torre, que había donado um ingenuo indiano enriquecido. En cuanto a la desgracia sufrida por las donaciones de argentinos (pocas hasta ahora, ninguna probablemente en lo porvenir) habría que recurrir a otro género de literatura.

Cada hombre crea el mundo a su imagen y semejanza; el mezquino procura interpretar peyorativamente la generosidad ajena, que no comprende; el impotente egoísta no cree en la verdad de las investigaciones de otros, ni puede entender sus móviles, que juzga a su manera. Todavía no se ha aclimatado entre nosotros la religión de la cultura y todos no podemos comprender ciertas virtudes místicas, de idealismo generoso, que en los grandes países, más por su alma que por su cuerpo, florecen con igual magnitud que sus grandes defectos. No es parva muestra de generosidad la que nos dan al permitir a los

* Publicado em «Revista de la Unión Matemática Argentina», Vol. X, n.º 3, Buenos Aires, 1945.

demás países aprovecharse de sus inventos, sin molestarse siquiera en colaborar en la tarea común, que exige cuantiosos sacrificios.

¡ Que inventen ellos, que son ricos ! y aprovechemos nosotros sus drogas curativas. Pero ignora, quien así razona, que la invención no es secuela, sino causa de la riqueza.

El fracaso de la tesonera acción de Birkhoff en pro del desarrollo de la investigación matemática en la Argentina, era fatal; pero nos queda el consuelo de haber confirmado durante su convivencia entre nosotros la idea que ya se había formado al comparar la producción de los diversos países: sólo de la Argentina y Perú — solía decir — cabe esperar su incorporación a los países productores de Matemática; allí por sus directores; aquí por la existencia de un núcleo ya formado de jóvenes con suficiente preparación. La admirable comprensión de las autoridades académicas limeñas va logrando, más visiblemente cada día, este lauro para su país, profetizado por el gran maestro.

No es el tema de esta apresurada nota el análisis de sus creaciones científicas. «Pauca sed matura» fué su lema; sólo se asomaba a la publicidad cuando tenía algo muy nuevo que comunicar; algo que perdurase en la ciencia, como adquisición duradera. Y en esta obra de selección, propia de una inteligencia sibarita, basta citar tres éxitos que aseguran su inmortalidad: venció con ingenio sumo las dificultades topológicas ante las que fracasó la tenacidad del genial Poincaré, sacando después preciosas aplicaciones de la fecunda verdad entrevista por éste, con que cerró su obra gloriosa; abrió nuevos rumbos al Análisis con la introducción del método topológico, cada día más eficaz; demostró el teorema ergódico, con alcance que nadie soñaba.

No es preciso analizar más de su obra, en la que hay sin duda otras importantes novedades; con estas tres ideas, que abren amplias vías al Análisis, a la Mecánica, a la Física, queda asegurado su alto puesto en la fama; con sus virtudes personales conquistó el afecto de cuantos lo conocieron; con su generoso interés en pro de los países continentales, tras haber dado gloria a su patria, amplió a lejanas latitudes el círculo de sus agradecidos admiradores.

Vida lograda y envidiable. Dichoso el país que produce tales hombres.

A TEORIA MATEMÁTICA DOS SEGUROS NAS UNIVERSIDADES ALEMÃS *

*por **Luciano Pereira da Silva***

Berlim, 23 de Junho de 1912.

Meu querido amigo: — Vou hoje tentar cumprir a promessa, que lhe fiz em Lisboa, mandando-lhe informações sôbre o ensino da Ciência dos Seguros nas Universidades alemãs, o que não tenho feito por absoluta falta de tempo.

Como lhe disse aí, a antiga Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra propôs, quando se tratou da organização das actuais Faculdades de Ciências, que, na secção de ciências matemáticas destas Faculdades, se incluísse um curso de Estatística e um curso de Matemática dos Seguros. Esta proposta, da iniciativa do Prof. dr. Sidónio Pais, então Vice-Reitor, já em Coimbra não era bem vista por alguns professores que entendiam que a Teoria Matemática dos Seguros não é assunto próprio duma Universidade.

Não se pensa, porém, assim aqui na Alemanha. Como sabe, as Universidades alemãs têm, em geral, quatro Faculdades: a Faculdade teológica, a Faculdade jurídica, a Faculdade médica e a Faculdade filosófica. Nesta última são professadas as disciplinas que constituem as nossas actuais Faculdades de Ciências e de Letras e ainda as que constituem os grupos de ciências políticas e ciências económicas da nossa Faculdade de Direito. As Faculdades filosóficas são, por isso, enormes, compreendendo as ciências filosóficas, as ciências matemáticas, as ciências naturais, as ciências políticas e económicas, a história e geografia, as ciências filológicas e as artes e sua história. É aqui que tem, naturalmente, cabimento o estudo dos Seguros, quer pelo lado económico, quer pelo lado matemático.

No semestre do inverno dêste ano lectivo, o professor Bortkiewicz da Faculdade de Filosofia de Berlim regeu um curso de Teoria Geral de Estatística e um curso de Cálculo de Seguros.

Na Universidade de Munich, no mesmo semestre, o Prof. Lindemann regeu, na Faculdade de Filosofia, um curso de Cálculo diferencial, um curso sôbre a Teoria das Funções Abelianas e um curso sôbre a Teoria Matemática dos Seguros.

Mas mais interessante é o que sucede na Universidade de Goettingen, onde, a par de cursos sôbre seguros, há um Seminário de Seguros. Os seminários são instituïções caraterísticas das Universidades alemãs. Entre os institutos anexos às faculdades, en-

* Carta enviada ao sr. Fernando Bredorode, director da Companhia de Seguros «A Nacional», publicada em *Jornal de Seguros*, n.º 156 — Lisboa, transcrita em «Revista da Universidade de Coimbra» — Vol. II — 1913, donde é extraída.

contra-se quási sempre um seminário jurídico, um seminário estatístico, um seminário de história, um seminário matemático, etc.

Descrevo-lhe, por exemplo, o seminário matemático de Berlim, dirigido pelos três professores ordinários de matemáticas puras. Êste seminário funciona em duas salas contíguas, uma das quais é um anfiteatro para aula, um auditorium, como aqui se diz. A outra é uma Biblioteca matemática, contendo também uma colecção de modêlos geométricos. Os alunos só podem matricular-se no seminário no seu 3.º semestre de freqüência universitária. No comêço do semestre, os professores propõem diferentes temas aos alunos que escolhem o que mais lhe agrada, estudando-o em seguida sob a direcção dum dos professores, tendo à sua disposição as melhores revistas matemáticas, as memórias das academias, as obras dos grandes matemáticos. Terminado o seu estudo, escreve o aluno uma breve memória que entrega ao professor. Se êste julga que o estudante está senhor do assunto, permite-lhe que faça uma conferência no auditorium, que é discutida pelo professor e pelos alunos a quem o assunto interessar. Como vê, no seminário, os estudantes aprendem a trabalhar, a investigar, com a independência que leva à produção de trabalhos originais. Muitos trabalhos originais dum dos directores dêste seminário, o Prof. Schwarz, são do tempo em que êle era aluno do seminário de Berlim, sob a direcção de Weierstrass.

Na Universidade de Goettingen professa, nêste semestre de verão, na Faculdade de Filosofia, o Prof. W. Lexis, muito conhecido pelas suas obras sôbre a organização do ensino da Alemanha, além do curso de Economia política, um curso intitulado — Economia e Estatística dos Seguros; e o Prof. Bernstein, além dum curso de Cálculo de probalidades, um curso de Cálculo de Seguros. Pois, além dêstes cursos, êstes dois professores, juntamente com o Prof. Lehmann que, na Faculdade jurídica se ocupa dos seguros, dirigem o Seminário de Seguros. Nêste seminário, onde os segnros se podem estudar sob o tríplice ponto de vista jurídico, económico e matemático, não se trata de comunicar a ciência feita, mas antes de educar actuários capazes de fazer progredir a ciência dos seguros, da mesma forma que o fim mais elevado dos seminários matemáticos é educar matemáticos criadores.

Nesta Universidade há uma vantagem especial para os estudantes de ciências naturais que lhe deve interessar. Em tôdas as Universidades alemãs os estudantes são obrigados quando se matriculam, em cada semestre, a pagar um ou dois marcos para a Caixa de socorros médicos. Em Goettingen há, além disso, para os estudantes de medicina, ciências naturais, farmácia, e estudantes dentistas, um seguro contra acidentes, mediante um marco por semestre. Com efeito, êstes estudantes estão sujeitos, nos seus estudos práticos, a verdadeiros acidentes de trabalho, contra os quais se podem assim segurar.

Já vê o meu amigo que, na Alemanha, se julga a Teoria matemática dos seguros à altura dos estudos universitários. O mesmo sucede nas Universidades dos países vizinhos de organização análoga à alemã.

Na Universidade de Viena de Austria, no último semestre do inverno, o Prof. Tauber da Faculdade de Filosofia regeu um curso de Màtemática dos Seguros e um curso de Estatística Matemática.

Na Faculdade filosófica da Universidade de Basileia na Suissa, o Prof. Spiess rege, neste semestre de verão, um curso de Geometria analítica no espaço e um curso intitulado — Noções fundamentais de Cálculo dos Seguros para tôdas as Faculdades.

Terminarei com o exemplo da Universidade de Berne, onde há um Seminário de matemática dos Seguros. Ocupam-se de seguros dois professores da Faculdade filosófica. O Prof. Graf rege neste semestre, os seguintes cursos: Funções esféricas, Funções de Bessel, Integrais defenidos, Equações diferenciais, Teoria das Funções e — Seguros e Rendas. O Prof. Moser rege um curso intitulado — Seguros de Vida. Êstes dois professores dirigem, além disto, o Seminário de Matemática de Seguros. O Prof. Graf é também director, juntamente com o Prof. Huber, do Seminário matemático.

Assim, ora vemos a matemática de seguros ensinada juntamente com as mais trascendentes matemáticas pelo mesmo professor, ora ensinada em cursos elementares para estudantes de tôdas as Faculdades, como em Basileia, ora estudada com maior profundidade nos Seminários de Seguros.

Das vantagens que, para as nossas Companhias de Seguros e para a vida económica do país, resultam da divulgação do conhecimento dos Seguros de Vida, da necessidade de estudos mais profundos num país, como o nosso, onde está por fazer uma Tábua de Mortalidade, não é preciso falar a quem, como o meu amigo, é uma autoridade no assunto. Cada escola pode concorrer para esta obra com os métodos que lhe são próprios. A colaboração das Universidades seria de tôda a vantagem, não lhe parece?

E não o enfado mais. No Central Hotel de Berlim tem sempre ao seu dispor o que é, com velha estima,

Seu amigo muito afeiçoado e admirador.

Luciano Pereira da Silva

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

CICLO DE PALESTRAS RADIODIFUNDIDAS PROMOVIDAS PELA «JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA» (*)

A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E O ENSINO

*por **António Júdice***

O problema das relações entre a investigação científica e o ensino possui vários aspectos, alguns dêles solidários, que devem ser cuidadosamente definidos e isolados para uma perfeita compreensão e conseqüente resolução. Procurarei fazê-lo, não abstractamente, tendo sempre presente o caso concreto do nosso país.

Em primeiro lugar é necessário saber-se quais os tipos de investigação científica e de ensino que o estado actual do nosso país exige, de modo a poderem ser satisfeitas as necessidades humanas relativas a um padrão de vida, que o nível já alcançado pela ciência e pela técnica largamente permite.

Não se trata de nos confinarmos, para sempre, na actividade científica imediatamente ligada às necessidades, talvez puramente técnicas, duma intensa e profunda reconstrução material: a actividade científica pura, que procura resolver problemas de mero conhecimento, não apresentados por qualquer técnica, é tão indispensável ao bem-estar da Humanidade como a que nêle actua directamente, e tem, por isso, de constituir tarefa de todos os povos. Duma maneira geral deve, porém, reconhecer-se que ela só existe verdadeiramente nos países de forte desenvolvimento das fôrças produtivas e que, além de tudo o mais, não seria sensato dedicar-lhe a maior parte das nossas energias numa época em que o progresso material do nosso país exigirá certamente a resolução de uma infinidade de questões científicas, originadas na realização de tarefas práticas tão complexas, como a electrificação, a prospecção mineira, as indústrias químicas, a profilaxia organizada, etc.

Do mesmo modo, tendo sempre presente a inevitável realização dessas tão grandes tarefas, o ensino superior terá de ser orientado de maneira a formar efectivamente os técnicos que as efectuarão. A finalidade a atingir determina aqui, como aliás noutros sectores, os processos que devem ser utilizados.

Vejamos se, esclarecidos por estas considerações iniciais, seremos capazes de responder às preguntas que habitualmente se formulam a propósito da investigação científica e do ensino.

Deve a investigação científica ser confiada às Universidades?

Devem, pelo contrário, ser criados institutos especiais de investigação, limitando-se as Universidades a uma actividade de simples transmissoras de conhecimentos?

No caso de se reconhecer que a investigação constitui missão essencial das Universidades, deve exigir-se dos respectivos professores, evidentemente não sobrecarregados de trabalho docente, uma actividade intensa na investigação, de modo a serem justamente afastados os que a não praticam?

Devendo, como atrás se disse, dirigir-se no momento actual a investigação de preferência para a resolução de problemas concretos nacionais, é evidente que ela não pode ser confiada em exclusivo às Universidades, que não estão suficientemente perto da actuação para poderem investigar com êxito em todos os problemas.

Por outro lado, como a Universidade deve formar os técnicos que ulteriormente serão encarregados da resolução dos grandes problemas nacionais, não poderá certamente fornecer-lhes uma formação real se não lhes entregar, ainda como alunos, o estudo de determinadas questões devidamente seleccionadas e graduadas. Resultam daí grandes vantagens para êles próprios e para o país, que verá assim grandemente acrescida a equipa dos seus investigadores.

Duma maneira geral, eu entendo, com as inevitáveis restrições que devem ser postas em tudo o que disser uma única pessoa, forçosamente deformada pela sua especialidade, que o ensino das Universidades há-de dividir-se em duas fases.

Na primeira serão fornecidos aos alunos os elementos informativos de carácter geral, que se encontram sempre subjacentes a tôda a especialização e constituem resultados definitivamente adquiridos, e, mediante exemplos apropriados de problemas já resolvidos, dar-se-lhes-á consciência dos métodos e dificuldades próprias da investigação: na medida do possível a exposição não seria uma fria descrição de teorias acabadas e petrificadas, mas a germinação viva das grandes sínteses teóricas a partir dos primeiros dados.

(*) Já publicadas na «Gazeta de Matemática»: «O valor social da investigação científica», por Ruy Luís Gomes — «G. M.», n.º 19; «Os objectivos da Junta de Investigação Matemática», por António Monteiro — «G. M.», n.º 21; «A investigação científica ao serviço da saúde», por Corino de Andrade; «A investigação científica e a defesa da produção vegetal», por Branquinho d'Oliveira — «G. M.», n.º 23; «A investigação científica nas ciências sociais», por Fernando Pinto Loureiro; «A investigação científica em biologia e sua importância prática», por José Antunes Serra — «G. M.», n.º 24.

Na segunda fase, a dos cursos especiais de escôlha largamente facultativa, os alunos realizariam verdadeiros trabalhos de investigação enquadrados no plano geral da investigação científica nacional.

Aos professores dêstes cursos teria de ser exigida uma intensa actividade na orientação de tôda a investigação nêles realizada.

Criado um instituto de planificação da investigação científica, ou, melhor ainda, aproveitando para êsse efeito a nossa Academia de Ciências devidamente adaptada e alargada, êle não deixaria de incluir no plano das tarefas de investigação a realizar em cada ano, aquelas que seriam efectuadas pelos alunos das nossas Universidades e seus professores em seminários especialmente construídos para êsse efeito.

Para falar apenas daquilo que conheço melhor, estou convencido de que, se assim se tivesse procedido há mais tempo, teria sido possível estudar com brigadas de alunos, devidamente subsidiadas, os delicados problemas de natureza científica que a Geodesia nacional ainda não esclareceu: tenho confiança na nossa juventude e compreendo a falta de entusiasmo que ela manifesta em relação à ciência fossilizada, que as Universidades são obrigadas actualmente a ministrar-lhe.

O PRESIDENTE TRUMAN E A INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA *

O progresso na investigação e o valor científico é uma condição indispensável ao bem estar e segurança futura da nação. Os sucessos dos últimos anos constituem, ao mesmo tempo, a prova e a profecia do que a ciência pode realizar.

Nenhuma nação pode manter uma posição de primeiro plano no mundo de hoje a menos que desenvolva ao máximo os seus recursos científicos e técnicos. Nenhum govêrno cumpre devidamente as suas responsabilidades a menos que não espalhe e fomente o generoso e inteligente labor dos seus homens de ciência nas universidades, na indústria e nos seus próprios laboratórios.

Durante a guerra aprendemos muito àcêrca da forma como organizar a ciência e as formas de fomentar e apoiar as suas actividades.

A utilização da energia atómica é uma clara indicação do que podem obter as nossas universidades, a nossa indústria e o govêrno trabalhando solidàriamente. Grandes campos científicos estão ainda por conquistar da mesma forma.

Afim de lograr no futuro todos os benefícios do que acabamos de aprender, exorto o Congresso a adoptar ràpidamente a legislação necessária para o estabelecimento de uma organização federal única para a investigação que desempenhe as seguintes funções: 1.º — fomentar e apoiar os trabalhos fundamentais de investigação e melhoramento em tôdas as questões relativas à defesa e segurança da nação; 2.º — fomentar e apoiar a investigação nas ciências básicas e ciências sociais; 3.º — fomentar e apoiar as investigações no campo da medicina, saúde pública e questões análogas; 4.º — proporcionar ajuda financeira, na forma de bolsas e prémios, em dinheiro, aos jovens de provada capacidade científica; 5.º — coordenar e fiscalizar diversas actividades científicas que realizam actualmente vários departamentos e organismos do govêrno federal; 6.º — pôr à disposição do comércio, da indústria, da agricultura e das instituïções académicas, total, livre e pùblicamente, os frutos da investigação financeira com fundos do govêrno.

Os conhecimentos e a investigação científica constituem uma estrutura ligada e complexa. Os progressos técnicos numa actividade podem ter uma grande importância para uma outra que aparentemente não está relacionada com aquela. Por isso, peço ao Congresso que compreenda a conveniência de centralizar essa função numa única organização.

Se é certo que a ciência pode ser coordenada e fomentada não é possível arregimentá-la nem dar-lhe ordens.

A ciência não pode progredir a menos que as medidas a adoptar se não baseiem na inteligência livre do sábio. Julgo que a organização federal da investigação que proponho não coartaria de forma alguma essa liberdade.

A «General Electric Co.» está estudando a construção de um laboratório de investigações cujo custo está calculado em 8 milhões de dólares e que será construído em Schenectady, U. S. A.

Num «rapport» do Prof. A. V. Hill, da Royal Society, sôbre a organização científica da Índia propõe-se a criação de uma organização central para a investigação científica sob a direcção de *um ministro, assistido de seis directores.*

* Extraído de «Ciência e Investigación» — Revista patrocinada por la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciências, Buenos Aires, año I, Octubre, 1945.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

SÔBRE A ÍNDOLE DO ENSINO DA MATEMÁTICA EM ZÜRICH

por ***Hugo B. Ribeiro*** (bolseiro do I. A. C. em Zürich)

Em tôda a Federação Suíça é Zürich a cidade de maior desenvolvimento industrial e também cultural. Além da Universidade cantonal — cantonais são também as restantes universidades suíças: de Basel, de Berne, de Lausanne, de Genève, de Neuchâtel e de Fribourg — está ali instalada a única escola superior federal, a «Eidgenössische Technische Hochschule» («École Polytechnique Fédérale»). A organização e objectivos *gerais* do ensino na Universidade de Zürich são como de ordinário numa universidade; em particular inclue-se ali uma Faculdade de Ciências (a «Philosophische Fakultät II») com a sua secção de Matemática. A escola Politécnica Federal abrange não só as escolas para os vários ramos da Engenharia mas ainda escolas de Arquitetura, Farmácia, Agronomia, Matemática e Física, etc. A E. T. H. desempenha um papel decisivo nas relações directas, muito estreitas, entre o ensino, a investigação científica e a indústria suíça. Por exemplo: é freqüente que com os trabalhos de fim de curso («trabalhos de diploma») os estudantes tenham também o objectivo de resolver determinados problemas postos pela indústria aos institutos da Escola; e, por outro lado que a indústria facilite, directamente, o ensino e a investigação oferecendo aparelhagem àquêles Institutos, prémios à Escola, etc.

Além da influência de uma tradição matemática que é o orgulho da vizinha cidade de Basel (Euler, os Bernouilli, etc.) têm os estudos matemáticos em Zürich a influência mais recente de uma tradição própria: trabalharam em Zürich, entre outros, Dedekind, Schröder, Christoffel, Zermelo, Hurwitz, Schur, Einstein, H. Weyl, John von Neumann.

A formação «tão universal quanto possivel em Matemática» que as duas escolas de Zürich dão ao matemático, em especial ao futuro professor de Matemática de qualquer escola superior ou média, pode talvez descrever-se grosseiramente pelos três seguintes objectivos que sucessivamente se devem atingir com o estudo e pelos adequados *tipos de actividade* e *meios* à disposição dos estudantes: O primeiro objectivo é o domínio de uma perfeita técnica do cálculo e da construção geométrica, e obtém-se sobretudo nas lições e proseminários de Cálculo diferencial e integral e de Geometria descritiva e vectorial, lições fixas e comuns a físicos, engenheiros etc. (1.º e 2.º semestres). O segundo objectivo é o perfeito conhecimento da estructura (moderna!) dos capítulos basilares da Matemática, o domínio das principais noções e resultados e a compreenção dos problemas actuais e do desenvolvimento de cada teoria; isto consegue-se nos seminários e nas lições dos semestres seguintes, sôbre Teoria das funções (3 semestres), Álgebra linear, Geometria projectiva, Geometria diferencial, Álgebra, Equações diferenciais. O terceiro objectivo é o alargamento dos objectivos anteriores a um extenso conjunto de capítulos especiais, muitos dos quais à escolha, nos quais se pode desenvolver a curiosidade orientada e o trabalho próprio. Nunca antes dos 8 semestres faz o estudante o seu exame, depois de ter elaborado o trabalho de diploma que geralmente o ocupa durante mais um ou dois semestres. Êste trabalho de diploma não inclue necessàriamente um resultado original, mas é, antes, um estudo, escolhido com um professor e orientado por êste, freqüentemente sôbre alguma questão mal esclarecida na literatura. O primeiro objectivo serve também as aplicações mais importantes, em especial as mais correntes em Física, Astronomia, Geodesia, Seguros, Estatística, Métodos gráficos e numéricos, etc, das quais há lições periódicas com professores fixos. Em face das lições de «Aplicações da Matemática» há, na E. T. H., um curso semestral, de «Introdução à teoria das funções», êste dedicado aos matemáticos e que serve de ponte de passagem do 1.º para o 2.º objectivos. Nêste curso são analisados detalhadamente e rigorosamente certos conceitos e resultados dos fundamentos da Teoria das funções que foram já tratados no «Cálculo diferencial e integral»: estudo cuidado da topologia do plano, da noção de integral, dos principais teoremas de existência de soluções de sistemas de equações diferenciais, etc.

O carácter dos seminários é, naturalmente, adequado aos respectivos objectivos. Enquanto que nos primeiros semestres os alunos devem resolver muitos problemas de exercício fornecidos pelo professor e revistos pelos assistentes, nos semestres seguintes são as sessões de seminário dedicadas a exposições críticas, e sua discussão, que completam as lições e a que assistem e em que participam sempre vários professores. De facto as lições não pretendem fornecer informação total, não são exposições fechadas do tipo livresco: dão uma informação comentada, original e moderna, dos pontos mais importantes de cada teoria. Assim, embora sejam conduzidas até às fronteiras do conhecimento e incluam a explicação, ou pelo menos a referência, aos problemas actuais mais significativos, devem ser completadas nos seminários e na leitura dos tratados e das revistas.

As lições especiais aparecem periòdicamente procurando-se que cada assunto não deixe de figurar nos programas das escolas pelo menos uma vez durante o curso de um estudante normal; e são distribuídas pelos professores entre êstes, de acôrdo com as suas especializações e também de acôrdo com os problemas que êles se ocupam em estudar no momento. Os seus títulos, não fixos, são por exemplo: espaços topológicos, grupos de Lie, equações às derivadas parciais de 2.ª ordem, lógica matemática, teoria da representação de grupos, combinatória, operadores lineares no espaço de Hilbert, teoria dos conjuntos, etc, etc. E a estas lições seguem-se muitas vezes seminários especiais e, depois, colóquios. Actualmente funcionam na E. T. H. dois seminários gerais (2 horas por semana para cada), um de Análise, outro de Álgebra e Geometria. Os seminários obrigam a um tipo de actividade que é, de facto, indispensável à formação dos futuros professores de Matemática. A direcção de trabalhos de diploma, de seminários, de colóquios, e o bom rendimento das lições (pelo menos daquelas lições que não têm programa fixo) já exigem que os respectivos professores sejam estudiosos, investigadores, especialistas — aliás bem conhecidos em tôda a parte onde se estuda Matemática. Êles preparam as suas tarefas para o semestre seguinte, e elaboram os trabalhos próprios durante as férias; participam dos colóquios e seguem, por vezes, certas lições que no momento mais lhe interessam; têm as suas horas de recepção para os estudantes, discutem com êstes os trabalhos escolares e, sôbretudo, aconselham-nos na orientação a dar aos seus estudos. Há os especialistas da Análise, os da Álgebra e Geometria, os dos Fundamentos e Teoria dos números, etc. (Os programas são editados, para cada semestre, com uma antecedência de 3 meses). Além dêste primeiro factor da actividade do estudante que é o professor, há um outro factor importante em Matemática: é uma biblioteca acessivel e bem apetrechada. Em Zürich, além da riquíssima biblioteca da Universidade que é ao mesmo tempo, a biblioteca da cidade, dispõem os estudantes da explêndida biblioteca da E. T. H. As revistas e os livros mais consultados estão à mão dos estudantes na «sala do seminário» de que cada estudante possue uma chave. Tôdas as bibliotecas emprestam os volumes para consulta em casa por um mês, e êste prazo é prorrogável.

Discutido o seu trabalho de diploma e prestadas as suas segundas e últimas provas de exame o estudante de Matemática é muitas vezes (quási sempre na E. T. H.) conservado como assistente nesta escola e, assim, tem oportunidade de seguir certas lições que ainda não ouvira, participar em novos colóquios, e discutir os seus problemas com os professores. São, em geral, mais três anos de estudo intenso de que dispõe para preparar a dissertação de doutoramento. Periòdicamente, as escolas põem a prémio problemas determinados, estimulando o trabalho dos estudiosos a elas ligados. Para exemplo transcrevemos o enunciado do problema a prémio relativo ao ano de 1945-46 de Faculdade de Filosofia II: «investigue-se o comportamento duma função regular de quaterniões na vizinhança dum ponto singular não essencial isolado e o mesmo nos pontos duma curva e superfície singular não essencial isolada». A preparação matemática, de que acabamos de dar uma idéia, é, com inclusão do doutoramento, a exigida, em especial, para um professor do ensino secundário. O doutoramento consiste essencialmente, como se sabe, na elaboração de uma dissertação original orientada por um professor. (Há ainda os doutores honorários nas escolas de Zürich. O único doutor honorário da Escola de Matemática e Física da E. T. H. é, actualmente, Albert Einstein — há três anos Einstein não estava assim sozinho, o outro era David Hilbert).

Os estudiosos de Matemática da Universidade e da E. T. H. reünem-se quinzenalmente no «Mathematische Kolloquium» de Zürich para discutirem algum trabalho original que um dêles ou algum convidado das outras Universidades, suíças ou estrangeiras, expõe. Êstes trabalhos são depois publicados, freqüentemente nos «Commentarii Mathematici Helvetici» — a revista suíça que só publica memórias originais de Matemática. A êstes colóquios também assistem alunos, avançados, das duas escolas. Por seu turno a Sociedade Matemática Suíça reüne-se anualmente com as outras Sociedades científicas num congresso em local variável, por hábito numa cidade não universitária que assim toma conveniente contacto directo com os cientistas da Federação.

Os capítulos da Matemática que recentemente mais teem merecido a atenção dos estudiosos em Zürich são talvez a Topologia algébrica, a Teoria dos grupos, os Fundamentos da Matemática, a Teoria das funções. Porém os volumes recentes dos Commentarii Mathematici Helvetici contêm trabalhos sôbre os mais diversos assuntos. Na medida em que é possível dizer quando determinado tipo de problemas, determinados métodos, etc. pertencem a uma escola fixada, poderemos afirmar terem os estudos em Zürich a marca da escola de Matemática, primacialmente importante, que foi a escola alemã. Quási todos os professores de Zürich passaram, nos bons tempos, pela famosa escola de Göttingen, famosa pelo menos, desde Gauss até Hilbert.

De Göttingen se diz que foi para a Europa daquela época, e portanto para o Mundo, o que Alexandria foi para os gregos. Por outro lado, a literatura matemática em língua alemã é, naturalmente, a mais utilizada. Como é sabido as grandes revistas como «Mathematische Annalen», «Journal für die reine und angewandte Mathematik», «Mathematische Zeitschrift», etc., as diversas edições da enciclopédia, as colecções célebres das editoras Springer (só a colecção Grundlehren der Mathemathischen Wissenschaften contém mais de 50 volumes), Teubner, Göschen, etc. são extraordinàriamente valiosas. (Folheando um programa recente de uma grande escola americana, o Instituto Tecnológico da Califórnia, que inclui uma Faculdade de Matemática, vê-se, por exemplo, que como única exigência prévia para a eficaz freqüência de certas lições e seminários de Matemática se indica a possibilidade da leitura de textos em língua alemã). Os professores em Zürich são também alguns dos principais colaboradores dessas revistas e colecções. Entre nós não é fácil encontrar uma idéia justa sôbre o extraordinário interêsse desta escola, dominados como estamos pelo que se poderá chamar a cultura francesa (que, quanto à Matemática se tem orientado sobretudo para a Análise) e isto por vários motivos entre os quais avulta o de ser a língua francesa a nossa segunda língua. Mas nos Estados Unidos e na URSS, para onde se voltam as esperanças mais legítimas quanto ao futuro desenvolvimento dos estudos matemáticos, a influência desta escola é de primeira importância; deixando de lado, por mais conhecido e neste caso menos significativo, o facto de os Estados da América serem desde o domínio fascista um poderoso centro de atracção para os matemáticos europeus, e sôbretudo alemães, podemos citar que quando êste país enviava para estudar matemática na Europa os que hoje são os mais destacados professores nas suas Universidades chegou a fazê-lo de modo que por cada dezena de estudantes em França havia 8 dezenas de estudantes na Alemanha.

A rápida descrição anterior interessará, provàvelmente, todos os que compreendem que, o desenvolvimento da nossa cultura científica tem que ter em conta informações dêste tipo que aqui esboçamos, tem que ter em grande conta a experiência alheia visto que a nossa própria experiência é pràticamente quási inexistente. A tarefa de fazer progredir os nossos estudos matemáticos (ou quaisquer outros) é, *em primeiro lugar,* uma tarefa de análise das nossas necessidades, das experiências nossas e das estranhas — é uma tarefa para especialistas. Os pontos de vista gerais, filosóficas e outros, são, naturalmente, de extraordinária importância para a realização duma tal tarefa — com a condição, indispensável, de que se não perca o essencial carácter cientifico de que ela, prèviamente, se reveste.

A formação *matemática* dos nossos professores de Matemática, das universidades e das escolas médias, é, para nós, o problema fundamental dos nossos estudas matemáticos. Em primeiro lugar até porque as importantes questões, de organização, de programas, etc., só poderão ser resolvidas convenientemente, cientìficamente, por matemáticos experientes, e a pouco e pouco, na medida em que êstes existem no nosso país, Em segundo lugar porque, sem professores com preparação científica, estas outras questões constituem ainda, de certo modo, pseudo problemas porque a sua resolução, não podendo traduzir-se através de uma actividade pedagógica autêntica, não terá valor efectivo

Parece-nos evidente que os jovens que se propõem estudar Matemática para se tornarem professores, ou simplesmente investigadores, têm, antes do mais, que abandonar, decididamente, qualquer tipo de aprendizagem passiva e livresca.

Lisboa, Setembro de 1945.

Prémio Doutor F. Gomes Teixeira

Pela primeira vez, desde 1940, foi atribuído o Prémio Nacional Dr. F. Gomes Teixeira que «se destina a galardoar, mediante concurso, o melhor trabalho de matemáticas puras elaborado em cada ano lectivo por um aluno de qualquer estabelecimento de ensino universitário». Coube a honra a Fernando Soares David, autor de «Sôbre a comutabilidade de operadores com espectro contínuo» e à Faculdade de Ciências do Pôrto, de que era aluno o premiado.

Instituto dos Actuários Portugueses

Promovida por um grupo de actuários, realizou-se no dia 18 de Junho uma reünião com o objectivo de estabelecer as bases de uma associação destinada a desenvolver a técnica e a matemática dos seguros. Nesta reünião foram elaborados os estatutos do Instituto dos Actuários Portugueses os quais tiveram a aprovação oficial em 24 de Julho.

Os Estatutos dispõem a realização de reüniões mensais da Assembleia Geral com carácter científico nas quais serão apreciadas comunicações apresentadas pelos sócios. Outro objectivo fundamental do Instituto é a publicação periódica de um Boletim. Há duas categorias de sócios — ordinários e extraordinários — cabendo nesta última categoria as instituïções seguradoras. À data da última Assembleia Geral, realizada em 27 de Novembro, o Instituto contava já com a adesão, na categoria de sócios extraordinários, de trinta e sete Companhias de Seguros. Naquela mesma data o número de sócios ordinários elevou-se a 81 dos quais os primeiros 78 são considerados fundadores.

Os primeiros corpos gerentes estão assim constituídos:

Mesa da Assembleia Geral: *Presidente,* Victor Hugo de Lemos; *Vice-Presidente,* A. Castanheira Nunes; *Secretários,* Álvaro Alexandre e J. Matos Correia.

Direcção: *Presidente,* Caetano M. Beirão da Veiga; *Vice-Presidente,* Frederico Caroça de Figueiredo; *Secretário,* Carlos A. Fernandes Carvalho; *Tesoureiro,* A. da Costa Miranda; *Vogal,* A. Stichini Vilela.

Conselho Fiscal: *Presidente,* José A. Queiroz de Barros; *Vogais,* J. J. Pais Morais e A. Tavares Júnior.

Comissão do Boletim: *Presidente,* Rinaldo Campeão; *Vice-Presidente,* Frederico Macedo Santos; *Vogais,* A. da Costa Miranda, António Leão e Mário Ferreira Braga.

A Gazeta de Matemática regista com prazer a criação do Instituto, cuja actividade científica passará a referir, e deseja, vivamente, êste novo centro de estudos contribua para o progresso das matemáticas actuariais.

Cientistas estrangeiros em Portugal

O Professor da Universidade de Cambridge, Sir William Lawrence Bragg, prémio Nobel de Física, especialista no estudo da estrutura da matéria pelos raios X, veio a Portugal realizar uma série de conferências em Lisboa e Pôrto.

Os temas das lições expostas em Lisboa, pelo ilustre cientista, foram:

«A Optica dos Raios X»,

«Alguns problemas do estado metálico» e «Conseqüências científicas da descoberta de Roentgen».

Estas conferências efectuaram-se respectivamente no anfiteatro de Física da Faculdade de Ciências, na Academia das Ciências e no Instituto Britânico em Lisboa.

L. S.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DA EQUAÇÃO DE DIOFANTO

por ***José da Silva Paulo***

Como é sabido a equação de Diofanto $ax+by=c$, onde a, b e c são inteiros positivos e a e b primos entre si, admite soluções inteiras da forma $x=\alpha+bm$, $y=\beta-am$ onde α,β é uma solução inteira e m um inteiro qualquer. Sabe-se também que o teorema de Catalan indica o número de soluções inteiras não negativas, com uma certa indeterminação, pois afirma que o seu *número é igual ao maior inteiro contido em* c/ab, *ou êsse inteiro aumentado de uma unidade.*

No entanto o número exacto de soluções inteiras não negativas daquela equação pode determinar-se pelo método a seguir exposto, onde se seguiu de perto a exposição de *J. V. Upensky* e *M. A. Heaslet* no seu livro *Elementary Number Theory.*

Seja então a equação

$$(1)\qquad ax+by=c$$

e x,y uma sua solução em inteiros não negativos. Dividamos x e y respectivamente por b e a, obtém-se:

$$(2)\qquad x=b\xi+r\,,\ 0\leq r<b\,,\quad x=a\eta+s\,,\ 0\leq s<a\,.$$

Por substituïção em (1) vem:

$$(3)\qquad ab\,(\xi+\eta)+ar+bs=c\,.$$

Determinemos o cociente e o resto da divisão de c por ab. Será

$$c=ab\cdot q+R\,,\quad 0\leq R<ab$$

ou seja

$$ab\,(\xi+\eta)+ar+bs=ab\cdot q+R\,.$$

Ora $ar+bs\geq 0$, e como $s<a$ e $r<b$ é também $ar+bs<2ab$; logo, terá que ser ou $0\leq ar+bs<ab$ e então é

$$(4)\qquad ar+bs=R$$

e

$$(5)\qquad \xi+\eta=q$$

ou $ab<ar+bs<2ab$ [1] e será

$$(6)\qquad ar+bs=ab+R$$

e

$$(7)\qquad \xi+\eta=q-1\,.$$

Note-se que q é o maior inteiro contido em c/ab.

[1] É fácil ver que $ar+bs\neq ab$, por serem a e b primos entre si e $r<b$ e $s<a$.

Conclui-se então que uma vez conhecidas as soluções inteiras não negativas de (5) ou (7) e as soluções inteiras não negativas $s<a$, $r<b$ de (4) ou (6), teremos as soluções inteiras não negativas de (1) por intermédio de (2).

Das equações:

(4) $$ar+bs=R$$

e

(6) $$ar+bs=ab+R$$

só uma poderá ter *uma* solução inteira não negativa $r<b$, $s<a$. De facto se fôr r_0, s_0 uma tal solução, por exemplo, de (4), por um lado esta equação não pode ter outra solução naquelas condições, por as soluções gerais de (4) serem dadas por $r=r_0+bm$ e $s=s_0-am$; por outro lado (6) não terá soluções $s<a$, $r<b$ pois que sendo $ar_0+bs_0=R$, será

$$ar_0+bs_0+ab=R+ab$$

ou

$$a(r_0+b)+bs_0=R+ab$$

e então as soluções inteiras de (6) seriam

(8) $$r=r_0+b-bm\,,\quad s=s_0+am$$

onde m é um inteiro qualquer. Ora o primeiro inteiro não negativo r menor que b dado por (8) obtém-se, fazendo ali, $m=1$ e para êste valor é $s=s_0+a$ maior que a.

Do mesmo modo se provaria que se (6) admitir uma solução inteira não negativa $r'_0<b$, $s'_0<a$, essa solução é única e (4) não admite soluções naquelas condições.

Temos assim dois casos a considerar: 1) $ar+bs=R$ tem uma solução em números inteiros não negativos $s_0<a$, $r_0<b$; 2) $ar+bs=R$ não tem soluções naquelas condições.

No primeiro caso é $\xi+\eta=q$, equação que tem exactamente $q+1$ soluções

$$\xi=0,\quad 1,\quad 2,\cdots,q$$
$$\eta=q\,,q-1\,,q-2\,,\cdots,0$$

e a equação (1) tem $q+1$ soluções.

No segundo caso é $\xi+\eta=q-1$, equação com q soluções

$$\xi=0,\quad 1,\quad 2,\cdots,q-1$$
$$\eta=q-1\,,q-1\,,q-3\,,\cdots,\quad 0$$

a que correspondem q soluções de (1); em qualquer dos casos será $x=b\xi+r_0$, $y=a\eta+s_0$.

Resumindo: a equação $ax+by=c$, onde a,b,c são inteiros positivos e a e b, primos entre si, tem ou q ou $q+1$ soluções inteiras não negativas, segundo o teorema de Catalan, conforme a equação $ar+bs=R$ (R é o resto da divisão de c por ab), *não tem* ou *tem* soluções inteiras não negativas $r_0<b$ e $s_0<a$.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1945)

I. S. C. E. F. — Agôsto de 1945.

2115 — São dados dois pontos fixos A e B do plano à distância de 12 cm. e um ponto C do segmento $\overline{AB}$ à distância 3 cm. de A; levante-se por C a perpendicular a AB. Determinar sôbre essa perpendicular um ponto P tal que o segmento $\overline{AB}$ seja visto sob um ângulo de 60° e diga qual o método ou métodos empregados para essa determinação. Discuta a solução. R: *O lugar geométrico dos pontos do plano dos quais um segmento* $\overline{AB}$ *é visto sob um ângulo* α *é constituido por dois arcos de circunferência passando por* A *e* B, *simétricos em relação a* $\overline{AB}$. *O centro dum dêstes arcos é o ponto de intersecção da mediatriz de* $\overline{AB}$ *com a perpendicular levantada numa das extremidades dêste segmento, à recta que faz com* $\overline{AB}$ *o ângulo dado* α. *(Vd. por exemplo,* Elementos de Geometria—*3.º ciclo—de Nicodemos e Calado). Construam-se estes arcos sendo* $\alpha=60°$ *e* $\overline{AB}=12$ cm. *Os pontos que satisfazem à questão posta são portanto os pontos de intersecção dêste lugar geométrico com a perpendicular a* $\overline{AB}$ *levantada pelo ponto* C. *As soluções são duas e o método empregado é o dos lugares geométricos.*

2116 — Calcular e simplificar

$$S=\frac{1}{2^n}\left[\binom{9}{5}:\binom{10}{6}+\binom{7}{3}:\binom{8}{4}+\binom{5}{1}:\binom{6}{2}\right]$$

e determinar o menor valor de n para o qual é $S<\frac{1}{10^4}$. R: $S=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{43}{30}$, $n=14$.

2117 — Determinar os valores reais de x para os quais é verificada a desigualdade $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}>\frac{1}{3}$. De entre êles indicar, se existirem, os inteiros e os racionais da forma $\frac{a}{10}$ onde a é um inteiro positivo menor que 20. R: $1<x<9-\sqrt{58}$ e $2<x<9+\sqrt{58}$. *Os inteiros que satisfazem ao problema são* $x=3,4,\cdots 16$. *Os racionais da forma* $\frac{a}{10}$ *com* a *inteiro e* $0<a<20$ *são* $x=1{,}1$, $1{,}2$ *e* $1{,}3$.

2118 — Diga em que consiste o método de transformação por semelhança e exponha os conceitos e as propriedades em que êle se baseia.

2119 — Dados dois números inteiros cujas decomposições em factores primos são $n=p^a \cdot q^b$, $n'=p^{a'} \cdot q^{b'}$ ¿como estão relacionados os números de divisores de n e n' com o número de divisores do produto $n \cdot n'$? Justifique a resposta. R: *Sejam* N_1, N_2 *e* N_3, *respectivamente os números de divisores de* n, n' *e de* $n \cdot n' = p^{a+a'} \cdot q^{b+b'}$; *ter-se-á:*

$N_1=(a+1)(b+1)$, $N_2=(a'+1)(b'+1)$ e $N_3=(a+a'+1)(b+b'+1)=N_1+N_2+ab'+a'b-1$.

2120 — ¿Uma equação biquadrada de coeficientes reais em que os coeficientes de x^4 e x^2 têm o mesmo sinal, pode ter tôdas as raízes reais? Justifique a resposta.

Soluções dos n.os 2115 a 2119 de Orlando Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR—MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de freqüência — 1945.**

2121 — Quais os intervalos em que é uniformemente convergente a série $\sum \frac{x^n}{\log(n+1)}$? R: *Apliquemos o critério d'Alembert:* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}$. *Ora* $\lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = 1$ *pois* $1 - \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} =$

$$= \frac{\log \frac{n+2}{n+1}}{\log(n+2)} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log(n+2)}$$

tende para 0 *com* $1/n$, *como fàcilmente se vê. Então* $\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$ *e o intervalo de convergência da série é* $(-1, 1)$. *Ela é portanto uniformemente convergente em qualquer intervalo interior a* $(-1, 1)$. *No extremo superior* $(x=1)$ *a série diverge, por ser* $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ *e divergir* $\sum 1/(n+1)$. *Não se pode pois aplicar o teorema de Abel que daria a convergência uniforme no intervalo* $(0,1)$.

2122 — Qual a circunferência que passa pela origem e define com $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ um sistema de eixo radical $y-x+1=0$? (Coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Pode considerar-se o eixo radical como uma das circunferências do feixe. Multiplicando por um parâmetro ambos os membros da sua equação e somando à equação da circunferência dada vem* $x^2+y^2-(h+2)x+(h-4)y+h+1=0$ *que para cada valor de* h *dá uma das circunferências do feixe. Qualquer delas define com a circunferência dada o próprio feixe de eixo radical* $y-x+1=0$. *A que passa pela origem é aquela cuja equação carece de têrmo independente, portanto a que corresponde a* $h=-1$, *isto é* $x^2+y^2-x-5y=0$, *que é o resultado pedido.*

2123 — Qual a natureza do lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta $x=0$ e da circunferência de centro $(a, 0)$ e raio r? ($r<a$; coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Seja* (x, y) *um ponto do lugar geométrico. A distância dêste ponto à recta* $x=0$ *(eixo das ordenadas) é a própria abcissa do ponto,* x. *A distância de um ponto a uma circunferência é o valor absoluto da diferença entre o raio da circunferência e a distância do ponto ao centro da circunferência. No caso presente, como* $r<a$, *a circunferência e a recta dada não se intersectam, nenhum ponto interior à circunferência pode ser equidistante desta e da recta; o lugar geométrico é pois, exterior à circunferência e por isso na diferença a considerar o diminuendo é sempre a distância do ponto* (x, y) *ao centro* $(a, 0)$ *e o diminuidor o raio da circunferência. A distância de* (x,y) *a circunferência é pois* $\sqrt{(x-a)^2+y^2}-r$ *e a equação do lugar geométrico pedido é*

$$x = \sqrt{(x-a)^2+y^2} - r \quad ou \quad x+r = \sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Quadrando: $x^2+2rx+r^2 = x^2-2ax+a^2+y^2$ *ou* $y^2-2(a+r)x+a^2-r^2=0$; *o lugar geométrico é pois uma parábola.*

2124 — Quais são os pontos próprios ou impróprios de continuïdade de $f(x) = \frac{x^2}{e^x-2}$? R: *As funções* x^2 *e* e^x-2 *são definidas e contínuas em todos os pontos próprios mas a divisão não é definida quando o denominador se anula, isto é, quando* $x=\log 2$. *São pois de continuïdade todos os pontos próprios excepto* $x=\log 2$. *Haveria ainda ponto impróprio de continuïdade se existisse e fôsse finito* $\lim f(x)$ $(x\to\infty)$. *Ora tal não sucede porquanto* $\lim \frac{x^2}{e^x-2} = -\infty$ $(x\to\infty)$.

Soluções dos n.os 2121 a 2124 de Renato Pereira Coelho.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.° Exercício de revisão — 30 de Novembro de 1945.

2125 — Dados dois segmentos de comprimentos respectivamente iguais a m e n, construa, servindo-se da régua e compasso, um segmento x de comprimento dado por $x = \frac{m^2}{n\sqrt[4]{1+\cos 22^\circ 30'}}$. R: *Pode escrever-se* $x = m^2/a$, *com* $a = \sqrt{nb}$, $b = \sqrt{nc}$, $c = n + d$, $d = n \cos 23^\circ 30'$. *Dividindo o ângulo recto em quatro partes iguais, obtém-se o ângulo* $\alpha = 22^\circ 30'$. *Constrói-se um triângulo rectângulo que tenha um ângulo igual a* α *e a hipotenusa igual a* n; *o cateto adjacente a* α *é igual a* d. *Constrói-se em seguida* $c = n + d$. b *é dado pela altura relativa à hipotenusa dum triângulo rectângulo em que* n *e* c *são as projecções dos catetos sôbre a hipotenusa. De uma maneira análoga se obtém* a. *Finalmente* x *pode constituir-se, determinando, pelo lema de Thales, o quarto proporcional entre* a, m *e* m.

2126 — As equações das diagonais AC e BD do rectângulo $[A, B, C, D]$ são respectivamente: $y = 2x$ e $y = 3 - x$; o vértice C tem de abscissa -1 e a ordenada de B é inferior à de D. Determine: *a)* as coordenadas do centro da circunferência circunscrita ao rectângulo; *b)* a equação dessa circunferência; *c)* as coordenadas dos vértices B e D; *d)* as equações dos lados AB e AD; *e)* mostre que o quadrilátero que tem para vértices os pés das perpendiculares baixadas dos vértices do rectângulo sôbre as suas diagonais é um rectângulo. R: a) *O centro da circunferência é o ponto* $O(1, 2)$, *intersecção das rectas* AC *e* BD; b) *Como o raio da circunferência é a distância de* $O(1, 2)$ *a* $C(-1, -2)$, *a equação da circunferência é* $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$; c) *A resolução do sistema* $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$, $y = 3 - x$ *conduz aos resultados:* $B(1+\sqrt{10}, 2-\sqrt{10})$, $D(1-\sqrt{10}, 2+\sqrt{10})$. d) *Como* $O(1, 2)$ *é o ponto médio do segmento* $\overline{AC}$, *as coordenadas de* A *são dadas por* $(-1+x)/2 = 1$, $(-2+y)/2 = 2$, *isto é,* A *é o ponto* $(3, 6)$. *Então vem:* $AB \equiv (x-3)/(2-\sqrt{10}) = (y-6)/(4+\sqrt{10})$, $AD \equiv (x-3)/(2+\sqrt{10}) = (y-6)/(4-\sqrt{10})$. e) *Basta mostrar que os lados do quadrilátero em questão são paralelos aos lados do rectângulo dado.*

2127 — No plano xOy, a cada recta $r \equiv ax + by = 1$, faz-se corresponder o ponto $R(a, b)$. Mostre que, se o ponto R descreve a recta $x + y = k$, a recta r roda em tôrno dum ponto fixo F e determine as coordenadas de F. Calcule os valores de k para os quais a recta $x + y = k$ passa por F. R: *Se* R *descreve a recta* $x + y = k$, *as suas coordenadas serão* $(a, k-a)$, *com* a *variável e então* $r \equiv ax + (k-a)y = 1$ *passa pelo ponto* $F(1/k, 1/k)$, *qualquer que seja* a. *Para que* $x + y = k$ *passe por* F *é necessário que se tenha* $1/k + 1/k = k$, *ou seja,* $k = \pm\sqrt{2}$.

Enunciados e soluções dos n.os 2125 a 2127 de José Morgado.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira. Prova de revisão prática — 12-XII-1945 — Ponto n.° 1.

2128 — Resolver e discutir as soluções da equação $\operatorname{sen} 2x(\cos x - 6) + k \operatorname{sen} x = 0$ (k real). R: *A equação proposta pode escrever-se:* $\operatorname{sen} x\,(2\cos^2 x - 12\cos x + k) = 0$ *donde:* $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = n\pi$ (n inteiro) *e* $f(\cos x) = 2\cos^2 x - 12\cos x + k = 0 \rightarrow \cos x = (6 \pm \sqrt{36-2k})/2$ *com* $36 - 2k \geq 0$ *ou* $k \leq 18$ *e* $-1 \leq \cos x \leq 1$. *A solução* $(6 + \sqrt{36-2k})/2$ *não interessa por ser maior do que* 1. *A condição para que o trinómio* $f(\cos x)$ *tenha uma raiz compreendida no intervalo aberto* $(-1, 1)$ *é que* $f(-1) \cdot f(1) < 0 \rightarrow (k+14)(k-10) < 0 \rightarrow -14 < k < 10$. *Para* $k = -14$ *e* $k = 10$ *é respectivamente* $\cos x = -1$ *e* $\cos x = 1 \rightarrow x = (2h+1)\pi$ *e* $x = 2h\pi$ (h inteiro).

2129 — É dado um rectângulo $[ABCD]$ cujos lados são $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{AC} = a$. Inscrevam-se neste rectângulo dois triângulos isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sendo E e F os vértices opostos às bases e sendo G e H os pontos de encontro dos lados iguais dos dois triângulos, determinar a área da circunferência inscrita no losango $[EGFH]$. Determine a razão dos volumes obtidos por rotação em tôrno de GH, do losango e da circunferência. R: *Construa-se a figura de acôrdo com o enunciado. Verifica-se que os pontos* E *e* F *são pontos meios dos lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *e que, portanto,* $\overline{EF}$ *divide o rectângulo dado em dois quadrados* $[EFBD]$ *e* $[EFAC]$. *Os lados iguais dos triângulos em questão são as diagonais dêsses quadrados, iguais portanto a* $a\sqrt{2}$. *Como as diagonais dos quadrados se cortam perpendicularmente e ao meio é imediato que* $[EGFH]$ *é um quadrado de lado* $a\sqrt{2}/2$ *e de diagonal* $\overline{GH} = a$. *A circunferência inscrita no quadrado terá por raio* $a\sqrt{2}/4$ *e a sua área será* $\pi a^2/8$. *A rotação da figura em tôrno de* GH *gera uma esfera cujo volume é* $V_1 = a^3\pi\sqrt{2}/24$ *e um sólido constituído por dois cones de base comum (círculo de diâmetro* $\overline{EF}$*), cujo volume é* $V_2 = \pi a^3/12$. *A razão pedida é portanto:* $V_1/V_2 = \sqrt{2}/2$.

2130 — Dado o polinómio $P(x) = 4x^3 - mx^2 + nx + p$ determinar m, n e p por forma que dois dos seus zeros sejam recíprocos e que dividido por $(x-2)$ dê de resto 18. Resolva a equação $P(x) = 0$. R: *Desi-*

gnando por α *uma das raízes da equação, em face do enunciado, ela admitirá a sua recíproca* $1/\alpha$, *isto é, ter-se-á:* $P(\alpha)\equiv 0$ *e* $P(1/\alpha)\equiv 0$, *ou seja,* $4\alpha^3+m\alpha^2+ +n\alpha+p=0$ *e* $p\alpha^3+n\alpha^2+m\alpha+4=0$. *Para que estas duas relações sejam simultâneamente verificadas terá de ser* $4/p=m/n=n/m=p/4$, *donde* $p=4$ *e* $m=n$ *ou:* $p=-4$ *com* $m=-n$. *Por outro lado, por ser* 18 *o resto da divisão de* $P(x)$ *por* $(x-2)$, *obtém-se* $P(2)= =18\rightarrow 14+4m+2n+p=0$. *Num caso há a resolver o sistema* $P(2)=18$, $p=4$ *e* $m=n$, *cuja solução é* $p=4$ $m=n=-3$. *A equação será então* $4x^3-3x^2-3x+4=0$ *de raízes* -1, $(7+i\sqrt{15})/8$ *e* $(7-i\sqrt{15})/8$. *No outro caso tem-se* $P(2)=18$, $p=-4$ *e* $m=-n$ *de solução* $p=-4$, $m=-5$ *e* $n=5$ *e a equação correspondente* $4x^3-5x^2+5x-4=0$ *admite as raízes* 1, $(1+i\sqrt{63})/8$, $(1-i\sqrt{63})/8$.

Soluções dos n.os 2128 a 2130 de J. Oliveira Campos

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Análise Superior — 1.º Exame de freqüência — 1944-1945.

2131 — Determine a constante k de modo que a equação $y'^2-2xy'+kx^2=2y$ admita uma solução singular. Indique essa solução $y=\varphi(x)$ e integre a equação proposta, para o valor de k obtido, recorrendo à transformação $y=\varphi(x)+z$, onde z representa a nova função. R: *Se* $y=\varphi(x)$ *é solução singular, a ela devem corresponder raízes iguais em* y': $\Delta=b^2-4ac\equiv 4x^2-4kx^2+ +2y=0$, $y=x^2(k-1)/2$ e $y'=x(k-1)$. *Mas, com* $\Delta=0$, *a equação dá* $y'=x$. *Logo* $k-1=1\rightarrow k=2$. *A solução singular é, pois:* $y=x^2/2$. *A correspondente equação diferencial é:* $y'^2-2xy'+2x^2-2y=0$. *Com* $y=\varphi(x)+z=x^2/2+z$ *vem:* $y'=x+z'$, $z'^2-2z=0\rightarrow$ $z'=\pm\sqrt{2z}$. *Integrando, com separação de variáveis:*

$$\begin{cases}\sqrt{2z}-x-c=0\\ \sqrt{2z}+x-c=0\end{cases}.\quad \textit{Donde, o integral geral:}$$

$$\left(\sqrt{2\,(y-x^2/2)}-c\right)^2-x^2=0.$$

2132 — Considere a função $w=e^z$ e a região (R) do plano z definida por $x\leq 0$, $0\leq y\leq\pi$. Determine a região (R') transformada de (R) mediante a função w, indicando concretamente a figura transformada, por w, de cada uma das partes do contôrno de (R).

Indique as singularidades: *a)* de w na região (R); *b)* da função inversa de w na região (R'), caracterizando tais singularidades pelos módulos e argumentos que lhes respeitam. R: *Como* $z=x+iy$, $w=e^x\cos y+ +ie^x\,\text{sen}\,y=U+iV$. *Ao longo do segmento* $(0,\pi)$ *do eixo dos* YY, *é* $x=0$ *e* $w=\cos y+i\,\text{sen}\,y$ *e o afixo de* w *descreve a semicircunferência de centro* O_1 *e raio* 1, *acima de* OU (*visto que* $|w|=1$ *e* $\text{sen}\,y\geq 0$). *Ao semi-eixo negativo* $\overrightarrow{OX}$ $(y=0)$ *corresponde o segmento real* (0,1) *do eixo* OU *no plano* w (*visto que* $w=e^x$); *à semi-recta paralela a* OX *que completa o contôrno de* (R) *corresponde o segmento real* $(0,-1)$ *do eixo* OU *no plano* w.

Como, no caso geral, $|w|=U^2+V^2=e^{2x}(\cos^2y+\text{sen}^2y)=e^{2x}$ *e* $x\leq 0$, *é* $|w|\leq 1$. *Logo, a região* (R') *do plano* w *é o semi-círculo (acima de* OU) *de centro* O_1 *e raio* 1.

O único ponto crítico de w *é o ponto impróprio e êsse, com a direção de* $\overrightarrow{OX}$, *no caso presente, pertence ao contôrno de* (R) *e não pròpriamente à região* (R) *limitada por êsse contôrno. Quanto à inversa,* $z=\log w$, *da mesma forma, só* $w=0$ (*ponto* O_1) *é ponto crítico (de ramificação) mas situa-se no contôrno de* (R') *e não, pròpriamente, em* (R').

F. C. L. — Análise Superior — 2.º Exame de freqüência — 1944-1945.

2133 — Uma família de curvas planas é definida por certa equação diferencial de 2.ª ordem, da qual $y'=2ax+e^a$ (a const.) é um integral primário. Estabeleça a relação — em têrmos finitos — que deve existir entre os 2 parâmetros da família para que a envolvente da família com um parâmetro arbitrário assim definida tenha, com cada uma das envolvidas, um contacto de ordem não inferior a 2. R: *Do integral primário deduz-se*

$$(1)\qquad y=ax^2+e^a.x+b.$$

Ao longo da envolvente é

$$y'=2ax+e^a+\left(x^2+xe^a+\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx}.$$

Uma 1.ª condição de contacto é, pois:

$$(2)\quad \frac{da}{dx}\left(x^2+xe^a+\frac{db}{da}\right)=0\qquad x^2+xe^a+\frac{db}{da}=0$$

(*pondo de parte a hipótese* $\frac{da}{dx}=0$). *Por outro lado, ao longo das envolvidas é* $y''=2a$ *e ao longo da envolvente:* $y''=2a+(2x+e^a)\frac{da}{dx}$. *A 2.ª condição imposta pelo contacto é, então:*

$$(3)\qquad 2x+e^a=a.$$

Eliminando x *entre* (2) *e* (3) :

$$\frac{e^{2a}}{4}-\frac{e^{2a}}{2}+\frac{db}{da}=0 \qquad \frac{db}{da}=\frac{e^{2a}}{4}.$$

Integrando, com separação de variáveis:

$$b=e^{2a}/8+c\,. \quad \text{(c const. arbitrária)}$$

Para cada valor de c , *a equação anterior fixa uma forma da função* b *de* a *nas condições do enunciado.*

Interpretação geométrica da constante c: *para 2 valores diferentes de* c , *a relação anterior dá 2 famílias simplesmente infinitas de curvas* (1) , *cada uma das quais se deduz da outra por translacção paralela a* OY , *e mantendo um contacto de 2.ª ordem, pelo menos, com a respectiva envolvente.*

2134 — Estabeleça a equação às derivadas parciais das superfícies para as quais o plano tangente genérico corta OZ no ponto médio N do segmento $\overline{OM'}$, onde por M' se designa a projecção ortogonal, sôbre OZ, do ponto de contacto $M(x,y,z)$. Integral geral da equação obtida. Recorrendo à transformação $e^{x'}=x$ $e^{y'}=y$ $e^{z'}=z$ e tirando proveito da equação transformada, escreva um integral completo daquela equação. Superfície integral que contém a curva $x^2-y^2=1$, $z=1$. R: *Coordenadas de* $N\to 0,0,z/2$. *Equação do plano tangente genérico:* $Z-z=p\,(X-x)+q\,(Y-y)$. *Equação do problema*:

$$-z/2=-px-qy \qquad z=2px+2qy. \quad \text{(linear)}$$

Sistema diferencial associado: $\dfrac{dx}{2x}=\dfrac{dy}{2y}=\dfrac{dz}{z}$. *Integrando:* $y=c_1x$, $z^2=c_2x$ (característica)

Donde, o integral geral da equação: $z^2=x\varphi(y/x)$. *De* $z=2px+2qy$, $e^{x'}=x$, $e^{y'}=y$, $e^{z'}=z$ *resulta* (*por ser* $\dfrac{\partial z'}{\partial x'}=p'=\dfrac{1}{z}px$, $\dfrac{\partial z'}{\partial y}=q'=\dfrac{1}{z}qy$) : $p'+q'=1/2$.

Um integral completo da transformada é, pois: $z'=ax'+(1/2-a)\,y'+\log b$ *donde:* $\log z=a\log x+(1/2-a)\log y+\log b$ *ou:* $z=bx^a+y^{(1/2-a)}$. *Da eliminação de* x , y *e* z *entre as 4 equações* $y=c_1x$, $z^2=c_2x$, $x^2-y^2=1$ *e* $z=1$ *resulta, sem dificuldade* $1-c_1^2=c_2^2$ *e, portanto:* $x^2-y^2=z^4$, *que é a solução do problema de Cauchy proposto.*

F. C. L. — Análise Superior — **Exame final** — **Julho de 1945.**

2135 — *a)* Escreva a equação às derivadas parciais das superfícies para as quais a cota dum ponto genérico é função exclusiva da razão das outras duas coordenadas. Interprete, geomètricamente (em eixos coordenados rectangulares), as referidas superfícies, indicando alguns dos seus elementos definidores. *b)* Recorrendo à transformação $x'=\log x$, $y'=\log y$, $z'=\log z$, determine um integral completo da equação obtida. *c)* Forme, e integre, a equação diferencial das linhas assintóticas da superfície integral que passa pela linha $x+y+z=1$, $y=x+1$. Interpretação geométrica. R: a) $z=\varphi(y/x)$. *Derivando parcialmente em ordem a* x *e a* y *e eliminando* φ *e* φ', *acha-se* $p=-\dfrac{y}{x^2}\varphi'$, $q=\dfrac{1}{x}\varphi'$ $\quad px+qy=0$. *Com* $y/x=c_1$ *e* $z=\varphi(c_1)=c_2$, *o que mostra que a superfície é regrada e as suas geratrizes rectilíneas apoiam-se em* OZ, *paralelamente a* XOY: *trata-se de conóides de directriz rectilínea* OZ *e plano director* XOY *(conóides rectos)* b) *Com* $x'=\log x$, $y'=\log y$ *é*

$$\frac{\partial z}{\partial x'}=P=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx'}=px\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial y'}=Q=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dy'}=qy\,.$$

Logo: $P+Q=0$ *e esta equação admite a integral completo* $Z=ax'-ay'+\log b$ *ou* $Z=a\log(bx/y)$. c) *Para o problema de Cauchy, temos:* $y/x=c_1$, $Z=c_2$, $y=x+1$, $x+y+z=1$. *Da eliminação de* x , y *e* z *resulta* $2=c_2-c_1c_2$ *e, portanto:* $2x+zy=zx \quad z=\dfrac{2x}{x-y}$ *paraboloide hiperbólico de planos directores* $\alpha\equiv XOY$ *e* $\beta\equiv y=x+1$, *e directrizes rectilíneas (do sistema «β»)* OZ *e* $(r)\equiv\begin{cases} x+y+z=1\\ y=x+1\end{cases}$. *De* $z=\dfrac{2x}{x-y}$ *resulta, para a equação das linhas assintóticas:* $y\,dx^2-(x+y)\,dx\,dy+x\,dy^2=0$ *o que dá* $\dfrac{dy}{dx}=1$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$. *Com* $\dfrac{dy}{dx}=1$ *é* $y=x+\alpha$. *Com* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$ *é* $y=\beta x$, *e as duas famílias de linhas assintóticas são:* $\begin{cases} z=\dfrac{2x}{x-y}\\ y=x+\alpha\end{cases}$ $\begin{cases} z=\dfrac{2x}{x-y}\\ y=\beta x\end{cases}$

o que mostra que tais linhas são as geratrizes dos 2 sistemas (a superfície é duplamente regrada).

2136 — Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ reduzindo-o a um integral de diferencial imaginária tomado ao longo duma circunferência de centro na origem. Mostre que a função integranda tem um, e um só, ponto crítico no interior do contôrno, qualquer que seja o raio dêste.

R: *Com* $z=re^{i\theta}\to\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z^2+r^2}{2rz}$, $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. *Logo*

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}\to\int_{(c)}\frac{2r\,dz}{i\,(5rz-2r^2-2z^2)}=\frac{2r}{i}\int_c f(z)\,dz.$$

Polos da função $f(z)$: $z=r/2$, $z=2r$. *Qualquer que seja* r , *o único polo interior é* $z=r/2$ *e o correspondente resíduo:* $1/3r$. *Logo* $I=2r/i\,.\,2\pi i\,.\,1/3r=4\pi/3$.

Enunciados e soluções dos números 2131 a 2136 de Humberto de Menezes.

PROBLEMAS

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1342 — Desenhar três circunferências de raios proporcionais a h, k e l, de modo que cada circunferência seja tangente às outras duas e a dois lados de um triângulo de que é dada a área S. R: *Desenhem-se três circunferências,* C_1, C_2 *e* C_3 *tangentes entre si duas a duas e de raios respectivamente iguais a* h, k *e* l; *desenhe-se, em seguida, o triângulo* T′ *tal que cada circunferência seja tangente a dois dos seus lados. Vê-se fàcilmente que a figura constituída por* T′, C_1, C_2 *e* C_3 *é semelhante à figura pedida, bastando-nos, portanto, para construir esta, determinar a razão de semelhança. Seja* S *dada pelo quadrado de lado* $a=\sqrt{S}$ *e determine-se o lado* a′ *do quadrado equivalente a* T′, *procedendo, por exemplo, do modo seguinte: constrói-se o triângulo rectângulo em que as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa são uma altura de* T′ *e metade do lado correspondente; a altura dêste triângulo rectângulo relativa à hipotenusa é precisamente* a′. *Visto a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes ser igual ao quadrado da razão de semelhança, a razão de semelhança entre figura pedida e a figura constituída é igual a* a/a′. *Os raios das circunfeências pedidas são respectivamente* ha/a′, ka/a′, la/a′, *que podem determinar-se por aplicação do lema de Thales.*

Solução de José Morgado

1434 — Calcular $I_{m,n}=\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[m]{a+bx}}$ (m, n inteiros positivos). R: *É* $I_{m,n}=\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[m]{a+bx}}=\int x^n(a+bx)^{-1/m}dx$.

Faça $a+bx=t^m$, *donde* $x=(t^m-a)/b$ *e* $dx=m/b.t^{m-1}dt$.

Substituindo, vem $I_{m,n}=\frac{m}{b^{n+1}}\int (t^m-a)^n\,t^{m-2}\,dt=$

$$=\frac{m}{b^{n+1}}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}a^p\int t^{m(n-p+1)-2}\,dt=$$

$$=\frac{m}{b^{n+1}}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}a^p\frac{t^{m(n-p+1)-1}}{m(n-p+1)-1}+c \quad \textit{ou:}$$

$$I_{m,n}=\frac{m}{b^{n+1}}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}a^p\frac{(a+bx)^{n-p+1-1/m}}{m(n-p+1)-1}+c.$$

Solução de José Machado Gil (da Barquinha)

1555 — Circunscrever um tetraedro a um tetraedro dado cujas faces passem por quatro rectas dadas. R: *Sejam* r_1, r_2, r_3, r_4 *as rectas dadas e* A_1, A_2, A_3, A_4 *os vértices do tetraedro dado e seja* (r_i, A_j) *o plano definido pela recta* r_i *e pelo ponto* A_j. *O problema reduz-se a construir conjuntos de quatro planos* (r_i, A_j) *tais que em cada conjunto se tenha uma permutação dos índices* i *e uma permutação dos índices* j. *Há, quando muito,* $4!=24$ *soluções, que podem obter-se escrevendo os têrmos do desenvolvimento do determinante simbólico*

$$\begin{vmatrix} (r_1,A_1) & (r_2,A_1) & (r_3,A_1) & (r_4,A_1) \\ (r_1,A_2) & (r_2,A_2) & (r_3,A_2) & (r_4,A_2) \\ (r_1,A_3) & (r_2,A_3) & (r_3,A_3) & (r_4,A_3) \\ (r_1,A_4) & (r_2,A_4) & (r_3,A_4) & (r_4,A_4) \end{vmatrix}$$

Solução de José Morgado

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

49 — TORROJA, EDUARDO — **Lecciones elementales de elasticidad con aplicación a la técnica de la construcción.** XVI+326 pgs. (Publicaciones de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos). Madrid, 1945. Editorial Dossat.

La resistencia de materiales es, como se sabe, una ciencia matemática, que nació el dia en que Galileo se propuso determinar la resistencia de una viga empotrada en un muro. Pero no basta con etiquetar de matemática a una teoría para que sea, sin más, utilizable. En nuestro caso se precisa, además, que dicha teoria sea sencilla y de aplicación económica, es decir que para calcular un cierto elemento constructivo no se requiere un trabajo que exceda a una determinada fracción de su precio de coste.

Por otro lado, es notorio que dicha ciencia matemática es insuficiente llegado el momento de elegir entre diversas formas posibles la que mejor se adapta a las condiciones prefijadas y en este hallazgo de la idoneidad reside el secreto de la intuición del ingeniero o arquitecto que, merced a tal decisión imprime la huella de su personalidad a la obra que proyecta.

Hooke, Joung y Navier han sido los fundadores de la Teoría de la resistencia de materiales, que al desarrollarse ha dado origen a la teoría matemática de la elasticidad, estudiada por el ingeniero de caminos español Torroja, en estas *Lecciones*, con un excelente sentido pedagógico. La orientacion de la obra hacia la técnica de la construcción está claramente marcada en todo el texto y explícitamente desarrollada en su tercera parte — más de 100 páginas — en donde se estudian diversos casos prácticos tales como los de piezas prismáticas sometidas a tracción simple, a torsión y a flexión, dándose la expresión general de la energia elástica en la pieza prismática y determinándose las reacciones hiperestáticas en piezas empotradas en sus extremos.

Otros problemos de gran interés en construcción, tales como la presa de gravedad de perfil triangular, las solicitaciones de cuerpos cilíndricos en torno a su eje, los apertos producidos por taladros y entalladuras, y los estudios fundamentales del reparto de cargas sobre el terreno bajo las cimentaciones son estudiadas en sendos capitulos donde la sencillez y claridad de exposición no dejan nada que desear.

En el último capítulo de esta tercera parte se aborda la cuestión de la placa plana semi-indefinida con carga concentrada en el borde y normal a él, utilizándose, con elegancia, las funciones de variable compleja y constituyendo una excelente introducción a obras que como la de Nádai resulta imprescindible en la biblioteca de todo ingeniero que no rinda culto a la Rutina.

En las partes primera y segunda el autor expone la teoría de la elasticidad tri y bi dimensional incluyendo en la última un interesante capítulo sobre la Fotoelasticidad.

Aun cuando el autor declara en el prólogo, con excesiva modestia, que su obra carece de originalidad y de aportación personal, no vacilamos en recomendarla a todos los ingenieros, arquitectos y estudiantes técnicos que deseen conocer cuáles son los problemas actualmente planteados y aún sin resolver en teoría de la elasticidad así como las soluciones a los clásicos.

Al final de la obra se incluye un resumen general y un vocabulario, amén de un índice de notaciones y fórmulas que contribuyen a aumentar y no en pequeña parte, la utilidad de las *Lecciones*.

La presentacion de la obra es insuperable como corresponde a la tradición de la Editorial Dossat.

J. Gallego Diaz

50 — SMART, W. M. — **Text-Book on Spherical Astronomy** — Cambridge — 1944.

Trata-se da quarta edição (1944) do tratado de Astronomia Esférica do Prof. W. M. Smart, da Universidade de Glasgow. É êste livro suficientemente conhecido dos nossos estudantes de Astronomia para nos dispensar de pormenorizadas referências: na Faculdade de Ciencias de Lisboa tornou-se, desde a sua primeira edição (1931), um livro de consulta freqüente.

É particularmente recomendável no estudo das órbitas dos sistemas binários e dos modernos métodos fotográficos de determinação dos movimentos próprios e paralaxes estelares que o clássico e, ainda hoje, precioso Chauvenett não poude já conter. Nesta quarta edição é de notar apenas a introdução do último valor da paralaxe solar (1941).

A. B. S.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES DE MATEMÁTICA

NACIONAIS

Portugaliae Mathematica — Vol. 4, Fasc. 4:

Guido Ascoli — *Sopra un'equazione funzionale.*

António Monteiro — *Caractérisation de l'opération de fermeture par un seul axiome.*

J. Albuquerque — *Ensembles de Borel.*

Enrique Vidal — *Sobre una representación equivalente de una porción de superficie curva sôbre um plano.*

A. de Mira Fernandes — *Connessioni finite.*

Henryk Schärf — *Intégrale et mesure dans certains espaces algébriques.*

J. Albuquerque — *Ensembles de Borel (Suite).*

Guy Hirsch — *Sur les groupes d'homologie de certains complexes de recouvrement.*

H. Hadwiger — *Ueberdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen.*

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise geral:

N.º 3. «*Algebra Moderna*» — 1 — *Grupos* — 2.ª edição — por José Morgado.

N.º 14. «*Teoria Geral da Medida*» — 3 — *Medida à Borel — Introdução — Classe B* — por L. Neves Real.

N.º 15 — «*Teoria Geral da Medida*» — 4 — *Medida à Borel — Definição e Teoremas Gerais* — por L. Neves Real.

N.º 16. «*Teoria Geral da Medida*» — 5 — *Medida à Lebesgue e Medida à Carathéodory* — por L. Neves Real.

N.º 17. *«Geometria das distâncias»* — 2 — *Curvaturas* — por Aureliano de Mira Fernandes.

Lições de Algebra e Análise — Vol. 1 — 2.ª edição — por Bento de Jesus Caraça.

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Revista Argentina de Matemática — Ano XVII, n.ºˢ 3, 4 e 5.

Mathematicae Notae — (Rosario) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciências Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Ano V, Fasc. 1 — 1945.

Revista de la Unión Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Volume X, n.º 5 — 1945.

Brasil

A posição da Matemática na Cultura Geral — Aula inaugural proferida pelo Professor Omar Catunda — Universidade de São Paulo — 1945.

Da importância da Topologia na Matemática Moderna — por Achille Bassi — Colecção de Monografias Científicas dirigida por Luigi Sobrero — n.º 1 — Instituto Italo-Brasileiro de Alta Cultura — Rio de Janeiro, 1941.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Mathematica — (New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics. Vol. XI — N.º 1 — Março, 1945.

França

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sujets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tomo 1 — Fasc. 1 — 1945.

Inglaterra

The journal of the London Mathematical Society — Vol. 19 — Parte 3 — Julho 1944.

The Quarterly journal of Mathematics — Oxford Series — Vol. 16 — N.ºˢ 61-62 — Março e Junho 1945.

Mathematician's Delight — Por W. W. Sawyer — (Oferta do British Council).

Text-Book on Spherical Astronomy — por W. M. Smart — 4.ª ed. — Cambridge, Univ. Press, 1944. (Oferta do British Council).

The Observatory — A Review of Astronomy — Londres — Vol. 66 — N.º 824 — 1945. (Oferta do British Council).

OUTRAS PUBLICAÇÕES

Agros — (Lisboa) — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVII — N.ºˢ 3-6, 1944.

A energia atómica e a sua utilização — por A. Marques da Silva — Lisboa, 1945.

Discovery — The Magazine of scientific propress. Vol. V — N.º 12 — Dezembro de 1944. (Oferta do British Council).

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones. Tomo V, n.ºˢ 54, 55, 56 — Julho a Outubro de 1945.

Gustav Cassel — Algumas palavras sôbre a sua obra científica — por António M. Pinto Barbosa — Lisboa, 1945.

Revista Politécnica — (S. Paulo) — Ano 41.º, n.º 146 — Maio de 1945.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºˢ 157, 158 e 159.

Publicações da Embaixada Britânica: *A agricultura em Inglaterra* — por Sir John Russel; etc.

Publicações da Embaixada dos Estados Unidos da América do Norte: *U. S. A.* — Uma revista americana — Vol. 2, n.ºˢ 3, 4, 5, 6 e 7; *Em Guarda* — Ano 4, n.ºˢ 6, 7 e 8; etc.

EXPLICAÇÃO NECESSÁRIA

Os fundadores da «Gazeta de Matemática», impelidos pela necessidade de regularizar, do ponto de vista jurídico, a situação da revista, constituiram uma sociedade por quotas denominada «Gazeta de Matemática, Lda.» que tem por fim a sua publicação.

Êste facto em nada altera as normas que sempre orientaram a publicação da «Gazeta de Matemática».

Em especial, a revista continuará a ser, portanto, um empreendimento não comercial, cujo eventual progresso financeiro se traduzirá integralmente no próprio melhoramento da publicação.

Os fundadores da «Gazeta de Matemática»

GAZETA DE MATEMÁTICA

N.º 22 dedicado às Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão

Foi publicado, em Março de 1944, o n.º 22 da «Gazeta de Matemática», número extraordinário dedicado às Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão e inteiramente independente dos outros números.
Os assinantes da «Gazeta de Matemática» poderão beneficiar durante o ano de 1945 duma redução de preço neste número extraordinário (8$oo em vez de 10$oo).

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Preço de capa por cada número (24 e seguintes)	10$oo
Preço de assinatura anual de quatro números	30$oo
Preço de capa do número extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$oo
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	8$oo

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao preço de Esc. 250$ (colecção dos 22 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 12 a 21, 23 a 26), ao preço de capa.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial