GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VII **N.º 27** FEVEREIRO-1946

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Editor	Administrador	Tesoureiro
Gazeta de Matemática, L.da	*José de Oliveira Campos*	*A. Marques de Carvalho*

Correspondência para a Redacção para Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa
Séde e Administração da *Gazeta de Matemática, Lda.* — Rua Almirante Barroso, 20 — Lisboa-N

Composição: Tipografia Matemática, Limitada — Rua Almirante Barroso, 20-r/c — Lisboa
Impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Lda. — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 — Lisboa

ANO VII-N.º 27 GAZETA DE MATEMATICA FEVEREIRO-1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática Lda.* ■ ADMINISTRADOR: *J. O. Campos*

Composto na Tipografia Matemática Limitada — Impresso na Sociedade Industrial de Tipografia Limitada

Que é uma estrutura?*

por ***Garrett Birkhoff*** (Harvard University)

1. Relações de ordem. Muitos sistemas matemáticos são estruturas relativamente a uma ou mais relações. Assim o conjunto dos números reais é uma estrutura relativamente à relação de *ordem* $x \leqq y$ (x é menor ou igual a y); o conjunto dos inteiros não negativos é uma estrutura relativamente à relação $x|y$ (x é um *divisor* de y); os sub-conjuntos de um conjunto formam uma estrutura se os relacionarmos pela relação de *inclusão* $X \subset Y$ (X é um sub-conjunto de Y).

A afirmação de que os 3 sistemas acima citados são *estruturas* significa realmente que as relações indicadas têm um certo número de propriedades formais comuns. Assim a relação de ordem entre os números reais possue evidentemente as seguintes propriedades:

P1. Para qualquer x é $x \leqq x$ (reflexividade)

P2. Se $x \leqq y$ e $y \leqq x$ então $x = y$ (anti-simetria)

P3. Se $x \leqq y$ e $y \leqq z$ então $x \leqq z$ (transitividade)

Mais: as proposições P1-P3 verificam-se ainda se a relação $\leqq$ de desigualdade entre números reais é substituída pela relação $|$ de divisibilidade entre inteiros não negativos ou pela relação $\subset$ de inclusão entre sub-conjuntos.

Resumindo: as 3 relações $\leqq$, $|$ e $\subset$ tais como foram definidas, verificam as propriedades P1—P3 e tôdas as conseqüências lógicas destas propriedades, mesmo as indirectas.

2. Uma questão de economia. Parece-me um desperdício de papel desenvolver tôdas as propriedades da relação de desigualdade usando uma notação e terminologia, discutir a divisibilidade utilizando um segundo conjunto de símbolos e termos técnicos, e repetir êste procedimento ao tratar da álgebra de classes. Em lugar disto aproveitar-me-ei das analogias básicas e crearei uma *teoria geral de estruturas* das relações satisfazendo a P1—P3. Esta teoria poderá conter como casos especiais muitas das propriedades de desigualdade, divisibilidade e inclusão; assim terei, ao mesmo tempo, vantagens tanto de *unidade* como de *economia*.*

Um exemplo vulgar desta economia apresenta-se na dedução das propriepades da relação $x < y$ e suas análogas. Por $x < v$, entende-se que $x \leqq y$ mas $x \neq y$. É um exercício simples mas enfadonho provar, partindo de P1—P3, por exemplo, que $x < y$ e $y \leqq z$ implica $x < z$ que $x_1 < x_2 < x_3 < x_1$ é impossível, etc. Se a teoria dos estruturas não pode inteiramente libertar-nos de executar estas deduções fastidiosas, pode, pelo menos, livrar-nos de as repetir três ou mais vezes com linguagem diferente. Se definirmos *divisor próprio* de y como um inteiro tal que $x \mid y$ sendo $x \neq y$, podemos aplicar *gratis* a esta relação cada uma das propriedades de $x < y$ deduzida de P1—P3. A mesma observação se aplica ao conceito de *sub-conjunto* próprio.

3. O princípio de dualidade. Uma economia notável mas mais escondida, que é realizada pela teoria das estruturas, consiste no seu geral Princípio de Dualidade, que engloba como casos particulares os princípios de dualidade em lógica, geometria projectiva, teoria dos números, *etc.* Por *dual* duma relação verificando P1—P3, entende-se simplesmente a sua conversa no sentido vulgar. Assim a dual de $\leqq$ é $\geqq$, a dual de $x \mid y$ é «x é um múltiplo de y», e a dual de $X \subset Y$ é $X \supset Y$.

Na sua forma mais simples, o Princípio de Dualidade estabelece que a relação dual de qualquer relação verificando P1—P3 satisfaz também a P1—P3. Daqui

* Unificações análogas, realizadas pela teoria dos grupos abstractos, teoria dos corpos e teoria dos ideais constituem a feição característica da álgebra moderna. A importância da economia na organização do conhecimento científico é descrita pelo físico e filósofo Ernst Mach no seu «Science of Mechanics», Chicago 1893, p. 6

* Publicado em «American Mnthematical Monthly», Vol. L, n.º 8, 1943.

segue-se que tôdas as definições e teoremas são ou duais aos pares ou duais de si mesmos.

Por exemplo, *minorante* de um conjunto X de elementos x_i relativamente à relação $\leqq$ satisfazendo a P1—P3 é um elemento u tal que $u \leqq x_i$ qualquer que seja x_i em X. O conceito dual é o de *majorante*, ou seja o de elemento v tal que $x_i \leqq v$ para qualquer x_i em X. Anàlogamente para a divisibilidade são duais os conceitos de divisor comum e múltiplo comum; ¿quais são os análogos para a relação de inclusão entre conjuntos?

Semelhantemente, pelo *maior dos minorantes* ou *meet* de x, y em relação a $\leqq$, designa-se um elemento u (representado por $x \cap y$) que é: 1) um minorante de x e y e 2) satisfaz a $u \geqq v$ dêsde que v seja um qualquer minorante de x e y. Assim no caso de desigualdade, $x \cap y$ é simplesmente o *menor* entre x e y; no caso de divisibilidade, é o *m. d. c.* de x e y; no caso de inclusão, $X \cap Y$ é a *intersecção* de X e Y, ou seja o conjunto de todos os pontos que pertençam tanto a X como a Y.

O leitor não terá grande dificuldade em definir o conceito dual dêste: *menor dos majorantes* ou *join* de x e y, representado por $x \cup y$. Êste, evidentemente, especialisa-se no *maior* entre x e y, m. m. c. de x e y e *reunião* ou soma dos conjuntos X e Y nos três exemplos que considerámos.

4. Estruturas. Estamos aptos agora a definir precisamente o que se entende quando falamos de uma estrutura.

Definição. *Uma estrutura é um sistema* L *de elementos* x, y, z, ⋯ *considerado juntamente com uma relação que verifica P1—P3 e também o postulado:* L. *Quaisquer dois elementos* x *e* y *têm um meet* $x \cap y$ *e um join* $x \cup y$ *em* L.

Teorema. *Em qualquer estrutura são verdadeiras as seguintes identidades algébricas:*

L1. *Para qualquer* x, $x \cap x = x \cup x = x$,

L2. $x \cap y = y \cap x$ e $x \cup y = y \cup x$,

L3. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ e $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.

L4. $x \cap (x \cup y) = x \cup (x \cap y) = x$.

Omitimos a demonstração. Inversamente, qualquer sistema verificando L1-L4 torna-se uma estrutura se se define $x \leqq y$ como significando $x \cup y = y$ (ou duma forma equivalente, significando $x = x \cap y$). É principalmente por esta interpretação de estruturas em têrmos de operações binárias que a teoria das estruturas pode considerar-se como um ramo da álgebra.

De facto, há uma analogia entre as operações $\cap$, $\cup$ numa estrutura e as operações $\times$, $+$ da aritmética ordinária. Como a multiplicação, a operação $\cap$ é comutativa e associativa; anàlogamente para $\cup$ e para a adição (cf. L2-L3). Além disto, nos três exemplos citados, é válida a lei:

L6'. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

análoga da lei *distributiva* $x(y+z) = xy + xz$ da aritmética.

No entanto, a lei distributiva não se verifica em tôdas as estruturas. Por exemplo, tomemos os pontos, rectas e planos do espaço projectivo juntamente com o conjunto vazio O e o espaço inteiro I. Formamos uma estrutura relativamente à inclusão; $X \cap Y$ é a intersecção de X e Y, enquanto que $X \cup Y$ é a soma linear de X e Y — isto é, o conjunto de todos os pontos de rectas ligando X e Y. Verifica-se fàcilmente que se x, y, z são três pontos distintos de uma recta L, então $y \cup z = L$, donde $x \cap (y \cup z) = x \cap L = x$, ao passo que $x \cap y = x \cap z = O$ e também $(x \cap y) \cup (x \cap z) = O$.

É na verdade um facto curioso, mas não demonstràvel fàcilmente, que se três elementos numa estrutura verificam L6' então verificam a sua dual:

L6''. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

cuja análoga em aritmética $x + yz = (x+y) \cdot (x+z)$ não é verdadeira.

No exemplo precedente, os elementos O e I são respectivamente minorante e majorante universais, isto é, para qualquer x, $O \leqq x \leqq I$. Tais elementos não existem necessàriamente em tôdas as estruturas (embora sim em tôdas as estruturas finitas). Assim com os números reais temos de imaginar e juntar os números $-\infty$ e $+\infty$ para obter fronteiras universais; por outro lado, 1 é um divisor comum e 0 um múltiplo comum de todos os inteiros não negativos.

Se existem fronteiras universais, prova-se fàcilmente que são de qualquer modo análogas a 0 e a 1 na aritmética. Assim podemos mostrar partindo de P1-P3 e das nossas definições, que para qualquer x,

$$O \cap x = O, \quad O \cup x = x, \quad \text{e} \quad I \cap x = x.$$

Isto é análogo a $0 \cdot x = 0$, $0 + x = x$, e $1 \cdot x = x$

5. Aplicações na teoria das funções e na lógica. Seria possível continuar a indicar muitíssimos exemplos e propriedades das estruturas. Espero porém que os exemplos anteriores darão alguma idéia da generalidade e simplicidade da noção de estrutura. Para emoldurar o quadro, concluirei mencionando outras duas estruturas que representam papéis fundamentais na teoria das funções e na lógica.

As funções $f(x)$ reais contínuas de uma variável real formam uma estrutura se se define $f \leqq g$ como $f(x) \leqq g(x)$ para qualquer x. Aqui $f \cap g$ é a função $h(x)$ que, para cada x toma o menor entre os valores de $f(x)$ e $g(x)$; define-se $f \cup g$ por dualidade. Assim $f \cup -f$ é o *módulo* $|f(x)|$ de $f(x)$.

Finalmente, na lógica matemática, os atributos (bom, rico, fêmea, *etc.*) formam uma estrutura. Aqui $p \leq q$ têm a interpretação «*p* é *implicado* por *q*», $p \cap q$ significa «*p* ou *q*», $p \cup q$ significa «*p* e *q*». Nesta estrutura (muitas vezes chamada uma *álgebra de Boole*), representa também um papel fundamental a operação p' (significando *não* p). Verifica-se

L7. $(p')'=p$, $p \cap p'=0$, $p \cup p'=\mathrm{I}$

$(p \cap q)'=p' \cup q'$ e $(p \cup q)'=p' \cap q'$

É notável que as mesmas leis sejam verificadas pelos conjuntos se X' designar o *complementar* de X (conjunto dos pontos que não pertencem a X); mais, são verificadas em geometria projectiva se x' designa a *polar* de x. De facto, pode mostrar-se que a principal diferença entre a geometria projectiva e a álgebra de Boole (ou álgebra da lógica) é que as leis distributivas L6′-L6″ da álgebra de Boole devem substituir-se em geometria projectiva pela lei *modular* mais fraca:

L5. Se $x \leq z$, então $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

Desde que $x \leq z$, tem-se $x \cup z = z$ e então a conclusão de L5 toma a forma *auto-dual* $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$; assim ela é também equivalente a $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$.

A lei modular auto-dual L5 é importante por outra razão. Ela é verificada pelos sub-grupos normais de qualquer grupo, pelos ideais de qualquer anel, *etc.*, e pode ser considerada a base de muitos dos conhecidos teoremas de composição da álgebra moderna. Mas isto são contos largos!

Trad. de Manuel Zaluar

N. T. O leitor interessado por êste assunto, que desempenha hoje um papel tão importante nos mais diversos ramos da Matemática, pode completar a sua iniciação nêste estudo em «Aritmética Racional» de A. Monteiro e J. Paulo. Estudará, em seguida, «Théorie Générale des Structures» de Glivenko (Actualités Scientifiques et Industrielles n.º 652). Obra mais importante e menos acessível é a «Lattice Theory» de G. Birkhoff.

Que é um quadriculado?

por **Hugo Ribeiro** (bolseiro do I. A. C. em Zürich)

Tivemos ocasião de ler o explêndido artigo em que Garrett Birkhoff, (o jóvem matemático americano ao qual se deve a maioria dos resultados e aplicações já hoje englobados pela teoria das estruturas) dá aos estudantes uma primeira idéia de estrutura, e a tradução hoje na «Gazeta», com a qual o Prof. Manuel Zaluar Nunes atrai a atenção dos nossos jóvens estudiosos para esta bonita teoria, só recentemente retomada, depois dos trabalhos de Dedekind.

Como em anterior número da «Gazeta» anunciávamos, era a nossa intenção escrever um ou mais artigos que, grosso modo, teriam os mesmos objectivos. Depois desta tradução de Birkhoff podemos bem dispensar-nos de realizar uma bôa parte da nossa tarefa. Mas aproveitamos desde já esta oportunidade para indicarmos a demonstração dum teorema elementar, caso especial dum outro de que nos ocupámos recentemente. Apoiar-nos-emos no artigo de Birkhoff, e teremos ocasião de citar, outras noções fundamentais em teoria das estruturas. Antes, porém, incluimos as seguintes observações de carácter geral: Deve sublinhar-se o facto de que é, sôbretudo, por intermédio das estruturas especiais e suas aplicações em Matemática — mais precisamente: aplicações na análise dos fundamentos de diversos capítulos da Matemática — que o interêsse de uma teoria das estruturas se tem justificado e crescido. Se é possível que o *desenvolvimento formal da teoria* seja fàcilmente acessível a qualquer pessoa que possua um certo hábito de seguir desenvolvimentos formais, o que é certo — e isto não só para a teoria das estruturas! — é que, sem uma perfeita compreensão dos exemplos das aplicações (que residem fora dêsse desenvolvimento formal) não é possível alcançar o sentido dos resultados nem dos problemas. (Uma simples leitura nestas condições não poderá trazer grandes ensinamentos e arrisca-se a contribuir para viciar uma formação matemática). Na teoria das estruturas sucede freqüentemente que as concretizações, os exemplos, dum primeiro nível são ainda conceitos abstractos, e mais: conceitos que provêm dos mais variados ramos da Matemática, do que se pode talvez chamar (e chama decerto entre nós) «Matemática moderna». Como se vê no artigo de Birkhoff, é possível não fazer aparecer tais dificuldades limitando-nos a exemplos muito comuns [1]. Êstes mostram ainda que a teoria das estruturas não é assunto que interesse simplesmente estreitos especialistas mas entra, naturalmente, no âmbito da preparação dum matemático, em geral, dum profissional, sôbretudo quando êste é um professor. [1] [2]

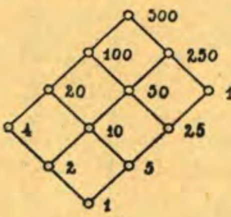
Quando procuramos a estrutura dos divisores naturais dum número natural $n = p^r \cdot q^s$ onde $r \geq 1$ e $s \geq 1$, e $p \neq q$ são primos, encontramos sempre uma com $(r+1) \cdot (s+1)$ elementos, cujo «mínimo» é a unidade e cujo «máximo» é n. Se se tem um grupo cíclico cuja ordem é um tal n a estrutura dos seus sub-grupos, estrutura relativamente às operações de intersecção e formação do grupo-reunião (isto é, menor sub-grupo contendo a reunião), que são, aqui, os nossos meet e join respectivamente, só difere da anterior porque os elementos são certos grupos, ao passo que na anterior eram números. Isto leva-nos a concluir que as duas estruturas são «*isomorfas*», isto é, que há uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos tal que tanto os meet com os join de quaisquer elementos assim correspondentes, são também correspondentes ou, mais simplesmente ainda, que há tal correspondência que se dois elementos estão na relação $\leq$, numa das estruturas, os correspondentes (pela correspondência dada ou pela recíproca) estão na relação $\leq$

(1) Isto já é aliás, decerto, convicção de quem lê o livro de extraordinário valor didactico que é a «Aritmética Racional» de A. Monteiro e J. da Silva Paulo, onde se inicia, também, o estudo de alguns exemplos que aqui retomamos.

(2) Note-se ainda que, de vários lados, tem surgido, através da chamada filosofia, a intervenção de não matemáticos nesta teoria. Nos dois casos de que tenho notícia deu-se isto com insucesso, que aliás era de prever. Entre nós, num livro sôbre questões de lógica onde a noção de estrutura é citada, há, se bem contámos, ao tôdo 6 afirmações relacionadas com o assunto. Ora a 1.ª não tem sentido, a 2.ª é falsa, a 3.ª é uma trivialidade, as 4.ª, 5.ª e 6.ª não têm sentido (as 5.ª e 6.ª porque retomam a 4.ª).

na outra. Vêmos mais (resguardados ainda pelo «isomorfismo») que é também indiferente supôr outro n dêsde que êle seja o produto de potências de *mesmos* expoentes r e s de *dois* primos distintos.

Ora as estruturas finitas representam-se, freqüentemente com comodidade, num diagrama do seguinte modo: A cada elemento da estrutura fazemos corresponder um «ponto» da fôlha do papel do diagrama, dois elementos distintos nunca correspondem ao mesmo «ponto», se um elemento y «*segue imediatamente*» outro x, isto é, se $x<y$ e não há u, na estrutura, com $x<u<y$, então o «ponto» correspondente a y está «acima» do «ponto» correspondente a x e são, nêste caso e só nêste caso, x e y ligados por um segmento. É claro que um diagrama duma estrutura é-o de tôdas as isomorfas e de nenhuma outra. Para aquelas estruturas (entre si isomorfas) que estamos considerando, e só para elas, obtem-se como diagrama, sempre uma figura à qual, por deformações que não perturbem nenhuma das relações de situação e incidência, acima citadas, se pode dar a forma dum quadriculado constituído por $r \cdot s$ pequenos quadrados. Indicamo-la para o caso de um dos expoentes ser 2 e o outro 3 (divisores de 500). A tais estruturas chamamos, aqui, «quadriculadas».



Nelas o join e o meet de dois elementos são os elementos cujas imagens, no diagrama, são os «pontos», respectivamente «mais alto» e «mais baixo», obtidos como intersecções das rectas que passam pelas imagens dos dados. Os próprios vértices duma tal figura constituem, é claro, por estas mesmas operações, também uma estrutura (isomorfa daquelas estruturas de que a figura pode constituir diagrama).

Desinteressemo-nos, agora, daqueles r e s e pensemos, *em geral*, nestas estruturas «quadriculadas». Elas são distributivas, o que resulta já de propriedades simples relacionando os m. d. c. e m. m. c.; por outro lado, nunca a um elemento se seguem imediatamente mais do que dois elementos; e só 4 elementos, a saber, os vértices do grande rectângulo, têm complemento, isto é, há *para êles* uma operação verificando $L7$. Ora tem-se o

Teorema: Ser distributiva, nenhum elemento ser imediatamente seguido por mais do que dois e ter precisamente 4 elementos com complemento, constitue uma condição necessária e suficiente para que uma estrutura finita seja quadriculada.

Podemos limitar-nos a indicar a demonstração de que a condição é suficiente: Com efeito, por ser finita, a estrutura dada L tem um elemento «*mínimo*» O (o meet de todos) e um «*máximo*» I (o join de todos), as fronteiras universais cada uma das quais é, evidentemente, complemento da outra (e de mais nenhum elemento). Tomemos os dois únicos restantes elementos a e b com complemento, os quais são, necessáriamente, complementares um do outro. O conjunto dos elementos «incluídos em» a, isto é, na relação $\leq$ com a constitue uma «*subestrutura*» L_a da estrutura dada L, isto é, L_a, é uma nova estrutura (cujos elementos pertencem todos a L) relativamente às mesmas operações definidas, para êsses elementos em L. Anàlogamente para o conjunto dos elementos incluídos em b. Ora estas duas estruturas L_a e L_b só têm de comum o elemento mínimo, visto que $a \cap b = O$ e se $u \leq a$ e $u \leq b$ então $u \leq a \cap b$. Procuremos conhecer as estruturas L_a e L_b partindo do seu elemento mínimo O: há em L_a (como é necessário para atingir a a partir de O) pelo menos um elemento seguindo imediatamente O e da mesma maneira em L_b pelo menos um elemento seguindo imediatamente O; e como êstes dois elementos são distintos, como vimos, e, por hipótese não há em L mais elementos que sigam imediatamente O, há precisamente *um* elemento em L_a seguindo imediatamente O e há, em L_b, precisamente *um* elemento e seguindo imediatamente O. Mas se v é um elemento qualquer de L_a, em L_a não pode seguir-se-lhe imediatamente mais do que um elemento: De contrário, como o join de v com e não está em L_a (porque $(v \cup e) \cup a = (v \cup a) \cup e = a \cup e \neq a$) mas é um elemento que segue imediatamente v (porque se se supõe $v < x < v \cup e$ vem $x = x \cap (v \cup e) = (x \cap v) \cup (x \cap e) = v \cup w$ com $w = x \cap e = O$ ou $w = e$, o que é impossível) haveria na estrutura dada mais do que 2 elementos seguindo imediatamente v o que contradiz uma das nossas hipóteses sôbre L. Vê-se, por êste modo, que L_a é tal que, *nela*, a *cada* elemento se segue um e um só, excepto se êsse elemento é o último ao qual nenhum se segue. L_a é pois o que se chama uma estrutura «*linear*», finita, ou «*ordenada*» por $<$. O mesmo se diz de L_b.

Ora cada elemento x de L é, em virtude ainda da distributividade, o join dum elemento $x \cap a$ de L_a e e outro $x \cap b$ de L_b: $x = x \cap I = x \cap (a \cup b) = (x \cap a) \cup (x \cap b)$; donde, representadas as duas estruturas lineares L_a e L_b nos dois lados inferiores dum rectângulo com o vértice comum O, como ponto mais baixo, vê-se que a cada elemento x de L corresponde um ponto bem determinado pela intersecção das paralelas aos lados tiradas por $x \cap a$ e $x \cap b$, que se $x \neq y$ (donde ou $x \cap a \neq y \cap a$ ou $x \cap b \neq y \cap b$) os pontos correspondentes são distintos e que se y segue imediatamente x, é ou $x \cap a = y \cap a$ e $y \cap b$ segue imediatamente $x \cap b$, ou $x \cap b = y \cap b$ e $y \cap a$ segue imediatamente $x \cap a$; enfim que, com êstes vértices e os segmentos daquelas paralelas se obtém de facto um diagrama de L por êste método e que L é quadriculada. (Se L_a e L_b têm respectivamente $r+1$ e $s+1$ elementos há $r \cdot s$ pequenos quadrados)·

Êste teorema pode fàcilmente ser generalizado de várias maneiras e obtêr outras formas. Estas tarefas são recomendadas ao leitor. A consideração da noção de diagrama, e portanto tôdas as considerações de carácter geométrico, pode considerar-se como constituindo simplesmente um meio auxiliar que evita uma noção, a de «*produto de estruturas*» (aqui estruturas lineares), muito simples também mas menos aconselhável nesta introdução. O teorema pode evidentemente interpretar-se como fornecendo uma definição algébrica, em têrmos da teoria das estruturas, do quadriculado.

Zürich, Dezembro de 1945.

TEMAS DE ESTUDO

SUR UNE MANIÈRE DE PRÉSENTER LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

por ***G. Dedebant***

1. Préliminaire. Il va de soi que la théorie des équations algébriques a dèja été si complétement et si parfaitement étudiée que nul ne saurait prétendre à une nouveauté quelconque sur ce sujet.

Aussi bien n'avons-nous en vue que d'exposer une certaine maniére de présenter la résolution de ces équations — rencontrée au hasard d'une méditation — et dont nous ignorons d'ailleurs si elle est nouvelle, mais qui nous a paru posséder une certaine valeur pédagogique.

Nous n'y attachons guère plus que l'importance d'une «Récréation mathématique».

Soit:

$$f_n(x) = 0 \quad (E_n),$$

l'équation générale du n^{eme} degré.

Résoudre cette équation, au sens des algébristes, c'est exprimer ses solutions dans l'extension obtenue en adjoignant au corps des nombres rationnels des deux signes, d'autres nombres qui sont les racines de l'équation binôme:

$$t^n - 1 = 0 \quad (B_n).$$

Le but à atteindre (s'il est accessible?) est d'exprimer les racines de (E_n) par une fraction rationnelle ayant ces nouveaux nombres pour arguments.

L'équation (B_n) admet toujours la racine banale $t = +1$ et, si n est pair, la racine $t = -1$. Ces deux racines font partie du corps des nombres rationnels de l'un ou l'autre signe; les autres racines sont étrangères à ce corps. Il nous semble qu'il y ait intérêt à se placer seulement dans le corps des nombres rationnels positifs et à considérer -1 comme une entité extérieure. Nous allons voir tout de suite l'avantage de cette conception pour la resolution de l'équation da 2^{eme} degré.

2. L'équation du second degré. Soit l'équation générale du 2^{eme} degré:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (E_2).$$

L'équation binôme correspondante est:

$$t^2 - 1 = 0 \quad (B_2).$$

Elle admet les racines $+1$ et -1. Désignons la seconde par α que nous ne considérons plus comme appartenant au corps des coefficients de (E_2). α sera donc une variable «indépendante» sur laquelle nous calculerons en remplaçant son carré par $+1$. Grace à cette régle, la solution de (E_2), si elle existe au sens des algébristes, se présentera sous la forme *d'un binôme*: $x = y + \alpha z$. Substituons cette expression dans (E_2); il vient: $(z^2 + y^2 + py + q) + z(2y + p)\alpha = 0$. Ce doit être une *identité en* α, ce qui donne le système d'équations: $\begin{cases} z^2 + y^2 + py + q = 0 \\ z(2y+p) = 0. \end{cases}$ Ecartant la solution $z = 0$, de la 2.^{e} équation, qui n'avancerait pas la résolution de l'équation (E_2), il reste: $y = -p/2$. Portant alors cette valeur dans la 1^{ere}, on obtient: $z^2 = p^2/4 - q$. Les racines de (E_2) sont donc, en écrivant maintenant $\alpha = -1$: $x = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$.

3. L'équation du 3^{eme} degré. Le même procedé est applicable à l'équation générale du 3^{eme} degré:

$$x^3 + px + q = 0 \quad (B_3).$$

L'équation binôme du 3^e degré:

$$t^3 - 1 = 0 \quad (E_3)$$

admet les racinos: $1, \alpha, \alpha^2$, liées entre elles par la relation: $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.

Nous pouvons donc calculer sur α comme sur un nombre «irrationnel» dont le cube est égal à 1 et le carré à $-(1+\alpha)$.

Une fraction rationnelle ayant pour arguments les racines cubiques de l'unité, se réduira donc *encore à un binôme* $:x=y+\alpha z$.

Substituant cette expression dans (E_3), il vient:

$$(y^3+py+q-3yz^2+z^3)+z\,(3y^2+p-3yz)\,\alpha=0\,.$$

Et, comme ce doît être une identité en α, on obtient le système d'équations: $\begin{cases} y^3+py+q-3yz^2+z^3=0 \\ z\,(3y^2+p-3yz)=0\,. \end{cases}$

Ecartant la solution $z=0$, de la 2e équation, qui n'avancerait pas la résolution de (E_3), celle-ci donne: $z=y+\dfrac{p}{3y}\cdot$ Substituons cette valeur dans la 1ere, on obtient:

$$y^6-qy^3-p^3/27=0 \quad (E'_3)\,,$$

qui est une équation du 2e degré en y^3, en fait la résolvante classique de l'équation canonique du 3e degré. La suite du calcul conduit aux formules de Cardan.

4. L'équation du 4eme degré. Soit:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \quad (E_4)\,,$$

l'équation générale du 4eme degré.

Les racines de l'équation binôme:

$$t^4-1=0 \quad (B_4)$$

sont, en dehors de 1: -1, i, $-i$. Une fraction rationnelle ayant pour arguments ces racines pourra donc se réduire encore à un binôme: $x=y+iz$, i étant l'imaginaire classique $(i^2=-1)$.

La substitution dans (E_4) donne lieu aux deux équations: $\begin{cases} (y^2-z^2)^2-4y^2z^2+p\,(y^2-z^2)+qy+r=0 \\ 4yz\,(y^2-z^2)+2pyz+qz=0\,. \end{cases}$

Et la seconde — écartant la solution $z=0$ — donne: $z^2=y^2+p/2+q/4y$ Substituant dans la première, on obtient la «résolvante»

$$64y^6+32py^4+(4p^2-16r)\,y^2-q^2=0\,, \quad (E'_4)\,,$$

qui est une équation du 3eme degré en y^2.

La suite du calcul conduira vraisemblablement aux formules de l'une des méthodes classiques de résolution.

5. Equations de degré supérieur au quatriéme.

Les cas de $n\leq 4$ présentent une grande simplicité parce qu'une fraction rationnelle en α se réduit à un binôme.

Si l'on aborde le 5e degré, on constate qu'une telle fraction rationnelle ne se réduit qu'à un polynôme du 3e degré. Les calculs se compliquent singulièrement, et la résolvante de degré 120, ne paraît guère susceptible de décomposition.

Pour le 6e degré, la complication diminue, une fraction rationnelle se réduisant de nouveau à un binôme. La résolvante n'est plus que du 15e degré.

Il serait curieux de pénétrer le sens profond de ces «phénoménes de calcul» et de voir comment il se rattachent aux théories d'Abel et de Galois. Nou nous proposons de revenir sur ce sujet.

Janvier, 1946.

AS RELAÇÕES DE INCERTEZA DE HEISENBERG

por ***F. Soares David***

As célebres relações de indeterminação da Mecânica Quântica estabelecidas pela primeira vez por Heisenberg em 1927 [1] podem justamente ser consideradas como uma das proposições fundamentais da nova Mecânica [2]. O seu principal interêsse reside, contudo, no que elas representam como factor de progresso na nossa concepção do mundo atómico — progresso no sentido de libertação de ideias feitas, admitidas a priori, portanto limitações de carácter extra-científica impostas à própria Ciência.

Poderia, portanto, parecer descabido abordar aqui um assunto tão trabalhado como êste. Contudo — e é êste o aspecto educativo da presente nota! — uma análise detalhada do problema alguma coisa de novo nos permitiu dizer a seu respeito e nos habilita agora a propor algumas questões a êle ligadas. O aspecto que aqui nos interessa da relações de Heisenberg é o seguinte: Sabe-se que representando por q e p respectivamente a abcissa e a quantidade do movimento dum electrão móvel sôbre uma recta, por Δq e Δp os êrros absolutos contidos numa avaliação de q e p, se tem

$$\Delta q\,\Delta p \sim h \tag{1}$$

($\sim$ significa *da ordem de* e h é a constante de Planck).

É essencial notar que os êrros Δq, Δp não resultam de quaisquer imperfeições evitáveis (mesmo teòricamente) dos aparelhos de medida, mas são impostos pela própria natureza da partícula dentro dos quadros da Mecânica Quântica, podendo embora (muito importante!) variar de acôrdo com o método experimental ou teórico de que se não lance mão.

A relação (1) pode obter-se quer imaginado, como fez Heisenberg [3], experiências à escala atómica — teòricamente possíveis e correctas do ponto de vista da Mecânica Quântica — quer recorrendo a certas propriedades dos integrais de Fourier que figuram na onda de de Broglie associada ao electrão [4], [5].

Um grau superior de precisão no enunciado do princípio de indeterminação será evidentemente atingido se obtivermos

$$(2) \qquad \Delta q \Delta p \geq \alpha h ,$$

sendo α uma constante da ordem da unidade.

Na única demonstração (teórica) conhecida duma relação dêste tipo assimilam-se Δq e Δp aos desvios médios quadráticos de q e p (consideradas como variáveis aleatórias) e aplicam-se noções elementares de Mecânica Quântica. Partindo da relação conhecida entre os operadores associados a q e p

$$(3) \qquad PQ - QP = h/2\pi i$$

obtem-se fàcilmente $\alpha = 1/4\pi$ [6].

Do ponto de vista matemático há que fazer ainda algumas observações. Com efeito, sabe-se que Q e P não são operadores definidos em todo o espaço das fases — é manifesto que $\int |f(x)|^2 dx < +\infty$ não implica $\int |xf(x)|^2 dx < +\infty$ nem $\frac{h}{2\pi i}\int \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx < +\infty$ — e que nem tampouco há coïncidência dos seus domínios de definição. Acontece, pois, que para certos elementos do espaço PQ (ou QP) e portanto $PQ-QP$ não tem sentido. Ora o segundo membro de (3) pode aplicar-se a qualquer elemento do espaço. Esta igualdade não tem portanto, a bem dizer, qualquer sentido.

Pode contudo obter-se uma relação do tipo (2) seguindo um raciocínio totalmente diferente. Consideremos nos espectros (contínuos!) de Q e P rêdes de intervalos $\{I_n\}$, $\{J_m\}$ e associados a Q e P os operadores $f(Q) = \sum \lambda'_n E(I_n)$, $g(P) = \sum \mu'_m f(J_m)$ onde $\lambda'_n \in I_n$ $\mu'_m \in J_m$ e E, F são as decomposições da unidade [6] relativas a Q e P. $f(Q)$ e $g(P)$ são operadores com espectros pontuais puros e uma base de vectores próprios (valores próprios: λ'_n, μ'_m; projecções próprias: $E(I_n)$, $f(J_m)$). Do ponto de vista físico, a substituïção de Q e P por $f(Q)$ e $g(P)$ traduz-se na introdução automática de certos êrros associados à medição de q e p, êrros limitados superiormente por $\varepsilon = \sup |I_n|$ e $\delta = \sup |J_m|$.

É manifesto que a compatibilidade de q e p se deve traduzir na possibilidade de medir estas grandezas com precisões arbitrárias, isto é, na compatibilidade de $f(q)$ e $g(p)$ para quaisquer decomposições dos espectros o que equivale ainda, como se sabe, à existêucia duma base comum aos $f(Q)$ e $g(P)$ relativos às mesmas decomposições.

Uma condição necessária de compatibilidade é, pois, a existência dum estado próprio comum aos $f(q)$ e $g(p)$ relativos a uma decomposição qualquer, isto é, a existência dum elemento comum a uma $V(I_n) = \underset{\varphi(q)}{E}[\varphi = E(I_n)\varphi]$ e uma $W(J_m) = \underset{\psi(q)}{E}[\psi = F(J_m)\psi]$.

Mas [6]

$$E(I_n)\varphi(q) = \varphi(q),\ q \in I_n;\quad 0,\ q \in 1 - I_n$$

$$F(J_m)\psi(q) = \frac{1}{h}\int_{J_m} \exp\left(\frac{i}{\mathrm{h}}pq\right)dp \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{h}pr\right)\psi(r)\,dr$$

$$(\mathrm{h} = h/2\pi)$$

Tal elemento deve pois satisfazer a equação integral

$$(4) \qquad f(q) = \frac{1}{h}\int_{J_m} \exp\left(\frac{i}{\mathrm{h}}pq\right)dp \int_{I_n} \exp\left(-\frac{i}{\mathrm{h}}pr\right)f(r)\,dr \qquad (q \in I_n)$$

Designando por M o limite superior (necessàriamente diferente de zero e finito) de $|f(r)|$ em I_n, tem-se:

$$|f(q)| \leq \frac{1}{h}\int_{J_m}\left|\int_{I_n} \exp\left(-\frac{i}{\mathrm{h}}pr\right)f(r)\,dr\right|dp$$

$$M \leq \frac{1}{h}|J_m|\int_{I_n}|f(r)|\,dr \leq \frac{|I_n|\,|J_n|}{h}M$$

donde $|I_n| \cdot |J_n| \geq h$, e portanto

$$(5) \qquad \varepsilon\delta \geq h$$

ε e δ são êrros absolutos que não caem em nenhuma das categorias vulgarmente consideradas em Cálculo das Probabilidades.

Uma generalização interessante dêste resultado seria considerar uma decomposição dos espectros em conjuntos mensuráveis-L, disjuntos, e estabelecer uma relação análoga a (5) para os limites superiores das medidas dos conjuntos considerados em cada espectro. Um processo de abordar a questão é considerar, associados a Q e P, os peradores $\Phi(Q) = \sum \lambda''_n \mathcal{E}(A_n)$, $\Psi(P) = \sum \mu''_m \mathcal{F}(B_m)$ onde $\{A_n\}$ e $\{B_m\}$ são as rêdes de conjuntos mensuráveis consideradas; $\lambda''_n \in A_n$ e $\mu''_m \in B_m$; $\mathcal{E}(A_n)$ e $\mathcal{F}(B_m)$ são os operadores de projecção que generalizam $E(I_n)$ e $F(J_m)$ que se encontram definidos, por exemplo, em [7].

Um outro problema a resolver seria a determinação duma função própria comum (no caso de ser $\varepsilon\delta \geq h$), problema que se reduz à resolução da equação integral (4).

BIBLIOGRAFIA

[1]. W. Heisenberg: *ZS. f. Phys.*, 43, 172 (1927).

[2]. W. Pauli: *Handbuch der Physik*, k. 2.

[3]. W. Heisenberg: *Les principes physiques de la Théorie Quantique.*

[4]. J. Frenkel: *Wave mechanics, elementary Theory.*

[5]. R. Courant und D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik*, pag. 85.

[6]. J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.*

[7]. R. L. Gomes: *Sur une généralisation de l'operateur de projection* E(I), Port. Phys. Vol. I, Fasc. 1.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

FÍSICA TEÓRICA

O EFEITO COMPTON

por **A. Gibert** (bolseiro do I. A. C. em Zürich)

A publicação das curtas notas que seguem, num periódico como a «Gazeta de Matemática», tem dois fins ambiciosos: o mais modesto é dar aos curiosos uma idéia do que é o efeito Compton, que figura na Física como um dos fenómenos mais demonstrativos da natureza corpuscular da radiação e como um exemplo nítido da insuficiência das teorias clássicas; o outro é fornecer aos estudiosos um tema que os ponha imediatamente em contacto com um dos ramos mais importantes (e, creio eu, menos conhecidos, ou antes, menos cultivados, entre nós) das Matemáticas aplicadas: as teorias clássica e quântica da difusão. Esta finalidade explicará a inclusão de alguma bibliografia que, de outro modo, não teria aqui cabimento. Nela se encontrarão aliás as principais fontes do que aqui se transcreve sem a menor pretensão de originalidade. Aos estudiosos que queiram consultar algumas das obras que citamos, recomendamos que recorram, para isso, em particular, à Biblioteca Geral e ao Laboratório de Física da Faculdade de Ciências, em Lisboa, e ao Centro dos Estudos de Matemática, no Porto.

O estabelecimento de certos resultados, que damos sem demonstração, poderá ser exercício útil para principiantes. Sempre que assim nos pareceu, assinalámos tal facto com um asterisco.

1. Estudo fenomenológico do efeito Compton. O efeito descoberto pelo sábio americano A. H. Compton, em 1923 (e que lhe valeu, em 1927, o prémio Nobel da Física) está em íntima relação com o fenómeno da difusão da luz, conhecido desde tempos remotos e cuja teoria foi feita em fins do século XIX. Foi então que Lord Rayleigh explicou a cor azul do céu assim como o aspecto encarniçado que o sol apresenta no nascente e no poente, mostrando que a intensidade da luz difusa é inversamente proporcional à quarta potência do comprimento de onda da luz incidente. (Phil. Mag. (4), 41, 107 e 447, 1871; (5), 47, 375, 1899). O fenómeno da difusão da luz foi interpretado por Tyndall em 1868 (Proc. Roy. Soc. 17, 317, 1868) e pode, em primeira análise, ser atribuído à difracção sofrida pela luz ao encontrar objectos tão pequenos como as moléculas dum gás.

O resultado mais importante da primeira fase da teoria foi obtido por J. J. Thompson ao estabelecer a fórmula

$$I \approx \frac{1+\cos^2\Phi}{2} \quad (\approx,\ \text{proporcional})$$

em que I é a intensidade da luz difusa na direcção que faz o ângulo Φ com a direcção da luz incidente. Desta fórmula resulta, em particular, que a intensidade da luz difusa é máxima na direcção da luz incidente e é igual nos dois sentidos desta direcção.

Um outro importante resultado, também estabelecido pela teoria clássica (dum modo que indicaremos adiante), é o de que a frequência da luz difusa é igual à da luz incidente.

Em 1923, Compton descobriu justamente o contrário (Phys. Rev., 21, 483, 1923) estudando a difusão de raios X monocromáticos (risca $K\alpha$ do molibdénio); verificou que a frequência da radiação difusa era menor que a da radiação incidente (difusão não coerente), ou, o que é o mesmo, que o comprimento de onda *aumenta* com a difusão (V. M. de Broglie e Dauvilliers, Comptes Rendus, vol. 178 e 179).

Imediatamente após a descoberta de Compton, verificou-se que (de acordo com uma hipótese do próprio Compton) a difusão não coerente era acompanhada de emissão de electrões (W. Bothe e H. Geiger, Zeits. f. Phys., 32, 639, 1925 e C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc., 104, 1, 1923), chamados *electrões de recuo*, pelo átomo difusor.

A variação do comprimento de onda á dada por $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\Phi)$ e o seu valor máximo, $2h/mc$, é da ordem de 0,048 Å. Se se pensar que os comprimentos de onda da luz visível ou do ultraviolete são da ordem de alguns milhares de Å, compreender-se-á que não teria sido fácil pôr este fenómeno em evidência com tais radiações. No entanto, no caso das radiações moles, a razão é outra e mais forte (o efeito não é energèticamente possível).

Como se verá adiante, a teoria clássica é impotente para explicar este efeito. Pelo contrário, nas mãos do próprio Compton, a teoria quântica de Planck-Einstein teve ao explicá-lo um sucesso que foi um dos motivos determinantes da vitória da hipótese da natureza corpuscular da luz.

Os refinamentos sucessivos da teoria do efeito Compton constituem um significativo exemplo das possibilidades das formas mais avançadas da Mecânica Ondulatória.

Do ponto de vista qualitativo, a variação de frequência explica-se imediatamente da seguinte maneira: se a difusão resulta do choque dum fotão com um electrão, este sofre um recuo no qual levará parte da energia do fotão; a energia deste diminui e, portanto, de acordo com a experiência, o comprimento de onda aumenta.

2. Teoria clássica de difusão. O fundamento desta teoria reside na seguinte hipótese: os electrões dos átomos podem funcionar como osciladores harmónicos, de tal modo que quando sobre eles incide uma radiação (ou onda) eles entram em vibração forçada que, como se sabe, terá a frequência da radiação que a provoca. Por outro lado, um tal oscilador constitui um dipolo eléctrico de momento variável e emite pois uma radiação electromagnética cuja frequência é a da sua vibração. Em resumo, segundo a teoria clássica, a difusão é *coerente*, isto é, a luz difusa tem a frequência da luz incidente.

Pretendemos agora calcular a intensidade da luz difusa numa certa direcção. Pode fazer-se um cálculo elementar da seguinte maneira: admitamos que o electrão difusor é um oscilador isótropo, isto é, com uma equação de movimento $\ddot{x}=-4\pi^2\nu_0^2 x$ em que ν_0 é independente de x. Suponhamos agora que este oscilador entra em oscilação forçada sob a acção duma onda electromagnética plana monocromática polarizada rectilineamente, isto é, de equações

$$\vec{E}=\vec{E}_x=E_0\cdot e^{i\cdot 2\pi\nu t} \quad \text{e} \quad \vec{H}=\vec{H}_y=H_0\cdot e^{i\cdot 2\pi\nu t}.$$

Pode então tomar-se para equação do movimento forçado do oscilador $\ddot{x}=-4\pi^2\nu_0^2 x-\dfrac{e}{m_0}E_0\cdot e^{i\cdot 2\pi\nu t}$ cuja solução é $x=-\dfrac{eE_0}{4\pi^2 m_0(\nu_0^2-\nu^2)}\cdot e^{i\cdot 2\pi\nu t}$, como é fácil de ver.*

O caso $\nu=\nu_0$ (catástrofe de ressonância) põe em evidência o carácter aproximado da fórmula deduzida. De facto, ao escrever a equação do movimento do oscilador supôs-se, contràriamente à realidade, que não havia amortecimento (V.: A. H. Compton e S. K. Allison, X-rays in theory and experiment, p. 195; Londres; 1935). Estaremos pois limitados a casos em que $\nu\neq\nu_0$.

Por outro lado (V. p. e.: M. Born, Optik, p. 422; Berlin, 1933) a energia radiada por um dipolo de momento $\vec{P}$ numa direcção fazendo um ângulo θ com a do dipolo é* $\mathcal{E}_r=\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{c^3 r^2}(\ddot{P})^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta$. Integrando sobre a esfera tem-se a energia total*

$\mathcal{E}=\displaystyle\iint\mathcal{E}_r\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi=\dfrac{2}{3c^3}\cdot(\ddot{P})^2$. No nosso caso, como $P=e\cdot x$ e $\ddot{x}=\dfrac{eE_0\nu^2}{m_0(\nu_0^2-\nu^2)}\cdot e^{i\cdot 2\pi\nu t}$, tem-se

$$\mathcal{E}=\frac{2e^2}{3c^3}(\ddot{x})^2=\frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{e^2\cdot E_0^2\cdot\nu^4}{m_0^2(\nu_0^2-\nu^2)^2} \text{ ou seja}$$

$$\mathcal{E}=\frac{2e^4}{3c^3}\cdot\frac{E_0^2}{m_0^2}\cdot\frac{\nu^4}{(\nu_0^2-\nu^2)^2}. \tag{1}$$

Por outro lado podemos escrever

$$\mathcal{E}_r=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{c^3 r^2}\cdot\frac{e^4\cdot E_0^2\cdot\nu^4}{m_0^2(\nu_0^2-\nu^2)^2}\cdot\operatorname{sen}^2\theta$$

e, se notarmos que $\dfrac{E_0^2\cdot c}{4\pi}$ representa a intensidade incidente I_0, poderemos escrever

$$\mathcal{E}_r=\frac{e^4}{c^4 r^2 m_0^2}\frac{\nu^4}{(\nu_0^2-\nu^2)^2}\cdot I_0\cdot\operatorname{sen}^2\theta. \tag{2}$$

Note-se agora que no caso de se ter $\nu<<\nu_0$, a fórmula (1) escreve-se $\mathcal{E}=\dfrac{2e^4}{3c^3}\cdot\dfrac{E_0^2}{m_0^2}\cdot\dfrac{1}{\nu^4}$ e não é senão a fórmula em λ^4 de Lord Rayleigh. No caso oposto de ser $\nu>>\nu_0$ a fórmula (2) escreve-se

$$\mathcal{E}_r=\frac{e^4}{c^4 r^2 m_0^2}\cdot I_0\cdot\operatorname{sen}^2\theta$$

a qual mostra que a intensidade da radiação difusa é independente da freqüência e como ela depende do ângulo θ. É a fórmula bem conhecida de Thompson (V. p. e.: J. J. Thompson, Conduction of electricity trough gases, p. 325; 2.ª ed., Cambridge).

Concluindo, vê-se que, no caso extremo dos pequenos comprimentos de onda (dos raios X, nomeadamente), a teoria clássica conduz à formula de Thompson que toma a forma $I=\dfrac{e^4}{m_0^2 c^4 r^2}\cdot I_0\cdot\dfrac{1+\cos^2\theta}{2}$ quando se considera uma onda incidente de polarização qualquer.

Era este o resultado fundamental da teoria clássica a que queríamos chegar. A este respeito poderão ainda consultar-se com vantagem, além das já citadas, as seguintes obras: L. de Broglie, Une nouvelle théorie de la lumière, p. 35, Vol. II, Paris, 1942; A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, p. 645, Vol. I., 5.ª ed., Brauschweig, 1931; J. C. Slater e N. H. Franck Introduction to theoretical physics, p. 294, I. S. P., 1933; M. Born, 1. c. p. 371; Compton e Allison, 1. c. p. 117.

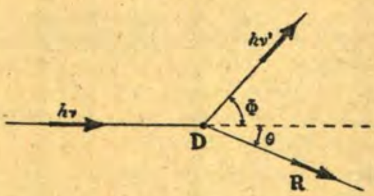
Na interpretação clássica da difusão dos raios X, cedo apareceu uma discrepância difícil de explicar: para frequências da radiação incidente muito elevadas, o cálculo dava para a intensidade da radiação difusa um valor maior do que na realidade se observava (V. C. G. Barkla e M. P. White, Phil. Mag., 34, 275, 1917; G. A. Schott, Proc. Roy. Soc., 96, 395, 1920). O próprio Compton (Phys. Rev. 14, 20, 1919) conseguiu no entanto explicar esta anomalia admitindo para o electrão um raio apreciável, da ordem do comprimento de onda dos raios gama duros, mais precisamente, da ordem de $h/mc = 0{,}024$ Å.

Como diz o próprio Compton: «...led physicists to class scattering (difusão) with interference and refraction as being completely explicable according to our classical theories of electron and electromagnetic waves Then appeared a new set of scattering phenomena — the change of wave lenght of scattered X-rays, recoil electrons associated with scattered rays, etc, wich could be interpreted only on the assumption that X-rays are corpuscular in nature».

Estes corpúsculos concebidos por Einstein, que lhes atribuíu uma energia $h\nu$, inspirando-se na hipótese dos quanta de Planck, chamam-se fotões. A sua quantidade de movimento é $h\nu/c$.

3. Teoria quântica elementar do efeito Compton.

a) *Teoria não relativista.* A figura junta, tantas



vezes repetida, demonstra claramente como se concebe o fenómeno da difusão dum fotão de energia $h\nu$ por um electrão difusor em D. O fotão difuso segue com a energia $h\nu'$ numa direcção que faz ângulo Φ com a de incidência e o electrão difusor desloca-se numa direcção fazendo o ângulo θ com a do fotão incidente. É o electrão *de recuo* R. Supondo que a sua velocidade v é pequena comparada à da luz $v << c$, a sua energia cinética e a sua quantidade de movimento, respectivamente, são dadas por $mv^2/2$ e mv. Admitindo que o novo fenómeno não põe em cheque os princípios da conservação da energia e da quantidade de movimento, deverá ter-se

$$h\nu = h\nu' + \frac{mv^2}{2} \qquad (C.E.)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c}\cdot\cos\Phi + mv\cos\theta \\ \frac{h\nu'}{c}\cdot\operatorname{sen}\Phi &= -mv\cdot\operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned}\right\} \quad (C.Q.-M.)$$

Podemos resolver este sistema em ordem às três incógnitas $\Delta\nu = \nu - \nu'$, v, e θ para cada ângulo difusor Φ. Obtém-se assim fàcilmente*

$$\Delta\nu = \frac{h}{mc^2}\cdot\nu^2\,(1-\cos\Phi)$$

desprezando potências de $\Delta\nu = \nu - \nu'$ de grau superior a 1 e $\Delta\nu$ em presença de ν. Notando que $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ e fazendo $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ vem a fórmula já clássica

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\,(1-\cos\Phi)\,.$$

Desta conclui-se imediatamente que, no efeito Compton, o aumento de comprimento de onda não depende da radiação incidente nem do difusor; cresce com o ângulo de difusão Φ, sendo máximo para $\Phi = 180°$.

b) *Teoria relativista.* Verifica-se experimentalmente que a velocidade do electrão de recuo, v, é suficientemente grande (em particular para raios muito duros) para que não seja válida a aproximação newtoniana $v << c$. Devemos então tomar, para o electrão, as expressões relativistas da energia cinética e da quantidade de movimento. As equações de conservação escrevem-se agora:

$$h\nu = h\nu' + mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c}\cos\Phi + \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta \\ \frac{h\nu'}{c}\operatorname{sen}\Phi &= -\frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned}\right.$$

Dum modo análogo ao anterior estabelece-se ainda a equação clássica* $\Delta\lambda = \dfrac{h}{mc}(1-\cos\Phi)$.

A energia cinética do electrão de recuo é dada por*

$$E = h\nu\,\frac{\alpha\,(1-\cos\Phi)}{1+\alpha\,(1-\cos\Phi)} \quad \text{com } \alpha = \frac{h\nu}{mc^2}\,.$$

Também é fácil estabelecer a expressão* $\operatorname{cotg}\Phi/2 = -(\alpha+1)\operatorname{tg}\theta$ que mostra que para cada electrão de recuo na direcção θ corresponde uma direcção de difusão bem determinada (por meio de Φ), conclusão esta em completo desacordo com a teoria clássica segundo a qual a radiação difusa deve ser emitida em todas as direcções.

Note-se que esta teoria ainda não pode ser satisfatória, pois seria indispensável, para isso, que ela pudesse dar o valor correcto da intensidade difusa na direcção Φ. Ora isto não é possível, porque a teoria primitiva de Einstein-Planck não dá indicação alguma sobre a probabilidade de difusão numa certa direcção (isto é, da intensidade nessa direcção).

Veja-se ainda (mas com atenção) o livro de E. Bloch, L'Ancienne et la nouvelle théorie des quanta, Paris, 1930.

4. Teoria do efeito Compton em mecânica ondulatória de De Broglie-Schrödinger. (V. E. Schrödinger, Ann. der Phys., 82, 257, 1927). Sabe-se que, segundo a concepção de L. De Broglie, um electrão é representado por um trem de ondas Ψ de comprimento de onda $\Lambda = \frac{h}{mv}$ (V. p. e.: L. De Broglie, La Mécanique Ondulatoire des Systèmes, Paris, 1939). Se supusermos que o electrão difusor, em vez de estar em repouso, está animado da velocidade $v/2$ na mesma direcção e em sentido oposto ao do movimento do electrão de recuo, este também terá, no novo sistema de coordenadas (coordenadas normais), a velocidade $v/2$ e, portanto, a sua onda associada terá o mesmo comprimento de onda. Os dois trens de onda vão assim formar ondas estacionárias e a distância entre dois nós consecutivos será $\delta = \frac{1}{2}\Lambda = \frac{1}{2}\frac{h}{mv/2} = \frac{h}{mv}\cdot$ Em relação ao fotão incidente, tais ondas funcionarão como uma rede de difracção de intervalo δ e, portanto, a radiação incidente (de comprimento de onda λ) será difractada segundo a lei de Bragg (V. p. e.: G. Bruhat, Cours d'Optique, p. 592, 2.ª ed., Paris, 1935), isto é, numa direcção definida pela equação

$$n\lambda = 2\delta \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}\cdot \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

Tem-se então

$$\lambda = \frac{2h}{mv}\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2} \qquad (n=1).$$

Voltando às coordenadas fixas, tudo se passa como se a nossa rede de difracção estivesse animada de velocidade $v/2$ ou como se a luz fosse emitida por uma fonte virtual animada de velocidade v e deslocando-se na direcção do electrão de recuo. Então, segundo o princípio de Döppler-Fizeau, se o comprimento de onda da radiação emitida pela fonte em repouso era λ, a variação do comprimento de onda em consequência do deslocamento da fonte será

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v}{c}\cos(90^\circ + \Phi/2)$$

pois é fácil de ver o ângulo da velocidade da fonte com a direcção de observação é $90^\circ + \Phi/2$. Tem-se então $\Delta\lambda = \frac{\lambda v}{c}\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}\cdot$ Por outro lado, a equação de conservação da quantidade de movimento é, evidentemente, neste problema,

$$-\frac{mv}{2} + \frac{h\nu}{c}\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2} = \frac{mv}{2} - \frac{h\nu}{c}\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}\cdot$$

(Nas coordenadas normais o fotão tem a mesma quantidade de movimento antes e depois do choque). Dando à equação de conservação a forma $\lambda v = 2\frac{h\nu}{m}\operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}$ tem-se $\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}\operatorname{sen}^2\frac{\Phi}{2}$, isto é,

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\Phi)$$

ou seja, de novo, a fórmula clássica (V. Compton e Allison, 1. c. p. 232).

5. Conclusão. Já vimos como, excepção feita do fenómeno descoberto por Compton, a teoria clássica dava conta do fenómeno da difusão, evidenciando-se simultâneamente os limites da sua aplicabilidade. Por outro lado, a Mecânica Quântica não pretende ser apenas um artifício capaz de explicar fenómenos isolados, mas sim uma teoria, coerente e geral, que interprete, não só aquilo que a mecânica clássica deixa por explicar mas ainda tudo o que essa teoria já conseguiu esclarecer. Como exemplo, que se pense na explicação quântica do efeito Döppler... Um estudo da teoria quântica da difusão coerente aparece pois como complemento indispensável do que precede. Esse estudo poderá ser feito com grande proveito no recente livro de L. de Broglie (que já citámos), Vol. II, Cap. VIII, do ponto de vista da nova mecânica ondulatória do fotão, de que o autor tem sido o principal criador, assim como na obra ainda mais recente de G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder (Wien, 1943), págs. 131, 183.

O tratamento mais avançado da teoria do efeito Compton deve-se a O. Klein e Y. Nishina (Zeits. f. Phys., 52, 853, 1929), do ponto de vista da teoria ondulatoria relativista do electrão de Dirac, e poderá ser lido no belo tratado de Heitler, Quantum theory of radiation, Oxford, 1936 (16).

Zürich, 27 de Setembro de 1943

ECONOMETRIA

SOBRE LAS TRANSFORMACIONES QUE CONSERVAN LA ELASTICIDAD

por ***J. Gallego Diaz*** (Universidad de Madrid)

Tiene importancia en Econometria determinar, si existen, aquellas transformaciones que conservan la elasticidad. La cuestion, que no hemos visto estudiada en sitio alguno, se resuelve fácilmente en esta breve nota.

Sea la transformacion buscada la: $\left\{ \begin{array}{l} u=u\,(x\,,y) \\ v=v\,(x\,,y)\,. \end{array} \right.$

Podemos suponer que $Lu=\alpha\,(x\,,y)$ $Lv=\beta\,(x\,,y)$ y diferenciando: $dLu=\alpha'_x\,dx+\alpha'_y\,dy$; $dLv=\beta'_x\,dx+\beta'_y\,dy$.

Pero, como se sabe, $E_u\,(v)=\dfrac{d\,(Lv)}{d\,(Lu)}=\dfrac{\beta'_x\,dx+\beta'_y\,dx}{\alpha'_x\,dx+\alpha'_y\,dy}$.

Y como, por hipótesis, se ha de verificar: $E_u\,(v)=$ $=E_x\,(y)$ se podra escribir:

$$\frac{\beta'_x\,dx+\beta'_y\,dy}{\alpha'_x\,dx+\alpha'_y\,dy}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}$$

o sea:

$$x\alpha'_y\,(y')^2+y'\,(x\alpha'_x-y\beta'_y)-y\beta'_x=0$$

y como debe ser idénticamente nula esta ecuacion ello implica que: $\alpha'_y=0$; $\beta'_x=0$; $x\alpha'_x=y\beta'_y$. Las dos primeras ecuaciones nos dicen que: $\alpha=\alpha\,(x)$ $\beta=\beta\,(y)$ y la tercera nos indica que: $x\dfrac{d\alpha}{dx}=y\dfrac{d\beta}{dy}=m$; es decir: $\alpha=mLx+K_1$, $\beta=mLy+K_2$ y por lo tanto: $Lu=mLx+LC$, $Lv=mLy+LC_1$ y, finalmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u=Cx^m \\ v=C_1\,y^m\,. \end{array} \right.$$

En donde $C\,,C_1$ y m son parámetros cualesquiera. Nuestro resultado tiene doble interes ya que, de un lado permitirá simplificar el cálculo de la elasticidad de ciertas funciones reduciendolo al de otras mas sencillas, y de otro permitirá rebajar el grado a las ecuaciones diferenciales en donde intervengan elasticidades, de acuerdo con la teoria de Sophus Lie sobre los grupos continuos de transformaciones.

A dicho resultado, tambien se puede llegar, más elegantemente, recordando que las transformaciones pedidas seran las que conserven las direcciones de las tangentes en el plano u_1-v_1 definido por la anamorfosis $u_1=Lx$, $v_1=Ly$; ya que la elasticidad de la curva $y=f\,(x)$ en un punto no es otra cosa que la inclinacion de la tangente en el punto correspondiente de la curva transformada $v_1=\varphi\,(u_1)$.

Es decir, que tales transformaciones, en el plano u_1-v_1 seran el producto de homotecias por translaciones; así: $\left. \begin{array}{l} v_2=Kv_1+a \\ u_2=Ku_1+b \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} v_2=KLy+LC \\ u_2=KLx+LC_1\,. \end{array}$

Pero $\left. \begin{array}{l} v_2=LY \\ u_2=LX \end{array} \right\}$ luego resulta: $\left. \begin{array}{l} X=C_1\,x^K \\ Y=C\;\;y^K \end{array} \right\}$.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

O PROBLEMA DO ENSINO EM PORTUGAL *

por ***Ruy Luís Gomes***

Quando se compara uma Escola Superior como a Politécnica de Zürich, a que o nosso colega Hugo Ribeiro dedicou um artigo tão bem documentado no n.º 26 desta mesma Revista, com qualquer das nossas Universidades, em especial no aspecto que nos toca directamente — *o do ensino da Matemática* — ressaltam logo como principais diferenças a favor da primeira, as seguintes: 1) *uma longa e notável tradição matemática*; 2) *um corpo docente constituído exclusivamente por investigadores, alguns dos quais de primeira plana*; 3) *uma boa organização do ensino*.

Mas a própria organização do ensino, largamente analisada no artigo acima referido, se aparece assim *natural* e *eficiente* é porque gira toda à volta de um núcleo de professores que são notáveis investigadores e vivem completamente absorvidos pelos problemas relacionados com os seus próprios trabalhos e a formação dos seus discípulos.

O professor é assim e antes de mais nada um profissional de elevada categoria, quere dizer, um verdadeiro e activo investigador, e como professor, isto é, como membro do corpo docente de uma Universidade, sente e coloca os problemas da sua Escola acima de tudo!

* Para melhor compreensão dêste artigo leia-se *Sôbre a índole do ensino da Matemática em Zürich* de Hugo B. Ribeiro em *Gazeta de Matemática* n.º 26.

Uma atitude frouxa, vacilante, de permanente desconfiança e sistemático cepticismo, é incompatível com quem se propõe educar a juventude, por sua natureza vibrante e decidida!

Mas se as coisas se apresentam assim com aquelas características num país e numa cidade que tem as suas tradições no campo da Matemática ligadas a sábios da categoria de Dedekind, Schröder, Zermelo, Hurwitz, Einstein, H. Weyl, von Neumann, W. Pauli, etc., e onde actualmente ensinam, entre tantos outros, Hopf, antigo discípulo de Hilbert, e Bernays, seu assistente durante cêrca de vinte anos, na célebre Escola de Göttingen onde se formaram tantas gerações de grandes matemáticos da Europa e da América, se isso é assim, repetimos, num meio tão diferenciado como êsse, ainda com mais forte razão se compreende a importância decisiva de um corpo docente com a mais elevada preparação profissional, num país como o nosso que não se pode apoiar em tradições científicas de suficiente continuïdade, como se vê claramente através dos casos *isolados* de um Pedro Nunes, um José Anastácio da Cunha, um Gomes Teixeira.

Infelizmente para nós, nunca por aqui passaram para nos ensinar a trabalhar em Matemática nomes que de longe se comparem àqueles que citámos para Zürich, e alguns investigadores que possuímos fracassaram quási por completo como Mestres: não criaram discípulos nem viveram com os seus alunos, nos seus cursos, os grandes problemas do seu tempo!

Para quebrar esta tradição negativa e vencer com a maior brevidade possível o atraso em que nos encontramos, não me parece que se possa encontrar outro meio que não seja o de partir dos melhores valores da nossa juventude e dar-lhes tôdas as possibilidades de fazerem a sua preparação de base e especializada, por estágios demorados, em verdadeiros Centros de Trabalho da Europa e da América.

Trataríamos assim de formar em cada domínio fundamental da Ciência e da Técnica um núcleo de profissionais que começariam, ainda nos Centros de trabalho para onde tinham ido como bolseiros, e depois de uma aprendizagem suficiente, a pôr à prova as suas qualidades de investigador e seria êsse o primeiro elemento a considerar para a sua selecção e futura recuperação pelas Universidades.

Integrados posteriormente nas nossas Escolas, quando terminados os seus estágios no estrangeiro, e sempre a título provisório e com base no seu «curriculum» exclusivamente, seria a continuação da sua actividade de investigadores nessas mesmas Escolas, o seu interêsse pelos problemas da Universidade e a capacidade de criar discípulos, que decidiriam, por escôlha de um júri de especialistas e num plano nacional, da sua nomeação como professor desta ou daquela Faculdade, conforme o movimento de vagas.

No sentido de precisar melhor o meu ponto de vista, que pretende ser uma contribuïção pessoal para a transformação das actuais condições de trabalho e de ambiente das nossas Universidades, nomeadamente no aspecto crucial da preparação dos seus quadros, vou reduzir as considerações anteriores, um tanto dispersas, aos seus pontos principais, que em si mesmos encerram uma análise do problema e a maneira de o enfrentar.

I. O nosso país não tem tradições matemáticas de suficiente continuïdade;

II. O defeito mais saliente das nossas Universidades está em não disporem dum numeroso quadro de investigadores à volta dos quais se possam criar Centros de Estudo onde a juventude realize a sua preparação — de base e especializada — em condições de eficiência e continuïdade;

III. O professor universitário tem de ser antes de mais nada um investigador, e a seguir, como condição complementar, há-de demonstrar que é capaz de criar discípulos. Por outras palavras: o recrutamento do pessoal docente de uma Universidade há-de fazer-se exclusivamente na massa dos investigadores; mas um investigador só se afirma como professor na medida em que forma discípulos;

IV. O professor do ensino secundário deve ter uma preparação científica tão elevada como o futuro elemento do corpo docente de uma Universidade.

Recrutado igualmente na massa dos investigadores tem de manter bem viva através da sua profissão a mesma atitude activa, o mesmo espírito de iniciativa, o mesmo sentido das responsabilidades que só nos é dado em todo o seu valor no trabalho de investigação. É por aí, pois, que todos os professores — quer do ensino superior quer do ensino secundário — devem começar; e se aos primeiros claramente se exige que permaneçam sempre investigadores por profissão, a todos cumpre serem investigadores por atitude perante a vida.

Estas conclusões que giram tôdas em tôrno do mesmo ponto fundamental — um quadro numeroso de investigadores — mostram-nos igualmente que não há maneira de enfrentar o problema do ensino em Portugal em condições seguras que não seja a de dar aos melhores elementos da juventude das nossas Universidades a possibilidade de refazerem ou completarem a sua formação científica e técnica em centros de trabalho da Europa e da América. A seguir, a sua integração nas próprias Universidades, em subordinação ao interêsse nacional, fará a própria transformação do meio em que vão trabalhar e, então, os estudiosos educados nessas Universidades assim actualizadas permitir-nos-ão remodelar todo o nosso ensino superior, secundário e primário, nos seus fundamentos e na sua estrutura

Temos portanto diante de nós um problema da maior gravidade para o futuro do nosso povo e apontamos uma solução que infelizmente se apresenta demorada, embora nos apareça como a única eficaz.

Urge, pois, atacar o problema à escala nacional, com aquêle mesmo espírito de larga visão e agudo sentido das realidades do nosso tempo que, guardadas as devidas proporções, ditaram ao falecido Presidente dos Estados Unidos estas admiráveis palavras:

«New frontiers of the mind are before us, and if they are pioneered with the same vision, boldness, and drive with wich we have waged this war we can create a fuller and more fruitful employment and a fuller and more fruitful life».

MOVIMENTO MATEMÁTICO FRANCÊS

A Gazeta de Matemática *tem o prazer de anunciar aos seus leitores o início neste número duma secção de informação do movimento matemático em França, assegurado pelo novo periódico matemático francês* Intermédiaire des Recherches Mathématiques *com quem manteremos colaboração intensa para a extensão das relações culturais matemáticas entre os dois Países. Assim faremos sabedores os leitores das várias manifestações da actividade matemática francesa contemporânea cujo ressurgimento, após a ocupação, se acentua constantemente duma forma irrefutável. As informações recebidas serão publicadas, quando não resumidas, em língua francesa.*

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Travaux de la section 1: *Mathématiques* — 70 congressistes ont participé à ces travaux qui ont eu lieu à l'Institut Henri Poincaré, Amphithéâtre Hermite, 11, rue Pierre Curie, Paris, V.

Président: Mr. Arnaud Denjoy — Membre de l'Institut;

Présidents d'Honneur: MM. Emile Borel, Elie Cartan, Jacques Hadamard, Paul Montel;

Dèlégués: MM. P. Dedron, T. Lemoyne, G. Valiron;

Secrétaire: Mr. P. Belgodère.

Lundi, 22 Octobre (9h. à 12h.) Présidence de Mr. Arnaud Denjoy.

Conférence: (1) Arnaud Denjoy: «Aperçu général de l'activité mathématique française sous l'occupation allemande».

Conférence: (2) Georges Valiron: «Rapport sur les travaux d'*analyse mathématique* publiés en France pendant l'occupation».

Communications: (3) Jacques Hadamard: «Le problème de Dirichlet dans le cas hyperbolique des équations aux dérivées partielles du 2ème ordre».

(4) Arnaud Denjoy: «L'arithmétisation du transfini».

(5) Maurice Janet: «Équations aux dérivées partielles: liens nouveaux avec quelques autres questions.»

Lundi, 22 Octobre (14h. à 17h.) Présidence de Mr. Georges Bouligand.

Communications: (6) E. Doucet: «Sur une représentation de certaines fonctions par des intégrales définies».

(7) Mlle Jacqueline Ferrand: «La représentation conforme».

(8) Gustave Choquet: «La représentation conforme et la topologie».

(9) Hubert Delange: «Fonctions entières et théorèmes taubériens».

(10) Pierre Lelong: «Sur les fonctions entières de deux variables complexes».

(11) François Teissier du Cros: «Une classe de nombres transcendants signalée par Mr. G. Valiron, à propos d'une généralisation du théorème d'Abel».

Mardi, 23 Octobre (9h. à 12h.) Présidence de Mr. Arnaud Denjoy.

Conférence: (12) Albert Chatelet: «*Arithmétique et Algèbre* en France sous l'occupation».

Communications: (13) Jean Dieudonné: «Les déterminants sur un corps non commutatif».

(14) Gaston Benneton: «Arithmétique des quaternions».

(15) Claude Chabauty: «Points entiers des courbes algébriques».

(16) François Chatelet: «Une méthode galoisienne en théorie des nombres».

(17) André Gérardin: «Système multigrade en nombres entiers et problèmes connexes».

(18) M. Krasner: «Généralisations et analogues de la théorie de Galois».

(19) E. Doucet: «Sur une équation admettant pour racines les nombres premiers».

Mardi, 23 Octobre (15 h. à 17 h 30) Présidence de Mr. Ribaud.

Séance commune aux sections de Mathématiques, Mécanique et Physique.

Mercredi, 24 Octobre Présidence de Mr. Bohnslav Hostinsky.

Conférence: (20) Georges Bouligand: «*Géométrie et Topologie* en France pendant l'occupation».

Communications: (21) Jacques Hadamard: «Sur un problème de géométrie élémentaire».

(22) Paul Montel: «Les coniques en géométrie finie et les équations aux différences finies».

(23) Vaclav Hlavaty: «La géométrie différentielle réglée».

(24) Paul Libois: «Axiomatique de la géométrie projective».

(25) Robert Debever: «Sur um problème d'équivalence et son application à la théorie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire».

(26) Gustave Choquet: «Surfaces et corps convexes».

Mercredi, 24 Octobre (15 h. à 17 h. 30) Présidence de Mr. Paul Libois.

Communications: (27) Roger Apéry: Etude topologique du voisinage d'une courbe C d'une surface algébrique S».

(28) T. Lemoyne: (1) «Sur les classes de divers lieux et les ordres de diverses enveloppes de droites dans les systèmes de coniques».

(2) «Sur deux théorèmes de Halphen».

(29) V. Thébault: «Transmutations d'un tétraèdre».

(30) Antoine Appert: «Recherches sur une généralisation des groupes topologiques».

(31) Jean Dieudonné: «Les fonctions continues p-adiques».

(32) Christian Pauc: «Mesures abstraites».

(33) Luc Gauthier: «Contribution au problème de la trisection des fonctions abéliennes hyperelliptiques de genre 2».

Mercredi, 24 Octobre (15 h. à 17 h. 30) Présidence de MM. Fessard et Fréchet.

Séance commune au Calcul des Probabilités et aux Sciences Humaines et Biologiques.

Jeudi, 25 Octobre (9 h. à 12 h.) Présidence de Mr. Arnaud Denjoy.

Conférence: (34) Maurice Fréchet: «*Probabilités et Statistique* en France sous l'occupation».

Communications: (35) Georges Darmois: «Sur les régressions linéaires et paraboliques».

(36) Paul Lévy: «Trois théorèmes sur le mouvement brownien».

(37) M. Dumas: «Sur des lois de probabilité divergente et la fonction de Fischer».

(38) Michel Loève: «Sur les liaisons stochastiques».

(39) M. Krasner: «Certaines propriétés des ensembles ouverts non connexes».

Jeudi, 25 Octobre (15 h. à 16 h.) Présidence de Mr. Paul Lévy.

(40) Jacques Hadamard: «Les mots, la pensée scientifique et le postulat de la raison».

Séance commune aux Mathématiques et aux Sciences Humaines.

Prochain Congrès: Nice (du 9 au 14 Septembre 1946).

SIXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Première notice

A la suite d'une réunion provoquée par MM. de Kármán et Hunsaker, agissant en qualité de secrétaires du cinquème Congrès international de Mécanique appliquée, et compte tenu de la décision prise à Cambridge (Massachussetts) en *1938*, un Comité a été formé pour organiser le sixième Congrès international de Mécanique appliquée qui aura lieu à Paris, du *22* au *29* septembre *1946*.

Les invitations sont faites au nom de: l'Académie des Sciences de l'Institut de France, la Direction des Relations culturelles, le Centre national de la Recherche scientifique, l'Institut de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris, la Société française des Mécaniciens et l'Association technique Maritime et Aéronautique.

Le Congrès aura lieu à la Sorbonne.

Les sections du Congrès seront les suivantes:

I. Structures. Élasticité. Plasticité.

II. Hydro- et Aérodynamique. Hydraulique.

III. Dynamique des solides. Vibrations et son. Frottement et lubrification.

IV. Thermodynamique. Transfert de chaleur. Combustion. Questions théoriques sur l'Énergie nucléaire.

A côté des communications, il sera donné plusieurs conférences générales, sur des sujets à l'ordre du jour, qui seront précisés ultérieurement.

Les auteurs des communications éventuelles sont priées de faire connaître, dès que possible, le titre des travaux qu'ils désirent présenter au Congrès. Comme d'habitude, seuls peuvent être admis des Mémoires d'une haute tenue scientifique, se rapportant au programme du Congrès.

Les auteurs sont priés de faire parvenir au Secrétariat du Congrès le texte de leurs communications (au plus *5000* mots) ou, à défaut, un résumé (moins de *300* mots) avant le *31* juillet *1946*. Il serait souhaitable que les résumés puissent être distribués aux Congressistes, en vue de faciliter les discussions qui doivent suivre les exposés. Le Comité d'Organisation espère pouvoir le faire, mais il serait reconnaissant aux auteurs qui pourraient lui faciliter sa tâche en envoyant ou apportant eux-mêmes des tirages du résumé de leur communication.

Les *Comptes rendus* du Congrès, contenant les Procès-verbaux des délibérations, ainsi que les textes des Conférences générales et des Communications, seront publiés dans le plus court délai après le Congrès. La vente de ces volumes sera réservée, par priorité, aux membres du Congrès qui en auront fait la demande. Les exemplaires en surnombre seront ultérieurement mis dans le commerce, à un tarif majoré.

Des facilités pour le séjour des Congressistes à Paris sont prévues et seront portées en temps utile à la connaissance des intéressés. De même, des excursions et des visites à divers établissements, sites ou monuments, seront organisées comme il a été de coutume dans les Congrès antérieurs.

Les droits d'inscription pour participer aux travaux du Congrès sont fixés à *300* frs. (trois cents francs) payables dès maintenant, et, au plus tard, le jour de l'ouverture du Congrès. Les dames accompagnant les Congressistes sont dispensées des droits d'inscription — sauf dans le cas où elles auraient l'intention de prendre la parole dans les séances, et d'y présenter des communications.

Le Comité français d'Organisation du Congrès est ainsi constitué :

Président : Henri Villat.
Secrétaire général : Maurice Roy.
Membres : Émile Barrillon ; Louis de Broglie ; Albert Caquot ; Paul Dumanois ; Jules Drach ; Frédéric Joliot ; Henri Laugier ; Joseph Pérès ; Ernest Vessiot.

Les congressistes sont priés de bien vouloir faire connaître, dès que possible, leur intention de participer au Congrès, en en avisant le Secrétaire général, et en même temps de fournir une indication sur la section dans laquelle ils désirent présenter une Communication. Ceci en vue de l'envoi des prochaines Notices.

Les correspondances sont à adresser à

M. le Secrétaire général du sixième Congrès international de Mécanique appliquée, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris (Ve).

Les versements éventuels peuvent être adressés sous l'indicatif :

Sixième Congrès international de Mécanique appliquée, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre Curie, Paris (Ve).

Un mode de versement recommandé est le virement au compte de chèques-postaux, Paris, *nº 649* (adresse précédente).

A VINDA A PORTUGAL DO PROF. RENÉ DE POSSEL

Por iniciativa do *Instituto Francês em Portugal* deve chegar a Portugal em Março de 1946 o Professor René de Possel, titular da cadeira de Mecânica Racional na Universidade de Alger e um dos colaboradores do grupo Bourbaki, que tanto se esforçou, antes da guerra, por tornar conhecidos em França as mais modernas correntes do pensamento matemático.

O Prof. René de Possel deve realizar conferências nas nossas três Universidades e entre os assuntos que se propõe tratar, em conferências isoladas ou ciclos de lições, podemos citar :

1. Os axiomas da geometria elementar baseados na teoria dos grupos ;

2. Os princípios matemáticos da Mecânica Clássica ;

3. Alguns problemas da Topologia ;

4. Uma demonstração rápida do teorema geral da representação conforme para os domínios múltiplamente conexos.

5. Teorias modernas da Integração.

Sabemos que deve demorar-se no nosso país cerca de dois meses e só lamentamos que não tenha possibilidade de prolongar mais a sua estadia de maneira que os nossos jóvens estudiosos pudessem assim iniciar sob a sua superior orientação um verdadeiro trabalho de especialização.

A *Gazeta de Matemática* aproveita este ensejo para, em nome dos seus leitores, agradecer ao *Instituto Francês* a bela iniciativa que acaba de tomar, trazendo até nós aquele jóvem investigador.

NOTICIÁRIO SÔBRE O MOVIMENTO CIENTÍFICO NOUTROS PAÍSES

ARGENTINA

Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas

Em Junho de 1945 um numeroso grupo de matemáticos de Buenos Aires e La Plata resolveu promover aquilo a que foi dado o nome de «Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas». O convite, dirigido aos matemáticos de todo o país, foi feito nos seguintes termos:

«Os Directores dos Institutos Matemáticos do país e os professores que subscrevem, tomando em consideração o sentimento ambiente para com a realidade científica argentina que, em virtude da grande perturbação causada pela guerra nas actividades mundiais, se vê perante a necessidade imperiosa de se vigorizar a si mesma e de encarar a sua organização com o fim de se pôr à altura do que as circunstâncias lhe exigem, acordaram na necessidade de realizar as «Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas».

«Durante muitos anos estudiosos distintos das ciências matemáticas actuaram isoladamente no nosso país, tendo êsse isolamento impedido a obtenção do máximo rendimento na actividade em que todos estamos empenhados. Consideramos chegada a hora de superar tal estado de coisas. As novas gerações que se acercam dos nossos Institutos impõem-nos o dever de encarar com clareza êstes problemas e fazer os máximos esforços para consolidar uma união efectiva dos matemáticos da Argentina e para estruturar uma organização que, de futuro, impulsione o progresso da Ciência Matemática.»

«As «Primeiras Jornadas Matemáticas Argentinas» terão lugar em Buenos Aires e La Plata nos dias 27 28 e 29 de Julho de 1945, de acôrdo com o seguinte programa:

1) Trabalhos científicos. Apresentação e discussão.

2) Agrupamento de todos os matemáticos da Argentina e iniciativas respeitantes à organização de grupos de estudo.

3) Preparação dum futuro congresso de Matemáticas, Física e Astronomia.

«Temos o prazer de o convidar a participar nestas Jornadas Matemáticas que, com o auxílio de todos, marcarão uma importante étape na evolução científica do país. Ficaríamos muito agradecidos se V. nos fizesse ás sugestões que lhe sugira a formulação das nossas idéias».

(Traduzido da Revista de la Union Matemática Argentina, Vol XI, N.º 1, 1945)

BRASIL

Foi fundada no Rio de Janeiro uma organização para o desenvolvimento da investigação científica dispondo de um elevado capital, dado pelo Estado e por particulares. Vai publicar uma revista de matemática: *Summa Brasiliensis Mathematica*. Faz parte do comité de Redacção o nosso amigo e colaborador Prof. António Monteiro. Foram convidados para colaboradores permanentes os Profs. Mira Fernandes, Ruy Luís Gomes, Sixto Rios e Hugo B. Ribeiro.

Está em organização uma colecção de monografias matemáticas. Devem ser impressos nesta colecção os trabalhos seguintes: *Integral de Riemann*, por Lélio Gama; *Integral de Stieltjes*, por L. Nachbin; *Funções Analíticas*, por Oliveira Castro; *Séries*, por Lélio Gama; *Teoria dos Ideais*, por Zarisky; *Topologia Geral*, por António Monteiro; e *Espaços de Hilbert*, por Weil.

Temos também o prazer de comunicar aos nossos leitores que a *Gazeta de Matemática* tem a honra de contar como seus colaboradores e correspondentes no Brasil os Profs. Achille Bassi, Leopoldo Nachbin e José Abdellay no Rio de Janeiro, e o Prof. Omar Catunda, em S. Paulo.

ESPANHA

Doutoramento em Ciências Matemáticas

Em 24 de Novembro de 1945 realizaram-se na Universidade de Madrid as provas de doutoramento em Ciências Matemáticas do nosso colaborador Eng. José Gallego Diaz.

Damos a seguir, pela actualidade do assunto e seu interêsse, um resumo da tese intitulada «Sobre las hipótesis que sierven de fundamento a la Economia Matemática».

Um capítulo introdutório é dedicado à elasticidade fazendo-se um estudo sistemático e completo dêste operador e seu inverso e das suas respectivas iterações.

O capítulo seguinte trata da função-índice ofelimidade e com a introdução da métrica da relatividade restrita e a utilização de um espaço de Riemann faz-se o estudo e descrição dos fenómenos económicos apresentando-se o princípio da *mínima acção económica*.

Seguem-se aplicações dêste princípio ao estudo das principais curvas da estática e dinâmica económicas deduzindo o Autor as curvas canónicas (sua designação) de oferta e procura e as curvas históricas da dinâmica económica. Os resultados obtidos permitem o estabelecimento da lei de distribuïção das rendas de Pareto.

A difusão serve de modêlo para o estabelecimento do processo de circulação económica.

Finalmente apresenta-se a aplicação da elasticidade ao estudo das variações cíclicas dos prêços.

A tese pode desenvolver-se sob o ponto de vista axiomático partindo dos seguintes axiomas:

I — O espaço económico é um espaço de Riemann cuja forma quadrática fundamental é

$$ds^2 = \sum \frac{dx_i}{x_i} \cdot \frac{dy_i}{y_i} + \frac{dt^2}{t^2},$$ designando x_i as diversas mercadorias ou bens, y_i os seus respectivos preços e t o tempo.

II — As trajectórias do «homo oeconomicus» no referido espaço são as extremais do integral $\int \Omega\, ds$, representando Ω a ofelimidade, função das variáveis: n mercadorias, seus preços e o tempo.

Julgamos tratar-se da primeira tese de doutoramento sôbre Econometria apresentada na Península Ibérica, pelo que aguardamos com vivo interêsse a sua publicação e felicitamos sinceramente o seu Autor.

Alguns cursos de Matemática em Madrid

Real Academia de Ciências Exactas, Físicas y Naturales. Catedra de Física de la Fundación Conde de Cartagena (1945-46).

Las funciones cuasinaliticas y sus aplicaciones físicas (2.º Curso) por R. San Juan

Las series divergentes de la Mecánica celeste: investigaciones de Poincaré; su inclusión en la teoria actual de las funciones cuasianalíticas.

Las series de Cauchy y las integrales de Fresnel de la Teoria de la difracción como aplicación de las funciones cuasianalíticas.

La transformación de Laplace y sus aplicaciones.

Teoremas fundamentales de Carleman.

La teoria de los momentos de Stieltjes.

Investigaciones de Riesz sobre el problema de los momentos. Aplicaciones aerodinámicas de los momentos a la ecuación integro-diferencial de Prandl del ala de envergadura finita.

Analisis Funcional — Cátedra de la Fundación Conde de Cartagena, de la Real Academia de Ciências (1945-46) por Sixto Rios

Introducción histórica. Teoria de Volterra: Propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue-Stieltjes. Espacios topológicos y espacios métricos. Operaciones en los espacios métricos. Espacios vectoriales. Espacios de Banach. Funcionales lineales en los espacios (B). Extensión de las funcionales lineales: el problema de la medida. Forma general de las funcionales lineales en diversos tipos de espacios. El problema de los momentos: Operaciones lineales. Métodos de sumación de series divergentes. Operaciones totalmente continuas y asociadas. Teoria de Riesz de las ecuaciones funcionales lineales. Ecuaciones integrales de Fredholm y Volterra. Operaciones no lineales. Polinomios. Operaciones analíticas. — Diferenciación e integración.

El Prof. T. R. Bachillar explica en el Instituto Jorge Juan un curso sobre «Grupos Topológicos».

El Prof. Sixto Cámara explica en la Universidad Central un curso sobre «Matrices».

El Prof. T. R. Bachiller explicará a partir de marzo en la Universidad Central un curso sobre «La superficie de Riemann».

PORTUGAL

Doutoramentos na Faculdade de Ciências de Lisboa

Na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, realizaram-se em Dezembro de 1945 e em Janeiro e Fevereiro de 1946, doutoramentos em Ciências Físico-Químicas, em Ciências Geológicas e em Ciências Biológicas.

Prestaram provas para a obtenção do grau de doutor em Ciências Físico-Químicas, os assistentes de Física e Química, respectivamente, Lídia Salgueiro e Marieta da Silveira; em Ciências Geológicas o assistente de Mineralogia Rodrigo G. Boto e em Ciências Biológicas os assistentes de Botânica José Pinto Lopes e Carlos Tavares.

As provas da assistente Lídia Salgueiro realizaram-se nos dias 19 e 21 de Dezembro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «medidas de potências eléctricas, sistemas monofásicos e trifásicos» e «propagação do som nos meios limitados: ondas estacionárias e tubos sonoros», respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Mário Silva e Prof. Doutor Cyrillo Soares; no segundo dia foi descutida a tese intitulada «estudo dos derivados de vida longa do radão», pelos argüentes Prof. Doutor Cyrillo Soares e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção.

As provas da assistente Marieta da Silveira realizaram-se nos dias 29 de Jaueiro e 1 de Fevereiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «polarimetria» e «radicais: seu estudo e aproveitamento», respectivamente pelos argüentos Prof. Doutor Cyrillo Soares e Prof. Doutor Pereira Forjaz; no segundo dia foi discutida pelos mesmos argüentes, a tese intitulada: «Contribuição para o estudo das radiações do U. X. complexo».

As provas do assistente Rodrigo G. Boto, efectuaram-se nos dias 20 e 22 de Dezembro: no primeiro dia foram discutidos os pontos «Metamorfismo e Rochas metamórficas» e «Jazigos minerais do tipo sedimentar» pelos argüentes Prof. Doutor T. Custódio Morais e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção; no segundo dia foi discutida a tese intitulada «Contribuïção para os estudos de Oceanografia ao longo da costa de Portugal — fosfatos e nitratos» pelos argüentes Prof. Doutor T. Carrington da Costa e Prof. Doutor Carlos Tôrre de Assumpção.

As provas do assistente José Pinto Lopes, realizaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «fotosíntese» e «auxinas» respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor João de Vasconcelos, professor do I. S. A., e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese, intitulada: «Sôbre a cariologia da Secção *Coarctatae* Berger do género *Haworthia* Duval».

As provas do assistente Carlos Neves Tavares efectuaram-se nos dias 28 e 30 de Janeiro; no primeiro dia foram discutidos os pontos: «Fotoperiodicidade» e «circulação na planta» respectivamente pelos argüentes Prof. Doutor Rui Teles Palhinha e Prof. Doutor Flávio Rezende; no segundo dia, os mesmos argüentes discutiram a tese intitulada: «Contribuïção para o estudo das Parmeliaceas portuguesas».

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1945)

I. S. C. E. F. — EXAME DE APTIDÃO — **19 de Outubro de 1945**

2137 — Determine a, real, de modo que a equação $x^2+a(x-1)=0$ tenha ambas as raízes maiores que um. R: *Tem-se* $\Delta=a^2+4a\geq 0$, $S=-a>2$ *e* $f(1)=1>0$, *inequações que se verificam simultâneamente para* $a\leq -4$.

2138 — Demonstre que «a soma das distâncias de um ponto qualquer do interior dum triângulo equilátero aos três lados, é igual à medida da altura». Diga qual a hipótese e tese do teorema e quais os métodos utilizados para demonstrá-lo. R: *Seja* $[ABC]$ *o triângulo e* P *um ponto interior cujos pés das perpendiculares sôbre* $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{AB}$ *são respectivamente* R, S *e* T. *Considerando* $\overline{B'P'C'}$ *paralelo a* $\overline{BC}$ *tem-se* $\overline{PR}=\overline{P'R'}$ *em que* P' *é a intersecção de* $\overline{B'C'}$ *com* $\overline{AR'}$, *altura do triângulo referente a* $\overline{BC}$. *Traçando* $\overline{PA'}$ *paralelo a* $\overline{AC}$ *tem-se* $\overline{P''S'}=\overline{PS}$ *sendo* P'' *a intersecção de* $\overline{B'S'}$, *altura do triângulo* $[B'C'A]$, *com* $\overline{PA'}$. *Finalmente* $\overline{PT}=\overline{B'P''}$, *alturas do triângulo equilátero* $[A'B'P]$, *logo* $\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT}=\overline{P'R'}+\overline{P''S'}+\overline{B'P''}=\overline{P'R'}+\overline{P'A}=\overline{AR'}$, c. q. d.

2139 — Desenvolva o produto $(1+x)^n\,.\,(1+1/x)^{n+1}$ (n inteiro e positivo) e calcule a soma dos coeficientes da parte fraccionária em x no desenvolvimento obtido. R: *Tem-se sucesivamente* $(1+x)^n\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n+1}=\frac{(1+x)^{2n+1}}{x^{n+1}}=x^n+(2n+1)\,x^{n+1}+\cdots+\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{x}+\cdots+\binom{2n+1}{2n+1}\frac{1}{x^{n+1}}$. *A soma dos coeficientes binomiais é* 2^{2n+1} *e devido à sua simetria, a soma pedida é* 2^{2n}.

2140 — Diga que métodos de demonstração por transformações pontuais conhece, em que consistem e quais os conceitos e propriedades em que se baseiam.

Nota — É obrigatória a resposta a três pontos entre os quais o 4.°.

Enunciados e soluções dos n.os 2137 a 2140 de J. Remy T. Freire.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — ALGEBRA SUPERIOR — **2.° Exame de frequência — 1945.**

2141 — Classificar a quádrica:
$4x^2+y^2-2yz-4zx+4xy+2x-y+2z-1=0$. R: *Procuremos o cento da quádrica:*

$$\begin{cases} 8x+4y-4z+2=0\\ 4x+2y-2z-1=0\\ -4x-2y\qquad +2=0. \end{cases}$$

Os dois primeiros planos são paralelos entre si mas não ao terceiro. O centro é portanto um ponto impróprio e *a quádrica um paraboloide elíptico ou hiperbólico. Interceptando-a pelo plano* $x=0$ *vem a cónica* $y-2yz-y+2z-1=0$ *que uma hipérbole. Trata-se pois de um paraboloide hiperbólico.*

2142 — Calcular $\mathbf{P}\,\dfrac{\frac{2x-1}{1-x}}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-1}$. R: *Deve fazer-se:*

$$\frac{x}{1-x}=t^2 \text{ donde } x=f(t)=\frac{t^2}{1+t^2} \text{ com } f'(t)=\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Feita a substituição:

$$\mathbf{P}\,\frac{\frac{2x-1}{1-x}}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-1}=\mathbf{P}\,\frac{t^2-1}{t-1}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}=\mathbf{P}\,\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}.$$

Decompunhamos esta fracção, por exemplo, pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}=\frac{Mt+N}{(1+t^2)^2}+\frac{Qt+R}{1+t^2}$$

$$2t^2+2t=Mt+N+(Qt+R)(1+t^2)$$
$$=Qt^3+Rt^2+(M+Q)t+N+R.$$

Donde $Q=0$, $R=2$, $M=2$, $N=-2$. *Então:*

$$\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2t-2}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{1+t^2} \quad e$$

$$\mathbf{P}\,\frac{2t^2+2t}{(1+t^2)^2}=\mathbf{P}\,\frac{2t}{(1+t^2)^2}+\mathbf{P}\,\frac{-2}{(1+t^2)^2}+\mathbf{P}\,\frac{2}{1+t^2}.$$

E, como sabemos:

$$\mathbf{P}\,2t/(1+t^2)^2=-1/(1+t^2),\quad \mathbf{P}\,2/(1+t^2)=2\,\mathrm{arctg}\,t$$
$$\mathbf{P}\,2/(1+t^2)^2=\mathrm{arctg}\,t+t/(1+t^2)$$

e portanto:

$$\mathbf{P}\,\frac{2x-1}{1-x}\Big/\left[\sqrt{\frac{x}{1-x}}-1\right]=$$
$$=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\sqrt{x(1-x)}+x+C.$$

2143 — Traçar a curva representativa da função $y=\log x+1/x$. (Coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Esta função é definida no intervalo* $(0,+\infty)$. *Quando* $x=+\infty$ *o mesmo sucede a* y, *não existindo contudo a correspondente assíntota porque:*

$$\lim_{x=+\infty} y/x=\lim_{x=+\infty}(\log x/x+1/x^2)=0 \text{ e } \lim_{x=+\infty} y=+\infty.$$

Procuremos ainda $\lim\limits_{x=+0} y$. *Como* $\lim\limits_{x=+0} x\log x=$ $=\lim\limits_{x=+0}\log x/(1/x)=\lim\limits_{x=+0}(1/x)/(-1/x^2)=\lim\limits_{x=+0}(-x)=-0$ *vem* $\lim\limits_{x=+0}(\log x+1/x)=\lim\limits_{x=+0}\dfrac{x\log x+1}{x}=+\infty$. *A recta* $x=0$ *é por isso a única assíntota da curva.*

$y'=1/x-1/x^2=(x-1)/x^2$, *expressão que só muda de sinal para* $x=1$, *passando aí de negativa a positiva. A função tem pois apenas um extremo local (um mínimo) no ponto* $(1,1)$. $y''=-1/x^2+2/x^3=(2-x)/x^2$, *expressão que só muda de sinal (no campo de existência de* y) *para* $x=2$, *passando de positiva a negativa. Há pois um único ponto de inflexão em que a concavidade da curva, crescendo* x, *se volta da parte positiva para a negativa do eixo das ordenadas. Nesse ponto* $x=2$, $y=\log 2+1/2=1{,}193\cdots$; $y'=1/4$, $\mathrm{arctg}\,y'=14°02',\cdots$ *Com êstes elementos podemos traçar a curva.*

2144 — Calcular $\mathbf{P}\,|x|$. R: *Para* $x\geqq 0$, $|x|=x$, $\mathbf{P}\,x=x^2/2+C$. *Para* $x\leqq 0$, $|x|=-x$, $\mathbf{P}(-x)=$ $=-x^2/2+C'$. *Como* $|x|$ *é finita, a sua primitiva, por admitir derivada finita, será contínua. Temos pois de relacionar as constantes* C *e* C' *por forma que as funções* $F(x)$ *definidas por* $F(x)=x^2/2+C$ *para* $x\geqq 0$ *e* $F(x)=-x^2/2+C'$ *para* $x\leqq 0$, *contínuas para* $x\neq 0$, *sejam também contínuas para* $x=0$. *Evidentemente que terá de ser, para isso* $C'=C$ *e* $F(x)=x^2/2+C$ *para* $x\geqq 0$ $F(x)=-x^2/2+C$ *para* $x\leqq 0$ *o que ainda se pode escrever mais simplesmente* $F(x)=x\cdot|x|/2+C$ *que é a primitiva pedida.*

Soluções dos números 2141 a 2144 de Renato Pereira Coelho.

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de frequência, 4-III-1944** — 2.º ponto da 2.ª chamada.

I

2145 — Achar o produto de todos os valores de $\sqrt[n]{z}$ $(z\neq 0)$. R: *Pondo* $z=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, *temos* $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ $(0\leqq k<n)$ *e*

$$z_0\cdot z_1\cdot z_2\cdots z_{n-1}=$$
$$=\rho\left[\cos\frac{\alpha+(\alpha+2\pi)+(\alpha+2\cdot 2\pi)+\cdots+[\alpha+(n-1)\,2\pi]}{n}+\right.$$
$$\left.+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+(\alpha+2\pi)+(\alpha+2\cdot 2\pi)+\cdots+[\alpha+(n-1)\,\pi]}{n}\right]=$$
$$=\rho\{\cos[\alpha+(n-1)\,\pi]+i\,\mathrm{sen}\,[\alpha+(n-1)\,\pi]\}^n=$$
$$=(-1)^{n-1}\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)=(-1)^{n-1}z.$$

2146 — Conduzir pela origem uma recta que se apoie na recta $\begin{cases}x=z+1\\ y=z-1\end{cases}$ e seja paralela ao plano $2x+3y+z=1$. R: *A recta pedida será a intersecção do plano* $\pi\equiv x+y-2z=0$ *definido pela origem e a recta dada com o plano* $\pi'\equiv 2x+3y+z=0$ *conduzido pela origem paralelamente ao plano* $2x+3y+z=1$. *Das equações de* π *e* π' *se deduzem as equações reduzidas da recta:* $x=7z$ *e* $y=-5z$.

2147 — Pode reduzir-se

$$f(x,y,z,u)=2y^2+z^2-2xy+2ux-2yu$$

à expressão $\varphi(x',y',z')=x'^2-y'^2-z'$ por uma transformação real? ou por uma transformação geral? Justificar a resposta. R: *Por ser*

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$f(x, y, z, u)$ *é uma quádrica degenerescente de característica* 3. *Completando a cadeia de menores principais* $\Delta_3 = -1$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\Delta_1 = 1$ *com a unidade, reconhece-se que a quádrica se resolve numa soma de dois quadrados positivos e um negativo e portanto só pode reduzir-se a* $\varphi(x', y', z')$ *por uma transformação geral e não por uma transformação real.*

II

2148 — Sejam A e B dois números reais, o primeiro dos quais irracional. Supondo que a partir de certa ordem os desenvolvimentos decimais dêstes números coïncidem, de que natureza são as expressões $A+B$ e $A-B$? R: $A+B$ *irracional*; $A-B$ *racional.*

2149 — Quando $|z_1+z_2+\cdots| = |z_1|+|z_2|+\cdots$ como se dispõem no plano as imagens de $z_1, z_2, z_3, \cdots$? R: *Encontram-se sôbre uma mesma semi-recta de origem na intersecção dos eixos coordenados.*

2150 — Donde se deduz o número de termos de um determinante? R: *Do número de permutações sôbre* n *objectos.*

2151 — Como se determinam os coeficientes λ da relação que liga os elementos de uma mesma linha em determinante nulo? R: *Pelo teorema de Laplace,* $\sum_{k=1}^{n} a_i^k A_j^k = \begin{cases} \Delta & se\ j=i \\ 0 & se\ j \neq i. \end{cases}$ *Mas como* $\Delta = 0$, *será sempre* $\lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2 + \cdots + \lambda_n a_i^n = 0$ *com* $\lambda_k = A_j^k$ (k *e* i *variáveis;* j *fixo).*

2152 — Seja χ o menor principal A_n^n do determinante Δ. Que valor tem Δ quando se anulam todos os menores de 1.ª classe de χ? Porquê? R: *Pela fórmula de redução de Cauchy,* $\Delta = a_n^n \chi - \sum \chi_i^k a_i^n a_n^k$, *se conclui que* Δ *é nulo por ser* $\chi_i^k = 0$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n-1)$ *e conseqüentemente* $\chi = 0$.

2153 — Em que consiste a inversão de uma matriz? Justifique a regra da inversão do produto. R: *Inverter uma matriz é obter uma outra que multiplicada pela primeira dê a matriz unidade, para o que basta dividir todos os elementos da matriz adjunta pelo determinante da matriz. A matriz inversa do produto é o produto das matrizes inversas dos factores mas com a ordem invertida, porque a mesma regra se verifica na determinação da matriz adjunta do produto.*

2154 — Qual a característica de uma matriz adjunta? Justifique a resposta. R: *É a característica da primitiva matriz porque um determinante e o seu adjunto só simultâneamente se anulam.*

2155 — Forme o produto das transformações $y_i = \beta_i^h x_h$ e $x_i = \alpha_i^h u_h$ e relacione a respectiva matriz com as matrizes dos factores. R: *Tomando (para evitar ambigüidade) o índice mudo* k *em vez de* h *na segunda transformação, temos* $y_i = \beta_i^h x_h = \beta_i^h \alpha_h^k u_k = \delta_i^k u_k$ *com* $\delta_i^k = \beta_i^h \alpha_h^k$ *(a matriz da transformação produto é igual ao produto das matrizes das trasformações factores).*

2156 — Utilizando apenas planos e eixos coordenados (gerais) dê exemplo de uma recta e de um plano de equações $x/A = y/B = z/C$ e $Ax+By+Cz=0$ que não sejam necessàriamente ortogonais. R: *Considerando para triedro de referência um triedro qualquer, o plano* XOY *e o eixo dos* zz *(por exemplo) estão nas condições do problema* $(A=B=0)$.

2157 — Conhecidas as fórmulas de passagem de um sistema cartesiano rectangular a outro sistema análogo, como pode saber-se se um dos triedros só difere do outro pela sua posição no espaço? R: *Os dois triedros têm a mesma disposição ou disposições opostas conforme fôr igual a* $+1$ *ou* -1 *o determinante da transformação ortogonal* $x' = ax + a'y + a''z$, $y' = bx + b'y + b''z$, $z' = cx + c'y + c''z$, *onde* $a, a', a''; b, b', b'', c, c', c''$, *são os cosenos directores de* OX', OY' *e* OZ' *respectivamente.*

Soluções dos n.os 2145 a 2157 do F. Roldão Dias Agudo (aluno da F. C. L.).

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de frequência, 1945.**

2158 — Máximos e mínimos de $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$.

R.: *Temos* $y' = \dfrac{-x(x+4)}{(x-2)^2 (x+1)^2} = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ $\begin{cases} x=0 & y'=0 \\ x=4 & y'=0 \\ x=2 & y'=\infty \\ x=1 & y'=\infty \end{cases}$

$\varphi'(x) = -2x - 4$

$\varphi'(0) < 0$, $\psi(0) > 0$ logo $y'' < 0$ *e temos um máximo*;

$\varphi'(-4) > 0$, $\psi(-4) > 0$ logo $y' > 0$ *e temos um mínimo.*

Para $x = 2$ *vem* $y'(2-h) < 0$, $y'(2+h) < 0$ *e a função é decrescente. Para* $x = -1$ *vem* $y'(-1-h) > 0$, $y'(-1+h) > 0$ *e a função é crescente.*

2159 — Mudança de variáveis independentes na equação $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ sendo $\begin{cases} u=e^x \\ v=e^{y-x}\end{cases}$. R: $u\frac{\partial^2 z}{\partial^2 u} - 2v\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}=0$.

2160 — Calcule $\int \text{arc sen}\sqrt{2x}\,dx$.

Vem: $I = x\,\text{arc sen}\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt2}\int x^{\frac12}(1-2x)^{-\frac12}dx =$
$= x\,\text{arc sen}\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt2}\int (x^{-1}-2)^{-\frac12}dx$.

Fazendo $x^{-1}-2=t^2$ temos $\int(x^{-1}-2)^{-\frac12}dx=$

$$= -\int\frac{2dt}{(t^2+2)^2} = -\frac{t}{2(t^2+2)}-\frac{1}{2\sqrt2}\,\text{arc tg}\,\frac{t}{\sqrt2}.$$

Logo $I = x\,\text{arc sen}\sqrt{2x}+\frac{1}{2\sqrt2}\sqrt{x-2x^2}+$

$$+\frac14\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{1-2x}{2x}}.$$

2161 — $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. R: $I=\int_0^\infty\frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}} =$

$$= [\text{arc tg}\, e^x]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

2162 — Verdadeiro valor de $y=\sqrt{x^2-3x+1}-x$ para $x=\infty$.

R: $y=\frac{(\sqrt{x^2-3x+1})^2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}=\frac{-3+1/x}{\sqrt{1-3/x+1/x^2}+1}\to-\frac32$.

2163 — Dado $x^{2y}+y=2$, calcule y'' em $(1,1)$. R: $y''=6$.

Soluções dos n.os 2158 a 2163 de Jayme Rios de Souza.

I. S. T. — Cálculo Infinitesimal — **1.º exame de frequência de 1944-45.**

2164 — Calcular $I=\int_{-3}^{+2}\frac{x^2\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3+2x^2-5x-6}}\,dx$.

R: $I=\int_{-3}^{+2}\frac{x^2\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x+3)}}=\int_{-3}^{+2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$.

O integral proposto é convergente. Efectuando a mudança de variável $\sqrt{(x-2)(x+1)}=(x+1)\,t$ *vem*

$$\int_{-3}^{2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}} = \int_{\sqrt{5/2}}^{0}\frac{(2+t^2)^2}{(1-t^2)^3}\,dt=$$

$$=2\left[\frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{(1-t^2)^2}+E\log(1-t)+F\log(1+t)\right|_{\sqrt{5/2}}^{0}$$

sendo A, B, ⋯ F *constantes a determinar pelo método dos coeficientes indeterminados.*

2165 — Fazer no integral $I=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *a mudança de variável* $x=y/\sqrt{2-y^2}$. R: $dx=2(2-y^2)^{-3/2}dy$

$$I=2\int_0^y\frac{dy}{(2-y^2)^{3/2}\left[1-\frac{y^4}{(2-y^2)^2}\right]^{1/2}} = \int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(2-y^2)(1-y^2)}}.$$

2166 — $f(x)=\text{sen}\,(1-x)-\log(2-x)$ é infinitésimo com $1-x$. De que ordem? R: *Façamos* $1-x=y$, *e procuremos* n *tal que* $\lim_{y=0}\frac{\text{sen}\,y-\log(1+y)}{y^n}$ *seja finito e não nulo. Para* $n=2$, *vem, aplicando a regra L'Hôpital duas vezes:*

$$\lim_{y=0}\frac{\text{sen}\,y-\log(1+y)}{y^2}=\lim_{y=0}\frac{\cos y-(1+y)^{-1}}{2y}=$$

$=\lim_{y=0}\frac{-\text{sen}\,y+(1+y)^{-2}}{2}=\frac12$. *Logo* $f(x)$ *é infinitésimo de 2.ª ordem com* $(1-x)$.

2167 — Estudar a convergência do integral:

$\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\left[\frac{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}\right]^{\cos 2\alpha}d\theta$. R: *A função integranda torna-se infinita em* $\pi/4$. *Ora:* $\frac{\cos\theta+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}=$

$=-\text{cotg}\,(\theta-\pi/4)=-\frac{1}{\text{tg}\,(\theta-\pi/4)}$. *Aplicando o critério de Bertrand, vem para* $n=\cos 2\alpha$:

$$\lim_{\theta=\pi/4}\frac{(\theta-\pi/4)^n}{[-\text{tg}\,(\theta-\pi/4)]^{\cos2\alpha}}=\lim_{\theta=\pi/4}\left[-\frac{(\theta-\pi/4)}{\text{tg}\,(\theta-\pi/4)}\right]^{\cos 2\alpha}=$$
$$=(-1)^{\cos2\alpha}\neq0,\infty.$$

O integral é convergente para $\cos2\alpha<1$ *e divergente para* $\cos 2\alpha=1$.

Soluções dos n.os 2164 a 2167 de Olívio de Sousa Bento.

F. C. L. — Analise Superior — **Exame final — Outubro de 1945.**

2168 — *a)* Estabeleça a equação às derivadas parciais da qual é um integral completo a dupla infinidade de esferas de centros em XOY e tangentes a OY.

b) Verifique que a equação obtida exprime certa relação entre os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NQ}$, onde por M se designa um ponto genérico de uma superfície integral qualquer, N o traço da respectiva normal em

XOY e Q a projecção ortogonal de N sôbre OY (eixos rectangulares). Indique tal relação.

c) Superfícies integrais contendo o círculo $x^2+y^2=2x$ do plano XOY.

d) Verifique que as características de qualquer superfície integral constituem um sistema de linhas de curvatura. R: a) *Equação finita da família de esferas:* $z^2+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2 \to x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y+\beta^2=0$. *Donde, por derivação parcial:* $x-\alpha+pz=y-\beta+qz=0$. *Eliminando* α *e* β *entre as* 3 *equações, acha-se* $p^2z^2+q^2z^2+z^2=(x+pz)^2$.

b) *Equações da normal em* $M(x,y,z)$:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$$

coordenadas de N: $(x+pz, y+qz, 0)$; *segmento* $\overline{MN}$: $\sqrt{p^2z^2+q^2z^2+z^2}$; *coordenadas de* Q: $(0, y+qz, 0)$; *segmento* $\overline{NQ}$: $\sqrt{(x+pz)^2}$. *A equação obtida traduz, pois, que:* $\overline{MN}=\overline{NQ}$.

c) *Com* $z=x^2+y^2-2x=0$ *é* $2x-2\alpha x-2\beta\sqrt{2x-x^2}+\beta^2=0$ *que se pode pôr na forma*

$$4x^2(1-\alpha)^2+4x\beta^2(1-\alpha)+\beta^4=4\beta^2(2x-x^2)$$

e que, obrigada a ter raízes iguais em x, *dá:* $\beta(4\alpha-\beta^2)=0$ *donde se deduz:* $\beta=0$ *ou* $\alpha=\beta^2/4$. *Se* $\beta=0 \to x^2+y^2+z^2-2\alpha x=0$, *infinidade simples de integrais particulares, da qual faz parte* $x^2+y^2+z^2-2x=0$ $(\alpha=1)$ *que passa pelo círculo dado. Se* $\alpha=\beta^2/4 \to x^2+y^2+z^2-(x/2-1)\beta^2-2\beta y=0$, *infinidade simples de integrais particulares cujas secções, pelo plano* $z=0$, *são curvas tangentes ao círculo dado. A envolvente de tal família com um parâmetro representa uma outra superfície que também satisfaz ao problema de Cauchy proposto; derivando em ordem a* β *e eliminando* β *acha-se* $x(x^2+y^2+z^2)=2(x^2+z^2)$.

d) *O sistema de Charpit-Lagrange para a equação às derivadas parciais obtidas em a) admite os integrais* $x+pz=c_1$ $y+qz=c_2$ *(de facto,* $dx+pdz+zdp=0$ *e* $dy+qdz+zdq=0$ *são combinações que dêle se deduzem). As características das sup. integrais verificam, assim, a equação* $dp\, d(y+qz)=dq\, d(x+pz)$ *das* linhas de curvatura.

2169 — Calcule $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta$, transformando-o, prèviamente em $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ mediante uma relação $x=F(\theta)$ convenientemente escolhida e recorrendo, seguidamente, à teoria dos resíduos. R: *Com* $x=\operatorname{tg}\theta \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ *e pelo teorema dos resíduos, usando o contôrno* $x^2+y^2=\infty$, $y\geq 0$, *acha-se logo:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Enunciados e soluções dos n.os 2168 e 2169 de Humberto S. Menezes.

F. C. P. — Análise Superior — 2.º exercício de repetição — 1 de Março de 1945.

2170 — Determinar uma função analítica da variável z: $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ para a qual são satisfeitas as condições:

$$a)\ f(1)=1;\quad b)\ \varphi+\psi=x+y+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Determinar, em seguida, o valor da sua derivada no ponto $1+i$. R: *Atendendo às condições de Cauchy-Riemann obtem-se por derivação de* b):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1+\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Então, a integração de

$$d\varphi=\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx+\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$

dá $\varphi=x+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c_1$. *Logo* $\psi=y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-c_1$.

Portanto $f(z)=[x+\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c_1]+i\,[y+\operatorname{artg}\frac{y}{x}-c_1]$.

A condição a) *determina* $c_1=0$. *Pode então escrever-se:* $f(z)=z+\log z$. *O valor da derivada no ponto* $1+i$ *é* $3/2-i/2$.

2171 — Desenvolver em série segundo as potências de z (desenvolvimentos de Taylor ou Laurent) a função $\frac{z+1}{z^2-4z+3}$. R: *Ponhamos* $F=\frac{z+1}{z^2-4z+3}=$ $=\frac{2}{z-3}+\frac{-1}{z-1}=2A-B$. *No interior de um círculo de centro na origem e de raio* 3 (C_3) *pode escrever-se:*

$$(1)\qquad 2A=\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-z/3}=$$
$$=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\cdots+\frac{z^n}{3^n}+\cdots\right).$$

No exterior de C_3, *será:*

$$(2)\qquad 2A=\frac{2}{z-3}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-3/z}=\frac{2}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{2}{z}+\frac{2\cdot 3}{z^2}+\cdots+\frac{2\cdot 3^n}{z^{n+1}}+\cdots$$

No interior de um círculo centrado na origem e de raio 1 (C_1), *será:*

$$(1')\quad -B=-\frac{1}{z-1}=+\frac{1}{1-z}=+(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots).$$

No exterior de C_1,

$$(2')\qquad -B=\frac{-1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=$$
$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots\right).$$

Poderemos, portanto, escrever simbòlicamente:

No interior de C_1	$F=(1)+(1')$
Na coroa circular	$F=(2')+(1)$
No exterior de C_3	$F=(1')+(2')$.

2172 — Calcular, por meio da teoria dos resíduos, o integral definido: $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$.

Indicação: Integrar e^{-z^2} ao longo do contôrno fechado definido pelo eixo ox, a bissectriz do 1.º quadrante e um arco $\widehat{AB}$ de circunferência de centro O e raio R. R: *Seja* Γ *o contôrno fechado* OAB, *a que se refere o enunciado:*

$\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz=0$, *pelo teorema de Cauchy. Mas:*

$$\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz=\int_0^R e^{-x^2}\,dx+\int_{AB} e^{-z^2}\,dz+\int_{BO} e^{-x^2(1+i)^2}(1+i)\,dx\,.$$

Quando $R\to\infty$, *é fácil ver-se que:* $\int_{AB} e^{-z^2}\to 0$.

Ficará então: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx-(1+i)\int_0^\infty e^{-2ix^2}\,dx=0$

ou: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}=(1+i)\int_0^\infty[\cos(2x^2)-i\,\mathrm{sen}\,(2x^2)]\,dx$;

donde:
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\left[\int_0^\infty \cos(2x^2)\,dx+\int_0^\infty \mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx\right]+$$
$$+\,i\left[\int_0^\infty \cos(2x^2)\,dx-\int_0^\infty \mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx\right].$$

Logo: $\int_0^\infty \cos(2x^2)\,dx+\int_0^\infty \mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_0^\infty \cos(2x^2)\,dx-\int_0^\infty \mathrm{sen}\,(2x^2)\,dx=0\,.$$

Portanto: $\int_0^\infty \cos(2x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$;

donde resulta: $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Soluções dos n.os 2170 a 2172 de Laureano Barros.

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. L. — Geometria Projectiva — **Exame Final, Julho de 1945** — Ponto n.º 2.

2173 — Estabeleça uma projectividade entre 2 feixes não sobrepostos, geradora duma parábola com uma dada direcção assintótica, e construa um par de raios, homólogos nessa projectividade, cortando-se sôbre uma recta dada r que não tenha direcção do ponto impróprio da cónica. Número de soluções do problema (para a cónica individualizada). Se se impuzesse a r a condição oposta da acima referida, que teria, de particular, a conclusão a que chegou na análise do número de soluções? Determine, para o caso considerado, o diâmetro conjugado com a direcção de r. Pode esta questão pôr-se na hipótese oposta relativa à direcção de r?

2174 — Construa (por aplicação do teorema de Pascal a uma circunfrência), 2 triângulos homológicos $[A\ B\ C]$ e $[A'\ B'\ C']$, e determine o género da cónica que, na homologia definida, corresponde à circunfecircunscrita a $[A\ B\ C]$. Caso se trate duma parábola, determine a direcção do seu eixo e, caso se trate duma hipérbole, determine as suas assíntotas.

2175 — Duma hipérbole, conhece-se: o eixo focal (real) — 6 cm — e a direcção dum dos pontos impróprios. Determine: *a*) as assíntotas; *b*) o diâmetro conjugado com uma dada direcção r (escolhida esta por forma tal que o diâmetro da sua direcção intersecte a cónica em pontos reais); *c*) uma tangente paralela a uma recta dada d (escolhida esta por forma que o problema tenha 2 soluções (reais, distintas).

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame, 1944.**

2176 — Os extremos A e B duma haste pesada homogénea escorregam sem atrito, sôbre dois eixos rectangulares Ox e Oy.

Ox é vertical e fixo.

Oy está animado duma rotação de velocidade angular constante w, em tôrno de Ox.

Estudar o equilíbrio relativo da haste AB.

2177 — Determinar o centro de gravidade do volume limitado pelos três planos coordenados, supostos rectangulares, e pelas superfícies dos cilindros

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

no oitante positivo dos eixos.

2178 — Um ponto material cai para um centro fixo que o atrai na razão inversa do cubo da distância. Conhecida a distância inicial, qual é a duração da queda?

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final, 1946.

2179 — Achar as extremais do integral

$$I=\int_{x_0}^{x_1} x^n y'^2\, dx\,,$$

e mostrar que se fôr $n \geq 1$, não há nenhuma extremal que passe por dois pontos situados de lados opostos do eixo dos yy.

2180 — Achar o momento de inércia do sólido homogéneo limitado pelas duas superfícies cilíndricas

$$x^2+y^2=a^2 \quad \text{e} \quad x^2+y^2=b^2 \ (a>b)$$

e pelos dois planos

$$z=h \quad \text{e} \quad z=-h\,,$$

1.º. Em relação ao eixo dos zz;

2.º. Em relação ao eixo dos xx.

2181 — Um cilindro de revolução homogéneo e simplesmente pesado oscila em torno duma tangente (suposta horizontal) a uma das suas bases. Achar o comprimento do pendulo simples síncrono.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2182 — Do estudo das séries $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen} n\theta$ deduzir o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}z^n$ sôbre a circunferência de convergência.

2183 — Sabendo que $\int_0^{\pi/2}\log \operatorname{sen} x\,dx=\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ (V., p. ex., o livro de exercícios de Cálculo Infinitesimal de Todhunter), calcule:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\cdots\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n}\right]^{\pi/2n},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2}\frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x}$$ e verifique as igualdades:

$$\int_0^{\pi/2a}\log\operatorname{sen} ax\,dx=\frac{\pi}{2a}\log\frac{1}{2}$$

e

$$\int_0^{\pi/2a} x\operatorname{cotg} ax\,dx=\frac{\pi}{2a^2}\log 2\,.$$

2184 — *a)* Determinar um pentágono $[A'B'C'D'E']$ semelhante a um pentágono convexo dado $[\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}]$ sabendo que é projecção ortogonal de um pentágono regular de 3 cm de lado. *b)* Analisar o caso particular de ser $\overline{A}\overline{B}=\overline{A}\overline{E}$ (por exemplo), distinguindo ainda duas hipóteses diferentes consoante o valor do ângulo $\overline{A}$. Estabelecer prèviamente as condições de possibilidade do problema.

2185 — Seja 1 o conjunto de todos os números inteiros. Definamos em 1 um espaço (V), associando a cada elemento (ponto) de 1 as duas vizinhanças seguintes: $V_n^1=\{n, n+1\}$, $V_n^2=\{n-1, n\}$.

a) Mostre que as vizinhanças adoptadas são conjuntos abertos.

b) Demonstre que é condição necessária e suficiente para que n seja um ponto de acumulação do conjunto $A\subset 1$ que $n-1$ e $n+1$ pertençam a A.

c) Verifique, através dum exemplo, que, neste espaço, o derivado dum conjunto pode não ser um conjunto fechado.

d) Demonstre que é condição necessária e suficiente para que o derivado de um conjunto $A\subset 1$ seja fechado que os elementos de A sejam inteiros consecutivos.

2186 — Seja 1 um conjunto fundamental e F um seu subconjunto. Definamos em 1 uma operação de fecho da seguinte maneira: $\overline{O}=O$; $\overline{X}=X+F$, se $X\neq O$.

a) Mostre que o espaço $[1,\,^{-}]$ é um espaço de Kuratowski.

b) Determine a família dos conjuntos fechados e a família dos conjuntos abertos de $[1,\,^{-}]$.

c) Mostre que a fronteira de qualquer subconjunto de 1 (exceptuando O e 1) é igual a F.

d) Determine a família dos conjuntos cujo interior é o conjunto vazio e mostre que essa família constitui um corpo de conjuntos.

Para esclarecimento das notações empregadas nos problemas n.os 2185 e 2186, ver por exemplo, «Funções Contínuas» de A. Monteiro e A. Pereira Gomes.

Problemas n.os 2183, 2185 e 2186 propostos por José Morgado, e n.os 2182 a 2184 por Laureano Barros.

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1087 — Demonstrar que o plano $x+y+z=0$ corta o cone $\frac{yz}{b-c}+\frac{zx}{c-a}+\frac{xy}{a-b}=0$ segundo 2 geratrizes que fazem o ângulo $\pi/3$. Mostrar que os parâmetros directores dessas geratrizes são $a-b$, $b-c$, $c-a$, e $c-a$, $a-b$, $b-c$. R: *Elimino* z *entre as equações da secção do plano secante no cone,*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{yz}{b-c}+\frac{zx}{c-a}+\frac{xy}{a-b}=0 \end{cases}$$

obtenho:

$$\begin{cases} z=-(x+y) \\ (c-a)(a-b)\,yz+(b-c)(a-b)\,zx+(b-c)(c-a)\,xy=0 \end{cases}$$

e

$$(c-a)(a-b)\,y^2+(b-c)(a-b)\,x^2+[(c-a)(a-b)+(b-c)(a-b)-(b-c)(c-a)]\,xy=0,$$

$$(c-a)(a-b)\,y^2+(b-c)(a-b)\,x^2-[(a-b)^2+(b-c)(c-a)]\,xy=0$$

equação da projecção da secção no plano XY. *Esta projecção é uma hiperbole degenerada em duas rectas concorrentes, que tem por equações*

$$r_1'\equiv(c-a)\,y-(a-b)\,x=0,\quad r_2'\equiv(a-b)\,y-(b-c)\,x=0.$$

Como a secção é plana e a sua projecção no plano XY *é constituída por duas rectas, concluo que a própria secção é formada por duas rectas de equações:*

$$r_1\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ (c-a)\,y-(a-b)\,x=0 \end{cases} \text{ ou } \frac{x}{c-a}=\frac{y}{a-b}=\frac{z}{b-c}$$

e

$$r_2\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ (a-b)\,y-(b-c)\,x=0 \end{cases} \text{ ou } \frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$$

É $\cos(\widehat{r_1,r_2})=\frac{(a-b)(c-a)+(b-c)(a-b)+(c-a)(b-c)}{\sqrt{(a-b)^2+(c-a)^2+(b-c)^2}}=$ $=-1/2$ *e* $\widehat{r_1 r_2}=\pi/3$.

Solução de José Machado Gil (da Barquinha).

1433 — Estabelecer a fórmula

$$\int \operatorname{sen}^{n-1} x\cos(n+1)\,x\cdot dx=\frac{\operatorname{sen}^n x\cdot\cos nx}{n}+C$$

(Euler). Achar as fórmulas correspondentes para $\int \operatorname{sen}^{n-1} x\operatorname{sen}(n+1)\,x\,dx$, $\int \cos^{n-1} x\cos(n+1)\,x\,dx$, $\int \cos^{n-1} x\operatorname{sen}(n+1)\,x.dx$.

R: $\int \operatorname{sen}^{n-1} x\cos(n+1)\,x\,dx=\int \operatorname{sen}^{n-1} x\cos(nx+x)\,dx=$

$=\int \operatorname{sen}^{n-1} x\cos nx\cos x\,dx-\int \operatorname{sen}^n x\operatorname{sen} nx\,dx=$

$=\frac{1}{n}\operatorname{sen}^n x\cos nx+\int \operatorname{sen}^n x\operatorname{sen} nx-\int \operatorname{sen}^n x\operatorname{sen} nx\,dx=$

$=\frac{1}{n}\operatorname{sen}^n x\cos nx+C$. *Anàlogamente se obtém*

$$\int \operatorname{sen}^{n-1} x\operatorname{sen}(n+1)\,x\,dx=\frac{1}{n}\operatorname{sen}^n x\operatorname{sen} nx+C;$$

$$\int \cos^{n-1} x\cos(n+1)\,x\,dx=\int \cos^{n-1} x\operatorname{sen}(n+1)\,x\,dx=-\frac{1}{n}\cos^n x\cos nx+C.$$

Solução de José Machado Gil (da Barquinha).

1899 — Numa urna há n bolas brancas e pretas. Qual a composição da urna, sabendo-se que o número de bolas brancas é igual ao valor médio do número de extracções necessárias para se obter uma bola branca, supondo que se vai extraindo, sucessivamente, ao acaso uma bola da urna, com reposição ao fim de cada extracção. Discutir. R: *Sendo* b *o número de bolas brancas e* p *o número de bolas pretas,*

$$\textit{tem-se}\ \begin{cases} n=b+p \\ b=\frac{b}{n}+2\frac{b}{n}\frac{p}{n}+3\frac{b}{n}\left(\frac{p}{n}\right)^2+\cdots+n\frac{b}{n}\left(\frac{p}{n}\right)^{n-1}+\cdots \end{cases}$$

$$\textit{ou}\ \begin{cases} n=b+p \\ 1=\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{p}{n}\right)^{-2}. \end{cases}$$

A 2.ª equação dá para p *os dois valores* $n\pm\sqrt{n}$, *mas apenas* $n-\sqrt{n}$ *pode satisfazer ao problema. O número* b *será então* $\sqrt{n}$.

O problema apenas terá sentido quando n *fôr um quadrado perfeito.*

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

51 — Homenaje a Rey Pastor. Tomo I. Volumen V de las Publicaciones del Instituto de Matemática de Rosario (1945).

En los 30 últimos años, en que la influencia de Rey Pastor en España y Argentina ha sido dirigente se ha creado en ambas naciones una cultura matemática moderna.

Este es a nuestro juicio el mérito fundamental de Rey Pastor: haber logrado en el breve plazo de 30 años incorporar a España y a la Argentina al ambiente de la Matemática viva en la época actual.

Surgiran en España e Hispanoamerica después de él matemáticos que obtengan teoremas más importantes que los suyos pero aquel mérito singular nadie podrá discutírselo.

Algunos discípulos y colegas conscientes del esfuerzo del Maestro han deseado rendirle el merecido homenaje por su grandioso labor y le han ofrecido dos volúmenes de interesantes trabajos.

Han colaborado en este primer volumen matemáticos de todo el mundo: Babini, Balanzat, Fubini, Hadamard, Pi Calleja, Pólya, Uspensky, Würschmidt, Kasner, De Cicco, Mieli, Sispánov, Rosenthal, Korn, Losada y Puga, Garcia de Zuñiga, Terracini, Frucht, Valeiras, G. García, M. O. González, Rosenblatt, Santaló y E. Gaspar.

Las palabras iniciales del volúmen están redactadas por el Ing. Cortes Pla y F. Toranzos le dedica un notable trabajo titulado «Rey Pastor y la enseñanza de la Matemática en la Argentina».

El sabio Prof. Terradas, su gran amigo, ha redactado un extenso y bello trabajo titulado «Julio Rey Pastor, hombre e investigador», que encabeza la serie de interesantes articulos, el primero de los cuales es debido a Hadamard. El magnífico estudio del Prof. Terradas analiza extensamente la obra matemática de Rey, señalando sus importantes contribuciones en muy diversos y apartados campos de la Matemática. También estudia, con objectividad y cariño, la personalidad de Rey Pastor simplemente como hombre, destacando sus excelsas cualidades intelectuales y morales, que le han permitido forjar su brillante escuela matemática, cuyos óptimos frutos son, sin duda, los de más alta calidad de la Ciencia española contemporánea.

Permítamnos transcribir para terminar las palabras finales del bello prólogo de Terradas: «Que este volumen logre demostrar al Matemático, al Maestro, cuanto apreciamos su Obra. Si puede reportarle siquiera un aliento de satisfacción y felicidad, nos holgaremos nosotros con efusión cordialísima con la alegría del discípulo que contempla la solidez y permanencia de la Fama, consagrando una vida de Trabajo a conciencia y de mérito, con la satisfacción inefable del amigo al considerar en él el triunfo de lo eterno sobre lo mudable y pasajero».

Sixto Rios

(De la Revista Matemática Hispano-Americana).

52 — MIGUEL, J. Iribas de y RODRIGUEZ, J. J. Vila — Nociones de Geometria Analitica. 496 pgs. Editorial Dossat. Madrid, 1945.

Los autores, movidos por su dilatada experiencia pedagógica, han escrito esta obra con el fin de hacer fácil y ameno el estudio de la geometria analitica a quienes en ella se inician. Tal propósito ha sido felizmente realizado y estamos seguros de que cualquier alumno que lea estas *Nociones* se adueñará rápidamente del espiritu de los métodos cartesianos e incluso sentirá apetencia de colaborar activamente en sus desarrollos. Porque uno de los méritos — y no el menor — del libro que comentamos es que *enseña a resolver problemas*. Contribuye a ello, aparte la claridad, rigor y elegancia en la exposicion, un gran número de cuestiones totalmente resueltas, además de 317 problemos propuestos, en su mayoría originales.

El corte clássico de la obra no excluye la consideracion de ciertos interesantes temas que no suelen ser tratados en los manuales corrientes. Sirva de ejemplo el atinado capitulo dedicado a la resolucion gráfica de ecuaciones o el preciso estudio de los puntos y circulos asintóticos.

Las figuras y la presentacion, muy cuidadas ambas, influyen en la agradable lectura.

A excepcion de las coordenadas cartesianas y homogeneas solo se refieren los autores a las polares. Seria de desear que en la proxima edicion incluyesen las plückerianas que tanto uso tienen en diversas cuestiones (nomogramas, periodogramas, etc.). Tampoco sobraria un capitulo dedicado al calculo vectorial elemental que permitiría simplificar numerosos problemas métricos en la analitica plana y del espacio.

La obra, en fin, constituye un notable paradigma de la fecundidad de la colaboracion entre ciencia y técnica ya que uno de los autores es un eminente ingeniero de caminos mientras el otro es uno de nuestros mas distinguidos y prometedores matemáticos.

José Gallego Diaz

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES DE MATEMATICA

NACIONAIS

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise geral:

N.º 18. *«Geometria das distâncias» — 3 — Comprimento de arco* — por Aureliano de Mira Fernandes.

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemáttco — (Buenos Aires) — Revista Argentina de Matemática — Ano VIII, n.ºs 1, 8 e 9 — 1945.

Matematicae Notae — (Rosario) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciencias Matematicas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Ano V, Fasc. 2 e 3 — 1945.

Revista de la Unión Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Volume X, n.ºs 1 e 2 — 1944; Vol. XI n.ºs 1 e 2 — 1945.

Espanha

Matemática Elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Istituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª serie. Tomo V, n.ºs 3, 4, 5, 6, 7, y 8; Suplementos n.ºs 1 y 2 — 1945.

França

Bulletin de la Société Mathématique de France — (Paris) — Tome LXXI (1943); Tome LXXII (1944).

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sujets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tome I, fasc. 2 — 1945.

Inglaterra

The Journal of the London Mathematical Society — Vol. 19, Part. 4 — 1945.

The Mathematical Gazette — (London) — Vol. XXIX, n.ºs 285, 286, 287 — 1945.

The Quarterly Journal of Mathematics — Oxford Series — Vol. 16, n.ºs 63-64 — 1945.

An Introduction to Differential Equations — por S. L. Green — London, University Tutorial Press, Ltd. — 1945. (Oferta do British Council).

The Mathematical Discoveries of Newton — por H. W. Turnbull — London and Glasgow — Blackie & Son, Ltd. — 1945. (Oferta do British Council).

OUTRAS PUBLICAÇÕES

Afinidades — (Lisboa) — Revista de Cultura Luso-Francesa — n.ºs 14/15 de 1945.

Portugaliae Acta Biologica — Série A — Vol. 1 — n.º 2 — Lisboa 1945.

Portugaliae Physica — Vol. 1, fasc. 4:

Marieta da Silveira — *Radioactivité naturelle par émission de neutrons. — Sur l'absorption du rayonnement γ émis par l'*UX *complexe.*

G. Dedebant et Ph. Wehrlé — *Mecanique aléatoire.*

J. Palacios et M. T. Vigón — *L'adsorption de cations par le charbon actif. Confirmations expérimentales.*

Problemas de Matemática do 2.º ciclo dos Liceus — por F. Ribeiro Mendonça — Lisboa 1945.

Publicações de Física — Centro de Estudos de Física — F. C. L.

N.º 1. *Espectro gama dos derivados de vida longa do radão* — por Lídia Salgueiro.

N.º 2. *Contribuïção para o estudo das radiações do urânio* X *complexo* — por Marieta da Silveira.

Publicações do Centro de Estudos de Engenharia Civil do I. S. T. — Lisboa — I. A. C.

N.º 1. *Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs* — por Manuel Rocha — 1943.

N.º 2. *O «Medidor de Momentos» e a sua aplicação a modelos de estruturas a duas dimensões* — por E. A. Henriques dos Reis — 1944.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºs 160 e 161.

Annales de l'Université de Grenoble (Nouvelle série); Section Sciences-Médecine — Tome XIX, (1943); Tome XX, (1944).

Biometrika — A journal for the statistical study of biological problems — Vol XXXIII — part III — 1945 — London. (Oferta do British Council).

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones. Tomo V — n.ºs 57-58, 1945.

Revista de la Sociedad Cubana de Ciências Físicas y Matemáticas — (Habana-Cuba) — Vol. 2 n.º 1 — 1945.

Time, number and the atom — R. Fortescue Pickard — London 1945. (Oferta do British Council).

Waveform Analysis — A guide to the interpretation of periodic waves including vibration records. — R. G. Manley — Chapman and Hall Ltd. — London 1945. (Oferta do British Council).

GAZETA DE MATEMÁTICA

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Prêço de assinatura anual de quatro números	30$00
Prêço de capa por cada número	10$00
Prêço de capa do n.º 22, extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	8$00

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao prêço de Esc. 250$ (colecção dos 22 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 12 a 26), ao prêço de capa.

•

Reedição do ano 1 da «Gazeta de Matemática» n.^{os} 1 a 4

Está em composição o vol. 1 da *Gazeta de Matemática* que compreenderá os 4 primeiros números já esgotados. Aquêles que se inscrevam antes da sua publicação, prevista para Junho de 1946, beneficiarão do prêço especial de 30$00. O vol. 1 deve ser vendido ao público por 35$00 ou 40$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial