GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VII **N.º 28** MAIO-1946

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

G A Z E T A   D E   M A T E M Á T I C A

Editor	Administrador	Tesoureiro
Gazeta de Matemática, L.da	*José de Oliveira Campos*	*A. Marques de Carvalho*

Séde e Administração da *Gazeta de Matemática, Lda.* — Rua Almirante Barroso, 20 — Lisboa-N

Composição: Tipografia Matemática, Limitada — Rua Almirante Barroso, 20-r/c — Lisboa
Impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Lda. — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 — Lisboa

ANO VII-N.º 28 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática Lda.* ■ ADMINISTRADOR: *J. O. Campos*

Composto na Tipografia Matemática Lda. — Impresso na Sociedade Industrial de Tipografia Lda.

Les principes mathématiques de la mécanique classique [1]

por ***René de Possel*** (Université d'Alger)

Les principes de la mécanique classique sont exposés d'ordinaire pour les systèmes d'un nombre fini de masses ponctuelles. Dès qu'il s'agit de les appliquer, ils se montrent presque toujours insuffisants, et de nouvelles hypothèses, plus ou moins arbitraires, sont introduites explicitement ou non pour rester en accord avec l'expérience. On fait également des passages à la limite nullement justifiés pour arriver d'un nombre fini de points à un milieu continu.

Bornons-nous à citer un exemple: pour évaluer le travail des forces intérieures dans un milieu continu, il faut d'abord décomposer ce milieu en cellules polyédriques, introduire deux forces opposées pour chaque couple de cellules en contact suivant un polygone, ensuite composer toutes les forces ainsi appliquées à une cellule en un point intérieur, et enfin passer à la limite. Si l'on néglige d'effectuer ces deux dernières opérations, le résultat est erroné, et on trouve zéro comme valeur du travail (voir par exemple Béghin, *Statique et Dynamique,* collection Armand Colin).

Bien peu d'efforts ont été consacrés jusqu'à ces derniers temps pour remédier à l'insuffisance de tels principes. On peut citer un essai partiel de Hamel *(Mathematische Annalen, 1909)* et un autre Zaremba *(Bulletin de la Société Mathématique de France, 1934)* mais qui n'examinaient l'un et l'autre qu'un seul côté de la question. Cet état de choses a nui énormément à la faveur de la mécanique auprès des mathématiciens.

Il est cependant facile de transformer la mécanique rationnelle en une théorie mathématique rigoureuse. La masse, la force, et bien d'autres grandeurs, doivent être considérées comme des fonctions additives d'ensemble, et les sommations relatives aux différents points par des intégrations au sens de Stieltjès.

Une mise au point très complète dans ce sens a été faite par M. Brelot (2 notes aux *Annales de l'Université de Grenoble,* section sciences-médecine, t. 19, 1943 et t. 20, 1944, et un fascicule, *Les principes mathématiques de la mécanique classique,* Arthaud, Grenoble, 1945). J'ai eu moi-même l'occasion d'en faire une dans le cours que je professe à Alger depuis 4 ans. L'exposé qui va suivre est d'ailleurs largement inspiré des travaux de M. Brelot, mais le point de vue reste plus élémentaire.

Les deux premières parties contiennent les notions de fonction additive d'ensemble et d'intégrale de Stieltjès, ces notions déjà si fécondes en calcul des probabilités. Une dernière partie tente une interprétation physique des principes mathématiques énoncés dans la troisième.

I. Fonction additive d'ensemble

Étant donné un ensemble E, le plus souvent l'espace euclidien à trois dimensions ou l'une des ses parties, considérons une fonction qui associe à certains ensembles A contenus dans E un nombre réel ou un vecteur $m(A)$. Toutes les fois que m est définie pour deux ensembles A_1 et A_2 sans point commun et pour leur réunion A, supposons que l'on ait

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) .$$

On dit alors que m est une fonction additive d'ensemble ou une *mesure.* (Nous ne nous occuperons pas ici des fonctions d'ensemble complètement additives). Les ensembles pour lesquels m est définie sont dits «mesurables» par rapport à m et doivent vérifier les conditions suivantes:

la réunion, l'intersection, la différence de deux ensembles mesurables par rapport à m est encore mesurable par rapport à m.

Tout ensemble mesurable est la réunion d'un nombre fini d'ensembles mesurables tous de diamétre au

[1] Le sujet de cet exposé a fait l'objet de plusieurs conférences données par l'auteur aux Facultés des Sciences de Lisbonne, Coïmbre et Porto, et à l'Institut de Coïmbre, en mars et avril 1946.

plus égal à un nombre donné positif quelconque (et d'après la condition précédente, on peut admettre que ces ensembles sont sans point commun deux à deux).

La mesure peut être concentrée en un nombre fini de points, sur des courbes, des surfaces. Bien entendu il est souvent essentiel de préciser si les extrémités de l'arc de courbe, ou si la frontière de l'ensemble A en fait partie, car des points de mesure non nulle peuvent s'y trouver.

Comme exemples de mesures, citons la *longueur* d'un ensemble d'intervalles d'une droite en nombre fini, l'*aire* d'un ensemble plan, le *volume* d'un ensemble de l'espace à trois dimensions, l'*étendue à* n *dimensions* d'un ensemble de l'espace à n dimensions. Parmi les grandeurs physiques, la masse d'un système, son énergie cinétique, la quantité de chaleur reçue pendant un temps donné par une partie donnée d'un système, l'énergie électromagnétique contenue dans un volume donné. En calcul des probabilités, si tous les cas possibles constituent un ensemble E, la probabilité de réalisation d'un cas appartenant à une partie A de E est une fonction additive de l'ensemble A: la donnée d'une loi de probabilité équivaut à celle d'une fonction additive d'ensemble.

Bournons-nous à rappeler la définition précise de l'aire d'une ensemble plan A: traçons un quadrillage Q, et désignons par S la somme des aires des carreaux contenus ainsi que leur périmètre dans A, et par S' la somme des aires des carreaux qui touchent A. Formons des quadrillages Q_n de plus en plus petits par subdivision du premier. Nous obtenons une suite non décroissante S_n et une suite non croissante S'_n. Si leurs limites sont égales, on dit que A est quarrable, et que cette limite constitue l'aire ou la mesure de Jordan de A. On constate aisément que c'est bien une fonction additive d'ensemble, que les ensembles quarrables vérifient les propriétés indiquées plus haut pour les ensembles mesurables; on démontre également que l'aire ne dépend pas du quadrillage initial. On définit de même l'étendue à n dimensions.

II. Intégrale de Stieltjès

Prenons d'abord le cas d'une mesure *m non négative*. Soit E un ensemble mesurable par rapport à m et $\vec{f}(x)$ une fonction définie dans E dont la valeur est un vecteur ou un simple nombre réel.

Partageons E en un nombre fini d'ensembles e_i mesurables par rapport à m, dans chacun d'eux choisissons un point x_i, et formons la somme

$$\vec{S}=\sum_i \vec{f}(x_i)\, m(e_i)\,.$$

Nommons «maille» du partage le plus grand diamètre des e_i. Supposons qu'il existe un vecteur $\vec{I}$ vérifiant la condition suivante: à tout $\varepsilon>0$, on peut associer un $\alpha>0$ tel que, pour tout partage de maille au plus égale à α et tout choix des x_i, on ait $|\vec{I}-\vec{S}|<\varepsilon$ (les deux barres verticales indiquant qu'il s'agit de la longueur du vecteur). On dit allors «que $\vec{S}$ a pour limite $\vec{I}$ quand la maille tend vers zéro», que $\vec{f}$ est «*intégrable par rapport à* m» et que $\vec{I}$ est «*l'intégrale (de Stieltjès) de* $\vec{\mathrm{f}}$, *sur l'ensemble* E, *prise par rapport à* m». On écrit $\vec{I}=\int_E \vec{f}\,dm$.

Si $\vec{f}(x)$ est *uniformément continue sur* E, (c'est-à-dire, si à tout $\eta>0$, on peut associer un $\alpha>0$ tel que l'on ait $|\vec{f}(x_1)-\vec{f}(x_2)|\leq\eta$ dès que x_1 et x_2 sont distants d'au plus α), on peut démontrer immédiatement que l'intégrale existe. En effet, pour deux partages de maille au plus $\alpha/2$, en ensembles e_i et e'_j, et pour des choix arbitraires de x_i dans e_i et de x'_j dans e'_j, on a, en désignant par e_{ij} l'intersection de e_i et e'_j, et en supposant m nul pour l'ensemble vide,

$$\vec{S}-\vec{S'}=\sum_i \vec{f}(x_i)\, m(e_i)-\sum_j \vec{f}(x'_j)\, m(e'_j)=$$
$$=\sum_i\sum_j\left[\vec{f}(x_i)-\vec{f}(x'_j)\right] m(e_{ij})\,.$$

Un terme de cette dernière somme est nul si e_i et e_j n'ont pas de point commun, il est en longueur au plus égal à $\eta m(e_{ij})$ dans le cas contraire, et l'on a

$$|\vec{S}-\vec{S'}|\leq\sum_i\sum_j \eta m(e_{ij})=\eta m(E)\,,$$

nombre aussi petit qu'on le veut pourvu que α soit assez petit.

Il en résulte immédiatement la convergence des sommes $\vec{S}_n$, correspondant à des partages dont la maille tend vers zéro, vers une limite unique. On a en effet $|\vec{S}_{n+p}-\vec{S}_n|<\varepsilon$, quel que soit $\varepsilon>0$ pourvu que n soit assez grand, la suite $\vec{S}_n$ vérifie donc le critère de Cauchy et converge.

Le théorème s'étend au cas où $\vec{f}$ présente certaines discontinuités.

Si m représente la longueur, l'aire, le volume, l'intégrale par rapport à m se réduit aux intégrales ordinaires simple, double, triple, d'une fonction vectorielle.

Supposons que la mesure m *prenne des valeurs négatives.* Nous admettrons alors que les sommes $\sum_i |m(e_i)|$ correspondant aux divers partages de E sont bornées par une nombre fixe. On dit dans ce cas que *la mesure* m *est à variation bornée sur* E. Si nous formons les sommes $\sum_i |m(e_i)|$ pour une partie fixe de A, leur borne supérieure constitue une fonction d'ensemble $\mu(A)$, définie pour les mêmes ensembles que m, et dont on vérifie qu'elle est additive. La démonstration de l'existence de l'intégrale reste valable en remplaçant $m(e_{ij})$ par $\mu(e_{ij})$.

D'ailleurs $\mu' = \mu - m$ constitue également une mesure non négative, et m est la différence de deux mesures non négatives.

Supposons enfin que $\vec{m}$ *prenne des valeurs vectorielles.* Si f est numérique, on considérera la somme

$$\sum f(x_i)\, \vec{m}(e_i) .$$

Si $\vec{f}$ est un vecteur du même espace que $\vec{m}$, on pourra considérer les sommes

$$\sum \vec{f}(x_i) \cdot \vec{m}(e_i) , \quad \sum \vec{f}(x_i) \wedge \vec{m}(e_i) .$$

Si ces expressions ont des limites, on les désignera par les symbôles

$$\int_E f\, \vec{dm} , \quad \int_E \vec{f} \cdot \vec{dm} , \quad \int_E \vec{f} \wedge \vec{dm} .$$

Les deux derniers sont les intégrales de $\vec{f}$ prises *scalairement* et *vectoriellement* par rapport à $\vec{m}$. Si les sommes $\sum_i |\vec{m}(e_i)|$ sont bornées, la mesure $\vec{m}$ sera encore dite «à variation bornée sur E»; si de plus $\vec{f}$ est uniformément continue sur E, la démonstration donnée plus haut s'appliquera encore, et chacune des intégrales ci-dessus existera.

Quel que soit le type d'intégrale, on démontre aisément les égalités

$$\int_E (\vec{f} + \vec{g})\, dm = \int_E \vec{f}\, dm + \int_E \vec{g}\, dm , \quad \int_E \lambda \vec{f}\, dm = \lambda \int_E \vec{f}\, dm ,$$

λ étant constant, pourvu que les intégrales écrites existent. Ces égalités expriment que l'integrale est une *fonctionnelle linéaire*.

Citons encore, $\vec{k}$ étant un vecteur constant, les égalités

$$\int_E \vec{k} f\, dm = \vec{k} \int_E f\, dm , \quad \int_E \vec{k} \wedge \vec{f}\, dm = \vec{k} \wedge \int_E \vec{f}\, dm ,$$

$$\int_E (\vec{k} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{dm} = \vec{k} \cdot \int_E \vec{f} \wedge \vec{dm} .$$

L'intégrale d'une fonction fixe $\vec{f}$ *prise sur un ensemble variable* A *constitue une nouvelle fonction additive d'ensemble.* Si $\vec{f}$ est intégrable sur E, cette nouvelle fonction est définie pour tous les ensembles mesurables par rapport à m et contenus dans E, soit

$$\mu(A) = \int_A \vec{f}\, dm . \tag{1}$$

Le théorème est conséquence immédiate des définitions, et reste vrai quelle que soit la nature, scalaire ou vectorielle, de f, de m et de leur produit.

Soit $F(x)$ une fonction intégrable par rapport à la mesure μ définie par l'égalité (1). On démontre immédiatement, en remontant aux définitions, l'égalité

$$\int_E F\, \vec{d\mu} = \int_E F \vec{f}\, dm .$$

Autrement dit, le symbôle $\vec{d\mu}$ peut être remplacé par $\vec{f}\, dm$. La propriété reste vraie quelle que soit la nature de F, f, m et de leurs produits, pourvu que les expressions écrites aient un sens.

Densité. Étant données deux mesures, définies pour les mêmes ensembes, $\vec{\mu}$ vectorielle ou numérique, m numérique, supposons que le rapport $\dfrac{\vec{\mu}(e)}{m(e)}$ ait une limite $\vec{\varphi}$ quand l'ensemble e tend vers un point x_0, c'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ on puisse associer un $\eta > 0$, tel que pour tout ensemble e mesurable par rapport à m et dont tout point est au plus distant de η de x_0, on ait $\left| \dfrac{\vec{\mu}(e)}{m(e)} - \vec{\varphi} \right| < \varepsilon$. On dit alors que $\vec{\varphi}$ est la *densité de* $\vec{\mu}$ *par rapport à* m au point x_0. Le mot est consacré par l'usage en physique où, m désignant en général le volume, μ représente par exemple la masse ou une forme quelconque d'énergie. (Le mot «densité» est parfois employé en mathématiques dans un sens tout different, par exemple par M. Denjoy).

Si m est l'aire d'une surface ou la longueur d'un arc de courbe, on a des *densités superficielles* ou *linéaires.* Il est à peu près évident que la densité par rapport à m de la mesure μ definie par la formule (1) est égale à $\vec{f}(x)$ en tout point x où $\vec{f}$ est continue. C'est là une extension de la propriété élémentaire de la dérivée d'une intégrale ordinaire par rapport à sa borne supérieure.

Inversement, *si la densité* $\vec{\varphi}(x)$ *de* $\vec{\mu}$ *par rapport à m existe en tout point d'un ensemble* A, *supposé compact, c'est-à-dire fermé et borné, on démontre que* $\varphi(x)$ *est uniformément continue sur* A, *et que l'on a*

$$\vec{\mu}(e) = \int_e \vec{\varphi}(x)\, dm .$$

La démonstration peut être calquée sur celle de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un ensemble compact.

Cette réciproque cesse d'être exacte si la densité cesse d'exister en certains points.

Nous aurons besoin dans la suite de passer à la limite et de dériver sous le signe $\int$. Pour cela, nous admettrons que la mesure m vérifie la propriété suivante, qui équivaut à l'additivité complète : *pour une suite d'ensembles* A_n *mesurables par rapport à* m, *dont chacun contient le suivant et dont l'intersection est vide, les mesures* $m(A_n)$ *tendent vers zéro.* Cette propriété parait évidente dans les applications physiques, et se démontre pour l'aire, le volume ou l'étendue de dimension n.

Moyennant cette hypothèse, on démontre les théorèmes suivants, qui sont classiques dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue : soit $\vec{f}(x,t)$ une fonction intégrable sur E quelle que soit la valeur de la variable numérique t dans un intervalle ; désignons par $\vec{\mathcal{J}}(t)$ l'intégrale $\int_E \vec{f}\,dm$;

1°. Si quand t tend vers t_0, $\vec{f}(x,t)$ tend vers $\vec{f}(x,t_0)$ et si $|\vec{f}(x,t)|$ est borné par un nombre indépendant de x et t, alors $\vec{\mathcal{J}}(t)$ tend vers $\vec{\mathcal{J}}(t_0)$.

2°. Si $\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial t}$ existe dans tout un intervalle de t, est intégrable quel que soit t, et est bornée par un nombre indépendant de x et t, alors $\vec{\mathcal{J}}(t)$ a une dérivée égale à $\int_E \dfrac{\partial\vec{f}}{\partial t}\,dm$.

Les théorèmes s'appliquent encore pour $\vec{m}$ vectoriel et des intégrales prises scalairement ou vectoriellement.

III. Énoncé des principes mathématiques de la mécanique et de quelques-unes de leurs conséquences.

1. Torseurs. *Torseur réparti.* Considérons une mesure vectorielle $\vec{S}(e)$ définie pour un ensemble A. Partageons A en ensembles e_i mesurables par rapport à $\vec{S}$, choisissons un point M_i dans chaque e_i, et considérons le système des vecteurs glissants ayant pour origines les points M_i et pour valeurs $\vec{S}(e_i)$. Le moment de ce système par rapport à un point O est

$$\sum_i \overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{S}(e_i)$$

et tend vers

$$\vec{G}_0(A)=\int_A \overrightarrow{OM}\wedge d\vec{S}$$

lorsque la maille du partage tend vers zéro. A tout ensemble A mesurable par rapport à $\vec{S}$, nous avons ainsi associé un torseur de vecteur principal $\vec{S}(A)$ et de moment en O égal à $\vec{G}_0(A)$. C'est cette fonction que nous nommerons un «*torseur pur réparti*».

La notion coïncide avec celle d'un système de vecteurs glissants dans le cas où $\vec{S}$ est concentrée en un nombre fini de points.

On a évidemment

$$\vec{G}_{0'}(A)=\int_A \overrightarrow{O'M}\wedge d\vec{S}=\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{S}(A)+\vec{G}_0(A).$$

Plus généralement, nous appellerons *torseur réparti* un système constitué par une première mesure vectorielle $\vec{S}(e)$ et une deuxième mesure vectorielle, fonction d'un point O de l'espace et de e, soit $\vec{G}_0(e)$, et variant avec O suivant la loi

$$\vec{G}_{0'}(e)=\vec{G}_0(e)+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{S}(e).$$

La différence

$$\vec{w}(e)=\vec{G}_0(e)-\int_e \overrightarrow{OM}\wedge d\vec{S}$$

n'est plus nécessairement nulle, mais ne dépend pas de O comme on le vérifie immédiatement. On voit que tout torseur réparti est la somme de deux autres, l'un qui est *pur* et qui a pour vecteur principal $\vec{S}(e)$ et pour moment $\int_e \overrightarrow{OM}\wedge d\vec{S}$, et l'autre dont le vecteur principal est nulle pour tout ensemble e, et dont le moment en O a pour valeur $\vec{w}(e)$ et ne dépend pas de O. Un torseur ayant ces dernières propriétés sera appelé un «*couple pur réparti*». On rencontre des exemples de couple pur en magnétisme. Il est à remarquer que le système de deux vecteurs glissants opposés constituant un couple au sens élémentaire du mot n'est pas un couple pur, mais est au contraire un torseur pur réparti.

Un *corps doué de masse* C sera défini par une mesure m non négative définie pour l'ensemble des points de C et pour certaines de ses parties.

Barycentre. $\vec{k}$ étant un vecteur fixe, considérons le torseur pur réparti qui, pour un ensemble e, a pour vecteur principal $\int_e \vec{k}\,dm=m(e)\,\vec{k}$. Son moment en O est

$$\int_e \overrightarrow{OM}\wedge\vec{k}\,dm=\Big(\int_e \overrightarrow{OM}\,dm\Big)\wedge\vec{k}.$$

Si on désigne par G un point tel que

$$m(e)\,\overrightarrow{OG}=\int \overrightarrow{OM}\,dm, \qquad (2)$$

on voit que ce moment est $\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{k} m(e)$, donc égal à celui d'un vecteur unique d'origine G et égal à $k m(e)$.

Le point G défini par (2) est indépendant de O comme on le vérifie immédiatement. C'est par définition le *barycentre* du corps e.

C'est aussi la limite des barycentres des systèmes de points obtenus en partageant e en ensembles partiels, en concentrant la masse de chacun en l'un de ses points, et en faisant tendre vers zéro la maille du partage.

De même, le *moment d'inertie* d'un corps C doué de masse, par exemple par rapport à une droite, sera l'intégrale $\int_C \delta^2 \, dm$, où δ représente la distance d'un point du corps à la droite. C'est encore la limite des moments d'inertie d'un système de points, comme pour le barycentre.

2. Cinématique. Un *corps en mouvement* (le système de plusieurs corps solides, par exemple, étant considéré comme un unique corps déformable) sera défini au moyen d'un ensemble K, appelé *image fixe du corps*, et d'une fonction $M(P,t)$ définie quand P est un point de l'image fixe, et quand t, qui désigne le temps, appartient à un certain intervalle.

Pour chaque valeur de t, $M(P,t)$ établit en général une correspondance biunivoque entre K et un ensemble C_t d'un espace euclidien E qui est *le corps considéré à l'instant t*.

Nous pouvons rapporter le mouvement du corps à un repère quelconque R en mouvement par rapport à l'espace E.

La vitesse et l'accélération du point M du corps relatives au repère R sont alors les dérivées

$$\overrightarrow{V} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{\Gamma} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{M}}{\partial t^2}$$

prises relativement à R. Nous admettrons que ces dérivées existent et satisfont à des conditions de continuité suffisantes pour pouvoir effectuer les dérivations sous le signe $\int$ que nous rencontrerons.

Supposons que le corps en mouvement soit doué de masse. A chaque instant, nous avons une mesure m^t définie pour C_t et pour certaines de ses parties. Un ensemble c_t mesurable à un instant t par rapport a m_t reste mesurable et conserve la même masse $m_t(c_t)$ à tout instant. Un tel ensemble sera un «*corps partiel*». Il suffit de se donner une mesure μ dans l'image fixe K telle que $m_t(c_t) = \mu(k)$, en désignant par k l'image fixe de c_t.

Il y a parfois lieu d'admettre que la correspondance entre k et C_t n'est plus biunivoque, deux points matériels pouvant occuper la même position au même instant: par exemple, si on étudie le mouvement d'un point matériel sur une surface elle-même matérielle; la coïncidence physique n'existe pas, mais pour schématiser simplement le système, il faut admettre la coïncidence mathématique. Chaque fois qu'une telle circonstance entrainerait une dificulté, par exemple pour les intégrales que nous allons considérer, il suffirait de revenir à l'image fixe.

Voici une propriété que nous utiliserons constamment: soit $\overrightarrow{f}(P,t)$ une fonction dont la dérivée $\frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial t}$ existe, est bornée en P et t, et est intégrable sur K par rapport à μ. La fonction

$$\overrightarrow{I}(t) = \int_K \overrightarrow{f}(P,t)\, d\mu$$

admet une dérivée par rapport à t égale à $\int_K \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial t} d\mu$.

Si la correspondance entre K et C_t est biunivoque, on peut écrire cette égalité sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \overrightarrow{f}\, dm_t = \int_{C_t} \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial t} dm_t,$$

bien que C_t et m_t dépendent de t.

3. Dynamique. La *quantité de mouvement* du corps est le torseur réparti qui a pour vecteur principal (en omettant les indices t)

$$\overrightarrow{Q}(c) = \int_c \overrightarrow{V}\, dm = \int_k \overrightarrow{V}\, d\mu;$$

son moment résultant en un point O, aussi appelé moment cinétique, est

$$\overrightarrow{\sigma_0}(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dQ} = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}\, dm.$$

La *quantité d'accélération* est le torseur pur réparti qui a pour vecteur principal

$$\overrightarrow{R}(c) = \int_c \overrightarrow{\Gamma}\, dm;$$

son moment résultant en O est

$$\int_c \overrightarrow{OM} \wedge dR.$$

Repère galiléen et force répartie. Principe fondamental. Considérons d'une part un repère particulier dit «galiléen» et d'autre part un certain nombre de torseurs répartis, définis pour les ensembles mesurables par rapport à la masse, et dépendant du temps; chacun d'entre eux constituera, par définition, une «*force absolue répartie appliquée au corps*» (ou un «dynâme» suivant le terme employé par M. Brelot). Pour un nombre fini de points, une «force répartie» se réduit à des vecteurs appliqués en chaque point. Le principe fondamental de la dynamique s'énonce ainsi:

Le torseur réparti somme des forces absolues appliquées au corps est égal à la quantité d'accélération, évaluée dans le repère galiléen.

La somme des forces absolues est donc un torseur pur; chacune d'elles renferme peut-être un couple pur, mais l'égalité des moments des deux torseurs se traduit par le fait que la somme de ces couples est nulle. Si on désigne par $\vec{A}_k(c)$ les vecteurs principaux des différentes forces $(k=1,2,\cdots,q)$, et par $\vec{\lambda}_k(c)$ les moments des couples purs correspondants, le principe s'écrit

$$\sum \vec{A}_k(c) = \int_c \vec{\Gamma}\, dm\,, \quad \sum \vec{\lambda}_k(c) = 0\,.$$

Remarquons que tout repère R en translation rectiligne et uniforme par rapport au précédent vérifiera encore le principe; nous le nommerons encore *galiléen.*

Pour un repère quelconque R_1, on aurait

$$\vec{\Gamma}_1 = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}_e - \vec{\Gamma}_c\,,$$

$\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{\Gamma}_c$ étant les accélérations d'entrainement et complémentaire du point M, correspondant au passage de R à R_1. Si on nomme «forces d'inertie complémentaire et d'entrainement» les torseurs répartis purs qui ont pour vecteurs principaux

$$\int_c -\vec{\Gamma}_e\, dm\,, \quad \int_c -\vec{\Gamma}_c\, dm\,,$$

le principe peut s'énoncer:

La somme des forces absolues et des forces d'inertie d'entrainement et complémentaire correspondant au passage d'un repère galiléen à un repère R_1 est égale à la quantité d'accélération évaluée dans le repère R_1 (on peut appeler cette dernière somme «force totale relative au repère R_1 appliquée au corps», généralisant l'expression adoptée par Painlevé dans le cas d'un seul point).

Forces intérieures et extérieures. Parmi les forces absolues appliquées au corps, les unes sont appelées «intérieures» et satisfont à la condition de prendre une valeur nulle pour le corps tout entier C, c'est-à-dire d'avoir un vecteur principal et un moment nul pour C)[1]. Les autres forces seront appelées «extérieures», y compris les forces d'inertie d'entrainement et complémentaire voulues si le repère n'est pas galiléen.

Si nous désignons par $\vec{S}_e(c)$ et $\vec{w}_e(c)$ le vecteur principal et le moment du couple pur de la somme des forces extérieures, et par $\vec{S}_i(c)$ et $\vec{w}_i(c)$ les mêmes éléments relatifs à la somme des forces intérieures, nous avons, par définition,

$$\vec{S}_i(C) = 0\,, \quad \vec{w}_i(C) + \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS_i} = 0\,.$$

Mais comme $\vec{w}_e(c) + \vec{w}_i(c) = 0$ quel que soit c, on en déduit

$$\vec{w}_e(C) = \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS_i}\,.$$

4. Théorèmes ne faisant intervenir que les forces extérieures. Désignons par $\vec{S}(c)$ le vecteur principal de toutes les forces. L'égalité $\vec{S}(C) = \int_C \vec{\Gamma}\, dm$ s'écrit, puisque $\vec{S}(C) = \vec{S}_e(C)$,

$$\vec{S}_e(C) = \int_C \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\, dm = \frac{d}{dt}\int_C \vec{V}\, dm = \frac{d\vec{Q}(C)}{dt}\,,$$

le vecteur principal des forces extérieures pour le corps entier est égal à la dérivée du vecteur principal de la quantité de mouvement du corps entier.

De plus, si G désigne le barycentre du corps entier,

$$\vec{S}_e(c) = \frac{d}{dt}\int_C \vec{V}\, dm = \frac{d}{dt}\int_C \frac{\partial\, \overrightarrow{OM}}{dt}\, dm =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\int_c \overrightarrow{OM}\, dm = m(C)\,\frac{d^2\, \overrightarrow{OG}}{dt^2}\,,$$

d'où, le barycentre du corps a même mouvement que si toute la masse y était concentrée, et si une force égale au vecteur principal des forces extérieures pour le corps entier lui était appliquée.

Si $\vec{G}_o(c)$ désigne le moment en O de la somme de toutes les forces, et $\vec{G}_{oe}(c)$ celui de la somme des forces extérieures, le principe fondamental donne, en égalant les moments pour le corps entier,

$$\vec{G}_{oe}(C) = \vec{G}_o(C) = \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}\, dm\,.$$

Mais

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V})\,,$$

d'où

$$\vec{G}_{oe}(C) = \frac{d}{dt}\int_C \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}\, dm = \frac{d\vec{\sigma}_0(C)}{dt}\,,$$

[1] Cette condition équivaut à la suivante: si on partage C en deux corps partiels C' et C'', les valeurs d'un même force répartie prise pour C' et C'' auront des vecteurs principaux et des moments opposés.

en désignant par $\vec{\sigma}_0(C)$ le moment en O du torseur quantité de mouvement du corps, que nous nommerons *moment cinétique*. C'est le thérème du moment cinétique pour un point O fixe dans le repère où l'on s'est placé.

Pour un point mobile A, on aurait:

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(C)}{dt}=\frac{d}{dt}\int_C \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}\,dm=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO}\wedge\int_C\vec{V}\,dm+\vec{\sigma}_0\right)=$$

$$=-\vec{V}_A\wedge\vec{Q}(C)+\vec{G}_{Ae}(C),$$

forme commode lorsqu'une force inconnue se réduit à un vecteur passant par A.

5. Théorèmes faisant intervenir les forces intérieures. *Théorème de l'énergie cinétique. Puissance d'un torseur pour un champ de vecteurs.* Pour un point, le théorème de l'énergie cinétique revient, comme on sait, à projeter l'égalité fondamentale sur la tangente à la trajectoire, ou encore à multiplier scalairement les deux membres par par la vitesse. Ici, c'est l'égalité $\vec{S}(e)=\int_c\vec{\Gamma}\,dm$, ou plutôt sa forme symbolique $\overrightarrow{dS}=\vec{\Gamma}\,dm$, dont nous multiplierons les deux membres par $\vec{V}$:

$$(1)\qquad \int_C\vec{V}\cdot\overrightarrow{dS}=\int_C\vec{\Gamma}\cdot\vec{V}\,dm.$$

Le second membre s'écrit

$$\int_C\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot\vec{V}\,dm=\frac{d}{dt}\int_C\frac{1}{2}\vec{V}^2\,dm$$

cette dernière intégrale sera, par définition, l'*énergie cinétique* du corps:

$$T=\int_C\frac{1}{2}\vec{V}^2\,dm.$$

Le premier membre de (1) est de la forme $\int_C\vec{W}\cdot\overrightarrow{dS}$. Si $\vec{W}$ désigne un champ de vecteurs quelconque, cette intégrale sera appelée *puissance du torseur de vecteur principal* $\vec{S}(e)$ pour le champ de vecteurs $\vec{W}$.

Si $\vec{W}$ est la vitesse $\vec{V}$ du point M, nous dirons que l'intégrale est la *puissance réelle* $\mathscr{P}(C)$ *du torseur*, et le *travail fourni par le torseur entre deux instants* t_1 *et* t_2 est, par définition, [1]

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{P}\,dt.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$\mathscr{P}=\frac{dT}{dt}$$

et constitue le théorème de l'énergie cinétique. En intégrant de t_0 à t_1, on l'obtient sous la forme dite «finie».

Puissance des forces appliquées à un corps solide. Si $\vec{\omega}$ désigne la rotation instantanée du solide, et O un de ses points, la vitesse d'un point quelconque est donnée par la formule

$$\vec{V}=\vec{V}_0+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM},$$

et la puissance cherchée est

$$\mathscr{P}(C)=\int_C\vec{V}\cdot\overrightarrow{dS}=\vec{V}_0\cdot\int_C\overrightarrow{dS}+\int_C(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{dS}.$$

Mais la dernière intégrale s'écrit

$$\vec{\omega}\cdot\int_C\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dS},$$

et l'on a

$$\int_C\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dS}=\int_C\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dS}_e+\int_C\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dS}_i=$$

$$=\int_C\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dS}_e+\vec{w}_e(c)=\vec{G}_{oe}(C).$$

On en déduit

$$\mathscr{P}(C)=\vec{V}_o\cdot\vec{S}_e(C)+\vec{\omega}\cdot\vec{G}_{oe}(C).$$

Dans le cas où la somme des forces extérieures est un torseur pur, il en est de même de la somme des forces intérieures, et *la puissance de ces dernières est nulle.*

Principe de d'Alembert. Comme pour le théorème de l'énergie cinétique, l'égalité fondamentale $S(c)=\int_C\vec{\Gamma}\,dm$ donne, quel que soit le champ de vecteurs $\vec{W}$,

$$(2)\qquad \int_C\vec{W}\cdot\overrightarrow{dS}=\int_C\vec{W}\cdot\vec{\Gamma}\,dm.$$

Cette opération, effectuée pour un nombre fini de points, revient à projeter pour chaque point l'égalité fondamentale sur une direction convenablement choisie, et à faire une combinaison linéaire des égalités obtenues, en opérant de manière à éliminer les forces inconnues.

Au premier membre de (2) figure la puissance de toutes les forces pour le champ de vecteur $\vec{W}$. Or,

[1] Cette définition ne répond au sens physique de la puissance et du travail que dans le cas d'un torseur pur. Si le couple pur n'est pas nul, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour évaluer le travail «physique» du torseur, mais la définition mathématique donnée ici s'applique dans tous les cas.

d'après la nature physique des problèmes que se pose d'ordinaire la dynamique, les forces sont pour la plupart inconnues, mais leur puissance est connue pour certains mouvements du corps. Il est donc nécessaire de considérer les vecteurs $\vec{W}$ comme les vitesses des points du corps dans un certain mouvement fictif, dit «virtuel», pour lequel cette puissance est connue. Ce mouvement sera défini par un e fonction $M(P,\theta)$, θ étant un paramètre qui peut être appelé le «temps virtuel». On dit alors que $\vec{W}=\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}$ constitue un «champ de vitesses virtuelles». Le mouvement virtuel sera considéré comme rapporté à un repère fixe par rapport à la configuration du corps à l'instant t.

Il est commode de partager les forces en deux catégories, les unes dont la puissance sera connue pour les mouvements virtuels que l'on envisagera et qui seront appelées *forces données* ou *actives,* les autres dont la puissance sera nulle pour ces mêmes mouvements et qu'on nommera *forces de liaision.* Les mouvements virtuels pour lesquels la puissance totale des forces de liaison sera nulle seront dits «*utilisables pour le partage des forces considéré*».

Si on désigne par $S_D(c)$ la somme géométrique de la somme des forces données, l'équation (2) s'écrit

$$\int_c \vec{W}\cdot\overrightarrow{dS_D}=\int_c \vec{W}\cdot\vec{\Gamma}\,dm\,, \tag{3}$$

et s'énonce ainsi: *pour tout mouvement virtuel utilisable vis-à-vis du partage des forces considéré, la puissance virtuelle des forces données est égale à la puissance virtuelle de la quantité d'accélération réelle.* C'est une forme généralisée du principe de d'Alembert.

Système dépendant d'un nombre fini de paramètres. Supposons que les configurations du corps à priori possibles à un instant t, et assez voisines d'une configuration donnée puissent être mises en correspondance biunivoque et bicontinue avec les systèmes de valeurs de r paramètres $q_1,\cdots,q_r$ appartenant à un domaine de l'espace à r dimensions.

Le point M se présente comme une fonction de P, $q_1,\cdots,q_r,t$:

$$M(P,q_1,\cdots,q_r,t)\,,$$

et un mouvement réel du système est défini par la donnée des q_α en fonction du temps.

Nous limitant aux mouvements virtuels obtenus en considérant les q_α comme fonctions du temps virtuel θ, et en laissant t constant, et désignant par $\frac{\delta q_\alpha}{\delta\theta}$ la dérivée de q_α par rapport à θ, nous avons

$$\vec{W}=\sum_\alpha \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha}\frac{\delta q_\alpha}{\delta\theta}.$$

Le premier membre de l'équation de d'Alembert (3) s'écrit

$$\int_c \vec{W}\cdot\overrightarrow{dS_D}=\sum_\alpha Q_\alpha\frac{\delta q_\alpha}{\delta\theta}\,,$$

en désignant par Q_α l'intégrale $\int_c \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha}\cdot\overrightarrow{dS_D}$, qu'on peut appeler «*puissance des forces données par rapport à* q_α».

Le deuxième membre s'écrit

$$\int_c \vec{W}\cdot\vec{\Gamma}\,dm=\sum_\alpha L_\alpha\frac{\delta q_\alpha}{\delta\theta}\,,$$

L_α désignant l'intégrale $\int_c \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha}\cdot\vec{\Gamma}\,dm$, et étant appelé «*expression de Lagrange relative au paramètre* q_α».

L'équation de d'Alembert s'écrit alors

$$\sum_\alpha (L_\alpha-Q_\alpha)\,\delta q_\alpha=0\,, \tag{4}$$

les δq_α devant correspondre à un mouvement virtuel utilisable vis-à-vis du partage des forces.

Les mouvements virtuels utilisables sont généralement caractérisés par des relations linéaires (R) *entre les* δq_α *qui permettent d'exprimer* $r-p$ *d'entre eux en fonction des autres. Il suffit de reporter leurs valeurs dans* (4), *et d'annuler les coëfficients des* δq_α *restants, pour obtenir* p *équations du mouvement.* On opère souvent un peu autrement en identifiant le premier membre de (4) avec une combinaison linéaire des premiers membres des relations (R), dont les coëfficients indéterminés constituent de nouvelles inconnues appelées «multiplicateurs», mais souvent ce procédé ne présente pas d'avantage. Si certaines liaisons sont imposées au système en plus de celles qui résultent de sa description au moyen des r paramètres, q_α, elles se traduisent par des relations (ρ) sous forme finie ou différentielle qu'il faut adjoindre aux p équations obtenues.

On dit que les liaisons sont *parfaites* pour le partage des forces envisagé si tous les mouvements virtuels compatibles avec les liaisons telles quelles sont imposées à l'instant t sont «utilisables», c'est à dire donnent une puissance nulle pour les forces «de liaison». En ce cas les relations (R) ne sout autres que celles qu'on déduit des relations (ρ) en faisant t constant et remplaçant les dq_α par les δq_α.

Si en outre les relations (ρ) n'existent pas, les δq_α sont arbitraires, et on obtient pour le mouvement les r équations dites «de Lagrange»:

$$L_\alpha - Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, r)$$

Transformations de Lagrange et d'Appell. Les expressions L_α sont susceptibles de prendre deux formes commodes. On a

$$\vec{V} = \sum_\alpha \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial t},$$

$$\vec{\Gamma} = \sum_\alpha \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha} q''_{\alpha^2} + \vec{g}\,(q_1, \cdots, q_r, q'_1, \cdots, q'_r, t, P)\,.$$

Les intégrales

$$T = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \vec{V}^2\, dm\,, \quad F = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \vec{\Gamma}^2\, dm\,,$$

dont la première est l'énergie cinétique, et dont la deuxième est appelée *«énergie d'accélération»* du corps, peuvent être considérées comme des fonctions des q'_α, q_α, t pour la première, $q''_{\alpha^2}, q'_\alpha, q_\alpha, t$ pour la deuxième.

Adoptant ce point de vue, on peut écrire

$$L_\alpha = \int_{\mathcal{C}} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\Gamma}\, dm = \int_{\mathcal{C}} \vec{\Gamma} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial \Gamma}}{\partial q''_{\alpha^2}}\, dm = \frac{\partial F}{\partial q''_{\alpha^2}},$$

c'est la *transformation d'Appell.*

D'autre part, en remarquant que $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha} = \dfrac{\overrightarrow{\partial V}}{\partial q'_\alpha}$, et en intervertissant les symbôles $\dfrac{d}{dt}$ et $\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}$, on a

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\Gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{V}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial q_\alpha}\right) \cdot \vec{V} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{\partial V}}{\partial q'_\alpha} \cdot \vec{V}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right) \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha},$$

d'où

$$L_\alpha = \int_{\mathcal{C}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q'_\alpha}\right) dm - \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha}\, dm = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}.$$

C'est la *transformation de Lagrange.*

(Continua)

Integrabilidade *R* das funções contínuas*

por ***A. Pereira Gomes***

Do mesmo modo que a construção do integral $\mathcal{L}$ (Lebesgue) tem por base a noção de medida $\mathcal{L}$, o integral $\mathcal{R}$ (Riemann) pode ser construído (segundo um processo perfeitamente análogo) a partir da medida $\mathcal{J}$ (Jordan) [1].

Um problema que se apresenta naturalmente é o de relacionar a família das funções integráveis com a família das funções contínuas. A êsse respeito, um resultado fundamental é que a integrabilidade duma função equivale à sua mensurabilidade.

No caso do integral $\mathcal{L}$, a integrabilidade das funções contínuas resulta, pois, imediatamente do facto destas funções serem mensuráveis $\mathcal{L}$, isto é, de o conjunto $M(\lambda)$, dos pontos x tais que $f(x) \geq \lambda$, ser mensurável $\mathcal{L}$ qualquer que seja λ; com efeito, sendo a função f contínua, êste conjunto é sempre fechado.

A mensurabilidade $\mathcal{J}$ duma função pode definir-se por uma condição análoga à da mensurabilidade $\mathcal{L}$, incidindo sôbre os mesmos conjuntos $M(\lambda)$, na qual a medida $\mathcal{J}$ vem ocupar o lugar da medida $\mathcal{L}$.

Vamos demonstrar um teorema que permite caracterizar a família das funções mensuráveis $\mathcal{J}$ por uma condição onde intervém a continuïdade.

Seja f uma função numérica finita, definida num espaço euclideano I, e seja A um subconjunto de I mensurável $\mathcal{J}$ [Nota 1]. Diz-se que f é *mensurável em* A, se os conjuntos $M_A(\lambda)$, dos pontos $x \in A$ tais que $f(x) \geq \lambda$, são mensuráveis, com excepção, quando muito, para uma infinidade numerável de valores de λ (isto é, se os conjuntos $M_A(\lambda)$ são *quási sempre* mensuráveis).

Teorema: *Para que* f *seja mensurável em* A *é necessário e suficiente que o conjunto dos seus pontos de descontinuïdade em* A, *relativamente a* A, *seja um conjunto de medida* $\mathcal{L}$ *nula.*

Condição necessária — Seja D o conjunto de todos os pontos de A onde a função f é descontínua relativamente a A e suponhamos que f é mensurável em A; mostremos que $m(D) = 0$.

---

* Inserimos a seguir uma série de *Notas*, com o fim de facilitar a leitura dêste artigo aos leitores da G. M. menos familiarizados com as noções e a terminologia aqui usadas.

[1] Veja-se a *Bibliografia*. No seu próximo número, a *Gazeta de Matemática* publicará um artigo do Prof. Ruy Luís Gomes sôbre a construção da noção de integral baseada na medida J.

Por hipótese, os valores de λ para os quais $M_A(\lambda)$ não é mensurável constituem, quando muito, um conjunto numerável $\{\lambda_n\}$. O complementar de $\{\lambda_n\}$ é, portanto, um conjunto denso no conjunto dos números reais. Como a recta euclideana R é um espaço separável, êste conjunto denso contém um subconjunto numerável $\{\mu_n\}$ também denso [NOTA 2]. Consideremos a família W dos intervalos semi-abertos $[\mu_m, \mu_n)$ cujos extremos pertencem a $\{\mu_n\}$; se a cada ponto de R associarmos os intervalos de W que contêm êsse ponto, obtêm-se um sistema de vizinhanças admissíveis para R [NOTA 3]. São estas as vizinhanças que utilizaremos ao analisar a continuïdade da função f [NOTA 4].

Seja $x \in D$; tratando-se dum ponto de descontinuïdade de f relativamente a A, existem μ_m e μ_n tais que (1) $\mu_m \leq f(x) < \mu_n$ e (2) cada vizinhança $V(x)$, do ponto x, contém pontos $y \in A$ para os quais $f(y) \notin [\mu_m, \mu_n)$, isto é, ou $f(y) \geq \mu_n$ ou $f(y) < \mu_m$; a relação (1) diz-nos que $x \in M_A(\mu_m) \cdot I - M_A(\mu_n)$; (2) diz-nos que $x \in \overline{M_A(\mu_n) + I - M_A(\mu_m)}$. Assim, tem-se

$$x \in \overline{M_A(\mu_m)} \cdot \overline{I - M_A(\mu_n)} \cdot [\overline{M_A(\mu_n)} + \overline{I - M_A(\mu_m)}] ;$$

designando a fronteira dum conjunto X por $f_r(X) = \overline{X} \cdot \overline{I - X}$, obtém-se

$$x \in f_r(M_A(\mu_n)) + f_r(I - M_A(\mu_m)) .$$

Donde

$$(3) \qquad D \subset \sum [f_r(M_A(\mu_n)) + f_r(I - M_A(\mu_m))] ,$$

sendo a soma $\sum$ estendida a todos os valores $\mu_m, \mu_n \in \{\mu_n\}$.

Atendendo a que $\{\mu_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ não têm elementos comuns, é imediato que cada um dos têrmos desta soma tem medida $\mathcal{J}$ nula. A sua medida $\mathcal{L}$ é portanto nula [NOTA 1]. O segundo membro de (3), como soma duma infinidade numerável de conjuntos de medida $\mathcal{L}$ nula, é um conjunto de medida $\mathcal{L}$ nula. E como todo o subconjunto dum conjunto de medida $\mathcal{L}$ nula tem medida $\mathcal{L}$ nula, concluímos que $m(D) = 0$.

Condição suficiente — Suponhamos que $m(D) = 0$, e mostremos que, então, f é mensurável $\mathcal{J}$. Para isso basta mostrar que $f_r(M_A(\lambda))$ tem *quási sempre* medida $\mathcal{J}$ (ou $\mathcal{L}$ — NOTA 1) nula.

Seja $x \in f_r(M_A(\lambda))$. Se $x \in I - A$, como $f_r(M_A(\lambda)) \subset \subset \overline{M_A(\lambda)} \subset \overline{A}$, é $x \in \overline{A} \cdot I - A \subset f_r(A)$.

Se $x \in A$ e $f(x) \gtrless \lambda$, então $x \in D$; na verdade, se supuzermos $f(x) > \lambda$, tem-se $x \in M_A(\lambda)$; e como $x \in f_r(M_A(\lambda))$ será x um ponto de $\overline{I - M_A(\lambda)}$; quere dizer, cada vizinhança $V(x)$ tem pelo menos um ponto $y \in I - M_A(\lambda)$, sendo portanto $f(y) < \lambda$; então o intervalo $(\lambda, f(x) + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, contém $f(x)$, e qualquer vizinhança $V(x)$ tem pelo menos um ponto $y \in A$ tal que $f(y) \notin (\lambda, f(x) + \varepsilon)$, o que traduz a descontinuïdade de f no ponto x relativamente a A [NOTA 4]. Anàlogamente, se $f(x) < \lambda$.

Se $x \in A$ e $f(x) = \lambda$, consideremos o conjunto $A \cdot f^{-1}(\lambda)$. Tem-se $Af^{-1}(\lambda) = (A - D) f^{-1}(\lambda) + + D f^{-1}(\lambda)$. Como por hipótese $m(D) = 0$, é $m(Df^{-1}(\lambda)) = 0$; por outro lado, visto que f é contínua em $A - D$ relativamente a A, o conjunto $(A - D) f^{-1}(\lambda)$ é fechado relativamente a $A - D$, portanto igual à intersecção de $A - D$ com um conjunto fechado [NOTA 4]; ora $A - D$ é mensurável $\mathcal{L}$ e todo o conjunto fechado é mensurável $\mathcal{L}$; logo $(A - D) f^{-1}(\lambda)$ é mensurável $\mathcal{L}$. Assim, $Af^{-1}(\lambda)$ é é a soma de conjuntos mensuráveis $\mathcal{L}$ e portanto é mensurável $\mathcal{L}$.

Mostremos que êste conjunto tem *quási sempre* medida nula, isto é, que o conjunto $E_\lambda [m(Af^{-1}(\lambda)) > 0]$, dos valores de λ para os quais $m(Af^{-1}(\lambda)) > 0$, é quando muito numerável.

Na verdade,

$$(4) \qquad E_\lambda [m(Af^{-1}(\lambda)) > 0] = \sum_n E_\lambda \left[m(Af^{-1}(\lambda)) > \frac{1}{n} \right] ;$$

e como $m(A) = J(A)$ é finita, $E_\lambda \left[m(Af^{-1}(\lambda)) > \frac{1}{n} \right]$ é, para cada inteiro n, um conjunto finito; pois que se existisse um inteiro n e um conjunto infinito $\{\lambda_i\}$ tal que, para cada λ_i, $m(Af^{-1}(\lambda_i)) > \frac{1}{n}$, teríamos

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(Af^{-1}(\lambda_i)) = +\infty ;$$

ora, como $\lambda_i \neq \lambda_j$ implica $f^{-1}(\lambda_i) \cdot f^{-1}(\lambda_j) = O$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{p} m(Af^{-1}(\lambda_i)) = m\left(\sum_{i=1}^{p} Af^{-1}(\lambda_i) \right) \leq m(A) ,$$

donde

$$\sum_{1}^{\infty} m(Af^{-1}(\lambda_i)) = \lim_{p=\infty} \sum_{1}^{p} m(Af^{-1}(\lambda_i)) \leq m(A) < +\infty .$$

O primeiro membro de (4), sendo uma soma numerável de conjuntos finitos, é numerável.

Em resumo: se $x \in f_r(M_A(\lambda))$, ou $x \in f_r(A)$, ou $x \in D$, ou $x \in A \cdot f^{-1}(\lambda)$; quere dizer,

$$f_r(M_A(\lambda)) \subset f_r(A) + D + Af^{-1}(\lambda) ;$$

e vimos que o segundo membro desta relação é quási sempre um conjunto de medida $\mathcal{L}$ nula.

O Teorema está portanto demonstrado.

OBSERVAÇÕES

1.ª] Limitamo-nos a considerar o caso de ser f uma função finita, por ser êsse caso que nos interessa, em última análise, para o problema da integração.

Na realidade essa restrição pode ser levantada. Deixamos ao cuidado do leitor verificar que o mesmo teorema relativo a funções numéricas quaisquer se pode estabelecer com ligeiras adaptações na demonstração que acima desenvolvemos.

2.ª] O teorema demonstrado fornece um critério de mensurabilidade $\mathcal{J}$ duma função à custa da medida $\mathcal{L}$. Um problema que se apresenta naturalmente é o de estabelecer um critério de mensurabilidade $\mathcal{J}$ duma função em têrmos de medida $\mathcal{J}$.

A êste respeito sugerimos ao leitor a demonstração do

Teorema: *Para que* f *seja mensurável $\mathcal{J}$ sôbre um conjunto* A *mensurável é necessário e suficiente que a medida $\mathcal{J}$ do conjunto dos pontos interiores a* A *onde a oscilação de* f *é* >0 *seja nula.*

BIBLIOGRAFIA

O. Frink Jr. — *Jordan measure and Riemann integration,* Annals of Maths., vol. 34 (1933).

O. Haupt und G. Aumann — *Differential und Integralrechnung,* III Band: *Integralrechnung* (Berlin, 1938).

Alexandroff und Hopf — *Topologie.* I (Berlin, 1935).

Ver também: Cadernos de Análise Geral (J. I. M.): *Teoria Geral da Medida* — 2: *Medida à Jordan,* por Laureano Barros; — 5: *Medida à Lebesgue e medida a Carathéodory,* por L. Neves Real.

Topologia Geral — 3: *Funções contínuas,* por A. Pereira Gomes; 5 — *Bases e Vizinhanças,* por A. Pereira Gomes.

NOTAS

Nota 1: Partindo do corpo dos agregados, a *medida exterior* $\mathcal{J}$ dum conjunto limitado X define-se como sendo o ínfimo das áreas dos agregados que contêm X; e chama-se *medida interior* $\mathcal{J}$ dum conjunto X ao supremo das áreas dos agregados que estão contidos em X.

Se o conjunto limitado X tem uma medida exterior igual à medida interior, X diz-se *mensurável* $\mathcal{J}$; e o valor comum daquelas medidas chama-se *medida* $\mathcal{J}$ de X e representa-se por $J(X)$.

Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto limitado seja mensurável $\mathcal{J}$ é que a medida exterior da sua fronteira seja nula: $J(f_r(X))=0$. Como é sabido, todo o conjunto mensurável $\mathcal{J}$ é mensurável $\mathcal{L}$, e a sua medida $\mathcal{L}$ é igual à medida $\mathcal{J}$: $m(X)=J(X)$.

Destaquemos a seguinte propriedade da medida $\mathcal{L}$, importante na demonstração do teorema que temos em vista: a medida exterior $\mathcal{J}$ dum conjunto X é igual à medida $\mathcal{L}$ do fecho $\overline{X}$ dêsse conjunto; donde se conclui: se X é um conjunto fechado (tal é o caso da fronteira dum conjunto), $m(X)=0$ arrasta $J(X)=0$.

No que segue, por «mensurável» deverá entender-se «mensurável $\mathcal{J}$», sempre que não fôr feita menção expressa do contrário.

Nota 2: Diz-se que um espaço topológico é *separável* se possui uma *base* numerável para os conjuntos abertos, isto é, uma família numerável de conjuntos abertos tal que cada conjunto aberto é igual à soma de conjuntos desta família. Na recta euclideana todo o conjunto aberto se pode considerar como soma de intervalos de extremos racionais; a família dêstes intervalos, que é numerável, constitui assim uma *base.* A recta euclideana é portanto um espaço topológico separável.

Estes espaços topológicos gozam duma propriedade importante: *todo o conjunto denso no espaço (em particular o próprio espaço) contém um subconjunto numerável também denso no espaço.* Para obter êste subconjunto basta tomar um ponto do conjunto dado em cada elemento da base numerável.

Nota 3: Na recta euclideana consideram-se geralmente como vizinhanças associadas a cada ponto os intervalos abertos que contêm êsse ponto; a topologia da recta euclideana pode ser definida, usando estas vizinhanças, do modo seguinte: *um ponto* x *pertence ao fecho* $\overline{\mathrm{X}}$ *dum conjunto* X *se cada uma das suas vizinhanças* V (x) *tem pelo menos um ponto que pertence ao conjunto* X.

Uma família de conjuntos associados a um ponto x é *admissível* como família de vizinhanças dêsse ponto se a circunstância de x pertencer ou não ao fecho de um conjunto (arbitrário) não é alterada quando substituirmos as vizinhanças do ponto x por essa família de conjuntos. As duas famílias de *vizinhanças* dizem-se, então, *topològicamente equivalentes.* E uma condição necessária e suficiente para que isto se verifique é que, dada uma vizinhança de qualquer dessas famílias, exista na outra família uma vizinhança contida naquela.

Esta condição é realizada no nosso caso; com efeito, dado um número λ e um intervalo aberto (α,β) que o contenha, isto é, tal que $\alpha<\lambda<\beta$, em virtude da densidade de $\{\mu_n\}$, existem μ_m e μ_n tais que $\alpha<\mu_m<<\lambda<\mu_n<\beta$; donde $(\mu_m,\mu_n)\subset[\mu_m,\mu_n)\subset(\alpha,\beta)$.

NOTA 4: Se I e I^* são espaços topológicos onde a topologia está definida por meio de vizinhanças, a continuïdade de uma transformação de I em I^* costuma definir-se em termos de vizinhanças por uma condição que generaliza a definição clássica de Cauchy. A continuïdade duma transformação dum espaço topológico noutro é, porém, uma propriedade topológica, independente da família de vizinhanças utilizada; por outras palavras, a continuïdade duma transformação num ponto não é alterada quando se substitui a família de vizinhanças do ponto por outra topològicamente equivalente.

Êste resultado é ainda válido se se trata da continuïdade duma transformação num ponto dum conjunto A relativamente a êsse conjunto: *uma transformação* f *diz-se contínua num ponto* x e A *relativamente a* A, *quando para cada vizinhança* W (f (x)), *do ponto* f (x) e I*, *existe uma vizinhança* V (x), *do ponto* x, *tal que todos os pontos* y *de* V (x) *que pertencem a* A *têm um transformado* f (y) *que pertence a* W (f (x)).

Em espaços topológicos cuja topologia pode ser definida por meio de vizinhanças (em particular, nos espaços euclideanos) as transformações contínuas gozam da seguinte propriedade: Se F^* é um conjunto fechado de I^*, o conjunto $f^{-1}(F^*)$, imagem inversa de F^* por meio de f, é também fechado. Em particular, se f é contínua relativamente a um conjunto A, então $A \cdot f^{-1}(F^*)$ é fechado relativamente a A.

TEMAS DE ESTUDO

SÔBRE A EXPOSIÇÃO CLÁSSICA DA TEORIA DA MEDIDA À LEBESGUE

por ***Luís Neves Real***

Foi nosso intuito ao redigir êste artigo ser útil a quem entre nós estude — ou ensine — a teoria da medida L. Em termos estritamente algébricos, evitando sistemàticamente argumentos topológicos, fizemos depender essa teoria da prévia construção dum corpo $\mathfrak{A}$ de conjuntos A, em que se define uma *área*, $a(A)$, com a propriedade *essencial* de ser σ-aditiva no corpo $\mathfrak{A}$. Recorde-se que no espaço euclideano a n dimensões se pode tomar para $\mathfrak{A}$ e $a(A)$ o corpo de todos os *agregados* do espaço [isto é as somas dum número finito de cubos semi-abertos pertencentes a uma sucessão regular de rêdes com a qual se quadricula o espaço] e a sua *área*, a soma dos hiper-volumes $\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ de cada um dos cubos *disjuntos* em que se pode sempre decompor um agregado A. Esta noção de agregado — Aggregat — e sua área — Inhalt — divulgada entre nós pela J. I. M., recebêmo-la da obra de Otto Haupt e Georg Aumann — *Differential und Integralrechnung* — e afigura-se-nos como o ponto de partida didàticamente mais adequado para abordar as diversas teorias da medida. Os cadernos n.^{os} 2 e 5 da J. I. M. — *Introdução* e *Medida à Jordan*, Laureano de Barros, 1944 — mostram a sua aplicação à medida J. Queremos salientar no caderno n.º 5 — de que em breve se publicará uma nova edição com um carácter marcadamente algébrico — o que nessa altura nos apareceu apenas com um interêsse de exercício — o exercício 3.º da página 39 —: «se um agregado A é a soma duma infinidade numerável de agregados *disjuntos* do mesmo corpo, a área A é *igual* à soma da série constituída pelas áreas das parcelas (σ-aditividade de $a(A)$ em $\mathfrak{A}$); e fazer notar que a demonstração dêste enunciado assenta em duas propriedades particulares do espaço euclideano: i — dado um agregado A, existe sempre, qualquer que seja $\varepsilon>0$ um outro agregado A_1 tal que $A \subset i(A_1)$ e $a(A-A_1)<\varepsilon$; ii — a cobertura dum conjunto fechado por intermédio duma família *numerável* de conjuntos abertos pode ser substituída por uma cobertura dum número *finito* de conjuntos da mesma família. Estes são os factos topológicos que estão na base da σ-aditividade da área. Uma vez porém que esta se admita, as teorias da medida, quer à Borel, quer à Lebesgue, são consequências puramente algébricas dessa propriedade da área. Isto mesmo se mostrou já para a primeira destas medidas no caderno n.º 14 da J. I. M., obtendo-se depois algèbricamente, caderno n.º 16, a medida L como extensão da medida B, pela ampliação do σ-corpo B dos borelianos, graças aos sub-conjuntos dos conjuntos mensuráveis B de medida nula — *les ensembles négligeables* na terminologia que nos trouxe o Prof. René de Possel. Assim ficava estabelecida uma proposição fundamental da teoria algébrica da medida: «a condição necessária e suficiente para que seja possível a extensão duma área definida num corpo, a uma medida (à Borel ou à Lebesgue) definida num σ-corpo, é que essa área seja σ-aditiva (Eberhard Hopf, *Ergodentheorie*, capítulo I, § 1, 1937)».

Por esta forma se procurava localizar o problema da construção duma medida σ-aditiva em espaços topológicos mais gerais, problema que desde 1944 e por iniciativa do Prof. António Monteiro tem sido tema do estudo no C. E. M. do Pôrto.

Mas a teoria da medida à Lebesgue feita em estreita dependência da medida à Borel, se bem que tenha sido extraordinàriamente elucidativa para nós, no C. E. M., tem o inconveniente de recorrer ao princípio de indução transfinita. Esta é a razão porque reuni neste artigo os resultados da nossa comum experiência, redigindo uma exposição da medida L, feita à maneira clássica, mas deduzida como consequência algébrica da σ-aditividade da área dos agregados.

1. O corpo e a área dos agregados. Seja $\mathfrak{A}$ um corpo de conjuntos a que chamaremos *agregados,* e seja $a(A), A \in \mathfrak{A}$ uma função definida em $\mathfrak{A}$, designada como *área do agregado* A e dotada das seguintes propriedades:

$A1.$ é unívoca

$A2.$ $0 \leq a(A) < \infty$; $a(0)=0$

$A3.$ σ-aditividade da área em $\mathfrak{A}$:

Se $A = \bigcup_1^\infty A_i$ e $A_i \cap A_j = 0$, então $a(A) = \sum_1^\infty a(A_i)$.

Destas propriedades decorre imediatamente

$A4.$ $A_1 \supset A_2 \cdot \rightarrow \cdot a(A_1 - A_2) = a(A_1) - a(A_2)$

$A5.$ $A_1 \supset A_2 \cdot \rightarrow \cdot a(A_1) \geq a(A_2)$ (monotonia)

$A6.$ $A \subset \bigcup_1^\infty A_i \cdot \rightarrow \cdot a(A) \leq \sum_1^\infty a(A_i)$.

2. Medida exterior e Medida interior.

2.1 *Definições:*

Um conjunto X diz-se limitado se existe $A \in \mathfrak{A}$ tal que $X \subset A$.

Medida exterior dum conjunto limitado

$$m^0(X) = \liminf_{\substack{\bigcup A_i \supset X \\ A_i \in \mathfrak{A}}} \sum a(A_i)$$

Medida interior dum conjunto limitado:

$$m_0(X) = a(A) - m^0(A - X)$$

onde $A \in \mathfrak{A}$ e $A \supset X$. [Como se estabelecerá no número 2.5 esta definição é independente de A].

Critério de mensurabilidade. Um conjunto X diz-se mensurável-L, simbòlicamente $X \in \mathcal{L}$ (representando por $\mathcal{L}$ a classe dos conjuntos mensuráveis-L) se $m_0(X) = m^0(X)$. A êste valor comum chama-se medida-L de X e representa-se por $m(X)$.

2.2 *Propriedades:*

Da definição de $m^0(X)$ resulta:

2.2.1 $0 \leq m^0(X) < \infty$, $m^0(0) = 0$

2.2.2 Se $X \subset Y$, então $m^0(X) \leq m^0(Y)$.

porque qualquer $\bigcup_i A_i$ que contenha Y, contém também X.

2.2.3 $m^0(\bigcup X_i) \leq \sum_1^\infty m^0(X_i)$.

Para cada número arbitrário $\delta/2^i$, existe $\bigcup A_n^i \supset X_i$ tal que $m^0(X_i) > \sum_n a(A_n^i) - \delta/2^i$.

Por soma em relação a i:

$$\sum m^0(X_i) \geq \sum_i \sum_n a(A_n^i) - \delta \cdot$$

E como:

$$\bigcup_i \bigcup_n A_n^i \supset \bigcup_i X_i, \quad \sum_i \sum_n a(A_n^i) \geq m^0(\bigcup_i X_i) \cdot$$

2.3 Se $A \in \mathfrak{A}$ e $A \cdot X = 0$, então $m^0(A \cup X) = a(A) + m^0(X)$.

$$[2.2\,3] \rightarrow m^0(A \cup X) \leq a(A) + m^0(X).$$

Basta pois demonstrar a desigualdade contrária: Da definição de $m^0(A \cup X)$ decorre que existe:

$$\bigcup A_i \supset A \cup X \text{ tal que } m^0(A \cup X) > \sum_1^\infty a(A_i) - \varepsilon =$$

$$= \sum_1^\infty a[(A_i \cap A) \cup (A_i - A)] - \varepsilon =$$

$$= \sum_1^\infty a(A_i \cap A) + \sum_1^\infty a(A_i - A) - \varepsilon.$$

Mas

$$A \cap X = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_i (A \cap A_i) = A \text{ e pela } \sigma\text{-aditividade da área} \\ a(A) \leq \sum_1^\infty a(A \cap A_i); \\ \text{e} \\ \bigcup_i (A_i - A) \supset X_i, \text{ donde:} \\ \sum a(A_i - A) \geq m^0(X) \end{array} \right.$$

e finalmente

$$m^0(A \cup X) \geq a(A) + m^0(X) - \varepsilon,$$

ou, sendo ε arbitrário

$$m^0(A \cup X) \geq a(A) + m^0(X).$$

2.4 $m^0(A) = a(A)$.

Como $m^0(0) = 0$ basta fazer $X = 0$ em 2.3.

2.5 $m_0(X)$ é independente do agregado A que intervem na sua definição.

Sejam $A \in \mathfrak{A}$ e $A_1 \in \mathfrak{A}$; e suponhamos que $X \subset A_1 \subset A$ [o caso de ser $X \subset A$ e $X \subset A_1$ e nem $A \subset A_1$, nem $A_1 \subset A$, reduz-se a êste porque teríamos então $X \subset (A \cap A_1)$, $(A \cap A_1) \subset A$ e $(A \cap A_1) \subset A_1$].

De 2.3 e 2.4:

$$m^0(A - X) = m^0[(A - A_1) \cup (A_1 - X)] =$$
$$= a(A - A_1) + m^0(A_1 - X) =$$
$$[\text{por } A \cdot 4] = a(A) - a(A_1) + m^0(A_1 - X).$$

Então

$m_0(X) = a(A) - m^0(A-X) = a(A) - [a(A) - a(A_1) + m^0(A_1 - X)] = a(A_1) - m^0(A_1 - X)$.

2.6 $m_0(X) \leq m^0(X)$.

Porque 2.1 e $A \supset X$ implicam:

$$a(A) = m_0(X) + m^0(A-X);$$

e de 2.4 e 2.23:

$$a(A) = m^0(A) = m^0[X \cup (A-X)] \leq m^0(X) + m^0(A-X).$$

2.7 Se $A_i \cap A_K = 0$, então $m^0(\cup_i A_i) = \sum_1^\infty a(A_i)$.

Por A. 3, 2.4, 2.22, 2.23, e de novo 2.4:

$$\sum_1^N a(A_i) = a(\bigcup_{1\ldots N} A_i) = m^0(\bigcup_{1\ldots N} A_i) \leq m^0(\bigcup_{1\ldots\infty} A_i) \leq \sum_1^\infty a(A_i)$$

Por passagem ao limite:

$$\sum_1^\infty a(A_i) \leq m^0(\bigcup_{1\ldots\infty} A_i) \leq \sum_1^\infty a(A_i).$$

2.8 Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, $m^0(\bigcup_{1\ldots\infty} A_i) = \lim_{i=\infty} a(A_i)$.

Porque, aplicando 2.7 a $\bigcup_{1\ldots\infty} A_i = A_1 \cup \bigcup_{i=2}^\infty (A_i - A_i - 1)$ resulta:

$$m^0(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = a(A_1) + \lim_{i=\infty} [a(A_2 - A_2) + \cdots + a(A_i - A_{i-1})] = \lim_{i=\infty} a(A_i).$$

2.9 Se $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_i \supset \cdots$ $m_0(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \lim a(A_i)$.

Pela aplicação de 2.8 a

$$A_1 - A_2 \subset A_1 - A_3 \subset \cdots \subset A_1 - A_i \subset \cdots$$

e pela definição de medida interior.

2.10 Se $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_i \supset \cdots$,

$$m_0(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \lim a(A_i) = m^0(\bigcap_{i=1}^\infty A_i).$$

Em virtude de 2.9, 2.6 e de que $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \subset A_i$ implica $m^0(\cap A_i) \leq \lim a(A_i)$.

2.11 $m^0(X \cup Y) + m^0(X \cap Y) \leq m^0(X) + m^0(Y)$.

Tomem-se $\cup_i A_i$, $A_i \cap A_k = 0$ e $\cup A'_i$, $A'_i \cap A'_k = 0$ tais que $\cup_i A_i \supset X$, $\sum a(A_i) < m^0(X) + \varepsilon/2$ e $\cup_i A'_i \supset Y$, $\sum a(A'_i) < m^0(Y) + \varepsilon/2$. Ora, 2.23, 2.7, 2.10 implicam

$$m^0(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cup A'_i)) \leq \sum_1^\infty a(A_i) + \sum_{i=1}^\infty a(A'_i) - \sum_i \sum_j a(A'_i \cap A_j)$$

e sendo $(\bigcup_j A_j) \cap (\bigcup_i A'_i) = \bigcup_j \bigcup_i (A_j \cap A'_i)$ soma de parcelas disjuntas:

$$m^0(\bigcup_j A_j \cap \bigcup_i A'_i) = \sum_i \sum_j a(A_j \cap A'_i):$$

$$m^0(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cup A'_i)) + m^0(\bigcup_i A'_i \cap \bigcup_j A_j) \leq$$
$$\leq \sum_i a(A'_i) + \sum_i a(A_i) < m^0(X) + m^0(Y) + \varepsilon$$

donde decorre o enunciado porque

$$\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cup A'_i) \supset X \cup Y \text{ e } (\cup_i A'_i) \cap (\cup_i A_j) \supset X \cap Y.$$

2.12 $m_0(X \cup Y) + m_0(X \cap Y) \geq m_0(X) + m_0(Y)$.

Basta subtrair $2a(A)$, onde $A \supset X$ e $A \supset Y$ aos dois membros da desigualdade 2.11 aplicada a $A - X$ e $A - Y$.

3. A classe $\mathcal{L}$ dos conjuntos mensuráveis.

3.1 $\mathcal{L}$ é um anel de conjuutos (com X e Y, contém $X \cup Y$ e $X \cap Y$).

Porque de 2.11 e 2.12 resulta:

$$[m^0(X) - m_0(X)] + [m^0(Y) - m_0(Y)] \geq$$
$$\geq [m^0(X \cup Y) - m_0(X \cup Y)] + [m^0(X \cap Y) - m_0(X \cap Y)]\cdot$$

3.2 O complementar dum conjunto mensurável $X \subset A$, relativamente a A é mensurável.

Porque $a(A) = m^0(X) + m_0(A-X) = m_0(X) + m^0(A-X)$

3.3 $\mathcal{L}$ é um corpo de conjuntos (um anel que, com X e Y, contém $X - Y$).

Sendo $A \in \mathfrak{A}$ tal que $A \supset X$ e $A \supset Y$, como $X - Y = X \cap (A - Y)$ trata-se duma conclusão imediata de 3.1 e 3.2.

3.4 A soma $\bigcup_{i=1}^\infty X_i$, com $X_i \cap X_k = 0$ de conjuntos mensuráveis disjuntos é mensurável (desde que seja limitada).

De $\bigcup_{i=1}^N X_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty X_i$, de $X_i \cap X_k = 0$, de 2.12 iterado, de 2.6 e de 2.2.3

$$\sum_1^N m(X_i) = m(\bigcup_{i=1}^N X_i) \leq m^0(\bigcup_{i=1}^N X_i) \leq$$
$$\leq m^0(\bigcup_{i=1}^\infty X_i) \leq \sum_1^\infty m^0(X_i)$$

donde resulta por passagem ao limite o teorema e simultâneamente a σ-aditividade de m na classe $\mathcal{L}$:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{1}^{\infty} m(X_i).$$

3.5 L é um σ-corpo (um corpo que com a sucessão $\{X_i\}$ contém a sua união $\bigcup_i X_i$).

Consequência de 3.3 e de

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X_1 \cup \left[\bigcup_{n=2}^{\infty}((X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) - \subset X_1 \cup \cdots X_{n-1}))\right]$$

atendendo a 3.3 e 3.4.

4. Propriedades da medida: $m(L)$, $L \in \mathcal{L}$.

4.1 não negativa $m(L) \geq 0$.

4.2 monótona: se $L_1 \subset L_2$, $m(L_1) \leq m(L_2)$.

4.3 modular:

$$m(L_1) + m(L_2) = m(L_1 \cup L_2) + m(L_1 \cap L_2),$$

em virtude de 2.11 e 2.12.

4.4 subtractiva:

se $L_1 \supset L_2$, $m(L_1 - L_2) = m(L_1) - m(L_2)$.

4.5 σ-aditiva: se $L_i \cap L_k = 0$, $m(\bigcup_i L_i) = \sum m(L_i)$.

4.6 contínua: se $\{L_i\}$ é uma sucessão monótona:

$$m(\lim_i L_i) = \lim_i m(L_i).$$

5. O carácter completo e regular da medida-L.

5.1 A medida é completa:

$$m^0(X) = \liminf_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ L \supset X}} m(L) \quad \text{e} \quad m_0(X) = \limsup_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ L \subset X}} m(L)$$

5.2 A medida é regular: para todo o conjunto X,

$a)$ existe $L_1 \supset X$, $L_1 \in \mathcal{L}$, tal que $m^0(X) = m(L_2)$.

$b)$ existe $L_2 \subset X$, $L_2 \in \mathcal{L}$, tal que $m_0(X) = m(L_2)$.

6. As condições de Smilley e de Carathéodory.

6.1 Condição de Smiley: $L \in \mathcal{L}$ se e só se a igualdade $m^0(L \cup X) + m^0(L \cap X) = m^0(L) + m^0(X)$ é satisfeita qualquer que seja o conjunto limitado X.

Condição necessária:

Por 5.2 $a)$ existe $(L_1 \supset L \cup X)$ tal que $m(L_1) = m^0(L \cup X)$. Então $m(L_1) = m^0(L \cup X) = m(L) + m(L_1 - L)$ ou, porque $L_1 \supset (X \cup L)$ implica $L_1 - L \supset X - (X \cap L)$:

$$m^0(L \cup X) \geq m(L) + m^0(X - X \cap L).$$

Por outro lado 2.2.3:

$$m^0(X) \leq m^0(X \cap L) + m^0(X - X \cap L)$$

ou $$m^0(X - X \cap L) \geq m^0(X) - m^0(X \cap L).$$

E finalmente

$$m(L) + m^0(X) - m^0(X \cap L) \leq m^0(L \cup X)$$

combinada com 2.11.

Condição suficiente:

Seja $A \in \mathfrak{A}$ e $A \supset L$; faça-se então $X = A - L$:

$$m^0(A) = a(A) = m^0(L) + m^0(A - L)$$

ou $$m^0(L) = a(A) - m^0(A - L) = m_0(L)$$

e portanto $L \in \mathcal{L}$.

6.2 Condição de Carathéodory: $L \in \mathcal{L}$ se e só se a igualdade $m^0(X) = m^0(X \cap L) + m^0(X - L)$ fôr satisfeita qualquer que seja o conjunto X.

Condição necessária:

5.2 $a)$ implica que existe $L_1 \supset X$ e tal que

$$m^0(X) = m(L_1).$$

E como $L_1 - L \supset X - L$ e $L_1 \cap L \supset X \cap L$ $m^0(X) = m(L_1) = m(L_1 \cap L) + m(L_1 - L) \geq m^0(X \cap L) + m^0(X - L)$ que com 2.2.3 demonstra que a condição é necessária.

Condição suficiente:

Sendo $A \in \mathfrak{A}$ e $A \supset L$ faça-se, na igualdade, $X = A$:

$$m^0(A) = a(A) = m^0(L) + m^0(A - L)$$

donde

$$m^0(L) = a(A) - m^0(A - L) = m_0(L) \quad \text{e} \quad L \in \mathcal{L}.$$

NOTA

O Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto publicou no número anterior da *Gazeta de Matemática* (n.º 27, de Fevereiro de 1940) um artigo do sr. G. Dedebant, intitulado «Sur une manière de présenter la résolution des équations algébriques», e inserto na secção «Temas de estudo». Êste artigo contém alguns lapsos relativos ao emprêgo da designação de «Álgebra Moderna» e algumas incorrecções de doutrina, pelo que o Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, responsável por esta secção, pede desculpa aos leitores.

C. E. M. P.

ANTOLOGIA

LE CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE *

por ***Frédéric Joliot-Curie,*** Prix Nobel, Membre de l'Institut

La situation actuelle de notre pays, libéré, mais profondément meurtri, impose à tous les Français des devoirs multiples. Sachant le rôle capital que la science doit jouer dans la renaissance française, les scientifiques, conscients de leur responsabilité, animés d'un grand élan patriotique, mettent toute leur force au service du pays.

Il faut que chaque citoyen comprenne ces vérités simples : ce n'est qu'au prix d'un développement intense de la science qu'une nation peut vivre heureuse et forte, c'est en faisant rayonner sa pensée et en exportant ses réalisations originales qu'elle justifie sa libre existence parmi les autres grandes nations créatrices. Parmi les préoccupations actuelles des pouvoirs publics, celle de donner aux hommes de science et aux techniciens des moyens d'existence et de travail dignes des services qu'ils rendent doit être prioritaire. Il y aurait en outre un grand intérêt à ce que des hommes de science fussent appelés à siéger dans les grandes commissions ministérielles qui s'occupent des affaires du pays : défense nationale, comission du plan, reconstruction, finances, etc., ainsi que dans celles qui s'occuperont du traité de paix, des plans d'organisation internationale après la guerre et des relations entre les nations.

Je le dis tout net: si le pays ne fait pas l'effort nécessaire pour donner à la science la place qu'elle mérite et à ceux qui la servent le prestige nécessaire à leur influence, il deviendra tôt ou tard une colonie.

. . . .

Tenant compte des expériences passées, j'ai pensé que la direction du Centre National de la Recherche Scientifique serait mieux assurée si l'on associait aux compétences du directeur et du directeur-adjoint celles des membres d'un grand comité directeur, représentant tous les domaines de la recherche pure et appliquée. Recherche pure et appliquée seraient de ce fait intimement liées. Pour composer ce comité directeur, appelé Comité National de la Recherche Scientifique, j'ai fait appel à des savants et techniciens de province et de Paris en pleine activité, dont la compétence est reconnue. Ils sont en général jeunes ou relativement jeunes.

. . . .

Les membres du Comité National sont classés en sections spécialisées, suivant leur compétence dominante. Chaque section comprend 6 à 8 membres. Les problèmes à étudier amènent le plus souvent à constituer des commissions d'étude, composées de savants choisis dans les diverses sections dont les spécialités sont nécessaires. Ainsi, par exemple, la comission d'étude de la génétique comprend des biologistes, des physiciens, des chimistes, des mathématiciens, etc.

. . . .

La différence profonde avec le passé résulte de la transformation des membres consultatifs en membres directeurs responsables. Le Comité National, composé d'environ 250 savants et techniciens, a les qualités pour définir une politique de la recherche scientifique; sa compétence couvre tous les domaines de la recherche pure et appliquée.

Pour assurer des liaisons très étroites avec les nombreux foyers de recherches existant dans les divers ministères, nous avons prévu d'introduire parmi les membres du Comité National les représentants les plus qualifiés de ces foyers. De grands techniciens de l'industrie privée participeront aux travaux des commissions à titre de conseillers permanentes. La liaison est normalement établie avec les laboratoires de l'enseignement supérieur, puisque dans la plupart des sections plus de 70 °/₀ des membres du comité directeur font partie de cet enseignement. Enfin le C. N. R. S. est représenté dans les conseils de recherches existant dans plusieurs ministères.

. . . .

Toute cette organisation, même si elle reçoit déjà un bon accueil, ne pourra porter ses fruits qu'à condition que nos augmentions le plus rapidement possible le nombre des hommes de valeur servant la science et la technique en France. C'est un des rôles importants du Centre d'agir en ce sens.

J'en arrive donc à l'enseignement préparatoire à la recherche scientifique. Dès que je fus chargé de la direction du C. N. R. S., j'eus l'occasion, lors des premières réunions avec mes collègues scientifiques, de leur exposer un projet d'organisation de cet enseignement. Une expérience déjà longue de direction de deux laboratoires m'avait fait apparaître l'insuffisance de l'enseignement reçu par des licenciés des Facultés des Sciences et de ingénieurs des grandes écoles pour entreprendre des recherches spécialisées. Ce n'était en général qu'après deux ans d'apprentissage qu'ils pou-

* Da revista *La pensée* n.º 5, Paris, 1945.

vaient commencer à entreprendre des recherches personnelles.

. . . .

Pour parfaire l'enseignement des domaines particuliers de la science pure et appliquée auxquels se destinent les chercheurs à leur sortie des grandes écoles ou après leur licence, nous organisons au Centre National de la Recherche Scientifique un enseignement préparatoire à la recherche. Le programme d'enseignement comprendra des options... L'élève chercheur pourra choisir une option; il sera souvent nécessaire de guider ce choix en tenant compte de ses aptitudes, indiquées par ses maîtres de l'école ou de la Faculté dont il a été l'élève, et en tenant compte en outre des besoins des laboratoires du pays.

Au cours d'une première année l'élève fréquentera *successivement plusieurs laboratoires* où, sous la direction de chercheurs qualifiés, il pratiquera les diverses techniques en usage. Cet enseignement pratique ne devrait pas avoir le caractère de manipulation du type de la licence, sauf en cas exceptionnel pour des techniques d'emploi occasionnel. Les élèves chercheurs devront plutôt servir d'aides à des chercheurs au cours de leurs travaux, et manipuler les appareils utilisés au cours des recherches.

. . . .

Durant cette première année, les élèves chercheurs suivent obligatoirement des cours d'un niveau très élevé correspondant à l'option choisie et enseignés par plusieurs chercheurs, chacun d'eux traitant les chapitres où se trouvent les questions au développement desquelles ils ont le plus contribué.

Ces cours seront publics, pour qu'ils puissent profiter non seulement aux élèves chercheurs, mais à tous les chercheurs intéressés par les questions traitées. Ces cours, mis à jour chaque année, seront publiés par les soins du C. N. R. S. et distribués dans les laboratoires spécialisés.

Une deuxième année d'enseignement est prévue, pendant laquelle les élèves chercheurs fréquenteront les laboratoires étrangers. Ils seront admis à titre d'élèves et non comme des chercheurs expérimentés, et je sais par des conversations que j'ai pu avoir avec quelques collègues étrangers que le meilleur accueil leur sera réservé.

Nous pensons qu'après ces deux années d'enseignement les chercheurs qui seront admis dans les laboratoires français auront une excellente préparation pour entreprendre des recherches particulières et devenir des spécialistes éclairés.

Les élèves de l'enseignement préparatoire à la recherche recevront du C. N. R. S. une allocation leur permettant de vivre....

. . . .

Je voudrais terminer en faisant remarquer que tous les efforts que nous faisons pour mener à bien la tâche dont j'ai esquissé les grandes lignes risqueraient d'être vains si nous ne recevions pas les crédits nécessaires.

En dépit des immenses services qu'ils rendent à leur pays, après les durs sacrifices qu'ils ont consentis pendant de nombreuses années d'études à l'Université ou dans les grandes Ecoles, nos chercheurs, comme d'ailleurs les membres de l'Enseignement, sont encore mal rétribués. La responsabilité en est au Ministère des Finances qui, par une mauvaise politique poursuivie pendant des décades, n'a pas compris l'excellent placement que constitue, pour le pays, la recherche scientifique. L'exemple donné par les grandes nations créatrices était pourtant assez probant.

Il faut toutefois reconnaître que depuis la Libération, une meilleure compréhension s'est manifestée et un effort, certes encore insuffisant, a été fait dans le sens d'une augmentation des crédits.

Il y a lieu de croire qu'un enseignement aura été tiré des évènements passés et que ce ministère permettra d'assurer à ceux qui servent la Science sous toutes ses formes des conditions de vie convenables. Alors nous serons certains de pouvoir donner à notre pays les nombreux savants et techniciens qui lui sont indispensables pour assurer son indépendance et sa grandeur.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

O PROFESSOR RENÉ DE POSSEL EM PORTUGAL

Conforme tínhamos anunciado no último número da *Gazeta de Matemática,* chegou a Portugal, em Março dêste ano o jóvem investigador francês, Prof. René de Possel, que desenvolveu entre nós uma intensa actividade realizando em Lisboa, Coimbra e Pôrto, nas respectivas Faculdades de Ciências, várias conferências sôbre os seguintes assuntos: *Os princípios matemáticos da Mecânica Clássica; Os axiomas da Geometria Euclideana baseados na teoria dos grupos; As teorias modernas de Integração; Alguns problemas de Topologia.*

O Prof. René de Possel, evidenciou em tôdas essas lições os seus grandes recursos didáticos e a bela escola de Matemática, clássica e moderna, em que teve a oportunidade de fazer a sua preparação, primeiro em Paris, na Escola Normal Superior e no

Colégio de França, onde ouviu entre outros, Lebesgue, Borel, Cartan, e depois em outros notáveis centros da Europa, como Goettingen, Munich, Szeged, onde conheceu Hilbert, Caratheodory, Haar, Riesz, etc.

Foi assim, em contacto com grandes Mestres do seu País e do Estrangeiro, que começou a carreira de investigador e imediatamente colocou as suas faculdades e a sua especialização ao serviço da Pátria, quer como professor quer como um dos fundadores do grupo Bourbaki, onde, de colaboração com Henri Cartan, A. Weil, Dieudonné, Mandelbrojt, Eheresman, etc., iniciou um largo e profundo movimento a favor daquilo que se costuma chamar Matemática Moderna e que compreende nomeadamente a Algebra e a Topologia.

Os resultados obtidos por êsse trabalho de équipe, ainda antes da última guerra, estão, em parte, reunidos em 4 fascículos da colecção Actualités Scientifiques et Industrielles e grande serviço prestará no futuro êsse grupo de investigadores, se retomar a sua anterior actividade e a puser ao alcance dos estudiosos de todo o mundo.

O Prof. René de Possel, além das lições mencionadas, colaborou intensamente com todos aquêles que trabalham no Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, expondo vários resultados das suas próprias investigações, nomeadamente *sôbre a forma de completar uma funcional linear* — um problema geral que compreende, por exemplo, a passagem do integral ordinário para o integral de Lebesgue — e fornecendo sugestões para novos temas de estudo.

De regresso a Lisboa realizou também, no Instituto Francês, a pedido dum grupo de estudiosos, 3 lições sôbre cálculo exterior.

Concluiu ainda originais para quási tôdas as nossas revistas da especialidade incluindo a *Gazeta de Matemática* e deu-nos a todos um admirável exemplo de dedicação pela investigação matemática e pelo ensino.

Dirigindo-lhe daqui as nossas calorosas saudações e os nossos sinceros agradecimentos, significamos mais uma vez ao Instituto Francês e aos seus ilustres directores, Prof. Pièrre Hourcade e Paul Teyssier, o nosso profundo reconhecimento por terem conseguido trazer a Portugal o matemático René de Possel.

A terminar fazemos votos porque esta iniciativa se repita e em breve possamos conviver com outro investigador francês, facilitando-se assim aos nossos jóvens novas possibilidades de completarem a sua cultura matemática.

ACTIVIDADE DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Por iniciativa da J. I. M. estão a realizar-se aos sábados, de tarde, com regularidade, sessões de trabalho nas quais se faz a exposição crítica, com ampla discussão, de um determinado assunto.

As sessões dêste ano têm sido preenchidas inteiramente com a Teoria dos Números, conforme o seguinte esquema:

1. Teoria Elementar dos Números Naturais (segundo Hilbert e Bernays em Grundlagen der Mathematik, Bd I — pág. 20): *Ruy Luís Gomes.*

2. Teoria Axiomática dos Números Naturais, a partir dos Axiomas de Peano: *Ruy Verdial.*

3. Construção dos Números inteiros como o grupo mínimo aditivo que contém uma parte isomorfa ao semi-grupo dos números naturais;

4. O domínio de integridade ordenado dos números inteiros;

5. Construção de corpo ordenado dos racionais como o menor corpo ordenado que contém uma parte isomorfa ao domínio de integridade dos números inteiros: *António Andrade Guimarães.*

6. Construção do corpo dos números reais pelo método de Cantor (os números como classes de equivalência das sucessões racionais de Cauchy): *Luís Neves Real.*

A bibliografia utilizada é a seguinte:

Hilbert und Bernays — *Grundlagen der Mathematik,* I. *Enz. der Math. Wissen.* Bd. I_1, Heft. 2: Artigo de Bachmann — *Aufbau der Zahlensystems.* Van der Waerden — *Moderne Algebra,* Erster Teil — Cap. IX — *Reelle Körper.* O. Perron — *Irrazional Zahlen.* Birkhoff and MacLane — *Survey of Modern Algebra,* e *Publicações do Centro e da Junta* sob a orientação do Dr. Almeida Costa. Escolhendo a Teoria dos Números para tema de estudo durante êste ano correspondemos aos desejos manifestados por alguns alunos da Faculdade de Ciências do Pôrto e, àlém disso, julgamos prestar um serviço aos nossos estudiosos fornecendo-lhes os primeiros elementos para qualquer futura especialização, em Matemática Clássica ou Moderna.

Para facilitar o estudo de todos aquêles que se mostrem interessados, a J. I. M. resolveu publicar, na Colecção das Cadernos, a sistematização em curso naquelas sessões de trabalho, tendo-se encarregado de coligir as notas necessárias de acôrdo com as exposições feitas e respectiva discussão os alunos Rui Verdial, António Andrade Guimarães e Tiago de Oliveira.

Para o próximo ano projecta a J. I. M. um estudo análogo dos *Fundamentos de Geometria.*

CURSO DE MECÂNICA ALEATÓRIA

O físico francês Georges Dedebant iniciou no dia 7 de Maio um curso de Mecânica Aleatória que tem funcionado regularmente com duas sessões semanais (às 3.as e 6.as feiras) na Faculdade de Ciências do Pôrto.

As lições têm consistido na exposição detalhada da memória da autoria de G. Dedebant e Ph. Wehrlé publicada na *Portugaliae Physica* (Vol. 1, fasc. 3, pp. 95-150 e fasc. 4, pp. 179-294).

Nas primeiras lições foram dadas algumas noções fundamentais de Cálculo das Probabilidades e Estatística. Seguidamente iniciou-se um estudo sistemático dos espaços de números aleatórios. Introduzindo num dêstes espaços uma *distância* definida por $d(X,Y)=\overline{X^2}+\overline{Y^2}-2\,\overline{XY}$, onde X e Y são dois números aleatórios do espaço considerado, obtém-se um «espaço de distâncias» no sentido de K. Menger que é além disso um espaço métrico. E, salvo condições muito especiais de correlação entre os pontos do espaço, êle será congruente dum sub-conjunto do espaço de Hilbert.

Foi chamada vivamente a atenção para o papel importantíssimo que desempenham na geometria dum espaço de números aleatórios as chamadas *condições de coerência*. Seja $\{X_i\}$ uma «base» de números aleatórios normados do espaço considerado. Qualquer número do espaço se pode escrever sob a forma $X=\sum_i \lambda_i X_i$, onde os λ_i são números reais. Logo $\overline{X^2}=\sum_{i,j} r_{ij}\lambda_i\lambda_j$ onde r_{ij} é o coeficiente de correlação de X_i e X_j. Ora $\overline{X^2}\geq 0$; daqui as condições, ditas *de coerência:*

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

Foi dada depois uma definição de *função aleatória* e construido um cálculo diferencial para as funções aleatórias. Uma função aleatória X/t é definida; *a)* por uma correspondência entre um conjunto numérico $\{t\}$ e um conjunto de números aleatórios $\{X\}$; *b)* por tôdas as leis de probabilidade conjugadas dos X/t. É com êste novo e potente instrumento de análise, cuja introdução em Física foi naturalmente imposta pelo estudo de certas questões de hidrodinâmica e meteorologia, que será construída tôda a Mecânica Aleatória. O conceito físico fundamental é o de *corpúsculo aleatório,* representado por uma ou várias funções aleatórias, e de certo modo equivalente a um fluido (agregado de partículas) da Mecânica Clássica. As grandezas medíveis são médias estatísticas e coeficientes de correlação relativos a pares de instantes.

Presentemente, e um pouco à margem do curso que vinha fazendo, o Prof. Dedebant está a expôr alguns resultados de investigações suas recentes sôbre o conceito de *onda aleatória,* com vista a uma possível interpretação da dualidade onda-corpúsculo da Mecânica Ondulatória.

As idéias directrizes destas pesquizas são as seguintes: — O coeficiente de correlação de funções aleatórias muito gerais tem caráccer periódico. Daqui o dever esperar-se que em qualquer fluido se manifestem, sob condições convenientes, fenómenos periódicos reveláveis pela experiência. É o que se observa de facto na distribuïção de certas núvens e nas correntes líquidas. Dentro desta ordem de idéias, os fenómenos de interferência com feixes de electrões teriam natureza meramente estatística: seriam a revelação, em condições experimentais adequadas, da periodicidade contida em potência no coeficiente de correlação da função aleatória representativa do agregado.

C. E. M. P., 10-VI-1945 *F. Soares David*

INSTITUTO DOS ACTUARIOS PORTUGUESES

Desde a sua fundação, que oportunamente anunciámos, o Instituto tem mantido intensa actividade realizando mensalmente reüniões onde são apresentados e discutidos diversos problemas actuariais de que prèviamente são informados os sócios por resumos dos assuntos a tratar enviados com antecedência.

Foram apresentadas, até 31 de Maio passado, as seguintes comunicações:

Linhas gerais referentes à construção da tábua de mortalidade da população portuguesa, (1941), por J. J. Pais Morais.

Nota sôbre o fraccionamento de anuidades, por Carlos A. F. Carvalho.

Sugestões para uma notação a adoptar pelo I. A. P., por Caetano M. Beirão da Veiga.

Reservas técnicas duma Caixa de Previdência de um grupo fechado, por Carlos A. F. Carvalho e António Leão.

Sôbre a estabilidade de uma caixa aberta de renovação anual por António Leão.

Indeterminações actuariais no problema mutualista, por Caetano M. Beirão da Veiga.

Também foram discutidas as *Bases técnicas de previdência social,* em questão levantada pelo sócio J. Remy Teixeira Freire.

Encontra-se já no prelo o primeiro número do Boletim.

SOCIEDADE MATEMÁTICA DE FRANÇA

CONFERÊNCIAS REALIZADAS EM 1945-46.

L. Lesieur: Représentation rationnelle des hyperbiquadratiques, (17-1-1945); S. Mandelbrojt: Sur une inégalité relative aux séries asymptotiques, et applications aux fonctions quasi-analytiques et aux séries de Dirichlet, (14-2-1945); A. Chatelet: Sur les corps abéliens du troisième ordre, (14-3-1945); A. Lichnerowicz: Sur certains espaces variationnels généralisant les espaces de Finsler, (11-4-1945); P. Levy: Sur des théorèmes nouveaux relatifs au mouvement brownien, (16-5-1945); M. Krasner: Sur la théorie non abélienne des corps de classes, et les extensions finies de corps valués complets, (13-6-1945); A. Weil: L'hypothèse de Riemann dans les corps de fonctions algébriques, (4-7-1945); R. Marrot: La théorie mathématique de l'équation de Boltzmann, (7-11-1945); G. Bouligand: Sur des résultats obtenus par Mr-Zahorski dans l'application de la théorie des ensembles à la théorie des fonctions, (21-11-1945); G. Choquet: Sur les surfaces et hypersurfaces isométriques dans les espaces cartésiens, (21-11-1945); F. Pollaczec: Sur la résolution de certaines équations intégrales à l'aide de la théorie des fonctions d'une variable complexe, (15-12-1945).

J. Ferrand: Sur l'approximation des fonctions par des fonctions définies sur un réseau, (23-1-1946); M. Krasner: Sur une généralisation de la théorie de Galois, (13-12-1946); L. Gauthier: La géométrie réglée des espaces à n dimensions, (13-2-1946); G. Choquet: Topologie des solutions des équations différentielles $y'=f(x,y)$, (20-3-1946); J. Favard: Corps convexes, (10-4-1946); N. Aronszajn: Sur certains développements canoniques en fonctions harmoniques de l'espace (8-5-1946).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

UM TEOREMA DE ARITMÉTICA

por ***José da Silva Paulo***

1. Um teorema de Aritmética

Ao mesmo tempo que se deduz a fórmula que dá o número de combinações de m objectos tomados n a n, demonstra-se que:

Teorema: *O produto de* n *inteiros consecutivos é divisível pelo produto dos* n *primeiros inteiros naturais,*

isto é que

$$(1) \qquad \frac{(a+1)\,(a+2)\cdot\cdots\cdot(a+n)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot n}$$

é um inteiro, se fôrem a e n inteiros.

É possível, no entanto, demonstrar aquêle teorema ignorando a análise combinatória. Uma tal demonstração pode fazer-se mostrando que tôda a potência de um inteiro primo que divida o denominador de (1) dividirá o seu numerador, ou o que é o mesmo, que se na decomposição em factores primos, do denominador existir a potência p^r de um inteiro primo p, na decomposição do numerador existirá uma potência p^s, do mesmo factor primo p, onde $s\geq r$; e se o facto se der para qualquer factor primo do denominador, (1) será um inteiro. Para fazermos esta demonstração necessitamos de certas noções que a seguir se expõem.

2. Parte inteira de um número real

Definição: *Chama-se parte inteira de um número real* x, *ao maior inteiro não superior a* x.

Notação: Para designar *a parte inteira de* x, ou como também se diz, o *maior inteiro contido em* x, usaremos a notação $[x]$.

Em vista da Definição teremos

$$[3]=3;\quad [\pi]=3;\quad [13/2]=6;\quad [-13/2]=-7 \text{ etc.}$$

Da definição resulta ainda que $[x]$, satisfaz às seguintes relações $[x]\leq x<[x]+1$, e, por isso, é $x=[x]+\theta$, sendo $0\leq\theta<1$. A θ dá-se o nome de *parte fraccionária de* x.

É fácil agora deduzir as seguintes propriedades

a) $[[x]]=[x]$
b) $[x+a]=[x]+a$, se a fôr um inteiro
c) $[x]+[-x]=0$, ou a -1, conforme fôr x um inteiro ou não
d) $[x+y]\geq[x]+[y]$
e) $[[x]/n]=[x/n]$, se n fôr um inteiro natural.

As duas primeiras propriedades são evidentes bem como o caso de ser x um inteiro, na propriedade *c)*. Se x não fôr um inteiro será $x=[x]+\theta$, com $0<\theta<1$, e portanto $-x=-[x]-1+(1-\theta)$, onde $0<1-\theta<1$. Tomando a parte inteira de $-x$, tem-se $[-x]=$ $=[-[x]-1+(1-\theta)]$, ou, em virtude de *b)*, $[-x]=$ $=-[x]-1+[1-\theta]$ ou, finalmente, $[-x]=-[x]-1$ e, portanto, $[-x]+[x]=-1$, c. c. d.

Provemos *d)*: Como é $x=[x]+\theta$, com $0\leq\theta<1$, e $y=[y]+\theta'$, com $0\leq\theta'<1$, vem $x+y=[x]+[y]+$ $+\theta+\theta'$ ou, pelas propriedades *a)* e *b)*, $[x+y]=[x]+$ $+[y]+[\theta+\theta']$. Ora $0\leq\theta+\theta'<2$, logo $[\theta+\theta']=0$, ou 1. Daqui segue-se que $[x+y]\geq[x]+[y]$. Demonstremos finalmente *e)*. Sejam q e r o cociente e o resto da divisão de $[x]$ por n, será: $[x]=nq+r$, com $0\leq r\leq n-1$ logo $[x]/n=q+r/n$ onde $0\leq r/n\leq 1-1/n<1$ o que quere dizer que $[[x]/n]=q$.

Por outro lado como $x=[x]+\theta$, será $x=nq+r+\theta$ onde $0\leq\theta<1$ e $x/n=q+(r+\theta)/n$.

Ora $0\leq r+\theta<n$ e portanto $0\leq(r+\theta)/n<1$, o que permite afirmar ser $[x/n]=q$, que demonstra *e)*.

Nota — A propriedade *e)* ainda é válida quando n é um inteiro qualquer diferente de zero, como se demonstra fàcilmente.

Exercícios:

1. Demonstre que o número de inteiros m que satisfazem à dupla desigualdade $y\leq m<x$ é dado por $[x]-[y]$.
2. Demonstre que $[2x]-2[x]=0$ ou 1 conforme fôr, a parte fraccionária de x, menor que 1/2 ou maior ou igual a 1/2.
3. Prove que $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.

3. Maior potência de um inteiro primo contida num factorial

Sejam dados um inteiro primo p, e o factorial $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$. Se $p>n$, é claro que p não divide $n!$, mas diremos, no entanto, que a maior potência de p que divide $n!$ é p^0. Se $p\leq n$, então $n!$ é divisível por p, e para o que se segue é importante determinar a maior potência de p que divide $n!$

Para isso representemos por $\nu(n)$ o expoente dessa potência.

Entre os números $1,2,3\cdots n$, sòmente $p,2p,3p\cdots$ são divisíveis por p e o maior múltiplo de p inferior a n será $n_1\cdot p$ onde $n_1=[n/p]$.

Então o produto dos múltiplos de p que existem em $n!$ é

$$p\cdot2p\cdot3p\cdot\cdots\cdot n_1p=p^{n_1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n_1;$$

mas no produto $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n_1$, o inteiro p aparece como base duma potência cujo expoente é $\nu(n_1)$; então é

$$\nu(n)=n_1+\nu(n_1) \tag{2}$$

e do mesmo modo $\nu(n_1)=n_2+\nu(n_2)$, $\nu(n_2)=n_3+\nu(n_3)$, $\cdots$, onde $n_2=[n_1/p]$, $n_3=[n_2/p]\cdots$ formam uma cadeia descendente de inteiros não negativos, que tem portanto um último elemento. Seja $n_k=[n_{k-1}]$ êsse último elemento; então é

$$\nu(n_{k-1})=n_k \tag{4}$$

isto é $\nu(n_k)=0$, porque se fôsse $\nu(n_k)\neq0$ seria $\nu(n_k)=n_{k+1}+\nu(n_{k+1})$, onde $n_{k+1}\neq0$ e portanto n_k não seria o último elemento da cadeia.

Eliminando $\nu(n_{k-1})$, $\nu(n_{k-2})\cdots$ entre (2), (3) e (4) obtém-se

$$\nu(n)=n_1+n_2+\cdots+n_k. \tag{5}$$

Como pela propriedade *e)* do § 2 se pode escrever $n_2=[n/p^2]$, $n_3=[n/p^3]\cdots$, teremos $\nu(n)=[n/p]+$ $+[n/p^2]+[n/p^3]+\cdots$ terminando a adição no primeiro têrmo para o qual fôr $p^k>n$, isto é, quando $\nu(n_k)=0$.

Exemplo:

Achar a maior potência de 7 contida em 1.000!

Como $\left[\frac{1000}{7}\right]=142$, $\left[\frac{1000}{49}\right]=\left[\frac{142}{7}\right]=20$ e $\left[\frac{1000}{343}\right]=$ $=\left[\frac{20}{7}\right]=2$ é $\nu(1000)=142+20+2=164$, e portanto 7^{164} é a maior potência de 7 contida em 1000!.

Demonstremos o Teorema que propusemos no início. Pretendemos provar que o cociente

$$Q=\frac{(a+1)\,(a+2)\cdots(a+n)}{n!}$$

é um inteiro. Ora como Q se pode escrever

$$Q=\frac{(a+n)\,!}{n!\,a!}$$

então o expoente da maior potência de um inteiro primo p, que entra na decomposição factorial do numerador é

$$\nu(n)=\left[\frac{a+n}{p}\right]+\left[\frac{a+n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots.$$

Por outro lado os expoentes das maiores potências do mesmo inteiro primo p que entram nos factoriais do denominador são respectivamente

$$\nu(n)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

e

$$\nu(a)=\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^3}\right]+\cdots$$

portanto o expoente da maior potência de p que entra na decomposição factorial do denominador é

$$\nu(n)+\nu(a)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\cdots$$

e como, em vista da propriedade *d)* do § 2, é

$$\left[\frac{n+a}{p}\right]\geq\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{a}{p}\right],\quad\left[\frac{n+a}{p^2}\right]\geq\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]\cdots$$

será $\nu(a+n)\geq\nu(a)+\nu(n)$.

Ora como esta propriedade se verifica qualquer que seja o inteiro primo que divida o denominador, o Teorema fica demonstrado.

ALGUNS PONTOS DOS EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES ESTRANGEIRAS

Escuela Especial de Ingenieros de Montes — Madrid, Setembro de 1945.

2187 — Um cone de altura h está inscrito numa esfera de raio R. ¿A que distância x do vértice do cone se deve conduzir um plano paralelo à base para que a área da secção produzida no cone esteja para a área da secção produzida na esfera pelo mesmo plano na relação m/n? Discussão.

2188 — Determinar todos os valores de x que satisfaçam à equação $\operatorname{sen} 5x = 16 \operatorname{sen}^5 x$.

2189 — É $8m^3$ o volume do sólido limitado pelas três faces concorrentes de um cubo e pelo plano, que determinam os três vértices extremos das arestas, que concorrem no ponto de intersecção das três faces. Calcular o raio da esfera circunscrita a um tetraedro regular equivalente ao cubo.

2190 — Para observar a passagem de aviões, dispõe-se de 3 estações A, B, C, determinando um triângulo de lados a, b, c, sôbre um terreno horizontal. Medem-se, num dado instante, os ângulos α, β e γ que formam respectivamente as visuais dirigidas para um avião dos pontos A B C com o plano determinado por êstes 3 pontos. Determinar a altura a que no instante considerado passou o avião sôbre o plano horizontal ABC.

Escuel Especial de Ingenieros de Minas — Madrid, Setembro de 1945.

2191 — Determinar o lugar geométrico do vértice ds um triedro triortogonal cujas arestas são sempre tangentes a uma esfera de raio dado R.

2192 — Determinar a e b de modo que o polinómio $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ seja divisível pelo polinómio x^2-x+b.

2193 — Calcular os valores inteiros que satisfazem ao sistema:

$$5x-3y>2 \quad 2x+y<11 \quad y>3 .$$

2194 — Resolva a inequação

$$x(x+1)/(x-1)>6 .$$

2195 — Num exágono regular $[ABCDEF]$ circunscrito a uma circunferência de centro O e raio unidade traçam-se as diagonais AC e BF que se intersectam em I. Calcular a área gerada pelo lado $\overline{AF}$ e o volume gerado pelo triângulo $[AIF]$ quando o referido triângulo gira de 360º em tôrno do eixo OIH, sendo H o ponto de tangência do lado AB.

Estes problemas são transcritos da revista espanhola *Matematica Elemental* 4.ª série, Tomo V, suplemento n.º 2 — Madrid, 1945, onde o leitor interessado encontrará muito mais material de estudo.

Imperial College of Science and Technology — Universidade de Londres — Exame de entrada — Setembro de 1944.

2196 — Calcular com 3 decimais exactas

(1) $(x+x^{-3})^{1/2}$ para $x=0{,}7316$

(2) $\log_{10}^2 x$ para $x=0{,}0192$.

2197 — Em 8 fichas escrevem-se as letras A, B, C, D, a, b, c e d, uma letra em cada ficha. Quantos grupos de 4 fichas podem formar-se contendo *a)* 2 letras maiúsculas e 2 minúsculas; *b)* pelo menos duas letras maiúsculas; *c)* pelo menos uma letra maiúscula e pelo menos uma letra minúscula?

2198 — Resolva o sistema

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y-1}=1 \quad \frac{1}{y+1}+\frac{1}{x-1}=1 .$$

2199 — $[ABCD]$ é um trapésio; AB e DC, lados paralelos, são perpendiculares a BC e é θ o ângulo $\widehat{ACB}$. Sendo $\overline{AB}=l$ e $\overline{CD}=m$, calcule $\overline{AD}$ e o ângulo $\widehat{ABD}$.

2200 — Um sistema de circunferências passa por 2 pontos fixos A e B. Mostrar que são iguais os comprimentos das tangentes às circunferências tirados de qualquer ponto de AB, exterior ao segmento $\overline{AB}$.

Traçam-se tangentes PT e $P'T'$ a cada uma das circunferências de pontos fixos P e P' equidistantes de AB e do mesmo semi-plano que AB determina. Mostre que $\overline{PT}^2-\overline{P'T'}^2$ é constante para as circunferências do sistema.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. A. — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º exercício de revisão — 1 de Fevereiro de 1946.**

2201 — Resolva a equação $(z^2+i)^3=z^2+i$ e represente no plano de Argand os afixos das suas raízes.

R: *As raízes da equação proposta são as raízes das equações* $z^2+i=0$, $z^2+i=1$ *e* $z^2+i=-1$ *que se podem escrever respectivamente,* $\sqrt{\operatorname{cis}(3\pi/2)}$, $z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}(7\pi/4)}$ *e* $z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}(5\pi/4)}$. *Por aplicação da fórmula de Moi-*

vre generalizada obtém-se: $z_1=\text{cis}(3\pi/4)$, $z_2=\text{cis}(7\pi/4)$, $z_3=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(7\pi/8)$, $z_4=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(15\pi/8)$ $z_5=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(5\pi/8)$ *e* $z_6=\sqrt[4]{2}\,\text{cis}(13\pi/8)$ *onde por* $\text{cis}(\theta)$ *se designa* $\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$. *Os afixos das quatro últimas raízes encontram-se sôbre uma circunferência de centro na origem e de raio igual a* $\sqrt[4]{2}$, *que se pode obter da seguinte maneira: tomando um segmento* u *para a unidade de comprimento, determine-se o meio proporcional* m *entre* u *e* 2u, *e em seguida o meio proporcional* s *entre* m *e* u. *O comprimento de* s *é, na unidade adoptada, igual a* $\sqrt[4]{2}$.

2202 — Calcule z, sabendo que duas das suas raízes cúbicas diferem de uma unidade. R: *Sejam* α *e* $\alpha+1$ *as raízes cúbicas em questão. Então* $\alpha^3=(\alpha+1)^3$, *equação que dá para* α *os valores* $\alpha_1=(-3+\sqrt{3}\,i)/6$ *e* $\alpha_2=(-3-\sqrt{3}\,i)/6$. *Os valores de* z *que satisfazem ao problema são, pois,* $z_1=\alpha_1^3=\sqrt{3}\,i/9$ *e* $z_2=\alpha_2^3=-\sqrt{3}\,i/9$.

2203 — Sabendo que a imagem M do complexo $z=x+iy$ descreve a circunferência $x^2+y^2-3x-2y-1=0$, determine a equação cartesiana da curva descrita pela imagem M' do complexo $z'=z-1+2i$. R: *Designando por* X *e* Y *as coordenadas cartesianas do ponto* M', *vem* $X+iY=(x-1)+i(y+2)$; *por definição de igualdade de complexos,* $x=X+1$, $y=Y-2$ *e a equação pedida é* $X^2+Y^2-X-6Y+5=0$, *que representa uma circunferência de centro no ponto* $(1/2,3)$ *e de raio igual a* $\sqrt{17}/2$.

2204 — Dado, no plano de Argand, o ponto M imagem do complexo z, construa o ponto M' imagem de z', tal que $|z+z'|=2|z|$ e o produto zz' seja um imaginário puro. Suponha que a condição $|z+z'|=2|z|$ é substituída por $|z+z'|=a|z|$ $(a>0)$; determine os valores de a para os quais o problema não tem solução. R: *Como* $|z+z'|=|z'-(-z)|=2|z|$, *o ponto* M' *deve estar sôbre uma circunferência de raio igual ao dôbro da distância de* M *à origem e de centro no simétrico de* M *em relação à origem; como* zz' *é um imaginário puro,* M' *deve estar sôbre a recta* r *que faz com o eixo das abscissas o ângulo* $\pi/2-\alpha$, *sendo* α *um argumento de* z. *Como a recta* r *encontra a circunferência em dois pontos, o problema tem duas soluções, que são precisamente êsses pontos. No caso da condição* $|z+z'|=a|z|$, *o problema não tem solução quando* $a|z|$ *é menor que a distância do simétrico de* M *em relação à origem à recta* r, *isto é, quando* $a<\cos 2\alpha$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 3.º exercício de revisão.

2205 — Uma urna U_1 contém 3 esferas brancas e 2 pretas, e uma urna U_2 contém 2 esferas brancas e 3 pretas. Tira-se uma esfera de U_1: se fôr branca, introduz-se em U_2; se fôr preta, introduz-se novamente em U_1. Faz-se esta operação três vezes. Tira-se depois uma esfera de U_2. Calcular a probabilidade de ser branca. R: $P=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}+$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}+$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{31477}{70000}.$$

2206 — Lançam-se 12 dados. Calcular a probabilidade de obter 2 quadras, 3 quinas, 4 senas e de ser 51 a soma dos pontos obtidos.

$$R: P=\frac{12!}{2!\,3!\,4!\,2!\,1!}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}=\frac{275}{5038848}.$$

2207 — Tomam-se ao acaso um inteiro positivo n não superior a 20 e um inteiro positivo m não superior a 30. Probabilidade de m ser divisível por n.

$$R: P=\frac{101}{600}.$$

2208 — Baseando-se nos desenvolvimentos dos binómios $(2+1)^m$ e $(2-1)^m$ prove que, se m é ímpar

$$3^m=1+\binom{m}{1}2^m+\binom{m}{3}2^{m-2}+\binom{m}{5}2^{m-4}+\cdots+2\binom{m}{m}.$$

R: *Basta subtrair membro a membro as igualdades que se obtem escrevendo os desenvolvimentos dos referidos binómios e passar* $-(2-1)^m=-1$ *para o segundo membro da igualdade resultante.*

Enunciados e soluções dos n.os 2201 a 2208 de José Morgado.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência.

2209 — Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes à bissectriz dos quadrantes ímpares e que intersectam no eixo dos yy um segmento de comprimento igual a 2. R: $[(x-y)/\sqrt{2}]^2=x^2+1$ *ou* $x^2-y^2+2xy+2=0$, *que é a equação de uma hipérbole.*

2210 — Dadas as rectas não complanas $a\equiv(a',a'')$, $b\equiv(b',b'')$ e o ponto $P\equiv(P',P'')$ não pertencente a nenhuma delas, determine a intersecção $i\equiv(i',i'')$ dos planos $\alpha\equiv(a,P)$ e $\beta\equiv(b,P)$.

2211 — Seja $a\odot b=a+b-1$, onde a e b são inteiros positivos. Mostre que a operação $\odot$ verifica as leis de um semi-grupo.

2212 — Descrevendo a imagem de $z=x+iy$ a recta $y-4x=0$, determine a equação cartesiana da curva descrita pela imagem de $\frac{2}{z-1}$ · R: $2X^2+2Y^2+$ $+4X+Y=0$, *equação da circunferência de centro no ponto* $(-1,-1/4)$ *e de raio* $\sqrt{17}/4$.

Soluções dos n.os 2209 a 2212 de José Morgado.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º Exame de freqüência — 23-II-1945.

2213 — Calcular o produto de tôdas as determinações de $(1+i+i^2+\cdots+i^{n-1})^{1/n}$. Discussão. R: *A expressão dada reduz-se a* $E=\left(\frac{1-i^n}{1-i}\right)^{1/n}$. *Ora* $i^n=1, i, -1, -i$ *consoante* $n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ (k inteiro e positivo). *Em cada um dêstes casos teremos que calcular os produtos das* n *determinações de, respectivamente,* $E_0=0^{1/n}$, $E_1=1^{1/n}$, $E_2=[2/(1-i)]^{1/n}$ e $E_3=[(1+i)/(1-i)]^{1/n}$; *representemo-los por* P_0, P_1, P_2 *e* P_3. *Mostra-se que, sendo* $z=\rho(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$, *o produto das* n *determinações de* $z^{1/n}$ *é* $P=(-1)^{n-1}\cdot z$. *Assim, ter-se-à* $P_0=0$, $P_1=1$, $P_2=-(1+i)$ *e* $P_3=i$, *em cada uma das hipóteses formuladas sôbre* n.

2214 — Dados os complexos z_1, z_2 e z_3, provar que se $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ é real, os afixos dêles estão em linha recta. R: *Seja* $z_k=x_k+y_k\cdot i$ $(k=1,2,3)$. *Calcule-se* $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. *Para que êste complexo se reduza à parte real, terá que anular-se o coeficiente da parte imaginária, ou seja* $(x_2-x_3)\cdot(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_2-y_3)=0$ *ou* $\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}$, *condição de colinearidade de* 3 *pontos de coordenadas* $P_k(x_k, y_k)$, $(k=1,2,3)$, *que são os afixos de* z_k.

2215 — Dum tábua de anuidades tiraram-se os seguintes valores

$x=20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$

$a_x=17{,}6281, 16{,}8157, 15{,}7599, 14{,}4738, 12{,}9711,$
$11{,}2596, 9{,}3777$.

¿ Até que ordem de diferenças se deve ir para obter uma boa interpolação? Calcular a_{32}. R: *Construindo uma tabela de diferenças ordinárias e utilizando a interpoladora de Gregory-Newton, obtém-se* $a_{32}=15{,}2721$.

Soluções dos n.os 2213 a 2215 de Orlando Morbey Rodrigues

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática».
Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.
Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2216 — Seja S um semi-grupo, comutativo ou não. Construa um grupo G que contenha um subconjunto S' isomorfo de S. [*Sugestão:* Recorde a construção da teoria dos números racionais a partir da dos números inteiros].

2217 — Seja G um grupo, a e b dois quaisquer dos seus elementos e $\cdot$ a operação nele definida. Definamos em G a operação $\odot$ da seguinte maneira: $x\odot y=(x\cdot a)\cdot(y\cdot b)$ para quaisquer x, y e G. Mostre que é condição necessária e suficiente para que: *a)* G constitua um grupo relativamente à operação $\odot$, que b seja um elemento do centro de G; *b)* G constitua um grupo abeliano relativamente à operação $\odot$, que a e b sejam elementos do centro de G; *c)* a operação $\odot$ coïncida com a operação $\cdot$ que $a\cdot b$ seja o elemento unidade.

Problemas n.º 2216 e 2217 propostos por José Morgado.

Para compreensão da terminologia empregada consultem-se *Aritmética Racional* de A. Monteiro e J. da Silva Paulo e *Elementos da Teoria dos Grupos* de Almeida Costa (C. E. M. P. — n.º 1).

CORRECÇAO

No problema n.º 2183, (*Gazeta de Matemática* n.º 27), figura por lapso $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}}-1}$ em vez de $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

AOS LEITORES

Para não atrazar mais ainda a publicação dêste número, que deveria, normalmente, ser distribuido em Abril de 1946, reduzimos as secções «Matemáticas Superiores» e «Problemas» e suprimimos a secção «Boletim Bibliográfico — Publicações Recebidas». Êste atrazo é devido a causas estranhas à nossa vontade e esperamos poder no próximo n.º 29 compensar as reduções que fomos forçados a levar a efeito nêste número.

A Redacção

GAZETA DE MATEMÁTICA

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Prêço de assinatura anual de quatro números	30$00
Prêço de capa por cada número	10$00
Prêço de capa do n.º 22, extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	8$00

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao prêço de Esc. 250$ (colecção dos 22 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 12 a 26), ao prêço de capa.

●

Reedição do ano 1 da «Gazeta de Matemática» n.^os 1 a 4

Está em composição o vol. 1 da *Gazeta de Matemática* que compreenderá os 4 primeiros números já esgotados. Aquêles que se inscrevam antes da sua publicação, que terá lugar possìvelmente em Outubro de 1946, beneficiarão do prêço especial de 30$00. O vol. 1 deve ser vendido ao público por 35$00 ou 40$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreendimento comercial