GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AOS EXAMES DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VII **N.° 29** AGÔSTO-1946

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Editor	Administrador	Tesoureiro
Gazeta de Matemática, Lda.	*José de Oliveira Campos*	*A. Marques de Carvalho*

REDACÇÃO

Redactor principal

Manuel Zaluar

RESPONSÁVEIS DE SECÇÕES:

PEDAGOGIA	Bento J. Caraça
ASTRONOMIA	Manuel Peres Júnior
TEMAS DE ESTUDO	Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto *
MATEMÁTICAS ELEMENTARES	António A. Lopes, J. Calado, J. J. Rodrigues dos Santos, J. da Silva Paulo
MATEMÁTICAS SUPERIORES	A. Pereira Gomes, L. G. Albuquerque, V. S. Barroso
PROBLEMAS	Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto *

OUTROS COMPONENTES:

EM LISBOA	A. Ferreira de Macedo, A. Sá da Costa, F. Carvalho Araújo, J. Rémy Freire, Luís Passos, Orlando M. Rodrigues, R. Q. Rosa
PÔRTO	J. Delgado de Oliveira, J. Rios de Sousa
BARCELONA	Francisco Sanvisens
LOURENÇO MARQUES	José H. Arandes
MADRID	Sixto Rios Garcia
ROMA	J, Ribeiro de Albuquerque, J. Sebastião e Silva
RIO DE JANEIRO	António A. Monteiro, Achile Bassi, J. Abdellay e Leopoldo Nachbin
SÃO PAULO	Omar Catunda
ZÜRICH	Hugo B. Ribeiro, Maria do Pilar Ribeiro

* **Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto:** Director: Ruy Luís Gomes. Outros investigadores: Almeida Costa, M. G. Miranda, M. G. P. Barros, A. Pereira Gomes, L. Neves Real, Laureano Barros e F. Soares David

Séde e Administração da *Gazeta de Matemática, Lda.* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

PUBLICAÇÕES RECENTES:

PORTUGALIAE MATHEMATICA — Vol. 5-Fascs. 1-2 — 1946

PORTUGALIAE PHYSICA — Vol. 2-Fasc. 1 — 1946

Composto na Tipografia Matemática, Limitada — Rua Almirante Barroso, 20, r/c. — Lisboa-N

ANO VII - N.º 29 GAZETA DE MATEMÁTICA AGÔSTO - 1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ■ ADMINISTRADOR: *J. O. Campos*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c LISBOA-N.

TOPOLOGIA E ÁLGEBRA

por **B. Eckmann** (Lausanne e Zürich)

Lição inaugural proferida em 22 de Maio de 1943 na Escola Politécnica Federal de Zürich e publicada na revista *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, LXXXIX, 1944 [1]

1. Seja-me permitido tomar para ponto de partida duas verdades simples. Uma é o célebre teorema dos poliedros de Euler: No cubo a soma do número dos vértices e do número das faces supera de dois o número das arestas. E isto é assim, não só para o cubo mas para qualquer sólido, quer êle seja regular ou irregular, simples ou não, desde que, grosso modo, tenha a forma duma esfera deformada. O segundo exemplo: se numa recta se marcam, nos dois sentidos, pontos a distâncias iguais, e se depois se enrola a recta sôbre uma circunferência, os pontos marcados ficam densos e uniformemente repartidos, sôbre tôda a circunferência — desde que a distância entre os pontos não seja precisamente uma fracção racional do perímetro da circunferência; neste caso os pontos marcados ficariam repartidos em pontos isolados e uniformemente distribuídos sôbre a circunferência.

Por agora, só quero indicar com êstes exemplos que há relações notáveis entre os mais simples objectos da intuïção espacial e os números, o cálculo. Tais relações encontram-se em tôdas as partes da Matemática, tanto nas teorias mais abstractas como nas aplicações à Física e à Técnica.

Espaço e Número — Embora apareçam quási sempre simultâneamente é-se inclinado a encará-los, à primeira vista, como coisas de natureza muito diferente, que têm dado lugar a métodos e modos de pensar, igualmente de natureza diferente; separam-se expressamente os raciocínios algébricos dos geométricos, isto é, aquêles que se referem ao cálculo daquêles que se referem ao conceito de espaço. Porém, cêdo se mostra, por uma observação mais atenta, que os dois modos de pensar estão estreitamente ligados e tão bem entrelaçados que não seria fácil traçar uma fronteira entre êles. A sua análise aprofundada e o seguimento das suas relações recíprocas são de grande valor para a compreensão de muitas partes da matemática e têm contribuído decisivamente, nos tempos modernos, para o seu desenvolvimento.

Ao procurar, no que segue, fazer notar tais conexões com algumas indicações e socorrendo-me dos mais simples exemplos, sei bem que só muito imperfeitamente posso transmitir o conhecimento da questão, que sem a efectiva caminhada das idéias na teoria e na prática a imagem fica sempre desfigurada. Assim empenhar-me-ei, em primeiro lugar, em tornar palpável a atmosfera de idéias na qual tais relações se pôem em jôgo. Desculpar-me-ão quando eu no quadro desta conferência, formule muitas coisas imperfeitamente, fuja às dificuldades com aplicações demasiado gerais e, aqui ou ali, simplifique ou exagere um pouco; e, por outro lado, não se me levará a mal se, eventualmente, fôr levado a domínios científicos mais afastados e não possa evitar o uso da linguagem ali comum.

2. Quando se quer esclarecer algum traço especialmente importante dum objecto algo complicado e incompreensível, separamo-lo do resto e investigamo-lo em si mesmo; faz-se uma imagem simplificadora, do objecto, um *esquema* (ou mesmo vários) procurando esclarecê-lo sob diferentes aspectos. Nêste sentido se obtiveram e individualizaram, como esquema do cálculo a álgebra abstracta, e como esquema da descrição do espaço a geometria abstracta.

Um esquema — pense-se, por exemplo no duma máquina complicada — não é uma imagem fiel da realidade mas antes uma imagem muito incompleta e, na maior parte das vezes, deformada. Porém, o que se obtém pode aparecer-nos, mais nítido, do que a própria realidade: o esquema põe de parte o supérfluo e faz realçar, o melhor possível, o essencial; não tem a pretensão de revelar as coisas exactamente, mas só determinadas relações entre elas. Dêste modo êle compreende, muitas vezes, simultâneamente diferentes

[1] Agradecemos ao Autor e à Revista as facilidades concedidas para a publicação desta tradução.

casos análogos e facilita a compreensão das idéias fundamentais, as quais ordinàriamente estão escondidas não só atrás duma multidão de detalhes técnicos, mas também atrás duma forma exterior agradável. E não se passam as coisas muito diferentemente na matemática: precisamente quando se tem compreendido os detalhes mais ou menos complicados de cálculos automáticos ou de construções não evidentes, se sente muitas vezes, a necessidade de abranger dum golpe de vista o fio das idéias, como um todo, ordená-lo em conexões gerais, conhecer o «fundamento do método» ou a «idéia da demonstração». Desejariamos abranger tôdas as possibilidades para além das aplicações especiais e procurar dominar problemas singulares por meio de conclusões gerais; não nos satisfazemos com resultados «casuais», mas pelo contrário preguntamos pelas suas bases «profundas».

Assim, mostrou-se como particularmente vantajoso escolher da multidão de possibilidades os dois pontos de vista mais importantes, o do esquema do cálculo e o da descrição do espaço.

3. Permito-me, seguidamente, fazer sôbre o primeiro, algumas referências muito curtas e gerais, em relação com a *Álgebra*.

Na álgebra abstracta toma-se da noção de número só uma coisa, o cálculo, e abstrai-se, por completo da própria natureza dos números; êstes substituem-se por letras, e com estas se executam todas as operações, adição, multiplicação e suas inversas. Aqui copiam-se, mais ou menos perfeitamente, as regras de cálculo numérico; assim, por exemplo, porque $3+5=5+3$ também $a+b=b+a$ (lei comutativa). E isto tem êste sentido: fórmulas e resultados ficam certos quando se substituem as letras por números quaisquer. Naturalmente, ficam dêste modo, sem utilização muitas características dos números reais: por exemplo, a de representados na recta numérica constituirem um conjunto sem lacunas. Então pode-se calcular também com os números inteiros, que, contudo, sob muitos aspectos, têm outras características. Geralmente há ainda muitos outros objectos, além dos números reais ou dos inteiros, que também se podem adicionar (ou multiplicar ou adicionar e multiplicar) e para êstes tem-se precisamente o mesmo formalismo. Assim pode-se, por exemplo, adicionar ângulos com o mesmo vértice ou as rotações à volta dêste ponto; e se aqui valem as mesmas regras formais que valiam, por exemplo, para a adição dos números reais, no entanto êste sistema é completamente diferente; por repetidas adições volta-se ao zéro. Sistemas de objectos com os quais se pode efectuar uma operação, chamam-se *grupos* (mais precisamente comutativos, quando, como em todos os nossos exemplos, é válida a lei comutativa). Há também grupos que contêm só um número finito de objectos; por exemplo, tomem-se em vez de todos os ângulos ou rotações, só as rotações do octógono e seus múltiplos e numerem-se de 0 a 7; então é $1+2=3$, $2+4=6$, mas $3+5=0$, $4+7=3$, etc., e fala-se dum grupo de ordem finita (aqui 8). O grupo de ordem 2 contém só dois objectos, sejam 0 e 1 e é $1+1=0$.

A teoria dos grupos procura encontrar as relações que são comuns a todos os sistemas com uma operação e determinar todos êstes possiveis sistemas em geral. Visto que se tropeça com tais sistemas nos mais diferentes domínios, esta teoria reune idéias que aparecem na teoria dos números, na solução das equações, na teoria das funções, na física atómica, no estudo dos cristais, etc. — ela constitue para êles todos, um mesmo esquema, que é naturalmente mais complicado do que deixam prever os meus exemplos despretenciosos.

Anàlogamente se investigam os sistemas com ambas as operações (adição e multiplicação e suas inversas); chamam-se *corpos*. Abstrai-se muitas vezes, da lei comutativa da multiplicação ($a \cdot b=b \cdot a$), visto que há muitos sistemas de números onde ela não é válida e que são importantes sob muitos aspectos mesmo para aplicações na Física e na Técnica. Renunciarei aqui, a fazer mesmo só simples alusões à multidão de problemas e possibilidades que se escondem nesta noção de corpo.

A étapa essencial da Álgebra abstracta consiste em individualizar o esquema, considerar, por assim dizer cada grupo e cada corpo como um mundo no qual entre os objectos não há outras relações do que as puras operações de cálculo. O que aí nos ocupa são portanto, acontecimentos a analizar por meio de algumas étapas. Resulta assim um edifício abstracto de raro acabamento e de rara harmonia, cheio de valor em tôdas as aplicações — na matemática ou no mundo que nos rodeia.

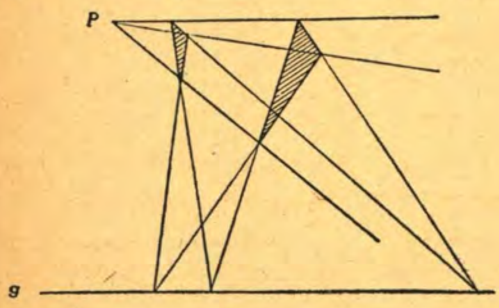
A Álgebra Abstracta não é uma velha disciplina; teve origem na segunda metade do século XIX com Dedekind e Kronecker, e foi pela primeira vez, em época mais recente, reanimada por Emmy Noether e pelo seu grupo.

4. Agora quanto à *Geometria,* quanto ao esquema do espaço. Como propriedades e relações mais simples que se poderiam extrair da noção extremamente complexa de espaço, aparecem, seguramente, em primeiro lugar, aquelas que tratam de ligação de pontos, de intersecção de rectas, de geração de planos, etc., portanto mais ou menos o que se designa por *Geometria projectiva.* Abstrair-se-á aqui outra vez, da natureza dos objectos, pontos, rectas, planos e atender-se-à só às suas relações mútuas; obtém-se assim uma teoria, que na sua simplicidade e generalidade se pode confrontar muito bem com a álgebra abstracta. Mas

se se julga agora que desta maneira se podem distinguir, rigorosamente, os raciocínios algébricos dos geométricos, que se pode separar dum modo preciso o que se enraíza ou se pode demonstrar num e no outro esquema — então cai-se num êrro.

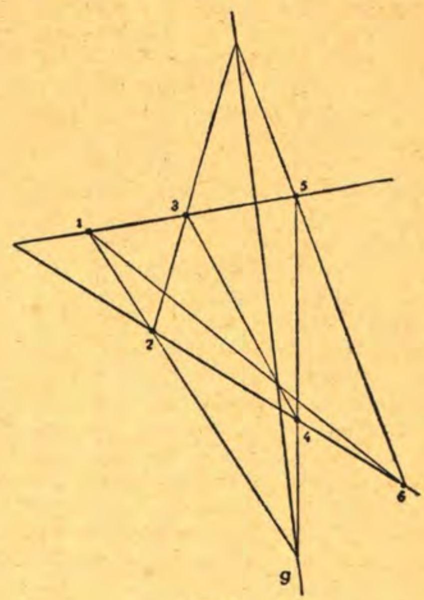
Trata-se bem duma diferença de método, mas não duma diferença de conteúdo. Mostrou-se, e isto é um dos resultados das célebres investigações de Hilbert [1] (1) sôbre os «Fundamentos da Geometria», que ambas as teorias, por mais diferentes que as suas origens intuitivas possam ser, exprimem precisamente o mesmo (caso se tome a geometria projectiva do espaço, a plana não basta !). Isto pouco espantará, talvez, a quem estiver familiarizado com a «geometria analítica» ; nesta, é um ponto do plano substituído por dois números, as suas coordenadas (como é familiar a todos nas cartas topográficas), um ponto do espaço substituído por três números, e as construções geométricas substituem-se pelo cálculo com êstes números e recìprocamente. Assim pode por exemplo, apontar-se um canhão com o auxílio de coordenadas e de cálculos—e, também, atingir efectivamente o alvo !

Mas a coincidência é mais profunda ; isto resulta de que as noções fundamentais da geometria projectiva (isto é, projecção, secção, geração) correspondem analìticamente às mais simples operações do cálculo, tais como as podemos efectuar não só com os números reais mas em cada corpo. Assim a intersecção de rectas no plano ou de planos no espaço, por exemplo, não significa senão a solubilidade de equações lineares. A analogia prolonga-se até às regras fundamentais : à regra $a\,(bc)=(ab)\,c$, que é indispensável em cada sistema de números, corresponde a figura de incidência no plano conhecida por «teorema de Desargues» (fig 1;



(Fig. 1)

quando os vértices de dois triângulos ficam nos três raios que partem de P, os prolongamentos dos seus lados devem intersectar-se em pontos duma recta g — caso nos encontremos num plano que seja parte da geometria do espaço ; nêste caso reconhece-se imediatamente a justeza, se a figura se considera como fotografia duma figura do espaço). E a regra de cálculo $a \cdot b = b \cdot a$ corresponde ao «teorema de Pascal» (fig. 2; considerem-se os ângulos dum hexágono 123456



(Fig. 2)

e verifica-se então que os três pontos de incidência (12) (45), (23) (56), (34) (61) ficam sôbre uma recta g).

Do ponto de vista abstrato chamar-se-há espaço projectivo a cada sistema de objectos no qual se podem efectuar as operações projectivas de incidência de rectas, etc. mesmo quando êste sistema não tenha muito que ver com o nosso espaço empírico. Então há — anàlogamente ao que é possível com o cálculo nos diferentes sistemas de números da álgebra abstracta — diferentes geometrias projectivas ; mas pode tratar-se cada uma delas como geometria analítica desde que se escôlha para coordenadas um sistema de números apropriado. A geometria determina as propriedades, do seu próprio sistema de números (corpo), mais adequado (por exemplo — ao contrário do teorema de Desargues — o teorema de Pascal nem sempre é válido, donde resulta que, neste caso, no corpo correspondente não é válida a lei comutativa $a \cdot b = b \cdot a$) . A cada geometria projectiva corresponde um sistema de números e recìprocamente : justifica-se assim bem que se fale com, Hermann Weyl, duma «harmonia preestabelecida entre a geometria e a álgebra». Vêmo-nos reconduzidos à concepção dos gregos, segundo a

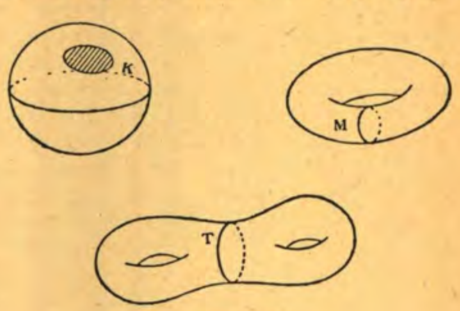
(1) Êstes números [1], etc. referem-se à literatura indicada no fim desta exposição.

qual um domínio de coisas determina uma noção de número a êle adequada. Esta concepção teve que ceder, durante muito tempo, a uma bem explicável situação de primasia dos números (reais), mas nos últimos anos, sobressaíu outra vez na Física duma maneira particularmente impressionante. Mostrou-se ali que os números reais são bem apropriados para a descrição de acontecimentos macroscópios e medidas experimentais, mas não para a descrição dos sistemas de dimensões atómicas; em lugar dêles aparecem, aqui, outros sistemas de números nos quais, antes do mais, não é válida a lei comutativa $a \cdot b = b \cdot a$ e percebe-se bem, como às suas propriedades algébricas correspondem certas propriedades físicas (carga, velocidade de rotação própria, etc.).

5. Deve, portanto, assentar-se em que a parte considerada como particularmente simples da descrição de espaço, a geometria projectiva, nos reconduz precisamente à álgebra abstracta; chega a vez de procurar outras idéias saídas da pura noção de espaço, que sendo geométricas tenhamos o direito de comparar com as algébricas. E isto também porque, com o que dissemos até agora, não foram tomadas em linha de conta muitas propriedades do espaço e do número. E o que se esclarece já com o exemplo simples dos *números reais*.

Quando nós só os adicionamos e multiplicamos, como o faz o algebrista puro, consideramo-los como objectos isolados, com os quais se passa, de certa maneira, duns para os outros discontìnuamente, visto que se tratam tal como os números inteiros ou os grupos finitos. Não se pensa então no facto de que êles constituem ao mesmo tempo uma variedade contínua, sem lacunas — a recta numérica, a escala — na qual se pode passar, contínuamente dum número para outro e se pode subdividir ilimitadamente qualquer intervalo tão finamente quanto se queira. Em oposição à concepção algébrica, na qual se encaram os objectos isolados, sem consideração pela sua proximidade, coloca-se uma outra que os liga, com utilidade, com as suas vizinhanças e para a qual é decisiva a conexão de continuidade do todo; a concepção topológica.

Na *Topologia* ou análise situs, como anteriormente ela se chamou, estudam-se aquelas propriedades de figuras geométricas que se referem precisamente às suas conexões de continuidade, mas não à grandeza, forma, comprimento; isto é, aquelas propriedades que não mudam por deformações continuas, por qualquer passagem que nada separe do que esteja unido e nada una do que esteja separado. Pense-se, por exemplo, numa circunferência e depois numa outra que foi mal desenhada à mão: sem dúvida que houve grande perturbação nas propriedades (simetria, comprimento, forma), mas ficou uma linha simples fechada; não seria êste o caso se lhe tivessemos feito um laço ou a tivessemos partido. No teorema de Euler dos poliedros, recordado no início desta exposição trata-se de qualquer coisa que sucede a tôdas as superfícies e poliedros que «são da mesma espécie da superfície esférica», isto é, que se deixam deformar nela; podem ser encurvadas, diferentes na forma e grandeza, mas é sempre o número vértices + o das faces — o das arestas igual a 2. Assim como na geometria elementar não é necessário distinguir entre duas figuras congruentes, também não há topològicamente nenhuma diferença entre as superfícies esférica, do cubo, do oval, etc., mas já há entre a esférica e a anelar e a dupla superfície anelar (veja fig 3). Que



(Fig. 3)

não é possível deformar, contìnuamente, qualquer delas noutra resulta já da consideração de linhas fechadas sôbre tais superfícies; há aqui diferentes possibilidades: curvas que se podem reduzir a um ponto, aquelas que limitam qualquer coisa e aquelas para as quais isto se não dá (na fig. 3 estão representados diferentes casos; uma circunferência K na surpefície esférica limita — o interior desaparece quando se corta ao longo da circunferência — e é ainda redutivel a um ponto; o «circulo de gola» T, na dupla superfície anelar limita — por exemplo a metade esquerda — mas não se deixa reduzir a um ponto; ao «meridiano» M sôbre a superfície anelar não sucede nem uma nem outra coisa.

Das diferenças entre estas superfícies ressaltam propriedades topológicas da *forma*. Há também as da *situação*: dois anéis entrelaçados não se deixam separar sem quebra; um nó não se deixa transformar numa circunferência por uma deformação topológica do espaço (fig. 4). Trata-se em cada caso da mesma figura que porém, pode estar de diferentes maneiras.

Um núcleo topológico reside nas mais diferentes teorias matemáticas e é, freqüentemente muito vantajoso pô-lo em evidência nos teoremas e fórmulas. Assim, em particular, considerar na teoria das funções analíticas, com base na idéia de Riemann, a totalidade dos elementos de função duma função analítica como uma superfície (veja [3]); dois teoremas, importantes tratam de curvas sôbre esta superfície: O teorema do integral de Cauchy que diz que o inte-

(Fig. 4)

gral ao longo de cada curva fechada é $=0$, no acso em que ela é fronteira, e o teorema da monodromia que supõe que a curva é redutível a um ponto. Em geral, as idéias fundamentais da teoria das funções de Riemann, a teoria das funções algébricas e dos integrais sôbre superfícies de Riemann são, em alta medida, de natureza topológica e por isso tão claros e intuitivos.

6. O carácter tão intuitivo de tais considerações, é muitas vezes, e precisamente por isso, perigoso; esquecemo-nos que qualquer coisa ficou para demonstrar, e se a intuição é seguramente, uma fonte inexgotável de descoberta, é porém, muitas vezes só uma ficção ou resultante do nosso hábito. Isto teve, inicialmente, como conseqüência, o olhar-se e tratar-se a topologia como uma disciplina um tanto imprecisa e, com efeito, a sua rigorosa formulacão apareceu pela primeira vez muito tarde. Ainda Gauss dizia que se não conhecia dela muito mais do que nada. Foi precisamente a teoria das funções (de Riemann) que pela primeira vez, não só deu o impulso à investigação das superfícies fechadas, mas também mostrou que raciocínios topológicos intervinham em teorias inteiras. Os fundamentos rigorosos, mais recentes, tiveram a sua origem com Cantor (à volta de 1880) e Poincaré (pouco antes de 1900) e conduziram nos últimos anos a um prodigioso desenvolvimento dêste capítulo da geometria. Mostrou-se, cada vez melhor, que o que oferecia maiores dificuldades não eram tanto as demonstrações mas muito mais a escôlha acertada das noções fundamentais — na nossa linguagem: a escôlha do esquema adequado.

A noção que aqui se fêz sobressair, tal como sucedeu na álgebra abstracta com as operações do cálculo foi a de proximidade ou *vizinhança*; ela liga cada ponto com pontos vizinhos, e esta é uma relação que não se poderá permitir que seja destruida (isto chama-se continuidade). Em rectas ou em curvas as vizinhanças são pequenos arcos. portanto limitadas por determinados pontos; nas superfícies são porções de superfície limitadas por curvas e no espaço porções de espaço limitadas por superfícies. Nestas noções, por mais claras e precisas que se deixem compreender, reside, em comparação com as algébricas, qualquer coisa de transcendente, impenetrável, que se liga às possibilidades ilimitadas de refinamento e subdivisão (e que matemàticamente leva às noções de convergência, ponto de acumulação, etc.).

Na edificação do esquema passa-se agora, outra vez, dum modo semelhante ao que permitiu na álgebra tomar um ponto de vista abstracto, à construção abstracta do espaço. Como figuras geométricas têm-se então não sòmente as do espaço ordinário: podem tomar-se como «pontos» objectos quaisquer, cuja natureza individual nos é indiferente, desde que êles estejam ligados por relações de proximidade, e por consequência, constituam um contínuo, uma variededa contínua, na qual haja passagens contínuas e diferenças tão finas quanto se queira. Poderá dizer-se ser a noção dum tal contínuo uma das idéias mais originais, não só da geometria mas também de tôdas as descrições da natureza. Em face dela encontra-se a algébrica onde só há objectos isolados e duns para os outros só passagens discontínuas, as operações de cálculo. Na noção de número real estão as duas noções ligadas e apresentam-se ambas como indispensáveis.

(Continua)

(Tradução de Maria do Pilar Ribeiro)

A noção de integral baseada na medida à Jordan

*por **Ruy Luís Gomes***

Conforme anunciado em nota ao artigo de A. Pereira Gomes — «Integrabilidade-R das funções contínuas» — publicado no n.º 28 da Gazeta de Matemática, vamos tratar agora da noção de integral a partir da medida-J.

Comecemos, portanto, por fixar as hipóteses fundamentais com que devemos trabalhar, reportando-nos principalmente ao artigo de A. Pereira Gomes. É mesmo nossa preocupação que estes dois artigos venham a constituir um todo de utilidade para quem deseje abordar o problema da mensurabilidade e da integrabilidade em termos de medida à Jordan, que abrange, como caso particular, a integrabilidade-R habitual.

1. Hipóteses fundamentais:

Representamos por $f(x)$ uma função numérica, limitada e mensurável-J [1] num conjunto A (mensurável-J) de um espaço euclideano I de qualquer número de dimensões. Como $f(x)$ é mensurável-J, o conjunto

$$M(\lambda) = \underset{x}{E}\,[x \in A : f(x) \geq \lambda],$$

dos pontos $x \in A$ nos quais $f(x) \geq \lambda$, é mensurável-J para valores de λ que formam um conjunto denso [2] na recta euclideana $(-\infty < \lambda < +\infty)$. Em particular, se representarmos por (λ', λ'') um intervalo aberto que contém o intervalo fechado $[l, L]$ limitado pelo ínfimo l e o supremo L de $f(x)$ em A, isto é, tal que $[l, L] \subset (\lambda', \lambda'')$, tem-se $M(\lambda') = A$, $M(\lambda'') = 0$.

E não há dificuldade em intercalar entre $\lambda' = \lambda_0$ e $\lambda'' = \lambda_n$ novos pontos $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1}$, de modo que os conjuntos $M(\lambda_k)$, $k = 0, \cdots, n$, sejam todos mensuráveis-J e, além disso, o diâmetro da partição $[\lambda_k]$ seja arbitràriamente pequeno: $\lambda_k - \lambda_{k-1} < \delta$.

Daqui por diante chamaremos *admissível* a tôda a partição $[\lambda_k]$ de extremos fixos e em que $M(\lambda_k)$ são mensuráveis-J.

Ora, se assentarmos em dizer que uma partição admissível $[\lambda'_k]$ *segue* uma outra $[\lambda''_j]$ quando é um *refinamento* desta última, quere dizer, quando entre os pontos de divisão λ'_k se encontrem todos os pontos λ''_j e porventura novos pontos, então, a família das partições admissíveis constitue um sistema *parcialmente ordenado*, em que a relação de *ordem parcial* é precisamente a relação de *refinamento* ou de sub-divisão. É, no entanto, um sistema parcialmente ordenado especial, pois, dadas duas partições distintas, $[\lambda'_k]$ e $[\lambda''_j]$, basta reunir os pontos λ'_k e λ''_j e ordená-los por ordem de grandeza crescente para obter uma nova partição $[\lambda_i]$ que *segue cada uma das anteriores*, quere dizer, é um refinamento de cada uma delas.

Um sistema parcialmente ordenado com esta propriedade chama-se um *sistema dirigido* [3].

2. Definição de integral:

A cada partição admissível $[\lambda_k]$ façamos corresponder o número

$$\Phi[\lambda_k] = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot m\,[M(\lambda_k) - M(\lambda_{k+1})] = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot m\,(A_k),$$

em que $\lambda_0 = \lambda'$, $\lambda_n = \lambda''$, $A_k = M(\lambda_k) - M(\lambda_{k+1})$ e m representa a medida-J.

Fica assim definida no sistema dirigido das partições admissíveis de extremos λ', λ'', uma função Φ, que é monòtonamente crescente.

Com efeito, se partirmos de duas partições $[\lambda'_k]$, $[\lambda''_j]$ tais que $[\lambda'_k] \leq [\lambda''_j]$, no sentido da ordem parcial do respectivo sistema dirigido, a aditividade de medida-J permite-nos escrever $\Phi[\lambda'_k] \leq \Phi[\lambda''_j]$, no sentido da ordem de grandeza dos números.

TEOREMA: *a função Φ tem um limite segundo o sistema dirigido das partições admissíveis, que é precisamente o supremo dos seus valores.*

Na verdade, como $f(x)$ é limitada e A tem medida finita, resulta que

$$\Phi[\lambda_k] \leq \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} m\,(A_k) \leq L \cdot m\,(A):$$

quere dizer, Φ tem um supremo finito: S. Por outro lado, dada uma vizinhança qualquer de S — $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ — podemos sempre determinar uma partição $[\lambda'_k]$ de tal modo que $\Phi[\lambda'_k] \in (S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ ou mais precisamente $S - \varepsilon < \Phi[\lambda'_k] \leq S$. Mas, então, é $S - \varepsilon < \Phi[\lambda_k] \leq S$, para toda partição $[\lambda_j]$ que segue $[\lambda'_k]$: $[\lambda_j] \leq [\lambda'_k]$.

Fica assim demonstrado que S é o limite de Φ segundo o *sistema dirigido das partições admissíveis.*

A êste número S dá-se o nome de integral de $f(x)$, em A, à base da medida à Jordan, e representa-se pelo símbolo bem conhecido $\int_A f(x)\,dm$.

TEOREMA: *O integral de* f(x) *em* A *é também o ínfimo,* I, *das somas* $\sum \lambda_{k+1} \cdot \mathrm{m}\,(\mathrm{A}_k)$, *relativas a tôdas as partições admissíveis.*

Com efeito, estas somas definem uma função monòtonamente decrescente,

$$\psi[\lambda_k] = \sum \lambda_{k+1} \cdot m\,(A_k), \quad \psi[\lambda''_j] \leq \psi[\lambda_k]$$

para

$$[\lambda'_k] \leq [\lambda''_j].$$

E como

$$\psi[\lambda_k] \geq l \cdot m\,(A),$$

o conjunto dos valores de ψ admite um ínfimo I. Resta-nos, pois, demonstrar que $I = S$. Ora, dadas duas partições admissíveis quaisquer $[\lambda'_j]$ e $[\lambda''_i]$, o seu supremo $[\lambda_k]$ (calculado segundo a ordem parcial do respectivo sistema dirigido, coincide com a partição definida pelos pontos λ'_j e λ''_i conjuntamente, o que nos permite escrever

$$\Phi[\lambda'_j] \leq \Phi[\lambda_k] \leq \psi[\lambda_k] \leq \psi[\lambda''_i],$$

donde

$$\Phi[\lambda'_j] \leq \psi[\lambda''_i],$$

e, em consequência,

$$S \leq I.$$

---

(1) Consultar artigo citado, de A. Pereira Gomes.

(2) Ver o mesmo artigo.

(3) G. Birkhoff — *Lattice Theory* — Amer. Math. Soc. Col. Publ. vol. XXV — § 38 pag. 31.

Finalmente, escolhendo uma partição admissível $[\lambda_k]$ de diâmetro arbitràriamente pequeno, δ, tem-se

$$0 \leq I-S \leq \sum (\lambda_{k+1}-\lambda_k)\, m(A_k) \leq \delta \cdot m(A),$$

donde

$$I=S.$$

Podemos enunciar êste resultado da seguinte maneira: *a função* Ψ *tende para* $\int\limits_A f(x)\,dm$, *no sentido do sistema dirigido das partições admissíveis.*

Corolário: O integral de $f(x)$ é o limite, em têrmos de vizinhança, das somas

$$\sum \mu_k \cdot m(A_k),$$

nas quais μ_k está condicionado por

$$\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1},$$

e se representa por $[\lambda_k]$ uma partição admissível.

Na verdade, é fácil demonstrar que a tôda vizinhança, $V_\delta(I)$, corresponde uma partição admissível $[\lambda_j']$ de modo que

$$\sum \mu_k \cdot m(A_k) \in V_\delta(I),$$

para tôda partição admissível $[\lambda_k]$ tal que

$$[\lambda_j'] \leq [\lambda_k].$$

Nota: Em tudo que se disse até agora, consideraram-se sempre partições admissíveis de extremos fixos λ', λ''. O leitor pode, porém, demonstrar, como exercício, que nos podemos libertar dessa restrição desde que $[l, L] \subset (\lambda', \lambda'')$.

3. Principais propriedades:

a) No corpo dos conjuntos mensuráveis-J, $B \subset A$, a função de conjunto

$$\theta(B)=\int\limits_B f(x)\,dm$$

verifica a dupla desigualdade

$$l(B)\cdot m(B) \leq \theta(B) \leq L(B)\cdot m(B)$$

sendo $l(B)$ e $L(B)$ respectivamente o ínfimo e o supremo de $f(x)$ em B.

Pela própria definição de integral é

$$\lambda_0 \cdot m(B) \leq \int\limits_B f(x)\,dm \leq \lambda_n \cdot m(B).$$

E como (λ_0) tem como supremo $l(B)$ e $L(B)$ é o ínfimo de (λ_n), resulta

$$l(B)\, m(B) \leq \int\limits_B f(x)\,dm \leq L(B)\, m(B).$$

b) *Aditividade:* se

$$B=C_1+\cdots+C_p,\quad C_i-mens-J \quad \text{e} \quad C_i\, C_j=0$$

tem-se

$$\int\limits_B f(x)\,dm=\int\limits_{C_1} f(x)\,dm+\cdots+\int\limits_{C_p} f(x)\,dm.$$

Na verdade, o integral de $f(x)$ em B é o limite das somas $\sum \lambda_k \cdot m(B_k)$ e o integral em C_j é o limite das somas $\sum \lambda_k \cdot m(B_k \cdot C_j)$. Ora,

$$\sum_k \lambda_k \cdot m(B_k)=\sum_k \lambda_k \sum_j m(B_k \cdot C_j) = \sum_j \sum_k \lambda_k\, m(B_k \cdot C_j),$$

donde a aditividade de $\int\limits_B f(x)\,dm$.

Teorema: *As duas propriedades* a) *e* b) *caracterizam completamente o integral de* f (x) *em* A.

Com efeito, se designarmos por $\theta(B)$ uma função definida no corpo dos conjuntos mensuráveis-J, $B\subset A$, que satisfaça a *a)* e *b)*, sendo $l(B)$ e $L(B)$ o ínfimo e supremo de $f(x)$ em B, teremos

$$\sum \lambda_k \cdot m(A_n) \leq \sum l(A_k)\cdot m(A_k) \leq \sum \theta(A_n)=\theta(A)$$

e

$$\theta(A)=\sum \theta(A_k) \leq \sum L(A_k)\cdot m(A_k) \leq \lambda_{k+1}\cdot m(A_k)$$

donde

$$\theta(A)=\int\limits_A f(x)\,dm.$$

c) *Linearidade:*

$$\int\limits_A [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dm=\alpha\int\limits_A f(x)\,dm+\beta\int\limits_A g(x)\,dm,$$

sendo f, g duas funções limitadas e mensuráveis-J em A e representando por α, β dois números quaisquer.

Demonstração: Comecemos por mostrar que

$$\int\limits_A \mu f(x)\,dm=\mu\int\limits_A f(x)\,dm.$$

Como $\mu f(x)$ é limitada e mensurável-J ao mesmo tempo que $f(x)$, existe $\int\limits_A \mu f(x)\,dm$. Por outro lado, $\mu\int\limits_A f(x)\,dm$ tem as duas propriedades que são características de $\int\limits_A \mu f(x)\,dm$. Logo,

$$\int\limits_A \mu f(x)\,dm=\mu\int\limits_A f(x)\,dm.$$

Passemos agora à demonstração de que

$$\int\limits_A [f(x)+g(x)]\,dm=\int\limits_A f(x)\,dm+\int\limits_A g(x)\,dm.$$

Para isso, vamos começar por deduzir dois lemas:

Lema I:[1] Tôda função limitada e mensurável-J, $f(x)$, é o limite de uma sucessão uniformemente convergente de funções mensuráveis-J, limitadas, com um número finito de valores distintos (funções simples) $f_n(x)$.

Na verdade, se tomarmos uma sucessão $[\lambda_k^{(n)}]$ de

[1] Ver artigo do O. Frink Jr., na Bibliografia.

partições admissíveis de diâmetro $d^{(n)} \to 0$ e se definirmos $f_n(x)$ de maneira que

$$f_n(x) = \lambda_k^{(n)} \quad \text{para} \quad \lambda_k^{(n)} \leq f(x) < \lambda_{k+1}^{(n)},$$

teremos em $\{f_n(x)\}$ uma sucessão nas condições do enunciado que converge uniformemente para $f(x)$, pois

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < d^{(n)} \to 0 .$$

Lema II: O limite, em A, de uma sucessão uniformemente convergente de funções mensuráveis-J, limitadas em A, é ainda uma função mensurável-J e limitada em A.

Com efeito, a circunstância de $\{f_n(x)\}$ convergir uniformemente para $f(x)$ em A, permite-nos escrever

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon,$$

para $n > N(\varepsilon)$ e $x \in A$, donde

$$M_n(\lambda) \subset M(\lambda - \varepsilon) \subset M_n(\lambda - 2\varepsilon),$$

a partir da ordem N.

Escolhamos agora para $[\lambda_k]$ uma partição admissível com relação a tôdas [1] as funções $f_n(x)$, de diâmetro inferior a δ.

Fixando ε por maneira que

$$\lambda_{k+1} - \varepsilon \geq \lambda_{k+1} - 2\varepsilon \geq \lambda_k,$$

podemos escrever sucessivamente

$$M_n(\lambda_{k+1}) \subset M(\lambda_{k+1} - \varepsilon) \subset M_n(\lambda_k)$$

$$m[M_n(\lambda_{k+1})] \leq m_0[M(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \leq m^0[M(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \leq \leq m[M_n^-(\lambda_k)]$$

e

$$0 \leq \sum \left(m^0[M(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] - m_0 M[(\lambda_{k+1} - \varepsilon)]\right) \delta_k < \delta \cdot m(A),$$

com $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \delta_k$.

Pondo ainda

$$\varphi(\lambda) = m_0[M(\lambda)]$$
$$\Phi(\lambda) = m^0[M(\lambda)],$$

temos

$$0 \leq \sum [\Phi(\lambda_{k+1} - \varepsilon) - \varphi(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \delta_k < \delta \cdot m(A).$$

Ora, se λ' fôr um ponto de continuidade das duas funções φ e Φ, é-o também da função não negativa $\Phi - \varphi$ e é fácil demonstrar que nesse ponto $\Phi - \varphi$ tem de se anular.

Na verdade, se assim não fôsse, existiria um intervalo $[\lambda' - \eta_1, \lambda' + \eta_2]$, de extremos $\lambda' - \eta_1, \lambda' + \eta_2$ admissíveis para tôdas as funções $f_n(x)$, tal que

$$\Phi - \varphi \geq \alpha^2 \neq 0, \quad x \in [\lambda' - \eta_1, \lambda' + \eta_2],$$

Mas, então, tôda partição admissível que contenha $\lambda' - \eta_1$ e $\lambda' + \eta_2$ como pontos de divisão, satisfará à desigualdade

$$\sum [\Phi(\lambda_{k+} - \varepsilon) - \varphi(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \delta_k > \alpha^2 (\eta_2 - \eta_1),$$

por menor que seja o seu diâmetro, o que é incompatível com uma limitação do tipo

$$\sum [\Phi(\lambda_{k+1} - \varepsilon) - \varphi(\lambda_{k+1} - \varepsilon] \delta_k < \delta \cdot m(A).$$

Logo, $\Phi(\lambda) - \varphi(\lambda) = 0$, em todos os pontos de continuidade de φ e de Φ.

Ora, como φ e Φ são duas funções monòtonamente crescentes que, portanto, não admitem mais do que uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade, temos

$$m_0[M(\lambda)] = m_0[M(\lambda)],$$

quere dizer, $M(\lambda)$ é mensurável-J, com excepção, no máximo, de uma infinidade numerável de valores de λ, q. e. d.

Demonstrados êstes dois lemas retomemos a igualdade em causa:

$$\int_A [f(x) + g(x)]\, dm = \int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm .$$

Como $f(x)$ e $g(x)$ são limitadas e mensuráveis-J, o lema I, diz-nos que

$$f(x) = \lim_n f_n(x), \quad g(x) = \lim_n g_n(x),$$

donde resulta que

$$f(x) + g(x) = \lim_n [f_n(x) + g_n(x)] .$$

Mas pelo lema II, $f(x) + g(x)$, como limite de uma sucessão $\{f_n(x) + g_n(x)\}$, uniformemente convergente de funções limitadas e mensuráveis-J, é uma função limitada e mensurável-J.

Em segundo lugar, demonstremos [1] que a soma

$$\int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm$$

tem as duas propriedades características do integral de $f(x) + g(x)$. Para isso, consideremos o conjunto

$$B_k = \mathop{E}_x [x \in B;\ \lambda_k \leq g(x) < \lambda_{k+1}]$$

e representemos por $l_1(B_k)$ e $L_1(B_k)$ o ínfimo e o supremo de $f(x)$ em B_k. O ínfimo e o supremo correspondentes de $f(x) + g(x)$ serão $l(B_k)$ e $L(B_k)$.

Nestas condiçõos, tem-se

$$l(B_k) \leq l_1(B_k) + \lambda_{k+1} \leq l_1(B_k) + \lambda_k + \delta$$
$$L(B_k) \geq L_1(B_k) + \lambda_k \geq L_1(B_k) + \lambda_{k+1} - \delta,$$

sendo δ o d.âmetro da partição admissível $[\lambda_k]$.

---

(1) Basta atender a que, para cada função mensurável-J, só há, no máximo, uma infinidade numerável de valores de λ para os quais $\mathop{E}_x [x \in A;\ f_n(x) \geq \lambda]$ pode deixar de ser mensurável-J.

(1) Seguimos a demontração de C. Carathéodory em *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs,* München, 1938, pág. 67-68.

Multiplicando estas desigualdades por $m(B_k)$ e somando, vem

$$\sum l(B_k)\, m(B_k) \leq \sum l_1(B_k)\, m(B_k) + \\ + \sum \lambda_k\, m(B_k) + \delta m(A)$$

e

$$\sum L(B_k)\, m(B_k) \geq \sum L_1(B_k)\, m(B_k) + \\ + \sum \lambda_{k+1}\, m(B_k) - \delta m(A)\,,$$

donde

$$-\delta m(A) + l(B)\cdot m(B) \leq \int_A f(x)\, dm + \\ + \int g(x)\, dm \leq L(B)\cdot m(B) + \delta\cdot m(A)$$

ou no limite para $\delta \to 0$ a propriedade que pretendíamos demonstrar.

Como a aditividade de $\int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm$ é evidente, temos finalmente

$$\int_A [f(x)+g(x)]\, dm = \int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm\,, \quad \text{q. e. d.}$$

Nota I: Aproximando a definição de integral num conjunto mensurável-J, que acabamos de desenvolver, do teorema demonstrado por A. Pereira Gomes no artigo *Integrabilidade*-R *das funções contínuas,* publicado no número anterior da «Gazeta de Matemática», vê-se que as funções contínuas limitadas são integráveis. E são-no também as funções limitadas cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto de medida L-nula.

Se o conjunto A se reduzir a um intervalo fechado $\int_A f(x)\, dm$ coincide com o integral-Riemann ordinário.

Nota II: Era interessante estender a definição de integral, das funções numéricas de ponto de um espaço euclideano a funcionais definidas em espaços mais gerais, inclusivé em espaços sem pontos — σ-álgebras de Boole, para o que o leitor pode consultar a *Tese de A. Pereira Gomes — Introdução ao Estudo duma Noção de Funcional em Espaços sem Pontos* (vol. 18 da Col. do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto).

Resumo da Bibliografia que utilizámos:

C. Carathéodory — *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs* [Sitz. Bay. Akad. Wiss. 1938].

O. Haupt und G. Aumann — *Differential und Integralrechnung* — Band. III *Integralrechnung* (Berlin, 1938), pags. 36-49.

O. Frink Jr. — *Jordan Measure and Riemann Integration* — Annals of Math. vol. 34 (1933), pag. 618.

Ruy Luís Gomes — *Sôbre uma Construção Algébrica da Noção de Integral* [Publ. n.º 12 da Col. do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto—1945].

Les principes mathématiques de la mécanique classique

(suite)

par **René de Possel** (Université d'Alger)

IV. Essai d'interprétation physique.

Interprétation directe de la force absolue et de la masse. Chacune des forces absolues que nous avons introduites correspond à une cause ou à un phénomène physique, ou plus généralement à une modification des conditions physiques susceptible de modifier le mouvement du corps. C'est là l'interprétation classique. Le corps étant en mouvement sous l'action d'un certain nombre de forces, si, à un instant donné, nous introduisons une nouvelle cause physique de mouvement, l'accélération de chaque point s'accroît d'un certain vecteur $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, et, si nous imaginons une masse répartie arbitraire pour l'instant, la quantité d'accélération du corps subit un accroissement $\int_c \overrightarrow{\Delta\Gamma}\, dm$, qui, *par définition, représente la force répartie correspondante.* Cette force est indépendante du repère utilisé, puisque les forces d'inertie d'entrainement et complémentaire qui correspondent à un changement de repère sont les mêmes immédiatement avant et après l'introduction de la nouvelle cause physique.

On voit que la force correspondant à une cause physique isolable est un torseur pur. *Nous supposerons toujours à partir de maintenant qu'il en est ainsi,* les forces qui ne sont pas des torseurs purs donnant lieu à certaines difficultés d'interprétation [1].

La *masse* répartie dans le corps est définie par le fait qu' «*une même force*», de vecteur principal $\vec{A}(e)$ appliquée à des corps différents, doit produire toujours un accroissement d'accélération $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ tel que

$$\vec{A}(e) = \int_e \overrightarrow{\Delta\Gamma}\, dm\,.$$

La difficulté consiste à définir ce qu'on entend par «*une même force*» quand on l'applique à des corps différents, et que les conditions physiques sont par suite différentes. Il est des cas où l'expression a un sens

[1] Voir note (1), pg. 7, *Gazeta de Matemática* n.º 28.

physique précis: forces de contact produisant de petites déformations identiques, par exemple. Ce sont ces cas qui seront utilisés pour définir la masse. On s'aidera de l'additivité de la masse, et de considérations telles que celle-ci: si un corps est physiquement homogène, sa masse est proportionnelle au volume; ou encore, si, pour une petite portion c du corps, l'accélération est sensiblement constante, la force est $\Delta\vec{\Gamma} m(c)$. C'est bien en s'appuyant sur ces principes que la masse est pratiquement déterminée tantôt par la balance, tantôt en faisant agir des forces connues de nature électrique ou élastique, dans des cas où l'expression «une même force» a précisément un sens clair, tantôt en appliquant la loi de l'attraction universelle.

Forme énergétique du principe de d'Alembert. Cependant, des trois notions de force, masse et énergie, seulla dernière a résisté aux assauts des mécaniques nouvele les, relativiste et ondulatoire, si l'on excepte les difficultés qui se présentent encore dans les noyaux atomiques et qui ont nécessité l'hypothèse du «neutrino». Il est donc désirable, comme l'avait déjà tenté *Hertz* au siècle dernier, de bâtir la mécanique rationnelle sur la seule notion d'énergie. Voici un essai dans ce sens, qui présente encore des difficultés d'interprétation.

Nous supposons que le corps est en présence de plusieurs *sources* ou réservoirs d'énergie $\mathcal{S}_i$, dont certains peuvent faire entièrement partie du corps lui-même; ce seront les *sources intérieures.* Le mouvement réel du corps donne lieu à des échanges entre ces sources et son énergie cinétique.

Considérons un mouvement virtuel du corps à partir de sa configuration C_t à l'instant t, mouvement défini comme plus haut par une fonction $M(P, \theta)$, $(0 < \theta < \theta_1)$, et rapporté à un repère fixe par rapport à la configuration C_t. On peut imaginer ce mouvement communiqué au corps par un système auxiliaire.

Nous admettons que, pour certains de ces mouvements virtuels, chaque source fournit entre les instants 0 *et* θ *une énergie* (positive ou négative) *déterminée* $\mathcal{S}_i(\theta)$. On peut constater que dans tous les problèmes qu'on considère habituellement en mécanique, cette énergie est bien déterminée pour un certain ensemble de mouvements virtuels.

Soit $\mathcal{P}_i = \left(\dfrac{d\,\mathcal{S}_i}{d\theta}\right)_{\theta=0}$ la puissance fournie par la source $\mathcal{S}_i$ à l'instant $\theta=0$, $\vec{W} = \left(\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta}\right)_{\theta=0}$ le champ des vitesses virtuelles correspondant. Le principe fondamental de la mécanique peut s'énoncer sous la forme suivante, qui n'est qu'un autre énoncé du principe de d'Alembert:

Il existe un repère R *dit «galiléen», et une masse répartie* m (e) *ne dépendant que du corps et non de la nature des sources d'énergie, tels que la puissance virtuelle totale des sources soit égale à la puissance virtuelle de la quantité d'accélération évaluée dans le repère* R. *Ceci s'écrit:*

$$\sum \mathcal{P}_i = \int_C \vec{W} \cdot \vec{\Gamma}\, dm. \tag{5}$$

L'égalité a lieu pour tous les mouvements virtuels pour lesquels la puissance des sources est définie. Elle peut être utilisée pour étudier le mouvement du corps pour tous les mouvements virtuels pour lesquels cette puissance est connue.

Dans le cas où $\vec{W}$ et $\vec{\Gamma}$ ne varient pas sensiblement dans le corps, nous retrouvons bien la constance du produit $m\vec{\Gamma}$ lorsque le corps change, les sources restant les mêmes.

Définition de la force. Pour la source $\mathcal{S}_i$, supposons que $\mathcal{P}_i(c)$ soit défini pour tout corps partiel c, et qu'il existe un torseur réparti pur de vecteur principal $\vec{A}_i(c)$, tel que, quel que soit le mouvement virtuel pour lequel $\mathcal{P}_i(c)$ est défini, on ait

$$\mathcal{P}_i(c) = \int_c \vec{W} \cdot \overrightarrow{dA_i}.$$

Ce torseur réparti est alors la «*force absolue provenant de la source* $\mathcal{S}_i$». L'indétermination de cette force est souvent très grande.

Si toutes les sources peuvent ainsi être représentées par une force répartie, et si on pose $\vec{S} = \Sigma \vec{A}_i$, on peut écrire (5) sous la forme déjà donnée plus haut

$$\int_C \vec{W} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_C \vec{W} \cdot \vec{\Gamma}\, dm,$$

qui équivaut à la loi fondamentale $\vec{S}(c) = \int_c \vec{\Gamma}\, dm$, mais cette loi est souvent inutilisable, car les $\vec{A}_i$ sont inconnus ou indéterminés en grande partie.

Variation de la puissance développée par une source ou une force quand on change de repère. Interprétation physique des forces intérieures. L'énergie fournie au corps par l'une des sources lors d'un mouvement virtuel ne dépend pas du repère, puisque nous avons supposé ce dernier lié à la configuration du corps à l'instant t. Par contre, l'énergie par la même source lors du mouvement réel peut dépendre du repère: par exemple la réaction d'une table sur un corps posé sur celle-ci fournit un travail nul pour une repère lié à la table, et un travail non nul pour un repère en translation verticale.

Cherchons la condition pour qu'une force répartie fournisse pour le corps tout entier uu travail indépendant du repère. Limitons-nous toujours au cas où la force se réduit à un torseur pur. Si on change de repère, l'accroissement de puissance est égal à la puissance qui correspond au champ des vitesses d'entraînement, lesquelles sont réparties comme les vitesses d'un solide. Le calcul de la puissance fait plus haut pour un solide s'applique. L'accroissement de puissance est

$$\vec{V}_0 \cdot \vec{A}\,(c) + \vec{\omega} \cdot \vec{G}_0\,(c)\,,$$

et doit être nul quels que soient $\vec{V}_0$ et $\vec{\omega}$; il faut et il suffit que la somme géométrique $\vec{A}\,(C)$ et le moment $\vec{G}_0\,(C)$ pour le corps tout entier soient nuls. *C'est précisément la définition mathématique que nous avons donnée d'un force intérieure.*

Physiquement, une force intérieure peut être définie comme étant *produite par une source intérieure au corps;* l'énergie qu'elle fournit lors du mouvement réel *ne doit pas dépendre du repère,* ce qui nous ramène à la définition mathématique, en utilisant le résultat qui vient d'être obtenu.

Dans le cas d'un corps constitué de deux points matériels, admettons que la force répartie intérieure est formée de deux vecteurs-force appliqués aux points. Leur somme géométrique et leur moment doivent être nuls, et elles vérifient le principe de l'action et de la réaction qui se trouve ainsi démontré en partant du fait que le travail des deux vecteurs-force est indépendant du repère.

Quand à l'énergie totale fournie par une source intérieure au corps, elle est bien déterminée, mais sa répartition entre énergie cinétique fournie au corps lui-même et au système extérieur dépend du repère. Si on envisage un corps assez grand englobant toute la source, elle deviendra intérieure, et l'énergie cinétique qu'elle fournira au nouveau corps sera bien indépendante du repère.

Quelques difficultés se présentent pour concilier la démonstration ci-dessus du principe de l'action et de la réaction avec les cas où ce principe ne parait pas verifié. Prenons deux exemples:

1°. Considérons un corps formé de deux points matériels réunis par un fil sans masse tendu passant sur une petite poulie. Le travail des vecteurs-force exercés par le fil sur les points n'est pas en genéral indépendant du repére. Mais les sources d'énergie qui fournissent ce travail ne peuvent pas être considérées comme intérieures au corps, puisqu'elles font intervenir la poulie.

Si on considère le corps constitué par les deux points matériels et la poulie, il faut ajouter les forces qu'exerce cette dernière sur le fil pour avoir une véritable «force intérieure répartie».

2°. Considérons deux masses électrisées M et M' en mouvement, dont chacune est soumise au champ électromagnétique produit par l'autre. Les deux forces qui s'exercent sur M et M' ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction. Ici l'introduction d'une vitessse finie de propagation du champ et de la relativité restreinte permettrait de lever la contradiction apparente.

Etude des forces intérieures. Forces mutuelles. Supposons qu'à tout couple de corps partiels c, c' sans point commun d'un corps C soit associé un torseur $\mathfrak{U}(c, c')$, que nous désignons par une seule lettre, fonction additive de c pour c' fixe et de c' pour c fixe, et représentant une force appliquée à c, que nous nommerons *force mutuelle.* (le torseur n'a pas besoin d'être pur).

Prenons pour c' la partie de C extérieure à c, que nous noterons $C-c$. Nous obtenons un torseur $\mathfrak{T}\,(c) = \mathfrak{U}\,(c\,,\,C-c)$. Cherchons à quelle condition il est additif: on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}(c_1+c_2\,,\,C-c_1-c_2) &= \mathfrak{U}(c_1\,,\,C-c_1-c_2) + \\ &+ \mathfrak{U}(c_2\,,\,C-c_1-c_2) = \mathfrak{U}(c_1\,,\,C-c_1) - \mathfrak{U}(c_1\,,\,c_2) + \\ &+ \mathfrak{U}(c_2\,,\,C-c_2) - \mathfrak{U}(c_2\,,\,c_1)\,.\end{aligned}$$

Par suite, pour que C soit additif, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathfrak{U}(c_1\,,\,c_2) = \mathfrak{U}(c_2\,,\,c_1)\,.$$

En ce cas, on a aussi $\mathfrak{T}(C) = \mathfrak{U}(C\,,\,C-C) = 0$, et par suite $\mathfrak{T}$ constitue une force intérieure répartie.

Physiquement, une force intérieure répartie doit pouvoir toujours être considérée comme provenant ainsi d'une force mutuelle. Mais une force mutuelle devient souvent négligeable dés que les distances entre c et c' sont appréciables; ceci conduit, pour schématiser simplement de tels cas, à admettre que la force est nulle des que c et c' ne se touchent plus. On rencontre alors des difficultés signalées par M. Brelot (fascicule cité). Par exemple les forces de contact de la théorie des milieux continus ne peuvent pas être considérées comme des forces mutuelles (voir cours de mécanique polycopié de l'auteur, Alger 1945.)

Extension du principe de l'action et de la réaction. Considérons une force mutuelle se réduisant à un torseur pur. Exprimons que la puissance quelle développe entre deux corps c_0 et c'_0 pour un champ de vitesses quelconque ne dépend pas du repère. Il suffit d'après ce que, nous avons déjà vu d'exprimer que la somme géométrique et le moment sont nuls quels que soient c_0 et c'_0, ce qui équivaut à la condition trouvée ci-dessus $\mathfrak{U}(c\,,\,c') + \mathfrak{U}(c'\,,\,c) = 0$.

Explicitons cette condition: si $\vec{A}(c, c')$ désigne le vecteur principal de la force mutuelle exercée par c' sur c, on doit avoir d'abord

$$\vec{A}(c, c') + \vec{A}(c', c) = 0 .$$

Le moment en O de la force exercée par c'_0 sur c_0 est, en posant $\vec{\lambda}(c) = \vec{A}(c, c'_0)$,

$$\int_{c_0} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d\lambda} .$$

De même, en posant $\vec{\lambda}'(c') = -\vec{A}(c_0, c')$, le moment en O de la force exercée par c sur c' est

$$\int_{c'_0} \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{d\lambda'} .$$

La somme de ces deux moments doit être nulle. Pour la mettre sous une forme simple, considérons l'ensemble de dimension 6 où un point est un couple formé d'un point M de c_0 et d'un point M' de c'_0, ensemble qu'on peut noter $c_0 \times c'_0$. $\vec{A}(c, c')$ constitue une mesure dans cet espace, et l'on a

$$\int_{c_0} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d_M \lambda} = \int_{c_0 \times c'_0} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d_{MM'} A} ,$$

$$\int_{c'_0} \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{d_{M'} \lambda} = \int_{c_0 \times c'_0} -\overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{d_{MM'} A} ,$$

d'où la condition

$$\int_{c_0 \times c'_0} \overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{d_{MM'} A} = 0 ,$$

qui généralise le fait que dans le principe de l'action et de la réaction entre deux points, les forces sont portées par la droite qui les joint.

Terminons par une remarque au sujet des repères galiléens. On sait que pour les expériences courantes effectuées à la surface de la terre, on peut prendre cette dernière comme repère galiléen, que pour des expériences plus précises comme celle du pendule de Foucault ou du compas gyroscopique, ainsi que pour étudier le mouvement des planètes, il faut utiliser un repère lié au soleil et aux étoiles. Les forces d'inertie correspondant à un repère en mouvement qui peuvent être aussi grandes qu'on le veut doivent donc être attribuées à l'influence d'astres situés à d'aussi grandes distances.

Toutes les masses de l'univers se déplaçant les unes par rapport aux autres, il semble que la notion de repère galiléen ne puisse être qu'une approximation et que seule une théorie de la mécanique indépendante de tout repère soit exempte de contradition. A ce type appartient la relativité générale, qui a en outre l'avantage de réunir sous un même phénomène l'attraction universelle et les forces d'inertie.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

BIOLOGIA MATEMATICA

UNA NUEVA TEORIA MATEMÁTICA DE LA DIVISION DE LAS CÉLULAS

por **J. Gallego Diaz**

Intentamos dar en este ensayo un esquema matemático de la division celular. Pretendemos reducir el complejo proceso de la mitosis a las mismas leyes que regulan el movimiento de los astros, es decir, a la ley de la atraccion de Newton. No ignoramos que en la division de las células hay que tener en cuenta muchos fenómenos y fuerzas tales como la tension superficial, la viscosidad, la elasticidad y crecimiento de la membrana, etc. En una primera aproximacion y como *hipótesis de trabajo,* admitiremos que el efecto resultante de todas esas fuerzas es proporcional a la distancia entre el elemento infinitesimal de la membrana celular y el centro de atraccion, es decir, el *centrosoma.*

Por lo tanto, y teniendo en cuenta la ley de Newton ello equivale a escribir

$$F_1 = \frac{k}{\rho}$$

en donde F_1 es la fuerza de atraccion, k una constante y ρ la distancia antes mencionada.

Por otro lado, y como es bien conocido [1], la trajectória de una particula que se mueve sometida a una cierta fueza, es, al mismo tiempo, la figura de equilíbrio de un hilo sometido a la accion de una fuerza

$$F'_1 = -\frac{F_1}{\gamma V}$$

donde γ representa la densidad del hilo y V la velocidad de la particula con tal de que en un punto comun a ambas curvas, la tension del hilo sea igual en magnitud y direction a la velocidad de la particula

[1] Schell: *Theorie der Brewegung und der Kräfte,* II Band, S. 148 *(Analogie zwischen Problemen des Gleichgewichts und Problemen der Bewegung),* Berlin, 1919.

y suponiendo que la masa del punto mòvil sea la unidad.

Si com F y F' representamos los centrosomas, las distancias ρ y ρ_1 entre el punto genèrico de la membrana celular — cuyas coordenadas cartesianas rectangulares son x y y, tomando como eje X la recta FF' y como eje Y la perpendicular en su punto medio — y los dos centrosomas F y F' serian respectivamente:

$$\rho^2=(x-a)^2+y^2\,; \quad \rho_1^2=(x+a)^2+y^2\,.$$

Ese punto estará sometido a las fuerzas k_1/ρ y k_1/ρ_1 dirigidas hacia los centrosomas.

Las proyecciones de estas fuerzas sobre los ejes serán:

$$-k_1\,(x-a)/\rho^2 \qquad -k_1\,y/\rho^2 \qquad -k_1\,(x+a)/\rho_1^2 \qquad -k_1\,y/\rho_1^2\,.$$

Las ecuaciones del movimiento son, por tanto:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\tau\left(\frac{a-x}{\rho^2}-\frac{a+x}{\rho^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\tau y\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho_1^2}\right).$$

E immediatamente se obtiene:

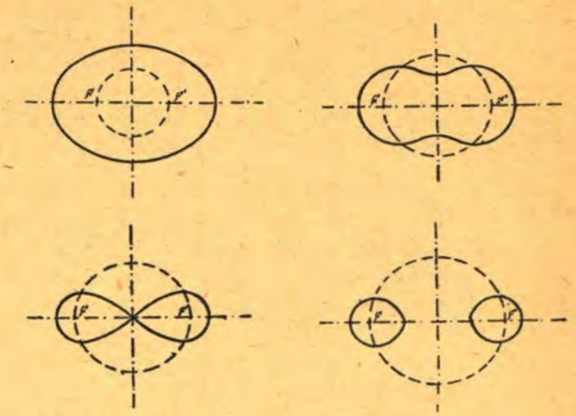
$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}=-\tau\left[\frac{(x-a)\,dx/dt+y\,dy/dt}{\rho^2}+\frac{(x+a)\,dx/dt+y\,dy/dt}{\rho_1^2}\right]=-\frac{\tau}{\rho}\frac{d\rho}{dt}-\frac{\tau}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}\,.$$

Por lo tanto, la integral de las fuerzas vivas dá:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=-2\tau L\rho\rho_1+C\,.$$

Pero si queremos que la velocidad permanezca constante ello exige que la trayectoria buscada sea $\rho\rho_1=k^2$ es decir que la figura de equilibrio de la membrana será, como antes se dijo, la curva cuja ecuacion en coordenadas bipolares es: $\rho\rho_1=k^2$ que representa como es sabido una *cassínica*.

Cuando la célula crece, aumenta la distancia FF' entre ambos centrosomas y las diversas formas de



dichas curvas son las indicadas en las figuras adjuntas.

Puede observarse que la funcion de variable compleja $w=z^2$ transforma las cassínicas

$$|\,z-a\,|\cdot|\,z+a\,|=k^2 \quad (a\;y\;k \text{ reales})$$

en circunferências $|\,w-a^2\,|=k^2$, del plano w.

Por tanto, las transformadas de las lineas de fuerza seian las rectas que pasan por el centro de esas circunferencias ya que la representacion es conforme.

Ello equivale a decir que las lineas de fuerza, en el interior de la célula, son hipérbolas equiláteras que pasan por los centrosomas F, F'.

El estudio de la membrana en un espacio de tres dimenciones, por medio de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x=x\,(u\,,v\,,t) \\ y=y\,(u\,,v\,,t) \\ z=z\,(u\,,v\,,t) \end{cases}$$

en donde u y v son parámetros y t es el tiempo, y llevando a cabo un más detenido análisis de las fuerzas que al principio aludimos será objeto de otro ensayo.

Madrid, Julio 1946.

PEDAGOGIA

OS PONTOS DE EXAME DE GEOMETRIA DO 1.º CICLO NA ÉPOCA DE JULHO

I — JULHO DE 1945 (LICEUS DE LISBOA)

por *A. Nicodemos Pereira* e *J. Xavier de Brito*

Por intermédio da reitoria do Liceu de Passos Manuel, recebemos ordem de serviço para organizar o ponto para a prova escrita do exame de geometria do 1.º ciclo, em Julho, subordinado às seguintes normas:

«Geometria. 6 questões de geometria plana e 2 de geometria no espaço».

Em vista de indicações tão vagas resolvemos, antes de organizar o ponto, especificar normas para a sua constituição, tendo ficado assentes, depois de uma troca de impressões a êsse respeito, as seguintes:

a) As questões propostas deveriam dirigir-se, umas, aos conhecimentos dos alunos e, outras, ao uso dêsses conhecimentos, em raciocínios simples.

b) Tôdas as questões, à excepção de uma, deveriam ser familiares aos alunos.

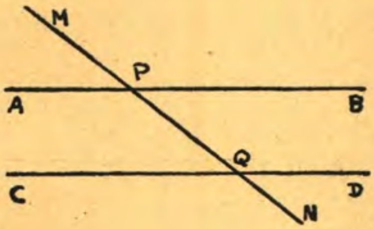
c) As primeiras questões apresentadas seriam as mais fáceis, para que os alunos, resolvendo-as, ganhassem confiança em si próprios.

d) A última questão do ponto, a oitava, seria destinada aos alunos bem dotados.

Considerámos satisfazendo a estas normas o ponto que a seguir transcrevemos e saído na 1.ª chamada dos exames de Julho, nos liceus de Lisboa:

I — O lado de um hexágono regular mede 4 cm. Calcule, referido a metros, o perímetro do hexágono.

II — Condições da figura: As rectas AB e CD são paralelas e a recta MN intercepta-as respectivamente em P e Q. *a)* Se o ângulo $A\hat{P}M$ medir 40^o,



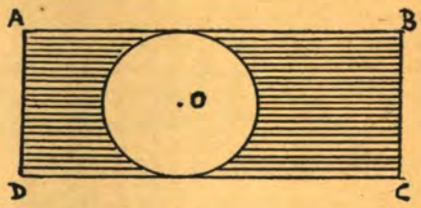
quanto mede o ângulo $C\hat{Q}N$? *b)* Dê exemplo de dois ângulos que sejam: 1.º) Verticalmente opostos; 2.º) Correspondentes.

III — No triângulo ABC é: $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\hat{B}=30^o$. Calcule a medida de cada um dos outros ângulos internos do triângulo.

IV — Construa o triângulo ABC cujos lados medem respectivamente 3 cm., 4 cm. e 5,5 cm. Construa a figura simétrica dêste triângulo, tomando o vértice A, como centro de simetria.

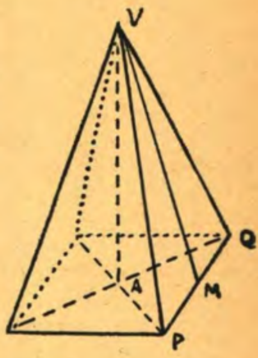
V — Condições da figura: M é o meio do segmento de recta $\overline{AB}$, PM é perpendicular a $\overline{AB}$. Por que razão podemos afirmar que $\overline{AP}=\overline{PB}$?

VI — Condições da figura: $ABCD$ é um rectângulo; $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são tangentes à circunferência de



centro O. $\overline{AB}=5$ cm $\overline{AD}=2$ cm. Calcule a área da parte tracejada da figura referida a dm^2.

VII — A figura representa uma pirâmide quadrangular regular. M é o meio da aresta PQ da base da pirâmide. V é o vértice da pirâmide, e A é o ponto de encontro das diagonais da sua base. Como se chamam relativamente à pirâmide representada, os segmentos seguintes: 1.º $\overline{VA}$, 2.º $\overline{VM}$ e 3.º $\overline{VP}$.



VIII — A razão dos raios de duas esferas é $2/3$. O volume da esfera de raio menor é $8\ cm^3$. Calcule o volume da outra esfera.

Alguns professores, infelizmente poucos, transmitiram-nos os seus juizos críticos sôbre o ponto, logo que se tornou conhecido e que foram, em resumo:

1.º) Ponto fracamente selectivo.

2.º) Deficientemente graduado.

3.º) Dados numéricos preparados para evitar cálculos.

4.º) A última questão do ponto, a oitava, está fora do programa; excede a mentalidade dos alunos do 1.º ciclo; tem carácter mais aritmético do que geométrico.

Não temos, nem é fácil de obter, a estatística do comportamento dos alunos que prestaram prova nos vários liceus de Lisboa.

Devemos à amabilidade do Dr. Betânio de Almeida, que classificou as provas no liceu Passos Manuel, a estatística do comportamento dos alunos que prestaram prova nêste liceu, a qual inserimos no fim dêste artigo.

Seria arrojado estabelecer quaisquer conclusões de ordem geral baseadas nesta estatística ($N=255$) quando o ponto serviu todos os alunos dos liceus de Lisboa (mais de dois milhares).

Por isso, as referências que a seguir faremos às observações críticas de alguns professores, dizem respeito exclusivamente ao comportamento, perante o ponto, dos alunos que prestaram prova no liceu de Passos Manuel e supondo que êsses alunos tiveram preparação normal.

A distorsão para a esquerda, média (12,8) inferior à mediana (13,5) e o valor do 1.º quartil (10,8) — a nota mínima de admissão à prova oral foi 7,5 — revelam a pouca selectividade do ponto, o que confirma plenamente a 1.ª observação crítica feita por aqueles professores, quanto aos alunos que prestaram prova no Liceu de Passos Manuel, repetimos.

O intervalo semi-quartil (2,0) e a mediana (13,5), desigualmente afastada da *região de normalidade,* do 1.º quartil (10,8) e do 3.º quartil (14,9) mostram a irregular graduação do ponto, o que confirma a 2.ª observação crítica.

A 3.ª observação é também inteiramente justa.

Quando tivemos conhecimento do Dec. 34.646 de 4-6-45, determinando que as provas escritas dos exames liceais tivessem a duração de 1 hora, substituímos todos os dados numéricos do ponto de modo a reduzir ao mínimo os cálculos. Mais tarde, com a circular n.º 1.161 de 8-6-45 foi concedida a tolerância de meia hora, mas resolvemos não alterar outra vez os dados, esperando a última resolução das estâncias superiores sôbre a duração da prova... Entretanto o ponto foi dactilografado.

Se julgamos inteiramente judiciosas as três primeiras observações críticas que foram feitas ao ponto, já o mesmo não acontece à 4.ª.

Ora vejamos.

A resolução da oitava questão do ponto exige o conhecimento do volume da esfera expresso no raio e o do conceito de razão de duas grandezas. Êstes dois conceitos pertencem taxativamente ao programa do 1.º ciclo.

Além disso, o conceito de razão de duas grandezas, embora de carácter aritmético, é fundamental e da maior aplicação em geometria e é, em geral, pelo recurso à aplicação dêste conceito à geometria que os alunos adquirem o bom entendimento dêle. Acresce ainda que a questão se destinava aos alunos bem dotados.

É certo que a estatística do comportamento dos alunos, no Liceu de Passos Manuel, perante esta oitava questão do ponto — em 255 provas, 1 resposta exacta (de um aluno externo) — vem justificar a observação de que ela excede a mentalidade dos alunos do 1.º ciclo; ou, então, vem mostrar que aqueles alunos não adquiriram, com perfeito entendimento, o conceito de razão de duas grandezas.

Esta última hipótese, faze-mo-la com o à vontade de ter sido professor de duas das turmas dos alunos internos, desde o 1.º ano, um dos autores do ponto.

Seria útil o conhecimento da estatística do comportamento dos alunos que prestaram prova nos outros liceus de Lisboa e, mais útil ainda, o estudo estatístico completo do ponto, que apenas foi esboçado.

Verificadas as deficiências do ponto de exame que organizámos, há que corrigi-las, alterando as normas que serviram de base à sua organização e aumentando a dificuldade das questões propostas, a fim de dar ao ponto do próximo exame a justa eficiência.

Quais as normas a estabelecer para a organização do ponto do próximo exame de geometria do 1.º ciclo?

Qual o grau de dificuldade a introduzir em cada uma das questões propostas?

As respostas a estas preguntas, em boa verdade, só poderão ser dadas depois de ouvidos muitos professores, quer do ensino oficial, quer particular e depois do estudo estatístico completo dos pontos, que serviram em exames anteriores.

Os pontos, depois de realizados os exames, as normas que presidiram à sua organização e os respectivos estudos estatísticos, deveriam ser tornados públicos para que todos aqueles que se interessam pelas questões de ensino, pudessem colaborar, emitindo os seus juizos críticos.

A Pedagogia tem por base a experiência do professor e a alheia e experimentar sem a estatística dos resultados equivale a navegar sem rumo.

Actualmente não é admissível que um professor — de qualquer grau de ensino ou grupo — não esteja familiarizado com termos como êstes: mediana, quartil, distribuição normal, coeficiente de variação de Pearson, etc.

É inadmissível que os dados seguintes, por exemplo, extraidos do Anuário do Liceu Gil Vicente, 1940-41:

«Correlação da frequência x, e exame y.

Ano 3.º. Disciplina: Português. Professor Q.

$N=41$ $r=0{,}401$ $E.\ P.=0{,}088$.

Média da frequência: 10,2

Média do exame: 14,7»

sejam para um professor — de qualquer grau de ensino, repetimos — mera abstração, sem nenhum significado.

Não queremos dizer que todos os professores devam saber aplicar os métodos da estatística aos problemas da Pedagogia, mas todos devem saber ler e interpretar as características dessas estatísticas e assim, estar aptos à leitura dos livros modernos de Pedagogia.

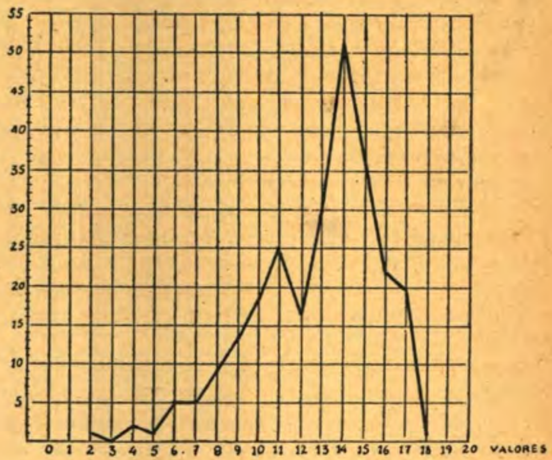
No Ministério da Educação Nacional ou no Instituto de Estatística, deveria existia uma Repartição encarregada dos estudos das questões pedagógicas pelos métodos da Estatística. O progresso do professor, o contrôlo da sua acção, quanto à didáctica, as alterações nos programas, enfim tôda a escola receberia a mais benéfica influência. A escola, quanto ao ensino transformar-se-ia numa casa de vidro. Seria a verdadeira inspecção... sem inspectores, aquela que todo o ensino português de todos os graus tanto precisa.

Embora haja professores dos liceus que se tenham dedicado ao estudo dos métodos da estatística aplicados aos problemas da educação e revelado a mais alta competência —o Anuário do Liceu de Gil Vicente, 1940 — 1941, é uma prova brilhante desta nossa afirmação — os professores dos liceus não podem ser encarregados dêsses serviços. Legitimamente não podem ser sobrecarregados com êsse trabalho.

No próximo ano, os professores incumbidos de organizar os pontos de exame, encontrarão as mesmas dificuldades que nós encontrámos para organizar o ponto de Geometria para o primeiro ciclo e terão, para se orientar, como nós o palpite ou a própria gana.

Enquanto não enveredarmos pelo estudo crítico dos pontos de exame — pelo menos, enquanto houver exames — nêsse sector não podemos ter pedagogia científica. Quando muito teremos pedagogia de palpite e continuaremos a assistir aos bonus de três valores, à anulação de provas, com ou sem substituição, enfim, um rol já longo e desprestigiante de remendos.

Polígono de freqüência das notas de prova escrita do exame de geometria do 1.º ciclo, em Julho, 1.ª chamada, no Liceu de Passos Manuel



$N = 255$ $\quad Q_1 = 10{,}8$
$M = 12{,}8$ $\quad Q_3 = 14{,}9$
$M_d = 13{,}5$
$M_0 = 14$ $\quad Q = 2{,}0$

Nota mínima de admissão à prova oral: 7,5.

8.ª questão do ponto

Número de alunos que não tentou resolvê-la	86
Número de alunos que a resolveu mal.	168
Número de alunos que a resolveu bem.	1
$N =$	255

Num próximo número publicaremos o artigo referente ao ponto de Julho de 1946 (Liceu de Passos Manuel).

ANTOLOGIA

ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE ALGUNAS TEORIAS MATEMÁTICAS

por ***L. A. Santaló***

Cálculo de variaciones

El Cálculo de Variaciones hace su aparición en la Historia de la Matemática con dos problemas: el de la superficie de revolución de mínima resistencia de Newton (1686) y el de la braquistocrona de Johann Bernoulli (1696).

El primero de estos problemas consiste en lo siguiente [1]: «Determinar la curva plana que une dos pontos A y B y que al girar alrededor de un eje de su plano que no la corte, engendre la superficie de revolución que al moverse según la dirección del eje encuentre mínima resistencia». Newton supone que la resistencia, para cada elemento de superficie, es proporcional al cuadrado de la proyección de la velocidad sobre la normal al mismo.

No hay duda de que este problema tiene un origen eminentemente práctico y es de gran utilidad tanto para la construcción de navíos, como en balística, como, más modernamente en la construcción de dirigibles o aviones. El Cálculo de Variaciones, parece,

(1) I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London 1686, libro II, sección VII, proposición 34, escolio.

por tanto, originado a partir de un problema presentado por la técnica.

Sin embargo se da el caso notable de que el verdadero problema que más ha influído en el desarrollo del Cálculo de Variaciones y que constituye su verdadero origen, puesto que para él se idearon los métodos característicos de dicho cálculo, no es el problema anterior, sino otro mucho más alejado de cualquier posible aplicatión práctica, pero de enunciado y resultado mucho más atrayente y curioso. Es el problema de la «braquistocrona» de Johann Bernoulli, el cual lo propuso por primera vez en el *Acta Eruditorum* de Leipzig en Junio de 1696. El problema dice: «Dados dos puntos A y B en un mismo plano vertical, determinar la trayectoria AMB descrita por un punto M que partiendo de A y bajo la acción de su propio peso, llega a B en un tiempo mínimo».

J. Bernoulli propone este problema a los matemáticos de su tiempo, añadiendo que dará la solución del mismo al terminar el año en curso si nadie lo hace antes. No obstante, en enero de 1697, vuelve a publicar en Gröningen un «Aviso» dirigido a «todos los matemáticos del mundo» en el cual expone que ante el ruego de Leibnitz y para dar tiempo a que el problema pueda ser conocido en Francia e Italia y nadie pueda quejarse de lo perentorio del plazo, extiende el mismo hasta las próximas fiestas de Pascua. En este «Aviso» repite J. Bernoulli el enunciado del problema y añade estos interesantes párrafos: «Quien logre resolverlo ganará el premio que hemos establecido para el solucionista. Naturalmente éste no consiste en oro ni plata, pues esto atrae únicamente a las almas pequeñas y venales de las cuales no esperamos nada loable ni útil para la Ciencia. Por el contrario, puesto que la Virtud es por sí misma la más hermosa recompensa y la Fama un poderoso aguijón, ofrecemos como premio, como corresp nde a los hombres nobles, honor, alabanza y aplauso, para lo cual la sagacidad de este gran Apolo, nosotros, públicamente y en privado, por escrito y de palabra, elogiaremos, ensalzaremos y festejaremos».

De un problema planteado en tales términos es evidente que no era de esperar provecho utilitario alguno. La Fama, que Bernoulli prometía a los demás, era el único fin que lo había movido a él a plantearse y resolver el problema.

Más tarde, al irse desarrollando y evolucionando el Cálculo de Variaciones, gracias principalmente a las obras de Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi y Weierstrass, fueron encontrándose muchas aplicaciones del mismo: aplicaciones sobre todo a la mecánica y a la física (principios de mínima acción), pero también a a otras ramas al parecer mucho más apartadas, como la estadística y la economía política (1).

Topología

Otra rama importantísima de la matemática moderna es la Topología o Análisis situs. Ella estudia, como es bien sabido, las propriedades de las figuras que se conservan por deformaciones continuas de las mismas.

La Topología se suele clasificar en *topología combinatoria* que se refiere a las redes o reticulados de líneas y *topología continua,* que se refiere a las superficies o, más generalmente, a las variedades de cualquier número de dimensiones.

Las dos ramas tienen actualmente importantes aplicaciones. La topologia de las redes se relaciona y tiene aplicación en el estudio de la distribución de la corriente en redes eléctricas, estudio iniciado por el físico alemán Kirchhoff (1824-1887). La topología continua, siguiendo a Poincaré, es cada día más utilizada en la resolución de problemas de mecánica, siendo casi el único medio de atacar problemas referentes a la estabilidad o periodicidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. Dice, por ejemplo, Hadamard (2): «Conociendo, como conocemos, la importancia del Análisis situs y que cada paso del punto de vista local al general, es decir, cada proceso de integración, debe estar profundamente influenciado por él, debemos concluir que los progresos en esta rama de la ciencia deben devenir, un día u otro, esenciales al Cálculo Integral, y que de la misma manera como hemos estado obligados a introducir órdenes de conexión en el estudio de la ecuación diferencial general de primer orden, debemos esperar ser incapaces de tratar correctamente los sistemas o las ecuaciones diferenciales de orden superior sin un conocimiento, tan profundo como sea posible, del Análisis situs en mas de dos dimensiones».

Sin embargo, todas las aplicaciones de la Topología han aparecido cuando ella había alcanzado ya un cierto desarrollo. El primer problema de topología continua es uno puramente geométrico: el expresado por la fórmula $C-A+V=2$ que relaciona los números de caras, aristas y vértices de un poliedro que se pueda obtener por deformación continua de uma esfera; fórmula de la geometría elemental que expresa el llamado comunmente teorema de Euler, dado por este autor en 1752, pero que ya era conocido anteriormente por Descartes.

Los primeros problemas de topología combinatoria están todavía más alejados de cualquier aplicación práctica. Se considera como primero de ellos el lla-

(1) Ver por ejemplo, L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, Bologna 1921, pág. 11.

(2) *The Later Scientific Work of Henri Poincaré*, The Rice Institute Pamphlet, Vol XX. N.º 1, 933, pág. 137.

mado problema de «los puentes de Koenigsberg», presentado por Euler, junto con su generalizáción a resultados generales sobre redes de líneas, en una memoria de la Academia de San Petersburgo en 1735. Se trata de lo siguiente: en aquella época había en Koenigsberg siete puentes sobre el río Pregel, dispuestos como indica la figura 1. Euler se pregunta, como curiosidad recreativa en sus paseos cotidianos, si será posible recorrer los 7 puentes en un solo paseo, sin pasar más de una vez por cada uno. Evidentemente el resultado será el mismo de cualquier manera que se modifique el tamaño y forma de la figura, con tal de no alterar la disposición general. Euler supone la deformación que reduce las islas y la tierra firme a puntos, quedando el esquema de la figura 2, donde los trazos representan los puentes que hay que recorrer. El problema se reduce a ver si la red de esta última figura se puede recorrer de un solo trazo, sin repetir ningún lado. La solución es fácil: es imposible. En efecto, exceptuando el vértice de partida y el de llegada, los demás deben contener un número par de lados, puesto que se debe poder llegar por uno y salir por otro todavía no recorrido; por tanto no puede haber más de dos vértices a los cuales concurran un número impar de lados. Como en la red de la figura 2, hay 4 vértices en estas condiciones, se deduce que no podrá recorrerse en las condiciones dichas.

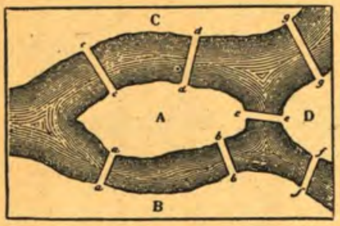


Fig. 1

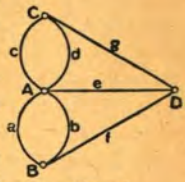


Fig. 2

¿Quién hubiera podido adivinar que de este problema, al parecer simple pasatiempo de matemático andariego, había de derivar, con el tiempo, el frondoso y útil árbol que es hoy la Topología?

Extractos de uma conferência publicada em *Revista de Ingeniería*. Uruguay — Año XXXIX — n.º 450 — 1945.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

ALGUNS NÚMEROS SÔBRE A ESCOLA POLITÉCNICA FEDERAL DE ZURIQUE

Compilação de ***A. Sá da Costa*** (bolseiro em Zurique do I. A. C.)

A *Gazeta de Matemática* publicou em números anteriores [1] alguns artigos relativos à Escola Politécnica Federal (E. P. F.) com documentação suficiente para que qualquer leitor tenha uma idéia precisa do que ela é como escola e, portanto, como centro de trabalho científico, em especial nos domínios da matemática e da física. O que se segue pretende ser apenas um complemento estatístico daqueles artigos.

Os números e quási todos os comentários que vão expôr-se foram extraídos das publicações:

1. *Statistiches Jahrbuch der Schweiz,* 1944, Basel, 1946.
2. *Eidgenössische Technische Hochschule,* Programm und Stundenplan für das Sommersemester 1946.
3. *Atlantis,* Sonderheft ETH, Band XVII, Heft 9, September 1945, Zürich.
4. *École Polytechnique Fédérale*—Son enseignement et ses instituts. Orell Füssli. Zürich, 1930.
5. *Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens des Eidgenössischen Polytechnikums,* I Band. Huber & Co. Frauenfeld 1905.

*

A E. P. F. foi fundada em 1854. Actualmente compreende 11 secções especiais:

1. Arquitectura
2. Engenharia civil
3. *a)* Engenharia de máquinas
   b) Electrotecnia
4. Química
5. Farmácia
6. Silvicultura
7. Agronomia
8. Engenharia hidráulica e geográfico-cadastral

(1) *Gazeta de Matemática* n.º 12: Sôbre o ensino da matemática na Suiça, I — Escolas superiores de Zürich, A Escola Politécnica Federal. Compilação de Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 13: Sôbre o ensino da matemática na Suiça, II. Compilação de Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 14: Sôbre o ensino da matemática na Suiça, III. Compilação de Maria Pilar Ribeiro.

Gazeta de matemática n.º 16: Sôbre o ensino da física em Zurique, por A. Gibert.

Gazeta de Matemática n.º 19: Conselhos aos estudantes da Secção de Matemática e Física da Escola Politécnica Federal de Zurique, tradução de Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 24: Notícia sôbre o ensino da matemática em Zurique, por Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 26: Sôbre a índole do ensino da matemática em Zurique, por Hugo Ribeiro.

9. Matemática e física
10. Ciências naturais
11. Ciências militares

cursos de gimnástica e desportos e uma secção geral de cursos livres e repartidos em duas divisões:

1. Letras. história, filosofia, ciências económicas
2. Ciências matemáticas, naturais, técnicas e militares.

Esta secção geral de cursos livres, embora com outra organização, data da fundação da E. P. F. e foi criada com o objectivo de evitar uma deformação profissional dos alunos-engenheiros, obrigados pelo plano de estudos a freqüentar à escôlha pelo menos um número determinado dos seus cursos.

Nem tôdas as actuais 11 secções da E. P. F. datam da sua fundação. Assim, a secção 9, Matemática e Física foi criada posteriormente, destacando-se da divisão de ciências filosóficas e económicas da secção geral de cursos livres. A necessidade de uniformizar, melhorando-a, a preparação em matemática e física dos alunos que a E. P. F. admitia procedentes das escolas secundárias (gimnásios e escolas reais superiores), decidiu a sua intervenção na formação dos professores de matemática e física do ensino secundário, como único meio eficaz para atingir o fim em vista. Essa intervenção consistiu na constituição da escola normal de ciências matemáticas e físicas [1] a que corresponde a citada secção 9 cujos professores, então como ainda hoje com freqüência, foram recrutados em grande parte nos melhores centros universitários da Europa.

*

A E. P. F. está instalada em 11 edifícios:

1. Edifício principal
2. Laboratório de máquinas
3. Edifício da física
4. Edifício da química
5. Instituto da silvicultura e agronomia
6. Laboratório de ensaios de materiais
7 e 8. Instituto de ciências naturais
9. Observatório astronómico
10. Laboratório de hidráulica
11. Instituto do leite.

Dois institutos ocupam dependências de outros edifícios de Zurique. O observatório de astronomia está instalado em Arosa (Graubunden).

Nalguns edifícios, sobretudo no principal, no de química e no laboratório de ensaios de materiais, apesar das suas proporções, a falta de espaço é evidente.

*

O aumento da freqüência da E. P. F. tem sido notável, e não se prevê que a admissão passe a sofrer quaisquer restrições numéricas.

	Alunos			Ouvintes
	suíços	estrangeiros	total	
1869-70	211	317	528	235
1899-00	620	387	1007	449
1919-20	1732	535	2267	1248
1929-30	1132	444	1576	1172
1939-40	1495	434	1929	2138
1944-45	2879 (159)	343 (18)	3222 (177)	2105

Nota: Os números entre parentesis referem-se à secção 9.

No ano lectivo de 1944-45 as 7 universidades suíças (Zurique, Basileia, Berna, Genebra, Lausana, Friburgo e Neuchatel) eram freqüentadas, respectivamente, por

10157 1947 12104 (2380) 2435.

Nota: O número entre parêntesis refere-se às faculdades de filosofia ou de ciências.

Assim, no ano lectivo de 1944-45 as escolas superiores da Suíça (4.300.000 habitantes) eram freqüentadas por

13036	estudantes suíços
2290	estudantes estrangeiros
15326	estudantes
4540	ouvintes.

É de notar o aumento da freqüência durante a última guerra (já durante a precedente, 1914-18, se verificara facto análogo), apesar da redução do número de estudantes estrangeiros cuja presença na E. P. F. é, desde a sua fundação, coisa corrente. Durante a última guerra a freqüência de estudantes estrangeiros variou como mostra o quadro seguinte que indica a procedência:

	Europa	Ásia	África	América
1938-39	405	6	11	21
1944-45	223	107	6	7

O aumento extraordinário verificado na freqüência de estudantes asiáticos deve-se ao recente envio de uma centena de jóvens turcos, como bolseiros do govêrno, que pretendem, seja fazer estudos regulares, seja fazer uma especialização.

Em 1944-45 foram admitidos 700 novos alunos, dos quais 37 para a secção de Matemática e Física.

No mesmo ano foram concedidos 351 diplomas dos quais 9 a matemáticos e 9 a físicos.

[1] A escola normal de ciências matemáticas e físicas da E. P. F. não possui o exclusivo da formação dos professores do ensino secundário. Com ela concorrem as universidades suíças e estrangeiras.

*

A evolução numérica do corpo docente da E. P. F. está patente no quadro seguinte:

	Professores ord.	Professores ext.	Privatdozenten	Assistentes	Total
1869-70	38	9	19	7	73
1899-00	63	7	30	51	151
1919-20	70	2	41	85	198
1929-30	67	3	49	97	216
1939-40	71	11	49	123	254
1944-45	74	15	58	162	309

Nota: Neste quadro não estão incluídos os encarregados de cursos que não pertençam às categorias indicadas.

No ano lectivo de 1944-45 as 7 universidades suíças possuiam respectivamente

452	314	615	?	?

dos quais são estrangeiros

58	20	56	?	?

No corpo docente da E. P. F. contam-se actualmente 2 prémios Nobel (um de física e outro de química) e dêle fizeram parte 2 prémios Nobel (ambos de física) actualmente no Institut for Advanced Study, Princeton, U. S. A. (1).

Da distribuição do serviço docente pelo corpo de professores da E. P. F. dá uma idéia aproximada o quadro que segue, referente ao semestre de verão de 1946:

Categorias	N.º	Número de horas por semana: Lições	Exercícios	Colóquios	Seminários
Prof. ord.	76	463 (6)	300 (4)	29	16
Prof. ext.	19	66 (3,5)	30 (1,5)	4	2
Prof. tit.	14	42 (3)	—	3	1
Privatdoz.	34	63 (2)	15 (0,5)	—	—
Diversos	43	127 (3)	—	—	—
Totais	186	761 (4)	345 (2)	36	19

Notas: 1. O número de horas de exercícios constitui apenas uma indicação aproximada.
2. Como Diversos consideram-se os encarregados de cursos e os professores de outras escolas que regem na E. P. F. também.
3. Entre parêntesis indicam-se médias.
4. Não se mencionam neste quadro os tempos de práticas e laboratórios.

Nos exercícios, colóquios, práticas e laboratórios, cuja direcção efectiva compete aos professores, êstes são coadjuvados por 175 assistentes. Os laboratórios funcionam das 7 ou 8 horas da manhã até às 12 e das 14 às 18.

Aos professores cabe ainda a direcção dos trabalhos dos diplomandos e doutorandos e, naturalmente, o serviço de exames e de provas de doutoramento.

A par de tudo isto, êles continuam os seus trabalhos pessoais de investigação científica a que deveram a sua nomeação para o quadro da E. P. F. e a cujo prosseguimento esta deve o nível dos seus estudos e a qualidade dos seus diplomados.

Em especial para a secção de Matemática e Física o quadro correspondente ao anterior apresenta-se como segue:

Categorias	N.º	Número de horas por semana: Lições	Exercícios	Colóquios	Seminários
Prof. ord.	9	57 (6)	10 (2)	5	10
Prof. ext.	1	5	—	—	2
Prof. tit.	1	2	—	—	1
Privatdoz.	6	12 (2)	1	—	—
totais	19	80 (4)	20 (1)	5	13
Assistentes	15				

*

A E. P. F. confere o grau de doutor em ciências técnicas, naturais e matemáticas. Durante o semestre de inverno de 1945-46 realizaram-se 47 doutoramentos, dos quais 36 em ciências técnicas e 11 em ciências naturais (3 referentes a física). Em 1944-45, de 67 doutoramentos, 4 foram de matemática e física.

Durante o mesmo período foram atribuídos 2 títulos de doutor honoris causa um dos quais pela secção 9. Vivem actualmente 58 doutores honoris causa da E. P. F. dos quais 2 pela secção 9, ambos antigos professores da E. P. F., prémios Nobel de física e actualmente no Institut for Advanced Studies, Princeton, U. S. A.

*

Estão actualmente postas a prémio 10 questões entre as quais 1 para a secção de Matemática e Física. Dois prémios podem ser atribuídos aos concorrentes de cada questão e o total de ambos pode ser de escudos 3.000 a 6.000 (1).

Durante o semestre de inverno de 1944-45 foram atribuídos 5 prémios num total de escudos 15.000.

*

De 286 pedidos de bôlsas de estudantes a E. P. F. atendeu 253.

*

A E. P. F. possui uma biblioteca geral e 57 bibliotecas especiais anexas a laboratórios, institutos, seminários, etc.

(1) Como é sabido, são atribuidos os seguintes prémios Nobel: Física, Química, Medicina, Literatura e Paz.

(1) Tôdas as conversões foram efectuadas à razão de 1 fr. suíço = esc. 6.

Dá uma ideia do desenvolvimento da biblioteca geral, o quadro seguinte:

1865	8.800	volumes
1895	37.000	»
1925	116.525	»
1945	201.601	»

Em 1945 a biblioteca geral adquiriu 5.513 volumes, apesar das dificuldades resultantes da guerra, para a aquisição de livros americanos, ingleses, alemães, etc.

Além do corpo docente e dos estudantes da E. P. F. 1508 pessoas utilisaram a biblioteca geral que emprestou para leitura no domicílio 76751 volumes e para a sala de leitura 15868 volumes. Dos volumes emprestados para leitura no domicílio, 13608 foram devolvidos pelo correio.

A sala de leitura foi visitada por 43271 pessoas que puderam servir-se livremente dos 1.000 volumes e 500 revistas nela patentes. A sala de leitura está aberta das 8 às 12 e das 14 às 19 horas.

O ficheiro de literatura técnica forneceu 1658 informações verbais, das quais 912 ao meio escolar e 746 a administrações, indústrias, escolas e particulares nacionais e estrangeiros.

Em 1929 a biblioteca geral possuia 16754 volumes referentes à secção de Matemática e Física. No mesmo ano a biblioteca do Seminário Matemático contava 1400 volumes.

A biblioteca geral possui ainda 1.117.800 (1945) registos de patentes cujo movimento é notável.

A biblioteca da E. P. F. é alvo de constantes doações de professores, autoridades, sociedades científicas, etc.

*

A E. P. F. é a única escola federal da Suiça, portanto a única directamente financiada pela Confederação. As 7 universidades suiças são cantonais.

Nas contas gerais da Confederação, cujo resumo nos últimos três anos (anos de economia de guerra) é o que segue, em milhares de escudos,

	Contas		Orçamento
	1943	1944	1945
Receita	2.186.173	1.936.150	2.445.000
Despeza	3.047.714	3.183.183	3.490.800
Deficit	861.541	1.247.033	1.045.800

a parte da E. P. F., incluindo o Laboratório de ensaios de materiais, foi a seguinte:

Receita	12.289	12.510	13.632
Despeza	39.128	42.465	44.981
Deficit	26.839	29.955	31.349

A parte da biblioteca geral no orçamento da E. P. F. começou por 24 contos e é hoje superior a 300.

A Confederação não limita às dotações ordinárias indicadas o seu interêsse pela E. P. F. e pelo ensino em geral.

Assim, das subvenções federais aos cantões, cujo total foi em 1943 de 1.197.000 contos, 77.910 contos destinaram-se ao ensino e à preparação profissional [1].

E, quanto à E. P. F., ela recebeu da Confederação a título extraordinário

de 1910 a 1928	136.000	contos
em 1929-30	72.000	»
em 1946	162.000	»

para novas edificações, transformação dos edifícios existentes e equipamento de laboratórios e institutos de investigação.

Além disso a Confederação subsidiou directamente, só em 1944-45, 18 professores da E. P. F., abrindo-lhes créditos num total de 9.648 contos, para a realização de investigações científicas.

Se a Confederação é o principal financeiro da E. P. F., o Comércio, a Banca e a Indústria da Suiça contribuem sob tôdas as formas — directa e indirectamente, pela criação de fundações, por intermédio das sociedades científicas que mantêm vários institutos de investigação anexos à E. P. F. — para o progresso da escola que lhes forma os técnicos e os treina na actividade científica, de cujo rendimento não duvidam porque de há muito dela colhem frutos.

Durante o ano de 1944-45 a E. P. F. teve legados e doações num total de 9.150 contos.

O total de fundações da E. P. F. é de tal ordem que lhe permitiu durante o ano de 1944-45 destinar 1.292 contos ao financiamento de trabalhos científicos a realizar ou em realização nos seus laboratórios e institutos. No ano lectivo de de 1943-44 da mesma procedência e com igual destino dispos a E. P. F. de 1.276 contos.

Entre outros os seguintes institutos anexos à E. P. F. são regular e substancialmente subsidiados por sociedades científicas, algumas organizadas expressamente com êste fim e por sua vez largamente financiadas pela Indústria e Comércio suiços:

Instituto de Física Técnica
Instituto de Organização Industrial
Instituto de Investigação Económica.

(1) Do que fica exposto segue-se que, em 1943, a despeza ordinária com o ensino, no orçamento da Confederação, foi de 117.038 contos. Para obter o total que a montanhosa Suiça gastou com o ensino naquele ano seria necessário aumentar aquela verba com os créditos extraordinários atribuidos pela Confederação ao ensino e, ainda, com as dotações ordinárias e extraordinárias inscritas nos orçamentos dos cantões, municipios e comunas, destinadas às escolas primárias, primárias superiores e profissionais, ginásios, escolas reais superiores, técnicos e universidades, que são todos independentes da Confederação.

*

Finalmente algumas indicações, que uma curta experiência depressa transforma em índices muito significativos da organização e da burocracia da E. P. F.

O programa e o horário dos cursos de cada semestre são preparados e impressos por forma a estarem à venda antes do encerramento do semestre anterior.

O regulamento da bibliotica geral prevê um quarto de hora como demora máxima na execução de qualquer requisição.

Na secretaria e na tesouraria da E. P. F., que estão abertas dos 8 às 12 e das 14 às 18, não se encontram mais de 20 funcionários.

O acto de matrícula e inscrição dura poucos minutos, por tal forma tudo está simplificado, bem preparado e liberto de papel selado.

E, nos corredores monumentais da E. P. F. faltam as fardas e as vénias aos lentes dos contínuos desocupados...

Zurique, Maio de 1946

FRANÇA

ASSOCIAÇÃO FRANCESA PARA O AVANÇO DAS CIÊNCIAS

CONGRESSO DE NICE DE SETEMBRO DE 1946

O 65.º congresso desta Associação realizar-se-á, na data indicada, em Nice no Centro Universitário Mediterrânico. A secção 1 — Matemáticas — será presidida por Emile Gau e secretariada por Paul Belgodère.

As questões postas na ordem do dia são:

1. Funções harmónicas e generalizações.
2. Corpos convexos e aplicações da convexidade.
3. Cálculos numéricos e aproximações.

A ordem do dia não exclui de modo algum comunicações relativas a qualquer outro ramo da Matemática.

A Associação abrange 26 secções que nas sessões gerais do congresso se encontram reunidas em 6 grupos, o primeiro dos quais — Ciências Matemáticas — compreende três secções: 1.ª Matemáticas, 2.ª Mecânica, e 3.ª Astronomia e Astrofísica.

O congresso da Associação cria, cada ano, na região em que se reune, uma agitação científica que estimula a apresentação de trabalhos das Sociedades Científicas locais e a organização de exposições; facilita também o encontro de investigadores franceses e estrangeiros que trocam idéias e apresentam sugestões.

SOCIEDADE MATEMÁTICA DE FRANÇA

CONFERÊNCIAS REALIZADAS EM 1945-46 (continuação)

N. Aronszajn: Sur certains développements canoniques en fonctions harmoniques de l'espace, (8-5-1946); B. Combes: Sur une généralisation de l'inégalité de Bienaymé, (29-5-1946); J. Leray: Topologie algébrique (12-6-1946, 19-6-1946, 26-6-1946).

As conferências só recomeçarão em Outubro de 1946.

NOTICIÁRIO

Em França, sob a direcção do Prof. F. Joliot, que é o director do Centro Nacional de Investigações Científicas, realizaram-se alguns progressos na organização dos trabalhos científicos. Efectuou-se a união das investigações puras e aplicadas, e criou-se um corpo de assistentes que em cada profissão há-de ajudar os investigadores. O Centro tem actualmente 280 técnicos a trabalhar, dirigidos por 15 membros. Está-se encarando actualmente a vinculação do Centro com os departamentos de investigação dos diferentes ministérios. Com êsse fim, foi criado um Conselho Superior de Investigações Coloniais e um Comité de Coordenação das Investigações, vinculado com a defesa nacional. Os créditos para a investigação foram sucessivamente aumentados e atingem êste ano 500 milhões de francos.

O Prof. F. Joliot propôs a criação de um Centro de Investigações Tecnológicas e, de futuro, o Departamento ou Ministério das Investigações Científicas.

O Prof. F. Joliot é o presidente da Comissão Francesa para o Estudo da Energia Atómica, da qual fazem parte sua mulher Irene Joliot-Curie e os Professores Pierre Auyer e François Perrin.

* * *

Em Wiesbaden (Alemanha) sob a direcção do físico A. Sommerfeld, o químico K. Clusius e o biólogo A. Kühn, apareceu a revista mensal *Zeitschrift für Naturforschung*, que substituirá a publicação mensal de antes da guerra *Der Naturwissenchaften.*

[*Ciencia e Investigación* — Julio 1946]

* * *

Durante a semana de 15-19 de Julho, teve lugar na Universidade de Chicago, um colóquio geral sôbre Álgebra em que foram especialmente analisados os recentes progressos da álgebra nas suas relações com outros ramos da matemática como topologia, teoria das funções e geometria.

* * *

A Royal Society celebrou em 15 de Julho o tricentenário do nascimento de Newton.

* * *

O ano passado fundou-se em S. Paulo, Brasil, uma Sociedade Matemática, a que preside, por eleição, o professor Omar Catunda, da Universidade daquela mesma cidade.

* * *

A Academia das Ciências, em França, anunciou a concessão dos seguintes prémios para 1945:

Prémio Carrière — A. Lichnerowicz, da Universidade de Estrasburgo, pelos seus trabalhos matemáticos;

Prémio Montyon — Robert Fortet, da Universidade de Caen, pelos seus tradalhos de Cálculo das Probabilidades;

Prémio d'Ormoy — Izdem Mandelbrojt, do Colégio de França, pelos seus trabalhos matemáticos;

Prémio Saintour — Marcel Brelot, da Universidade dc Grenoble, pelos seus trabalhos matemáticos e especialmente pelas suas publicações sôbre as funções sub-harmónicas.

Prémio Charles Dupin — Paul Vincensini, da Universidade de Besançon, pelos seus trabalhos de geometria superior.

O Prof. Elie Cartan foi eleito presidente da Academia das Ciências de Paris.

(do *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 52, n.º 5, Part. 1, May, 1946).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

I. S. C. E. F. — Exame de Aptidão — **3 de Agôsto de 1946.**

2218 — Defina e enuncie as principais propriedades da simetria em relação a um ponto e a um eixo e justifique a sua aplicação como métodos de demonstração. Exemplifique, provando que «de todos os triângulos com a mesma base e a mesma altura, o isósceles tem perímetro mínimo». R: *Sejam* $\overline{AB}$ *e* h *respectivamente a base e altura comuns. Então qualquer triângulo nas condições do enunciado poderá ter o seu terceiro vértice sôbre a recta* r) *paralela a* AB *à distância* h. *Tome-se* $\overline{A'B'}$ *simétrico de* $\overline{AB}$ *em relação a* r) *e considerem-se os triângulos* [ABC] *isósceles e* [ABC'] *não isósceles. Da simetria* $\overline{CB}=\overline{CB'}$ *e* $\overline{C'B}=\overline{C'B'}$ *e como* $\overline{AC'}+\overline{C'B'}>\overline{AC}+\overline{CB'}$ *ter-se-á sempre* $\overline{AB}+\overline{AC'}+\overline{C'B}>\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB}$.

2219 — Sabendo que as medidas dos catetos dum triângulo rectângulo são as raízes da equação $2x(x+a)+b^2=0$ determine a medida da altura correspondente à hipotenusa do mesmo triângulo. Discuta o problema e examine, em particular, o caso de ser $a=\operatorname{sen} t$ e $b=\cos t$, com t compreendido entre 0 e 2π. R: *Sendo* c_1 *e* c_2 *os catetos*, d *a hipotenusa e* h *a altura tem-se*: $c_1+c_2=-a$, $c_1 c_2=b^2/2$ *donde* $d^2=c_1^2+c_2^2=(c_1+c_2)^2-2c_1 c_2=a^2-b^2$ *e* $h=c_1 c_2/d=$ $=\dfrac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$. *A possibilidade do problema resultará dos dados* a e b *satisfazerem a* $a<0$, $b\neq 0$, *e* $a^2>b^2$ *e em particular* $5\pi/4<\alpha<3\pi/2$ *e* $3\pi/2<\alpha<7\pi/4$.

2220 — Diga de quantas maneiras distintas é possível extrair, duma só vez, um número par de esferas dum saco que contém n, tôdas diferentes. Resolva o mesmo problema no caso duma tiragem em número ímpar e mostre que o cociente dos dois resultados tende para a unidade quando n aumenta. R: *No primeiro caso tem-se*: $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}-1$ *e no segundo* $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1}$. *O cociente será* $\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ *e a fracção tende para zero quando* n *aumenta.*

2221 — Verifica-se que, utilizando de modo conveniente 7 pêsos respectivamente de 1, 3, 9, 27, 81, 243, e 729 gramas nos dois pratos duma balança, é possível conhecer o pêso exacto em gramas de corpos que não ultrapassem os 1.093. Apresente uma justificação dêste facto. R: *Os valores dos pêsos dados são potências sucessivas de* 3 *cuja soma é igual a* 1093. *Ora qualquer número inteiro* N *pode escrever-se* $N=a_0+a_1 3+a_2 3^2+\cdots+a_n 3^n$ *onde os coeficientes só podem tomar, como se sabe, os valores* 0, 1 ou 2. *Notando que* $2=3-1$, N *poderá então escrever-se* $N=b_0+b_1 3+b_2 3^2+\cdots+b_{n+1} 3^{n+1}$ *onde os coeficientes poderão agora tomar os valores* -1, 0 *e* 1 *o que justifica o facto apontado.*

2222 — Mostre que existe uma infinidade de números fraccionários entre $2/3$ e $4/5$. A propriedade será verdadeira para dois números fraccionários quaisquer? R: *Como* $4/5-2/3=2/15$ *a infinidade de fraccionários da forma* $2/3+2/(15+k)$ *onde* k *é positivo demonstram a propriedade. Em geral ter-se-á, para dois números fraccionários* $a/b<c/d$, $c/d-a/b=(bc-ad)/bd$ *donde* $\frac{a}{b}+\frac{bc-ad}{bd+k}$ *como no caso particular.*

Observações:

1. É obrigatória a resposta a 4 pontos, nomeadamente ao primeiro.

2. As respostas que não forem convenientemente justificadas não serão consideradas na classificação.

Enunciados e soluções dos números 2218 a 2222 de J. Remy Teixeira Freire.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — 1945.

2223 — Indicar a natureza da série

$$\sum\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}$$

e caso seja convergente, um limite excedente para o êrro cometido tomando para soma da série a dos seus nove primeiros termos.

R: *Tem-se* $a_n=\frac{1}{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}=\frac{n!}{(2n)!}$.

Aplicando o critério d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n!}=$

$=\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4n+2}$, *que tende para zero com* $1/n$. *A série é, portanto, convergente. A expressão de um limite excedente de* R_n *é* $\frac{a_n}{1-e_n}$, *sendo* e_n *o limite superior dos números*

$$\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+p}} \quad para \quad p=0,1,2,\cdots$$

No nosso caso, êles formam a sucessão de termo geral $\frac{1}{4(n-p)+2}$ *constantemente decrescente com* $1/p$. *Por isso o seu limite superior é o primeiro termo que corresponde a* $p=0$, $\frac{1}{4n+2}=e_n$. *Então* $\frac{a_n}{1-e_n}=\frac{n!(4n+2)}{(2n)!(4n+1)}$ *e, para* $n=9$, *vem* $9!/18!\cdot 38/37$, *quantidade certamente inferior a* 10^{-9} *pois suprimindo no denominador os factores que figuram em* 9! *ainda ficam* 9 *factores, o menor dos quais é* 10. *Se não interessar maior precisão, podemos tomar* 10^{-9} *para limite pedido.*

2224 — Mostrar que se pode aplicar com segurança o método de Newton ao cálculo aproximado do zero do polinómio $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2$ compreendido em $(1/2, 1)$ e calcular duas aproximações. R: *Designando por* f(x) *o polinómio dado será*

$$f'(x)=8x^3+12x^2+6x-2$$
$$f''(x)=24x^2+24x+6=6(4x^2+4x+1).$$

Como esta derivada é sempre positiva no intervalo dado, o método é seguramente aplicável ao extrêmo em que fôr também positiva f(x) *isto é, a* $x=1$. *Aplicando a fórmula conhecida* $b_{n+1}=b_n-f(b_n)/f'(b_n)$ *com* $b_0=1$, *vem* $f(b_0)=f(1)=5$, $f'(b_0)=f'(1)=24$ e $b_1=1-5/24=0,791\cdots$ *Tomando os dois primeiros algarismos e aproximando por defeito, vem*

$$f(b_1)=f(0,79)=0,8433\cdots$$
$$f'(b_1)=f'(0,79)=16,1732\cdots$$
$$e \quad b_2=0,79-0,8433/16,1732=0,73785\cdots$$

2225 — Equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas a $x=z$, $y=0$ e directriz $xz=1$, $x=y$. R: *As rectas paralelas à direcção dada são* $x=z+h$, $y=k$. *Eliminando* x, y *e* z *entre estas equações e as da directriz, obtém-se sucessivamente*

$$\begin{cases} yz=1 \\ x=z+h \\ y=k \end{cases} \quad \begin{cases} kz=1 \\ k=z+h \end{cases} \quad k=1/k+h$$

sendo esta última a relação procurada entre h *e* k.

Substituindo estes parâmetros pelos valores tirados da equação das directrizes, vem

$$y=1/y+x-z \quad \text{ou} \quad y^2-xy+yz-1=0,$$

que é a equação procurada.

2226 — Dados $a=90°$, $C=23°19'22''$ e $b=45°12'0''$, calcular o elemento B do mesmo triângulo esférico.

Soluções dos n.os 2223 a 2226 de Renato Pereira Coelho.

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — Outubro de 1945

2227 — Para que valores de x é absolutamente convergente a série de têrmo geral $e^n x^n/n$? Estude a natureza da série nos extremos do intervalo de convergência. R: *A série é absolutamente convergente no interior do intervalo* $(-1,1)$; *para* $x=-1$, *é simplesmente convergente, e para* $x=1$, *divergente.*

2228 — Determinar os máximos e mínimos da função $f(x)=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$. R: *A função é mínima para* $x=\operatorname{arc}\operatorname{sen} 1/e$ *e máxima para* $x=\pi/2$.

2229 — Determine a natureza da quádrica $x^2+y^2+z^2-4xy-1=0$. Qual é a equação referida aos eixos? R: *É um hiperboloide de uma fôlha de revolução. A sua equação referida aos eixos é* $x^2+y^2-3z^2=1$.

2230 — A função $f(x)=x-|x|$ tem derivada no ponto $x=0$? E derivadas laterais? Indique o valor de uma ou de outras, no caso de existirem. R: *A fun- tem derivadas laterais com os valores* $f'(-0)=2$ *e* $f'(+0)=0$.

Soluções dos n.os 2227 a 2230 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 5.º Exercício de revisão.

2231 — São dadas as rectas $r\equiv 2x=3y-1=z-1$ e $s\equiv x-1=y=2z-2$. *a)* Verifique que r e s não são complanas. *b)* Determine a equação cartesiana do plano π que passa por r e é paralelo a s. *c)* Determine as equações cartesianas da recta p que passa pela origem e é perpendicular a r e s. *d)* Calcule a distância de r a s. R: *Como* $r\equiv\frac{x}{3}=\frac{y-1/3}{2}=\frac{z-1}{6}$ *e* $s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=z-1$, *os vectores* $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{s}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *têm as direcções das rectas* r *e* s, *respectivamente; o ponto* $R\equiv(0,1/3,1)$ *pertence a* r *e o ponto* $S\equiv(1,0,1)$ *pertence a* s. a) *Em virtude de ser* $\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}\wedge(R-S)=-13\neq 0$, r *e* s *não são complanas.* b) *Designando por* $P\equiv(x,y,z)$ *o ponto corrente de* π *ter-se-á* $\mathbf{r}\,|\,\mathbf{s}\wedge(P-R)=0$ *ou seja* $\pi\equiv 10x-9y-2z+5=0$. c) *A direcção de* p *é a do vector* $\mathbf{p}=10\mathbf{i}-9\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ *e então* $p\equiv\frac{x}{10}=\frac{y}{-9}=\frac{z}{-2}$.

d) *Tem-se* $d(r,s)=d(S,\pi)-13/\sqrt{185}$.

2232 — Dados os pontos $A(1,0,2)$, $B(0,-1,1)$ e a recta $r\equiv x=y/2=z/m$, determine as coordenadas do ponto C da recta r tal que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C. Discuta o problema. R: *Seja* $C\equiv(\alpha,\beta=2\alpha,\gamma=m\alpha)$. *Como o triângulo* $[ABC]$ *é rectângulo em* C, $(C-A)\,|\,(C-B)=0$, *ou* $(m^2+5)\alpha^2+(1-3m)\alpha+2=0$, *ou* $\alpha=(3m-1\pm\sqrt{m^2-6m-39})/2(m^3+5)$. *Para* $m>3+4\sqrt{3}$ *ou* $m<3-4\sqrt{3}$ *o problema tem duas soluções reais; para* $m=3+4\sqrt{3}$ *ou* $m=3-4\sqrt{3}$ *o problema tem uma solução real; para* $3-4\sqrt{3}<m<3+4\sqrt{3}$ *o problema não tem soluções reais.*

2233 — Representação cartesiana do lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam pelos pontos $O\equiv(0,0,0)$, $P\equiv(1,2,1)$ e são tangentes ao plano $\pi\equiv 2x+y-2z-3=0$. R: *Sendo* $M\equiv(x,y,z)$ *o ponto corrente do lugar pedido, tem-se* $d(M,O)=d(M,P)-d(M,\pi)$, *isto é,*

$$\begin{cases} x+2y+z-3=0 \\ 5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz+12x+6y-12z-9=0 \end{cases}$$

Enunciados e soluções dos n.os 2231 a 2233 de José Morgado.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência — Maio 1946.

2234 — Dado o sistema
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x+(a^2-6)\,y-z-at=0 \\ 4x+(a^2-6)^2\,y+z+a^2t=0 \\ 8x+(a^2-6)^3\,y+z+a^3t=0, \end{cases}$$
determine os valores de a para os quais admite solução não nula. R: *Os valores de* a *pedidos são os que satisfazem à condição* $\triangle=0$, *onde* $\triangle$ *é o determinante dos coeficientes das incógnitas. Como* $\triangle$ *é um determinante de Vandermonde, de base* $(2,a^2-6,-1,-a)$, *é nulo se, e só se, é verificada uma das seguintes igualdades;* $2=a^2-6$, $2=-a$, $a^2-6=-1$, $a^2-6=-a$, $-1=-a$. *Tem-se, portanto,* $a=\pm2\sqrt{2}$, $a=\pm2$, $a=\pm\sqrt{5}$, $a=-3$, $a=1$.

2235 — A e B jogam alternadamente um dado. Cada um deles faz dois lançamentos e A inicia o jôgo. A ganha se tirar o ponto 6 antes de B tirar o ponto 5; B ganha se tirar o ponto 5 antes de A tirar o ponto 6. Calcule as probabilidades de A e B ganharem o jôgo.

R: *Probalidade de* A *ganhar:* $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{61}{216}$

Probalidade de B *ganhar:* $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{305}{1296}$.

2236 — Seja α uma raiz primitiva de índice n da unidade. Mostre que α^2 é ainda uma raiz primitiva de índice n da unidade se, e só se, n é ímpar. R: *Se* n *é ímpar,* α^2 *é uma raiz primitiva de índice* n *da unidade, visto* 2 *ser primo com* n; *se* n *é par* (n=2k) *então:* $(\alpha^2)^k=\alpha^{2k}=1$, *o que mostra não ser* n *o grau de primitividade de* α^2, *pois* $k<n$.

2237 — Dados uma circunferência γ e um ponto P exterior, do mesmo plano, prove qne a potência p de P em relação a γ é $p=(A-P)\mid(B-P)$, designando A e B as extremídades de um diâmetro qualquer. R: *Designando por* B' *a projecção de* B *sôbre* PA *e por* T *o ponto de contacto da tangente tirada por* P *à circunferência, tem-se* $(A-P)\mid(B-P)=\overline{PA}\cdot\overline{PB'}=\overline{PT}^2$, c. q. d.

2238 — Dado um triângulo $[A, B, C]$, designando por G o ponto de encontro das medianas, prove que $(A-G)+(B-G)=G-C$. R: *Consideremos o ponto* D *tal que* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{GB}$; D *está sôbre a recta* CG, *o quadrilátero* [A, B, C, D] *e um paralelogramo e* $\overline{CG}=\overline{GD}$. *então* $(A-G)+(B-G)=D-G=G-C$, c. q. d.

Soluções dos n.os 2234 a 2238, de José Morgado.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência, ordinário — 16-6-945.

2239 — Dada a função $y=\log[a\log bx]$ determinar a e b de modo que ela admita uma inflexão no ponto de coordenadas (1, 0). Estudá-la e representá-la geomètricamente nessa hipótese. Calcular $y(e^{-1/2})$, utilizando o desenvolvimento em série da função $\log(1+x)$ com um êrro inferior a $1/10^2$. R: *Terá que ser* $y''(1)=0$ *e* $y(1)=0$ *sistema que resolvido dá* $a=-1$, $b=e^{-1}$; *a função dada reduz-se a* $y=\log[1-\log x]$ *que é apenas definida para valores de* x *tais que* $1-\log x>0$ *ou seja no intervalo aberto* (0, e) *onde é contínua, monotónica decrescente, com a concavidade voltada no sentido positivo do eixo das ordenadas no intervalo* (0, 1) *e em sentido oposto no intervalo* (1, e). *O ponto* (1, 0) *é de inflexão e* $\lim_{x\to+0} y=+\infty$ *e* $\lim_{x\to e-0} y=-\infty$; $y'=-1/x(1-\log x)$ *e* $y''=-\log x/x^2(1-\log x)^2$; $y(e^{-1/2})=\log(1+1/2)=1/2-1/8+1/48-1/384+\cdots$ *Basta tomar os três primeiros termos dêste desenvolvimento para assegurar o resultado,* $y(e^{-1/2})=0{,}40$, *com um êrro inferior a* $1/10^2$.

2240 — Determinar o maior valor inteiro de a para o qual a equação $x^3-a(x+1)=0$ tem uma só raiz real no intervalo (1, 2). Nessa hipótese, resolvê-la determinando as raízes irracionais com um êrro inferior a 1/10 e utilizando o método gráfico para a separação. R; *Representando por* f (x) *o primeiro membro da equação dada, têm que ser de sinais contrários* f (1) *e* f (2) *ou o que é o mesmo*

$$f(1)\cdot f(2)<0\to(1-2a)(8-3a)<0 \quad ou \quad 1/2<a<8/3.$$

O maior valor de a *inteiro neste intervalo é* a=2. *A equação* $x^3-2(x+1)=0$ *sem raízes racionais tem uma irracional no intervalo* (1, 2) *e duas raízes complexas. Essa raiz real, a menos de uma décima é* x=1,7.

Soluções dos n.os 2239 e 2240 de Orlando Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Julho de 1945.

2241 — Resolver a equação $x^8-2x^4+2=0$. Representação gráfica das raízes. R: *Fazendo* $x^4=y$, *vem* $y^2-2y+2=0$ *e* $y_1=1-i$, $y_2=1-i$. *Tem-se, pois, que resolver a equação* $x^4=1+i$ *e* $x^4=1-i$ *ou calcular os valores de* $\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi/4}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi+\pi/4}{4}\right)$ *e de* $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+7\pi/4}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi+7\pi/4}{4}\right)$ *que são complexos de módulo* $\sqrt[8]{2}$ *e de argumentos* $\pi/16$, $9\pi/16$, $17\pi/16$, $25\pi/16$ *e* $7\pi/16$, $15\pi/16$, $23\pi/16$, $31\pi/16$, *respectivamente.*

2242 — Calcular a área do triângulo formado pela bissectriz do ângulo XOY com as assíntotas da cónica $x^2+2xy-y^2+2x-7y+1=0$. R: *Tem-se* A=1, B=1, C=−1, D=1, E=−7/2, F=1; *a cónica é uma hipérbole não degenerescente como se deduz do cálculo dos valores de* B^2-AC *e de* $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

O centro é um dos vértices e as suas coordenadas são a solução de $\begin{cases} 2x+2y+2=0 \\ 2x-2y-7=0 \end{cases}$ *ou* $x_1=5/4$, $y_1=-9/4$. *As assíntotas têm por equações* $y+9/4=(1\pm\sqrt{2})(x-5/4)$ [*as 2 direcções assintóticas são as raízes da equação* $Cm^2+2Bm+A=0$]. *Os outros 2 vértices do triângulo são os pontos de intersecção das assíntotas com* y=x, *e as suas coordenadas* $x_2=y_2=(7\sqrt{2}+10)/4$ *e* $x_3=y_3=(10-7\sqrt{2})/4$. *A área do triângulo é*

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=49\sqrt{2}/8\ (L^2)\,.$$

2243 — Um plano π é definido pelos pontos $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,1)$ e a recta r pelos pontos $P(1,2,3)$ e $Q(-4,3,0)$. Determinar sôbre r um ponto M tal que o volume do tetraedro $MABC$, seja igual a 20. R: *Equações da recta* r: $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-3}$ *Sejam* (x,y,z) *as coordenadas do ponto* M. *Para as determinar necessito de* 3 *equações, duas das quais são as equações de* r. *A 3.ª equação é* $V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=20$ *ou* $2x+3y+6z-126=0$.

O sistema $\begin{cases} 2x+3y+6z-126=0 \\ \frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1} \\ \frac{x-1}{-5}=\frac{z-3}{-3} \end{cases}$ *admite a solução:* $M(21,-2,15)$.

Soluções dos n.os 2241 a 2243, de Jorge Cândido da Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — Exame final — Outubro de 1945

2244 — Quando é mínima a distância da origem das coordenadas ao hiperboloide de uma fôlha $x^2-yz=1$? R: *A distância é mínima para os pontos do hiperboloide de coordenadas:* $(0,0,1)$ *e* $(0,0,-1)$.

2245 — Determinar as trajectórias ortogonais da família de curvas dada pela equação $C(x+y)=xy+1$. R: *A equação da família de trajectórias ortogonais é* $y^3-x^3-3(y-x)=3K$.

Soluções dos n.os 2244 e 2245 de L. G. M. de Albuquerque.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — Exame final — Julho de 1945.

2246 — Integrar a equação

$$\frac{d\rho}{d\theta}+\frac{\rho}{\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\theta}-\operatorname{sen}2\theta\,,$$

e determinar a assíntota da linha integral que passa pelo ponto $(\pi/2,1)$. R: *Integrando a equação sem 2.º membro vem* $\rho=C_1/\theta$ *e, variando a constante, obtém-se*

$$C_1=\int\cos^2\theta\,d\theta-\int\theta\operatorname{sen}2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\theta\cos 2\theta+\frac{1}{2}\theta+C_2=$$
$$=\theta\cos^2\theta+C_2\,.$$

Logo $\rho=\frac{C_2}{\theta}+\cos^2\theta$. *Portanto* $1=\frac{2}{\pi}C_2$, $C_2=\frac{\pi}{2}$, $\rho=\frac{\pi}{2\theta}+\cos^2\theta$. *Para* $\theta=0$ *vem* $\rho=\infty$. *A subtangente polar é* $S_t=\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}=-\frac{(\pi+2\theta\cos^2\theta)^2}{2(\pi+2\theta^2\operatorname{sen}2\theta)}\to-\frac{\pi}{2}$.

Temos pois para equação polar da assíntota $\rho=\frac{\pi}{2\operatorname{sen}\theta}$.

2247 — Considerar a linha representada pela equação $y=\log(1+\cos x)$ no intervalo $-\pi\lesseqgtr x\lesseqgtr\pi$. Determinar os máximos e mínimos de y e o comprimento do arco situado no 1.º quadrante. R:

$$y=\log(1+\cos x)$$
$$y'=-\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0\to x=0$$

$$\varphi'=-\cos x\ \begin{cases}\varphi'(0)<0\\ \psi\ (0)>0\end{cases}\ \textit{logo}\ y''_0<0\ \textit{máximo}.$$

Para $x=\pi$ *e* $x=-\pi$ *vem* $y'=\infty$.

$y'(\pi-h)<0$, $y'(\pi+h)>0$, *logo trata-se dum mínimo.*

Do mesmo modo $y'(-\pi-h)<0$, $y'(-\pi+h)>0$, *mínimo. Temos*

$$ds=\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2}}\,dx=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx=\frac{dx}{\cos x/2}=\frac{dx}{\operatorname{sen}(\pi/2-x/2)}\,.$$
$$s=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\operatorname{sen}(\pi/2-x/2)}=-2\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\,.$$

2248 — Dada a parábola $y^2=2x$ exprimir y e x em função do ângulo t que a tangente em $M(x,y)$ faz com o eixo dos xx. Sôbre a normal em M, marcar um segmento $\overline{MP}=a$ e calcular em função de t o comprimento do arco descrito pelo ponto P, a partir do ponto de ordenada nula. R: *Temos* $\begin{cases}x=1/2\cdot\operatorname{cotg}^2t\\ y=\operatorname{cotg}t\,.\end{cases}$

Sendo (X,Y) *as coordenadas de* P *temos*

$$\begin{cases}X=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2t+a\operatorname{sen}t\\ Y=\operatorname{cotg}t-a\cos t\end{cases}\quad \text{e}\quad ds=\frac{a\operatorname{sen}^3t-1}{\operatorname{sen}^3t}\,dt$$
$$s=\int_{\pi/2}^{t}\frac{a\operatorname{sen}^3t-1}{\operatorname{sen}^3t}\,dt=$$
$$=a(t-\pi/2)+\frac{1}{4}\log\frac{1+\cos t}{1-\cos t}+\frac{\cos t}{2\operatorname{sen}^2t}\,.$$

Soluções dos n.os 2246 e 2248 de Jayme Rios de Souza.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — 1.º exame de frequência — 22-3-1946.

2249 — Seja I o conjunto de todos os triângulos possíveis. Definamos em I um operador *fecho* da seguinte maneira: $\bar{O}=O$; se $X\neq O$, $\bar{X}$ é o conjunto de todos os triângulos semelhantes aos de X. *a)* Mostre que $\overline{X+Y}=\overline{X}+\overline{Y}$ e $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$, quaisquer que sejam os subconjuntos X e Y de I. *b)* Prove que neste espaço, todo o conjunto fechado é também aberto e todo o conjunto não fechado é também não aberto.

2250 — Mostre que as transformações $\theta(x)=1/(1-x)$, $\theta_2(x)=\theta(\theta(x))$, $\theta_3(x)=\theta(\theta_2(x))$ constituem um grupo relativamente ao produto de transformações.

2251 — Se as raízes da equação $f(x)=0$, onde $f(x)$ é derivável, forem tôdas reais, que poderá concluir àcêrca da realidade das raízes da equação $f'(x)-2xf(x)=0$? Justifique. R: *São tôdas reais, como se conclui aplicando um corolário do teorema de Rolle à equação* $e^{-x^2} f(x)=0$.

2252 — Calcule: $\displaystyle\int \frac{\text{arc sen} \log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx$,

$\displaystyle\int x^3(1-x^2)^{1/3}\,dx$, $\displaystyle\int\frac{\text{sen}\,2x\,dx}{1+\text{sen}^4 x}$, $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+x)^{3/4}}$.

R: $\frac{1}{2}(\text{arc sen} \log x)^2+C$, $\frac{3}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{7/3}}{7}-\frac{(1-x^2)^{4/3}}{4}\right]+C$

$\text{arctg}\,\text{sen}^2 x+C$, $\log\left(C\,\frac{(1+x)^{1/4}-1}{(1+x)^{1/4}+1}\right)-\text{arctg}\,(1+x)^{1/4}$

2253 — Considere a função

$$f(x)\,g(x)-f(a)\,g(x)-g(b)\,f(x)$$

e suponha que $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis no intervalo $[a,b]$. Mostre que para um valor conveniente de x do referido intervalo se tem $f'(x)\,[g(x)-g(b)]=g'(x)\,[f(a)-f(x)]$. R: *Como a função dada toma valores iguais para* $x=a$ *e* $x=b$, *está, em virtude das hipóteses feitas, nas condições de aplicabilidade do teorema de Rolle e, por consequência, existe um valor de* x *do intervalo* $[a,b]$ *para o qual se tem* $f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)-f(a)\,g'(x)-g(b)\,f'(x)=0$, *igualdade equivalente à igualdade a demonstrar.*

Soluções dos n.os 2251 a 2253 de José Morgado.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **2.º exame de frequência, 7-6-946.**

2254 — Dada a curva C de equações paramétricas $x=e^{1-t}\cos t$, $y=e^{1-t}\,\text{sen}\,t$, seja M um ponto qualquer de C, T o ponto de encontro da tangente a C em M com o eixo Oy e N o ponto de encontro da normal a C em M com o eixo Ox. Mostre que TN é paralela à bissectriz dos quadrantes pares.

2255 — Mostre que a série $\text{sen}\,x+\text{sen}\,\frac{x}{2}+\text{sen}\,\frac{x}{2^2}+\cdots+\text{sen}\,\frac{x}{2^{n+1}}+\cdots$ é uniformemente convergente qualquer que seja x. Dêste facto que pode concluir acêrca da série $\cos x-2\cos\frac{x}{2}+\cdots+2^{n-1}\cos\frac{2^{n-1}}{x}+\cdots$? R: *A primeira parte é evidente; quanto à segunda, nada se pode concluir.*

2256 — Calcule o volume, gerado pela revolução, em tôrno da recta $x=4$, da área delimitada pelas curvas $y=x^2$ $y=0$, $x=4$ e $y+x-6=0$. R: $80\pi/3$.

2257 — Mostre que o comprimento de arco da curva $x=a\cos t-1/3\cdot(a-b)\cos^3 t$, $y=b\,\text{sen}\,t+1/3\cdot(a-b)\,\text{sen}^3 t$, medido a partir do ponto $t=0$ é

$$1/2\cdot(a+b)\,t-1/2\cdot(a-b)\cos t\,\text{sen}\,t.$$

Enunciados e soluções dos n.os 2255 a 2257 de F. Carvalho Araújo.

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.ª Cadeira — Exame final — **Outubro, 1945.**

2258 — Calcular o laplaciano $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ da função implícita z de x e y definida pela equação $z^3+3zx^2=axy$.

2259 — Determinar os máximos e mínimos da função $z=5x+3y$ condicionados pela equação $4\,\text{sen}\,x=3\cos y$ R: *As condições de estacionaridade são:*

$$\begin{cases}\varphi\equiv 4\,\text{sen}\,x-3\cos y=0\\ \dfrac{\partial(z,\varphi)}{\partial(x,y)}=5\,\text{sen}\,y-4\cos x=0,\end{cases}$$

donde $x=\text{arctg}\,(\pm 9/5\sqrt{7})$, $y=\text{arctg}\,(\pm\sqrt{7}/3)$.

2260 — Integrar a equação

$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$. R: *A equação proposta pode escrever-se* $d\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\,d\left(\frac{x}{y}\right)=0$ *ou* $d\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)+\frac{1}{1+(x/y)^2}\,d\,(x/y)=0$, *donde* $\sqrt{1+x^2+y^2}+\text{arctg}\,x/y=C$.

Soluções dos n.os 2259 e 2260 de Orlando Morbey Rodrigues.

F. C. P. — Análise Superior — **2.º exame de frequência — Maio de 1946.**

2261 — Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ pela teoria dos resíduos. R: *Integrando a função* $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ *ao* *longo do contôrno constituido pelo segmento* $(-R, +R)$ *do eixo* OX *e pela semi-circunferência de centro* O *e raio* R *(situada, por ex., na parte superior do eixo* OX) *e, seguidamente, fazendo crescer* R *além de todo limite, obtem-se, fàcilmente, para valor do integral* $\pi/6$.

2262 — Calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$ empregando a função $\Gamma(x)$. R: *Efectuando a mudança de variável* $\operatorname{sen}^2 x = t$, *encontra-se o integral euleriano* $B(2, 3)$. *O valor do integral é portanto* $\frac{\Gamma(2)\,\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{6}$.

2263 — Consideremos o integral $\int_0^2 \frac{dz}{2z+i}$. Calcular a diferença dos seus valores correspondentes aos dois caminhos seguintes: 1.º A espiral $\rho = \theta/\pi$, 2.º O eixo dos xx. R: *Uma aplicação imediata do teorema dos resíduos conduz ao resultado* $i\pi$.

Soluções dos n.os 2261 a 2263 de Laureano Barros

MECÂNICA RACIONAL

ALGER — Faculté des Sciences — Mécanique Rationelle **— Epreuve Théorique — Mai 1946**

2264 — On considère un disque D circulaire homogène de masse m de rayon a dont le plan est toujours horizontal. Une bille creuse de rayon b réduite à sa surface supposée infiniment mince et homogène, de même masse m, roule sans glisser sur le disque, qu'elle touche en un point I.

I — Le disque est assujetti à tourner avec une vitesse angulaire constante α autour de son centre qui est fixe. Introduisant les coordonnées du vecteur rotation de la bille sur des axes de direction fixe, écrire des équations définissant le mouvement de la bille. En déduire le mouvement du point I. Cas où la vitesse du centre de la bille est nulle à l'instant initial.

II — Le centre du disque étant toujours fixe, celui-ci tourne librement. Etablir un système d'équations définissant le mouvement du système. Démontrer que la trajectoire de I est située en général sur une conique dont un axe passe par O. Cette trajectoire peut-elle être rectiligne ?

III — Mêmes questions en supposant que le disque glisse sans frottement sur un plan horizontal P, et que le centre de gravité du système a une vitesse nulle à l'instant initial. Quelle est alors la courbe base du mouvement du disque par rapport au plan P ?

Note. On ne se préocupera pas des cas où I atteindrait la circonférence du disque. R: Notation: *Trièdre issu du centre* 0 *du disque. Centre de la bille* $C(x, y, b)$, *rotation* $\vec{\Omega}(p, q, r)$, *composante horizontale de la reaction du disque sur la bille* $\vec{R}_1(X, Y, 0)$, *angle de rotation du disque* θ.

Les théorèmes du centre de gravité et du moment cinétique s'écrivent

$$m\frac{\overrightarrow{d^2 I}}{dt^2} = \vec{R}_1, \quad \frac{2}{3} mb^2 \frac{\overrightarrow{d\Omega}}{dt} = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{R}_1 .$$

On en déduit $p = \frac{3}{2b} y' + B_1, \quad q = -\frac{3}{2b} x' + C_1$.

I — La condition de non-glissement s'écrit ($\vec{k}$ *vecteur unitaire vertical)* $\theta' \vec{k} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{V}_C + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI}$, *ou* $-\theta' y = x' - bq$, $\theta' x = y' + bp$, *d'où les équations*

(1) $\quad x' = -2/5 \cdot \theta' y + C, \quad y' = 2/5 \cdot \theta' x - B$,

qui, pour $\theta' = \alpha$ *constant, définissent un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire* $2\alpha/5$. *La vitesse initiale étant arbitraire, le centre et le rayon le sont aussi.*

II — Il faut adjoindre à (1) *l'équation du moment cinétique du disque* $\frac{ma^2}{2}\theta'' = yX - xY = m(yx'' - xy'')$, *ou* $\frac{a^2}{2}\theta' = yx' - xy' + D$, *ou en coordonnées polaires* r, φ

$$\frac{a^2}{2}\theta' = -r^2\varphi' + D .$$

(1) *donne alors les deux équations du mouvement de* I, *en choisissant la direction des axes pour que l'on ait* $B = 0$, *et en posant* $K^2 = \frac{5a^2}{4}$:

(2) $\quad r' = C\cos\varphi, \quad r(K^2 + r^2)\varphi' = Dr - CK^2 \sin\varphi$.

Posant $\sin\varphi = u$, *on en déduit, si* $C \neq 0$,

$$r(K^2 + r^2)\frac{du}{dr} = \frac{D}{C} r - K^2 u$$

d'où les coniques $\left(y + \frac{D}{C}\right)^2 = h^2(r^2 + K^2)$, h^2 *étant* *arbitraire. Si* $C=0$, (2) *donne* r *constant, cercle de centre* O. *Pour* $h=0$ *on obtient une droite.*

Le mouvement du disque (non demandé) est defini par

$$(3)\qquad \frac{a^2}{2}\theta' = \frac{-r^2\,(Dr-CK^2\sin\varphi)}{r\,(K^2+r^2)}+D=$$

$$=\frac{K^2\,(D+Cy)}{r^2+K^2}=\frac{K^2\,h^2\,C^2}{Cy+D}.$$

On voit que θ *varie toujours dans le même sens.*

III. Prenons comme origine la projection fixe y *du centre de gravité sur le plan du disque. Le non-glissement s'écrit* $\vec{V}_0+\theta'\,\vec{k}\wedge\vec{OI}=\vec{V}_I+\vec{\Omega}\wedge\vec{CI}$, *ou* $2\theta'\,\vec{k}\wedge\vec{gI}=$ $=2\vec{V}_I+\vec{\Omega}\wedge\vec{CI}$, *et les équations* (1) *sont valables en remplaçant* 2/5 *par* 4/7. *L'équation du moment cinétique du disque s'écrit*

$$\frac{ma^2}{2}\theta''=-\vec{OI}\wedge\vec{R}_1=2\,(yX-xY)\,.$$

On obtient encore les équations (2) *mais avec* $K^2=7a^2/16$, *et l'équation* (3) *avec* $\frac{a^2}{4}\theta'$ *au premier membre.*

Le centre instantané du disque est le point $P\,(x_1,y_1)$ *tel que* $\vec{V}_0+\theta'\,\vec{k}\wedge\vec{OP}=0$ *ou* $-x'-\theta'\,(y_1+y)=0$, $-y'+\theta'\,(x_1+x)=0$. D' *après* (1) *et* (3) *modifiée, on obtient*

$$x_1=\frac{y'}{\theta'}-x=\frac{4}{7}x-x=-\frac{3}{7}x,$$

$$y_1=-\frac{x'}{\theta'}-y=-\frac{3}{7}y-\frac{C}{\theta'}+\alpha y+\beta,$$

α *et* β *etant deux constantes. La base est donc une conique qui se déduit simplement du lieu de* I.

ALGER — Faculté des Sciences — MÉCANIQUE RATIONNELLE **— Epreuve Pratique — Mai 1946**

2265 — Une plaque carrée de coté $2b$ située dans un plan vertical fixe s'appuie sans frottement sur une droite horizontale fixe D. Son centre de gravité G est au centre du carré. La plaque est animée d'une rotation ω autour de son sommet A situé sur D au moment où il y a choc entre le côté AB et la droite D. Déterminer l'état des vitesses de la plaque après le choc. Le moment d'inertie de la plaque par raport à son centre doit-il vérifier une condition pour que les hypothèses suivantes n'entraînent pas contradiction? On admettra sucessivement:

1° que le contact subsiste entre le côté AB et la droite.

2° qu'il n'y a pas de perte d'energie cinétique au cours du choc et que l'un des points A ou B quitte la droite. On examinera les deux cas.

Ennoncés et solutions des n.os 2264 et 2265 de René de Possel.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2266 — Dividem-se os lados de um triângulo equilátero T em n partes iguais e pelos pontos de divisão tiram-se paralelas aos lados, cobrindo-se assim T por meio de triângulos equiláteros iguais, T_i. Mostre que a área do círculo inscrito no triângulo T é igual à soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos T_i.

2267 — Dados um ponto A, uma recta b, uma circunferência γ e um triângulo $[A'\,B'\,C']$, construa o triângulo $[A\,B\,C]$ semelhante a $[A', B', C']$ e tal que B pertença a b e C a γ.

2268 — Mostre que é condição necessária e suficiente para que um anel seja idempotente que se tenha $ab+ba=0$ para quaisquer a e b do anel.

2269 — Baseando-se no enunciado anterior prove que todo o anel idempotente é comutativo.

[Consultar o livro *Elementos da Teoria dos Aneis*, de A. Costa — C. E. M. P.].

2270 — Se um domínio D é limitado por um contôrno simples C e $\omega=f(z)$ é regular em D e sôbre C, mostre que, se $f(z)$ não toma valores iguais em dois pontos distintos de C, o mesmo acontecerá em D.

[Proposto em «*Functions of a complex variable*», E. G. Phillips, University Mathematical Texts].

2271 — Se $a > e$, mostrar que $e^z = az^n$ tem n raízes no interior do círculo $|z|=1$ (Aplicar o Teorema de Rouché).

[Proposto em «*Fonctions of a complex variable*», E. G. Phillips.]

2272 — Dada uma elipse (definida por exemplo, por dois diâmetros conjugados dados em grandeza e direcção) determinar, gràficamente, um diâmetro dessa elipse de comprimento dado. Condição de possibilidade.

Problemas n.os 2266 a 2272, propostos por Laureano Barros.

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2217 — Seja G um grupo, a e b dois quaisquer dos seus elementos e $\cdot$ a operação nele definida. Definamos em G a operação $\odot$ da seguinte maneira: $x \odot y = (x \cdot a) \cdot (y \cdot b)$ para quaisquer $x, y \in G$. Mostre que é condição necessária e suficiente para que: *a*) G constitua um grupo relativamente à operação $\odot$, que b seja um elemento do centro de G; *b*) G constitua um grupo abeliano relativamente à operação $\odot$, que a e b sejam elementos do centro de G; *c*) a operação $\odot$ coincida com a operação $\cdot$ que $a \cdot b$ seja o elemento unidade. R: a) A condição é necessária: *A associatividade da operação* $\odot$, $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$, *implica* $x \cdot a \cdot y \cdot b \cdot a \cdot z \cdot b = x \cdot a \cdot y \cdot a \cdot z \cdot b \cdot b$, *ou seja,* $b \cdot (a \cdot z) = (a \cdot z) \cdot b$, *qualquer que seja* z; *partanto* b *pertence ao centro de* G. A condição é suficiente: *Como as implicações anteriores são reversíveis, é verificada a associatividade da operação* $\odot$; *existe um elemento unidade,* $a^{-1} \cdot b^{-1}$, *pois* $x \odot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = x$, *qualquer que seja* x; *existe um elemento inverso de todo o elemento* x, $a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$, *pois* $x \odot (a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}) = a^{-1} \cdot b^{-1}$. b) *A igualdade* $x \odot y = y \odot x$ *implica* $(x \cdot a) \cdot y = y \cdot (a \cdot x)$, *que, em particular para* $y = u$ (*elemento unidade relativo à operação* $\cdot$), dá $x \cdot a = a \cdot x$, *quere dizer,* a *pertence ao centro de* G. *A* condição é, *pois,* necessária; não é, *porem,* suficiente, *como se afirma no enunciado.* c) *Supondo* b *pertencente ao centro de* G, *a igualdade* $x \odot y = x \cdot y$, *para quaisquer* $x, y \in G$, *implica* $a \cdot b = u$ *e recìprocamente.*

A redacção desta solução foi baseada nas soluções enviadas por A. Andrade Guimarães (Pôrto) e J. Tiago de Oliveira (Pôrto).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

53 — GREEN, S. L. — **Introduction to differential equations.** London, University Tutorial Press, Ltd., 1945.

O presente trabalho é um tratado elementar sôbre equações diferenciais, dirigido notòriamente no sentido de dar aos leitores um treino completo na resolução daquelas equações.

Com esta orientação, o fulcro dêste livro é uma excelente colecção de exercícios, bem graduados e com a indicação das soluções.

O capítulo sôbre a integração por séries (cap. VIII) atingiu, no género de clareza elementar que o Autor imprimiu a todo o volume, a melhor exposição que conhecemos sôbre o assunto.

Só é de lamentar que a resolução dos sistemas de equações (que só esporàdicamente aflora) e o estudo de equações diferenciais, de ordem superior e coeficientes variáveis, não tenham merecido do Autor notícia mais detalhada.

Apesar disso, parece-nos que, estando êste livro escrito de maneira extrêmamente clara, e sendo acessível a todos os nossos alunos universitários, pode prestar-lhes grandes serviços.

Luís Albuquerque

—**54** GEARY, A., LOWRY, H. V., and HAYDEN, H. A. — **Advanced Mathematics for Technical Students** — Part I — Longmans, Green and Co. — London, New York, Toronto, 1945.

A obra, como o título indica, é dedicada aos estudantes das escolas técnicas, especialmente de engenharia. É abundantemente ilustrada com claras gravuras e os assuntos mais importantes são seguidos de exemplos completamente tratados e de numerosos exercícios propostos cujas soluções se encontram no fim do volume. Abrange 12 capítulos que compreendem elementos de análise infinitesimal (infinitésimos, séries, derivação, primitivação, cálculo de integrais definidos, equações diferenciais ordinárias, etc.), as suas principais aplicações à geometria plana (destacando-se o estudo das cónicas), números complexos (de que se tratam em seguida as aplicações na teoria das correntes alternas), resolução numérica de equações algébricas, diferenciação e integração aproximadas, etc. Termina com um capítulo onde se estudam sob forma vectorial, alguns elementos de Mecânica.

É sobretudo de destacar a apresentação de numerosas aplicações sobretudo à Mecânica e Electricidade. É esta uma feição característica do livro que o recomenda especialmente a quem interesse a matemática sobretudo como instrumento de aplicação.

Anuncia-se a 2.ª parte da obra que abrangerá o estudo das funções de mais de uma variável, integrais múltiplos, curvilíneos e de superfície, séries de Fourier, determinantes, geometria analítica no espaço, trigonometria esférica, equações diferenciais, incluindo alguns tipos simples de equações às derivadas parciais e aplicações à Mecânica, Electricidade e Termodinâmica.

Manuel Zaluar Nunes

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES DE MATEMÁTICA

NACIONAIS

Portugaliae Mathematica — Vol. 5, Fasc. 1-2:

A. Pereira Gomes — *Introdução ao estudo de uma noção de funcional em espaços sem pontos.*

Maurice Fréchet — *De l'écart numérique à l'écart abstrait.*

A. de Mira Fernandes — *Funzioni continue soprà una superficie sferica.*

J. Vicente Gonçalves — *Le théorème de M. S. Bernstein.*

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise geral:

N.º 19. «*Teoria das Estruturas e Problemas dos Fundamentos*» — 1 — *Problemas introdutórios à teoria das estruturas.* Caderno organizado por H. Ribeiro e M. Zaluar. I — «*Que é uma estrutura ?*» por Garrett Birkhoff, II — «*Que é um quadriculado ?*» por H. Ribeiro, III — «*Primeira orientação bibliográfica e histórica*», por H. Ribeiro, IV — «*Notícia sôbre a definição dos anéis de Boole*», por H. Ribeiro.

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Ano XVIII, n.º 10; Ano XIX, n.ºs 1 e 3.

Revista de la Unión Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Volume XI, n.º 3.

França

Annales de l'Université de Lyon — Section A: — Sciences Mathématiques et Astronomie — VIII, 1945.

Bulletin de la Société Mathématique de France — (Paris) — Tomo 73, fascs. 1 e 2 — 1945.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sujets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tome 1, fascs. 3 e 4 — 1945, Tomo 2, Fascs. 4, 5 e 6 — 1946.

Inglaterra

The Journal of the London Mathematical Society — Vol 20, Partes 1, 2 e 3 — 1945.

The Mathematical Gazette — (London) Vol. 30, n.º 289 — 1946.

The Quarterly Journal of Mathematics — Oxford Séries — Vol 17. n.º 66 — 1946.

OUTRAS PUBLICAÇÕES

Afinidades — (Lisboa) — Revista de Cultura Luso-Francesa — n.ºs 17/18 — 1946.

Portugaliae Physica — Vol. 2, fasc. 1:

António Gião — *Le problème cosmologique généralisé et la mécanique ondulatoire relativiste.*

J. L. Rodrigues Martins — *L'influence des forces de Schwinger sur des processus nucléaires.*

Rodrigo Sarmento de Beires — *Sur l'expression* $\lambda = h/mv$ *de la longeur des ondes de De Broglie associées aux corpuscules en mouvement.*

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºs 162, 164, 165, 166 e 167 — 1946.

Revista Politécnica — (São Paulo) — n.º 148 — 1945

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones. Tomo VI, n.ºs 59, 60, 61, 62 e 63 — 1946.

Biometrika — (London) — A journal for the statistical study of biological problems — Vol. 33, parte 4, — 1946. (Oferta do British Council).

Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas — (Habana-Cuba) — Vol. 2, n.º 2 — 1945.

INTERMÉDIARE DES RECHERCHES MATHÉMATIQUES

55, Rue de Varenne, Paris 7e

reprend, avec un dynamisme nouveau les buts suivants :

Renseigner; faciliter les **contacts** entre les chercheurs; leur signaler les problèmes mathématiques non résolus.

Son **Centre de Documentation** mathématique, largement ouvert aux chercheurs, à recueilli d'importantes archives.

Preço de assinatura anual (4 números) . . . . 100$00

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática 75$00

Para efeito de assinatura em Portugal, dirigir-se a

Prof. Manuel Zaluar **Rua de Serpa Pinto, 17, 4.º-Esq. — LISBOA**

«EUCLIDES»

Revista de ciências matemáticas, físicas, químicas e naturais

REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO: **ANTÓNIO MAURA, 7 — MADRID**

Para efeitos de assinatura em Portugal, dirigir-se a

Administrador da «Gazeta de Matemática» R. Almirante Barroso, 20, r/c—LISBOA-N.

PORTUGALIAE MATHEMATICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL EDITADA POR A. MONTEIRO

É a única revista portuguesa que publica exclusivamente trabalhos originais de Matemática

Preço dos volumes já publicados

Volume 1 — 300$00; Volumes 2, 3 e 4 — 250$00 cada

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática:

Volume 1 — 200$00; cada um dos volumes seguintos: 150$00

Assinatura do volume 5: 150$00, e para os sócios da S. P. M. 50$00

OS ANÚNCIOS DÊSTE NÚMERO NÃO SÃO PAGOS

GAZETA DE MATEMÁTICA

AOS ASSINANTES

CONDIÇÕES DE ASSINATURA E DE AQUISIÇÃO DE NÚMEROS AVULSO

Prêço de assinatura anual de quatro números	30$00
Prêço de capa por cada número	10$00
Prêço de capa do n.º 22, extraordinário (Matemáticas Elementares e Exames de Aptidão)	10$00
A aquisição dêste número pelos assinantes é feita a Esc.	8$00

NÚMEROS ATRAZADOS

O pequeno número de colecções completas, ainda existente, destina-se exclusivamente às Bibliotecas de Escolas e dalguns Estabelecimentos Oficiais sendo a sua aquisição feita ao prêço de Esc. 250$ (colecção dos 22 primeiros números). Ao público serão vendidos avulso os números ainda não esgotados (3, 12 a 26), ao prêço de capa.

•

Reedição do ano 1 da «Gazeta de Matemática» n.ºs 1 a 4

Está em composição o vol. 1 da *Gazeta de Matemática* que compreenderá os 4 primeiros números já esgotados. Aquêles que se inscrevam antes da sua publicação, que terá lugar possìvelmente em Outubro de 1946, beneficiarão do prêço especial de 30$00. O vol. 1 deve ser vendido ao público por 35$00 ou 40$00.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o futuro melhoramento duma revista que não constitui, de modo algum, um empreedimento comercial

TRÊS REVISTAS PORTUGUESAS DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

PORTUGALIAE MATHEMATICA

PORTUGALIAE PHYSICA

PORTUGALIAE ACTA BIOLOGICA

Que publicam exclusivamente originais de Matemática, Física e Biologia