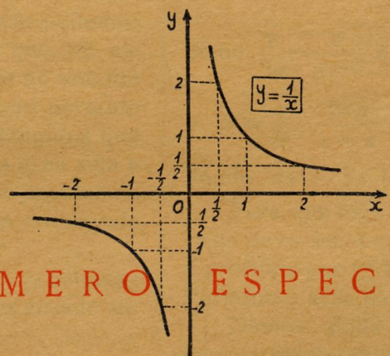
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CANDIDATOS AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

A. MONTEIRO, B. CARAÇA, H. RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR

ANO I **Nº 3** JUNHO - 1940



NÚMERO ESPECIAL

180 PROBLEMAS SAÍDOS NOS EXAMES DE APTIDÃO DE 1939

COM AS RESPECTIVAS RESOLUÇÕES

PREÇO DÊSTE NÚMERO 6$50

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

26-06-71

1.º ANO - N.º 3

GAZETA DE MATEMÁTICA

JUNHO DE 1940

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

Aplicação das propriedades do trinómio do 2.º grau à determinação de alguns problemas de Máximos e Mínimos

O estudo das propriedades do trinómio do 2.º grau fornece matéria para a resolução de muitos problemas quer de álgebra quer de geometria entre os quais problemas de máximos e mínimos do tipo dos que têm sido propostos nos exames de aptidão ao Instituto Superior Técnico.

Como geralmente o assunto não é tratado nos liceus, exporemos aqui o caminho a seguir para a resolução de tais problemas, aplicando simplesmente conhecimentos adquiridos na 7.ª classe dos liceus.

Suponhamos que se pretende resolver o seguinte problema: *Dado um circulo de raio igual a 5 inscrever nêle um rectângulo de área igual a 48*.

Se forem x e y os lados do rectângulo, as equações que resolvem o problema são: $xy=48$ e $x^2+y^2=(2.5)^2$. Se multiplicarmos ambos os membros da primeira equação por 2, e lhe adicionarmos ordenadamente a segunda, obtém-se o sistema equivalente: $xy=48$ e $x+y=\sqrt{100+96}$. Êste sistema é ainda equivalente à equação $X^2-14X+48=0$ cujas soluções são $x=6$ e $y=8$. É evidente que não podemos dar arbitràriamente a área do rectângulo, pois que, se ela pode ser tão pequena quanto se quizer, não pode no entanto ultrapassar, por exemplo, a área do círculo. Poderá portanto acontecer, e acontece, que dentre todos os rectângulos que podem inscrever-se no círculo dado haja um cuja área seja a maior de tôdas. Procuremos então resolver êste problema: *Dado um circulo de raio* R *inscrever nêle um rectângulo cuja área seja máxima.*

Começamos por pôr em equação o seguinte problema: determinar um rectângulo de área S inscrito num circulo de raio R.

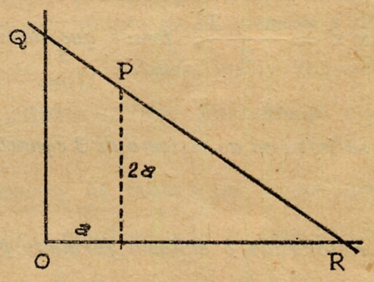
Duma maneira análoga à precedente somos conduzidos a resolver a equação $X^2-\sqrt{4R^2+2S}\,X+S=0$, cujas soluções são os lados x e y do rectângulo procurado. O problema terá ou não soluções conforme os valores de S. Exprimindo que as soluções desta equação são reais tem-se a limitação procurada. Com efeito, para que esta equação tenha soluções reais, é necessário e suficiente que o descriminante seja positivo ou nulo, isto é, $\Delta=4R^2+2S-4S\geq 0$ donde se tira $S\leq 2R^2$. Quere dizer S não pode exceder $2R^2$ e o máximo valor que S pode ter é $2R^2$. Neste caso $\Delta=0$ e portanto $x=y=R\sqrt{2}$. Vê-se assim que o rectângulo de área máxima é o quadrado inscrito no círculo de raio R. Fica pois determinado o máximo valor que pode tomar a área do rectângulo.

É êste o método que devemos empregar na resolução de problemas dêste género e que consiste em determinar as equações do problema de modo a sermos conduzidos a uma equação do 2.º grau (no caso em que isso é possível) e procurar as condições para que a equação tenha soluções reais; estas condições fornecem-nos as limitações que dão os valores procurados.

Vejamos outro exemplo: *É dado um ponto* P *às distâncias* a *e* 2a *dos dois lados de um ângulo recto, e dada uma recta qualquer passando por* P; *mostrar que a área do triângulo compreendido entre a recta e os lados do ângulo nunca pode ser inferior a* 4a².

(Exame de aptidão ao I. S. T. — Ponto modêlo)

Na figura vê-se que o triângulo cuja área pretende determinar-se é QOR. Seja $OR=x$ e $OQ=y$. Será então a área $S=\frac{1}{2}xy$ e como $\frac{y}{2a}=\frac{x}{x-a}$ é $y=\frac{2ax}{x-a}$ e $S=\frac{x}{2}\cdot\frac{2ax}{x-a}=\frac{ax^2}{x-a}$ donde $ax^2-Sx+aS=0$.



Para que haja soluções reais deve ser $\Delta=S^2-4a^2S\geq 0$ ou $S(S-4a^2)\geq 0$ e como S é positivo, por se tratar duma área, será $S-4a^2\geq 0$ e $S\geq 4a^2$. Portanto a área será sempre maior e no *mínimo* igual a $4a^2$.

Dêmos ainda exemplos dum outro tipo de problemas que se resolvem pelo mesmo processo. Seja o seguinte problema: *¿Qual é o menor valor que pode tomar a expressão* $3x^2-8x+7$ *quando se atribue a* x *valores reais?* Seja K o valor do trinómio, é então $3x^2-8x+7=K$ ou $3x^2-8x+7-K=0$. A condição para que as soluções desta equação sejam reais é $\Delta=64-12(7-K)\geq 0$ ou $K\geq\frac{5}{3}$ quere dizer, o trinómio toma sempre valores superiores e no *mínimo* é igual a $\frac{5}{3}$, valor que corresponde a $x=\frac{4}{3}$.

Vejamos outro exemplo: *Determinar o máximo e o mínimo de* $\frac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$. Como o numerador e o denominador têm raízes complexas, são sempre positivos para valores reais de x e então fazendo a fracção igual a K, desembaraçando de denominador e simplificando vem $(2-K)x^2+(3-K)x+(2-K)=0$.

A condição para que as soluções sejam reais é $3K^2-10K+7\leq 0$; como êste trinómio tem as raízes -1 e $\frac{7}{3}$, aquela condição é verificada para $K\leq\frac{7}{3}$ e então $K=\frac{7}{3}$ é um *máximo;* ou para $K\geq -1$ e $K=-1$ é um *mínimo.*

Damos a seguir o enunciado de alguns problemas que podem resolver-se por êste processo.

I — Mostrar que o perímetro $2p$ de um rectângulo inscrito num círculo de raio R não pode exceder $4R\sqrt{2}$.

II — Mostrar que o produto de dois números positivos, cuja soma é constante, é máximo quando os dois números forem iguais.

III — Mostrar que a soma de dois números positivos, cujo produto é constante, é mínima quando os números forem iguais.

IV — De todos os triângulos rectângulos com o mesmo perímetro $2p$, qual é aquêle cuja superfície m^2 é máxima? E de todos os triângulos rectângulos cuja área é constante qual é o de perímetro mínimo?

V — Qual é o maior rectângulo que se pode inscrever num quadrado dado?

VI — Determinar os máximos e mínimos de $\frac{x^2-6x-1}{x^2+2x+3}$.

J. SILVA PAULO

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ANO DE 1939

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

I

213 — ¿Para que valores de m diferem duma unidade as raízes da equação $2x^2-(m^2+1)x+m^2+3=0$. *Sejam* x' *e* x'' *as raízes da equação dada. Trata-se de determinar* m *de tal maneira que* $x'-x''=1$. *Como a equação dada é equivalente ao sistema de duas equações:* $x'+x''=\frac{m^2+1}{2}$, $x'x''=\frac{m^2+3}{2}$, *temos que determinar os valores de* m *que satisfazem ao sistema de 3 equações*

$$\begin{cases} x'-x''=1 \\ x'+x''=\dfrac{m^2+1}{2} \\ x'x''=\dfrac{m^2+3}{2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações em ordem a x' *e* x'' *acha-se:* $x'=\frac{m^2+3}{4}$ *e* $x''=\frac{m^2-1}{4}$; *valores que substituidos na 3.ª equação nos conduzem à equação do 4.º grau em* m: $(m^2+3)(m^2-1)=8(m^2+3)$, *cujas soluções são* $m=\pm\sqrt{-3}$ *e* $m=\pm 3$, *valores que substituidos na equação dada conduzem às equações* $2x^2-10x+12=0$ *e* $x^2+x=0$. *Em vez da equação* $x'-x''=1$ *podiamos ter considerado a equação* $x'-x''=-1$, *mas como é fácil de ver o resultado obtido seria o mesmo.*

214 — Defina arranjos e permutações.

215 — Aplique a fórmula do binómio de Newton ao desenvolvimento de $(x-1)^4$. *Temos* $(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

216 — Dados o cateto $c=216^m,7$ dum triângulo rectângulo e o ângulo $B=36°\,27'\,14''$, que se opõe ao outro cateto, calcule por logaritmos o comprimento da hipotenusa a do triângulo. *Como* $c=a\cos B$ *tem-se* $a=\frac{c}{\cos B}$ *e portanto* $\log a=\log c+\operatorname{colog}\cos B$. *Vê-se pelas tábuas que* $\log c=2{,}33586$, $\log\cos B=\bar{1}{,}90537$ *e portanto* $\log a=2{,}33586+0{,}09463=2{,}43049$, *dande se tira ainda pelas tábuas que* $a=269^m,5$.

217 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $x=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e $y=\operatorname{tg}495°$. *Será* $x=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(basta notar que* $\cos 45°$ *é igual a metade do lado do quadrado inscrito num circulo de raio* 1). $y=\operatorname{tg}495°=\operatorname{tg}(360°+135°)=\operatorname{tg}(135°)=-\operatorname{tg}45°=-1$, *visto que* $\cos 45°=\operatorname{sen}45°$.

218 — Sabendo que o lado do triângulo eqüilátero inscrito na circunferência de raio r tem por comprimento $r\sqrt{3}$, deduza do círculo trigonométrico o valor de $\operatorname{sen}60°$. *Como se sabe o circulo trigonométrico é um circulo de raio* $OA=1$. *Se* MM' *fôr o lado do triângulo inscrito neste circulo será* $MM'=\sqrt{3}$. *Como o ângulo* $\widehat{MOM'}=120°$, *traçando a perpendicular* OA *a* MM', será $\widehat{MOA}=60°$ *e* $\operatorname{sen}60°=\frac{MM'}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

219 — Demonstre que se duas secantes se cruzam no ponto de contacto de duas circunferências tangentes, as cordas que unem os pontos em que as secantes encontram cada uma das circunferências são paralelas. *Consideremos duas circunferências tangentes em* O, *seja* TT' *a tangente comum,* AA' *e* BB' *as duas secantes a que se refere o enunciado. Para provar que as cordas* AB *e* $A'B'$ *são paralelas basta provar que os ângulos* $B'\widehat{A'}O$ *e* $\widehat{BAO}$ *são iguais. Ora* $\widehat{BAO}=\widehat{BOT}$ *visto que* $\widehat{BAO}$ *está inscrito no arco* $\widehat{OB}$ *e que* $\widehat{BOT}$ *é um ângulo dum segmento que tem por medida metade da medida de* $\widehat{OB}$. *Do mesmo modo se vê que:* $B'\widehat{A'}O=B'\widehat{OT'}$. *Como* $\widehat{BOT}=B'\widehat{OT'}$ *porque se trata de dois ângulos verticalmente opostos, têm-se* $\widehat{BAO}=B'\widehat{A'}O$ *c. q. d.*

220 — Calcule pelo método das divisões sucessivas e por decomposição em factores primos o máximo divisor comum dos dois números 162 e 14. *Como* $162=2\times 3^4$ *e* $14=2\times 7$ *será* m. d. c. $=2$.

II

221 — Determine m de modo que a equação $(m-5)x^4-4mx^2+m-2=0$ tenha tôdas as raízes reais. *O problema é o de determinar* m, *real, de forma que ambas as raízes da equação* $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ *sejam positivas ou nulas. Deve pois exprimir-se que estas raízes são reais, que o seu produto é positivo ou nulo e que a sua soma é positiva ou nula. Obtêm-se, então, as condições seguintes:* $3m^2+7m-10\geq 0$, $\frac{m-2}{m-5}\geq 0$, $\frac{4m}{m-5}\geq 0$. *Os números que satisfazem à primeira condição são os não superiores a* $-\frac{10}{5}$ *e, também, os não inferiores a* 1. *Os que satisfazem à segunda são os não superiores a* 2, *e os superiores a* 5. *Os que satisfazem à terceira são* 0, *todos os negativos e, também, todos os maiores do que* 5. *Os números que satisfazem às 3 condições são, pois, os não superiores a* $-\frac{10}{3}$ *e os maiores do que* 5.

222 — O número de combinações de n objectos tomados 2 a 2 é triplo do número de combinações dos mesmos n objectos tomados 3 a 3. Calcule n. *O enunciado traduz-se por* $\frac{3n(n-1)}{6}=\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ *donde resulta* $n-2=1$, *e, portanto* $n=3$.

223 — Enuncie os teoremas que usa no cálculo dos logarítmos dos produtos, cocientes, potências e radicais.

224 — Dados a hipotenusa $a=257^m,1$ e um cateto $b=192^m,3$ dum triângulo rectângulo, calcule por logaritmos o valor do ângulo B que se opõe ao lado b. *Como* $\operatorname{sen}\widehat{B}=\frac{b}{a}$ *é* $\log\operatorname{sen}\widehat{B}=\log b+\operatorname{colog} a=2,28398+\bar{3},58990=\bar{1},87388$ *donde* $\widehat{B}=48^\circ\,24'\,50''$.

225 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $x=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ e $y=\operatorname{cosec}(-420^\circ)$. *Tem-se*

$$x=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e $y=\operatorname{cosec}(-420^\circ)=-\operatorname{cosec}420^\circ=-\operatorname{cosec}60^\circ=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

226 — Deduza da igualdade $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, a igualdade $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a}{\cos\varphi}$. *De* $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$ *resulta sucessivamente,*

$$b=a\operatorname{tg}\varphi,\ b^2=a^2\operatorname{tg}^2\varphi,\ a^2+b^2=a^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=a^2\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=$$

$$=a^2\frac{\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{a^2}{\cos^2\varphi},\quad \textit{donde,}\quad \pm\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a}{\cos\varphi}.$$

227 — *a)* Prolongando os lados AB, BC, CD .... dum polígono fechado convexo de n lados nos sentidos de A para para B, de B para C, etc., obtêm-se n ângulos externos do polígono. Demonstre que, a soma dos n ângulos externos é igual a 4 rectos, qualquer que seja o valor de n. *Sabe-se que a soma dos* n *ângulos internos dum polígono fechado, convexo de* n *lados é* $2n-4$ *rectos. Ora cada ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente. A soma dos ângulos externos considerados é, pois, a diferença entre* $2n$ *rectos e* $2n-4$ *rectos; e é, então, 4 rectos como queria provar-se.*

228 — ¿Quantos divisores tem o número 120? Indique os números que são êsses divisores. *A decomposição de* 120 *em factores primos é dada por* $120=2^3.3.5$. *O número dos seus divisores é, pois,* $(3+1).(1+1).1+1)=16$. *Os divisores são as parcelas do desenvolvimento de* $(2+1)(2+1)(2+1)\times(3+1)(5+1)$, *isto é,* 1 *e* 120, 2 *e* 60, 3 *e* 40, 4 *e* 30, 5 *e* 24, 6 *e* 20, 8 *e* 15, 10 *e* 12 *(cada divisor é seguido do seu complementar).*

III

229 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $3x+4y=26$. *As soluções pedidas são duas:* $x=6$, $y=2$ e $x=2$, $y=5$.

230 — *a)* Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação: $ax^2+bx+c=0$ supondo $a>0$, para que as raízes sejam reais e positivas *As condições são* 1.ª) $b^2-4ac\geq 0$, 2.ª) $x'x''=\frac{c}{a}>0$ 3.ª) $x'+x''=-\frac{b}{a}>0$. *Como* $a>0$ *as duas últimas condições tomam a forma* $c>0$ *e* $b<0$.

b) Classifique as funções:

$$y=\sqrt{2}\,x^3+x-1,\quad y=\frac{2\cos x}{x-1}+6,\quad y=(x-1)^{1/3}-7.$$

A segunda função é transcendente; as outras duas são algébricas, a primeira é um polinómio inteiro, a última uma função irracional.

231 — Dados o cateto $b=326m,4$ de um triângulo rectângulo e o ângulo $B=38^\circ 16' 57''$ que se opõe a êsse cateto, calcule, por logaritmos, o comprimento da hipotenusa a do triângulo. *Sabe-se que é* $a=\frac{b}{\operatorname{sen}B}$, *donde* $\log a=\log b+\operatorname{colog}\operatorname{sen}B=2,51375+0,20793=2,72168$. *Portanto é* $a=526m,8$.

232 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de $x=\operatorname{sen}390^\circ$ $y=\operatorname{cotg}\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$. $x=\operatorname{sen}390^\circ=\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}$; $y=\operatorname{cotg}\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\operatorname{cotg}\frac{5}{4}\pi=-\operatorname{cotg}\left(\frac{5}{4}\pi-\pi\right)=-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}=-1$.

233 — Verifique que: $\sec^2x+\operatorname{cosec}^2x=\sec^2x\operatorname{cosec}^2x$.

$$\sec^2x+\operatorname{cosec}^2x=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}=\frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}{\cos^2x\,.\operatorname{sen}^2x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2x\,.\operatorname{sen}^2x}=\operatorname{cosec}^2x\,.\sec^2x.$$

Nota. *Quando* u *e* v *são tais que satisfazem a* $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1$, *então verificam ainda* $u+v=uv$ *(como se vê efectuando a adição atrás indicada). Ora* $\sec^2x$ *e* cosec^2x *estão nas condições enunciadas para* u *e* v.

234 — Demonstre que o recíproco do quadrado da altura de um triângulo rectângulo (contada sôbre a perpendicular à hipotenusa) é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos. *A altura decompõe o triângulo dado em dois triângulos que lhe são semelhantes. Designemos por* b *e* c, a, h *respectivamente as medidas dos catetos, da hipotenusa, e da altura, e exprimamos que, para um qualquer dos triângulos da decomposição e para o triângulo dado, os lados homólogos na semelhança são proporcionais. Obter-se-á:* $\frac{1}{h}=\frac{a}{bc}$, *donde* $\frac{1}{h^2}=\frac{a^2}{b^2c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$ *c. q. d.*

235 — Demonstre que o produto de dois números pares consecutivos é divisível por 8. *De dois números pares consecutivos um é divisível por* 4 *e, portanto, da forma* 4.m *(com* m *inteiro) ao passo que o outro é da forma* 2.n *(com* n *inteiro). O produto,* 8.m.n, *é, portanto, divisível por* 8.

IV

O ponto n.º 4 tem os seus enunciados no n.º 2 da «Gazeta» e compreende os exercícios n.os 125 a 127 inclusivè As soluções são:

125 a — $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5=32x^2\sqrt{x}+\frac{80x^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{80x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}+ +40+\frac{10\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$.

125 c — $x=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{16-16}}=\pm 2$.

126 a — *Como* $c=a\cos B$ *vem* $\log c=\log 839{,}2+ +\log\cos 40^o27'32''=2{,}92387+\bar{1}{,}88131=2{,}80518$ *logo* $c=638{,}5m$.

126 b — $x=\operatorname{sen}405^o=\operatorname{sen}(360^o+45^o)=\operatorname{sen}45^o= =\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $y=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

127 — *Como um triângulo rectângulo pode ser sempre inscrito numa circunferência de que a hipotenusa é o diâmetro, a mediana relativa à hipotenusa é um raio da circunferência e portanto igual a metade do diâmetro.*

V

236 — Determine α de modo que o trinómio
$$x^2-(8\alpha-2)x+15\alpha^2-2\alpha-7$$
seja positivo qualquer que seja o valor real dado a x. *Nestas condições as raízes do trinómio devem ser números complexos, o que se exprime por* $(4\alpha-1)^2-15\alpha^2+2\alpha+7<0$ *ou* $\alpha^2-6\alpha+8<0$. *Ora, as raízes da equação* $\alpha^2-6\alpha+8=0$ *são* 2 *e* 4. *As soluções do problema são, pois, dadas por* $2<\alpha<4$.

237 — Estabeleça a relação que existe entre o número ${}^nC_p$ de combinações de n objectos tomados p a p e o número ${}^nC_{p-2}$ de combinações de n objectos tomados $p-2$ a $p-2$. ${}^nC_p={}^nC_{p-2}\frac{(n-p+2)(n-p+1)}{p(p-1)}$.

238 — Forme a equação do 2.º grau cujas raízes são: $x'=2$, $x''=-1$. *O produto das raízes é* -2 *e a soma é* 1. *A equação pedida é, portanto,* $x^2-x-2=0$.

239 — Dados os catetos $b=524m{,}7$ e $c=321m{,}2$ de um triângulo rectângulo, calcule, por logaritmos, o valor do ângulo C que se opõe ao cateto c. *É* $\operatorname{tg}C=\frac{c}{b}$ *e, portanto,* $\log\operatorname{tg}C=\log c+\operatorname{colog}b=2{,}50678+\bar{3}{,}28009=\bar{1}{,}78687$, *donde* $C=31^o28'24''$.

240 — Calcule, sem recorrer às tábuas de logaritmos, os valores de: $x=\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\cos 750^o$. *Então* $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}$, *donde* $x=-\sqrt{2}.\cos 750^o=\cos(2.360^o+30^o)=\cos 30^o= =+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 30^o}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, *donde* $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

241 — Indique quais os valores de y que satisfazem à seguinte condição: $\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}20^o$. *Temos* $y=20^o+n180^o$ (n inteiro).

242 — Demonstre que se duas circunferências se cortam e se dos centros de cada uma delas se tirarem perpendiculares sôbre uma secante que passa por um dos pontos comuns às duas circunferências, a distância entre essas perpendiculares é a semi-soma ou a semi-diferença das cordas interseptadas sôbre as circunferências pela secante considerada. *Deve recordar-se que os pés das perpendiculares consideradas são os pontos médios das cordas que a secante determina nas circunferências correspondentes. É, então, fácil de verificar que a distância dêsses pontos médios é a semi-diferença das cordas quando o ponto comum às circunferências por onde passa a secante é extrêmo das cordas; e que essa distância é a semi-soma em todos os outros casos.*

243 — Determine o resto da divisão por 9 do número $3574928^4+37865^2-3691$. *O resto pedido é* 1.

O ponto VI está resolvido no n.º 2 da «Gazeta» e compreende os exercícios n.os 122 a 124 inclusivè.

Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

I

O Ponto I tem o seu enunciado no n.º 2 da «Gazeta» e compõe-se dos exercícios n.os 118 a 121 inclusivé. Os resultados são:

118 a — *Sejam* x, y *e* z *os algarismos do número; então as equações que resolvem o problema são:* $x=2y+2$; $y=z-3$ *e* $x+y+z=9$, *donde* $x=4$, $y=1$ *e* $z=4$. *O número é* 414.

118 b — *Os coeficientes dos 3.os termos dos desenvolvimentos dos binómios são iguais a* ${}^6C_2$, *logo a sua razão é igual a* 1, *e a sua soma* $2\,{}^6C_2=30$.

118 c — *A desigualdade é equivalente a* $\frac{x^2-ax-6a^2}{x^2-a^2}>0$. *Para que a fracção seja positiva é necessário que ambos os termos sejam positivos ou ambos negativos. Como as raízes do* *numerador são* $x' = 3a$ *e* $x'' = -2a$, *e as do denominador* $x = \pm a$, *o numerador é positivo para* $x < -2a$ *ou* $x > 3a$ *e o denominador para* $x < -a$ *ou* $x > a$, *e neste caso a fracção é positiva para* $x < -2a$ *ou* $x > 3a$. *Sendo o numerador negativo para* $-2a < x < 3a$ *e o denominador para* $-a < x < a$ *a fracção será positiva para* $a - < x < a$. *Nesta análise supõe-se* $a > 0$.

119 a — *Sendo* h *a altura esta é dada por* $h = a \operatorname{sen} \alpha$ *e a área será* $A = b \times h = 12{,}25 \times 7{,}30 \times \operatorname{sen} 61^\circ 27' 33''$ *e* $\log A = \log 12{,}25 + \log 7{,}30 + \log \operatorname{sen} 61^\circ 27' 33'' = 1{,}08814 + 0{,}86332 + \bar{1}{,}94372 = 1{,}89518$ *donde* $A = 78{,}55 m^2$.

119 b — *Note-se que:* $\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 a) \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha$. *Substituindo na igualdade a verificar esta transforma-se numa identidade.*

120 — *Sejam* [ABC] *o triângulo e* O *a circunferência dada. Constrói-se a circunferência* O' *circunscrita ao triângulo dado. Determina-se um dos centros das homotecias que transformam uma na outra as circunferências* O *e* O', *por exemplo no caso das circunferências serem exteriores uma à outra, o determinado pelas tangentes comuns internas, e determina-se o triângulo homotético do triângulo dado nesta homotecia.*

121 — *Sejam* a *e* b *os números então* $a = (b - a) q + r$ *e* $b = (b - a) q' + r'$ *e por subtracção ordenada* $b - a = (b - a)(q' - q) + r' - r$ *onde terá que ser necessàriamente* $r' - r = 0$ *ou* $r = r'$.

II

244 — Encontrar os dois menores números positivos múltiplos, respectivamente de 25 e 13, cuja diferença seja 357. *Sejam* $25x$ *e* $13y$ *êsses múltiplos então* $25x - 13y = 357$ *equação cujas soluções, em números inteiros, são* $x = -6 + 13u$ *e* $y = -39 + 25u$; *o menor valor de* u *para o qual* x *e* y *são positivos é* $u = 2$ *donde* $x = 20$, $y = 11$ *e os números pedidos serão* 500 *e* 143.

245 — ¿Qual o número de permutações de n objectos de que se sabe que o número de arranjos 3 a 3 é 120?
${}^nA_3 = n(n-1)(n-2) = 120$ *e os três inteiros consecutivos cujo produto é* 120 *são* 6,5,4, *como se vê pela decomposição de* 120 *em factores primos; logo* $n = 6$ *e então será* $P_6 = 1.2.3.4.5.6 = 720$.

246 — Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ formar a equação cujas raízes sejam as desta aumentadas duma quantidade m. *Se forem* x_1 e x_2 *as raizes da equação dada é* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *e* $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; *as raizes da equação pedida serão* $x_1 + m$ *e* $x_2 + m$, *e é então* $x_1 + m + x_2 + m = -\frac{b}{a} + 2m$ *e* $(x_1 + m)(x_2 + m) = \frac{c}{a} + m^2 + (x_1 + x_2) m = m^2 - \frac{b}{a} m + \frac{c}{a}$. *A equação pedida é então* $X^2 - \left(\frac{2am - b}{a}\right) X + \frac{am^2 - bm + c}{a} = 0$ *ou* $aX^2 - (2am - b) X + (am^2 - bm + c) = 0$.

247 — Calcular por logaritmos a área do triângulo equilátero inscrito no círculo de raio igual a 7 metros. *O lado do triângulo é* $l_3 = 7\sqrt{3}$ *e a altura* $h = \frac{21}{2}$ *a área do triângulo é* $A = \frac{147\sqrt{3}}{4}$ *e* $\log A = \log 147 + \operatorname{colog} 4 + \frac{1}{2} \log 3 = 2{,}16732 + \bar{1}{,}39794 + 0{,}23856 = 1{,}80382$ *e* $A = 63{,}65 m^2$.

248 — Demonstrar que $\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{sen}(45^\circ - \alpha)$. *O segundo membro é igual a* $\sqrt{2}(\operatorname{sen} 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos 45^\circ) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha$.

249 — Dadas três rectas complanas que se cortam duas a duas fora dos limites do desenho, traçar pelo método geométrico das figuras semelhantes uma circunferência de raio dado que seja tangente às três rectas. *O problema é em geral impossível.*

250 — ¿Que valores pode tomar x e y no número formado pelos algarismos $x2y$ para que êste seja divisível por 9? *Terá que ser* $x + 2 + y = 9$ *e o múltiplo de* 9 *só pode ser ou* 9 *ou* 18. *No primeiro caso* $x + y = 7$ *e valores de* x *e* y *que satisfazem são os pares* 1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1 *e* 7, 0; *no 2.º caso* $x + y = 16$ *e os valores que satisfazem são os pares* 7, 9; 8, 8; 9, 7.

III

251 — Encontrar dois números tais que a sua soma, igual a 54, esteja para a sua diferença como 3 está para 2. ¿Haverá lugar para a discussão no caso de se substituir $\frac{3}{2}$ por $\frac{m-n}{m+n}$ em que m e n podem ser quaisquer? *Sejam* x *e* y *os números pedidos, então será* $x + y = 54$ *e* $\frac{54}{x-y} = \frac{3}{2}$; *sistema cuja solução é* $x = 45$ $y = 9$. *Há lugar para discussão no caso de substituir* $\frac{3}{2}$ *por* $\frac{m-n}{m+n}$: *o problema não tem solução quando fôr* $m = n$.

252 — Desenvolver o produto de binómios $(x-2)^5 \times (x+2)^5$ dando-lhe a forma de polinómio ordenado.
Será $(x-2)^5 (x+2)^5 = [(x-2)(x+2)]^5 = (x^2 - 4)^5 = x^{10} - 20x^8 + 160x^6 - 640x^4 + 1280x^2 - 1024$.

253 — ¿Na equação $2x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ que valor é preciso dar a m para que as raízes difiram de 1?

Sejam α *e* $\alpha - 1$ *as raizes; vem* $\alpha + (\alpha - 1) = \frac{m-1}{2}$ *e* $\alpha(\alpha - 1) = \frac{m+1}{2}$ *sistema que por eliminação de* α *conduz à equação* $m^2 - 10m - 11 = 0$ *que tem por raizes* $m = 11$ *e* $m = -1$, *ambas soluções do pròblema.*

254 — Calcular por logaritmos a superfície de um triângulo rectângulo de que se conhece a hipotenusa e um dos ângulos adjacentes, respectivamente $c = 32m{,}72$ e $\alpha = 41^\circ 40' 23''$.

A área é $A = \frac{1}{2} c^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} c^2 \operatorname{sen} 2\alpha$ *e portanto* $\log A = \operatorname{colg} 4 + 2 \log 32{,}72 + \log \operatorname{sen} 2\alpha = \bar{1}{,}39794 + 2.1{,}51481 + \bar{1}{,}99707 = 2{,}42463$ *e portanto* $A = 265{,}85 m^2$.

255 — Demonstrar que

$$\cos(n+1)\alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha.$$

$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} \alpha$ *e como* $\cos(n-1)\alpha =$

$= \cos n\alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} n\alpha \operatorname{sen} \alpha$ *vem por adição ordenada* $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2\cos n\alpha \cos\alpha$ *o que demonstra o enunciado.*

256 — Pelo método das figuras semelhantes inscrever num triângulo ABC, um rectângulo semelhante a um rectângulo dado. Dizer o número de soluções possíveis. *Seja* [MNPQ] *o rectângulo dado que podemos supor ter um lado* MN *paralelo a um lado (por exemplo* BC*) do triângulo, pois se na figura êsses elementos não forem paralelos, pode-se dar uma rotação ao rectângulo de modo que o fiquem. Pelos pontos* M *e* N *tiram-se paralelas aos lados do triângulo* AB *e* AC. *Seja* A' *o ponto de encontro dessas rectas; marca-se a partir de* A' *segmentos* $A'B' = AB$ *e* $A'C' = AC$ *e constroi-se o triângulo* A'B'C. *Podemos considerar a homotecia de centro* A' *que transforma os pontos* P *e* Q *do rectângulo em pontos* P' *e* Q' *existentes sôbre o lado* B'C', *e nesta homotecia determinar os transformados de* M *e* N *que existem sôbre os lados* A'B' *e* A'C' *e são* M' *e* N' *o que determina um rectângulo que por translação se inscreve no triângulo dado* ABC.

Se em vez de tornar MN *paralelo a* BC, *o tivessemos determinado de maneira a ficar paralelo a* AC *ou a* AB, *teriamos mais duas soluções.*

257 — ¿Qual é o número que na base 7 se escreve 6321? ¿Que número lhe corresponde na base 9? *O número pedido é* $6.7^3 + 3.7^2 + 2.7 + 1 = 2220$ *na base* 10, *que na base* 9 *é representado por* 3036.

IV

258 — ¿Qual é o raio da circunferência em que a razão do seu comprimento para o área do círculo formado é igual a $\frac{m+n}{m-n}$? ¿Os valores de m e n podem ser quaisquer? *Seja* r *o raio pedido então será* $\frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{m+n}{m-n}$ *donde* $r = \frac{2(m-n)}{m+n}$. *Para que haja solução deve ser* $|m| > |n|$. *É a única restrição a impor a* m *e* n *reais.*

259 — Determinar qual a ordem n do termo que no desenvolvimento de $(x+a)^6$ dá para a razão do seu coeficiente para o do termo seguinte o valor $\frac{4}{3}$. *A razão dos coeficientes do termo de ordem* n *para o termo de ordem* $n+1$ *é, no desenvolvimento de* $(x+a)^m$, *igual a* $\frac{n}{m-n+1}$ *e portanto no caso em questão será* $\frac{n}{6-n+1} = \frac{4}{3}$ *ou* $3n + 4n = 28$ *logo* $n = 4$.

260 — Dada a equação $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ para que valores de m a equação terá: 1.º raízes reais; 2.º duas raízes de sinais contrários. *1.º) Deverá o descriminante ser positivo ou nulo o que dá* $4m^2 - (m-2)(m-5) \geq 0$ ou $3m^2 + 7m - 10 \geq 0$, *e como o trinómio tem as raizes* 1 *e* $-\frac{10}{3}$ *os valores de* m *que satisfazem são* $1 \leq m$ *ou* $m \leq -\frac{10}{3}$. *2.º) Para que tenham sinais contrários terá que ser ainda* $\frac{m-2}{m-5} < 0$ *e portanto* $2 < m < 5$.

261 — Calcular por logaritmos a superfície de um triângulo rectângulo de que se conhece um dos lados do ângulo recto e o ângulo a êle oposto, respectivamente $a = 10{,}55\text{m}$ $\alpha = 33^\circ 40' 57''$. *Será a área* $A = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg}\alpha$ e $\log A = \operatorname{colg} 2 + 2\log 10{,}55 + \log \operatorname{cotg} 33^\circ 40' 57'' = \bar{1}{,}69897 + 2 \times 1{,}02325 + 0{,}17621 = 1{,}92168$ *donde* $A = 83{,}50\text{m}^2$.

262 — Demonstrar que $\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} a(4\cos^2 a - 1)$.

$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} 2a \cos a + \operatorname{sen} a \cos 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos^2 a + \cos^2 a \operatorname{sen} a - \operatorname{sen}^3 a = 3 \operatorname{sen} a \cos^2 a - \operatorname{sen} a (1 - \cos^2 a) = \operatorname{sen} a (4\cos^2 a - 1)$.

263 — Pelo método das translacções e das figuras semelhantes traçar uma circunferência que seja tangente a outra dada e a duas rectas que se cortam, também dadas. *Sejam as rectas dadas* s *e* r *e a circunferência de centro* O *e raio* R. *O centro da circunferência tangente a* s *e a* r *deve estar sôbre a bissectriz do ângulo de* s *com* r. *Dêmos* s *e* r *uma translacção de modo que o vértice* P *do ângulo das duas rectas fique sôbre a bissectriz e que as novas posições* s' *e* r' *distem de* s *e* r *duma grandeza igual a* R. *Da nova posição* P' *de* P *projectemos* O *e determinemos sôbre a bissectriz* PP' *um ponto* Q *e sôbre* OP' *um ponto* S *que diste de* Q *tanto quanto* Q *dista de* r' *ou* s'. *Consideremos a homotecia de centro* P' *em que* S *é homólogo de* O *e construamos o homólogo* Q' *de* Q. Q' *é o centro da circunfrência pedida, pois estando sôbre a bissectriz de* s *e* r *dista tanto de* s *como da circunferência de centro* O.

264 — Determinar as bases em que 321 se escreve com 4 algarismos. *Como o número escrito nessa base deve ter mais algarismos que na base* 10, *essa base será menor que* 10. *Reconhece-se fàcilmente que só nas bases* 6 *e* 5 *o número se escreve com* 4 *algarismos e tem nessas bases as representações* $1253_{(6)}$ *e* $2241_{(5)}$.

O ponto V está resolvido no n.º 2 da «Gazeta» e compõe-se dos exercícios n.ºs 114 a 117 inclusivé.

VI

265 — *a)* Dois soldados partem das aldeias A e B para a sua unidade da cidade C, que dista delas respectivamente 17,5 e 6 quilómetros. ¿Que velocidade deverá tomar o primeiro para, partindo mais cedo duas horas, chegar ao mesmo tempo à unidade que o segundo, que leva 1,5 horas? ¿Haverá lugar para a discussão da equação a formar? *Se o que parte de* B *gasta 1,5 horas o que parte de* A *2 horas mais cedo, para chegar ao mesmo tempo, deve gastar 3,5 horas e como percorre 17,5 km. terá que marchar com a velocidade de 5 km/h. Não há lugar para discussão.*

266 — O número de combinações de n objectos $(p-1)$ a $(p-1)$ está para o número de arranjos dos mesmos n objectos p a p como 1 está para 6. ¿Qual é o número de objectos para $p = 3$? *Será então* $\frac{C^n_{p-1}}{A^n_p} = \frac{1}{6}$ *e para* $p = 3$ *vem* $\frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{6}$ *ou* $2(n-2) = 6$ *e* $n = 5$.

267 — Encontrar a expressão da área dum triângulo rectângulo isósceles cujo perímetro é $2p$. *Seja* b *o cateto e* a *a hipotenusa então* $2p = 2b + a = 2b + b\sqrt{2} = b(2+\sqrt{2})$ *donde* $b = p(2-\sqrt{2})$ *e a área* $A = \frac{1}{2}b^2 = p(3-2\sqrt{2})$.

268 — Calcular pelos logarítmos a área do hexágono regular inscrito no círculo de raio igual a 9 metros. *A área dum polígono é igual ao produto do semi-perímetro pelo apótema e como o lado do hexágono é igual ao raio e o apótema é metade do lado do triângulo vem:* $A = \frac{6.9}{2} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{243\sqrt{3}}{2}$ *e* $\log A = \log 243 + \frac{1}{2}\log 3 + \operatorname{colg} 2 = 2{,}38561 + 0{,}23856 + \bar{1}{,}69897 = 2{,}32314$ *e* $A = 210{,}45\ \mathrm{m}^2$.

269 — Demonstrar que $\operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}$. *De* $\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha$ *e de* $\cos^3 \alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = 4 \cos 3\alpha - 3 \cos \alpha$ *deduz-se* $4 \operatorname{sen}^3 \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$ *e* $4 \cos^3 \alpha = 3 \cos \alpha + \cos 3\alpha$ *e por divisão ordenada destas últimas igualdades*

$$\operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}.$$

270 — Determinar pelos lugares geométricos uma circunferência de raio R dado que seja tangente a uma recta m e de cujo centro se possa ver um segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo dado. *Seja* $\overline{AB}$ *o segmento dado; o lugar geométrico dos pontos dos quais se vê o segmento sob um ângulo dado é o conjunto dos dois arcos de duas circunferências que passam pelos pontos* A *e* B *e cujos centros* O *e* O' *são os pontos de encontro das rectas que passam por* A *e* B *e fazem com o segmento* $\overline{AB}$, *e para o mesmo lado dêste, um ângulo igual ao complemento do ângulo dado. Por outro lado o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma recta dada* m *é o conjunto das duas paralelas a* m *e à distância* R *dela. Os pontos de encontro de qualquer destas rectas com os arcos das circunferências de centros* O *e* O', *são os centros das circunferências pedidas.*

271 — O máximo divisor comum de dois números é 8 e o menor múltiplo comum é 560. ¿Quais são êsses números? *Seja* $D = 8$ *o m. d. c., e* $M = \frac{a \times b}{D} = 560$ *o m. m. c. dos números* a *e* b. *Ora como* $a = D.p$ *e* $b = D.q$ *em que* p *e* q são primos entre si vem $\frac{M}{D} = p \times q = \frac{560}{8} = 70$ *equação que admite as soluções inteiras* $p = 1, q = 70$; $p = 2, q = 35$; $p = 5, q = 14$; $p = 7, q = 10$. *Donde os pares de números, soluções do problema:* 8, 560; 16, 280; 40, 112; 56, 80.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

I

272 — A soma de um múltiplo de 5 com um múltiplo de 11 é 188. ¿Quais são êsses múltiplos? *Sejam* 5x *e* 11y *êsses múltiplos será então* $5x + 11y = 188$, *equação cujas soluções em números inteiros são* $x = 31 + 11u$ *e* $y = 3 - 5u$, *e como só nos servem as soluções inteiras e positivas que só existem para* $u = 0, -1, -2$ *os números pedidos são os pares* 155 *e* 33; 100 *e* 88; 45 *e* 143.

273 — Defina base de um sistema de logarítmos e indique como o valor da base influe no sentido da variação dos logarítmos relativamente ao sentido da variação dos números que lhe correspondem. *Base de um sistema de logarítmos é um número positivo e diferente de* 1, *tal que nêsse sistema o logarítmo de um dado número é o expoente a que se deve elevar a base para obter o número. Se a base do sistema é maior que* 1 *os logarítmos crescem com os números que lhes correspondem; se a base é menor que* 1 *então os logarítmos decrescem quando os números crescem.*

274 — Defina radicais semelhantes.

275 — Determine por logarítmos o lado a do triângulo de que se conhecem os seguintes elementos $B = 90°$ $c = 141{,}24\mathrm{m}$ $C = 42° 28' 39''$. *Como* $\frac{c}{a} = \operatorname{tg} C$ *vem* $\log a = \log 141{,}24 + \log \operatorname{cotg} 42° 28' 39'' = 2{,}14995 + 0{,}03829 = 2{,}18824$ *donde* $a = 154{,}26\mathrm{m}$.

276 — Exprima em função do raio do círculo a que pertence, o comprimento da corda a que corresponde o ângulo ao centro de 38° 15. *Se fôr* l *a corda e* R *o raio da circunferência é* $l = 2R \operatorname{sen} \frac{38° 15}{2}$.

277 — Calcule o raio da base de um cilindro de revolução de 4 metros de altura e de volume igual ao do cubo cuja diagonal mede 6 metros. *Seja* V *o volume do cilindro e* x *o raio da base, será* $V = 4\pi x^2$. *Se fôr* d *a diagonal do cubo como é* $d = l\sqrt{3}$ *vem* $V = l^3 = 24.\sqrt{3}$ *e portanto* $4\pi x^2 = 24\sqrt{3}$ *e* $x = \frac{\sqrt[4]{108}}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{m}$.

278 — Indique e justifique uma construção que permita determinar o segmento meio proporcional a dois segmentos dados. *Sejam* a *e* b *os segmentos dados, construa-se o segmento* $a + b$ *e determine-se a circunferência de diâmetro* $a + b$. *O ponto* P *de encontro da perpendicular ao segmento* $a + b$ *tirada pelo ponto extremidade de* a *e origem de* b *com a circunferência, e o pé* Q *desta perpendicular definem um segmento* PQ *que, por ser a altura dum triângulo rectângulo inscrito na circunferência relativa à hipotenusa, divide esta em 2 segmentos de que aquêle é o meio proporcional.*

279 — Indique as condições a que têm de satisfazer as somas das medidas dos diedros e das faces de um triedro. *A soma dos ângulos das faces de um triedro está compreendida entre* 0 *e* 2π *radianos e a soma dos ângulos diedros entre* π *e* 3π *radianos.*

280 — ¿A soma de duas fracções irredutíveis será uma fracção irredutível? Justifique a resposta. *Sejam* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *duas fracções irredutíveis a soma* $\frac{ad + bc}{bd}$ *só não é irredutível caso* b *e* d *admitam um divisor comum.*

II

281 — Indique quais os valores de x que verificam simultâneamente as inequações $4 + 3x - x^2 > 0$ $3x - x^2 < 0$. *A 1.ª desigualdade é verificada para os valores de* x: $-1 < x < 4$, *visto serem* -1 *e* 4 *os zeros do trinómio e o sinal do coeficiente de* x^2 *ser contrário ao do trinómio; e a 2.ª desigualdade é veri-*

ficada para $x < 0$ *ou* $x > 3$ *por serem* 0 *e* 3 *os zeros do trinómio e o sinal de* x^2 *igual ao do trinómio. Os valores de* x *que satisfazem simultâneamente às duas desigualdades são então* $-1 < x < 0$ *e* $3 < x < 4$.

282 — ¿Que sabe àcêrca das raízes de uma equação bi-quadrada de coeficientes reais em que o coeficiente de x^4 e o têrmo independente têm sinais contrários? *A equação nessas condições tem duas raizes reais, e as outras duas complexas.*

283 — ¿Qual é a base do sistema de logaritmos em que o número 27 tem por logaritmo $\frac{3}{2}$? Justifique a resposta. *A base pedida é o número* 9, *solução da equação* $x^{3/2} = 27$.

284 — Determine por logaritmos a altura do triângulo isósceles cuja base mede 143,32m e o ângulo oposto mede 47°35'14''. *Se designarmos por* h *a altura a determinar, em metros, é* $h = 71{,}66 \operatorname{cotg} 23^{\circ}47'37''$ *e* $\log h = \log 71{,}66 + \log \operatorname{cotg} 23^{\circ}47'37'' = 1{,}85528 + 0{,}35564 = 2{,}21092$ *donde* $h = 162{,}52\text{m}$.

285 — ¿Haverá algum ângulo que verifique a igualdade $\log \operatorname{sen} \alpha = 1{,}47325$? Justifique a resposta. *Não há: a igualdade acima,* $\log_{10} \operatorname{sen} \alpha = 1{,}47325 > 1$ *implica* $\operatorname{sen} \alpha > 10$ *que contradiz* $\operatorname{sen} \alpha \leq 1$.

286 — Determine a razão que existe entre o volume de um prisma hexagonal regular e o volume do cilindro que lhe seja circunscrito. *Sejam* H *e* R *os números que medem respectivamente a altura do prisma (que é a altura do cilindro) e o lado do hexágono da base do prisma (igual ao raio da base do cilindro). Sejam, ainda,* V *e* V' *os volumes do prisma e do cilindro, respectivamente. Será* $V = 6\,\frac{1}{2}\,R\,\frac{R\sqrt{3}}{2}\,H$ *e* $V' = \pi R^2 H$ *donde* $\frac{V}{V'} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

287 — Exprima em grados a medida do ângulo externo de um triângulo equilàtero. $\frac{400}{3} = 133{,}33\cdots$ *grados.*

288 — Uma esfera foi cortada por dois planos paralelos. ¿Que nome dá a cada um dos sólidos em que a esfera ficou dividida? ¿Que nome dá à parte da superficie esférica que corresponde a cada um dêsses sólidos? *Os dois planos paralelos dividem a esfera num segmento esférico de duas bases e em dois segmentos esféricos de uma base. A superfície esférica ficou dividida, respectivamente, numa zona esférica e em duas calotes esféricas.*

289 — Defina multiplicação de números fraccionários. *O produto de dois números fraccionários* $\frac{p}{q}$ *e* $\frac{r}{s}$ *é o número* $\frac{p \times r}{q \times s}$.

III

290 — Resolva a equação $\frac{1}{a} + \frac{1}{a-x} - \frac{1}{2x-a} = 0$.

Como o m. m. c. dos denominadores é $a\,.(a-x)\,.(2x-a)$, *a equação dada é equivalente à equação* $(a-x)(2x-a) + a(2x-a) - a(a-x) = 0$ *ou* $2x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$ *equação que admite as soluções* $x = a \cdot \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$.

291 — Determine o sétimo termo do desenvolvimento de $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^{10}$ efectuando as possíveis simplificações. *O sétimo termo é* $T_7 = (-1)^6 \cdot \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^6 = 210\,\frac{y}{x^2}$.

292 — Calcule por logaritmos $\sqrt[3]{0{,}039}$ e escreva três pares de elementos das classes contíguas que definem tal número irracional.

$$\log \sqrt[3]{0{,}039} = \frac{1}{3} \log 0{,}039 = \frac{1}{3} \times \bar{2}{,}59106 = \bar{1}{,}53053$$

donde $\sqrt[3]{0{,}039} = 0{,}3391$. *Os três pares de elementos das classes contiguas que definem o número podem ser* 0,3 *e* 0,4; 0,33 *e* 0,34; 0,339 *e* 0,340.

293 — Determine por logarítmos a área do triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede 116,27 *m.* e em que um dos ângulos mede 39°17'26''. *Como* $S = a^2 \operatorname{sen} B \cos B = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} 2B$, *vem* $\log S = \operatorname{colg} 2 + 2 \log 116{,}27 + \log \operatorname{sen} 78^{\circ}34'52'' = \bar{1}{,}69897 + 2 \times 2{,}06547 + \bar{1}{,}99132 = 3{,}82123$ *ou seja* $S = 6625{,}66\text{m}^2$.

294 — Calcule sem recorrer às tábuas, tôdas as funções trigonométricas do ângulo 3360. *Como* $3360^{\circ} = 9 \times 360^{\circ} + (180^{\circ} - 60^{\circ})$ *vem* $\operatorname{sen} 3360^{\circ} = \operatorname{sen} 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 3360 = -\cos 60^{\circ} = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 3360 = -\operatorname{tg} 60^{\circ} = -\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} 3360^{\circ} = -\operatorname{cotg} 60^{\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec 3360^{\circ} = \sec 60^{\circ} = -2$, $\operatorname{cosec} 3360^{\circ} = \operatorname{cosec} 60^{\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

295 — Calcule a área lateral da pirâmide triângular regular cuja altura mede 6 metros e cuja base é inscritível num círculo cujo perímetro é 12,56 metros. *O raio do circulo é* $r = \frac{12^m{,}56}{2\pi} = 2^m$ *e portanto o lado do triângulo inscrito (lado da base da pirâmide) é* $l_3 = 2\sqrt{3}$; *O apótema duma das faces da pirâmide é* $Ap = \sqrt{H^2 + ap^2}$ *sendo* H *a altura da pirâmide e* ap *o apótema da base (triângulo equilátero e por isso igual a* $\frac{r}{2} = 1^m$*) e portanto* $Ap = \sqrt{6^2 + 1} = \sqrt{37}$ *e a área lateral da pirâmide será* $S = \frac{3.2\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{37} = 3\sqrt{111} = 31^{m^2}{,}59$.

296 — Diga como se acha um diâmetro de um círculo cujo centro se não conhece. *Traçam-se duas cordas quaisquer da circunferência e traçam-se os eixos dessas cordas. Como estes eixos passam pelo centro da circunferência, o seu ponto de encontro é o centro, e, determinado o centro, qualquer corda que passe por êle é um diâmetro.*

297 — Diga qual o sólido gerado pela rotação de um triângulo rectângulo em tôrno de um cateto e o que é, no sólido gerado, cada um dos lados do triângulo. *O sólido gerado é um cone circular recto. Um cateto é a altura, o outro o raio da base, e a hipotenusa a geratriz.*

298 — Diga como da decomposição em factores primos de um número dado se pode concluir se êle é um cubo perfeito. *Se os expoentes dos factores primos forem todos múltiplos de 3, o número é um cubo perfeito.*

IV

299 — Indique quais os valores de x que verificam a inequação $a^2(1+b^2x^2) > b(2a^2x+b)$, supondo que a e b são positivos. *A inequação dada é equivalente a* $a^2b^2x^2 - 2a^2bx + a^2 - b^2 > 0$. *As raizes do trinómio são* $x_1 = \frac{a+b}{ab}$ *e* $x_2 = \frac{a-b}{ab}$, *e como o trinómio tem que ter o sinal do coeficiente de* x^2, *a inequação é verificada para* $x < \frac{a-b}{ab}$ *ou* $x > \frac{a+b}{ab}$.

300 — ¿Que condições devem verificar-se para que a a equação $mx + ny = p$ admita um número infinito de soluções inteiras e positivas. *Para a equação ter uma infinidade de soluções inteiras e positivas devem ser* m *e* n *primos entre si, ou que o seu* m. d. c. *seja divisor de* p, *e além disso serem* m *e* n *de sinais contrários.*

301 — Defina potência de expoente negativo e potência de expoente fraccionário. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$; $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

302 – Determine por logarítmos o lado do losango em que um dos ângulos internos mede $123^\circ 15' 12''$ e a diagonal maior mede 103,26 metros? *O ângulo dado é o maior ângulo do losango, portanto a diagonal dada é oposta a êste ângulo. Nestas condições deduz-se, do triângulo rectângulo em que a hipotenusa* l *é o lado do losango, e um cateto metade da diagonal e o ângulo opôsto metade do ângulo dado que* $l = \frac{103{,}26}{2 \operatorname{sen} 61^\circ 37' 36''}$ *logo* $\log l = \log 51{,}63 + \operatorname{colg} \operatorname{sen} 61^\circ 37' 36'' = 1{,}71290 + 0{,}05559 = 1{,}76849$ *donde* $l = 58{,}68$ metros.

303 — Escreva a expressão geral dos ângulos que tem a mesma cosecante que o ângulo de $16^\circ 27'$. *São os arcos* $\alpha = n.180^\circ + (-1)^n.[16^\circ 27']$.

304 — Determine a razão que existe entre a área de um cubo e a da esfera que lhe seja circunscrita. *A área do cubo é* $6l^2$ *ou expressa no raio da esfera* $S_c = 8R^2$ *visto o diâmetro da esfera ser a diagonal do cubo. E sendo* $S_e = 4\pi R^2$ *a área da esfera, será* $\frac{S_c}{S_e} = \frac{2}{\pi}$.

305 — Exprima em radianos a medida do ângulo interno de um hexágono regular. *O ângulo interno do hexágono regular é* $\frac{2\pi}{3}$ *radianos.*

306 — Diga qual é o lugar geométrico das tangentes a uma esfera tiradas de um ponto exterior. *É uma superficie cónica tangente à esfera e de vértice no ponto exterior.*

307 Escreva na base 14 o número que na base 6 se escreve 2541. *O número* $2541_{(6)}$ *escreve-se na base* 10: $2.6^3 + 5.6^2 + 4.6 + 1 = 637$ *e portanto na base* 14 *escreve-se* 337.

V

308 — Resolva a equação $abx^4 - bdx^2 + acx^2 = cd$. *As raizes são* $\pm\sqrt{\frac{d}{a}}$ *e* $\pm\sqrt{-\frac{c}{b}}$.

309 — Empregando as tábuas de logarítmos vulgares determine o logarítmo de 32 na base 5. *O módulo de transformação do sistema de base* 10 *no sistema de base* 5 *é* $\frac{1}{\log_{10} 5} = \frac{1}{0{,}69897}$ *e portanto* $\log_5 32 = \frac{1}{0{,}69877} \times \log_{10} 32 = \frac{1{,}50515}{0{,}69897} = 2{,}15338$.

310 — Diga se é possível a inequação $3x - x^2 - 12 > 0$, e enuncie o teorema em que se baseia. *As raizes do trinómio são números complexos pois o descriminante é negativo, e em virtude do teorema que diz: quando as raizes dum trinómio do 2.º grau são números complexos, o trinómio toma o sinal do coeficiente de* x^2 *para qualquer valor real de* x; *a desigualdade é impossivel.*

311 – Determine por logaritmos o lado c do triângulo de que se conhecem os seguintes elementos: $C = 90^\circ$ $a = 126^m{,}47$ e $B = 37^\circ 41' 27''$. c, *oposto a* C *é a hipotenusa e então será:* $a = c \cos B$ *donde* $c = \frac{a}{\cos B}$ *logo* $\log c = 2{,}10199 + 0{,}10167 = 2{,}20366$ *donde* $c = 159{,}83m$.

312 — Calcule $\operatorname{tg}(a-b)$ sabendo que a e b são ângulos positivos inferiores a 180º e que $\sec a = \frac{-3}{2}$ e $\cos b = \frac{1}{3}$. *Dos dados tira-se* $\cos a = \frac{-2}{3}$ *e* $\operatorname{sen} a = +\sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{-3}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; *de* $\cos b = \frac{1}{3}$ *vem* $\operatorname{sen} b = +\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ *e* $\operatorname{tg} b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$. *Logo será*

$$g(a-b) = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2}}{1-\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}.$$

313 — Calcule o volume de um cilindro de revolução cuja altura é dupla do diâmetro da base e sabendo que na base está inscrito um triângulo equilátero de 3 metros de lado. *Se fôr* r *o raio da base como* $l_3 = r\sqrt{3}$ vem $r = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ *e a altura do cilindro é* $4\sqrt{3}$ donde o volume $V = \pi(\sqrt{3})^2 \times 4\sqrt{3} = 12\pi\sqrt{3}\,m^3$.

314 – Justifique a construção que permite achar o centro de um círculo de que se conhecem 3 pontos. *O centro da circunferência, sendo equidistante dos 3 pontos* A, B *e* C, *deve estar no lugar geométrico dos pontos equidistantes de* A *e de* B *(perpendicular ao meio de* $\overline{AB}$*) e no lugar geométrico dos pontos equidistantes de* B *e de* C *(perpendicular ao meio de* BC*); portanto é o ponto de encontro daquelas duas perpendiculares.*

315 — Defina triedros suplementares e indique as relações entre os seus elementos. *Dois triedros dizem-se suplementares quando os ângulos diedros dum são suplementares dos ângulos das faces do outro: ou o que é o mesmo, quando as arestas dum* *podem, por um deslocamento, tornar-se perpendiculares às faces do outro.*

316 — Diga o que sabe a respeito do número de divisores positivos de um número que seja um quadrado perfeito. *Seja* $N = n^2$ *onde* n *é um inteiro. Seja ainda* $n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \cdots p_k^{\gamma}$ *a decomposição de* n *em factores primos. Será* $N = p_1^{2\alpha} \cdot p_2^{2\beta} \cdots p_k^{2\lambda}$; *logo* N *tem um número impar* $(2\alpha + 1)(2\beta + 1) \cdots (2\lambda + 1)$ *de divisores.*

V

317 — Forme a equação biquadrada de que são raízes os valores de x e y que se obtêm resolvendo o sistema: $\frac{x+y}{4} - \frac{y-x}{2} = 3$; $\frac{12x - 7y}{13} = 3$. *As raizes do sistema são* $x = 5$ $y = 3$. *A equação biquadrada terá então por resolvente a equação* $x^2 - (5^2 + 3^2)x + 3^2.5^2 = 0$. *A equação pedida é por isso* $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.

318 — ¿ Qual é maior o número de arranjos de n objectos p a p ou o número de combinações dos mesmos objectos também p a p? ¿ Haverá algum valor de p para o qual tais números sejam iguais? *É maior o número de arranjos pois é* ${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!}$ · *Só serão iguais quando* $p = 1$.

319 — Classifique as funções:
$$y = \frac{3}{2}x^2 - \sqrt{x}\,; \quad y = \sqrt{5}x - \frac{3}{2}x^3 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\,; \quad y = \operatorname{sen} x - (1 - x)^2 .$$
A 1.ª e 2.ª funções são algébricas, a 2.ª racional inteira (polinómio inteiro) e a 1.ª irracional. A 3.ª é trancendente.

320 — Determine por logaritmos a área de um triângulo isósceles cuja base mede 131,26 metros e em que cada um dos ângulos na base mede $35°52'27''$. *A área é* $A = \frac{1}{2} \cdot 131{,}26 \,.\, h$ *em que* $h = \frac{131{,}26}{2} \operatorname{tg} 35°52'27''$ *logo será* $\log A = 2 \log 131{,}26 + \operatorname{colg} 4 + \log \operatorname{tg} 35°52'27'' = 4{,}23626 + \bar{1}{,}39794 + \bar{1}{,}85925 = 3{,}49345$ *e* $A = 3114{,}9\,m^2$.

321 — Deduza a partir da fórmula que dá $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a fórmula que dá $\operatorname{tg} 2\alpha$. *Como* $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ *fazendo* $\beta = \alpha$ *vem* $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

322 — Determine a razão que existe entre o volume de uma pirâmide triangular regular e o cone de revolução que lhe seja circunscrito. *O volume da pirâmide, se fôr* R *o raio da base do cone circunscrito, é* $V_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$ *e o volume do cone é* $V_c = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ *donde* $\frac{V_p}{V_c} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

323 — Indique e justifique uma construção que permita levantar a perpendicular a um segmento rectilíneo num dos seus extremos. *Seja o segmento* $\overline{AB}$, *prolongo-o a partir de* B, *e em dois sentidos contrários marco distâncias* $\overline{BP} = \overline{BQ}$. *Com centros em* P *e* Q *e o mesmo raio, maior que* $\overline{BP}$, *traçam-se dois arcos de circulo que se cortam em dois pontos* R *e* S. *Unido* R *com* S *obtém-se a perpendicular pedida, pois essa recta é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de* P *e* Q, *portanto perpendicular ao meio de* $\overline{PQ}$.

324 — Defina distância de duas rectas não complanas e indique como a pode determinar. *Distância de duas rectas* r *e* s *não complanas é a distância de uma delas ao plano passando pela outra e que lhe é paralelo. Constroi-se, por exemplo, o plano* π *que passa por* r, *e é paralelo a* s. *Tomado um ponto* P *qualquer de* s, *a distância de* P *a* π *é a distância pedida.*

325 — ¿ Se a fracção $\frac{a}{b}$ fôr irredutível, também o será a fracção $\frac{a^m}{b^n}$ sendo m e n números inteiros positivos? Justifique a resposta. *A segunda fracção é também irredutivel porque não tendo* a *e* b *divisores comuns, quaisquer potências dêstes números não têm também divisores comuns, pois a potenciação não introduz novos factores primos na decomposição de um número.*

Licenciaturas em ciências geográficas

I

326 — Diga se na expressão $\frac{A}{5} = \frac{5}{2 \times 3^2}$ A pode ser um número inteiro. *Não porque estando a segunda fracção reduzida à expressão mais simples, os termos da primeira deveriam ser equimúltiplos dos termos da segunda, o que é impossível desde que* A *seja inteiro.*

327 — Discuta a natureza das raízes da equação
$$4x^4 + 2x^2 - 1 = 0 .$$
A equação resolvente $4x^2 + 2x - 1 = 0$ *tem raizes reais pois o descriminante é positivo; além disso, em vista do sinal do coeficiente do termo independente, conclue-se que as raizes são de sinais contrários; logo as raizes da equação biquadrada proposta são duas reais e duas imaginárias.*

328 — Num triângulo rectângulo sendo dado um cateto 38m,016 e o ângulo adjacente $30°15'$, calcule a hipotenusa.

A hipotenusa a *é dada por* $a = \frac{38{,}016}{\cos 30°15'}$ *logo* $\log a = \log 38{,}016 + \operatorname{colg} \cos 30°15' = 1{,}57997 + 0{,}06357 = 1{,}64354$ *donde* $a = 44m{,}009$.

II

329 — Calcule quantos divisores tem o número 180 e escreva-os.

Como $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ *terá* $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$ *divisores, que são os números* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180; *os quais se obtêm multiplicando os seguintes divisores de* 180: 1, 2, 2^2, 1, 3, 3^2 *e* 1, 5 *uns pelos outros de tôdas as maneiras possiveis.*

330 — Num sistema de logaritmos em que a base é $\frac{3}{4}$ calcule o logaritmo de 100. *Trata-se do problema da mudança de base e o módulo de transformação da base* 10 *na base* $\frac{3}{4}$ *é* $\frac{1}{\log\frac{3}{4}} = \frac{1}{\log 3 + \operatorname{colg} 4} = \frac{1}{0{,}47712 + \bar{1}{,}39794} = -8{,}003$ *e portanto o* $\log_{3/4} 100 = -8{,}003 \times 2 = -16{,}006$.

331 — Inscreva num cubo um octaedro cujos vértices sejam os centros das faces do cubo. Calcule a relação dos volumes destas figuras. *Se for* l *a aresta do cubo será o seu volume* $V_c = l^3$. *O volume do octaedro é o volume de 2 pirâmides quadrangulares, iguais, cuja altura é metade da aresta do cubo e cuja base é um quadrado que pode ser inscrito na face do cubo com os vértices no meio dos lados; a área dêste quadrado é então* $\frac{1}{2} l^2$, *portanto o volume do octaedro é*

$V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^3}{6}$ *a relação dos volumes é* $V_c : V_0 = 6$.

III

332 — Justifique a definição que se dá, de uma potência de expoente negativo, inteiro. *A potência* a^{-p} *pode ser encarada como o cociente* $a^m : a^n$ *em que* $m - n = -p$ *ou* $n - m = p$, *e como se pode, sem alterar o valor duma fracção, dividir ambos os termos desta pelo mesmo número, vem*

$a^{-p} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^p}$ *o que justifica a definição.*

333 — Escreva na base 11 os números 109 e 24 (da base 10). Efectue a soma na nova base e, passando para a base 10, verifique se dá o mesmo que a soma directa na base 10.

Os números 109 *e* 24 *escrevem-se na base* 11, 9a *e* 22 *se designarmos por* a *o símbolo que representa o número* 10 *na base* 11. *A soma é então* $111_{(11)} = 11^2 + 11 + 1 = 133_{(10)}$ *soma de* 109 *com* 24.

334 — Imagine uma esfera de volume *V*. Calcule o volume de um cubo inscrito nela. *A diagonal* d *do cubo é um diâmetro da esfera e se representarmos por* l *a aresta do cubo será* $d^2 = l^2 + l^2 + l^2 = 3l^2$. *Seja* R *o raio da esfera então* $d = 2R$ *e portanto* $4R^2 = 3l^2$ *donde* $l = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. *O volume da esfera é* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ *donde* $R^3 = \frac{3V}{4\pi}$. *O volume do cubo é, portanto,*

$l^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} R^3 = \frac{2\sqrt{3}\,V}{3\pi}$.

IV

335 — Construir a equação do 2.º grau cujas raízes são duplas uma da outra. *Sejam* a *e* 2a *as raízes; a equação pedida é*

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0.$$

336 — Faça uma regra para tirar a prova dos 5, e diga porque se não usa tal prova. *A Redacção não compreende o enunciado do problema.*

337 — Desenhe um triângulo eqüilátero de lado *a*. De um ponto interior *P* tire segmentos para os vértices, ficando o triângulo decomposto em 3, cuja soma das áreas é, naturalmente, igual à área do triângulo dado. Baixe de *P* perpendiculares sôbre os lados *a*, e mostre que, fundado no exposto, a soma dêstes segmentos perpendiculares é constante, independente da posição do ponto *P*. *Se designarmos por* H *a altura do triângulo dado e por* h_1, h_2 *e* h_3 *os segmentos das perpendiculares baixados de* P *sôbre os lados, que são as alturas dos triângulos em que fica decomposto o triângulo dado, ter-se-á designando por* S *a área do triângulo total*

$$S = \frac{1}{2}(ah_1 + ah_2 + ah_3) = \frac{1}{2} aH \quad donde \quad h_1 + h_2 + h_3 = H$$

qualquer que seja P, *o que prova o enunciado.*

V

238 — Escreva um trinómio que, para valores de x maiores que (-1) e menores que $(+1)$ tome sempre um valor positivo, e que para valores de x maiores que $(+1)$ e menores que (-1) tome um valor negativo. *O trinómio pedido é* $-x^2 + 1$ *cujas raízes são* ± 1. *Para valores compreendidos entre as raízes o trinómio toma o sinal contrário ao do coeficiente do seu 1.º termo e para valores fora do intervalo das raízes toma o sinal dêsse coeficiente.*

239 — Divida 6,34 por 2,1 e explique, se tem algum inconveniente para o cálculo do cociente e resto, o andar com a vírgula, para a direita, uma casa decimal, em cada um dos números dados, conforme a regra. *O resultado da operação é o seguinte: cociente* 3 *e o resto* 0,04. *O deslocamento da vírgula de uma casa decimal para a direita em cada um dos números dados equivale a multiplicá-los por* 10 *e por isso o resto vem multiplicado por* 10, *enquanto o cociente se conserva.*

240 — Nas cartas geográficas antigas usava-se, na representação da rêde de meridianos e paralelos, e para as latitudes do Mediterrâneo, uma malha rectângular. Calcule as dimensões relativas dos lados desta malha para o paralelo de Lisboa, dando-lhe a latitude 38º 40'.

A Redacção não compreende êste enunciado.

VI

241 — Justifique a regra da soma de um inteiro com um quebrado. *Seja* a *o inteiro e* $\frac{b}{c}$ *o número fraccionário. Um inteiro pode escrever-se sob a forma de fracção com denominador arbitrário e cujo numerador é o produto do denominador pelo inteiro e então será* $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$, *o que justifica a regra.*

242 — Procure soluções inteiras e positivas da equação $3x + 2y = 1$ e veja o que sôbre elas dizem os coeficientes. *Como* $x_0 = 1$ *e* $y_0 = -1$ *é uma solução particular, a solução geral, em números inteiros, é* $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 3t$ *em que* t *é um inteiro qualquer. Para que* x *e* y *sejam positivos é necessário que* $t > -\frac{1}{2}$ *e* $t < -\frac{1}{3}$; *e não há valor inteiro de* t *que satisfaça simultâneamente a estas 2 desigualdades; logo a equação não tem soluções inteiras e positivas.*

243 — Num triângulo rectângulo dada a hipotenusa $309^m,81$ e um ângulo 38º 17',5, calcule o cateto oposto a êste ângulo. *Se fôr* c *o cateto será* $c = 309{,}81 \text{ sen } 38^\circ 18',5$ *donde* $\log c = \log 309{,}81 + \log \text{sen } 38^\circ 17',5 = 2{,}49109 + \bar{1}{,}79216 = 2{,}28325$ *e portanto* $c = 191^m{,}98$.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

I

299 — *a)* Defina sistema de logaritmos e diga o que é base do sistema. Enuncie as propriedades fundamentais do cálculo logaritmico. *b)* Calcule o valor real de x dado pela equação $x^3 - \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{\text{sen } 128^\circ 21' 4''}}{(4{,}002)^{2/5}} = 0$. *Aplicando logaritmos* *vem* $\log x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{2}\log \operatorname{sen} 128°21'4'' + \frac{2}{5}\operatorname{colog} 4{,}002\right) =$

$= \frac{1}{3}(0{,}34949 + \bar{1}{,}94722 + \bar{1}{,}75909) = 0{,}01860$ *donde* $x = 1{,}0437$.

300 — *a)* Defina máximo divisor comum e menor múltiplo comum de números inteiros e diga de que maneiras pode efectuar a sua determinação. Diga que alterações se produzem no máximo divisor comum e no menor múltiplo comum de dois números quando um dêles é multiplicado por um terceiro; encare as várias hipóteses que podem apresentar-se. *b)* Determine todos os divisores comuns aos três números 90, 315, 495 e os seus múltiplos comuns compreendidos entre 30.000 e 60.000. *Os divisores comuns de vários números são os divisores do seu máximo divisor comum. No nosso caso é o* m. d. c. $= 3^2 . 5$, *e os divisores comuns são:* 1, 3, 9, 5, 15, 45. *Os múltiplos comuns são os múltiplos do m. m. c.; no caso presente o* m. m. c. $= 6930$, *e os múltiplos compreendidos entre* 30.000 *e* 60.000, *são* 34650, 41580, 48510 *e* 55440, *que se obtêm multiplicando o m. m. c. por* 5, 6, 7 *e* 8.

301 — *a)* Defina semelhança de figuras planas e enuncie as propriedades que conhece relativas à semelhança de polígonos. *b)* Uma pirâmide quadrangular recta regular de base inscrita num círculo de raio 1 é cortada por dois planos paralelos à base e que dividem a altura em três partes iguais. Determine a razão das áreas das duas secções obtidas. *Por serem homotéticas as figuras das secções e a razão de homotecia ser* $\frac{\frac{2}{3}h}{\frac{1}{3}h}$, *ou seja* 2, *a razão das áreas é igual a* $2^2 = 4$.

302 — Dada a equação $x^2 - (1 + a)x + a^2 = 0$ de raizes α e β, formar, sem a resolver, a equação do 2.º grau cujas raizes sejam $y_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, $y_2 = \frac{\beta}{\alpha}$. *Como é* $y_1 . y_2 = 1$ *e* $y_1 + y_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$, *e por outro lado* $\alpha + \beta = 1 + a$, $\alpha\beta = a^2$ *e* $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + 2a - a^2$, *vem* $y_1 + y_2 = \frac{1 + 2a - a^2}{a^2}$ *e será:* $a^2 y^2 - (1 + 2a - a^2)y + a^2 = 0$ *a equação pedida.*

303 — São dadas duas circunferências de raios r e $2r$ e colocadas de modo que os seus centros distam $\frac{5}{2}r$. Determine o comprimento da corda comum. *Sejam* O *e* O' *os centros das duas circunferências;* P *e* P' *Os pontos comuns dessas circunferências. A corda comum* PP' *é dividida ao meio pelo segmento* OO' *que a encontra no ponto* M, *portanto* $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{PP'}$. *Ora os triângulos* OPM *e* O'PM *são rectângulos e se fizermos* $\overline{MP} = x$, *vem* $x^2 = r^2 - \overline{OM}^2$ *e* $x^2 = 4r^2 - \overline{O'M}^2$, *donde* $\overline{O'M}^2 - \overline{OM}^2 = 3r^2$; *mas,* $\overline{OM} = \frac{5}{2}r - \overline{O'M}$, *logo* $\overline{O'M}^2 - \left(\frac{5}{2}r - \overline{O'M}\right)^2 = 3r^2$ *e* $\overline{O'M} = \frac{37}{20}r$; *finalmente é* $\overline{PP'} = 2x = \frac{\sqrt{231}}{10}r$.

II

304 — *a)* Defina equação. Enuncie as propriedades que relacionam as raízes duma equação do 2.º grau com os coeficientes da mesma equação e diga que utilidade reconhece nessas propriedades. *b)* Resolva o seguinte problema: determine t de modo que o trinómio $(t-1)x^2 + 2tx + t + 2$ seja positivo para todos os valores de x. *O trinómio será positivo para qualquer valor real de* x *desde que, sendo o coeficiente de* x^2 *positivo, o descriminante seja negativo, ou nulo, isto é:* $t - 1 > 0$ *e* $t^2 - (t + 2)(t - 1) \leq 0$ *ou seja* $t \geq 2$.

305 — *a)* Defina as funções circulares directas. Das fórmulas de adição tire as relações existentes entre as funções circulares de ângulos que difiram de $\frac{3\pi}{2}$. *b)* Calcule a área de um triângulo rectângulo sabendo que a diferença dos seus ângulos agudos é 12º e que a altura correspondente à hipotenusa é 1,53 m. *Como os ângulos agudos* $\widehat{B}$ *e* $\widehat{C}$ *dum triângulo rectângulo são tais que* $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ *e como no nosso caso é, além disso,* $\widehat{B} - \widehat{C} = 12°$ *será* $\widehat{B} = 51°$ *e* $\widehat{C} = 39°$. *A área é* $S = \frac{1}{2}h^2 \sec B \sec C$, *sendo* h *a altura, e então* $\log S = \operatorname{colg} 2 + 2\log 1{,}53 + \operatorname{colg}\cos 51° + \operatorname{colg}\cos 39° = \bar{1}{,}69897 + 0{,}36938 + 0{,}20113 + 0{,}10950 = 0{,}37898$ *e por isso é* $S = 2{,}39\ m^2$.

306 — *a)* Defina simetria no plano em relação a um ponto e em relação a um eixo e diga que propriedades conhece relacionando a simetria com a igualdade. *b)* É dada uma circunferência de centro O e raio conhecido r e duas rectas perpendiculares distando uma d e outra $2d$ do centro da circunferência. Determine d de modo que o ponto M de encontro das duas rectas seja interior à circunferência. Calcular em função de r e d a área daquêle triângulo que tem O no seu interior e cujos vértices são M e os pontos em que as rectas cortam a circunferência. *Como as rectas distam* d *e* 2d *do centro da circunferência para que o seu ponto de encontro* M *esteja dentro da circunferência é necessário que* $\overline{OM} < r$; *mas* $\overline{OM}$ *é a diagonal dum rectângulo cujos lados são* d *e* 2d *logo será* $\overline{OM} = d\sqrt{5}$ *e por isso* $d\sqrt{5} < r$ *e* $d < \frac{r}{\sqrt{5}}$. *Por outro lado, considerando o triângulo que tem* O *no seu interior, se designarmos por* A *e* B *os pontos em que as rectas encontram a circunferência, a sua área é* $S = \frac{1}{2}\overline{MA} \times \overline{MB}$. *Se de* O *tirarmos perpendiculares para* MA *e* MB *estes segmentos ficam divididos em 2 partes pelos pontos* P *e* Q *de tal modo que* $\overline{MA} = \overline{MP} + \overline{PA}$ e $\overline{MB} = \overline{MQ} + \overline{QB}$; *ora é, pelos dados,* $\overline{MP} = d$ *e* $\overline{MQ} = 2d$; *e como dos triângulos rectângulos* POA *e* QOB *se tira que* $\overline{PA}^2 = r^2 - (2d)^2$ *e* $\overline{QB}^2 = r^2 - d^2$ *será então* $S = \frac{1}{2}\left(2d + \sqrt{r^2 - d^2}\right)\left(d + \sqrt{r^2 - 4d^2}\right)$.

307 — Calcular a área total e o volume dum paralelipípedo rectângulo, conhecendo as diagonais das suas faces. *Sejam* d_1, d_2 *e* d_3 *as diagonais. Teremos* $x^2 + y^2 = d_1^2$; $x^2 + z^2 = d_2^2$ *e* $y^2 + z^2 = d_3^2$, *em que* x, y *e* z *são as dimensões das arestas do paralelipípedo. Do sistema anterior tira-se, se fizermos* $2s = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, $x^2 = s - d_3^2$; $y^2 = s - d_2^2$ *e* $z^2 = s - d_1^2$.

E será finalmente a área $S = 2(xy + xz + yz) = 2\left[\sqrt{(s - d_3^2)(s - d_2^2)} + \sqrt{(s - d_3^2)(s - d_1^2)} + \sqrt{(s - d_2^2)(s - d_1^2)}\right]$ *e o volume* $V = \sqrt{(s - d_1^2)(s - d_2^2)(s - d_3^2)}$.

308 — Fazendo $x + y = u$ e $xy = v$, calcular $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ em função de u e v. *Será então* $x^2 + y^2 + 2xy = u^2$ *e* $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$; $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = u^3$ *e* $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = u^3$ *donde* $x^3 + y^3 = u^3 - 3vu$; *e de igual modo se calcula* $x^4 + y^4 = u^4 - 4v(u^2 - 2v) - 6v^2$.

III

309 — *a)* Defina sistema de equações do 1.º grau e diga em que propriedades se baseia para fazer a sua resolução. *b)* Resolva o seguinte problema: dividir o número 24 em três partes aditivas tais que a terceira seja a soma das duas primeiras e que a soma da primeira com a terceira esteja para a soma das duas primeiras como 7 está para 6.

Tem-se: $\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x + y - z = 0 \\ x + 7y - 6z = 0 \end{cases}$ *e, portanto,* $\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ z = 12 . \end{cases}$

310 — *a)* Enuncie as propriedades fundamentais do cálculo operatório sôbre fracções e diga como pode proceder para dispor fracções por ordem crescente; dê um exemplo. *b)* Sendo p e q números inteiros positivos reduza a uma igualdade entre números inteiros a igualdade: $\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}$. *Multiplicando ambos os membros por* $q!$: $(q-1)!\,p = q! + [q(q-1)\cdots 2] + [q(q-1)(q-2)\cdots 3] + \cdots + q + 1$.

311 — *a)* Defina lugar geométrico; dê exemplos. Uma superfície cilíndrica circular recta pode ser considerada como um lugar de pontos e como um lugar de rectas? Quais e porquê? *b)* Determine o volume dum cilindro circular recto, conhecida a área lateral do cone circular recto da mesma base e mesma altura e a área da secção determinada no cilindro por um plano passando pelo eixo. *Representemos por* h *e por* r, *respectivamente os números que medem a altura e o raio da base do cilindro, e por* g *o número que mede a geratriz do cone cuja área lateral é* $s_1 = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. *Como a área da secção é* $s_2 = 2rh$, *tem-se* $h = \frac{s_2}{2r}$ *e* $s_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{4r^4 + s_2^2}$, *donde* $hr = \frac{s_2}{2}$ *e* $r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt[4]{4s_1^2 - s_2^2\pi^2}$ *e, portanto,* $V = \pi r^2 h = \frac{s_2\sqrt{2\pi}}{4}\sqrt[4]{4s_1^2 - \pi^2 s_2^2}$.

312 — De um triângulo rectângulo conhece-se a altura e a mediana correspondente a um dos ângulos agudos. Calcular os segmentos determinados na hipotenusa pela altura. *Sejam* h *e* m, *respectivamente a altura e mediana dadas*, x *e* y *os segmentos determinados na hipotenusa pela altura. Tem-se:*

$$\begin{cases} h^2 = xy \\ m^2 = \frac{h^2}{4} + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \end{cases} \quad donde \quad \begin{cases} (2x)\,y = 2h^2 \\ (2x + y)^2 = 4m^2 - h^2 . \end{cases}$$

$2x$ *e* y *calcular-se-ão como raizes da equação* $z^2 - \sqrt{4m^2 - h^2}\,z + 2h^2 = 0$. (Supõe-se que o segmento a que se refere x é o que contém como extremidade o vértice do ângulo agudo).

313 — Dada a equação $x^2 + px + q = 0$, de raízes α e β, formar a equação em y cujas raízes são $y_1 = \alpha^2$, $y_2 = \beta^2$, e uma nova equação em z tendo por raízes $z_1 = 3y_1 + 2y_2$ e $z_2 = 3y_2 + 2y_1$. Determinar p e q de modo que esta equação em z tenha raízes iguais. *A primeira equação a formar é* $y^2 + (2q - p^2)y + q^2 = 0$ *visto que* $y_1 + y_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 2q$ *e que* $y_1 y_2 = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = q^2$. *A segunda equação a formar é* $z^2 - 5(p^2 - 2q)z + q^2 + 6(p^2 - 2q)^2 = 0$, *visto que* $z_1 + z_2 = 5(y_1 + y_2) = 5(p^2 - 2q)$ *e que* $z_1 z_2 = 6(y_1^2 + y_2^2) + 13y_1y_2 = 6(p^2 - 2q^2) + q^2$. *Ser* $z_1 = z_2$ *é equivalente a ser* $y_1 = y_2$, *isto é,* $p^2(p^2 - 4q) = 0$: p *e* q *devem satisfazer, pois, a uma pelo menos das condições* $p = 0$ $p^2 = 4q$.

IV

314 — *a)* Defina equação biquadrada e diga como se efectua a sua resolução. *b)* Dada a equação $ax^4 + bx^2 + a = 0$ prove, sem a resolver, que o produto das duas raízes é igual a 1; calcule em função de a e b a soma das quartas potências das raízes. *Como o produto das raizes é igual ao cociente do termo independente pelo coeficiente do 1.º termo será* $x_1x_2x_3x_4 = \frac{a}{a} = 1$. *Como se sabe é* $x_1 = -x_3$ *e* $x_2 = -x_4$ *donde será* $x_1^2 + x_2^2 = -\frac{b}{a}$ *e como* $x_1^2x_2^2 = 1$ *vem* $x_1x_2 = \pm 1$ *e destas duas últimas igualdades se tira* $x_1 + x_2 = \pm\sqrt{\frac{-b \pm 2a}{a}}$. *Por outro lado é* $(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1^2x_2^2$ *ou seja* $x_1^4 + x_2^4 = \frac{(-b \pm 2a)^2}{a^2} \pm \frac{4b}{a} - 6$; *finalmente é* $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(x_1^4 + x_2^4) = \frac{2(-b \pm 2a)^2}{a^2} \pm \frac{8b}{a} - 12$.

315 — *a)* Utilizando as fórmulas que relacionam os elementos dum triângulo rectângulo, calcule a área dum triângulo isósceles conhecendo um ângulo adjacente à base e um lado. *Sejam* B *e* b *o ângulo e o lado. Se fôr* h *a altura é* $h = b \operatorname{sen} B$ *e a base* $a = 2b\cos B$ *logo a área* $S = b^2 \operatorname{sen} B \cos B$. *b)* Sendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, β e γ os ângulos de um triângulo rectângulo, exprima $\operatorname{sen}(\alpha + \beta - \gamma)$ em função de $\operatorname{sen}\gamma$ e $\cos\gamma$. *Será* $\operatorname{sen}(\alpha + \beta - \gamma) = \cos(\beta - \gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) = \operatorname{sen} 2\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma$.

316 — *a)* Defina ângulo ao centro e ângulo inscrito numa circunferência; quais são as suas medidas. *b)* É dado um triângulo rectângulo em que um cateto é duplo do outro; divide-se o cateto menor em três partes iguais e pelos pontos da divisão tiram-se paralelas ao outro, determinando-se assim um trapézio. Achar a razão das áreas dêsse trapézio e do triângulo dado. *No triângulo dado podem considerar-se três triângulos homotéticos: o dado e os dois que têm por bases as rectas paralelas ao cateto menor tiradas pelos pontos da divisão do outro cateto. Se designarmos por* A_1, A_2 *e* A_3 *as áreas, por ordem de grandeza, dos três triângulos, sendo* A_1 *a do triângulo dado, será a área do trapézio* $A = A_2 - A_3$ *e como* $\frac{A_1}{1} = \frac{A_2}{\frac{4}{9}} = \frac{A_3}{\frac{1}{9}} = \frac{A_2 - A_3}{\frac{1}{3}}$ *é* $\frac{A}{\frac{1}{3}} = \frac{A_1}{1}$ *e* $3A = A_1$.

317 — Dados $A_m = \frac{1}{2}(a^m + a^{-m})$ e $B_m = \frac{1}{2}(a^m - a^{-m})$ verificar que $A_{m+n} = A_m A_n + B_m B_n$ e $A_m^2 - B_m^2 = 1$. $A_m A_n + B_m B_n = \frac{1}{4}(a^m + a^{-m})(a^n + a^{-n}) + \frac{1}{4}(a^m - a^{-m}) \times$ $\times (a^n - a^{-n}) = \frac{1}{2}(a^{m+n} + a^{-(m-n)}) = A_{m+n}$ *e* $A_m^2 - B_m^2 =$ $= \frac{1}{4}(a^{2m} + a^{-2m} + 2) - \frac{1}{4}(a^{2m} + a^{-2m} - 2) = 1$.

318 — É dada uma esfera de centro O e raio r, e um cone inscrito, circular recto, de altura h. Calcular o volume e a área lateral S do cone em função de r e h. Achar entre V e S uma relação independente de h. *Se considerarmos o triângulo rectângulo em que um cateto é o raio da base* R *do cone, a hipotenusa o raio da esfera, e o outro cateto o segmento da altura* h *do cone compreendida entre o centro da esfera e a base do cone tem-se* $R = \sqrt{r^2 - (h-r)^2}$ *e se fôr G a Geratriz do cone será* $G = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{2hr}$ *como se vê fàcilmente. Daqui se tira que* $V = \frac{1}{3}\pi h(2hr - h^2)$ *e* $S = \pi\sqrt{2hr - h^2} \times$ $\times \sqrt{2hr}$. *Eliminando* h *entre as duas equações anteriores, obtém-se* $\frac{S^2}{V} = \frac{6\pi r}{1}$ *ou* $S^2 = 6\pi r V$.

V

319 — *a)* Em que consiste a fórmula de Newton? Diga qual é a lei de formação dos coeficientes e que propriedades conhece dêles. *b)* Desenvolva $(2x\sqrt{x} + 3\sqrt{xy})^4$ e ordene o desenvolvimento segundo as potências crescentes de x. Classifique a função obtida. $(2x\sqrt{x} + 3\sqrt{xy})^4 = 81x^2y^2 + 216x^3y\sqrt{y} +$ $+ 216x^4y + 96x^5\sqrt{y} + 16x^6$. *A função algébrica, obtida, é irracional.*

320 — *a)* Defina proporcionalidade directa e inversa e classifique a natureza da proporcionalidade nos casos seguintes: as duas dimensões de rectângulos da mesma área; as áreas de círculos de raios diferentes. *b)* Calcule dois números sabendo que o seu m. d. c. é 40 e o seu m. m. c. é 480. Razões teóricas. *Seja* a, b *um par de números nas condições referidas. Será* $a = 40 \cdot p$ *e* $b = 40 \cdot q$ *com* p *e* q *primos entre si. E por outro lado,* $480 = \frac{a \cdot b}{40}$, *donde* $p \times q = 12$. *Então, as duas soluções são:* $\begin{cases} a' = 40 \\ b' = 480 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} a'' = 160 \\ b'' = 120. \end{cases}$

321 — *a)* Defina superfícies de revolução e diga quais são as mais importantes; descreva-as. *b)* Determine a razão das áreas de dois polígonos semelhantes, conhecendo a soma e a diferença de dois lados homólogos. *Sejam* l *e* l' *os dois lados homólogos de soma* s *e diferença* d, *dadas: a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança* $\frac{l}{l'}$ *Ora* $\begin{cases} l + l' = s \\ l - l' = d, \end{cases}$ *donde* $l = \frac{s+d}{2}$ *e* $l' = \frac{s-d}{2}$. *A razão pedida e, pois,* $\left(\frac{s+d}{s-d}\right)^2$.

322 — Determine a, b e c de modo que a função $y = ax^2 +$ $+ bx + c$ tome, para x igual a 1, 2 e 3 respectivamente os valores 0, 3, 20. *Deve ser, simultâneamente,* $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 20 \end{cases}$ *sistema que tem a solução única* $a = 7$, $b = -18$, $c = 11$.

323 — Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um hexágono regular de lado a em tôrno de um eixo passando por um dos vértices perpendicularmente ao raio que passa por êsse vértice. *O volume e área pedidos são respectivamente* $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$ e $S = 12\pi a^2$.

VI

O número VI está resolvido no n.º 2 da «Gazeta», e compõe-se dos exercícios n.os 128 a 132 inclusivé.

Instituto Superior Técnico

I

324 — Resolver a equação $\operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2 6x = 1$. *Teremos* $\operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2(2.3x) = 1$ *ou* $\operatorname{sen}^2 3x + 4\operatorname{sen}^2 3x(1 - \operatorname{sen}^2 3x) = 1$ *o que dá a equação* $4\operatorname{sen}^4 3x - 5\operatorname{sen}^2 3x + 1 = 0$ *ou seja* $\operatorname{sen} 3x = \pm\sqrt{\frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}}$. *Daqui resultam as seguintes soluções:* *para* $\operatorname{sen} 3x = 1$ $x = \frac{(4k+1)\pi}{6}$; *para* $\operatorname{sen} 3x = -1$ $x = \frac{(4k-1)\pi}{6}$; *para* $\operatorname{sen} 3x = +\frac{1}{2}$ *vem* $x = \frac{k\pi}{3} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18}$ *e finalmente para* $\operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}$ *vem* $x = \frac{k\pi}{3} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{18}$.

325 — Uma barra de prata com o toque (ou título) de 900 milésimos pesa 2.400 g. Pretende-se transformá-la numa barra com 6.600 g de pêso e 833 milésimos de toque, juntando-lhe pedaços de outras duas barras misturadas nas proporções de 1 para 2. ¿Que relação deve haver entre os toques dessas duas barras? *O pêso das duas barras que há que juntar à barra dada é* 4.200 g *e portanto duma das barras* 2.800 g *e da outra* 1.400 g. *Por outro lado o pêso de prata fina da 1.ª liga é* $2.400 \times 0,900 = 2160$ g *e da 2.ª é* $6.600 \times 0,833 = 5.497,8$ g; *haverá pois que juntar à primeira barra o pêso* 3337,8 g, *que serão obtidos pela junção de* 2.800 x *e* 1400 y *se forem* x *e* y *os toques das duas barras o que conduz à relação* $2.800x +$ $+ 1.400y = 5497,8$.

326 — Dado um trapézio rectângulo de base a com os lados não paralelos respectivamente iguais a 2 e a 3 calcular o volume e a área do sólido que se obtém fazendo-o girar em tôrno do lado oposto à base. *O sólido gerado é um cilindro de raio da base* 2 *e altura* a, *a que falta interiormente um cone de raio de base* 2 *e geratriz igual a* 3. *Então será o volume* $V = \pi \cdot 2^2 \cdot a - \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot \sqrt{3^2 - 4} = 4\pi\left(a - \frac{\sqrt{3^2 - 4}}{3}\right)$ *e a área* $S = \pi 2a + \pi 2^2 + \pi 6 = 2\pi(a + 5)$.

327 — Dada uma circunferência de raio R e uma corda, determinar a posição desta de forma que seja máxima a área do triângulo que tem a corda por base e o centro da circunferência por vértice. *Calcular o valor máximo da área. Designando por* 2α *o ângulo ao centro correspondente à corda a área é medida por* $S=\frac{R^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{R^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{4}$; *S é portanto máxima quando* $\operatorname{sen} 2\alpha$ *o fôr, isto é, quando* $2\alpha=90^{\circ}$, *ou seja, quando a corda é o lado do quadrado inscrito. O valor máximo é então* $S=\frac{R^2}{4}$.

Nota — Êste problema pode resolver-se pelo método indicado no primeiro artigo dêste número.

II

328 — Represente gràficamente a equação $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$. *Trata-se de uma hipérbole em que o semi-eixo transverso mede* 2 *e o não transverso* $\sqrt{2}$. *Os eixos coordenados coïncidem com os da curva.*

329 — Pretende-se encher uma bilha com 7 litros de capacidade utilizando dois copos sempre cheios respectivamente com 3 e 4 decilitros. Quantas vezes devemos vasar cada um dos copos? *Tem-se* $3x+4y=70$ *designando por* x *e* y *o número de vezes que devemos vazar cada um dos copos de* 3 *e* 4 *decilitros. Uma solução inteira é evidentemente* $x=10$ $y=10$; *a solução geral em números inteiros é então* $x=10+4u$ *e* $y=10-3u$ *em que* u *é um inteiro; e como só nos servem as soluções inteiras e positivas terá que ser* $u=+3, +2, +1, 0, -1-2$ *que dá as soluções:* 22, 1; 18, 4; 14, 7; 10, 10; 6, 13; 2, 16.

330 — Dadas 2 circunferências de raio R, passando cada uma pelo centro da outra determinar a área em que os dois círculos se sobrepõem. *A área a calcular tem por medida o dôbro do segmento cuja corda é o lado do triângulo equilátero inscrito. Tem-se pois* $S=2\left(\frac{\pi R^2}{3}-\frac{1}{2}\frac{R^2}{2}\sqrt{3}\right)=R^2\cdot\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}$.

331 — E dada uma circunferência de raio R, e um trapézio isósceles inscrito. Os lados iguais do trapézio tem o comprimento R e um dos lados paralelos passa à distância $\frac{R}{3}$ do centro da circunferência. A que distância do centro passa o quarto lado do trapézio? *Seja* x *o lado que dista* $\frac{R}{3}$ *do centro; considerando o triângulo rectângulo em que um cateto é* $\frac{x}{2}$ *o outro* $\frac{R}{3}$ *e a hipotenusa* R, *vem* $\frac{x}{2}=\sqrt{R-\frac{R^2}{9}}$ *donde* $\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$. *Se designarmos por* y *a distância do outro lado ao centro, a distância entre os dois lados paralelos é* $y+\frac{R}{3}$; *e considerando o triângulo rectângulo em que a hipotenusa é um dos lados não paralelos, iguais ao raio* R, *em que um dos catetos é a distância* $y+\frac{R}{3}$; *e o outro cateto a semi-diferença dos 2 lados paralelos* x *e* $2\sqrt{R^2-y^2}$ *vem* $\left(y+\frac{R}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}R}{3}-\sqrt{R^2-y^2}\right)^2=R^2$ *equação que conduz a* $y=\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}R$.

HUMORISMO

I can't Happen Here — De uma farça-opereta com êste título escrita pelo Prof. *A. Marie Whelan* do *Hunter College* da cidade de New-York, e publicada no *American Mathematical Monthly*, orgão da associação dos professores de matemática dos U. S. A., transcrevemos a seguinte cena do 1.º acto.

Cenário — Uma aula de matemática. *Nota* — O professor de matemática, passa do seu papel de professor ao de *puro matemático*, conforme a oportunidade.

Prof. — Em face dos resultados do último ponto escrito resolvi fazer uma pequena revisão da álgebra. Maria, vá ao quadro, se faz favor, e resolva a equação $x^2-2x=0$.

Maria vai ao quadro e resolve a equação utilizando a fórmula resolvente da equação do 2.º grau.

Prof. — Porque não resolveu a equação pondo em evidência o factor comum x? Olhe, vou mostrar-lhe como se faz.

O Prof. vai ao quadro e resolve a equação pelo método indicado: $x(x-2)=0$ *donde* $x=0$ *e* $x=2$.

Maria — Mas a solução é a mesma.

Prof. — Eu não disse que o seu resultado estava errado. Olhe! Suponha que quere ir a um certo lugar da cidade e que pode utilizar o eléctrico ou o metropolitano. Suponha agora que tem de esperar meia hora pelo eléctrico e que pode partir imediatamente no metropolitano. O que é que faz?

Maria — *(inocente)* — Espero pelo eléctrico. Não gosto de andar de metropolitano. *(gargalhada geral).*

Prof. — *(juntando-se à gargalhada)* — Bem, a menina deu cabo da minha argumentação. E a-propósito, isso explica porque é que a menina chega sempre tarde. Agora vem a Ana ao quadro resolver a seguinte equação: $x^2-2x=2=0$.

Ana escreve no quadro o seguinte: $x^2-2x=2$; $x(x-2)=2$; *donde* $x=2$ *e* $x-2=2$ *ou* $x=4$.

Prof. (sarcástico) — Parece-me que a menina nunca ouviu falar na fórmula resolvente da equação do 2º grau?

Ana — Conheço-a, sim, senhor prof. (*escreve a fórmula recitando-a como um papagaio*). Está certa, não é verdade?

Prof. — Sim minha menina. Eu sempre gostava de saber porque a não usou?

Ana — Pensei que o senhor professor, não gostasse. Por isso resolvi a equação pelo método que usou há pouco. *(Aponta o problema anterior cuja resolução se encontra ainda no quadro).* Foi só para lhe ser agradável.

PROBLEMAS PROPOSTOS

332 — Demonstrar a identidade:
$${}^nC_r+2\,{}^nC_{r-1}+{}^nC_{r-2}={}^{n+2}C_r.$$

333 — Se um triângulo $B=18^{\circ}$ e $C=36^{\circ}$ então é $a-b=R$ sendo R o raio do círculo circunscrito ao triângulo.