GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII N.º 31 FEVEREIRO-1947

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa - N

TIP. MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c — LISBOA —

ANO VIII - N.º 31 GAZETA DE MATEMÁTICA FEVEREIRO-1947

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, L.da* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c. — LISBOA-N

Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science.

René Descartes — La Géométrie

SOBRE O CÁLCULO SIMBÓLICO

por **José Sebastião e Silva**

Já desde Leibniz foram observadas curiosas analogias entre as propriedades formais de certos símbolos não numéricos e as regras de cálculo elementar. Mas, por muito tempo, estes factos pouco interesse despertaram, considerados como simples coincidências a que nada correspondesse de essencial.

Não foi senão em fins do século passado, com os importantes trabalhos de Heaviside relativos à integração de vários tipos de equações diferenciais lineares, ligadas a questões de electrotecnia, que as possibilidades do chamado «cálculo simbólico», como elegante e fecundo instrumento de descoberta, foram postas plenamente em evidência. Ele revelou-se particularmente útil na telefonia e na telegrafia a longa distância, e foi, juntamente com o Cálculo das Variações, uma das origens da Análise Funcional.

Consideremos, a título de exemplo, a equação linear ordinária [1] com coeficientes constantes

$$(1)\qquad a_0 D^n \varphi + a_1 D^{n-1} \varphi + \cdots + a_{n-1} D\varphi + a_n \varphi = \psi ,$$

em que ψ representa uma função conhecida, φ a função incógnita, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ os coeficientes constantes da equação (reais ou complexos) e $D^i \varphi$ a derivada de ordem i da função φ $(i=1,2,\cdots,n)$. Posto isto, proponhamo-nos determinar o integral geral da equação (1), *admitindo que o símbolo* D *de derivação possa ser tratado com as regras usuais de cálculo, aplicáveis a símbolos numéricos;* e vejamos até que ponto nos pode conduzir este método, pondo de parte, por enquanto, preocupações de rigor. Comecemos então por dar à equação (1) a forma seguinte:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)\, \varphi = \psi$$

ou ainda

$$(2)\qquad \varphi = \frac{1}{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n} \cdot \psi .$$

A expressão que, no segundo membro desta última igualdade, figura a *multiplicar* por ψ, apresenta-se como função racional de D. Utilizemos então, a propósito, o conhecido processo da decomposição de uma função racional em soma de fracções simples, e, para maior clareza, comecemos por supor que as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ da equação $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ (chamada a *equação característica* de (1)) são todas simples. Como se sabe, será possível calcular então n números $k_1, k_2, \cdots, k_n$ tais que

$$\frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{k_1}{z-\alpha_1} + \frac{k_2}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{k_n}{z-\alpha_n},$$

o que imediatamente nos sugere a ideia de dar à expressão (2) a forma

$$(3)\qquad \varphi = \frac{k_1}{D-\alpha_1}\psi + \frac{k_2}{D-\alpha_2}\psi + \cdots + \frac{k_n}{D-\alpha_n}\psi .$$

Se, por outro lado, fizermos

$$(4)\qquad \varphi_i = \frac{k_i}{D-\alpha_i}\psi \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

virá

$$D\varphi_i - \alpha_i \varphi_i = k_i \psi \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

ou ainda, em notação mais usual,

$$\varphi_i'(z) - \alpha_i \varphi_i(z) \equiv k_i \psi(z) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

[1] Os sistemas de equações lineares ordinárias a coeficientes constantes apresentam-se no estudo dos circuitos eléctricos a constantes concentradas, enquanto as equações lineares às derivadas parciais (a coeficientes constantes) se apresentam no estudo dos circuitos eléctricos a constantes uniformemente distribuídas (caso da *equação dos telegrafistas*).

Mas estas não são mais do que equações diferenciais lineares de 1.ª ordem, cujos integrais gerais são dados, como se sabe, pelas fórmulas

$$(5)\quad \varphi_i(z)\equiv k_i e^{\alpha_i z}\int_a^z e^{-\alpha_i t}\psi(t)\,dt+c_i e^{\alpha_i z}\quad (i=1,2,\cdots n),$$

em que c_i representa uma constante arbitrária e a um ponto do domínio da função ψ, escolhido como origem das integrações.

Ter-se-á portanto, atendendo a (3), (4), (5):

$$\varphi(z)\equiv\sum_{i=1}^{n}\left(k_i e^{\alpha_i z}\int_a^z e^{-\alpha_i t}\psi(t)\,dt+c_i e^{\alpha_i z}\right).$$

Para passar agora ao caso geral, observemos que, se representarmos por α um número complexo qualquer, e se pusermos

$$\chi_\nu=\frac{1}{(\alpha-D)^\nu}\quad(\nu=1,2,3,\cdots),$$

virá

$$\chi_1=\frac{1}{\alpha-D}\psi,\ \chi_2=\frac{1}{\alpha-D}\chi_3,\cdots,\ \chi_\nu=\frac{1}{\alpha-D}\chi_{\nu-1}$$

donde, por indução, e atendendo aos resultados precedentes,

$$\chi_\nu(z)\equiv e^{\alpha z}\int_a^z dt_1\int_a^{t_1}dt_2\cdots\int_a^{t_{\nu-1}}e^{-\alpha t_\nu}\psi(t_\nu)\,dt_\nu+$$
$$+c_1 z^{\nu-1}e^{\alpha z}+\cdots+c_{\nu-1}ze^{\alpha z}+c_\nu e^{\alpha z},$$

ou ainda, aplicando repetidamente o método da integração por partes,

$$\chi_\nu(z)\equiv\frac{1}{(\nu-1)!}\int_a^z(z-t)^{\nu-1}e^{\alpha(z-t)}\psi(t)\,dt+$$
$$+(c_1 z^{\nu-1}+\cdots+c_{\nu-1}z+c_\nu)e^{\alpha z}.$$

Este resultado permitir-nos-á construir, como anteriormente, o integral geral de (1), no caso em que a equação característica admita raízes múltiplas, visto que, em tal caso, a função racional de D que figura no segundo membro de (2) admitirá uma decomposição do tipo

$$\sum\frac{k}{(\alpha-D)^\nu}.$$

Ora o que é verdadeiramente belo é que, por verificação directa em (1), a expressão assim obtida, resulta ser efectivamente o integral geral da equação proposta. Em particular, para $\psi=0$, reencontra-se a fórmula que nos cursos clássicos costuma ser indicada para a integração da equação homogénea a coeficientes constantes. É claro que, para $\psi\neq 0$, se poderia usar ainda o método de LAGRANGE; mas o processo agora indicado é mais simples e elegante.

Os factos a que acabamos de nos referir fazem recordar, por uma natural associação de ideias, o que se passou, por exemplo, a respeito da introdução dos números imaginários em Matemática. Com o auxílio de tais números (que chegaram a ser tidos na conta de *diabólicos*), tornou-se fácil dominar várias questões relativas aos números reais, como a resolução algébrica das equações de 3.º e 4.º grau, as quais de outro modo não fôra possível resolver. O símbolo i, introduzido para designar uma *inexistente, imaginária* raiz da equação $x^2+1=0$, só muito mais tarde veio a receber uma interpretação geométrica adequada (que não era de nenhum modo indispensável como garantia de rigor lógico); e, todavia, *tratando aquele símbolo como se fosse realmente um número*, obtinham-se resultados positivos, com uma elegância por vezes prodigiosa.

No exemplo anterior fomos levados a considerar uma *função racional* do símbolo D (1). Passando porém a equações às derivadas parciais (lineares, a coeficientes constantes), como por ex. a equação da *propagação do calor*, no caso simples

$$D_t T-a^2 D_x^2 T=0\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

a técnica do cálculo simbólico tornou-se ainda mais audaciosa, e chegou a utilizar *funções irracionais e transcendentes* do símbolo D, tais como e^{kD^2}, $\sqrt{D}$, etc., etc., servindo-se de desenvolvimentos em séries de potências de D ou D^{-1}, sem a mínima preocupação de rigor.

A verificação directa vinha, com frequência, confirmar a justeza da solução, obtida de modo tão aventuroso; mas não raramente se acabava por esbarrar em insucessos ou paradoxos que refreavam o entusiasmo inicial e faziam desejar uma delimitação rigorosa das condições de aplicabilidade do método em questão.

Tornava-se pois necessário dar uma base de racionalidade ao que não passava de método empírico, conquanto fecundo. (2) E eram primeiro que tudo razões de ordem prática que o exigiam: principalmente a necessidade de evitar perdas de energia em tentativas inúteis ou em verificações por vezes laboriosíssimas. Vários esforços foram empregados neste sentido de racionalização: por um lado, foi-se levado a condensar todo o método simbólico no uso da transformação de LAPLACE (3); por outro lado, procurou-se uma justificação mais directa do cálculo operatório, respeitando na medida do possível o seu espírito original.

(1) Este porém, ao contrário do que sucedia com o símbolo i, é já inicialmente provido dum significado preciso.

(2) Aos matemáticos impacientes que lhe pediam uma teoria do seu método, HEAVISIDE respondia: «Para comer eu não preciso de conhecer a teoria da digestão». Todavia ele morreu desiludido e semi-louco, em grande parte por causa das críticas recebidas.

(3) No próximo número darei indicações bibliográficas sobre o cálculo simbólico em geral.

À segunda categoria pertence a tentativa de justificação do cálculo simbólico do Prof. L. FANTAPPIÉ, como aplicação da sua teoria dos funcionais analíticos. Esta, por sua vez, nasceu como aplicação, ao campo das funções analíticas, dos métodos da Análise funcional instituídos por V. VOLTERRA e por S. PINCHERLE em fins do século passado.

Noção russelliana de tipo. Análise funcional e Análise geral. Observemos que, no caso simples do exemplo anterior, o cálculo simbólico pode justificar-se por meio de considerações muito elementares. Convirá entretanto aproveitar esta oportunidade para recordar e pôr em foco vários conceitos fundamentais que deverão ser utilizados mais adiante.

Sejam A, B dois conjuntos, finitos ou infinitos, constituídos por entidades cuja natureza deixaremos por enquanto indeterminada. Diremos definida uma *correspondência unívoca*, Φ, *entre os elementos de* A *e os elementos de* B, ou, mais simplesmente, uma *transformação unívoca* Φ de A em B, quando se tenha estabelecido um critério, pelo qual fique associado a cada elemento x de A um determinado elemento y de B, chamado *imagem* ou *transformado* de x por meio de Φ e representável por $\Phi(x)$ ou Φx. Duas transformações unívocas Φ, Ψ de A com B serão consideradas *idênticas*, se, e só se, fôr verificada a condição:

$$\Phi(x) = \Psi(x),$$

qualquer que seja o elemento x de A.

Para exprimir este facto poderá escrever-se indiferentemente

$$\Phi = \Psi, \quad \Phi(x) \underset{x}{=} \Psi(x), \quad \Phi(x) \equiv \Psi(x),$$

As transformações unívocas Φ de A em B são ainda chamadas *operadores unívocos, operações unitárias unívocas* ou *funções unívocas duma variável, de domínio* A e de *contradomínio* B. Os elementos x de A serão chamados *objectos* ou *dados* da operação Φ, e os elementos $\Phi(x)$ de B, *resultados* da operação Φ.

Em particular, A pode coincidir com B: neste caso tratar-se-á de *transformações unívocas do conjunto* A *em si mesmo.*

Particularizemos agora, em sucessivos exemplos, a natureza dos elementos de A e de B:

1) — Suponhamos que A é o *conjunto dos números reais* e que $B=A$. Transformações unívocas do conjunto A em si mesmo são, p. ex. o operador *sen*, o operador $\sqrt[3]{\ }$, a função φ dada pela fórmula $\varphi(x) \equiv \equiv 3(x-1)^2$, etc., etc.; mas não já o operador *log* ou o operador ψ dado por $\psi(x) \equiv +\sqrt{x^2-1}$, os quais são definidos sòmente numa parte de A.

2) — Suponhamos agora que o conjunto A é constituído por todas as *funções deriváveis até qualquer ordem, num mesmo domínio;* e seja ainda $B=A$. Exemplo duma transformação unívoca do conjunto A em si mesmo é, neste caso, o *operador de derivação*, D, o qual faz corresponder a cada função φ pertencente a A uma determinada função φ' pertencente ainda a A. Mas tal operador já não é definido, p. ex., no *conjunto das funções contínuas.*

3) — Seja agora A o conjunto das funções integráveis num mesmo intervalo (a, b) e B o conjunto dos números reais. Exemplo duma transformação unívoca de A em B será, neste caso, o *operador de integração,* que faz corresponder a cada função φ do conjunto A o número real $y = \int_a^b \varphi(t)\, dt$.

4) — Seja finalmente A o conjunto dos números reais e B o conjunto das funções reais definidas no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Uma transformação unívoca de A em B é, neste caso, p. ex. aquela que faz corresponder a cada elemento x de A a função φ_x definida por $\varphi_x(y) \equiv \operatorname{sen} y/x$ (costuma dizer-se, neste caso, que φ_x é uma função dependente do parâmetro x; substancialmente trata-se duma função de duas variáveis).

Ora é de notar que, enquanto no primeiro caso se apresentam operadores que transformam *números em números* (isto é, operações cujos *dados* são números e cujos *resultados* são ainda números), nos casos restantes trata-se de transformações de natureza mais complexa: operadores que transformam *funções em funções,* operadores que transformam *funções em números* e operadores que transformam *números em funções.* No caso considerado em 1), os operadores dir-se-ão de tipo 1 a respeito do conjunto dos números reais; nos casos restantes, dir-se-ão de tipo 2 a respeito do mesmo conjunto. Poder-se-à, naturalmente, prosseguir na elevação de tipo, considerando p. ex. operadores que transformem operadores de tipo 2 em números ou em operadores de tipo 1, etc., etc. (1). Lògicamente nenhuma limitação se apresenta, e poderá mesmo prosseguir-se no transfinito.

O que importa é não confundir *funções de tipo* 2, com *funções compostas.* Quando, p. ex., se põe $y = \int_0^1 \varphi(t)\, dt$, supondo φ variável, pode dizer-se que y é *função da função* φ; pois que, p. ex., à função $\varphi(x) \equiv x^2+1$, corresponderá o número $y=4/3$; à função $\varphi(x) \equiv \equiv +\sqrt{1+3x}$, corresponderá o número $y=14/9$,

(1) Dum modo geral, o tipo duma operação será imediatamente superior aos tipos dos seus dados e dos seus resultados.

etc., etc. Mas não se poderá de nenhum modo dizer que y é função da variável t, a qual, por isso mesmo, recebe neste caso o nome de *variável aparente*. Não convirá portanto usar aqui a notação $y=\Phi[\varphi(t)]$. Para evitar confusões com as funções compostas, costuma escrever-se então a variável t como índice de Φ, isto é:

$$y=\Phi_t[\varphi(t)];$$

ou mais simplesmente ainda

$$y=\Phi(\varphi).$$

Infelizmente, a palavra «função» costuma ser usada em duas acepções diversas: no sentido de «variável dependente» e no sentido de «operador»; daí, em grande parte, as dificuldades conceituais que a Análise funcional apresenta ao principiante.

O conceito de tipo lógico foi introduzido por Bertrand Russell, com o objectivo de resolver os paradoxos da teoria dos conjuntos. A intervenção dêste conceito em Análise funcional é de tal modo essencial, que não se pode deixar de pô-lo em evidência. Pode bem dizer-se que a distinção fundamental entre a Análise clássica e a Análise funcional está em que, enquanto a primeira se ocupa predominantemente de números ou de operações sôbre números, a segunda se dedica sistemàticamente ao estudo de operações de tipo superior.

Mas começa, por outro lado, a fazer-se sentir a necessidade duma *síntese*, que resolva o *antagonismo* entre a Análise clássica e a Análise funcional, e restitua à Matemática aquela unidade que tem sido sempre o seu ideal. E é assim que surge, por obra de M. Fréchet e de M. H. Moore, a Análise geral, cujo método consiste precisamente em deixar indeterminada a natureza dos elementos sôbre os quais incidem as operações, fixando apenas, por meio de condições mais ou menos largas (axiomas, no sentido moderno da palavra) propriedades lógicas, formais, das relações definidas entre tais elementos. Estes podem, ser números, funções, etc. A orientação da Anàlise geral é portanto aquela orientação *axiomática, formal ou abstracta* que caracteriza todo o movimento da Matemática moderna, desde a Álgebra à Topologia e à Lógica matemática.

(Continua)

II. Nombres Hypercomplexes

*par **Paul Belgodère***

La représentation d'une figure par un nombre hypercomplexe a pour but d'associer un algorithme à la loi de composition du groupe. Quittes à abandonner certaines propriétés fondamentales de l'algèbre (associativité du produit, non-divisibilité de zéro), nous pouvons ainsi attacher à toute géométrie au sein d'un groupe une méthode de calcul commode, une transformation étant représentée si possible par un ensemble de paramètres tels que les coordonnées généralisées de l'élément géométrique transformé soient fonction linéaire des coordonnées généralisées des éléments géométriques initiaux et des paramètres. Même s'il offre peu d'avantages pour les calculs effectifs, un tel procédé permet de mieux comprendre la nature de la géométrie étudiée.

La considération des éléments imaginaires d'une figure permet souvent de prévoir la nature des nombres hypercomplexes à associer à ses éléments réels pour représenter convenablement les opérations d'un groupe principal.

Par exemple, les transformations circulaires directes du plan, projection stéréographique des transformations projectives de la surface d'une sphère, qui en conservent globalement chaque système de génératrices, transforment une isotrope du plan en une isotrope de même système, la transformation entre isotropes de même système étant homographique. Une transformation circulaire *réelle* est donc caractérisée par la substitution homographique *complexe* qu'elle induit sur le paramétrage d'*un* faisceau d'isotropes (elle induit sur l'autre faisceau la substitution conjugée). L'*affixe* $x+iy$ d'un point *réel* du plan, n'étant autre que l'abcisse complexe de l'intersection de l'axe Ox avec une isotrope issue du point, constitue un paramétrage unicursal pour le faisceau d'isotropes, et est donc transformée *homographiquement* par les transformations circulaires réelles.

Nombres bicomplexes:

L'exemple des transformations circulaires du plan, paramétrées par l'introduction d'une affixe complexe attachée à un point réel, nous conduit à considérer une affixe bicomplexe $x+iy$, le point (x, y) étant *imaginaire*, et x et y étant des nombres complexes construits à l'aide d'une clef h telle que $h^2=-1$, mais n'ayant absolument aucun rapport avec la clef i telle que $i^2=-1$, interprétable comme un opérateur de rotation. Des difficultés apparaissent alors, car, par exemple, les nombres $(i+h)$ et $(i-h)$ ont un produit nul sans être eux-mêmes nuls: le système de nombres bicomplexes conserve la commutativité de la somme et du produit, la distributivité de la multiplication, mais possède des *diviseurs de zéro*, ce qui fait que la division peut y devenir impossible ou indéterminée pour des valeurs non nulles du diviseur.

Considérons spécialement les diviseurs de zéro $u=(1+ih)/2$ et $v=(1-ih)/2$, dont chacun est égal a son carré. On peut décomposer, de manière unique, tout nombre bicomplexe sous la forme $au+bv$, où a et b sont des nombres complexes ordinaires avec la clef i, et où $u^2=u, v^2=v, uv=0$.

Cette décomposition analyse complètement la structure des nombres bicomplexes, car elle donne le théorème d'addition

$$(au+bv)+(a'u+b'v)=(a+a')u+(b+b')v$$

et le théorème de multiplication

$$(au+bv)+(a'u+b'v)=(aa')u+(bb')v,$$

avec des formules analogues pour la soustraction et la division: les coefficients de u et v se combinent chacun par les règles de l'algèbre ordinaire, sans jamais avoir d'influence l'un sur l'autre: l'algèbre bicomplexe est somme directe de deux algèbres complexes ordinaires.

Interprêtant ce résultat dans le langage des transformations induites sur le plan de Cauchy (représentation réelle des points de la droite complexe) par les transformations analytiques de l'affixe prolongées aux points complexes du plan par l'emploi de nombres bicomplexes, nous pouvons dire qu'une telle transformation est à variables séparées, les isotropes de chaque système se transformant chacune pour son propre compte: c'est d'ailleurs la raison profonde pour laquelle toute transformation du plan de Cauchy associée à une fonction analytique de l'affixe est une représentation *conforme*.

Remarquons en passant que la structure des nombres bicomplexes $x+yk$, où x et y sont des nombres complexes ordinaires construits à l'aide d'une clef h $(h^2=-1)$, avec $k^2=+1$, sans que k soit égal ni à $+1$, ni à -1, est identique à celle des nombres que l'on vient d'étudier: il suffit de poser $u=(1+k)/2$, $v=(1-k)/2$ pour retrouver la décomposition précédente: on retrouve les mêmes nombres bicomplexes par prolongement complexe des nombres $x+yi$ ou $x+yk$, pris initialement avec x et y réels, $i^2=-1$, $k^2=+1$, lorsque x et y deviennent des nombres complexes ordinaires avec la clef h.

Une application de cette identité se rencontre dans l'étude des points complexes d'une quadrique. On obtient un paramétrage adapté aux transformations projectives conservant la quadrique en repérant chaque point par les paramètres x et y des deux génératrices qui y passent, d'où par le nombre

$$ux+vy=\frac{x+y}{2}+k\frac{x-y}{2}$$

(x et y sont réels pour les points réels d'une quadrique réglée) puisque x et y se transforment *chacun pour leur propre compte:* une transformation homographique sur $ux+vy$ équivaut à deux transformations homographiques opérant séparément sur x et y.

D'autre part, lorsqu'il s'agit d'une quadrique réelle convexe, le paramétrage par affixe revient à associer à tout point réel une génératrice imaginaire qui y passe, et le remplacement de l'affixe complexe par un nombre bicomplexe donne le même paramétrage total que si la quadrique avait été supposée initialement à génératrices réelles: il n'y a que le *domaine de réalité* des paramètres correspondant aux points réels qui diffère dans les deux cas.

Remarquons, comme dans toute autre branche de la Géométrie, le rôle fondamental que jouent les *éléments singuliers* formés ici par les diviseurs de zéro (pour lequel le coefficient de u ou v est nul). Dans toute représentation réelle d'éléments complexes ordinaires à un paramètre complexe, prolongée à la représentation complexe ordinaire d'éléments bicomplexes à un paramètre bicomplexe, les *protofils* (ensemble des points bicomplexes pour lesquels le coefficient de u ou v est fixé) jouent un rôle essentiel et ont un caractère intrinsèque pour les changements de paramètre bicomplexe. Dans l'image géométrique simplement complexe, ils donnent naissance à des éléments remarquables: par exemple la représentation de la «droite bicomplexe» sur le «plan de Cauchy» *complexe* met en évidence les droites isotropes de ce plan, qui jouent un rôle *essentiel* dans les transformations conformes du plan de Cauchy, associées aux changements analytiques de paramètre pour la droite bicomplexe. C'est ce qui explique le succés des *coordonnées isotropes* dans l'étude et les applications des *fonctions harmoniques* complexes ou même réelles.

Un autre exemple intéressant est fourni par les surfaces minima réelles de l'espace ordinaire, lieu des milieux des cordes joignant deux courbes isotropes, supposées imaginaires conjuguées. Les points réels de la surface minima peuvent être considérés comme les images des points complexes d'une courbe minima, ce qui conduit, par prolongement, à considérer les points complexes de la surface minima comme images des points bicomplexes de la courbe. D'après le théorème de décomposition, les protofils correspondent à ce que l'on obtenait initialement en prenant un point fixe d'une courbe minima, associé à l'ensemble des points de la courbe conjuguée; ils correspondent donc aux courbes de longueur nulle de la surface minima. On peut d'autre part paramétrer une courbe minima par la direction de sa tangente, c'est-à-dire par un paramètre repérant, sur une sphère, la génératrice de système déterminé qui lui est parallèle. La correspondance entre courbes minima de la surface, protofils de la courbe, génératrices de la sphère, permet d'énoncer immédiatement les théorèmes suivants: Il y a correspondance conforme entre une surface minima et son image sphérique par plans tangents parallèles. Tout changement analytique de paramètre sur la courbe minima initiale induit sur la surface minima une transformation conforme. L'abscisse d'un point de la courbe initiale étant pour elle un paramètre, on en déduit que *les sections de la surface minima par des plans parallèles* (qui correspondent à des fils d'égale partie réelle) *y forment un système isotherme.*

Les nombres bicomplexes s'introduisent automatiquement par extension analytique des figures réelles représentant les éléments complexes. On pourrait, par exemple, les utiliser avec profit dans l'étude de la *parataxie:* ils permettent de raisonner de façon rigoureuse, sans faire de confusion entre les imaginaires *de deux espèces différentes* qui interviennent dans le problème. Le *théorème de décomposition* montre évidemment qu'il ne s'agit pas là d'une algèbre essentiellement distincte de l'algèbre ordinaire, mais la décomposition est, au point de vue géométrique, plutôt un avantage qu'un inconvénient, et il est utile de pouvoir la prévoir et l'interprêter. Les nombres multicomplexes, obtenus par extensions analytiques sucessives (à l'aide de clefs comutatives h_i ou k_j telles $h_i^2=-1\,,k_j^2=+1$) donnent également lieu à une décomposition totale.

Nombres duaux:

Considérons les *nombres duaux* de la forme $z=x+y\,\varepsilon$, avec $\varepsilon^2=0$ sans que ε soit nul: une interprétation commode consiste à dire que l'on a un système *non archimédien*, dans lequel ε est l'infiniment petit des physiciens, dont le carré est totalement négligeable. Les coefficients x et y peuvent appartenir à des anneaux ou corps divers: nombres réels, nombres complexes ordinaires, vecteurs, quaternions, ...

La loi de multiplication est:

$$zz'=(x+y\varepsilon)\,(x'+y'\varepsilon)=(xx')+(xy'+x'y)\,\varepsilon$$

Le premier coefficient x, x' apparaît comme un *noyau*, qui se transforme pour son propre compte, quel que soit le coefficient secondaire $y\,,y'$.

Tout nombre dual pour lequel le coefficient principal x est nul est une racine de zéro, et joue évidemment un rôle singulier et fondamental.

Nous rappellerons ici les principaux résultats de l'utilisation des nombres duaux en géométrie, en insistant sur ceux qui nous paraissent nouveaux ou essentiels.

Prenons d'abord x et y dans le corps des nombres réels, et cherchons à représenter, sur le plan réel $x\,,y$, *les transformations projectives de la droite duale.*

Faisons le calcul:

$$x'+\varepsilon y'=\frac{(a+\varepsilon a')\,(x+\varepsilon y)+(b+\varepsilon b')}{(c+\varepsilon c')\,(x+\varepsilon y)+(d+\varepsilon d')}=\frac{ax+b}{cx+d}+$$
$$+\,\varepsilon\left[\frac{(a'x+b')\,(cx+d)-(ax+b)\,(c'x+d')+y\,(ad-bc)}{(cx+d)^2}\right].$$

Les droites $x=constante$ sont donc transformées en droites analogues.

Les paraboles $y=Ax^2+Bx+C$ sont transformées en paraboles analogues.

Considérons la représentation classique des transformations projectives de la droite complexe sur les transformations circulaires d'un plan réel, ou de la sphère de Riemann dont il est projection stéréographique. Transformons par continuité la sphère de Riemann en un cylindre de génératrices parallèles à Oy, sans cesser de considérer sur les ellipsoïdes de révolution intermédiaires l'empreinte de la géométrie projective de l'espace. Dans le plan image, nous avons donc à considérer une géométrie anallagmatique mais, par rapport au repère cartésien, les *points cycliques* tendent l'un vers l'autre et finissent par se confondre, en sorte que les cercles initiaux donnent, à la limite, des paraboles d'axe parallèle à Oy. Les nombres hypercomplexes à associer à la géométrie intermédiaire, qui n'est que transformée par affinité de la géométrie anallagmatique ordinaire, sont de la forme $x+ky$, où le symbole k est tel que k^2 soit réel, négatif et tendant vers zéro (puisque les «*points cycliques*» sont symbolisés par $x^2+k^2y^2=0\,,t=0$ et tendent vers $x^2=0\,,t=0$). On voit donc que, à la limite, les transformations projectives de la droite duale correspondent aux transformations anallagmatiques d'un plan à points cycliques confondus, c'est-à-dire aux transformations projectives d'un cylindre (ou, ce qui revient au même, d'un cône). Deux points du cylindre dont l'affixe duale ne diffère que par une racine de zéro sont situés sur une même génératrice. En réalité, le groupe projectif du cylindre dépend de 7 paramètres, alors que le groupe projectif de la sphère ne dépendait que de 6 (de même que, dans la géométrie euclidienne de l'espace, le groupe à 6 paramètres de déplacements peut être prolongé en un groupe à 7 paramètres par l'introduction des homothéties, *non* *engendrables par des transformations involutives.* Cela correspond au fait qu'on peut prolonger la géométrie projective de la droite duale en lui adjoignant la transformation $x'+\varepsilon y'=x+m\varepsilon y$, où m est une constante arbitraire.

Ainsi, la géométrie projective de la droite duale réelle est identique (avec introduction éventuelle de la transformation $\varepsilon \rightarrow m\varepsilon$), à la géométrie anallagmatique du plan réel à points cycliques confondus, et à la géométrie projective du cône réel. De même la géométrie projective de la droite duale complexe est identique à la géométrie anallagmatique du plan complexe à points cycliques confondus (dont un exemple est fourni par un plan *isotrope* euclidien), à la géométrie projective du cône complexe, et à la géométrie euclidienne à 3 dimensions engendrée par les plans isotropes, tangents à la conique ombilicable.

Par changement de l' interprétation des coefficients, on peut repérer les points complexes de la droite duale suivant les points duaux de la droite complexe, c'est-à-dire les points duaux de la sphère réelle. On peut ainsi associer les points duaux de la sphère réelle aux plans isotropes, donc aux droites réelles orientées qu'ils contiennent (l'orientation de la droite réelle correspondant au choix entre les deux plans isotropes qui en sont issus). On peut d'ailleurs considérer cette correspondance comme cas limite de l'association à une droite réelle d'un point complexe d'une sphère, par l'intermédiaire des plans tangents que l'on peut mener de la droite à la sphère ; on pourrait dans ce cas général, utiliser avec profit des nombres bicomplexes.

A toute droite réelle orientée, on peut associer ses coordonnées plückériennes $a,b,c;l,m,n$, où a,b,c, sont composantes d'un vecteur unitaire porté par la droite, et l,m,n, les composantes du moment de ce vecteur par rapport à l'origine. Puisque $a^2+b^2+c^2=1$ et $al+bm+cn=0$, on voit que le vecteur de composantes duales $a+\varepsilon l$, $b+\varepsilon m$, $c+\varepsilon n$ est lui-même unitaire et apte à représenter la droite suivant un point dual de la sphère unité : c'est la représentation sphérique prévue par la théorie. Le noyau a,b,c, correspond à un point réel de la sphère, apte à paramètrer, par lui-même, la direction de la droite, puisque les isotropes qui en sont issues coupent l'ombilicale aux points où la touchent les plans isotropes issus de la droite.

Les rotations de la sphère duale conservent l'association entre points antipodes : la transformation homographique (à coefficients duaux), induit sur le paramétrage complexe-dual de la sphère a donc la propriété caractéristique de correspondre aux transformations projectives de plan isotrope en plan isotrope qui transforment les droites réelles en droites réelles, c'est-à-dire aux déplacements réels de l'espace.

La géométrie métrique de l'espace euclidien réglé n'est donc qu'une extension duale de la géométrie métrique de la gerbe de droite, et le principe de transfert permet d'étendre à la géométrie de l'espace les procédés de calcul et les résultats valables pour la géométrie autour d'un point. La distance apparaît comme une composante duale, secondaire par rapport à l'angle qui joue le rôle de noyau. L'interprétation de la distance comme un angle infiniment petit est une généralisation du procédé classique qui considère la géométrie euclidiene plane comme limite de la géométrie à la surface d'une sphère dont le rayon devient infiniment grand. Le fait que l'espace euclidien n'a pas d'unité de longueur privilégiée, et admet des homothéties, correspond au fait que, dans le corps des nombres duaux, la clef ε n'est pas caractérisée de mannière unique, et que l'on peut lui substituer $m\varepsilon$ ce qui, si on le désire, permet d'introduire un paramètre supplémentaire dans le groupe de transformations.

La représentation des droites de l'espace par des vecteurs duaux est particulièrement utile dans l'étude des propriétés métriques des complexes linéaires : l'axe d'un tel complexe $(a,b,c;l,m,n)$ a en effet des coordonées plückériennes de la forme $(a,b,c;l+ua, m+ub, n+uc)$, ce qui fait que le produit d'un même vecteur dual par un nombre dual arbitraire représente l'ensemble des complexes linéaires de même axe.

Etant donnés trois vecteurs $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, on montre facilement que les trois vecteurs λ (produits vectoriels)

$$\mathbf{C}''=(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{C}, \quad \mathbf{A}''=(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})\wedge\mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}''=(\mathbf{C}\wedge\mathbf{A})\wedge\mathbf{B}$$

ont une somme nulle et sont donc coplanaires (les trois plans-hauteurs d'un trièdre sont concourants), ce qui permet, à partir de 3 vecteurs $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, de construire un vecteur $\mathbf{D}$ qui avec les 9 vecteurs $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$,

$$\mathbf{A}'=\mathbf{B}\wedge\mathbf{C},\ \mathbf{B}'=\mathbf{C}\wedge\mathbf{A},\ \mathbf{C}'=\mathbf{A}\wedge\mathbf{B},\ \mathbf{A}'',\mathbf{B}'',\mathbf{C}''$$

forme une configuration telle que chacun des 10 vecteurs ait un produit scalaire nul avec 3 autres.

De même, dans l'espace, le produit scalaire nul de deux vecteurs duaux correspond à l'intersection à angle droit des axes de deux complexes linéaires : on en déduit imédiatement que, à partir de trois droites A,B,C, on peut construire une configuration de Morley-Petersen de 10 droites dont chacune rencontre trois autres à angle droit.

L'utilisation des nombres duaux dans la géométrie de Laguerre des cercles orientés du plan n'est pas distincte de leur aptitude à paramétrer les plans isotropes de l'espace, puisqu'il y a correspondance entre les droites orientées d'un plan et les plans isotropes qui en sont issus. Restant dans le domaine réel, il y a correspondance entre la géométrie de Laguerre réelle et les transformations projectives d'un cône réel. Les déplacements de l'espace euclidien correspondent, par projection isotrope (un point de l'espace étant centre d'une sphère de rayon nul passant par un cercle du plan) aux transformations de contact du plan qui changent les cercles en cercles et les droites en droites, en conservant la *distance tangentielle* de deux éléments de contact d'une même droite. Il suffit, pour faire correspondre la géométrie de Laguerre aux transformations projectives d'un paramètre dual $u+\varepsilon v$, de paramétrer les droites orientées sous la forme

$$(1-u^2)\,x+2\,uy+v=0\,.$$

Pour que la droite enveloppe un cycle, il faut et suffit que v soit un polynôme du second degré en u.

Les transformations représentées par une fonction de la variable $u+\varepsilon v$

$$f(u+\varepsilon v)=f(u)+\varepsilon f'(u).v=g(u)+\varepsilon\,[h(u)+vg'(u)]$$

(où $h\,,g$ et sa dérivée g' représentent des fonctions ordinaires, alors que f était fonction duale d'une variable duale) admettent au voisinage de chaque droite $u\,,v$ une transformation tangente de la forme:

$$u'-u_0'+\varepsilon\,(v'-v_0')=(a+\varepsilon b)\,(u-u_0)+\varepsilon\,(v-v_0)\,a\,.$$

Elles sont donc telles que la distance tangentielle de deux éléments de contact d'une même droite soit conservée. Le groupe ainsi obtenu (qui dépend de deux fonctions de variable réelle) correspond, pour la géométrie des droites, au groupe de la géométrie conforme à deux dimensions pour les points (qui dépend d'une fonction de variable complexe). Mais le groupe *équitangentiel* présente une dégénérescence par rapport au groupe conforme, de même que la métrique ponctuelle de l'espace euclidien (correspondant à *une* droite à l'infini) est dégénérée par rapport à la métrique angulaire (qui correspond à *deux* points cycliques). Dans une géométrie cayleyenne, au contraire, on peut envisager une géométrie conforme et une géométrie équitangentielle, parfaitement corrélatives l'une de l'autre, précisément par rapport à la conique absolue.

Revenant au plan euclidien, on peut dire que tout théorème de géométrie anallagmatique ou conforme *a* un conséquent dans la géométrie de Laguerre ou équitangentielle, la réciproque n'étant pas toujours vraie. *(Continua)*

Topologia e Álgebra

(Continuação do n.º 29)

por **B. Eckmann** (Lausanne e Zürich)

7. Assim se separaram muito claramente as coisas e julga-se, agora, poder abordar as questões com os dois princípios opostos: a *Topologia* e a *Álgebra*, a vizinhança e o cálculo, o transcendente e o algébrico, o contínuo e o discontínuo, (ou «discreto»). Desejar-se-ia, talvez, disputar entre elas a primasia, discutir qual faria aparecer os «fundamentos mais profundos», qual seria mais rica de esclarecimentos ou mais cómoda e assim sucessivamente.

Mas, no mesmo momento, aparecem tambem interdependências. São das mais diferentes espécies. Imediatamente aparecem, e não são as menos interessantes, as que se referem à geometria analítica ordinária onde se traduzem, com o auxílio das coordenadas, simples teoremas do espaço por teoremas da álgebra real — trata-se portanto aqui de topologia e álgebra «concretas». Como exemplo mencionemos o seguinte teorema já demonstrado por Poincaré: Quando sobre a superfície exterior duma esfera é dada uma corrente, portanto um campo de vectores que varia contìnuamente de ponto para ponto, devem sempre aparecer turbilhões, fontes ou outros pontos singulares (descontinuidades) (investigue-se, por exemplo, uma corrente ao longo dos meridianos ou dos paralelos, neste caso, os polos constituem tais descontinuidades). Algèbricamente pode exprimir-se êste teorema, dizendo que certos sistemas de equações com três incógnitas têm soluções reais. Mas só se pode traduzir o teorema, não a demonstração, e de resto não se conhece até hoje uma demonstração puramente algébrica. Assim a topologia resolveu certos problemas da álgebra real que esta mesma ainda não resolveu. Do mesmo modo isto se dá com muitos outros teoremas sôbre campos de vectores e correntes, e as suas consequências, de formulação algébrica, ou não foram ainda algèbricamente demonstradas ou só o foram parcialmente.

8. Estas aplicações não são muito extraordinárias visto que empregam como auxiliares os números reais onde os dois pontos de vista já estão reunidos. Mas há também aplicações da álgebra abstracta à topologia e este é, em geral, o método mais importante para a investigação das propriedades topológicas.

Pensemos, por exemplo, na esfera, na superfície anelar ou superfícies semelhantes. Podemos cobri-las com uma rêde de triângulos; estes triângulos são limitados por linhas curvas, mas que podem ser deformadas em linhas rectas. Esta rêde de triângulos é uma espécie de esqueleto da superfície e, grosso modo, substitui-a. Podemos agora — isto assenta na essencia do contínuo — subdividir cada triângulo tão finamente quanto se queira, segundo uma lei prescrita, e, assim, cada ponto fica exactamente envolvido. Porém este refinamento, através do qual a superfície é aproximada de cada vez com mais precisão, está já completamente fixado pela rêde original, isto é, as propriedades da superfície devem já estar contidas nesta rêde, nas ligações dos vértices nos triângulos; só é necessário conhecer quais os 3 pontos que constituem cada triângulo e quais os triângulos que têm lados (ou parte) comuns. A investigação leva assim a combinar objectos discretos em número finito e aplica-se aqui, com vantagem, o formalismo da álgebra abstracta; esta *topologia combinatória ou algébrica* (cfr. [2], [4]) é precisamente um ramo da álgebra pura e aqui não se fala, de modo algum, em contínuo. Que é possível por outro lado investigar assim propriedades geométricas, isso apoia-se num facto tão notável, como importante, que fornece a ligação com o contínuo: podem encontrar-se «invariantes topológicos» em esquemas combinatórios, isto é, podem encontrar-se grandezas algébricas que só dependem do comportamento topológico da imagem geométrica em questão, mas não dependem da forma, grandeza, etc, em particular não dependem do esqueleto especial de vértices no qual se move a topologia algébrica. Por exemplo se: o número de vértices — o número de arestas + o número de faces tem um determinado valor para uma triangulação duma superfície fechada, esse valor é o mesmo para cada triangulação dessa superfície e também para qualquer triangulação doutra superfície do mesmo tipo topológico; para a esfera aquele valor é 2 — é o teorema de Euler dos poliedros — e para as superfícies do tipo da superfície anelar aquele valor é O.

Em especial, a teoria da triangulação, de que falamos acima, é completamente interpenetrada pelos métodos algébricos, enquanto que na teoria das deformações (redução duma curva a um ponto, etc.) há outros princípios de primordial importância. Tudo o que mencionei de proposições sobre superfícies — triangulação, campo de vectores, etc. — ou sobre curvas no espaço, demonstra-se melhor com estes métodos algébricos; e ainda mais: podem-se «calcular» directamente propriedades geométricas a partir do número de vértices, arestas, triângulos, etc, e suas relações, e o método pode-se aplicar não só às figuras do nosso espaço e às da sua generalização a um número maior de dimensões, mas também, depois de investigações mais recentes, a muitos espaços abstractos, mais gerais. Pelo contrário, não se conseguiu ainda caracterizar a estrutura geométrica pela algébrica, isto é, substitui-la; são só propriedades singulares duma figura geométrica, que se podem determinar daquela maneira, e sob este ponto de vista há ainda muitos problemas sem solução.

9. Assim se evidencia em múltiplas aplicações, um certo parentesco entre os nossas dois esquemas aparentemente diferentes, álgebra e topologia. Esse parentesco sobressai com especial relevo na *síntese* das duas: Consideram-se sistemas que possuam, ao mesmo tempo, uma estrutura algébrica e uma topológica (isto é, conjuntos de elementos com os quais se pode calcular e que ao mesmo tempo constituem pontos dum espaço de vizinhanças).

O exemplo com que quero procurar indicar as linhas particulares desta síntese é a teoria dos «grupos topológicos comutativos» tal como ela foi, desenvolvida há poucos anos por Pontryagin [5] — não porque ela seja o único exemplo, mas porque é particularmente simples e clara e de interesse fundamental sob muitos pontos de vista. Permito-me, em primeiro lugar esboçar em breves palavras algumas idéias e resultados desta teoria.

A circunferência possui não só propriedades topológicas mas também algébricas. É uma variedade contínua e ao mesmo tempo um grupo: a cada ponto corresponde um ângulo (desde que escolhamos um ponto inicial) e os ângulos podem adicionar-se de modo que as suas somas dependam continuamente das parcelas. Diz-se, neste caso, que é um *grupo topológico* e, precisamente, um grupo fechado, ao contrário, por exemplo, da recta numérica que é aberta. Um outro exemplo dum grupo topológico fechado é a superfície anelar.

Tomemos agora uma segunda circunferência auxiliar e faça-se corresponder a cada ângulo da primeira circunferência um ângulo duplo na segunda; portanto, quando um ponto percorre completamente, uma vez, a primeira circunferência, o ponto correspondente na segunda circunferência percorre-a completamente duas vezes — do mesmo modo como o ponteiro das horas executa duas vezes a volta ao mostrador enquanto o Sol percorre uma vez a sua órbita. A uma tal correspondência, que não prejudica nem as relações de continuidade nem as operações de grupo, chama-se um *carácter* do grupo topológico.

Obtém-se um outro carácter da circunferência quando em lugar do ângulo duplo se toma o ângulo triplo (ou o quádruplo, etc.), ou ainda quando se faz corresponder a cada ângulo o negativo (igual e de sentido contrário) ou o duplo, ou o triplo negativos, etc. Pode também tomar-se o ângulo nulo, isto é, fazer corresponder a cada ângulo o ângulo 0. Dêste modo se obtêm todos os caracteres da circunferência. O facto de não existir nenhum outro está intimamente ligado àquela propriedade da circunferência que eu mencionei, no início desta exposição como segundo exemplo.

Cada carácter da circunferência é, portanto, dado por um número inteiro, $0, 1, 2, \cdots$; o conjunto dos caracteres constitui, pois, qualquer coisa que é discreta (não contínua), o exemplo padrão da álgebra pura: o grupo dos números inteiros.

Este princípio de transporte que aqui indiquei para o caso da circunferência pode também aplicar-se a qualquer outro grupo topológico (comutativo). Fazem-se corresponder os seus pontos, da mesma maneira, aos de uma circunferência e chama-se a esta correspondência um carácter do grupo; o conjunto dos caracteres do grupo topológico constitui então qualquer coisa puramente algébrica, um grupo que é constituído por um conjunto numerável de elementos isolados, portanto um grupo discreto. Assim, a cada grupo topológico fechado corresponde um *grupo discreto* bem determinado, o seu *grupo de caracteres*.

O resultado principal da teoria diz agora que os grupos contínuo e discreto que assim se correspondem determinam-se completamente um ao outro. Nas propriedades algébricas dos grupos discretos estão contidas todas as propriedades topológicas dos contínuos e recìprocamente. Por exemplo a chamada dimensão do grupo discreto é igual à dimensão do grupo contínuo (indica portanto se ele é uma linha ou uma superfície, etc); o aparecimento de elementos de ordem finita (os que adicionados a si próprios várias vezes dão o zero) nos grupos discretos significa que a figura topológica é constituida por muitos bocados separados; tais relações podem obter-se mesmo relativamente a propriedades mais especiais das vizinhanças.

Assim se sobrepõem elegantemente (e se apresentam de certo modo como idênticas, mas formuladas em linguagem diferente) as duas noções fundamentais — cálculo e espaço.

¿Poder-se-á dizer qualquer coisa semelhante quando, em lugar de grupos topológicos fechados, se consideram grupos topológicos abertos, como por exemplo, a recta numérica? Aqui as coisas passam-se doutra maneira. De facto constroem-se, também neste caso, os caracteres do grupo, mas estes constituem, agora, qualquer coisa de contínuo: outra vez um grupo topológico aberto. De facto também aqui sucede que este grupo determina completamente o dado, e que propriedades topológicas passam a algébricas mas isto não se pode compreender da mesma forma pura, tal como anteriormente, visto que, simultâneamente, as propriedades algébricas passam a topológicas. As coisas passam-se um pouco como num parque simètricamente construido; é difícil dizer em que parte nos encontramos precisamente.

10. Tudo isto encontra expressão (bem conhecida do matemático e do especialista das ciências naturais) na *Análise harmónica.* Aí consideram-se, quando nos limitamos novamente ao exemplo mais simples dum grupo topológico, a circunferência, funções sobre a circunferência, isto é, do ângulo, portanto funções periódicas ou oscilações e estas decompõem-se em oscilações harmónicas (o tom fundamental e o tom superior, que são funções particularmente simples do ângulo, do duplo, do triplo ângulo, etc, não são mais que caracteres). Os números que indicam com que pesos são representadas cada uma das oscilações harmónicas, os «coeficientes de Fourrier», substituem completamente a função, como se sabe; substitue-se qnalquer coisa contínua, a função, por uma sucessão discreta de números. Pelo contrário, deve-se, nas funções não periódicas ordinárias — isto é, funções sobre a recta numérica — tomar um espectro contínuo de frequências, quando se quizer decompô-las em oscilações harmónicas (em lugar da série de Fourrier tem-se o integral de Fourrier). As coisas passam-se semelhantemente em todos os grupos topológicos (comutativos); estes constituem, juntamente com os seus grupos de caracteres, o próprio substractum da análise harmónica [6]. Note-se quão pouco necessitou a introdução desta noção de grupo topológico que resultou das duas operações estruturalmente constituintes escolhidas entre muitas possibilidades: a algébrica (adição) e a topológica (noção de vizinhança, onde basta tomar o princípio de que cada conjunto infinito de pontos contém numa sua vizinhança um ponto de acumulação).

Em geral — não se espantem com o tom paradoxal da expressão — tem-se nesta síntese completa, aquilo a que se chama análise. Portanto quando se abstrai dos grupos topológicos fechados restam essencialmente, entre os abertos, só os espaços vectoriais, portanto a geometria analítica ordinária. E quando além da adição no grupo se considera ainda a multiplicação (corpos), então há, como única possibilidade de tais corpos topológicos os números «ordinários» da análise, isto é, os númeras reais, os números imaginários o os quaterniões, o que constitue um interessante teorema de Pontryagin [5], que projecta nova luz sobre questões importantes da axiomática.

11. O confronto entre a topologia e a álgebra abstracta levou-nos a resultados de valor notável e revelou-nos singulares relações entre as duas. Tendo origem em necessidades intuitivas e formais diferentes, as duas maneiras de pensar têm funções diversas e são a expressão dos dois caminhos tão diferentes o do raciocínio e o da intuição; completam-se e apoiam-se mùtuamente da melhor maneira. Porém a diferença

entre elas é apenas aparente; a sua síntese não só dá um todo fechado, mas a possibilidade da passagem duma à outra. Em conjunto, há pròpriamente, só uma questão do ponto de vista, o de determinar se uma propriedade fica melhor num ou no outro lado; uma visão artificial do todo, permite, casualmente, que um sobressaia mais que o outro.

Sem querer é-se, aqui, levado a pensar num fenómeno semelhante na física: a luz e também a matéria apresentam-se muitas vezes quer com a natureza das ondas quer com a dos corpúsculos (partículas); a teoria moderna dos quanta conseguiu encontrar uma formulação que reune as duas formas de apresentação, melhor, que assenta sobre as duas (para isso renuncia-se contudo à intuição). Que se observe uma vez o comportamento duma, outra vez da outra, isso só a experiência determinará. É portanto uma visão artificial que prefere, e manifesta, duma vez a natureza das ondas, doutra vez a dos corpúsculos. A analogia com o nosso dualismo espaço-número falhou; talvez não seja mais do que uma simples analogia.

Seria fàcil apresentar casos semelhante em exemplos da vida diária, onde segundo o ponto de vista, se pode considerar um facto sob dois aspectos completamente diferentes — mas então quási sempre as coisas não se passam tão simplesmente como na matemática.

Que espaço e número estejam tão intimamente ligados nas suas propriedades elementares, como tenho procurado mostrar ràpidamente é, decerto, extraordinário. Há, na matemática e nas ciências da natureza, ainda muitos outros exemplos desta espécie em que duas coisas aparentemente diferentes se apresentam, contra o que se espera, como de igual valor, permutáveis entre si. E isto não parece ser por acaso. Talvez possa então formular: Para nos aproximarmos do nosso mundo construimos diferentes figuras, esquemas — diferentes na origem, com diferentes meios e para diferentes fins — e quando, apesar disto, resultam iguais, ou de igual valor, então é evidente que o construtor é culpado de ter utilizado o mesmo espírito matemático para tudo; e é ele mais o responsável do que o exemplo especial em que se apoia. As relações têm validade mais geral do que os objectos nos quais elas se manifestam.

Certamente existem e sempre se mantêm os problemas singulares, especiais, concretos, do domínio do trabalho próprio do matemático; e ele consagrará toda a sua energia na execução desse trabalho. Mas esforçar-se-à, depois disto, por resolvê-los com o mínimo de cálculo automático e com o máximo de idéias claras. E, quando assim, procura a generalidade e não teme a máxima abstracção, não se afasta da realidade; pelo contrário, encontra sempre, outra vez, relações e leis que são comuns a todas as nossas maneiras de pensar e encarar o mundo e das quais, evidentemente não pode fugir.

LITERATURA

Correspondendo ao caracter da conferência, a nossa exposição é um apontamento geral, que contém também formulações de teoremas e resultados. Para as formulações, fundamentações completas, assim como para a exposição de pormenores, enviamos o leitor para as obras seguintes:

1 D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig und Berlin 1913)

2 H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig und Berlin 1935).

3 H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin 1913)

4 P. Alexandroff und Hopf, *Topologie I* (Berlin 1935), em especial Parte II.

5 L. Pontryagin, *Topological groups* (Princeton 1939) Cap. V.

6 A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris 1940), Cap. VI.

(tradução de Maria Pilar Ribeiro)

PEDAGOGIA

SOBRE A CORRELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A FÍSICA NO ENSINO LICEAL

*por **Rómulo de Carvalho***

É evidente que entre as várias partes do mesmo programa geral do ensino deve existir a necessária harmonia para que todas se equilibrem ao mesmo nível quando se referem à mesma fase do desenvolvimento mental dos alunos. Cada informação dada em cada disciplina deve ter o seu momento pedagógico apropriado e, postas ao lado umas das outras, as várias disciplinas do mesmo ano devem seguir paralelamente na sequência regular desses momentos. Sucede ainda que algumas disciplinas se penetram profundamente e, para estas, com muito maior razão, é necessário atender ao paralelismo dos seus programas parciais. Dá-se isto claramente entre a Matemática e as outras Ciências que a ela recorrem constantemente como acontece com a Física. Seria inconcebível, por exemplo, que um aluno estudasse a lei da queda dos graves, que tivesse de traduzi-la em termos matemáticos e, entretanto, só no ano seguinte estudasse, na disciplìna de Matemática, a potenciação. Seria inconcebível visto que a referida lei da Física obriga a conhecer o que é o quadrado dum número.

Apesar de tão instante necessidade de paralelismo entre o ensino das duas disciplinas verifica-se que nem sempre se atende a ela o que traz prejuizo grave para a eficácia do ensino. O exemplo que poderemos dar não é o anterior que apenas serviu de preâmbulo ao assunto. Podemos, porém, dar este: aparecem, na Física do 4.º ano dos liceus, equações do 2.º grau cuja resolução apenas se estuda no ano seguinte, na Matemática do 5.º ano. Passa-se o caso quando se trata da lei de Kepler que relaciona os valores das intensidades luminosas de duas fontes de luz com as distâncias a que elas devem estar do mesmo alvo para que o iluminem igualmente. O programa indica noções sumárias sobre Fotometria e nesse aspecto sumário está, necessàriamente, aquela lei. A sua expressão matemática inclue os quadrados das referidas distâncias de modo que, se numa aplicação prática, se dá ao estudante o valor da distância D entre as duas fontes de intensidades luminosas conhecidas i_1 e i_2 (no intervalo das quais se supõe o alvo colocado) e se se pretende determinar um dos valores de d (distâncias das fontes ao alvo), por exemplo d_1, logo se cai na expressão $i_1/i_2=d_1^2/(D-d_1)^2$ cuja resolução obriga ao conhecimento das equações do 2.º grau.

Bem sabemos que o professor de Física do 4.º ano pode, dentro da sua aula, fugir à dificuldade e nunca apresentar um caso prático onde surja aquela proporção. Isto é possível mas não é regular. Na aula concedem-se os elementos informativos que o aluno assimila e desenvolve para a generalização dos seus conceitos. O aluno que estuda há-de, e deve, praticar em casa, por iniciativa própria, sobre o que o professor lhe ensinou e o problema surge-lhe então inevitàvelmente. A prática tem-nos mostrado que é assim.

Não é esta a única ocasião em que nos aparece o desequilíbrio entre a Física e a Matemática. No mesmo 4.º ano estuda-se a reflexão da luz nos espelhos esféricos. Aí já o programa não indica que o estudo deva ser sumário embora seja, evidentemente, elementar. Estudam-se as imagens formadas em todas as posições possíveis do objecto e, muito naturalmente, sem procurar artifícios nem alçapões, surge este caso simples. É conhecida a distância focal f dum espelho esférico côncavo e pretende-se saber a que distância p dele se deve colocar um objecto linear para que a sua imagem real se vá formar entre o espelho e o objecto a uma certa distância d deste, a qual também é conhecida. O problema resolve-se com a equação $1/p+1/(p-d)=1/f$ cuja resolução em ordem a p exige o conhecimento da resolução das equações do 2.º grau.

Não é razoável que, em casos tais, digamos aos alunos que esperem pelo ano seguinte para saberem a resposta do problema pois este, olhado de dentro da Física, é exactìssimamente do mesmo grau de dificuldade de que qualquer dos outros problemas que se referem a espelhos côncavos e os mesmos estudantes sabem resolver. Os livros que por aí correm trazem, inocentemente, problemas que vão terminar na resolução de equações de 2.º grau e que estão dentro do programa do 4.º ano de Física. O que não estão é dentro do programa do 4.º ano de Matemática. Dir-se-á que esses livros não são oficiais mas o que nos interessa é a realidade e essa diz-nos que é por muitos desses livros que os alunos estudam.

A lição dos factos é, pois, esta: o programa de Matemática não pode ser gizado num compartimento e o da Física em outro àparte. Nem aqui nem em qualquer grau de ensino, evidentemente. (Lembrámo-nos, agora, a-propósito, da tristíssima situação em que se encontram os estudantes de Medicina. Para estes a Matemática acabou com o 7.º ano do Liceu. Acabou para sempre. Inexoràvelmente banida. Apesar disso o estudante entra na Química dos preparatórios e logo nas primeiras lições assiste, estupefacto, ao aparecimento de derivadas e de integrais, noções totalmente desconhecidas, que não lhe foram, nem são, nem serão ensinadas e das quais nem sequer conhece a finalidade. Convençamo-nos de que o médico, na sua vida profissional, também necessita da Matemática desde que pretenda caminhar ao lado do saber contemporâneo da sua especialidade. Para prova basta citar a importância do cálculo estatístico e das probabilidades na Biologia o qual, de ano para ano, toma mais incremento).

Vejamos outro aspecto que também nos parece digno de atenção. É sabido que as equações (referímo-nos particularmente a este caso) são estudadas na Matemática e aplicadas frequentemente na Física. Na Matemática, triste é dize-lo, são as equações ensinadas, geralmente, fora da sua aplicação real; na Física são empregadas concretamente. Parece-nos que o ensino é feito ao invés do que deveria fazer-se: aplicar-se primeiro em casos simples, reais, e generalizá-lo depois. Podemos pessoalmente afirmar que, muitos alunos, ao verem pela primeira vez a equação que traduz uma lei física, e da qual deverão concluir o valor desconhecido duma grandeza, ou hesitam ou declaram não saber resolve-la. Mas, se o professor lhes disser que a resolvam «como se fôsse uma equação daquelas que aprenderam na Matemática» o aluno resolve sem dificuldade. Afirmamos que é assim porque temos anotado muitos exemplos desta espécie.

Outro defeito do ensino das equações (nos primeiros anos em que elas se estudam), defeito que também só nós, professores de Física, podemos observar, é o de se escolherem sempre, para exercícios de aplicação, equações que tenham raizes inteiras. Compreendemos que haja interesse em escolhê-las deste modo durante os primeiros tempos do ensino pois isso facilita a verificação do resultado a que os alunos chegaram. Mas que se faça isso, e só isso, sistemàticamente (nos primeiros anos, repetimos), é que não achamos admissível. As suas consequências são graves. Durante o 4.º, 5.º e 6.º anos dos liceus, o aluno (caso muitíssimo geral) só tem conhecimento das raizes inteiras da equação. Vai para a Física, aplica-lhe a sua Matemática e, se o resultado final tem que ser obtido por meio dum cociente, o aluno põe-se à espera de qualquer destas duas consequências: ou o resto desse cociente é zero e então tudo lhe corre às mil maravilhas (o problema está certo, com certeza); ou o resto é diferente de zero e então... o problema está errado. É ver o desprevenido estudante olhar desconfiado para o professor e balbuciar: «mas isto não dá resto zero!» ou então «isto não dá contas exactas!» Esta é a verdade que a prática nos tem ensinado: os alunos só «acreditam» que um problema de Física está certo quando, na hipótese de obterem o resultado final por meio dum cociente, o resto deste seja zero. Tudo aliás se conjuga para que o êrro se mantenha e prolongue: o ensino da Matemática, os problemas que se escolhem, nas aplicações, para que nunca se fuja a resultado tão agradável, e até os pontos de exame, de Física e de Química, onde os valores numéricos que se atribuirão às grandezas, são propositadamente escolhidos, a título de «facilitar as contas», de modo que tudo se resolva sem o menor esforço. Isto é deveras deseducativo porque afasta completamente a escola da vida. Parece-nos que o assunto merece ser ponderado.

ANTOLOGIA

SCIENCE ET TECHNIQUE

*par **Paul Langevin***

Extracto da última conferência do grande cientista Paul Langevin, recentemente falecido, intitulada *La Pensée et l'Action* e editada pela «Union Française Universitaire». A «Gazeta de Matemática» presta, assim, à memória do grande físico, uma simples homenagem.

Notre science est issue, pour une grande part, des besoins de l'action. Cela est bien connu pour les mathématiques, depuis l'arithmétique et la géométrie jusqu'au calcul différentiel et intégral Les progrès de l'astronomie sont liés soit au problème de la mesure du temps, soit au désir de prévoir les positions relatives des astres ou l'avenir des hommes, soit, dans l'antiquité comme à l'époque de la Renaissance, aux besoins croissants de la navigation. L'optique, telle qu'elle a été développée surtout par Galilée, Kepler, Descartes, Newton, a suivi une marche parallèle à celle de l'astronomie dont elle s'est efforcée de satisfaire le besoin toujours plus grand de précision dans l'observation du ciel.

A peu près à la même époque, le développement de la mécanique, qui a commencé également avec Galilée, Descartes, Huyghens et qui s'est épanoui avec Newton est étroitement lié aux problèmes posés par la balistique et par l'astronomie. Le calcul différentiel et intégral a été créé au dix-septième siècle pour répondre aux questions posées par les mécaniciens, les balisticiens et les architectes. Au dix-neuvième siècle, la thermodynamique et la connaissance précise des lois qui régissent les gaz et les vapeurs se sont développées lorsque les applications de la machine à vapeur ont commencé à prendre une importance essentielle. Et depuis que, sous cette influence, notre grand Sadi-Carnot a énoncé pour la première fois les principes essentiels de la thermodynamique, cette science domine une grande partie de la physique et de la chimie pures ou appliquées. Ainsi, dans tous ces exemples, les besoins de l'action ont déterminé l'activité de la pensée.

En sens inverse, les besoins de la pensée une fois manifestés, le souci de comprendre, ce que j'ai appelé la «sainte curiosité» ne laissent pas à l'esprit de repos tant qu'il n'a pas contruit une interprétation des phénomènes naturels, soit pour calmer l'inquiétude ancestrale, soit, de plus en plus nettement, dans un but de satisfaction intellectuelle. Les résultats de cette recherche, la science pure qu'elle permet de créer, se sont montrés d'une surprenante fécondité au point de vue de l'action par les applications imprévues auxquelles ils ont donné lieu.

En suivant la voie qui conduit à la science par les besoins de l'action, on sait à l'avance ce qu'on veut obtenir et on cherche des moyens de plus en plus rationnels et précis pour y parvenir.

Dans le second cas, au contraire, ce qui est particulièrement impressionnant c'est que le seul souci de comprendre conduit à des applications bien plus merveilleuses que les rêves les plus ambitieux. Il en est ainsi, par exemple, pour l'oeuvre de Pasteur qui, parti d'un problème purement physico-chimique et cristallographique a été conduit ... à l'étude des fermentations puis à la découverte du monde microbiologique et à une puissante action sur les maladies qu'il n'avait absolument pas en vue au départ et que personne n'aurait cru possible avant qu'elle apparaisse comme le résultat d'une recherche de science pure.

Même surprise dans le cas de Berthelot, dont les recherches de synthèse organique, entreprises pour résoudre la question des forces vitales, pour savoir si les produits engendrés **in vivo** pouvaient l'être **in vitro**, ont donné lieu à l'extraordinaire développement industriel des matières colorantes, des parfums, des produits pharmaceutiques, des matières plastiques, avec une richesse et une diversité qui dépasse de loin la nature elle-même.

C'est surtout dans le domaine de l'électricité que se sont révélées des possibilités complètement insoupçonnées, des applications merveilleuses que, pour ma part, je ne me lasse pas d'admirer. La possibilité de communiquer en moins d'un dixième de seconde avec un point quelconque de la surface de la Terre, par radiotélégraphie, radiophonie ou télévision et même de prendre contact avec la Lune par écho hertzien dépasse ce que l'imagination la plus ardente aurait pu prévoir il y a cinquante ans. Le savant ou le technicien qui se serait posé a priori de semblables problèmes aurait été pris pour un fou, et légitimement puisqu'il n'aurait aucune chance d'aboutir. Et pourtant tout cela devait sortir des recherches complètement désintéressées concernant le mystérieux phénomène de l'étincelle électrique connu depuis l'antiquité.

Non seulement une première application de ces recherches a été celle du paratonnerre de Franklin, mais, un siècle plus tard, a commencé le merveilleux développement de l'électrotechnique prolongé par celui de la radiotechnique et appelé à transformer complètement les conditions d'existence des hommes.

On ne se lasse jamais de rappeller le coup de génie de Maxwell qui, par souci d'esthétique et pour mettre plus de symétrie et de cohérence dans les équations de l'électromagnétisme, a modifié certaines d'entre elles, et concluant, des équations ainsi modifiées, à l'existence possible d'ondes de nature électromagnétique se propageant avec la même vitesse que la lumière. De là deux conséquences d'importance capitale, l'une d'ordre théorique, l'autre d'ordre expérimental. D'une part, la théorie électromagnétique de la lumière est venue libérer la physique des difficultés que laissait subsister après Fresnel la théorie des ondulations; d'autre part, l'Académie de Berlin ayant mis au concours en 1880 la vérification expérimentale des idées de Maxwell, Henri Hertz réussit en 1887 à produire électriquement les ondes prévues par Maxwell et à leur reconnaître les propriétés d'une lumière de grande longueur d'onde. Puis les ingénieurs s'en sont emparés et ont créé notre radiotechnique actuelle.

C'est encore le souci de comprendre le mécanisme du courant électrique qui, par l'étude de la décharge dans les gaz raréfiés, a conduit à la découverte des rayons cathodiques et de la structure granulaire de l'électricité, de l'électron, première étape franchie il y a cinquante ans dans l'exploration précise du monde des atomes. Une première série d'applications absolument imprévisibles est celle des rayons cathodiques à l'oscillographie, c'est-à-dire à l'analyse des phénomènes dans le temps à l'échelle du dix-millionième de seconde, d'où la possibilité de la télévision, par exemple, et du radar dont la carrière commence à peine et qui s'est déjà montré d'une extraordinaire souplesse.

Plus surprenante et susceptible d'applications plus merveilleuses encore, est la chaîne continue des découvertes qui a suivi celle des rayons cathodiques et dont chacune a entraîné la suivante: rayons X, radioactivité naturelle puis artificielle, chimie nucléaire, libération de l'énergie atomique.

Ainsi, non seulement la pensée résout des problèmes posés par les besoins de l'action, mais encore, une fois mise en marche et construisant la science pure, elle se montre d'une extraordinaire fécondité pour créer de nouvelles possibilités d'action.

Il semble même qu'on puisse aller plus loin et affirmer qu'aucune recherche vraiment scientifique, si abstraite et désintéressée qu'elle paraisse, ne reste sans trouver tôt ou tard ses applications, qu'aucun effort de pensée n'est perdu pour l'action. Je viens d'en donner des exemples dans le domaine des sciences physico-chimiques; il en est de même pour les sciences naturelles et pour les mathématiques.

Les recherches si longtemps méconnues de Mendel sur l'hérédité sont à l'origine d'une science nouvelle, la génétique, dont les appllications se font de plus en plus importantes et nombreuses.

En mathématiques, les exemples abondent. Les anciens géomètres comme Euclide et Apollonius s'étaient intéressés aux courbes qu'ils ont appelées coniques puisqu'on les obtient par section plane d'un cône de révolution. Ils en ont étudié avec beaucoup de soin les propriétés. C'était là, je crois, curiosité pure puisqu'il a fallu attendre deux mille ans pour que Kepler et Descartes en trouvent des applications, le premier à l'astronomie en énonçant les lois du mouvement elliptique des planètes et préparant ainsi l'oeuvre de Newton, le second en résolvant, grâce à sa connaissance approfondie des propriétés des coniques, les problèmes posés par Kepler de la loi de réfraction de la lumière, et de l'anaclastique ou dioptre parfait qui donne, d'un point à l'infini, comme une étoile, une image réellement ponctuelle.

Des applications peut-être encore plus imprévues sont celles des nombres que les algébristes du dix-septième siècle ont appelés imaginaires et qu'ils ont introduits pour permettre de résoudre toutes les équations du second degré et par suite, comme l'a montré d'Alembert, toutes les équations d'un degré quelconque. Ils ne se doutaient pas que ces nombres imaginaires fourniraient aux ingénieurs électriciens d'aujourd'hui le moyen le plus simple pour traiter les problèmes posés par la technique des courants alternatifs. La physique moderne, et particulièrement la mécanique ondulatoire font un usage constant de ces nombres complexes.

Il en est de même pour la théorie des groupes, branche des mathématiques développée surtout après les travaux d'Evariste Galois, mort à vingt ans en 1831. Cette théorie, dont le but primitif était d'éclairer profondément le mécanisme de l'algèbre et ce qui concerne la résolution des équations algébriques, s'est singulièrement élargie et trouve maintenant des applications dans tous les domaines des mathématiques et de la physique; en géométrie, en cristallographie, en théorie des quanta, en théorie de la relativité il n'est plus possible de se passer de la notion de groupe. En relativité restreinte, par exemple, un rôle fondamental est joué par un groupe de transformations que nous appelons le groupe de Lorentz. M. Elie Cartan a montré combien la notion de groupe éclaire ce qui concerne la difficile théorie de la relativité généralisée grâce à laquelle le génie d'Einstein a pu résoudre les difficultés que laissait subsister la mécanique céleste de Newton et aborder ou résoudre de manière entièrement nouvelle les problèmes de la gravitation et de la structure de l'Univers.

Cette théorie, qui nous apporte la représentation du monde la plus satisfaisante obtenue jusqu'ici fait usage, non seulement de la théorie des groupes, mais encore d'autres parties des mathématiques développées antérieurement sans aucun souci des applications, par exemple de la théorie des tenseurs qui fournit actuellement à la physique le moyen le plus souple et le plus parfait de représentation des grandeurs, et aussi des géométries non euclidiennes ou non riemaniennes construites par les mathématiciens dans un but exclusif de clarification et de généralisation.

Il est très remarquable que ces géométries les plus générales qui on trouvé d'abord leur application en physique en permettant d'unifier profondément les deux sciences jusque là indépendantes que sont la physique et la géométrie, ont trouvé récemment leur emploi en électrotechnique. Quelques années avant la guerre, j'ai fait partie à Liége d'un jury chargé d'examiner des travaux des candidats au prix Montefiore; nous avons été unanimes pour donner la première place à un ingénieur américain, Gabriel Kron, qui a montré combien l'emploi des géométries les plus gènérales et du calcul des matrices, intimement lié au calcul tensoriel, permet de simplifier et de généraliser la solution des problèmes d'électrotechnique concernant la construction et le calcul des machines à courant continu ou à courant alternatif.

Je vous conterai encore l'histoire du major Mac Mahon qui s'occupait de théorie des nombres et plus particulièrement du difficile problème des carrés magiques. Quand on lui demandait la raison de cette préférence, il répondait, soucieux de ne pas laisser abîmer par l'usage les outils délicats qu'il forgeait: «Parce que c'est la seule partie des mathématiques qui ne puisse servir à rien». Il est mort avant d'avoir eu le chagrin de constater que ses carrés magiques fournissent le moyen le plus simple por résoudre les problèmes d'armures posés par la téchnique du métier Jacquart. Georges Teissier me dit qu'ils rendent également des services dans la solution de problèmes agricoles tels que celui de la rotation des cultures.

Si tout effort de pensée vient ainsi féconder l'action, réciproquement le développement de la technique vient mettre au service de la science des moyens d'action toujours plus puissants sans lesquels certaines recherches seraient impossibles. Le cyclotron, par exemple, qui permet d'opérer des transmutations en lançant des noyaux atomiques les uns contre les autres, le grand électro-aimant de Bellevue, utilisent des courants électriques puissants que seules les grandes stations centrales modernes sont capables de fournir. Le développement des industries métallurgiques, travaillant en liaison avec les laboratoires de recherche, a permis de créer des alliages nouveaux dont les propriétés élastiques, thermiques ou magnétiques viennent constamment apporter à la science de nouveaux moyens d'investigation. Ainsi nous constatons, dans l'état actuel des choses, une solidarité de plus en plus étroite, une liaison de plus en plus intime entre la science et la technique, entre les formes modernes de la pensée et de l'action.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

BICENTENÁRIO DA UNIVERSIDADE DE PRINCETON

PROGRAMA DA «CONFERENCE ON PROBLEMS OF MATHEMATICS»

Fazendo parte das celebrações comemorativas do bicentenário da notável Universidade de Princeton, cujo nome está já ligado à história da Ciência, realizou-se de 17 a 19 de Dezembro de 1946 um congresso de matemàticos. Aí se debateram alguns dos assuntos de maior interesse actual como se pode avaliar pelo programa que traduzimos na íntegra. Este congresso apesar dalguns países não se terem representado reuniu um grupo de grandes matemáticos e deve ter sido um dos primeiros de importância depois da guerra.

PROGRAMA

Dezembro 17 — Abertura

Presidente: L. P. Eisenhart.

1.ª Sessão — *Álgebra*

Presidente: E. Artin; *Conferente:* G. P. Hochschild; *Discussão dirigida por:* G. Birkhoff, R. Brauer, N. Jacobson, J. F. Ritt.

2.ª Sessão — *Geometria Algébrica*

Pres.: S. Lefschetz; *Conf.* I. S. Cohen; *Disc. dir. por*: W. V. D. Hodge, O. Zariski.

3.ª Sessão — *Geometria Diferencial*

Pres.: O. Veblen; *Conf.:* G. B. Allendoerfer; *Disc. dir. por*: V. Hlavaty, T. Y. Thomas.

4.ª Sessão: — *Lógica Matemática*

Pres.: A. Church; *Conf:* J. C. C. McKinsey; *Disc. dir. por:* A. Tarski.

Dezembro 18 — 5.ª Sessão — *Topologia*

Pres.: A. W. Tucker; *Conf.:* S. Eilenberg; *Disc. dir. por:* H. Hopf, D. Montgomery, N. E. Steenrod J. H. C. Witehead.

6.ª Sessão — *Novos campos de investigação*

Pres.: J. von Neumann; *Conf.:* V. Bargmann; *Disc. dir. por*: G. C. Evans, F. D. Murnaghan, J. L. Synge, N. Wiener.

7.ª Sessão — *Teoria Matemática das Probabilidades*

Pres.: S. S. Wilks; *Conf.:* J. W. Tukey; *Disc. dir. por:* H. Crámer, J. L. Doob, W. Feller.

Dezembro 19 — 8.ª Sessão — *Análise*

Pres.: S. Bochner; *Conf.:* R. P. Boas; *Disc. dir. por:* L. V. Ahlfors, E. Hille, M. Riesz, A. Zygmund.

9.ª Sessão — *Análise Global*

Pres.: M. Morse; *Conf.:* R. P. Boas; *disc. dir. por:* R. Courant, H. Hopf.

Além de numerosos matemáticos americanos, entre os quais os que trabalham na «School of Mathematics» do «Institute for Advanced Study» e no «Department of Mathematics» da Universidade de Princeton, participaram tambem na conferência, os seguintes matemáticos: G. Ancochea (Salamanca), K. Borsuk (Varsóvi)a, R. Brauer (Toronto), Catunda (S. Paulo), L. Chiang (Changai), H. Crámer (Stockolmo), P. Dirac (Cambridge), Hlavaty (Praga), Ky Fan, W. Hodge (Cambridge), H. Hopf (Zürich), L. Hua (Peiping), M. Newmann (Manchester), M. Riesz (Lund), e J. Whitehead (Oxford).

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES (A. F. A. S.)

66.ª REUNIÃO — CONGRESSO DE BIARRITZ — SETEMBRO DE 1947

A «Gazeta de Matemática» tem o prazer de levar ao conhecimento dos matemáticos portugueses a realização do congresso da A. F. A. S. em Biarritz no próximo mês de Setembro e de os convidar a participar no referido congresso.

Os investigadores que desejem apresentar comunicações poderão enviá-las directamente ao Secretariado da Associação (28, rue Serpente–Paris 6^{e}) ou por intermédio da «Gazeta de Matemática». Convem:

1.º — até ao dia 1 de Julho mandar o título da comunicação acompanhado dum curto resumo de 10 ou 15 linhas das comunicações orais, o que permitirá planear a organização das sessões;

2.º — até ao dia 1 de Agosto apresentar o texto das comunicações (duração 20 minutos, 4 páginas de texto).

As comunicações podem abranger qualquer ramo das matemáticas. O programa provisório indica porém para a ordem do dia da Secção de Matemática as seguintes questões:

1.º — Aproximações diofantinas.
2.º — Teoria das funções inteiras e meromorfas.
3.º — Operações lineares.
4.º — Geometrias finitas.

e, em comum com a Secção de Mecânica:

5.º — Mecânica quântica.
6.º — Teorias ergódicas.

ASSOCIAÇÃO ESPANHOLA PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

19.º CONGRESSO — SAN SEBASTIAN

De 7 a 13 de Abril do corrente ano realizar-se-á em San Sebastian um congresso da Associação Espanhola para o Progresso das Ciências.

Anuncia-se entre outros discursos inaugurais o do Prof. Tomás R. Bachiller, da Faculdade de Ciências da Universidade de Madrid, intitulado «*Estado actual de la teoria de la dimensión en los espácios topológicos*».

Pela Sociedade Portuguesa de Matemática serão apresentadas quatro comunicações dos seus associados Profs. Dr. Ruy Luís Gomes, Dr. Almeida Costa, Dr. Hugo B. Ribeiro, e Dr. A. Pereira Gomes.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Em Janeiro de 1947 reuniu a Assembleia Geral da S. P. M. que aprovou o relatório da Direcção. Foram eleitos na mesma sessão para o biénio 1947-1948:

Assembleia Geral: *Presidente,* Dr. Manuel Peres; *Secretários,* Dr.ª D. Maria Henriqueta Trigo de Sousa Zanatti e Dr. Augusto Macedo Sá da Costa.

Direcção: *Presidente,* Prof. Manuel Zaluar Nunes; *Vice-Presidente,* Dr. Jaime Xavier de Brito; *Secretário-Geral,* Dr. Hugo Baptista Ribeiro; *Tesoureiro,* Dr. Orlando Morbey Rodrigues; *1.º Secretário,* Dr. D. Maria do Pilar Ribeiro; *2.º Secretário,* Dr. José Cardoso Morgado Jr.; *Vogal:* Dr. Alfredo Pereira Gomes.

Delegados à Associação Portuguesa para o progresso das Ciências: Profs. Drs. Ruy Luís Gomes e Bento J. Caraça.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

MÉTODOS GEOMÉTRICOS — SÔBRE A INVERSÃO

por *Raul Rato*

Do programa actual de Matemática, 7.º ano dos liceus, faz parte o estudo dos métodos geométricos para a resolução de problemas, fazendo-se referência especial aos métodos de transformação. Mas, nem nos livros aprovados ou não oficialmente, nem nos pontos propostos em exame, se faz qualquer referência à *transformação por inversão.* Ora é este um dos métodos geométricos mais fecundos e que fornece, por vezes, soluções muito elegantes para problemas aparentemente complicados.

Propômo-nos, neste estudo, dar uma breve notícia deste método, quanto baste para o aplicar à resolução do seguinte problema:

«Achar a intersecção de uma recta com uma cónica, sem traçar a curva».

A transformação por inversão

«Duas figuras dizem-se *inversas*, quando entre os seus pontos existe uma correspondência biunívoca, de modo tal que as rectas que unem dois pontos homólogos concorrem num ponto, o *polo da inversão,* e os produtos das distâncias de dois pontos homologos ao polo é constante, a *potência da inversão.*

Há uma certa analogia entre a homotetia e a inversão; qualquer ponto tem um e só um ponto inverso, num dado sistema, e, porque há reciprocidade, os pontos dizem-se *conjugados inversos;* mas onde na homotetia se diz *razão de homotetia,* um quociente, diz-se na inversão *potência da inversão,* um produto. Outra diferença se impõe desde logo, a homotetia é transitiva, a inversão *não o é;* duas figuras homotéticas de uma terceira são homotéticas entre si, duas figuras inversas de uma terceira não são *inversas entre si*, são homotéticas.

Na homotetia, qualquer figura é homotética de si mesma, coincidindo todos os pontos homologos, isto é, sendo cada ponto homotético de si mesmo. Na inversão há figuras que são inversas de si mesmas, sem que todos os pontos sejam inversos de si mesmos. Por exemplo, numa recta que passa pelo *polo* os pontos conjugados inversos existem na recta, mas são, em regra, distintos.

Numa circunferência traçada com centro no *polo* e raio igual à raiz quadrada da *potência,* todos os pontos são inversos de si mesmos e por isso se lhe chama ⊙ *de auto-inversão.*

A figura inversa de uma circunferência é, em regra, outra circunferência; mas se a ⊙ directa passa pelo *polo*, a transformada é uma recta que não passa por ele, e reciprocamente. Se a $\odot$ directa é *ortogonal* com a $\odot$ de auto-inversão, isto é, se as tangentes nos pontos comuns são perpendiculares, a $\odot$ transformada coincide com a $\odot$ directa, mas *sòmente* os pontos comuns à $\odot$ de auto-inversão, são inversos de si mesmos; os outros conjugados inversos são distintos:

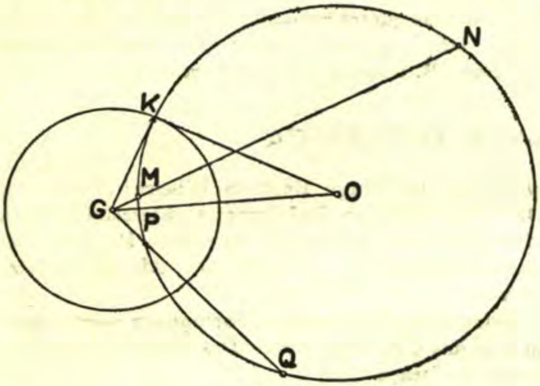

Fig. 1

a circunferência diz-se *inversa de si mesma*. Esta propriedade notável verifica-se claramente na fig. 1.

Sendo G o *polo* e $\overline{GK}^2$ a *potência*, será a $\odot[G, \overline{GK}]$ a $\odot$ de auto-inversão; sendo a $\odot[O, \overline{OK}]$ ortogonal com $[G]$, será $O\hat{K}G=90^\circ$ e serão M e N, P e Q conjugados inversos por ser $\overline{GK}^2=\overline{GM}.\overline{GN}=\overline{GP}.\overline{GQ}$.

Com estes elementos já podemos resolver o nosso problema.

Uma definição geral das cónicas

Define-se habitualmente a *parábola* como «lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto, o *foco* e de uma recta, a *directriz*».

Esta definição pode generalizar-se à hiperbole e à elipse. Chama-se director, nestas cónicas, o circulo descrito de um foco, como centro, e de raio igual ao *eixo transverso*, na hiperbole, ao *eixo maior* na elipse. A recta directriz da parábola pode assemelhar-se-lhes, considerando-a como pertencendo a uma circunferência descrita do foco impróprio como centro. Toma-se, nesta definição, o círculo pela circunferência; esta *incorrecção* é habitual, para se não estabelecer confusão com as directrizes da elipse e da hipérbole, que são linhas rectas.

Consideremos um dos focos e o $\odot$ director descrito do outro; qualquer ponto da curva fica a igual distância do foco e do $\odot$ director e é indiferente, dada a simetria das curvas em relação aos eixos, tomar um ou outro foco, contanto que se tome o $\odot$ director descrito do outro.

Com efeito, na elipse de focos F e F_1, e eixo maior $\overline{AB}$, temos para qualquer ponto $M: \overline{MF}+\overline{MF_1}=\overline{AB}$, ou $\overline{MF}=\overline{AB}-\overline{MF_1}$, e na hiperbole do eixo transverso AB, semelhantemente $\overline{MF_1}-\overline{MF}=\overline{AB}$, ou $\overline{MF}=\overline{MF_1}-\overline{AB}$.

Contando $\overline{AB}-\overline{MF_1}$ no sentido de F_1 para M e $\overline{MF_1}-\overline{AB}$ no sentido de M para F_1 aquelas diferenças representam a distância de M ao $\odot$ director $[F_1]$ da elipse, no 1.º caso, da hiperbole, no 2.º caso, distância que é em ambos os casos igual a MF, distância do ponto ao foco.

Podemos, pois, definir qualquer das três cónicas como «lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do foco e do $\odot$ director».

Será a partir desta definição que resolvemos o problema proposto.

Resolução do problema

Segundo a difinição dada, a intersecção de uma recta com uma cónica será o ponto da recta que fique equidistante de um foco e do $\odot$ director com centro no outro foco, ou seja centro de uma circunferência que passe polo foco e seja tangente ao $\odot$ director.

Parábola

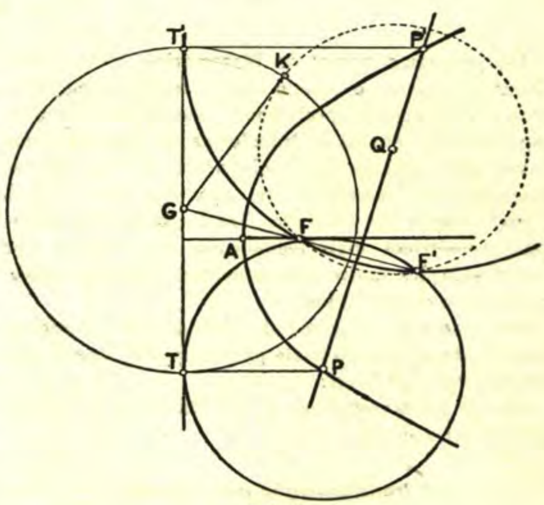

Fig. 2

Sejam, fig. 2, a parábola definida pelo vértice A e pelo foco F, fig. 3, a hipérbole definida pelos vértices A e B e pelos focos F e F_1 e, fig. 4, a elipse definida também pelos vértices A e B e pelos focos F e F_1; e seja em qualquer das figuras a recta r (PP'), cuja intersecção com a curva se pretende determinar. Tomemos, nas três figuras, o foco F e a directriz TT', fig. 2, ou $\odot$ director $[F_1]$, fig. 3 ou fig. 4. Para aplicarmos a transformação por inversão, procuremos o *polo* e a *potência* de modo que a figura formada pela recta dada, pela directriz ou $\odot$ director e ainda pela circunferência solução $[P]$ seja inversa de si mesma; nesta figura os pontos inversos de si mesmos serão os pontos de tangência, a partir dos quais se encontram com toda a facilidade os pontos de encontro da recta com a curva, que são os centros das circunferências-solução. Para que a figura referida seja inversa de si mesma, é necessário que o sejam separadamente as rectas e circunferências que a formam.

Como P -.- PP', a $\odot[P]$ deve passar por F', simétrico de F_1 em relação a PP', tomando o polo G sobre FF' e adoptando a potência $\overline{GF}\times\overline{GF'}$, a $\odot[P]$ será inversa de si mesma, o que dá uma primeira condição para a determinação de G.

Na parábola, fig. 2, a directriz, como é uma linha recta, tem que passar pelo polo e assim teremos $G\equiv FF_1'.TT'$. Para a hipérbole ou para a elipse, fig. 3 ou fig. 4, uma $\odot[Q]$ de raio qnalquer que passe por F e F' será inversa de si mesma, no mesmo sistema; esta $\odot$ auxiliar corta o director $\odot[F_1]$ nos

Hipérbole

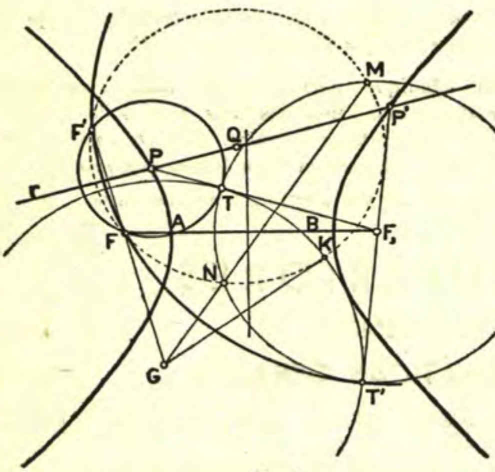

Fig. 3

pontos M e N que são conjugados inversos e teremos $G\equiv FF'.MN$. A raiz quadrada da potência, $\sqrt{\overline{GF}.\overline{GF'}}$, obtem-se tirando a tangente $\overline{GK}$ à $\odot[Q]$, que na fig. 2 se traça especialmente para esse fim.

Obtivemos assim todos os elementos para a construção. Com G e $\overline{GK}$, traça-se o $\odot$ de auto-inversão, que determina sobre a directriz ou $\odot$ director os pontos de tangência T e T'; levantando em T e T' perpendiculares a TT', fig. 2, ou unindo T e T' com F_1, fig. 3 e fig. 4, o que equivale ao mesmo, obtêm-se sobre a recta dada os pontos P e P', soluções do problema proposto.

Elipse

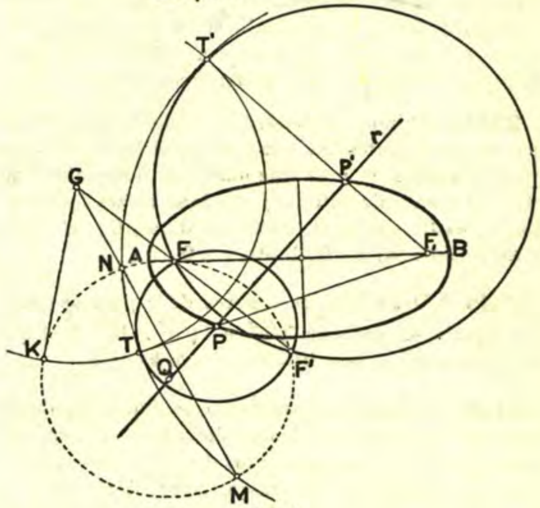

Fig. 4

Nas fig. 2, 3 e 4 estão traçadas as curvas e as circunferências $[P]$ e $[P']$, que não são necessárias para a construção, mas servem para melhor inteligência do que fica exposto.

Discussão

Na posição relativa dos dados, de que resultam as fig. 2, 3 e 4, ha duas soluções; assim sucederá sempre que F' ficar dentro do círculo director, considerando no caso da fig. 2 o centro impróprio do lado do foco.

Se F' cair sobre a directriz, ou $\odot$ director, teremos $F'\equiv G$, e a $\odot$ de auto-inversão reduzida a um ponto: a recta dada é *tangente* à curva; tire-se a perpendicular à recta directriz ou use-se o ponto $G\equiv F'$ com F_1 e teremos sobre a recta o *ponto de contacto* da tangente à curva. Se F' cair fora do círculo director, o problema não tem solução, a recta é exterior à curva.

Conclusão

O problema que resolvemos mostra-nos algumas das possibilidades do método de transformação por inversão.

Outros problemas do mesmo género e de outros diferentes poderiamos estudar, porque a inversão pode aplicar-se nas mais variadas questões da Geometria.

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

F. C. L. — Exame de Aptidão — Outubro de 1946

2343 — Determine as condições a que deve satisfazer o parâmetro m para que a inequação $m+1-3m^2-2mx-x^2<0$ seja verificada por todo e qualquer valor real atribuido a x. R: *A inequação proposta é equivalente à seguinte* $x^2+2mx+3m^2-m-1>0$, *e terá por isso que ser* $2m^2-m-1>0$, *quer dizer,* $m<-1/2$ *ou* $m>1$, visto serem $-1/2$ e 1 *os zeros do primeiro membro desta última desigualdade.*

2344 — Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ para que ela tenha: 1) uma raiz nula; 2) duas raízes nulas; 3) uma raiz infinita; 4) duas raízes infinitas. R: 1) $c=0$, $a\neq 0$; 2) $c=0$, $b=0$, $a\neq 0$; 3) $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$; 4) $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$.

2345 — Determine os valores de k para os quais são iguais os radicais $\sqrt[k]{a^3}$ e $\sqrt[27]{a^k}$. R: *Terá que ser* $3/k=k/27$ *ou seja* $k^2=81$, *donde* $k=\pm 9$.

2346 — Dados um cateto e a área dum triângulo rectângulo, deduza, em função dos dados, as fórmulas que exprimem os comprimentos dos lados desconhecidos do triângulo e os seus ângulos. R: *Seja* A *a área e* b *o cateto dados. O outro cateto* c *é dado pela expressão* $c=2A:b$ *e a hipotenura* a *por* $a=\sqrt{(4A^2+b^4):b^2}$. *A tangente do ângulo* B *oposto ao cateto* b *é dado por* $\operatorname{tg} B=b^2/2A$ *e* $\widehat{C}=90^\circ-B$.

2347 — Verifique a identidade $\sec(a+b).\sec(a-b)=1:(\cos^2 a-\cos^2 b)$. R: *A identidade proposta é equivalente a* $\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 a-\cos^2 b$. *Como* $\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a(1-\operatorname{sen}^2 b)-\operatorname{sen}^2 a(1-\cos^2 b)=\cos^2 a-\cos^2 b$, *fica verificada a identidade proposta.*

2348 — Calcule sem recorrer às tábuas $\operatorname{cosec} 16\pi/3$. R: *Como é* $16\pi/3=5\pi+\pi/3$ *e* $\operatorname{sen}(5\pi+\pi/3)=\operatorname{sen}(\pi+\pi/3)=-\operatorname{sen}\pi/3=-\sqrt{3}/2$, *será*

$$\operatorname{cosec} 16\pi/3=-2\sqrt{3}/3$$

2349 — Deduza o valor da razão entre a área duma esfera e a àrea total dum cilindro equilatero nela inscrito. R: *O cilindro equilátero inscrito na esfera tem por medida da geratriz, que é igual ao diâmetro da base,* $R\sqrt{2}$, *se for* R *a medida de raio da esfera; então a área total do cilindro é dada por*

$$\pi R\sqrt{2}\,(R\sqrt{2}+R\sqrt{2}:2)=3\pi R^2:$$

A razão pedida será por isso $4\pi R^2:(3\pi R_2:2)=8:3$.

2350 — Considere uma circunferência e nela um diâmetro MN, e uma corda MP; e seja Q a extremidade da corda que se dirige segundo a bissectriz do ângulo NMP. Prove que a tangente à circunferência no ponto Q é perpendicular à recta a que pertence a corda MP. R: *O ângulo* $N\widehat{P}M$ *é recto pois está inscrito num arco de* 180°. *Sendo* Q *o ponto médio do arco* $\widehat{NP}$ *a tangente em* Q *é paralela à corda* NP, *pois ambas são perpendiculares ao raio* OQ, *se for* O *o centro da circunferência. Assim a tangente é perpendicular à recta a que pertence a corda* MP.

2351 — Indique quais os números inteiros que pode somar simultâneamente aos dois termos da fracção $15/35$ sem lhe alterar o valor. R: *Os inteiros da forma* 3 m e 7 m *onde* m *é um inteiro qualquer.*

Solu,ões dos n.os 2343 a 2351 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 1945-46.

2352 — Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{n+1}{n}\log n}$.

R: *O teorema de Cauchy* $\lim\sqrt[n]{\varphi(n)}=\lim\varphi(n+1)/\varphi(n)$ $(n\to\infty)$, *conduz ao valor* $L=1$.

2353 — Determinar o intervalo de convergência da série de termo geral $u_n=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^n$. R: *Trata-se duma série geométrica. É convergente para* $|x/(x-1)|<1$, *ou seja* $x<1/2$.

2354 — Determine os limites laterais de $y=\operatorname{arctg} 1/I(x)$ para $x=1$.

R: $y(1+0)=\pi/4$ *e* $y(1-0)=\pi/2$.

2355 — Calcular as derivadas das funções

a) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x(3k^2-x^2)}{k(k^2-3x^2)}$; *b)* $y=\log\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

R: *a)* $y'=3k/(k^2+x^2)$; *b)* $y'=\sec x/2$.

Soluções dos n.os 2350 a 2351 de L. Mendonça de Albuquerque.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Fevereiro de 1947

2356 — Derive a função

$$y=\arccos\sqrt{\frac{a^{\operatorname{sen}\alpha x}}{ch\,\alpha x}}\qquad (a,\alpha \text{ const}\,;\ \alpha>0)\,.$$

2357 — Calcule a derivada de 3.ª ordem, para $x=-2$, da função $y=(x+2)^3\,e^{tg^2x+\log|\operatorname{sen}x|}$.
R: $y=uv$ *com* $u=(x+2)^3$ $v=e^{tg^2x+\log|\operatorname{sen}x|}$ $y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$ *pela fórmula de Leibniz. Para* $x=-2$, $u=u'=u''=0$, $u'''=6$. *Logo* $(y''')_{x=-2}=6e^{tg^2(-2)+\log|\operatorname{sen}(-2)|}$.

2358 — Considere o rectângulo limitado pelas rectas de equações: $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ e considere o ponto $P(\alpha,\beta)$. Ache a equação do lugar geométrico dos pontos tais que a soma dos quadrados das suas distâncias aos vértices do rectângulo é constante e tem o valor que assume no ponto P. Classifique o lugar e considere os casos particulares que porventura se possam apresentar. R: *Os vértices do rectângulo são os pontos* $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$. *Donde a equação do lugar:* $x^2+y^2+(x-a)^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2+x^2+(y-b)^2=\alpha^2+\beta^2+(\alpha-a)^2+\beta^2+(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+\alpha^2+(\beta-b)^2$; $x^2+y^2-ax-by=\alpha^2+\beta^2-a\alpha-b\beta$: *donde:* $(x-a/2)^2+(y-b/2)^2=(\alpha-a/2)^2+(\beta-b/2)^2$. *O lugar é uma circunferência de centro situado no centro do rectângulo e de raio igual a* $\sqrt{(\alpha-a/2)^2+(\beta-b/2)^2}$. *O único caso particular digno de menção é* P *ser o centro do rectângulo; a circunferência degenera então num ponto.*

2359 — Ache as equações cartesianas das superfícies cujas equações em coordenadas esféricas (polares do espaço) são $\rho=4$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}-2/3$, $|\theta|=\pi/4$ (nas condições usuais de transformação). Determine as coordenadas cartesianas de todos os pontos comuns às 3 superfícies. R: *A 1.ª superfície é uma superfície esférica de centro na origem dos eixos coordenados e de raio* 4; *a sua equação cartesiana é:* $x^2+y^2+z^2=16$. *A 2.ª superfície é um plano passando pelo eixo dos* zz *que forma um ângulo* $\operatorname{arc\,tg}-2/3$ *com o eixo dos* xx; *sua equação cartesiana é:* $-3/2=x/y$ *ou* $2x+3y=0$. *A 3.ª superfície é uma superfície cónica de revolução de vértice na origem dos eixos coordenados, de eixo coincidente com o eixo dos* zz *e de semiabertura igual a* 45°; *sua equação cartesiana é:* $\pm\sqrt{x^2+y^2}/z=1$ *ou* $x^2+y^2-z^2=0$. *Acham-se os pontos comuns resolvendo o sistema de* 3 *equações a* 3 *incógnitas:* $x^2+y^2+z^2=16$, $2x+3y=0$, $x^2+y^2-z^2=0$ *ou, mais simplesmente, do modo seguinte:* $x=4\,.\,\sqrt{2}/2\,.\,(\pm\sqrt{2}/13)$, $y=4\,.\,\sqrt{2}/2\,.\,(\mp\sqrt{4/13})$, $z=4\,.\,(\pm\sqrt{2}/2)$ *escolhendo convenientemente os sinais. Correspondem* 4 *pontos de intersecção.*

Soluções dos n.os 2356 a 2359 de Peter T. Braumann.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º exame de frequência — 8-3-946.

2360 — Resolver a equação:

$$(z^2+i)^3+i=0\,,\quad [i=+\sqrt{-1}]\,.$$

R: *A equação proposta é equivalente a* $(z^2+i)^3=-i$ *ou* $z^2+i=\sqrt[3]{-i}$ *donde resultam as três equações* $z^2+i=i$, $z^2+i=-\sqrt{3}/2-i/2$ *e* $z^2+i=\sqrt{3}/2-i/2$ *cada uma das quais dá dois valores para* z.

2361 — Discutir o sistema

$$\begin{cases} ax-by=0\\ ay-bz=0\\ az-bx=0\\ x+y+z=1\end{cases}$$

no qual a e b são parâmetros reais arbitrários. R: *O determinante de 3.ª ordem formado pelos coeficientes das incógnitas da 1.ª, 2.ª e 4.ª equações é sempre não nulo para todos os valores reais de* a *e* b *não nulos; o único característico formável é igual a* b^3-a^3, *logo para* $a=b$ *o sistema é compatível e determinado e para* $a\neq b$ *é incompatível. Geomètricamente: se* $a=b$ *os 4 planos tem um ponto comum pois os três primeiros constituem um feixe e o último corta a recta de intersecção; se* $a\neq b$ *os três primeiros têm apenas como ponto comum a origem e o último não passa por lá.*

2362 — Diga de quantas maneiras distintas pode distribuir 20 volumes numa estante com 4 prateleiras colocando 5 volumes em cada uma. Examine as hipóteses que correspondem a considerar, ou não, a ordem dos volumes em cada prateleira. R: *Interessando a ordem:* $A_{20,5}\cdot A_{15,5}\cdot A_{10,5}\cdot A_{5,5}=20!$ *Não interessando:* $C_{20,5}\cdot C_{15,5}\cdot C_{10,5}\cdot C_{5,5}=\dfrac{20!}{5!\,4}$.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º Exame de frequência — 15-3-946

2363 — Dado o complexo $z=\dfrac{1}{2+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$ determinar θ de modo que o seu afixo esteja sobre a recta $y=x/2$. R: *Multiplicando ambos os termos de* z *pelo conjugado do denominador vem* $z=\dfrac{2+\cos\theta}{5+4\cos\theta}-i\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta}$ *e para que* z *satisfaça ao enunciado deve ser* $-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2+\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$, *donde se tira* $\theta=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ *e* $\theta=\operatorname{arctg}3/4$.

2364 — Dada a equação: $x^4+\lambda x^2-3x-1=0$ determinar λ de modo que a soma dos quadrados das suas raízes seja igual a -6 $[\sum\alpha^2=(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta]$. Deduzir daí que a equação tem 3 raízes complexas e 2 reais e determinar estas com um decimal exacto, pelo menos. R: *Da relação dada no enunciado vem* $-6=-2\lambda$ *ou* $\lambda=3$. *A equação será* $x^4+3x^2-3x-1=0$ *cujas raízes reais são* $+1$ *e* $-0{,}2\ldots$

Soluções dos n.^{os} 2360 a 2364 de J. Marujo Lopes.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º Exercício de revisão — Dezembro de 1946.

2365 — Dados o ponto $P\equiv(2,1)$ e as rectas $r_1\equiv 2x-y+2=0$ e $r_2\equiv x+y+1=0$, determine a equação da recta r_3 tal que o ponto P seja o ortocentro do triângulo definido por r_1, r_2 e r_3. R: *Designando por* h_1 *e* h_2 *as alturas relativas a* r_1 *e* r_2 *respectivamente, tem-se:* $h_1\equiv x+2y-4=0$, $h_2\equiv x-y-1=0$. *Visto* r_3 *ser definida pelos pontos de intersecção de* h_1 *com* r_2 — $(-6,5)$ — *e de* h^2 *com* r_1 — $(-3,-4)$, *vem:* $r_3\equiv 3x+y+13=0$.

2366 — Dada a parábola $\pi\equiv y^2-x=0$, determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas do foco sobre as tangentes a π. R: *A equação geral das tangentes a* π *é* $x=ay-a^2/4$, *equação que pode, por exemplo, determinar-se obrigando a ser coincidentes os pontos de intersecção das linhas representadas pelas equações* $x=ay+b$ *e* $y^2-x=0$. *O ponto genérico do lugar geométrico é o ponto comum a* $x=ay-a^2/4$ *e* $4ax+4y-a=0$; *a equação pedida obtém-se eliminando* a *entre estas duas equações, vindo, portanto,* $x=0$.

2367 — No plano xOy, a cada ponto $R(\alpha,\beta)$, distinto da origem, faz-se corresponder a recta $r\equiv\alpha x+\beta y=1$. Mostre que se R descreve a recta $hx+ky=1$, a projecção P de R sôbre r descreve a circunferência $x^2+y^2-hx-ky=0$ (com exclusão de um ponto). R: *A projecção de* R *sôbre* r *é determinada pela solução do sistema* $\alpha y-\beta x=0$, $\alpha x+\beta y=1$. *Em virtude do enunciado tem-se também* $h\alpha+k\beta=1$. *Eliminando* α *e* β *entre estas três equações obtém-se* $x^2+y^2-hx-ky=0$, *o que prova que* P *percorre a circunferência referida (com exclusão da origem).*

Soluções dos n.^{os} 2365 a 2367 de José Morgado.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência, 1945-46.

2368 — Primitivar a função $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x+1}$.

R: *Escrevendo* $\mathrm{P}f(x)=\mathrm{P}1\,.\operatorname{arc\,tg}1/(x+1)$, *o método de primitivação por partes dá*

$$\mathrm{P}f(x)=x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}+\mathrm{P}\frac{x}{x^2+2x+2}.$$

E para esta última primitiva o artifício (ou o método de Fubini)

$$\mathrm{P}\frac{x}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\mathrm{P}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\mathrm{P}\frac{1}{x^2+2x+2}$$

dá também

$$\mathrm{P}\frac{x}{x^2+2x+2}=\log\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

2369 — Primitivar a função $f(x)=\dfrac{3+\cos x}{1-\operatorname{sen}x}$.

R: *Pode utilizar-se a mudança de variável* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. *Mas também se calcula fàcilmente a primitiva a partir do artifício* $f(x)=\dfrac{3+\cos x}{1-\operatorname{sen}x}=\dfrac{(3+\cos x)(1+\operatorname{sen}x)}{1-\operatorname{sen}^2x}=$ $=3\sec^2x+3\sec x\operatorname{tg}x+\sec x+\operatorname{tg}.\,x+c$.

2370 — Verificar que, quaisquer que sejam as funções f e φ, $z=f(xy)-\varphi(y/x)$ satisfaz à condição $y^2t-x^2r=yq-xp$.

2371 — Determinar os pontos da hipérbole $xy=1$ onde se anula a 1.ª derivada direccional da função $f(x,y)=x^2-y^2$, segundo a direcção da tangente. R: *Duas soluções reais*: $A(1,1)$ *e* $B(-1,-1)$.

Soluções dos n.^{os} 2368 a 2371 de L. Mendonça de Albuquerque.

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de frequência — Fevereiro de 1945.

2372 — Sendo a inteiro, calcular (se existir) o integral $\int^{b} x^a\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{b}\,dx$.

2373 — Estudar a convergência do integral

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}\right)^{\cos 2\alpha}d\theta.$$

2374 — Seja $f(x)$ uma função, de variável real, que toma o valor 1 nos pontos de abscissa racional e o valor 3 nos pontos de abscissa irracional. Mostrar: 1.º Que $f(x)$ é integrável, no sentido de Lebesgue, em qualquer intervalo (a,b); 2.º Que não é integrável no sentido de Riemann; 3.º Que não é uma derivada.

2375 — A função $f(x)=1-\cos^3x+\operatorname{sen}^2x$ é infinitésima com x. De que ordem?

GEOMETRIA DESCRITIVA E PROJECTIVA

F. C. C. — 1.º Exame de frequência — 1945-46

2376 — *Geometria de Monge.* São dados: um ponto e duas rectas enviezadas. Conduzir pelo ponto a recta que é perpendicular à primeira e se apoia na segunda. R: *Conduz-se pelo ponto o plano* α *perpendicular à recta dada* r. *O ponto* Q *de intersecção de* α *com* r, *define com o ponto dado,* P, *a recta pedida.*

2377 — *Geometria de Monge.* Rodar o segundo plano bissector de modo que passe a conter o ponto dado. R: *Escolhe-se uma horizontal* h *do plano e ao mesmo tempo assente no plano horizontal* α *que contém o ponto* P, *dado; e rode-se* h *em* α, *tomando para eixo uma recta vertical, até conter* P. *Obriga-se depois o 2.º bissector à rotação assim definida.*

2378 — *Geometria cotada.* São dados: um plano e uma recta horizontal, conduzir por um ponto a recta que é perpendicular à horizontal e paralela ao plano. R: *Conduzem-se pelo ponto os planos:* α, *paralelo ao dado e* β *perpendicular à recta dada. A recta pedida é a intersecção de* α *com* β.

Soluções dos n.os 2376 a 2378 de L. Mendonça de Albuquerque

F. C. P. — Geometria Projectiva — 1.º Exame de frequência — 1945-46.

1.ª Parte

2379 — Demonstrar que dois triângulos ABC e $A'B'C'$, sem elementos comuns, se estiverem referidos entre si de modo que as rectas AA', BB', CC', que unem vértices correspondentes, passem todas por um mesmo ponto, O, então os lados homólogos AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, BC e $B'C'$, intersectam-se em pontos L, M e N que pertencem a uma mesma recta s. Considerar separadamente os casos dos triângulos não complanos e dos triângulos complanos.

2380 — Fixe 3 pontos O, U, N, duma mesma recta e considere um sistema de abscissas que tem êstes pontos respectivamente para ponto origem, ponto unidade e ponto neutral. Sejam a, b, c as abscissas nesse sistema de 3 pontos $\overline{O}, \overline{U}, \overline{N}$. Determinar a fórmula de transformação de abscissas do sistema O, U, N, no sistema $\overline{O}, \overline{U}, \overline{N}$. Justificar depois todas as fórmulas empregadas.

2381 — *a*) Justificar a construção de Steiner para a determinação dos elementos comuns a dois feixes de raios sobrepostos. *b*) Defina polo de uma involução de pontos sôbre uma circunferência e demonstre a sua existência. *c*) Defina centro e potência duma involução de pontos duma recta.

2382 — Defina centro, diâmetros conjugados, assíntotas, eixos e focos duma cónica e diga como os determina numa cónica (elipse ou hipérbole) definida por 5 pontos.

2383 — Como resolve o problema de construir uma cónica que passa por um ponto real M e por 4 pontos imaginários definidos por duas involuções elíticas I_a e I_b.

2384 — *a*) Defina os elementos principais duma homologia. *b*) Defina pontos isogonais. *c*) Dada uma homologia pelo seu eixo, centro e por um par de pontos, determinar os elementos principais e os pontos isogonais. Justificar a determinação dêstes últimos.

2385 — Defina polaridade entre dois planos sobrepostos e deduza as suas equações.

2.ª Parte

2386 — Desenhar um triângulo equilátero OMN de 4 cm de lado. Marcar sôbre o lado MN a partir de M um ponto A tal que $\overline{MA}=1$ cm. Considerar a hipérbole que tem por assíntotas as rectas OM e ON e que passam pelo ponto A. Determinar *a*). A tangente à hipérbole no ponto A. *b*) Os focos da hipérbole.

2387 — Desenhar um triângulo equilátero ABC de 4 cm. de lado. Traçar uma recta externa ao triângulo paralela ao lado AB e designá-la por a. Determinar o ponto X de intersecção de AC com a, e o ponto Y de intersecção de BC com a. Marcar sôbre a, $XX'=4$ cm e $YY'=6$ cm tal que se verifique a seqüência $X'YXY'$. Considerar uma cónica que passe pelos pontos A, B e C e pelos pontos duplos da involução definida por (XX') e (YY'). Determinar: *a*) O centro duma homologia de recta limite a que transforma a cónica considerada numa circunferência. *b*) O ponto cujo transformado na homologia anterior seja o centro da circunferência.

Notas: *a*) Lembrar que uma circunferência é cortada pela recta do infinito nos pontos cíclicos. *b*) Que centro duma cónica é o polo da recta do infinito.

2388 — Desenhar uma circunferência de 3 cm de raio e de centro O e traçar uma recta l que passe pelo seu centro. Tomar em l um ponto M da circunferência e traçar uma recta que passa por M e faça 45° com l. Marcar sôbre ela MA igual a 5 cm e MB igual a 8 cm, verificando-se a seqüência MAB. Tirar por M uma perpendicular p a l. *a*) Determinar mais dois pontos da cónica que passa por A, B, pelo ponto do infinito de p e pelos pontos imaginários definidos pela involução elítica que tem por centro O e elementos correspondentes os pontos M e M' da intersecção de l com a circunferência desenhada. *b*) Classificar a cónica.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de frequência ordinário — 7 de Fevereiro de 1946.

2389 — Considere o sistema formado pelos seguintes vectores deslizantes

$$\begin{cases} A_1\,\mathbf{v}_1=(-1\,,3\,,3)\;(-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\\ A_2\,\mathbf{v}_2=(0\,,-3\,,4)\;(4\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3)\\ A_3\,\mathbf{v}_3=(-6\,,1\,,2)\;(-3\mathbf{e}_1)\\ A_4\,\mathbf{v}_4=(0\,,3\,,0)\;(-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,. \end{cases}$$

Determine as coordenadas vectoriais deste torsor em relação ao ponto $C\,(0\,,1\,,2)$. Calcule o automomento e o momento mínimo. Ache os momentos do torsor em relação aos eixos coordenados. Efectue a sua redução canónica. Escreva a equação vectorial do eixo central. R: *As coordenadas vectoriais do torsor dado, em relação a* C, *são:* $\mathbf{v}=-4\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2$ *(vector principal) e* $\bar{\mu}_c=0$ *(momento resultante). O automomento e o momento mínimo são nulos. O momento em relação à origem* O *das coordenadas é* $\bar{\mu}_0=\bar{\mu}_c+\mathbf{v}\wedge(\mathrm{O}-\mathrm{C})=-10\,\mathbf{e}_1-8\,\mathbf{e}_2+4\,\mathbf{e}_3$; *logo, os momentos em relação aos eixos coordenados* Ox_1, Ox_2 *e* Ox_3 *valem, respectivamente,* -10, -8 *e* 4. *O torsor reduz-se canònicamente ao vector deslizante* $\mathrm{C}\mathbf{v}$; *portanto, a equação vectorial do eixo central, suporte de* $\mathrm{C}\mathbf{v}$, *pode escrever-se* $\mathrm{Q}=\mathbf{c}+\mathrm{x}\mathbf{v}$, *ou seja,* $\mathrm{Q}=\mathrm{O}-4\mathrm{x}\,\mathbf{e}_1+(1+5\mathrm{x})\,\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$, *onde* x *designa o parâmetro.*

2390 — Demonstre que a derivada do versor de $\mathbf{v}$ é dada por

$$(\operatorname{vers}\mathbf{v})'=\frac{\mathbf{v}\wedge(\mathbf{v}'\wedge\mathbf{v})}{v^3}\,.$$

R: *De* $\operatorname{vers}\mathbf{v}=\dfrac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}$, *deduz-se*

$$(\operatorname{vers}\mathbf{v})'=-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\cdot\frac{\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}'}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}+\frac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}'=-\frac{(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}')\,\mathbf{v}}{\mathrm{v}^3}+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}'=\frac{\mathrm{v}^2\,\mathbf{v}'-(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}')\,\mathbf{v}}{\mathrm{v}^3}=\frac{\mathbf{v}\wedge(\mathbf{v}'\wedge\mathbf{v})}{\mathrm{v}^3}\,.$$

2391 — A equação do movimento de P é

$$P=O+2\cos 3t\cdot\mathbf{i}+3\operatorname{sen}3t\cdot\mathbf{j}\,.$$

Ache a equação cartesiana da trajectória e indique a sua natureza geométrica. Determine os vectores vectores velocidade e aceleração iniciais. R: *A trajectória é a elipse de equação* $\mathrm{x}^2/4+\mathrm{y}^2/9=1$. *A velocidade inicial vale* $\mathrm{P}'(0)=9\,\mathbf{j}$ *e a aceleração inicial,* $\mathrm{P}''(0)=-18\,\mathbf{i}$.

2392 — P e Q têm por trajectória uma circunferência de raio r. Os dois pontos móveis partem simultâneamente de A, em sentidos contrários, com a velocidade V_0. O movimento de P é uniformemente acelerado de aceleração tangencial $x>0$. A componente tangencial da aceleração de Q é também x. P e Q sobrepõem-se, pela primeira vez, precisamente no ponto em que Q inverte o sentido da marcha. Quanto vale x? R: $\mathrm{x}=\dfrac{\mathrm{V}_0^2}{\pi\mathrm{r}}$.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de frequência extraordinário — 28 de Março de 1946.

2393 — Sabendo que $m=(x^2+y^2)/2$ é a função potencial do campo $(\mathbf{v})$, 1) determine a natureza geométrica das superfícies equipotenciais e das linhas do campo; 2) calcule a circulação do vector $\mathbf{v}$ desde o ponto $A\,(2\,,-4\,,0)$ até à origem O das coordenadas. R: 1) *As superfícies equipotenciais são superfícies cilíndricas de revolução em tôrno de* Oz; *as linhas do campo são rectas paralelas a* Oxy *e concorrentes com* Oz · 2) *A circulação pedida vale* $\mathrm{dW}=10$.

2394 — Entre as coordenadas cartesianas rectangulares (X, Y, Z) do vector $\mathbf{v}$ e as do ponto $P\,(x,y,z)$ existem as relações $X=y-z$, $Y=-x$, $Z=x$. Demonstre que a função $\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$ define um campo de momentos. R: *Designando por* $\mathbf{v}_P$ *e* $\mathbf{v}_{P_1}$ *os valores do campo nos pontos* P *e* P_1, *respectivamente, verifica-se fàcilmente que se tem* $\mathbf{v}_\mathrm{P}\,|\,(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)=\mathbf{v}_{\mathrm{P}_1}\,|\,(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)$ · *Dêste modo, o campo goza da propriedade projectiva; logo, é um campo de momentos.*

2395 — Demonstre o seguinte teorema: «para que o movimento de P seja rectilíneo é necessário que o vector $P'\wedge P''$ seja identicamente nulo; se P' nunca se anular, a condição anterior é também suficiente».

2396 — Um ponto está animado de movimento rectilíneo uniformemente variado de aceleração igual a $8\;\mathrm{m/s^2}$. Para $t=3$ seg. a velocidade é nula. O ponto passa pela origem dos espaços no instante $t=11$ seg. Qual é a equação horária do movimento?
R: $s=-220-24\,\mathrm{t}+4\mathrm{t}^2$ (U. m.).

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matematica». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2397 — Se os números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 são tais que $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_4|=|z_4-z_1|$, então $z_1+z_3=z_2+z_4$ e $(z_1-z_3)/(z_2-z_4)$ é um imaginário puro.

2398—Mostre que é igual a 1 o determinante $|a_j^i|$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$, assim definido: $a_1^i=a_i^1=1$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ e $a_j^i=a_j^{i-1}+a_{j-1}^i$, $(i,j=2,3,\cdots,n)$.

2399 — Mostre que $\sum_{p=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n} (n!)^{(p-1)/n} = \left(\frac{e-1}{e}\right)^2$.

Problemas n.os 2397 a 2399 propostos por José Morgado J.or.

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2338 — Se os comprimentos dos lados a, b e c de um triângulo plano estão em progressão aritmética, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ (opostos respectivamente a a e b) satisfazem à relação $\cos\hat{A}+\text{sen}\,\hat{A}\,\text{cotg}\,\hat{B}/2=2$. R: *Seja* P *o ponto de intersecção da bissetriz de* $\hat{B}$ *com* b. *Do triângulo* [ABP] *tira-se* $c=AP\cos\hat{A}+BP\cos\hat{B}/2$ *ou* $\cos A+(BP/AP)\cos\hat{B}/2=c/AP$. *Por outro lado é* $BP/AP=(\text{sen}\,\hat{A})/(\text{sen}\,\hat{B}/2)$ *e* $c/AP=a/CP=(c+a)/AC$. *Logo,* $\cos\hat{A}+\text{sen}\,\hat{A}\,\text{cotg}\,\hat{B}/2=(c+a)/b=(2a+2r)/(a+r)=2$, c. q. d.

2342 — Determinar todos os pares de inteiros cujo produto é igual ao quádruplo da sua soma. R: *Sejam* x *e* y *os dois inteiros; segundo o enunciado, é* $xy=4(x+y)$ *ou* $(x/4)\cdot y=x+y$. *Será* $x=4k$ (k *inteiro*) *e, consequentemente,* $y=4k/(k-1)$, *quere dizer,* $k-1$ *divide* 4, *pois não divide* k *e* y *é inteiro. Então* $k=-3,-1,0,2,3,5$ *e os pares de inteiros correspondentes são:* -12 *e* 3; -4 *e* 2; 0 *e* 0; 8 *e* 8; 12 *e* 6; 20 *e* 5.

Soluções n.os 2338 e 2342 de José Machado Gil (Barquinha).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

57 — FRICK, Bertha M. — **The first Portuguese Arithmetic.** Separata do Vol. XI, 1945 de Scripta Mathematica.

Em separata do Vol. XI, 1945, de Scripta Mathematica, publicou Bertha M. Frick, uma desenvolvida notícia sobre a Primeira Aritmética Portuguesa, notícia, a que foi levada pelo conhecimento que teve da existência recente na Biblioteca da Universidade de Columbia do:

Tratado da pratica d'Arismetica composta & ordenada per Gaspar Nicolas, agora quarta vez impressa, & com muita diligença emmendada. Vendese em Lixboa em casa de Francisco Grapheo Liureiro. 1559.

e de nem esta nem qualquer das aritméticas portuguesas do seculo XVI, vir citada na *Rara Aritmetica* do professor David Eugene Smith nem na sua *Addenda* de 1939.

A esta aritmética faz referência Gomes Teixeira na História das Matemáticas em Portugal, dando a existência de um exemplar da primeira edição de 1519, na Biblioteca da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Um outro exemplar da 1.ª edição deve existir na Biblioteca da Casa de Braganca em Vila Viçosa, pois pertencia a D. Manuel II, e um exemplar da 3.ª edição, de 1541, existe na Biblioteca de Évora. Na Biblioteca Nacional de Lisboa só existe um exemplar da 10.ª edição de 1716, duzentos anos depois da data da 1.ª.

Esta Aritmetica tem bastante interesse por duas razões a primeira por que sendo escrita em português em 1519, é de notar que em Itália só existiam, à data, uma meia dúzia de aritméticas a primeira das quais datada de 1478; na Alemanha só duas aritméticas, escritas em alemão tinham sido publicadas uma em 1489, e uma outra que, entre 1514 e 1584, teve várias edições. Em Espanha a primeira aritmética aparece em 1512, a qual foi traduzida para francês em 1515, constituindo esta tradução a primeira aritmética escrita em lingua francesa.

Uma segunda aritmética espanhola foi publicada em 1515. Quer isto dizer que Portugal teve a sua primeira aritmética, escrita por um português, quando ainda em Espanha e na Alemanha eram raras, e em França nada havia além da tradução do espanhol.

A segunda razão aparece no facto de ela ter tido 10 edições, a última das quais em 1716, o que mostra a popularidade da obra, cuja influência, no ensino foi por isso notável.

A notícia de Bertha Frick, que refere todos êstes factos é muito desenvolvida e completa. Nela se faz a análise da obra e das várias edições, procurando-se determinar o lugar das edições e resolver alguns problemas de ordem bibliográfica que elas levantam, mostrando a autora bom conhecimento, até do desenvolvimento da arte tipográfica em Portugal no seculo XVI.

Em apêndice dá-se uma lista das 10 edições do tratado, e das outras aritméticas portuguesas do século XVI, bem como a bibliografia de que a autora se serviu.

Trata-se, como se vê, de um estudo meticuloso, que pode servir de guia a trabalho do género, e que não nos dando novidades, pois a bibliografia é toda portuguesa, tem no entanto o mérito de pôr em evidência um trabalho de aritmética publicado em Portugal numa época em que tais escritos eram raros na Europa.

José da Silva Paulo

58 — PICONE, Mauro e MIRANDA, Carlo — **Esercizi di Analisi matematica** — 2.ª ed. — «Studium Urbis» — Roma, Città Universitaria, 1945.

No ensino da Matemática, como no ensino de qualquer ciência, há que atender a esta norma fundamental: não estabelecer uma funda separação entre a teoria e a prática. Quando tal norma não seja respeitada, o ensino teórico perderá eficiência e o ensino prático conduzirá a uma perigosa mecanização, que é a antítese mesma do espírito matemático.

Ora o presente livro de exercícios dos Prof.s Picone (da Universidade de Roma) e Miranda (da Universidade de Nápoles) não está seguramente em desacordo com aquele princípio. A escolha dos problemas, o seu encadeamento mútuo e as considerações de que vêm precedidos ou entremeados fazem deste livro um substancioso e sugestivo comentário da teoria, o qual não só ilumina as noções pròpriamente teóricas, como ainda prepara o estudioso para enfrentar questões de interesse eminentemente prático. Está-se portanto aqui muito longe dos bem conhecidos receituários acéfalos, que tão deploráveis serviços têm prestado, sobretudo entre nós. E menos ainda se está em presença dum amontoado de questões sem interesse, desligadas do realidade, no género daqueles «quebra-cabeças» de almanaque, que fazem as delícias dos generais reformados e dos matemáticos *manqués*.

A distribuição das matérias é a seguinte: Cap. I, *Números complexos. Equações algébricas* (sem métodos de aproximação). Cap. II, *Análise combinatória. Determinantes. Sistemas de equações lineares.* Cap III, *Limites. Funções duma variável.* Cap. IV, *Derivadas das funções duma variável.* Cap. V, *Integrais das funções duma variável.* Cap. VI, *Séries.* Cap. VII, *Derivadas e diferenciais para as funções de mais duma variável.* Cap. VIII, *Integrais curvilíneos.* Cap. IX, *Integrais múltiplos.* Cap. X, *Equações diferenciais.*

A todos os assuntos (exceptuado o das equações algébricas) é dado o máximo desenvolvimento compatível com a mentalidade dos leitores a que se destina: alunos dos dois primeiros anos de Matemática das universidades italianas. Os exercícios, numerosos e vários — sempre acompanhados de abundantes considerações teóricas — são escalonados de maneira a tornar fácil a subida, mesmo aos alunos dotados de menos fôlego. Todo o livro é escrito com aquela clareza, simplicidade e precisão, que distinguem as obras didácticas italianas e tornaram tão familiares aos nossos estudantes de Matemática os nomes de Enriques, Castelnuovo, Levi-Civita, Severi, Amaldi, Pincherle, Fubini, etc., etc.

Pelos referidos predicados, esta obra parece-nos mesmo recomendável àqueles estudiosos que, não tendo podido seguir cursos regulares, necessitem duma boa cultura matemática.

José Sebastião e Silva

59 — GILLESPIE. R. P. — **Integration.** 3 th. ed. Oliver and Boyd Ltd. — Edinburgh and London, 1945.

A. C. Aitken e D. E. Rutherford dirigem desde 1939 a edição duma excelente colecção de textos intitulada «University Mathematical Texts». Alguns destes livros, com uma simpática apresentação gráfica, são destinados, geralmente, a um largo público e a forma simples, ainda que correcta, por que são tratados os assuntos garantiram-lhe uma boa aceitação da parte dos leitores.

«Integration» da autoria de Gillespie é um livro que parece dedicado aos estudantes que precisam de adquirir um conhecimento elementar dos métodos gerais e particulares de primitivação e de possuirem os conceitos de integral de Riemann, simples e múltiplo, integral curvilíneo, de superfície, etc., indispensáveis para abordar o estudo de muitas questões nos mais variados campos científicos. Os primeiros capítulos são muito fáceis de abordar e não requerem da parte do leitor mais do que o conhecimento dos elementos do cálculo diferencial. A noção de integral definido é introduzida como o cálculo de áreas planas e de volumes de revolução. Só no capítulo V é que é apresentada uma definição mais rigorosa e se estudam as principais propriedades do integral de Riemann. O capítulo seguinte ocupa-se das generalizações dêste conceito: integrais impróprios, paramétricos, etc., sendo alguns parágrafos dedicados a um rápido estudo das funções Γ e β de Euler. No último capítulo é, sobretudo, completado o estudo dalguns dos assuntos tratados anteriormente.

O conceito de integral curvilíneo, tratado só no caso das curvas planas, parece-nos poderia ser definido duma forma mais natural e geral. Também por uma forma igualmente acessível se pudessem talvez apresentar os conceitos de integral de Lebesgue e de Stieltjes hoje de tão largas aplicações. Muito seria de desejar, na nossa opinião, a colecção Univ. Math. Texts viesse a contar de futuro com um livro contendo, entre outras, estas matérias que seriam levadas ao conhecimento dum grande público, como merecem.

É de registar também o número e qualidade dos exercícios que acompanham e esclarecem os assuntos versados neste livro. Manuel Zaluar Nunes

60 — TURNBULL, Prof. H. W. — **Theory of Equations** — 3.th ed. — University Mathematical Texts — Oliver and Boyd — Edinburgh and London, 1945.

O Autor é porventura já conhecido de há muito dalguns dos nossos leitores. Limitamo-nos a traduzir passagens do prefácio que traduzem fielmente as características principais deste livro.

«Contém uma exposição rápida e elementar sôbre equações algébricas, desenvolvida tanto sob o aspecto teórico como prático, e acompanhada da álgebra dos polinómios e das funções racionais.

... São tratadas as equações dos 3.º e 4.º graus, as equações de tipo mais geral, a eliminação e as funções simétricas, mas não se aborda a teoria dos invariantes nem a dos grupos.

... O livro foi escrito com a preocupação constante do desenvolvimento histórico da álgebra; muitos dos assuntos foram escolhidos pela sua importância não só por fazerem parte da educação matemática geral mas por serem preliminares no estudo de toda a algebra superior».

A 3.ª edição é ampliada com um capítulo onde veem indicadas algumas contribuições recentes dos algebristas da Escola de Edinburgh. O livro tem também como origem um curso feito pelo Autor na Universidade de St. Andrews. Manuel Zaluar Nunes

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES EXCLUSIVAMENTE DE MATEMÁTICA

NACIONAIS

Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto — n.º 17 — *Sôbre os corpos comutativos* — por A. Almeida Costa — 1946.

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral:

N.ºs 2 e 5 — «*Teoria Geral da Medida*» — 1-2 — *Medida à Jordan* — Ruy Luís Gomes e Laureano de Barros — 2.ª edição — 1946.

Portugaliae Mathematica — Vol. 5, Fasc. 3-4:

Maurice Fréchet — *Fondements des méthodes statistiques d'estimation.*

Henryk Schärf — *Intégrale et mesure dans certains espaces algébriques (supplément).*

H. Hadwiger — *Ein Translationssatz für Mengen positiven Masses.*

António Gião — *Forces nucléaires, gravitation et electromagnétisme.*

Vaclaw Sierpinski — *Sur une propriété des espaces métriques dénombrables.*

L. A. Santaló — *Sobre los cuerpos convexos de anchura constante en E_n.*

Ruy Luís Gomes — *Au sujet de la notion de fonctionnelle.*

A. Pereira Gomes — *Sur l'axiome de semi-regularité.*

Sze-tsen Hu — *Homotopy properties of the space of continuous paths.*

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Ano XIX, n.ºs 9-10 (1946).

Mathematicae Notae — (Rosario) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Año 6.º — Fascs 1, 2 (1946).

Revista de la Union Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Vol. XII — núm. 1 (1946).

Espanha

Matemática Elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série — Tomo VI (1946) n.ºs 4, 5, 6; Tomo VII (1947) — n.º 1.

Revista Matemática Hispano-Americana publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española—Tomo VI (1946) n.º 6; Tomo VII (1947) n.º 1.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Mathematica — (New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics — Vol. XII, n.º 2 (1946).

França

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sujets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tome 2, fasc. 8 (1946); Tome 3, fasc. 9 (1947).

Cours d'Analyse Mathématique: I — *Théorie des Fonctions* — 1942; II — *Équations Fonctionnelles, Applications* — 1945 — par Georges Valliron. Masson et Cie., Édit. Paris.

École Normale Supérieure — Publications des Laboratoires — Mathématiques. IX — *Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Application à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'Électricité* — par André Blanc-Lapierre. Masson et Cie., Édit. Paris, 1945.

Inglaterra

The Mathematical Gazette — (London) — edited by the Mathematical Association — vol. 30, n.º 288, 291, 292 (1946).

The Journal of the London Mathematical Society Vol. 21, part 1, n.º 81 (Jan. 1946).

A first course in Mathematical Statistics — by C. E. Weatherburn. Cambridge University Press, 1946.

An Index of Mathematical Tables — by A. Fletcher, J. C. P. Miller and L. Rosenhead — Scientific Computing Science Limited — London, 1946.

Contribuitions to the study of oscillatory time-series by M. G. Kendall. Ed. National Institute of Economic and Social Research — Occasional papers IX; Cambridge University Press, 1946.

OUTRAS PUBLICAÇÕES

Afinidades — (Lisboa) — Revista de Cultura Luso-Francesa — n.ºs 19 e 20 — 1946.

A investigação científica e a importância nacional da Universidade — por Flávio Resende. Ed. do Autor.

Determinação Radiotelegráfica da Longitude e Problemas Correlativos — por José António Madeira — Publicações do Sindicato Nacional dos Engenheiros Geógrafos, 3.ª série — n.º 44, 1945.

Gazeta de Física — (Lisboa) — Revista dos Estudantes de Física e dos Físicos e Ténico-Físicos Portugueses — Vol. 1, fasc. 2 — Janeiro, 1947.

Portugaliae Physica — Vol. 2, Fasc 2:

A. Van Itterbeck et L. de Greve — *Mesures sur les films minces en argent.*

José Sarmento — *Étude des satellites de la raie* Lα *de l'or.*

G. Dedebant — *Les schémas aléatoires devant la relativité restreinte.*

Publicações do Centro de Estudos de Engenharia Civil do I. S. T. — Lisboa — I. A. C.

N.º 3. *Estacas para Fundações* — por Fernando Vasco Costa — 1946.

N.º 4. *Estudo experimental do campo de tensões pela rotura duma camada aderente* — por Júlio Ferry Borges — 1947.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºs 169 — 1946; 170, 171 — 1947.

Vértice — (Coimbra) — Revista de cultura e arte — Vol. III — n.ºs 43 e 44 — 1947.

École Normale Supérieure — Publications des Laboratoires — Physique. I — *Durée de vie de la raie de résonance d'intercombinaison du zinc* — par Henri Bruck. Masson et Cie., Édit. Paris 1942.

École Normale Supérieure — Publications des Laboratoires — Physique. VI — *Les Applications du Calcul Opérationnel* — par Pierre Herreng — Masson et Cie, Édit. Paris, 1944.

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones — Tomo VI, n.ºs 65-66, 67 — 1946, e Tomo VII, n.º 71 — 1947.

Revista Politécnica — (São Paulo) — n.º 149 — 1945.

The Method of Dimensions — by A. W. Porter — Methuen's Monographs on Physical Subjects, London 1946.