GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDAO E DOS ESTUDANTES DE MATEMATICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII N.° 32 MAIO-1947

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa - N

TIP. MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c — L I S B O A — N

ANO VIII - N.º 32 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO-1947

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, L.da* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c. — LISBOA-N

A MÁQUINA CALCULADORA ELECTRÓNICA (*)

por T. R. Kennedy Jr.

O Ministério da Guerra dos Estados Unidos tornou recentemente conhecido aquilo que foi um dos mais importantes segredos da guerra, uma máquina maravilhosa que permite efectuar cálculos matemáticos até agora demasiado difíceis ou laboriosos, com velocidades que podem obter-se ùnicamente com dispositivos electrónicos. Os peritos que viram funcionar pela primeira vez esta máquina, declararam que ela é o instrumento com o qual será possível reconstruir completamente sôbre novas bases as questões científicas.

Estes instrumentos, foi dito entre outras coisas, poderão revolucionar a engenharia moderna, introduzindo uma era nova no campo dos projectos industriais, e eliminar a maior parte do lentíssimo e custoso desenvolvimento por tentativas que era actualmente necessário na planeação das máquinas mais complicadas. Até hoje as subtis dificuldades matemáticas têm muitas vezes forçado os autores dos projectos a aceitar para os seus problemas soluções que não são as melhores, com custos mais elevados e um mais lento progredir da técnica.

A nova maravilha de velocidade electrónica, que se chama «Eniac», elimina virtualmente o tempo necessário para realizar tais estudos. Os seus inventores asseguram que ela é capaz de resolver um problema matemático num tempo mil vezes inferior àquele até agora exigido. O «Eniac», conhecido mais exactamente por «integrador e calculador numérico electrónico», não tem nenhuma peça mecânica em movimento: nada se move dentro das suas 18 mil válvulas termiónicas e ao longo dos seus vários quilómetros de fio — a não ser os pequeníssimos electrões.

Há contudo aparelhos mecânicos associados à máquina que traduzem ou «interpretam» a linguagem matemática do homem em termos compreensíveis pelo «Eniac» e viceversa. O «Eniac» foi inventado e aperfeiçoado por dois jovens cientistas da Escola Moore de engenharia electrotécnica da Universidade de Pennsylvania. São êles o Dr. John William Mauchly, de 38 anos, professor de física e «dilettante» de meteorologia, e o seu assistente J. Presper Eckert Jr., de 25 anos, que dirigiu a execução do projecto. Êles foram também assistidos por muitos outros professores da escola.

Naquele período, a arma de artelharia do Exército dos Estados Unidos procurava uma máquina capaz de preparar um grande número de dados balísticos necessários para a compilação das tábuas de tiro das novas armas de ofensiva destinadas ao ultramar. Sem as tábuas de tiro as peças não podiam ser usadas com eficácia.

O capitão H. H. Goldstine, matemático adido ao serviço técnico da artelharia, teve notícia do projecto do Dr. Mauchly, falou dêle ao coronel Paul N. Gillon do polígono de Aberden (Maryland), obteve dêste o apoio entusiástico, e o projecto poude assim ir avante com o auxílio do Estado. Trinta meses depois a máquina estava completa e em função, e executava com facilidade aquilo que só homens treinados no cálculo podiam fazer com grande fadiga. O «Eniac» será brevemente instalado em Aberden de modo permanente.

O «Eniac» resolveu em duas horas um «dificílimo problema de guerra» que foi introduzido no seu com-

(*) Relatório do «United States Information Service» (Secção de Imprensa), do qual foi gentilmente cedida uma cópia à *Gazeta de Matemática* pelo Prof. Mauro Picone, Director do «Istituto per le Applicazioni del Calcolo», de Roma.

plicado circuito apenas a máquina foi completada. O mesmo trabalho teria normalmente ocupado 100 hábeis calculadores por um ano inteiro.

Esta máquina capaz de resolver tão difíceis problemas pertence àquela categoria que os peritos de cálculo numérico chamam dos *calculadores «digital»*. Fundamentalmente, ela não faz nada mais do que somar, subtrair, multiplicar e dividir. Ela pode efectuar estas operações gerando impulsos eléctricos cuja frequência, rigorosamente controlada, é de 100.000 impulsos por segundo, e executa uma operação em cada vinte impulsos, conseguindo por isso executar, por exemplo, 5.000 adições por segundo.

Visto que todos os problemas matemáticos, por mais abstrusos e complicados que sejam, podem ser resolvidos com as quatro operações [1], desde que haja bastante tempo disponível, o «Eniac» pode abreviar este processo, eliminando o factor tempo, e dar uma resposta a qualquer problema. Assim afirmam os inventores.

Mas esta máquina pode fazer ainda muito mais. Ela é dotada da faculdade humana da «memória» para executar uma sucessão de operações na ordem necessária. Ela tem mesmo elementos de «controle» e pode, dentro de certos limites, determinar automáticamente a sucessão conveniente das operações. Ela pode por exemplo confrontar dois números e, segundo a grandeza deles, escolher um dos dois procedimentos possíveis.

Como primeira coisa, ela recebe os dados iniciais do problema de uma série de cartões perfurados de maneira a indicar as «condições iniciais e aos limites do problema». Um dos «cérebros» do «Eniac» encarrega-se de realizar esta operação. Quando o problema foi fixado mediante perfurações sobre cartões, estes são introduzidos através duma fenda num «dispositivo de leitura». Agora não temos mais do que sentar-nos e esperar os resultados. Algumas vezes será necessário esperar muito tempo; mas o «Eniac» resolve a maior parte dos problemas em poucos segundos.

Um elemento chamado «Master programmer» vigia todo o cálculo e assegura que seja levado a termo.

O «Eniac» compõe-se de quarenta painéis da altura de cêrca de três metros, todos cobertos de manípulos e quadrantes. Premindo os manípulos, acendem-se luzes róseas de lâmpadas de néon sobre numerosos painéis que apresentam impressos os números próximo das lâmpadas. O espaço para as demonstrações práticas no qual é instalado o «Eniac» é de cêrca de dez metros por vinte e é ocupado quási inteiramente pela máquina. O Dr. Arthur W. Burks da Escola Moore que dirigiu a demonstração prática, explicou que as quatro operações fundamentais da aritmética permitem resolver quási todos os problemas desde que sejam desenvolvidas com rapidez suficiente. «Prestem atenção, podem não se aperceber sequer da operação», disse o professor permindo um botão para elevar o número 97376 à potência de expoente 5000. A maior parte dos presentes não se apercebeu sequer do que se passou: a operação foi resolvida num abrir e fechar de olhos.

Para demonstrar a extrema velocidade do «Eniac», o Dr. Burks desta vez reduziu a velocidade da operação da máquina de mil vezes e repetiu o problema. Se os observadores tivessem tido a paciência de esperar 16 minutos e um têrço, eles teriam podido ler a resposta sobre os indicadores de néon. A operação sucessiva foi uma multiplicação: 13975 por 13975; o produto apareceu imediatamente: 195.300.625. Num décimo de segundo foi obtida uma tábua de quadrados e de cubos; depois uma tábua semelhante de senos e cosenos. Todo o trabalho foi realizado e os resultados foram impressos numa grande fôlha, antes que a maior parte dos visitantes tivesse passado duma sala à outra.

Foi depois introduzido no «Eniac» um difícil problema que teria exigido várias semanas de trabalho da parte de um hábil calculador: o «Eniac» resolveu-o em quinze segundos.

Todos os problemas devem primeiro que tudo ser decompostos nos seus elementos essenciais, registados sobre cartões perfurados e feitos passar através dum dispositivo chamado «leitor», construído pela «International Business Machines». O «leitor» traduz a linguagem matemática naquela propria do «Eniac» e vice-versa; feito isto, a máquina está pronta para entrar em acção. Os valores numéricos que pertencem à vasta categoria das «constantes» são interpoladas todas as vezes que seja necessário. Para isto, o «Eniac» faz intervir quatro espécies de «memoria».

Normalmente o «Eniac» efectua operações com números de dez algarismos, mas pode com igual facilidade operar com números até vinte algarismos chegando assim a resultados de dimensões astronómicas.

Na construção da máquina foram empregadas mais de duzentas mil horas de trabalho; ela contém mais de meio milhão de soldaduras e custa cerca de 400 milhares de dólares. Ela absorve para o próprio funcionamento uma quantidade de electricidade três vezes superior àquela exigida pelo funcionamento de uma das maiores instalações radio-transmissoras dos Estados Unidos.

Até há três anos o «Eniac» era sómente uma idea; hoje êle representa a maior maravilha das aplicações electrónicas. O Dr. Mauchly tornou-se professor cate-

(1) Na sua fase final, bem entendido, porque a primeira parte da resolução (aquela pròpriamente conceitual), nada tem que ver com a execução material de operações aritméticas (nota do T.)

drático da Escola Moore em 1941, na esperança de vir a realizar o seu projecto e a revolucionar a arte de efectuar cálculos complexos com grandes números. Ele admitia, por exemplo, que se pudesse vir a fazer qualquer coisa que permitisse a previsão do tempo a longo prazo.

No campo das actividades da paz, o Dr. Mauchly prevê não só a possibilidade de efectuar cálculos para a previsão do tempo a longo prazo, mas ainda cálculos para aviação, turbinas a gás, válvulas termoiónicas para micro-ondas, televisão, instalações para a produção de energia, projecteis dotados de velocidade superior à do som, além de estudos cada vez mais rigorosos sobre o movimento dos planetas.

Segundo o que afirmou Goldstine, os cientistas do passado efectuaram montanhas de cálculos, que poderão agora ser em grande parte fàcilmente levados a termo com o auxílio das máquinas calculadoras electrónicas. Ele salientou como a resolução das equações do movimento, que no passado constituía um obstáculo quase insuperável, e os estudos sobre os aviões e foguetes a alta velocidade sejam «sòmente alguns dos campos numerosíssimos que obterão grande vantagem do cálculo electrónico».

O sr. Eckert, por sua vez, previu uma época na qual, tendo à disposição as velocidades de que são capazes os aparelhos electrónicos, se poderão prontamente resolver para fins práticos aqueles problemas que têm sido até hoje irresolúveis porque exigiam a vida inteira dum homem para a sua resolução:

«A velha era está declinando: aquela nova das velocidades electrónicas está-se aproximando, e nós poderemos começar a tratar os problemas científicos, baseando-nos sobre novas concepções».

Tradução do italiano de J. Sebastião e Silva

NOTA

O relatório precedente fala de uma nova maravilha de técnica — uma daquelas prodigiosas criações humanas que tocam as raias do inverosímil. Devemos, todavia, sublinhar que, ao publicar este relatório, tivemos como principal objectivo pôr em evidência um facto que muita gente parece ainda obstinada em não reconhecer: o papel fundamental da Matemática no mundo de hoje e de amanhã.

Há ainda em Portugal quem pregunte: «Para que serve a Matemática?» E é também frequente ouvir entre nós esta outra pregunta: «Pois ainda há que descobrir em Matemática?»

Ora a verdade é que, na época em que *vivemos*, a Técnica está pondo à Matemática problemas cada vez mais difíceis, que a obrigam a um desenvolvimento contínuo, a uma incessante renovação de métodos e a imprevistas ampliações de domínios. Parece ultrapassada aquela fase de Matemática característica do século passado — a fase dos *belos* teoremas, das *belas* propriedades, das *elegantes* demonstrações — em que o investigador, à maneira dos gregos, fazia a *matemática pela matemática*, com preocupações de puro artista.

Hoje as necessidades são outras, e o homem não tem já tempo para se deter em locubrações platónicas, voltando as costas à realidade. De resto, é sobretudo tornando-se *útil* que a Ciência se torna *bela*. O que não quere dizer que deva cessar por completo a actividade puramente especulativa: ela conduz, por vezes, a resultados concretos imprevistos. Mas para tudo há uma justa medida, e é fora de dúvida que um completo alheamento da realidade conduz, *a la longue*, a uma completa esterilidade.

Em compensação, que riqueza de sugestões, que impulsos vigorosos, nos vêm a cada passo do mundo empírico! «La physique» dizia Poincaré «ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières: elle nous fait pressentir la solution; elle nous suggère des raisonnements». E mais adiante: «Deviner avant de démontrer! Ai-je besoin de rappeler que c'est ainsi que se sont faites toutes les découvertes importantes?»

«A Matemática é uma ciência experimental» — proclamou Heaviside, ao lançar o cálculo simbólico. E, se houve exagêro na sua posição, ela foi contudo utilíssima como reacção à atitude dos matemáticos *sérios* que o criticavam. ¿Que importava que o seu método não estivesse sancionado pela teoria — se a prática lhe vinha dar razão? O aperfeiçoamento lógico era certamente necessário: era mesmo indispensável. Mas êsse aperfeiçoamento veio depois, a pouco e pouco, com amplas repercussões em todo o edifício matemático.

Vem ainda a propósito falar aqui do «Istituto per le Applicazioni del Calcolo» de Roma, interessantíssima criação do Prof. Picone — a quem devemos a possibilidade de publicar aqui o relatório precedente. Numa actividade de mais de vinte anos, têm sido resolvidos neste Instituto inúmeras questões provenientes dos mais variados domínios da Ciência e da Técnica: electrotecnia, hidráulica, aeronáutica, construções navais, economia, estatística, actuariado, biometria, agronomia, etc., etc. Ali o matemático encontra sempre um rico manancial de ideas que não se encerram de nenhum modo num estreito círculo utilitário — que podem ser o ponto de partida para investigações de longo fôlego. E assim é que, a par duma «équipe» de hábeis calculadores, o

Prof. Picone tem podido formar um escol de investigadores que se contam entre o que há de mais prometedor na moderna geração matemática italiana.

Os institutos dêste género estabelecem um contacto com a realidade, em virtude do qual a produção matemática é apreciada não sòmente do ponto de vista da *veracidade ou falsidade*, mas sôbretudo do ponto de vista do seu *maior ou menor valor efectivo*, em relação a nós, homens, que criamos os símbolos para que êles nos sirvam, e não para que êles se tornem fins a si mesmo. Pretende-se muitas vezes ter resolvido um problema, apresentando um processo de resolução que depois, passando à prática, se revela inaplicável pela massa astronómica de cálculos que requere. Abundam assim, na Análise clássica, as *elegantes* demonstrações de existência, que bem magra satisfação podem dar a quem não queira permanecer eternamente numa atitude contemplativa.

Todavia a máquina calculadora electrónica vem modificar enormemente êste estado de coisas, multiplicando por mil, segundo se diz, as possibilidades humanas de efectuar cálculos numéricos. Dêste modo, muitos procedimentos considerados até hoje como inexequíveis passam a ter viabilidade — o que vem abrir à Ciência e à Técnica perspectivas inimagináveis.

Infelizmente, o anterior comunicado fala sobretudo de aplicações bélicas da máquina electrónica — e foi na verdade a guerra que criou o «Eniac», como foi ela que criou a bomba atómica. Mas o mesmo comunicado refere-se a várias outras possíveis aplicações do «Eniac», que nada têm que ver com a guerra.

Uma última conclusão nos parece lícito tirar daqui: a necessidade premente de arejar os nossos métodos e programas de ensino, tornando-os adequados ao espírito da época.

Entrámos numa nova era, que é, feliz ou infelizmente, a *era atómica*. E devemos abrir os olhos, fazer um esfôrço sério de adaptação, se não quizermos ficar para sempre agarrados a sombras, no mundo do passado.

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Géométries Elémentaires et Nombres Complexes

III. Variétés Quadratiques Spécialisées (*)

par **Paul Belgodère**

Transformations projectives conservant une variété quadratique:

Dans la plupart des géométries au sens de KLEIN couramment étudiées, le groupe principal est isomorphe au groupe projectif conservant une variété quadratique, ou à l'un de ses sous-groupes.

Par exemple, la *géométrie projective* considérée pour la surface seule d'une hyperquadrique de l'espace projectif S_{n+1} à $n+1$ dimensions donne, par projection stéréographique, la *géométrie anallagmatique* à n dimensions puis, par projection isotrope, la géométrie de contact des hypersphères orientées *(groupe de Lie)* de l'espace à $n-1$ dimensions. Ce même groupe correspond aussi à la *géométrie cayleyenne* à $n-1$ dimensions.

On obtiendra la *géométrie euclidienne* à n dimensions en fixant le «*point à l'infini*» de la géométrie anallagmatique, et sa projection isotrope donne la *géométrie de Laguerre* de l'espace à $n-1$ dimensions. Citons aussi la *géométrie projective réglée*, et la *cinématique à 3 dimensions*, respectivement équivalentes aux géométries à la surface d'une hyperquadrique de S_5 ou S_7.

Signalons, pour les géométries dont le groupe a même structure que le groupe des transformations projectives conservant une variété quadratique, l'importance fondamentale de la *forme polaire*, dont l'annulation exprime toujours une propriété géométrique importante.

Variétés spécialisées; utilité:

Mais le simple exemple de la *Géométrie euclidienne* nous introduit à une nouvelle étude, car on peut l'obtenir directement en fixant dans l'espace projectif un absolu quadratique tangentiellement spécialisé (conique ombilicale) c'est-à-dire en étudiant les *transformations automorphes* d'une variété quadratique spécialisée. A un changement près du *domaine de réalité* (si l'on ne considère que l'ensemble des transformations à paramètres réels), on retrouve cette propriété dans la *Géométrie de Laguerre*. De façon encore plus marquée, il en est de même dans la *géométrie pseudo elliptique* de BLASCHKE, équivalente à la cinématique plane, obtenue en fixant dans l'espace projectif S_3 une quadrique décomposée ponctuellement en deux plans,

(*) Continuação dos artigos I-Éléments Imaginaires. Réprésentations Réelles e II-Nombres Hipercomplexes, publicados respectivamente em «Gazeta de Matemática» nos n.os 30 e 31.

et tangentiellement en deux points de leur intersection.

Précisons notre langage:

Selon que nous considèrerons une multiplicité de points ou d'hyperplans, nous parlerons de variété *ponctuelle ou tangentielle.*

Nous dirons qu'une variété est:

générale, si elle n'a pas d'élément multiple ;

spéciale, ou spécialisée, si elle a des éléments multiples, sans être décomposable en multiplicités analytiquement distinctes ;

décomposée, si elle est constituée par l'ensemble de variétés analytiquement distinctes ;

dégénérée, si elle est constituée par l'ensemble de variétés confondues, de degrés moindres ;

évanescente, si son équation est identiquement vérifiée par tous les points (ou hyperplans).

Exemple: dans S_3 une *quadrique générale* n'a ni point ni plan tangent double.

— une *conique* est une quadrique spécialisée tangentiellement, et dégénérée ponctuellement en un plan double.

— un *cône* est une quadrique spécialisée ponctuellement, et dégénérée tangentiellement en un point double.

— l'ensemble de *2 plans* et de *2 points* situés sur leur intersection est une quadrique décomposée ponctuellement et tangentiellement.

Géométrie	Éléments	Éléments pour lesquels la forme quadratique est nulle	Couples d'éléments pour lesquels la forme polaire est nulle	Couples d'éléments pour lesquels la forme polaire est nulle, et dont chacun annule la forme quadratique.
Cayleyenne	Point de l'espace	Point de l'absolu	Points conjugués	Points sur une même génératrice de l'absolu.
	Droite de l'espace	Droite «minima»	Droites «perpendiculaires»	Droites minima associées.
Anallagmatique	Hypersphère	Point	Hypersphères orthogonales	Points d'une même isotrope.
De Lie		Hypersphère orientée		Hypersphères tangentes.
Projective réglée à 3 dimensions	Complexe linéaire	Droite	Complexes en involution	Droites concourantes.
Cinématique à 3 dimensions		Soma (position d'un corps solide)		Somas déduits l'un de l'autre par rotation.

Variétés quadratiques générales:

Rappelons les notations et formules habituelles.

S_p est une variété linéaire ponctuelle à p dimensions de l'espace projectif S_n, à n dimensions.

Elle y dépend de $(p+1)\,(n-p)$ paramètres.

Si elle est astreinte à passer par une variété linéaire fixée S_q, à q dimensions, elle ne dépend plus que de $(p-q)\,(n-p)$ paramètres.

Une hyperquadrique générale V_n^2 de S_n y dépend de $n\,(n+3)/2$ paramètres. Le sous groupe du groupe projectif (à $n\,(n+2)$ paramètres) qui la conserve dépend donc de $n\,(n+2)-n\,(n+3)/2=n\,(n+1)/2$ paramètres.

La V_n^2 contient des variétés linéaires S_p si $p\leq(n-1)/2$, dépendant de $(p+1)\,(2n-3p-2)/2$ paramètres, et l'on peut démontrer qu'il passe par un S_q donné de V_n^2 des S_p linéaires, entièrement situés sur V_n^2, dépendant de $(p-q)\,(2n-3p-q-3)/2$ paramètres, sous la condition $q\leq p\leq(n-1)/2$.

Pour $n=4m+1$, il existe des S_{2m} formant deux familles distinctes: deux S_{2m} de la même famille ont $1, \infty^2, \dots \infty^{2m}$ points communs; deux S_{2m} de familles différentes ont $0, \infty^1, \dots \infty^{2m-1}$ points communs.

Pour $n=4m+2$, il existe des S_{2m}, formant une seule famille.

Pour $n=4m+3$, il existe des S_{2m+1}, formant deux familles distinctes: deux S_{2m+1} de la même famille ont $0, \infty^1, \dots \infty^{2m+1}$ points communs; deux S_{2m+1} de familles différentes ont $1, \infty^2, \dots \infty^{2m}$ points communs.

Pour $n=4m+4$, il existe des S_{2m+1}, formant une seule famille.

Nous n'avons considéré jusqu'ici, conformément à l'habitude, que les variétés linéaires admises *ponctuellement* par une variété quadratique générale: par exemple une quadrique de S_3 porte deux familles de droites, une hyperquadrique de S_5 porte deux familles de ∞^3 plans générateurs, etc. Corrélativement, les hyperplans S_{n-1} tangents à l'hyperquadrique peuvent se grouper en familles linéaires, ensemble des hyperplans passant par une variété linéaire ponctuelle d'un nombre moindre de dimensions (axe de la famille).

Dans un espace S_{2m+1} à nombre impair de dimensions, il existe des variétés linéaires S_m appartenant point par point à l'hyperquadrique (et la polarité induit une *corrélation de Chasles* entre les ∞^m points de cet S_m, et les ∞^m hyperplans qui la contiennent). Mais, dans un espace S_{2m+2} à nombre impair de dimensions, il existe des S_{m+1} axes d'une famille linéaire d'hyperplans tous tangents à la variété quadratique, qui ne font que *toucher* l'hyperquadrique le long d'un S_m (et la polarité induit une corrélation de Chasles entre les ∞^m points de cet S_m, et les ∞^m hyperplans passant par le S_{m+1}, admis *tangentiellement* par l'hyperquadrique).

C'est ainsi que, dans l'espace à 4 dimensions, il existe ∞^3 plans, associés à une hyperquadrique, touchant l'hyperquadrique selon l'une de ses ∞^3 droites (qui compte double dans l'intersection), et tel que tout hyperplan qui le contienne touche l'hyperquadrique en l'un des points de la droite de contact précédente.

Plus généralement, à chaque variété linéaire S_p, située sur une hyperquadrique générale V_n^2 d'un S_n, correspond un S_{n-p-1}, qui en est polaire réciproque par rapport à la V_n^2, qui contient S_p, et qui est l'axe d'une famille d'hyperplans tous tangents à la V_n^2.

Variétés quadratiques spéciales:

Afin d'étudier les spécialisations que peut présenter l'hyperquadrique *limite* d'une famille d'hyperquadriques générales, bornons-nous au cas d'une famille d'hyperquadriques admettant toutes un $(n-1)$ èdre non dégénéré conjugué commun, et dont les équations (ponctuelle et tangentielle) peuvent donc se ramener simultanément à une somme de carrés

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 0$$

$$\frac{u_0^2}{a_0} + \frac{u_1^2}{a_1} + \cdots \frac{u_n^2}{a_n} = 0$$

les a_i étant fonctions d'un paramètre λ, et rangés par ordre d'infinitude, c'est-à-dire que pour λ assez petit

$$|a_0| \geq |a_1| \geq \cdots \geq |a_n|$$

le rapport $\left|\frac{a_n}{a_o}\right|$ tendant effectivement vers 0 avec λ, afin que la limite ne soit pas une hyperquadrique générale.

Pour l'hyperquadrique limite, seuls les a_i du même ordre que a_0 interviendront dans l'équation ponctuelle

$$b_0 x_0^2 + \cdots + b_k x_k^2 = 0, \qquad (k < n)$$

où les b_i ont entre eux les rapports limites des rapports finis des a_i $(i \leq k)$

De même l'équation tangentielle sera:

$$\frac{u_l^2}{b_l} + \frac{u_{l+1}^2}{b_{l+1}} + \cdots + \frac{u_n^2}{b_n} = 0 \qquad (l \geq k+1)$$

où les b_i ont encore entre eux les rapports limites des rapports finis des a_i $(i \geq l)$.

Ainsi, une hyperquadrique limite non générale apparaît comme ayant à la fois une équation ponctuelle et une équation tangentielle, opérant sur des carrés d'indices distincts, avec des lacunes pour certains indices, qui ne figurent dans aucune des deux équations.

Ponctuellement, l'hyperquadrique limite admet un espace linéaire double S_{n-k-1} à $n-k-1$ dimensions; tangentiellement c'est l'ensemble des S_{n-1} menés par des S_{n-l-1} tangents à une hyperquadrique générale V_{n-l}^2 d'un S_{n-l} intérieur au S_{n-k-1}.

L'espace à trois dimensions est trop restreint pour montrer de véritables exemples; toute spécialisation y entraîne une décomposition ou une dégénérescence (ponctuelle ou tangentielle); un cône est dégénéré tangentiellement en son sommet, comptant double. Mais, dans l'espace à 6 dimensions, on peut considérer une hyperquadrique spécialisée ponctuellement et tangentiellement, admettant un espace double à 3 dimensions, et dont le *noyau* tangentiel soit réduit à une conique: il apparaît ainsi une lacune d'un carré dans le couple des équations ponctuelle et tangentielle.

D'une manière générale, une hyperquadrique limite est définie par son noyau tangentiel, hyperquadrique générale d'un S_{n-l}, par sa variété double S_{n-k-1} issue de S_{n-l}, et par sa trace ponctuelle sur un S_k sans point commun avec le S_{n-k-1}.

Spécialisation purement ponctuelle ou tangentielle:

Plaçons-nous au point de vue strictement ponctuel (par exemple), en supposant l'équation tangentielle complètement évanescente. Comptons les paramètres.

Une variété quadratique d fois spécialisée a une équation comportant $n+1-d$ carrés, et porte une variété linéaire double S_{d-1}, à $d-1$ dimensions. Les S_{d-1}, situés dans S_n, y dépendent de $d(n-d+1)$ paramètres. D'autre part, dans un S_{n-d} *ne coupant* *pas* le S_{d-1} choisi, les hyperquadriques générales dépendent de $(n-d)(n-d+3)/2$ paramètres. Une hyperquadrique d fois spécialisée est parfaitement définie par sa variété double S_{d-1}, et sa trace ponctuelle sur S_{n-d}. Elle dépend donc de $d(n-d+1)+$ $+(n-d)(n-d+3)/2 \equiv n(n+3)/2-d(d+1)/2$ paramètres.

Le *groupe automorphe* de cette hyperquadrique, c'est-à-dire le sous groupe projectif de S_n qui la conserve, dépend donc de $n(n+2)-[n(n+3)/2-$ $-d(d+1)/2] \equiv n(n+1)/2+d(d+1)/2$ paramètres.

Ce groupe automorphe n'est pas *simple*, car il contient des sous-groupes invariants, dont un cas particulier est fourni par les déplacements, homothéties et translations, sous-groupes des similitudes de l'espace euclidien.

En prenant l'équation de l'hyperquadrique sous la forme:

$$x_0^2+x_1^2+\cdots\cdots+x_{n-d}^2=0,$$

les transformations automorphes peuvent s'écrire:

$$X=\left\|\begin{array}{c:c} H & 0 \\ \hdashline A & B \end{array}\right\| x$$

où la matrice (à $n+1$ lignes et colonnes) représente la transformation linéaire faisant passer de la colonne de coordonnées x à la colonne de coordonnées X.

Un point de S_{d-1} étant transformé en un autre point de S_{d-1}, le tableau à $n-d+1$ lignes et d colonnes, représenté par le symbole 0, a tous ses éléments nuls. La matrice carrée représentée par H, transformant les $x_i\,(i\leq n-d)$ en $X_j\,(j\leq n-d)$ et conservant (à un facteur près) la somme des carrés, est *orthogonale* (le produit scalaire de deux lignes différentes étant nul, et le carré scalaire d'une ligne étant égal à la valeur du déterminant, que l'on peut supposer égale à 1 à cause de l'homogénéité).

Quant aux d lignes résiduelles, leurs éléments sont arbitraires.

Remarquons que, dans la composition de deux transformations, les matrices H, H' se multiplient entre elles (substitutions du système des génératrices), les B, B' également (transformations projectives de S_{d-1}), tandis que le nouveau tableau A'' dépend des 6 tableaux AA' BB' HH'.

Comptons les paramètres:

$(n-d)(n+1-d)/2$ pour la matrice orthogonale H de déterminant 1; $d(n+1)$ pour les tableaux A et B (d dernières lignes) donc en tout $n(n+1)/2+d(d+1)/2$, conformément au résultat antérieur.

On obtient des sous groupes invariants en supposant:

H réduit à la matrice unité E

ou

B réduit à la matrice scalaire $\lambda E'$.

Comptons les variétés linéaires situées sur une V_n^2, d fois spécialisée, en nous attachant d'abord aux variétés linéaires contenant la variété double S_{d-1}, et dont la trace sur un S_{n-d} ne coupant pas le S_{d-1} doit nécessairement appartenir à la V_{n-d}^2 trace de la V_n^2: il suffit, dans ce cas de substituer à n,p,q les quantités $n-d$, $p-d$, $q-d$, dans les formules donnant le nombre de variétés linéaires portées par une variété quadratique générale.

Donc, sous les conditions $d-1\leq q\leq p\leq (n-1)/2$, il existe sur la V_n^2 des variétés linéaires S_p, à p dimensions, issues du S_{d-1}, dépendant de

$$(p-d+1)(2n-2-3p+d)/2 \text{ paramètres}$$

et des variétés linéaires S_p, issues d'un S_q, dépendant, lorsque cet S_q est fixé, de

$$(p-q)(2n-3p-q+2d-3)/2 \text{ paramètres.}$$

D'autre part, les variétés linéaires S_r à r dimensions contenues dans une variété linéaire fixée S_p à p dimensions y dépendent de $(p-r)(r+1)$ paramètres et les variétés linéaires S_r à r dimensions, contenues dans une variété linéaire fixée S_p à p dimensions, et contenant une variété linéaire S_s à s dimensions dépendent de $(p-r)(r-s)$ paramètres.

Donc, sous les conditions $s\leq r\leq p\leq r+d$, $q-d\leq$ $\leq s\leq q\leq p$, on peut considérer toute variété linéaire S_r à r dimensions située sur V_n^2 comme appartenant à *une* variété S_p à p dimensions issue du S_{d-1} double (l'entier q dépendant de la disposition relative du S_r et du S_{d-1}), et dépendant de $(p-r)(r+1)$ paramètres dans cet S_p, donc sur V_n^2 de

$$(p-d+1)(2n-2-3p+d)/2+$$
$$+(p-r)(r+1) \text{ paramètres.}$$

Lorsqu'un S_s à s dimensions de V_n^2 est *fixé* (appartenant à un S_q issu de S_{d-1}), les S_r qui passent par lui et dont la disposition est telle qu'ils soient joints à S_{d-1} par un espace linéaire S_p à p dimensions (contenant nécessairement S_q) dépendraient, si S_p était aussi fixé, de $(p-r)(r-1)$ paramètres, donc dépendent en tout sur V_n^2, lorsque S_s est seul fixé, de

$$(p-q)(2n-3p-q+2d-3)/2+$$
$$+(p-r)(r-s) \text{ paramètres.}$$

Spécialisation à la fois ponctuelle et tangentielle :

Considérons maintenant à la fois l'équation ponctuelle ($n+1-d$ carrés) et l'équation tangentielle ($n+1-d'$ carrés). Nous poserons:

$$n+1-(n+1-d)-(n+1-d')=d+d'-(n+1)=l,$$

nombre de lacunes entre les carrés qui interviennent dans l'équation ponctuelle et ceux qui interviennent dans l'équation tangentielle.

Dans tous les cas $l<d$, et en particulier si $d=1$ (variétés à un seul point double), $l=0$.

Un hyperplan tangent touche une hyperquadrique tangentielle à $d-l$ carrés de S_{d-1}. Or, ces hyperquadriques, l fois spécialisées par rapport à S_{d-1}, dépendent de $(d-1)(d-1+3)/2-l(l+1)/2$ paramètres.

De même, les hyperquadriques ponctuelles, d fois spécialisées, ayant pour espace double S_{d-1}, dépendent de $n(n+3)/2-d(d+1)/2$ paramètres.

Donc, les hyperquadriques de spécialisations d, d' de S_n, dépendent de $n(n+3)/2-d(d+1)/2+$ $+(d-1)(d+2)/2-l(l+1)/2=n(n+3)/2-1-l(l+1)/2$ paramètres, et leur groupe automorphe est à: $n(n+2)-$ $-[n(n+3)/2-1-l(l+1)/2]=n(n+1)/2+1+l(l+1)/2$ paramètres.

Il est remarquable que seules interviennent dans ces formules finales les valeurs de n et de l, mais non la place des l lacunes parmi l'ensemble des carrés figurant dans les équations ponctuelle et tangentielle. En particulier, la géométrie pseudo elliptique ($n=3$, $d=d'=2$, $l=0$), dépend d'un groupe à 7 paramètres aussi bien que la géométrie euclidienne ($n=3$, $d=3$, $d'=1$, $l=0$), avec évidemment une structure différente.

Ce groupe contient des sous groupes invariants, en particulier celui qui correspond à l'invariance simultanée du noyau tangentiel et des espaces linéaires générateurs du support ponctuel, et qui dépend de

$$n(n+1)/2+1+l(l+1)/2-(n-d)(n-d+1)/2-$$
$$-(n-d')(n-d'+1)/2=1+dd'$$

paramètres.

D'autres sous-groupes invariants correspondent à l'invariance respective du noyau tangentiel ou des espaces générateurs ponctuels, ou du S_{d-1} double, etc.

$$X=\left\|\begin{array}{c:c:c} H & 0 & 0 \\ \hdashline A & B & 0 \\ \hdashline C & D & H' \end{array}\right\| x$$

La matrice de la transformation, présentée ci-dessus, conserve les points de S_{d-1}, et la variété quadratique ponctuelle. Donc H est une matrice orthogonale à $n+1-d$ lignes et colonnes, et les deux tableaux supérieurs indiqués par 0 sont composés de termes tous nuls. De même, la matrice transposée indiquant, sur les coordonnées tangentielles, la transformation inverse, H' est une matrice orthogonale à $n+1-d'$ lignes et colonnes, et le troisième tableau indiqué par 0 est aussi composé de termes tous nuls. Quant aux tableaux A, B, C, D, ils sont composés d'éléments arbitraires, en nombre total dd'.

Remarquons que l'on ne peut pas en général normer en même temps toutes les coordonnées en sorte que les déterminants de H et H' prennent *en même temps* la valeur 1.

Le nombre de paramètres du groupe automorphe est donc:

$$(n-d)(n+1-d)/2+(n-d')(n+1-d')/2+dd'+1=$$
$$=n(n-1)/2+l(l+1)/2,$$

et le sous groupe invariant $H=E$, $H'=\lambda E'$ dépend de $1+dd'$ paramètres.

II. Sobre o Cálculo Simbólico

(continuação do n.º 31)

por ***José Sebastião e Silva***

Produto de operadores. Consideremos três conjuntos A, B, C quaisquer, e sejam: Φ, uma transformação unívoca de A em B; Ψ, uma transformação unívoca de B em C. Chama-se *produto* de Φ por Ψ, e representa-se por $\Phi.\Psi$ (ou simplesmente por $\Phi\Psi$), aquela transformação unívoca de A em C que equivale a aplicar sucessivamente Ψ, Φ (*primeiro* Ψ *e depois* Φ); isto é, em símbolos:

$$(\Phi.\Psi)(x)=\Phi(\Psi(x)), \quad \text{para cada} \quad x \varepsilon A.\ ^{(1)}$$

(1) A expressão $x \varepsilon A$ deve ler-se aqui «x *pertencente a* A».

É claro que, em particular, os conjuntos A, B, C podem coincidir entre si.

Exemplo: Se representarmos por H a classe dos seres humanos e escrevermos «$y=pad\,x$» como abreviatura de «*y é pai de x*» e «$y=mad\,x$» como abreviatura de «*y é mãe de x*» (designando por x, y elementos indeterminados de H, sem distinção de sexo), é claro que os símbolos pad, mad representarão operadores definidos pelo menos numa parte H^* de H — operadores que fazem corresponder a cada elemento x de H^* um e um só elemento ($pad\,x$ ou $mad\,x$) de H. Ora é fácil ver que o produto $pad.mad$ não é mais do que o operador correspondente à expressão «avô materno de», pois que, por definição:

$$(pad \, . \, mad) \, x \equiv pad \, (mad \, x) \, ;$$

enquanto o produto *mad . pad* é o operador correspondente à expressão «avó paterna de». E vê-se imediatamente que

$$mad \, . \, pad \neq pad \, . \, mad \, ,$$

o que basta para pôr em evidência este facto de notável interesse em Matemática: *que a multiplicação entre operadores não é, no caso geral, uma operação comutativa.*

Dir-se-á que dois operadores Φ, Ψ são *permutáveis*, quando se tiver, excepcionalmente, $\Phi\Psi = \Psi\Phi$.

Exemplos: 1) As funções numéricas $\varphi(x) \equiv x-1$, $\psi(x) \equiv \sqrt[3]{x}$, que constituem, manifestamente, transformações unívocas do conjunto dos números reais em si mesmo, não são permutáveis [1], pois que se tem $\varphi(\psi(x)) \equiv \sqrt[3]{x}-1$, $\psi(\varphi(x)) \equiv \sqrt[3]{x-1}$, e portanto $\varphi \, . \, \psi \neq \psi \, . \, \varphi$ (isto é, as operações de «subtrair uma unidade» e de «extrair a raiz cúbica» não são permutáveis). Mas se pusermos $\varphi(x) \equiv \sqrt[3]{x}$, $\psi(x) \equiv x^2$, será $\varphi \, . \, \psi = \psi \, . \, \varphi$, pois que se tem $\sqrt[3]{x^2} \equiv (\sqrt[3]{x})^2$ (isto é, as operações de «extrair a raiz cúbica» e de «elevar ao quadrado» são permutáveis).

2) Seja A um conjunto formado por 4 elementos, que designaremos por a, b, c, d. Uma transformação unívoca do conjunto A em si mesmo [2] será, por exemplo, o operador σ assim definido: $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$, $\sigma(c) = b$, $\sigma(d) = a$; ou, mais condensadamente, conforme a notação usual da teoria de GALOIS: $\sigma = \begin{pmatrix} b & c & b & a \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ (por cima de cada letra a sua transformada por meio de σ). Uma outra transformação unívoca do conjunto A em si mesmo será, por exemplo, o operador $\theta = \begin{pmatrix} d & b & a & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Ter-se-á então $\sigma\theta = \begin{pmatrix} a & c & b & b \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, $\theta\sigma = \begin{pmatrix} b & a & b & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ e, portanto, $\sigma\theta \neq \theta\sigma$. Mas já, por exemplo, os operadores $\begin{pmatrix} c & d & b & a \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b & a & d & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ são permutáveis, como é fácil verificar.

Todavia, *a multiplicação entre operadores é sempre uma operação associativa;* isto é, ter-se-á $\Phi(\Psi\Theta) = (\Phi\Psi)\Theta$, quaisquer que sejam os operadores Φ, Ψ, Θ e os conjuntos entre os quais êles operam; podendo escrever-se então mais simplesmente $\Phi\Psi\Theta$ em vez de $\Phi(\Psi\Theta)$ ou de $(\Phi\Psi)\Theta$.

Observação: Quando, em vez da notação $\Phi(x)$, se usa a notação Φx, é *cómodo* dizer que Φx representa o *produto do operador* Φ *pelo elemento* x. Não resultará daí qualquer inconveniente, mas apenas vantagem, desde que se evite confusão entre o símbolo de *operador* e o símbolo de *elemento.*

Potências de operadores. Do anterior conceito de *produto de operadores* resulta imediatamente uma natural definição de *potência* Φ^n *dum operador* Φ (com n inteiro > 1). Será, por definição:

$$\Phi^n = \Phi \, . \, \Phi \ldots \Phi \; (n \text{ vezes}) \, .$$

Assim, por exemplo, se representarmos por D o operador de derivação, será D^n a operação que consiste em derivar n vezes sucessivas (*derivação de ordem* n). Anàlogamente, o símbolo pad^n designará, segundo as convenções precedentes, o operador correspondente à expressão «*o n-ésimo antepassado em linha masculina de*». Outro exemplo: se fôr $\varphi(x) \equiv \sqrt{1-x}$, será

$$\varphi^2(x) \equiv \sqrt{1-\sqrt{1-x}}, \; \varphi^3(x) \equiv \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}, \text{ etc.} \, ^{(1)}.$$

Por outro lado, é natural pôr ainda, por definição: $\Phi^1 = \Phi$, qualquer que seja o operador Φ.

Finalmente, é natural convencionar que a potência de expoente 0 dum operador Φ qualquer seja o *operador idêntico* (ou *identidade*), isto é, aquele operador que faz corresponder a cada elemento x o mesmo elemento x; operador que representaremos por I. De acôrdo com tal convenção está o facto de se dizer que a *derivada de ordem 0* de qualquer função φ é a própria função φ, o que, simbòlicamente, se exprime dêste modo: $D^0\varphi = \varphi$ (isto é $D^0 = I$).

Todas as anteriores definições de potência podem manifestamente resumir-se no seguinte esquema de recorrência: $\Phi^0 = I$; $\Phi^{n+1} = \Phi^n \, . \, \Phi$. E é fácil ainda demonstrar as propriedades: $\Phi^m \Phi^n = \Phi^n \Phi^m = \Phi^{m+n}$, $(\Phi^m)^n = \Phi^{mn}$, as quais resultam de associatividade da multiplicação.

Soma de operadores. O conceito de *soma* $\Phi + \Psi$ *de dois operadores* Φ, Ψ (com um mesmo domínio A e

---

(1) Convém notar que, no caso das funções numéricas, se apresentam dois conceitos não equivalentes de *produto de duas funções* φ, ψ: 1) o produto de φ por ψ é a função χ tal que $\chi(x) \equiv \varphi(x) \, . \, \psi(x)$ [conceito usual]; 2) o produto de φ por ψ é a função θ tal que $\theta(x) \equiv \varphi(\psi(x))$ [conceito aqui considerado]. Para os distinguir, chamaremos ao primeiro *produto elementar* e ao segundo *produto operatório.*

(2) É fácil ver que entre o conjunto A e ele mesmo se podem definir ao todo $4^4 = 256$ transformações unívocas.

(1) É preciso não perder de vista que, no caso das funções numéricas, teremos dois conceitos de *potência*, correspondentes aos dois conceitos de *produto* atrás citados. Assim, por exemplo, a expressão $\text{sen}^3 x$ é susceptível de dois significados diversos: 1) $\text{sen}^3 x \equiv \text{sen}\, x \, . \, \text{sen}\, x \, . \, \text{sen}\, x$ [significado usual]; 2) $\text{sen}^3 x \equiv \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}\, x))$ [conceito aqui considerado].

um mesmo contradomínio B) só costuma apresentar-se de modo natural, quando o conceito de *adição* se encontre já definido a respeito dos elementos de B. Em tal hipótese, chama-se *soma de* Φ *com* Ψ, e representa-se por $\Phi+\Psi$, aquele operador que faz corresponder a cada elemento x de A o elemento $\Phi x+\Psi x$ de B; isto é, em símbolos

$$(\Phi+\Psi)\, x = \Phi x+\Psi x, \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

No caso das funções numéricas tal conceito coincide manifestamente com aquele usual. Assim, por exemplo, a soma das funções φ, ψ dadas pelas expressões $\varphi x \equiv \sqrt{x^2-1}$, $\psi x \equiv e^x \operatorname{sen} x$ é a função $\varphi+\psi$ dada pela expressão $(\varphi+\psi)\, x \equiv \sqrt{x^2-1}+e^x \operatorname{sen} x$.

Por outro lado, visto que entre as funções numéricas se encontra assim definida uma adição, é claro que tambem, pelo mesmo processo, ficará definida uma adição entre os operadores que operam sôbre funções numéricas (operadores de tipo 2); e assim sucessivamente. Ter-se-à, por exemplo, segundo a definição geral (representando por φ uma qualquer função derivável):

$$(D^3+D+I)\, \varphi \equiv D^3\varphi+D\varphi+\varphi.$$

Não fará porém sentido falar, por exemplo, da soma dos operadores *pad*, *mad* atrás considerados, por isso mesmo que não está definida nenhuma adição entre seres humanos (isto é, nenhuma operação que faça corresponder a cada par de pessoas x, y uma determinada pessoa $x+y$ chamada *soma* das duas primeiras).

Mas já faz sentido falar da soma das funções *número de irmãos de* x, *número de irmãs de* x, definidas em H, mas de contradomínio numérico (dados: *seres humanos*; resultados: *números*).

É fácil agora verificar o seguinte facto importante: *Se a adição definida em* B *é associativa, comutativa e invertível*[1], *o mesmo acontecerá a respeito da adição por ela induzida entre os operadores de contradomínio* B.

Ocorre ainda preguntar se a multiplicação atrás definida entre operadores é *distributiva* respeito da adição agora introduzida entre os mesmos; isto é, se as igualdades $\Phi(\Psi+\Theta)=\Phi\Psi+\Phi\Theta$, $(\Phi+\Psi)\,\Theta=\Phi\Theta+\Psi\Theta$ têm lugar quaisquer que sejam as transformações unívocas Φ, Ψ, Θ de A em si mesmo (supondo definida em A uma adição). Ora, como o leitor pode fàcilmente constatar, *tal propriedade não se verifica no caso geral*[2], *mas ela verifica-se, com certeza, se nos limitarmos à família daqueles operadores* Φ *que satisfazem à condição*

$$\Phi(x+y) = \Phi x+\Phi y,$$

quaisquer que sejam os elementos x, y de A; operadores que diremos *distributivos* a respeito da adição.

Exemplo notável dum operador (de tipo 2) distributivo a respeito da adição é, precisamente, o operador de derivação, pois que se tem: $D(\varphi+\psi)=D\varphi+D\psi$ quaisquer que sejam as funções deriváveis φ, ψ. Mas já não é distributivo a respeito da adição, por exemplo, o operador Θ assim definido: $\Theta_x\, \varphi(x) \equiv [D_x\, \varphi(x)]^2$. Distributivos a respeito da adição são ainda os operadores M da forma $M_x\, \varphi(x) \equiv \gamma(x) \cdot \varphi(x)$, em que $\gamma(x)$ representa uma função fixada arbitràriamente. É interessante observar que os operadores desta forma não são permutáveis com D.

Operadores numéricos. Entre os operadores definidos em campos numéricos ou funcionais figuram, em primeiro lugar, os *multiplicadores numéricos*. Seja, por exemplo, $\mathcal{F}$ o conjunto das funções reais definidas num mesmo intervalo: todo o número real a fará corresponder a cada função f pertencente a $\mathcal{F}$ a função $a \cdot f$ pertencente ainda a $\mathcal{F}$[1]. Dêste modo, cada número real a definirá uma transformação unívoca de $\mathcal{F}$ em si mesmo, de tal maneira que:

1) A soma dos operadores definidos por dois números a, b coincide com o operador definido pelo número $a+b$; pois que se tem $af+bf=(a+b)\,f$, qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$.

2) O produto dos operadores definidos pelos números a, b coincide com o operador definido pelo número $a \cdot b$; pois que se tem $a\,(bf)=(ab)\,f$, qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$.

3) O operador definido pelo número 1 coincide com a operação idêntica, I.

Nestas condições, não haverá qualquer inconveniente em confundir os números com os operadores por êles definidos (como multiplicadores). Assim, por exemplo, o símbolo 2/3 representará indiferentemente o *número* 2/3 ou aquele operador que faz corresponder a cada função f a função $2/3\,f$, etc. Anàlogamente, o *operador idêntico* I poderá confundir-se com o *número* 1 e o *operador nulo* com o *número* 0. Por outro lado, ficará automáticamente estabelecido o que deva entender-se por *soma* $a+\Phi$ *dum número* a *com um operador* Φ, por *produto* $a \cdot \Phi$

(1) Chamamos naturalmente *invertibilidade da adição* à possibilidade de subtracção em qualquer caso.

(2) É todavia fácil ver que a segunda igualdade, $(\Phi+\Psi)\,\Theta = \Phi\Theta+\Psi\Theta$ (*distributividade à direita*) se verifica em qualquer caso.

(1) É claro que consideramos aqui como produto *dum número* a *por uma função* f a função $a \cdot f$ assim definida: $(a \cdot f)(x) \equiv a \cdot f(x)$. Também é manifesto que as considerações aqui desenvolvidas se aplicam, *mutatis mutandis*, aos conjuntos de funções complexas de variável complexa definidas num mesmo domínio: então os multiplicadores numéricos serão números complexos.

dum número a *por um operador* Φ e por *produto* Φ . a *dum operador* Φ *por um número* a — uma vez estabelecido que os números se podem conceber como operadores.

[Para concretizar ideas, tomemos para exemplo um circuito eléctrico simples, com uma resistência r, uma indutância l e uma fôrça electromotriz $\mathcal{E}(t)$, função do tempo. A intensidade $\mathcal{I}(t)$ da corrente deste circuito deve, como se sabe, verificar a equação diferencial $r\,\mathcal{I}(t)+l\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{I}(t)\equiv\mathcal{E}(t)$, ou seja, mais condensadamente: $(r+l\,D)\mathcal{I}=\mathcal{E}$. Se então puzermos $r+l\,D=\Theta$, virá $\Theta\,\mathcal{I}=\mathcal{E}$, e podemos dizer, por analogia com a lei de *Ohm*, que o operador Θ — *soma do operador numérico* r *com o operador diferencial* lD — representa a *resistência funcional* do circuito considerado. Mas é preciso não esquecer que nem $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$ são números (mas sim funções), nem Θ é um coeficiente numérico, tal como r] .

Posto isto, poderemos já definir *função racional inteira dum operador* Φ . Daremos êsse nome a toda a função de Φ que se exprima por meio dum número finito de sucessivas *adições* e *multiplicações* a partir de Φ e de constantes numéricas.

O que desde logo ocorre preguntar é se é lícito tratar as funções racionais inteiras de operadores com as mesmas regras que se usam para as funções racionais inteiras de variáveis numéricas [1], e se, em particular, toda a função racional inteira de Φ é redutível à forma dum polinómio inteiro em Φ:

$$a_0\,\Phi^n+a_1\,\Phi^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\,\Phi+a_n$$

(em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ designam constantes numéricas arbitrárias e n um número natural qualquer).

Ora, como se pode ver fàcilmente, *a resposta é negativa no caso geral, mas afirmativa se nos limitarmos à classe daqueles operadores* Φ *que verificam as condições seguintes:* 1) $\Phi\,(f+g)=\Phi f+\Phi g$; 2) $\Phi\,(af)\equiv a\,(\Phi f)$, quaisquer que sejam o número a e as funções f, g pertencentes ao domínio de Φ . A primeira destas propriedades já sabemos que se exprime dizendo que Φ é *distributivo a respeito da adição;* quanto à segunda ela exprime-se, naturalmente, dizendo que Φ é *permutável* com os multiplicadores numéricos [podíamos escrever mais simplesmente $\Phi a=a\Phi$ em vez de $\Phi\,(af)=a\,(\Phi f)$] ; finalmente, as propriedades 1), 2), verificadas conjuntamente, exprimem-se dizendo que o operador Φ é *linear*.

Exemplo notável dum operador linear é, precisamente, o operador de derivação, D, pois que, além de ser, como já vimos, distributivo a respeito de adição, êle é ainda permutável com os factores numéricos [$D\,(af)=a\,(Df)$, qualquer que sejam o número a e a função derivável f] . Dêste modo, todas as regras aplicáveis ás funções racionais inteiras duma variável numérica, serão ainda aplicáveis às funções racionais inteiras do símbolo D. Assim, por exemplo, ter-se-à:

$$(D^2+2\,D-3)\ \ (D^2-2\,D-3)=D^4-10\,D^2+9;\ \ D^4-5\,D-36=(D-3)\,(D+3)\,(D-2\,i)\,(D+2\,i)\text{, etc., etc.}$$

Exemplos de operadores lineares são os próprios operadores numericos. Tem-se, com efeito: 1) $a\,(f+g)=af+ag$; 2) $a\,(bf)=b\,(af)$, quaisquer que sejam as funções f, g e os números a, b.

Outro exemplo de linearidade é-nos dado pelos operadores M atrás citados.

Todavia, nós aqui limitámo-nos a definir o conceito de *linearidade* para operadores cujos domínio e contradomínio são constituídos por funções [1]. Ora a verdade é que tal conceito se estende fecundamente a muitos outros campos, e se quizermos, por uma racional medida de economia de pensamento, abraçar numa mesma teoria o maior número possível de domínios, devemos manter-nos fiéis ao método da Análise Geral: *abstrair completamente da natureza dos entes que constituem os dados e os resultados dos operadores, retendo apenas as propriedades formais de certas relações definidas entre esses entes* (por exemplo, as propriedades formais da adição).

É-se dêste modo levado, naturalmente, ao conceito abstracto de *sistema vectorial.*

Observe bem o leitor como o conceito que vamos definir (para o qual se adoptou a designação «sistema vectorial») corresponde exactamente ao fim que nos propomos atingir. Ele permitirá definir com a máxima amplitude possivel o conceito de linearidade, conservando o que nêste existe de essencial. Em particular, tornar-se-à licito falar de *funções racionais (inteiras ou fraccionárias) de um ou mais operadores lineares permutáveis entre si,* e aplicar a tais funções as regras do cálculo algébrico ordinário.

Quando depois se tratar de definir *funcões irracionais ou transcendentes de operadores lineares,* será necessário restringir o conceito de «sistema vecterial», inserindo nele uma conveniente noção de «limite». Poderemos então instituir em bases rigorosas um *cálculo dos operadores lineares,* de que será apenas um caso particular o *cálculo simbólico dos electrotécnicos* (pelo menos numa parte em que este é admissivel).

---

(1) Deter-nos-emos oportunamente sôbre o sentido preciso desta questão. Trata-se agora apenas de sugerir o problema.

(1) O conceito estende-se imediatamente ao caso dos operadores de domínio e contradomínio numéricos; mas é fácil ver que as únicas funções *lineares* duma variável numérica são aquelas da forma $\varphi x\equiv a\,x$, em que a designa uma constante numérica arbitrária. Os operadores *log*, $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, *sen*, *cos*, etc. são notòriamente não lineares.

E não haverá nisto nada de arbitrário ou de artificioso. Tudo tenderá naturalmente para um fim, como o leitor vai ter ocasião de constatar.

Sistemas vectoriais. [1] Por *sistema vectorial* ou *sistema de vectores relativo ao corpo real*, R, entende-se toda a classe S de entidades $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ de natureza qualquer, a respeito das quais sejam definidas duas operações — *adição* e *multiplicação escalar* — de acôrdo com os preceitos seguintes:

V_1) Para todo o par $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de elementos de S existe um e um só elemento de S chamado *soma de* $\mathbf{u}$ *com* $\mathbf{v}$ e representável por $\mathbf{u}+\mathbf{v}$;

V_2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, quaisquer que sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ [2] (*comutatividade*);

V_3) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, quaisquer que sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$ (*associatividade*);

V_4) Dados dois quaisquer elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de S, existe sempre um e um só elemento $\mathbf{x}$ de S, tal que $\mathbf{u}+\mathbf{x}=\mathbf{v}$; podendo escrever-se então $\mathbf{x}=\mathbf{v}-\mathbf{u}$ (*invertibilidade*);

V_5) Para cada par $a, \mathbf{u}$ formado por um número real a e por um elemento $\mathbf{u}$ de S, existe um e um só elemento de S chamado *produto de* a *por* $\mathbf{u}$ e representável por $a\,\mathbf{u}$;

V_6) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\,\mathbf{u}+a\,\mathbf{v}$;

V_7) $(a+b)\,\mathbf{u}=a\,\mathbf{u}+b\,\mathbf{v}$;

V_8) $a(b\,\mathbf{u})=(a\,b)\,\mathbf{u}$

V_9) $1 \cdot \mathbf{u}=\mathbf{u}$;

quaisquer que sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$; $a, b \in R$.

As propriedades V_1 a V_4, quando verificadas conjuntamente, costumam também exprimir-se, dizendo que a classe S constitue um *grupo comutativo* ou *abeliano* a respeito da adição. De tais propriedades resulta, em particular, que existirá necessàriamente em S um e um só elemento $\mathbf{x}$ tal que: $\mathbf{u}+\mathbf{x}=\mathbf{u}$, qualquer que seja $\mathbf{u} \in S$. Representaremos por O êste elemento e chamar-lhe-emos o *zero* do sistema S.

Os elementos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ do sistema vectorial S serão chamados *vectores*, e os elementos $a, b, \ldots$ do corpo R serão chamados *escalares* [3].

Na anterior definição, o corpo real R pode ser substituído por um outro corpo qualquer, por exemplo, o corpo complexo, K, o corpo racional, Ra, etc., e assim teremos: *sistemas vectoriais relativos ao corpo complexo, sistemas vectoriais relativos ao corpo racional*, etc.

Exemplos: a) Um primeiro exemplo dum sistema vectorial relativo ao corpo real é-nos fornecido pelos vectores do cálculo vectorial elementar. Como se sabe, cada vector é, neste caso, definido por um segmento *orientado* $\overline{AB}$, isto é, um segmento ao qual se atribui um determinado *sentido* de percurso, dizendo-se que *dois segmentos orientados* definem o *mesmo vector*, se, e só se, têm a mesma *direcção*, o mesmo *sentido* e o mesmo *comprimento*. Por outro lado, sabe-se o que se entende então por *soma de dois vectores* (obtida segundo a regra do paralelogramo) e por *produto dum número real por um vector*; e é bem fácil constatar que as operações assim introduzidas verificam as condições V_1 a V_9.

b) Convencionemos agora chamar *vector* n-*dimensional* a toda a sucessão $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números reais, chamando *soma de dois vectores* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ à sucessão $(x_1+x_1^*, x_2+x_2^*, \ldots, x_n+x_n^*)$ e *produto dum número real* a *por um vector* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à sucessão $(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$. É fácil ver então que o conjunto R_n de todas estas sucessões (chamadas agora *vectores* n-*dimensionais*) constitue, com as duas operações que nele introduzimos, um sistema de vectores relativo ao corpo real. A tal sistema R_n dá-se o nome de *espaço vectorial cartesiano a* n *dimensões reais*.

Se, em vez de sucessões de n números reais, considerarmos as sucessões de n números complexos, seremos conduzidos ao conceito de *espaço vectorial cartesiano* K_n, *a* n *dimensões complexas*, o qual constitue, manifestamente, um sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

c) Um outro exemplo dum sistema de vectores relativo ao corpo real é o conjunto $\mathcal{F}$, já atrás considerado, das funções reais de variável real definidas num mesmo intervalo, dando às expressões «*soma* f+g *de duas funções* f, g» e «*produto* af *dum número real* a *pela função* f» o significado que usualmente lhes é atribuído. Os *vectores* são portanto, neste caso, as *funções* f, g, ...

Se, em vez das funções reais da variável real, considerarmos funções complexas da variável complexa (definidas num mesmo domínio), teremos aí um novo exemplo dum sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

Muitos outros exemplos de sistemas vectoriais podiam ser citados ainda.

Operadores lineares. Anéis. Sejam S, S^* dois quaisquer sistemas vectoriais (relativos ao mesmo

---

[1] Muitos autores usam a designação «espaço vectorial» ou ainda «espaço linear», com o significado que atribuímos aqui a «sistema vectorial».

[2] A expressão «$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$» deve ler-se aqui «u, v *pertencentes a* S».

[3] A razão de tal terminologia está em que ela sugere analogias fecundas com as noções do cálculo vectorial ordinário.

corpo) e seja Φ uma transformação unívoca de S em S*. Diz-se que o operador Φ *é linear*, quando verifica as condições: $\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\Phi\,\mathbf{u}+\Phi\,\mathbf{v}$, $\Phi(a\,\mathbf{u})=a\,(\Phi\,\mathbf{u})$, quaisquer que sejam os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e S e o escalar a. É fácil ver desde logo que *o produto ou a soma de dois operadores lineares é ainda um operador linear.*

Representemos por Λ (S) o conjunto de tôdas as transformações lineares do sistema vectorial S *em si mesmo.* Fàcilmente se reconhece que a *adição* e a *multiplicação* definidas em Λ (S) conforme as convenções precedentes gozam das seguintes propriedades:

I) *Propriedades da adição*: univocidade, associatividade, comutatividade e reversibilidade (isto é, Λ (S) forma um *grupo comutativo* a respeito da adição).

II) *Propriedades da multiplicação:* univocidade, associatividade e existência de unidade (*o operador idêntico*).

III) *Propriedade mista*: distributividade da multiplicação a respeito da adição.

Todas estas propriedades, assim verificadas conjuntamente — excluída a da existência de unidade — exprimem-se dizendo que o conjunto Λ (S) constitue um *anel* a respeito das duas operações consideradas.

Nota: Observemos que também o conjunto dos números inteiros (positivos e negativos), o conjunto dos números pares, o conjunto dos polinómios inteiros em x, etc., etc. constituem *anéis* a respeito da adição e da multiplicação ordinárias, mas com estas diferenças capitais: 1) nêstes últimos conjuntos a multiplicação é comutativa; 2) o produto $a\,.\,b$ de dois elementos nêsses conjuntos não pode ser nulo, sem que um pelo menos dos factores o seja; ao passo que, na família Λ (S), excluído o caso de S ser unidimensional [1], a multiplicação não é comutativa e existem pares de elementos (chamados *divisores de zero*) cujo produto é nulo sem que nenhum dos factores o seja. Pois bem: dá-se o nome de *domínios de integridade* àquêles anéis, como o anel dos inteiros, em que a multiplicação é comutativa e o anulamento do produto implica o anulamento de um, pelo menos, dos factores.

Observemos por outro lado que também o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números reais o conjunto das funções racionais, etc., são domínios de integridade — mas com esta diferença ainda: que, nêstes últimos conjuntos, ao contrário do que sucede nos primeiros, a equação $a\,x=b$ é resolúvel para todos os pares de elementos a, b tais que $a\neq 0$ [1]. Dá-se o nome de *corpos* ou *domínios de racionalidade* a tais domínios de integridade.

É ainda de notar que o anel Λ (S) contém sempre um corpo: o corpo dos operadores escalares.

Transformações lineares entre espaços cartesianos — Supondo fixado, no espaço ordinário, um ponto O como origem, cada ponto A do espaço definirá um vector: o vector representado por $\overline{OA}$. Transformações lineares deste sistema vectorial em si mesmo são, por exemplo, as homotetias em relação à origem (correspondentes aos operadores escalares), as rotações em torno da origem, as projecções cilíndricas sobre planos que passam pela origem, etc., etc.

Consideremos, para fixar ideas, o espaço vectorial R_2, cujos elementos são, como sabemos, os pares ordenados de números reais (vectores do plano); e representemos por Φ o operador que faz corresponder a cada elemento (x_1, x_2) de R_2 o elemento $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ de R_2 dado pelo sistema

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{x}_1=a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2 \\ \bar{x}_2=a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2 \end{cases},$$

em que $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ representam números reais quaisquer. Pois bem: é fácil ver que *não só a transformação Φ assim definida é linear, como tôda a transformação linear de* R_2 *em* R_2 *se pode reduzir à forma* (1) *mediante uma fixação oportuna dos coeficientes* $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Dêste modo, cada transformação linear de R_2 em R_2 será univocamente representada pelo *quadro* ou *matriz* $\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}$ — de tal maneira que matrizes *distintas* representarão *operadores distintos.* O *operador idêntico*, 1, será então representado pela matriz $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$, e o *operador* 0 pela matriz $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$; dum modo geral, cada operador escalar a terá a representação $\begin{Bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Bmatrix}$. A *soma* de dois operadores $\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}$ será, como é fácil ver, o operador $\begin{Bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{Bmatrix}$; e o *produto* dos mesmos ope-

[1] Diz-se que um sistema vectorial S é *unidimensional* quando todos os elementos de S se podem obter de um deles ($\neq 0$), multiplicando-o por escalares.

[1] A referida propriedade do anulamento do produto está já implícita na resolubilidade de $a\,x=b$ para $a\neq 0$ (admitidas as restantes propriedades). Dêste modo, podemos definir *corpo* como *todo o anel que, com a exclusão do zero, forma um grupo comutativo a respeito da multiplicação.*

radores, *na ordem em que estão escritos*, será o operador

$$\begin{Bmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{22} \end{Bmatrix}.$$

O leitor pode agora constatar que, por exemplo, as transformações $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ não são permutáveis, e que o produto $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ é nulo sem que nenhum dos factores o seja — o que mostra que o *anel* $\mathrm{A}\,(R_2)$ não é um *domínio de integridade.*

Tôdas estas considerações se extendem imediatamente ao caso dos espaços vectoriais cartesianos com um número n qualquer de dimensões, reais ou complexas; então, os operadores lineares serão representados por matrizes de *ordem* n, isto é, matrizes com n linhas e n colunas.

(Continua)

Nota: Não tendo sido possível terminar no presente número esta série de artigos, fica transferida para o número seguinte a bibliografia já prometida.

Errata: No artigo do número precedente, pág. 2. linhas 13, 15, 30, onde está escrito $\alpha - D$, deve ler-se $D - \alpha$.

PEDAGOGIA

ALGUMAS DEFICIÊNCIAS EM MATEMÁTICA DE ALUNOS DOS LICEUS

por ***Maria Teodora Alves***

Quando as deficiências em Matemática, acumuladas num dado aluno, atingem certo nível, esse aluno, por maiores esforços que faça não poderá prosseguir os seus estudos. O desânimo do aluno e ... o medo à Matemática são as consequências mais imediatas do facto.

A escola tem, por isso, de procurar, a respeito de cada aluno, as suas deficiências, as quais podem ser de muito variada natureza, afim de as corrigir prontamente, evitando a formação de um complexo de inferioridade capaz de produzir graves perturbações.

Os Professores de Matemática do Liceu de Passos Manuel acordaram em que se começasse, por averiguar as deficiências de técnica de Cálculo Aritmético e Algébrico que, em cada ano do curso dos Liceus, os alunos trazem do ano anterior.

Por amabilidade para comigo incumbiram-me da organização dos respectivos testes e do estudo estatístico do resultado dos ensaios.

A técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico é um objectivo subsidiário do ensino da Matemática na escola secundária.

Daí porque sem o conhecimento da técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico não é possível prosseguir no estudo da Matemática e extrair portanto, as vantagens que esse estudo proporciona à formação mental da criança e do adolescente, a importância da técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico e a necessidade do seu domínio pelos alunos.

Embora um dos mais altos espíritos da humanidade, Goethe, tenha afirmado que «A cultura mental proporcionada pelas matemáticas é particular e reduzida em sumo grau» [1] em todos os tempos, e actualmente também, a Matemática tem sido considerada um agente insubstituível na formação mental da criança e do adolescente.

Os modernos psicólogos e pedagogos, rejeitando a velha teoria das disciplinas formais, retiraram à Matemática e aos estudos clássicos o monopólio que exerciam na educação, mas, como não negam a transferência do adestramento, isto é, «a influência que uma melhoria ou transformação numa função mental tem sobre as outras funções mentais» (Thorndike), a Matemática não fica, por isso, deminuida na sua acção educativa.

Eles discutem quanto e como se transfere ou o que se transfere, mas pode dizer-se que unanimemente aceitam que se realiza a transferência.

A esse respeito Inglis, quanto à Matemática diz «é igualada por poucas outras matérias do curso secundário, mas por nenhuma excedida».

Na transferência do adestramento de uma forma mental para outras, o método de ensino e os assuntos de incidência do ensino são elementos essenciais, isto é, o professor e o programa são peças basilares. Se o ensino da Matemática fôr concentrado em si próprio e desligado das suas conexões com a vida, poderá formar peritos neste ramo do saber — não é o objectivo da escola secundária — mas terá pouco valor educativo.

Além disso, o muito, o complicado e o difícil e

(1) Citação de Adolf Rude.

mesmo o abstrato, quando não utilizado progressivamente e com a devida cautela, são considerados factores de perturbação na transferência do adestramento.

O eminente matemático francês, H. Lebesgue, em resposta a um inquerito promovido em «L'Enseignement scientifique», reagiu contra o excesso e dificuldades dos programas dos liceus franceses de então, afirmando, talvez exageradamente: «Nenhum conhecimento é indispensável para que um indivíduo frequente uma escola de engenharia ou faculdade. Basta-lhe sómente ter aprendido a trabalhar intelectualmente.»

Ensinar a trabalhar intelectualmente, e não a transformar o aluno numa enciclopédia viva de conhecimentos, é, com efeito, um dos objectivos da escola secundária. E a escola secundária fá-lo-á tanto melhor, quanto melhor conhecer o aluno e as suas deficiências, o que só poderá determinar pela experiência.

A escola não pode actuar por impressões gerais ou dentro de teorias por mais brilhantemente expostas ou deduzidas que sejam. Tem de experimentar, com cautela, mas tem de experimentar.

«Em pedagogia tudo está dito, mas nada demonstrado» (Thorndike).

Considerando sómente o caso restrito da Matemática, na escola secundária, o volume de experiências a realizar atinge tais proporções que não pode ser trábalho de um grupo de professores de um liceu. É trabalho para équipes de professores e em vários liceus.

O simples teste organizado para o 2.º Ano, apesar das deficiências que eu própria já lhe reconheço e o correlativo estudo estatístico, correspondeu a algumas horas de trabalho. Se em vez de averiguar as deficiências de técnica de cálculo fosse pretendido averiguar por exemplo a influência da Matemática no pensamento de selecção e relação dos alunos o hábito de generalizar ou a compreensão do simbolismo algébrico e o seu uso, as dificuldades aumentariam consideràvelmente. A organização de um teste nessas condições exige um espírito crítico, um saber e uma experiência que confesso sinceramente não possuir. Se a Gazeta de Matemática patrocinasse, junto dos professores, um movimento no sentido de serem iniciados estudos dessa natureza, prestaria à cultura da Matemática em Portugal, um serviço inestimável.

O teste organizado para determinar as deficiências de técnica de cálculo dos alunos do 2.º Ano e que com autorização do senhor Reitor do Liceu de Passos Manuel serviu num tempo de aula (50 m), aos alunos das quatro turmas foi o seguinte:

Calcule:

1) 170×1	2) 1×120
3) $520:520$	4) $180:1$
5) 0×17	6) 21×0
7) $0:18$	8) $1:1$
9) $2-3-4+7$	10) $9-2+5-4$
11) $(8\times6\times5):(8\times6)$	12) $(7\times3\times9):(3\times9)$
13) $4:0{,}1$	14) $20\times0{,}1$
15) $8-6:3$	16) $7+8:4$
17) $4+3\times2$	18) $10-4\times2$
19) $20-4\times2-15:3$	20) $16-12:4-3\times2$
21) 1^6	22) 1^9
23) $2^3\times2$	24) $3^4:3$
25) $3^8\times2^2:3^8$	26) $2^2\times5^3:5^3$
27) 2^2+3^2	28) 4^2-3^2
29) $2\times(2\times3+3)$	30) $2\times(18:6+1)$
31) $2+3/4$	32) $2/3+2$
33) $3-3/2$	34) $5/2-2$
35) $1/2+2/3$	36) $3/4-2/3$
37) $2/7\times3$	38) $2\times4/5$
39) $3/8:2$	40) $3/5:3$
41) $1+2/3\times2$	42) $1-2/5\times2$
43) $1+3/4:3$	44) $1-5/2:5$
45) $2/3:1/2$	46) $2:3/4$
47) $1\ 1/4\times3$	48) $2:2\ 1/3$
49) $(2/3)^2$	50) $(4/3)^2$

Para evitar que os alunos copiassem uns pelos outros e também facilitar a vigilancia do professor assistente à prova, foram constituídas duas formas do teste que se distinguiam apenas na ordem das questões propostas, as quais mantinham em cada forma a mesma paridade. Assim, pôde ser distribuido a cada dois alunos sentados na mesma carteira uma forma diferente do mesmo teste.

A simples leitura do teste mostra a sua insuficiência.

Foram deixados por explorar muitos aspectos da técnica do cálculo em que os alunos poderiam revelar deficiências; isto é, outras orientações poderiam ter sido seguidas na constituição do teste e aquela que eu segui não teria sido, talvez, a melhor.

Mas por melhor que fosse a organização de um teste, para o efeito que era exigida, seria sempre insuficiente. Sómente o recurso a uma bateria de testes poderá resolver o problema em causa.

Também em questões como por exemplo 18 e 19, deviam ser consideradas duas fases: uma, a de maior valor educativo, referente à ordem e combinação das operações e a outra fase, de restrito valor educativo, referente à execução das operações. É outra deficiência do teste apresentado; mas se houvesse que atender a estas duas fases a organização do teste complicar-se-ia mais ainda.

Sómente recorrendo a baterias de testes, repito, será possível resolver estas dificuldades, eliminando a maioria das deficiências indicadas.

Depois do ensaio do teste o professor de cada turma recebeu a indicação das questões não resolvidas ou mal resolvidas pelos alunos. Ficou assim conhecendo as deficiências que cada aluno revelou nas questões ensaiadas e terá ocasião de insistir com eles de modo a corrigi-las ou de aconselhar-lhes a resolução de questões análogas até que adquiram o conhecimento desejado.

O coeficiente de confiança do teste (reliability coefficient) foi determinado pelo método aconselhado por Kelley (Split-test method), usando-se a fórmula de Spearman-Brown. Para isso as 50 questões de cada forma do teste foram divididas em dois grupos de dificuldade sensìvelmente igual, o grupo das questões impares e o das questões pares contendo cada grupo 25 questões.

Cada questão, não resolvida ou de resposta errada, foi classificada com um zero, e com 1, se foi bem resolvida.

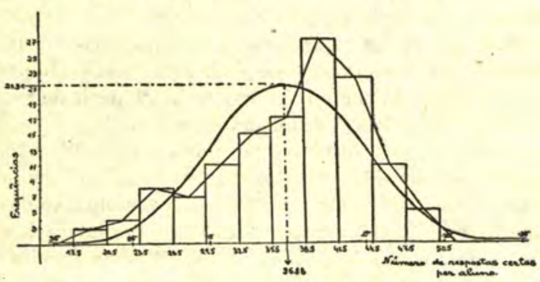
A cota de cada aluno, para a determinação do coeficiente de correlação foi o número de questões certas que resolveu nas questões de mesma paridade.

Apresento a estatística dos resultados do teste ensaiado:

Cota mínima	18
Cota máxima	50
Média	36.88
σ [1]	7.23
r	0.81
r_x (Coeficiente de confiança)	0.89
$r_{x\infty}$ (Índice de confiança)	0.94

O valor $r_{x\infty}=0{,}94$ (índice de confiança) que indica a mais alta correlação de que o teste é capaz, por ser próximo de 1, pode considerar-se satisfatório.

As questões do teste foram agrupadas nos grupos: $A, B, \cdots I$, e foi calculada a percentagem de alunos



que resolveram *todas* as questões de cada grupo, sendo depois calculada a dificuldade do grupo, tomando σ para unidade de medida.

[1] Prefiro σ ao erro provável da média. R. Fisher, a propósito do erro provável, diz: «o uso vulgar do erro provável é a sua única recomendação».

Também foi calculada a percentagem de respostas erradas dadas em cada grupo.

É o que consta do quadro seguinte:

$N=129$ alunos

Grupos	Questões do teste pertencentes a cada grupo	Dificuldade expressa em σ	Percentagem de respostas erradas
A	1 a 8	0.61	72.87
B	11 e 12; 25 e 26	0.21	58.11
C	15 a 20; 29 e 30	0.40	65.81
D	31 a 36	0.33	62.80
E	13 e 14; 37 a 40; 45 a 48	0.98	83.73
F	21 a 24; 49 e 50	0.20	58.14
G	41 a 44	0.70	75.97
H	9 e 10	0.73	76.75
I	27 e 28	0.13	44.97

As percentagens de respostas erradas em cada grupo mostram as graves deficiências reveladas pelos alunos na técnica do cálculo aritmético.

Quais as causas de tão graves deficiências? A meu ver, são muitas e variadas e o seu estudo deverá ser feito cientìficamente, pois de um autêntico problema científico se trata, que se não compraz com juizos «à priori» por mais bem deduzidos ou convincentes que pareçam.

O ajustamento da curva de normalidade ao histograma de frequência das respostas certas foi feito pelo método das ordenadas, tendo sido determinados sete pontos da curva.

média 36.88
$\sigma=7.23$
$i=3$
y_o (ordenada máxima) $=21.3$
$\pm\sigma$, ordenada correspondente, 12.9
$\pm 2\sigma$, « » 2.88
$\pm 3\sigma$, « » 0.24

A inspecção desta figura mostra que o ajustamento da distribuição de frequência de respostas certas obtidas no ensaio do teste, à distribuição normal, da mesma área, média e σ se fez com algum desvio; isto é, há necessidade de introduzir correcções no teste pelo estudo isolado de cada questão devendo ser pesada a dificuldade de cada uma delas em σ, o que será feito quando eu tiver oportunidade para isso.

Para completar esta experiência agora iniciada, e obter resultados merecedores de confiança, conviria que este teste, ou outros do mesmo género, fossem ensaiados com muitos outros alunos e em outros liceus.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

MOVIMENTO MATEMÁTICO EM BARCELONA

Notícia enviada pelo nosso colaborador Prof. Francisco Sanvisens

En el transcurso del año escolar de 1945 a 1946 las actividades del Seminario Matemático de la Universidad de Barcelona, vinculado con el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, han sido las siguientes:

Cursos monográficos. Por el personal docente de dicho Seminario han sido desarrollados los siguientes cursos monográficos:

«Familias normales de funciones analíticas» por el Dr. D. José Maria Orts. «El movimiento y la figura de los cuerpos celestes» por el Dr. D Francisco Sanvisens. «Geometría diferencial y de los espacios» por el Dr. D. Juan Auge. «Introduccion matemática a la Mecánica cuántica» por el Dr. D. Francisco Sanvisens, y «Teoría de la medida» por el Dr. D. Enrique Linés, catedratico de Analisis Matemático últimamente destinado a Barcelona, nuevo y valioso colaborador del Seminario Matemático.

Cursillos de conferencias. En dos cursillos de conferencias organizados por el Seminario Matemático han venido a explicar los prestigiosos Profesores de la Universidad de Madrid, D. Francisco Navarro Borrás y D. Tomas Rodríguez Bachiller, sobre «Los métodos matemáticos de la Mecánica clásica y de la nueva Mecánica» el primero, y sobre «Grupos topológicos» el segundo, exponiendo ambos el estado actual de tales problemas e indicando temas de posible e interesante investigación.

Colaboración extranjera. El Profesor del Instituto de Alta Matemática de Roma, Luigi Fantappie, que ya en el año de 1942 había estado en Barcelona, ha pasado un largo periodo en esta capital desarrollando un cursillo y habiendo trabajado con algunos jóvenes Profesores sobre cuestiones de Funcionales analiticos y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y a la Mecánica cuántica.

Tesis doctorales. Dirigida y apadrinada por e Dr. D. José M.ª Orts, Director del Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y del Seminario Matemático, ha desarrolado D. Francisco Sales Vallés una interesante Memoria titulada: «Contribución al estudio de una ley de probabilidad» (1ª ley de errores de Laplace), que ha sido presentada como tesis para aspirar al Grado de Doctor en Ciências Matemáticas, habiendo sido calificada de Sobresaliente. En dicho trabajo se estudia la ley de probabilidades cuya función de distribución es $\delta c^{-2\delta|x|}$, hallándose los polinomios ortogonales respecto a esta función en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, los cuales son una extensión de los polinomios de Laguerre; se establecen las condiciones necesarias y suficientes para la validez del desarrollo de una función en serie de estos polinomios, apoyándose en un teorema que relaciona el radio de convergencia de la función característica de una función de distribución con el comportamiento de la misma en el infinito. Se da un método para hallar la ley de probabilidad de una variable aleatoria suma de otras que siguen la 1ª ley de Laplace, tanto en el caso de un número finito como de un número infinito numerable analizando también otras leyes de probabilidad que resultan de combinar la 1ª ley de Laplace con la ley de Gauss, estableciéndose métodos para su aplicación a los problemas de ajuste, dandose algunos ejemplos. Finalmente se hallan hipotesis suficientes para poder considerar la 1ª ley de Laplace como ley de distribución de errores de observación.

En notas adicionales se estudia una extensión de la estabilidad aplicada a la 1ª ley de Laplace y se inicia el estudio de la generalización a dos variables que siguen esta misma ley.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Pontos saídos em exames do Curso Complementar de Ciencias dos Liceus em 1946.

2400 — Resolva o seguinte problema: «Um indivíduo ao ler as horas num relógio, trocou o número de horas com o número de minutos e reciprocamente. Passados 52 minutos verificou o seu êrro, porque, nesse instante, a hora marcada pelo relógio era exactamente metade daquela que seria se a sua primeira leitura estivesse certa. Que horas eram quando da primeira leitura?» R: *Se for* x *o número de horas e* y *o de minutos da primeira leitura (errada) será* $60x+y=2.(60y+x+52)$ *equação que admite as solu-*

ções inteiras e positivas menores que 60, $x=10$, $y=4$. *Logo eram* 4 h. 10 m.

2401 — Determine K de modo que a desigualdade $(Kx^2-Kx+K-1):(x^2-x+6)>1$ seja verificada qualquer que seja o valor real atribuido a x. R: *O denominador da fracção do primeiro membro tem raizes complexas e por isso é sempre positivo para valores reais de* x. *Então a desigualdade proposta é equivalente a* $[(K-1)x^2-(K-1)x+K-7]:(x^2-x+6)>0$ *e terá que ser o numerador sempre positivo para qualquer valor real de* x *o que implica que seja* $K-1>0$ *com* $(K-1)^2-4(K-1)(K-7)<0$ *sistema que só admite as soluções* $K>9$.

2402 — Quantos números pares, de 4 algarismos, maiores que 2.000, se podem formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 7 sem repetição dos algarismos? R: *O número é dado por:* $3\times3\times{}^5C_2=90$.

2403 — Na determinação do máximo divisor comum de dois inteiros a e b, pelo processo das divisões sucessivas, obtiveram-se os seguintes cocientes 2, 1, 1, 3, 4 e para máximo divisor comum de a e b 45. Determine a e b. R: *Então será:* $a=b.2+r_1$; $b=r_1+r_2$; $r_1=r_2+r_3$; $r_2=3r_3+45$ *e* $r_3=4.45$, *donde se obtém* $a=3465$ e $b=1350$.

2404 — Demonstre que: «Se a fracção a/b é igual à fracção p/q onde p e q são primos entre si, então a e b são equimúltiplos de p e q.» R: *Como* $a/b=p/q$ *será* $aq=bp$; *como* p *divide* aq *e é primo com* q *então divide* a *isto é* $a=pr$ *o que substituido na igualdade anterior dá* $b=qr$, *c. q. d.*

2405 — Considere a demonstração do seguinte teorema: «Num triângulo rectângulo, o segmento que une o vértice do ângulo recto com o meio da hipotenusa é igual a metade da hipotenusa.» *Dem.* «Como o triângulo é rectângulo, pode inscrever-se numa circunferência cujo diâmetro é a hipotenusa. Logo o ponto médio da hipotenusa é o centro da circunferência, e o segmento que une o vértice do ângulo recto com o meio da hipotenusa é um raio e por isso igual a metade da hipotenusa». Que método se usou na demonstração? Faça a demonstração por outro método.

2406 — Resolva e discuta a equação:

$$(x+2):(x+a)=(x-2):(x-2a).$$

2407 — Na equação $(2K+2)x^4-(3K+1)x^2+3K+1=0$ determine K de modo que todas as raizes sejam reais. R: $-7/5\leq K\leq-1$ *e* $K=-1/3$.

2408 — Determine o termo em $1/x^2$ no desenvolvimento de $(\sqrt{x}-2/\sqrt{x})^8$. R: $4.{}^8C_2.1/x^2=112.1/x^2$.

2409 — Duas fracções diferentes são tais que o denominador de qualquer delas é igual a cinco vezes o numerador da outra; e a soma das duas fracções é o quíntuplo da menor. Determine duas fracções que verificam o enunciado. Quantas soluções tem o problema? R: 2/5 *e* 1/10. *Uma infinidade de soluções. Se forem* p/q *e* a/b *as fracções terá que ser* $p=2a$; $q=5a$ *e* $b=10a$.

2410 — Demonstre que: «Se o inteiro a divide o produto dos inteiros b e c e é primo com b, então a divide c».

2411 — Sabendo circunscrever uma circunferência a um rectângulo, e que duas circunferências são figuras semelhantes, diga como resolveria, fazendo um esquema, o seguinte problema: «Inscrever numa circunferência um rectângulo semelhante a um rectângulo dado». Que método ou métodos empregou na resolução do problema? Em que consistem?

Soluções dos n.os 2400 a 2411 de José D. da Silva Paulo.

F. C. C. — Exame de admissão ao estágio — 8.º grupo — 1946-47.

I — Algebra e Geometria Analítica

2412 — Determinar os valores de m e n para os quais a fracção $\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}$ não tem valores no intervalo (3, 7).

Obs.: Resolva a questão elementarmente e aplique os conhecimentos de cálculo infinitesimal para verificar a exactidão dos resultados.

2413 — Escrever a equação simplificada do lugar geométrico dos centros das circunferências, que passam por um ponto dado e são tangentes a um circunferência dada. Discussão do problema.

II — Trigonometria e Geometria Analítica

2414 — Considere um triângulo rectângulo girando em torno de um dos seus catetos e seja V o volume do cone gerado por este movimento. Considere agora o triângulo girando em torno do outro cateto e seja o volume do cone agora gerado n vezes maior do que o do primeiro. Determine em função dos dados a hipotenusa e os ângulos agudos do triângulo. Aplicação para $V=1\text{ m}^3$ e $n=2$.

2415 — Considere um ângulo XOY e seja A um ponto do corpo do angulo. Conduza por A as perpendiculares $\overline{AB}$ a $\overline{OY}$ e $\overline{AC}$ a $\overline{OX}$. Una o ponto médio de $\overline{OA}$ com o ponto médio de $\overline{BC}$. Demonstre que a recta determinada por estes pontos médios é perpendicular a $\overline{BC}$.

III — História das Matemáticas

— História e importância do problema da resolução algébrica das equações. Evaristo Galois.

IV — Física e Química

— Calor e temperatura. Termómetro.

Prova Oral de Matemáticas Superiores

Ponto n.º 1

— Representação de função por meio de série.

— Resolução numérica de equações.

— Modos de definir função de uma variável (séries, produtos infinitos, integrais, etc.).

— Princípios de Geometria Analítica (problemas métricos).

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência ordinário — Junho de 1946.

2416 — Estude e represente geomètricamente a função $y=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$ e determine a aproximação com que deve tomar o número e para calcular o valor da função para $x=2$ com um erro inferior a 10^{-n} (n int.).

2417 — Determine a menos de 0,1 raizes reais da equação $2^x-x^2+2x+1=0$.

2418 — Calcule os 4 primeiros termos do desenvolvimento em série de potências da função $y=\dfrac{\cos x}{\cosh x}$.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência extraordinário — Junho de 1946.

2419 — Determinar no plano definido pelos 3 pontos $P_1(1,1,0)$, $P_2(0,2,1)$ e $P_3(2,0,1)$ um ponto equidistante de P_1, P_2 e P_3. R: *O ponto* $P(x,y,z)$ *pertence ao plano* $[P_1P_2P_3]$ *de equação* $x+y-2=0$ *e deve satisfazer às condições* $\overline{PP_1}=\overline{PP_2}=\overline{PP_3}$ *ou, o que é o mesmo,* $2x-2y-2z+3=0$ *e* $2x-2y+2z-3=0$. *Resolvendo o sistema formado por estas três equações obtém-se* $P(1,1,3/2)$.

2420 — Dada a função $y(x)=a+b/e^x+c/e^{2x}$ a) obter o seu desenvolvimento em série de potências. b) estudar o seu crescimento, as estacionaridades, a concavidade e as inflexões conforme os sinais possiveis das constantes reais a, b, e c. R: a) *Desenvolvendo em série de potências* e^{-x} *e* e^{-2x} *obtém-se* $y(x)=a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(b+2^n\cdot c)\,x^n/n!$. b) *A análise da 1.ª e 2.ª derivadas,* $y'=-e^{-x}(b+2c\,e^{-x})$ *e* $y''=e^{-x}(b+4c\,e^{-x})$, *permite concluir, independentemente de* a: 1) $b>0,\ c>0\rightarrow y'<0$ *e* $y''>0$, *qualquer que seja* x *real e, portanto,* y *monotónica decrescente com a concavidade voltada no sentido positivo do eixo* Oy; 2) $b<0,\ c<0\rightarrow y'>0$ *e* $y''<0$, *qualquer que seja* x *real e, portanto,* y *monotónica crescente com a concavidade voltada no sentido negativo do eixo* Oy; 3) $b\cdot c<0\rightarrow y'>0$ *quando* $x>\log(-2c/b)$ *e* $y'<0$ *quando* $x<\log(-2c/b)$ *sendo* $P[\log(-2c/b),\ (4ac-b^2)/4c]$ *um ponto de mínimo. Ainda, nesta hipótese,* $y''>0$ *quando* $x<\log(-4c/b)$ *e* $y''<0$ *quando* $x>\log(-4c/b)$ *sendo* $Q[\log(-4c/b),(16ac-3b^3)/16c]$ *um ponto de inflexão.*

Soluções dos n.ºs 2419 e 2420 de O. Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência, 1945-46.

2421 — Achar os extremos da função

$$f(x,y)=xy(x-y-1).$$

R: *As condições de primeira ordem verificam-se em* (0,0) *e* $(-1/3,-1/3)$; *mas como para ambos os pontos é* $s^2-rt>0$, *não há extremos.*

2422 — Determinar por integração o volume do toro gerado quando uma circunferência de raio 1 roda em torno duma recta do seu plano situado a uma distância 3 do centro da circunferência. R: $2\pi^2$.

Soluções dos n.ºs 2421 e 2422 de L. G. M. Albuquerque.

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — Maio de 1946.

2423 — *a)* Defina elementos tangente e normais a uma superfície num seu ponto ordinário e indique a respectiva representação analítica quer no caso da superfície ser definida pela sua equação cartesiana quer em coordenadas curvilíneas. *b)* Defina contacto de ordem n entre uma curva e uma superfície, escreva as condições analíticas para um tal contacto, defina conceito de osculação nesse caso, indique qual a ordem de contacto do plano osculador a uma linha torsa e defina plano oscular estacionário. *c)* Defina integral definido; propriedades.

2424 — Calcule $\int \frac{\sqrt{e^x+1}+e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$.

2425 — Determine a superfície envolvente dos planos osculadores à hélice

$$x = a\cos t\,, \quad x = a\,\mathrm{sen}\,t\,, \quad z = a\,t\,.$$

I. S. A. — Calculo Infinitesimal e das Probabilidades — **2.° Exercício de revisão.**

2426 — Considere um triângulo $[ABC]$, um ponto P qualquer de AB e as paralelas tiradas por P a AC e BC; designe por R e S os pontos de encontro dessas paralelas com BC e AC respectivamente. Determine a posição de P sobre AB para a qual a soma das áreas dos triângulos $[ASP]$ e $[PRB]$ é mínima R: *A soma das referidas áreas é mínima se* P *é o ponto médio de* AB.

2427 — Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+1}\,\mathrm{sen}\,x^{-\alpha}}{\mathrm{sen}\,x}$ $(\alpha>0)$.

R: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+1}\,\mathrm{sen}\,x^{-\alpha}}{\mathrm{sen}\,x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{sen}\,x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,x^{-\alpha}) = 0\,.$

2428 — Mostre que a equação $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{2x-1}+\cdots+\frac{n}{nx-1}=0$ tem todas as raízes reais. R: *Visto nenhum dos números* $1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}$ *ser raiz da equação dada, esta é equivalente à equação*

$$\frac{d}{dx}\left[(x-1)\,(2x-1)\cdots(nx-1)\right]=0$$

o que, em virtude do teorema de Rolle relativo a equações algébricas, prova o que se pretendia.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **1.° Exame de Frequência.**

2429 — A cada ponto M da curva $\gamma\equiv y=\log x$ faz-se corresponder o ponto P da normal a γ em M que tem a mesma ordenada que o ponto de encontro do eixo dos yy com a tangente γ em M. Determine a equação da curva γ', lugar dos pontos P. Determine as coordenadas do ponto de γ' tal que a tangente a γ' nesse ponto é paralela à bissectriz dos quadrantes pares. R: *Coordenadas do ponto* P: $x=y-1$, $y=x+1/x$. *Eliminando* x *e* y *entre estas equações e a equação de* γ, *obtém-se* $\gamma'\equiv X=e^{Y+1}+e^{-(Y+1)}$. *O ponto pedido tem por coordenadas*

$$X=\sqrt{5}\,,\ Y=\log\left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right)-1\,.$$

2430 — A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é definida da seguinte maneira: $u_1=1$ e $u_n=\frac{n}{n+2}u_{n-1}$ para $n>1$. Mostre que a série é convergente e calcule a sua soma. R: *Visto ser* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}-1\right)=2$, *a série é convergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{(n+1)\,(n+2)} = $$
$$=1+6\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=3\,.$$

2431 — Sejam $y=f(x)$ a função da variável real x, assim definida:

para $x=2/n$ (n inteiro não nulo): $y=x^2-1$;
para $x\neq 2/n$ (n inteiro não nulo): $y=3/2\,x\cdot|x-1|$.

Estudar a continuidade da função dada, existência e continuidade da sua derivada. R: *A função é descontínua para* $x=0$ *e para* $x=2/n$ (n *inteiro não nulo), com exclusão dos valores* $x=1$ *e* $x=2$. *A função tem derivada contínua nos pontos em que é contínua.*

Soluções dos n.os 2426 a 2431 de José C. Morgado Júnior.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — **2.° Exame de frequência ordinário — 1-6-1946.**

2432 — As rodas dentadas direitas, com os dentes do lado de fora, A_1, A_2 e A_3 estão montadas, respectivamente, nos veios paralelos 1, 2 e 3. A_2 engrena com A_1 e A_3. A roda A_1 tem 20 dentes e raio primitivo igual a 40 mm. As distâncias do veio 2 aos veios 1 e 3 são respectivamente iguais a 90 mm e 150 mm. O veio 1 efectua 10 r/s.

a) Classifique o trem; *b*) calcule o raio primitivo e o número de dentes da roda A_3; e *c*) determine a velocidade angular do veio 3. R: a) *O trem é ordinário simples plano, tendo* 2 *por veio parasita;* b) *raio primitivo,* $R_3=100$ mm; *número de dentes,* $Z_3=50$; c) $\Omega_3=4$ r. p. s.

2433 — Considere a recta E perpendicular ao plano Π. Seja O a intersecção de E com Π.

Demonstre que o momento de inércia em relação ao ponto O dum sistema material qualquer é igual à soma dos seus momentos quadráticos em relação a E e a Π.

2434 — A equação do movimento do ponto material P, com a massa de 20 t, em relação ao sistema galileano $O\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3$, é $P = O + 5t^2\,\mathbf{e}_1 - 1/2\,.\,\mathbf{e}_2 + 4t\,\mathbf{e}_3$, onde a unidade de comprimento é o metro e a de tempo o segundo.

Determine, em kWh, a energia cinética do ponto material no instante $t = 5$ seg. R: $T \approx 6{,}99$ kWh.

2435 — Sôbre a face Oxy do triedro fixo $Oxyz \equiv O\mathbf{ijk}$ move-se o plano Π.

São conhecidas a equação do movimento do ponto P de Π, $P = O + X(t)\,\mathbf{i} + Y(t)\,\mathbf{j}$, e a velocidade angular $\omega = \omega(t)$ de Π em relação ao triedro.

Determine a base da rolante. R: *A base tem por equações paramétricas*

$$\begin{cases} \xi = X(t) - \dfrac{Y'(t)}{\omega(t)} \\[2mm] \eta = Y(t) + \dfrac{X'(t)}{\omega(t)} \end{cases}.$$

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.º Exame de frequência extraordinário — 1-6-1946.

2436 — Os centros das rodas duma engrenagem plana exterior M 20 distam 1050 mm e a razão de transmissão é igual a 2. Calcule os números de dentes das duas rodas. R: $Z_1 = 70$, $Z_2 = 35$.

2437 — Considere um sistema de pontos materiais situados sôbre o plano Π. Sejam E_1 e E_2 duas rectas de Π, ortogonais entre si e cruzando-se no ponto O.

Demonstre que o raio de giração do sistema em relação à recta perpendicular a Π, que passa por O, é a hipotenusa do triângulo rectângulo que tem por catetos os raios de giração do sistema em relação a E_1 e a E_2.

2438 — O ponto material P, com 2 kg de massa, submetido ùnicamente à acção das fôrças dum campo conservativo, atravessa a superfície equipotencial de cota nula com a velocidade de 10 m/s.

Calcule a velocidade de P ao atingir a superfície equipotencial de cota igual a 3,673 kgm. R: $V = 8$ m/s.

2439 — O sólido S move-se em relação ao triedro tri-rectângulo $O\mathbf{ijk}$. A velocidade de S é o torsor cujas coordenadas vectoriais em relação a O são

$$\vec{\Omega} = \operatorname{sen} t^4\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + \log(2 - e^{-t})\,\mathbf{k}$$

e

$$O' = (3 - t)\,\mathbf{i} - \cos(\pi + t^3)\,\mathbf{k}.$$

Determine a posição inicial do eixo de Mozzi. R: *A equação vectorial do eixo de Mozzi inicial é* $Q = O + \mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, *onde* λ *designa o parâmetro.*

Enunciados e soluções dos n.os 2432 a 2439 de P. de Varennes e Mendonça.

PROBLEMAS

UM PROBLEMA E VÁRIAS SOLUÇÕES

2440 — Sumar la serie

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_1\,a_2\,a_3 \cdots a_n} \quad \text{siendo} \quad a_{i+1} = a_i^2 - 2\,.$$

SOLUCIÓN I

Llamemos S (x) *a la función:*

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\,(x^2-2)} + \cdots$$

definida por la serie dada supuesta convergente. Se tendrá:

$$x\,.\,S(x) = 1 + \frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{(x^2-2)\,[(x^2-2)^2-2]} + \cdots =$$

$= 1 + S(x^2-2)$. *Para resolver la ecuación funcional*

(1) $$x\,.\,S(x) = 1 + S(x^2-2)\,,$$

hagamos $S(x^2-2) = z(x)\,.\,\overline{S(x)}^2$ *donde* z (x) *es una función desconocida. Resulta así:* $z(x)\,.\,\overline{S(x)}^2 - x\,.\,S(x) + 1 = 0$, *que da:* $S(x) = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4z(x)}}{2z(x)}$.

Entrando com este valor en la ecuación funcional (1):

$$\frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - x^2\,4z(x)}}{2z(x)} = 1 + \frac{x^2 - 2 \pm \sqrt{(x^2-2)^2 - 4z(x^2-2)}}{2z(x^2-2)}.$$

Sumando y restando estas dos igualdades, se obtiene:

$$\frac{x^2 - 2z(x)}{z(x)} = \frac{x^2-2}{z(x^2-2)}\,;$$

$$\frac{\sqrt{x^4 - 4x^2\,z(x)}}{z(x)} = \frac{\sqrt{(x^2-2)^2 - 4z(x^2-2)}}{z(x^2-2)}.$$

Resuelto este sistema se obtienen las soluciones:

$$z(x) = z(x^2-2) = 1\,, \quad y \quad z(x) = z(x^2-2) = 0\,.$$

Evidentemente sólo sirve la primeira, puesto que la serie es convergente, luego:

$$S(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2-4}}{2}.$$

Pero quando x *crece indefinidamente, la serie* S (x) *obtenida decrece, luego habremos de tomar el signo* —

y $S(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$.

F. MENÉNDEZ-PIDAL DE NAVASCUES, aspirante a ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Camiños.

SOLUCIÓN II

Hagamos $a_1 = 2\,\mathrm{ch}\,\psi$ *será:*

$a_2 = a_1^2 - 2 = 4\,\mathrm{ch}^2\psi - 2 = 2\,(2\,\mathrm{ch}^2\psi - 1) = 2\,\mathrm{ch}\,2\psi$ *que es de igual tipo que* a_1, *luego generalizando por inducción, pues si* $a_i = 2\,\mathrm{ch}\,2^{i-1}\psi$, $a_{i+2} = a_i^2 - 2 = 2\,(2\,\mathrm{ch}^2\,2^{i-1}\psi - 1) = 2\,\mathrm{ch}\,2^i\psi$, *el término general de la serie es pues* $1/u_n$ *siendo* $u_n = 2^n\,\mathrm{ch}\,\psi\,\mathrm{ch}\,2\psi \cdots \mathrm{ch}\,2^{n-1}\psi$.

Desarrollemos ahora $\mathrm{sh}\,2^n\psi$ *de la siguiente manera:*

$$\mathrm{sh}\,2^n\psi = 2\,\mathrm{sh}\,2^{n-1}\psi\,\mathrm{ch}\,2^{n-1}\psi = 2^2\,\mathrm{ch}\,2^{n-1}\psi\,\mathrm{ch}\,2^{n-2}\psi\,\mathrm{sh}\,2^{n-2}\psi = \cdots = 2^n\,\mathrm{ch}\,2^{n-1}\psi\,\mathrm{ch}\,2^{n-2}\psi\,\mathrm{ch}\,2^{n-3}\psi\cdots\mathrm{ch}\,\psi\,\mathrm{sh}\,\psi = u_n\,\mathrm{sh}\,\psi$$

luego: $u_n = \dfrac{\mathrm{sh}\,2^n\psi}{\mathrm{sh}\,\psi}$ *y* $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,\psi}{\mathrm{sh}\,2^n\psi} = \mathrm{sh}\,\psi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,2^n\psi}$

Sea $S_1 = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,2^n\psi} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}^2\,2^{n-1}\psi - \mathrm{sh}^2\,2^{n-1}\psi}{2\,\mathrm{sh}\,2^{n-1}\psi\,\mathrm{ch}\,2^{n-1}\psi} = \frac{1}{2}\sum(\mathrm{cth}\,2^{n-1}\psi - \mathrm{th}\,2^{n-1}\psi)$.

Para sumar S_1 *nos apoyamos en la formula:* $\mathrm{cth}\,2x = (\mathrm{th}x + \mathrm{cth}x)/2$ *que podemos poner:* $\mathrm{cth}\,2x - \mathrm{th}x = \mathrm{cth}x - \mathrm{cth}\,2x$.

Escribiendo desarrollada S_1 *y teniendo en cuenta la fórmula anterior, tenemos:*

$$S_1 = \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{cth}\,\psi - 1/2\,.\,(\mathrm{th}\,2^{n-1}\psi + \mathrm{cth}\,2^{n-1}\psi)\right] = \mathrm{cth}\,\psi - 1$$

y $S = \mathrm{sh}\psi\,(\mathrm{cth}\,\psi - 1) = \dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2-4}}{2}$.

P. ALVAREZ FIDALGO, aspirante a ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Camiños.

SOLUCIÓN III

Se va a probar por inducción completa que se verifica la relación

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-1}a_{n-2} + 2a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + \\ &+ \cdots + 2a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 + 2 = \\ &= a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_2 a_1^2 . \end{aligned}$$

En efecto:

$$a_3 + 2a_2 + 2 = a_2^2 - 2 + 2a_2 + 2 = a_2(a_2 + 2) = a_2 a_1^2$$

Si se verifica para a_n: (1), *se verifica para* a_{n+1}, *puesto que:*

$$\begin{aligned} &a_{n+1} + 2a_n + 2a_n a_{n-1} + 2a_n a_{n-1} a_{n-2} + \cdots + \\ &+ 2a_n a_{n-1}\cdots a_2 + 2 = a_n^2 - 2 + 2a_n + \\ &+ 2a_n a_{n-1} + 2a_n a_{n-1} a_{n-2} + \cdots + \\ &+ 2a_n a_{n-1}\cdots a_2 + 2 = a_n(a_n + 2 + 2a_{n-1} + \\ &+ 2a_{n-1}a_{n-2} + \cdots + 2a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2) = \\ &= a_n(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1^2) . \end{aligned}$$

como queriamos demonstrar. Basandonos en esto, elevamos la serie al cuadrado, agrupando los términos de tal modo que en cada paréntesis intervenga el cuadrado de uno de ellos y los dobles productos en que aparezca el siguiente:

$$\begin{aligned} S^2 = &\left[\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \frac{2}{a_1^2 a_2}\right] + \left[\left(\frac{1}{a_1 a_2}\right)^2 + \frac{1}{a_1^2 a_2 a_3} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{a_1^2 a_2^2 a_3}\right] + \cdots + \left[\left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}\right)^2 + \right. \\ &+ \frac{2}{a_1^2 a_2 \cdots a_n} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n} + \cdots + \\ &\left. + \frac{2}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 a_n}\right] + \cdots \end{aligned}$$

Reduciendo cada paréntesis a común denominador:

$$S^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n + 2a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 + 2a_{n-1}\cdots a_3 + \cdots + 2a_{n-1} + 2}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 a_n}.$$

Los numeradores son (escritos en orden inverso, excepto el primero y último términos): a_1^2; $a_1^2 a_2$; $a_1^2 a_2 a_3$; $\cdots$ $a_1^2 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$ y por tanto:

$$S^2 = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n} + \cdots$$

que es precisamente: $a_1 S$, *si se exceptúa el término* $\dfrac{1}{a_1} a_1 = 1$.

Como la serie es convergente, por ser minorante para todo $a_1 \geq 2$ *de la*

$$\sigma = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^3} + \cdots + \frac{1}{a_1^n} + \cdots = \frac{1}{a_1 - 1},$$

se podrá escribir: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 S_n - 1$, *y pasando al limite:* $S^2 = a_1 S - 1$.

De las 2 raices de esta ecuación se desecha la mayor,

ya que: $\dfrac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4}}{2} \gtrless 1 > \sigma > S$, *resultando como suma de la serie:* $S = \dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$.

FELIPE DE MACHIN VILLARREAL, aspirante a ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Camiños.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

61 — LAPIERRE, ANDRÉ BLANC. — **Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Application à l'étude des flutuations dues à la structure électronique de l'electricité.** Masson et Cie, ed.—Paris, 1945.

La nouvelle branche d'Analyse Statistique qu'a faite découvrir le concept de *fonction aléatoire*, est sûrement appelée à recevoir de nombreuses applications dans toutes les sciences appliquées ou théoriques qui font usage de notions statistiques. La nécessité de ce concept se faisait tellement sentir dans les sciences expérimentales que ce sont des travaux expérimentaux dans des domaines aussi différents que «*la Turbulence des Fluides*» *(G. I. Taylor)* et que «*les fluctuations des courants électriques*» *(Schottky, Courtines, Bernamont)*, qui ont les premiers employé, quoique sous une forme imparfaite et manquant de rigueur, les notions les plus essentielles du «*Calcul Aléatoire*».

M. *Blanc-Lapierre* a repris le problème physique des fluctuations de tension à la sortie d'un amplificateur soumis à une suite de chocs discrets, et lui a appliqué le schéma de la fonction aléatoire.

Après avoir montré que ce problème se ramenait à l'étude d'une fonction aléatoire stationnaire x (t), continue, intégrable et dérivable (au sens de l'analyse aléatoire), — 1ère Partie — il se consacre principalement à la théorie des fonctions aléatoires stationnaires. Dans la 2e Partie il traite des propriétés *ergodiques* de ces fonctions, — le problème ergodique consistant à savoir dans quelle mesure les moyennes stochastiques peuvent être «estimées» par les moyennes temporelles —, ce qui l'amène à considérer une classe de fonctions aléatoires importante: celles dont le coefficient de corrélation est intégrable au sens de *Césaro* d'ordre 1. Nous ferons remarquer que ce problème ergodique n'est autre chose que le problème physique de *la diffusion*.

Dans la 3e Partie, l'auteur se préoccupe de l'influence de la «*densité*» ρ des chocs, dans le temps et du temps de réponse τ de l'amplificateur. Il pose là en fait le problème primordial de l'adaptation des instruments de mesure à l'échelle des phénomènes étudiés, qui a été une des grandes préoccupations de l'Ecole française de la Turbulence (*Kampé de Fériet*, *Dedebant* et *Wehrlé*). M. *Blanc-Lapierre* fait intervenir le paramètre $(\rho\tau)$ et étudie la forme limite de la *fonction de corrélation* quand $(\rho\tau)\to\infty$. Ceci l'amène à parler des fonctions aléatoires stationnaires *laplaciennes* (4ème Partie), qui sont celles dont la fonction de distribution conjuguée (pour k valeurs del a variable indépendante) est une *loi de Laplace* (nous dirions plutôt une loi de «*Gauss-Pearson*»). Dans cette même 4e Partie, il définit aussi «*les processus de Markoff*»: lorsque x (t_2) est indépendant en probabilité de x (t) pour $t<t_1<t_2$, et il généralise cette notion à des *processus aléatoires à plusieurs fonctions*. Pour terminer il applique ce schéma à *l'effet de scintillation*, qui est un effet de fluctuation à une échelle plus grande que l'échelle électronique.

L'auteur conclut à la grande généralité, des méthodes du Calcul aléatoire et à la possibilité de nombreuses applications.

G. Dedebant

62 — PICONE MAURO e TORTORICI PAOLO — **Trattato di Matematiche Generali, 1.° vol.**, Tumminelli, Città Universitaria-Roma, 1947.

«Que livro me aconselha para estudar Matemática?» É frequente ouvir esta pregunta a pessoas que, tendo perdido o contacto com a Matemática ou não tendo podido mesmo receber uma oportuna preparação nesta ciência, se encontram um dia na necessidade de utilizar noções matemáticas que esqueceram ou não tiveram ocasião de adquirir. Verifica-se êste facto nos mais variados sectores da actividade técnica ou científica: engenharia, física, química, biologia, economia, finanças, etc.

O problema é delicado. Uma conveniente cultura matemática não se improvisa fàcilmente de um dia para o outro. Por outro lado, os livros dedicados a êste género de estudiosos dificilmente correspondem ao fim que se propõem atingir: ou são demasiado elementares — e não fornecem ao leitor nem as noções de que êle carece nem a *formação matemática* que lhe seria indispensável para saber aplicar essas noções; ou procuram manter-se num nível mais elevado — e tornam-se então quase sempre inacessíveis.

Ora o presente Tratado de Matemáticas Gerais parece, nêste campo, uma feliz realização, digna de ser acolhida com entusiasmo não só pela referida classe de estudiosos, mas ainda por todos os que se dedicam ao estudo e ao ensino da Matemática. O Prof. Mauro Picone é, há mais de vinte anos, Director do «Istituto per le Applicazioni del Calcolo» de Roma e a experiência ali adquirida em tão longo período de actividade torna-o particularmente habilitado a determinar os domínios da Matemática que convêm a êste ou àquele ramo da Ciência ou da Técnica, e a indicar a melhor maneira de enfrentar as questões concretas que em tais domínios se costumam levantar.

Êste primeiro volume não pressupõe no leitor outros conhecimentos além dos que normalmente se adquirem nos quatro ou cinco primeiros anos dos nossos liceus. Partindo de noções elementares de Álgebra e de Geometria analítica (cálculo combinatório, progressões, teoria dos determinantes e das equações lineares, Geometria analítica no plano e no espaço com um breve estudo das cónicas e das quádricas, trigonometria plana e teoria dos números complexos), eleva-se depois progressivamente aos métodos e ás noções da Análise infinitesimal. Particularmente instrutivo e original o modo como são tratados os seguintes assuntos: teoria dos limites; métodos para o estudo do diagrama duma função e para a pesquiza dos máximos e mínimos das funções de uma ou mais variáveis (com aplicação à discussão da equação trinómia, ao métedo dos mínimos quadrados, etc.); cálculo das raizes reais de equações algébricas e transcendentes; desenvolvimentos em série de Taylor (com particular atenção ao cálculo numérico); *interpolação ou extrapolação mediante uma família de funções* (em particular, racional inteira); *cálculo numérico das sucessivas derivadas duma função dada ùnicamente por seus valores numéricos;* teoria da integração de funções duma variável, com as respectivas aplicações e com o cálculo de integrais clássicos; *métodos para o cálculo numérico de integrais definidos* (integração por série, por interpolação racional inteira: métodos de Côtes, de Bezout, de Cavalieri-Simpson, de Gauss; aplicação ao cálculo numérico dos integrais elípticos de 1.ª, 2.ª e 3.ª espécies, do integral de Gauss da teoria dos erros, do prémio a pagar na morte dum segurado, etc.); desenvolvimentos em série de Fourier (com as noções de convergência pontual e de convergência em média, teorema de Féjer, relações de Bessel e de Parseval, etc.); integração de funções de mais de uma variável; teoria das funções implícitas.

No prefácio, o Prof. Picone expõe ainda o plano do 2.º volume desta obra, actualmente em preparação.

Os assuntos a tratar serão, pouco mais ou menos, os seguintes: integração curvilínea, superficial e a três dimensões; estudo diferencial e integral dos campos vectoriais; elementos da teoria das funções analíticas de uma ou mais variáveis complexas; breve teoria das equações algébricas; teoria da aproximação linear das funções (desenvolvimentos em série por funções ortogonais: por polinómios de Legendre, de Laguerre, de Hermite); transformações de Fourier e de Laplace; sistemas de equações integrais tipo Volterra (lineares ou não) e integração dos sistemas de equações diferenciais ordinárias com dados iniciais das soluções; sistemas de equações integrais tipo Fredholm e integração dos sistemas de equações diferenciais ordinárias com dados das soluções nos extremos; método operacional para a integração de sistemas de equações lineares a coeficientes constantes; problemas clássicos de integração de equações lineares às derivadas parciais da Física; elementos do Cálculo das Variações (problemas de máximo e de mínimo livres ou condicionados para integrais a uma ou mais dimensões, sistemas de equações diferenciais de Euler-Lagrange para as extremantes, etc.); elementos do cálculo das probabilidades e da teoria dos êrros.

As perspectivas assim traçadas são de tal modo atraentes, que nos fazem aguardar com impaciência a publicação deste segundo volume.

J. Sebastião e Silva

63 — AITKEN, A. C. — **Determinants and Matrices** (4.ª edição, 1946, University Mathematical Texts, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 140 págs.).

Ensinar não é, pròpriamente, o objectivo deste livrinho: contém matéria geralmente conhecida exposta de um modo que não tende a provocar o estudo próprio, nem mesmo progressivos comentários. Também não é, precisamente, um livro de Matemática: trata-se de «a code and a calculus» de alguns capítulos da Álgebra linear, onde ficam por esclarecer as ideias fundamentais. Assim o livro, equilibrada e despretenciosamente escrito com a clareza compatível com o seu género (v. por ex., pág. 28, linhas 31 e 32 ou pág. 16, exercício 15), não responde suficientemente a questões tais como: ¿o que é uma matriz? ¿qual a medida do interesse da noção de determinante? mas trata das regras que usualmente se aplicam no cálculo de determinantes e nas operações entre matrizes; e dá, com exercícios simples, a cada passo, uma espécie de desenvolvido dicionário da terminologia relativa a matrizes, determinantes especiais e noções afins (alternante, continuante, Jacobiano, Hessiano, Wronskiano, etc., etc.). Os corpos iniciais são, implìcitamente, o dos números reais ou o dos números complexos. Da matriz como representação duma transformação linear há pouco mais que uma citação inicial; ela é tratada como quadro de números. Parece-nos evidente que os inconvenientes deste procedimento são análogos aos que resultariam de reduzir os números racionais e suas propriedades algébricas, por exemplo, respectivamente à especial representação decimal e cálculo com decimais.

Por outro lado o ponto de vista das aplicações fora da Matemática também não é decididamente tomado. Mas pode recomendar-se este volume a quem queira ter uma oportunidade de adquirir ràpidamente um primeiro treino de cálculo com esse objectivo sem se interessar pelas ideias fundamentais, isto é, dum ponto de vista não matemático.

Hugo Ribeiro