GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII N.° 33 AGOSTO-1947

SUMARIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

ANO VIII - N.º 33 GAZETA DE MATEMÁTICA AGOSTO - 1947

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

DÉVELOPPANTES GÉNÉRALISÉES D'UNE COURBE PLANE

par Gabriel Viguier (*)

Il s'agit, comme le dit M. Buhl, d'une sorte de canonisation géométrique de l'équation de Riccati.

Une courbe-base (M) et une courbe-adjointe (L) étant données dans le plan par leurs représentations en fonction du même paramètre t $M:\xi(t), \eta(t)$ et $L:F(t), G(t)$ ce qui les fait se correspondre point par point, on porte sur la tangente en M un segment $MN=\tau(t)$. Il s'agit de déterminer les courbes-lieux de N (développantes généralisées) c'est-à-dire la fonction $\tau(t)$ de telle sorte que la tangente en N à cette développpante passe par le point L.

Désignons par ω_1 et ω_2 le produit vectoriel de **ML** avec les vecteurs **Mt** et **Mn** tangent et normal à la courbe-base, les relations classiques d'un élément d'arc de la courbe (M):

$$d\xi = d\sigma \cos\alpha \quad \text{et} \quad d\eta = d\sigma \sin\alpha$$

fournissent, comme équation différentielle du problème, l'équation de Riccati:

$$(1) \qquad \omega_1(\tau'+\sigma') + \alpha'\tau(\omega_2-\sigma'\tau) = 0 .$$

Il est intéressant de remarquer qu'on a toute une famille de courbes (N) à propriétés anharmoniques, c'est-à-dire projectivement égales puisque les coordonnés de N, liées linéairement à l'inconnue τ, contiennent homographiquement la constante d'intégration.

D'un autre point de vue, si l'on se donne arbitrairement trois courbes (M), (N), (L) on définit, à partir de M, une expression en t du segment MN et une équation de Riccati déterminée par (M) e (L). Cette dernière, dont MN est solution particulière, est par suite intégrable par quadrature tout en dépendant de trois fonctions arbitraires.

Inversement si l'on se donne une équation de Riccati la plus générale

$$(2) \qquad \tau' + P\tau^2 + Q\tau + R = 0 ,$$

il lui correspond une infinité de problèmes géométriques du type ci-dessus. La courbe-base et la courbe adjointe dépendent d'une fonction arbitraire puisque nous avons la relation $\sigma'=R$, ce qui donne toute famille de courbes (M) «isométriques». Il y a là un fait géométrique particulièrement intéressant.

L'étude de quelques exemples, correspondant plutôt à des cas dégénérés de l'équation de Riccati, permet de retrouver, sous une outre forme, des figures de la géométrie classique plane. C'est ainsi que les coniques et les cubiques circulaires trouvent leur place parmi ces dégénérescences. Considérant enfin la forme réduite de M. E. Cartan.

$$\tau' + P\tau^2 + 1 = 0$$

que nous associons au problème des développantes généralisées, nous arrivons au théorème suivant: les distances ML pour deux courbes (M) isométriques sont dans un rapport inverse de celui des rayons de courbure aux points correspondants.

Si nous considérons, non plus la tangente en (M) mais sa normale, nous déterminons une seconde famille de courbes (N) (développées généralisées) dépendant de l'équation di Riccati

$$\omega_2\tau' - \alpha'\sigma'\tau^2 + (\sigma'^2 - \alpha'\omega_1)\tau + \omega_1\sigma' = 0 .$$

Ce problème n'est évidemment pas logiquement distinct du précédent; cependant envisagé sous sa réciproque, c'est-à-dire à partir de l'équation générale (2), il conduit à la relation

$$P\sigma'^2 + R\alpha'^2 - Q\alpha'\sigma' = 0$$

qui donne une infinité de courbes-bases «isoradiiques», à même rayon de courbure en deux points correspondants.

La forme réduite de M. E. Cartan associée aux développées généralisées conduit au théorème: les distances ML pour deux courbes (M) isoradiiques sont proportionnelles à la quantité $\sqrt{1+\sigma'^2}$.

(*) Ingénieur de recherches à l'O. N. E. R. A.

III. Sobre o Cálculo Simbólico

(Continuação dos n.os 31 e 32)

por **José Sebastião e Silva**

Funções racionais inteiras de operadores lineares. Sejam S um sistema vectorial e Φ uma transformação linear do sistema S em si mesmo. Por *função racional inteira do operador* Φ (suposto variável ou indeterminado) entendemos toda a função $F(\Phi)$ que se possa exprimir mediante um número finito de adições e multiplicações a partir de Φ e de constantes numéricas (isto é, escalares). Visto que a soma e o produto de dois operadores lineares é ainda um operador linear, segue-se que toda a função racional inteira dum operador linear é ainda um operador linear.

As mais simples funções racionais inteiras de Φ que se possam apresentar são, naturalmente, a função $F(\Phi)\equiv\Phi$ e todas aquelas do tipo $F(\Phi)\equiv a$, em que a representa uma constante numérica qualquer. Por definição, todas as outras funções racionais inteiras de Φ se obtêm a partir destas funções elementares, mediante um número finito de adições e de multiplicações. Donde resulta que toda a função racional inteira de Φ se pode escrever sob a forma dum *polinómio inteiro em* Φ:

$$F(\Phi)\equiv a_0\,\Phi^n + a_1\,\Phi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,\Phi + a_n\,;$$

pois que, como é fácil ver: 1) a função $F(\Phi)\equiv\Phi$ e as funções do tipo $F(\Phi)\equiv a$ (funções de *grau zero*) já se podem considerar escritas sob aquela forma; 2) *a soma e o produto de dois polinómios inteiros em* Φ *calculam-se exactamente como se* Φ *fosse uma variável numérica* — o que se reconhece atendendo às propriedades da adição e da multiplicação entre operadores lineares (distributividade, comutatividade da adição, etc.) e à permutabilidade entre operadores lineares e factores numéricos. Dos factos precedentes resulta por sua vez que, *se forem* $F(\Phi)$, $G(\Phi)$ *funções racionais inteiras de* Φ, *os operadores* $F(\Phi)$, $G(\Phi)$ *serão permutáveis, isto é ter-se-à* $F(\Phi)\,.\,G(\Phi)=G(\Phi)\,.\,F(\Phi)$.

Consideremos agora n transformações lineares $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$, do sistema vectorial S em si mesmo, as quais sejam *permutáveis entre si duas a duas.* A definição de *função racional inteira* $F(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$ *dos operadores* $\Phi_1,\cdots\Phi_n$ será análoga à precedente, e o que foi dito a respeito das funções racionais inteiras de Φ aplica-se *mutatis mutandis* às funções racionais inteiras de $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$.

Exemplo: Seja $\mathfrak{A}$ o conjunto de todas as funções analíticas de n variáveis complexas $z_1,\cdots,z_n$, definidas num mesmo domínio, e convencionemos representar por $D_i\,\varphi$ a derivada parcial em ordem a z_i de cada função $\varphi\in\mathfrak{A}$ $(i=1,\cdots,n)$. É manifesto que os operadores $D_1,\cdots,D_n$ constituem transformações lineares do sistema vectorial $\mathfrak{A}$ em si mesmo permutáveis entre si duas a duas, sendo portanto lícito definir funções racionais inteiras de tais operadores. Em particular, a potência $(h_1 D_1+\cdots+h_n D_n)^p$, em que $h_1,\cdots,h_n$ representam escalares quaisquer e p um número natural também qualquer, poderá desenvolver-se segundo a fórmula clássica — o que será agora, não apenas uma simples coincidência simbólica, mas um facto matemático demonstrável, ligado à teoria dos operadores lineares. Finalmente, poderemos definir com maior generalidade *função racional inteira das variáveis* $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$, admitindo que as constantes a que se refere a definição (em particular, os coeficientes dos polinómios) possam ser, em vez de números, operadores lineares quaisquer, permutáveis com cada um dos operadores $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$. As regras de cálculo usuais são ainda aplicáveis neste caso.

Funções racionais fraccionárias de operadores lineares. Seja S um conjunto qualquer (que não será portanto, necessàriamente, um sistema vectorial) e seja Φ uma transformação *unívoca* do conjunto S em si mesmo. Diremos que a transformação Φ é *invertível*, quando existir uma outra transformação unívoca Ξ do conjunto S em si mesmo, tal que $\Xi\Phi=\Phi\Xi=1$; em tal hipótese, o referido elemento Ξ será chamado *inverso* de Φ e poderá representar-se por Φ^{-1} ou por $\dfrac{1}{\Phi}$. Ora, como é fácil ver, para que o operador Φ seja invertível, é necessário e suficiente que ele constitua uma transformação biunívoca do conjunto S em si mesmo; isto é, será necessário e suficiente, que, para todo o elemento $\mathbf{v}$ de S, exista *um e um só elemento* $\mathbf{u}$ de S, tal que $\Phi\,\mathbf{u}=\mathbf{v}$ [1].

Assim, por exemplo, o operador D não será invertível, segundo tal conceito. Mas já a função $\varphi x\equiv x^3$ é uma transformação biunívoca do conjunto dos números reais em si mesmo, e portanto um operador invertível, tendo-se $\varphi^{-1}=\sqrt[3]{\ }$. Do mesmo modo, o operador

[1] Dêste modo, «biunívoca» será sinónimo de «invertível».

$\Theta = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ admite o inverso $\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ [1]. Seja finalmente Φ uma transformação linear do espaço cartesiano R_n em si mesmo: condição necessária e suficiente para que o operador Φ admita inverso é que o determinante da matriz representativa de Φ seja diferente de zero; em tal hipótese, o operador Φ^{-1} poderá ser determinado segundo a regra de CRAMER.

Os operadores invertíveis dir-se-ão também *regulares* e os operadores não invertíveis serão também chamados *singulares* ou *degéneres*.

Da anterior definição deduzem-se fàcilmente as seguintes propriedades: 1) *Se* Φ *é um operador regular, tem-se* $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$; 2) *Se os operadores* Φ, Ψ *são regulares, tem-se* $(\Phi\Psi)^{-1} = \Psi^{-1}\Phi^{-1}$; 3) *Se os operadores* Φ, Ψ *são permutáveis entre si e* Ψ *é regular, também* Φ, Ψ^{-1} *são permutáveis entre si* [2].

Nesta última hipótese, chama-se *cociente* de Φ por Ψ e pode representar-se por $\frac{\Phi}{\Psi}$ o operador $\Phi\Psi^{-1} = \Psi^{-1}\Phi$. Então, das proposições 2), 3) deduz-se imediatamente que: *Dados quatro operadores* $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$, *permutáveis entre si dois a dois, e dos quais* Ψ_1 e Ψ_2 *sejam regulares, tem-se* $\frac{\Phi_1}{\Psi_1} \cdot \frac{\Phi_2}{\Psi_2} = \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{\Psi_1 \cdot \Psi_2}$. Em particular: *Dados três operadores* Φ, Ψ, Θ, *permutáveis entre si dois a dois e dos quais* Ψ, Θ *sejam regulares, tem-se*

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Phi\Theta}{\Psi\Theta}.$$

Temos suposto até agora que S é um conjunto qualquer. *Pois bem, vamos supor a partir deste momento que* S *é de novo um sistema vectorial.* Em tal hipótese, se forem Φ, Ψ, Θ três transformações unívocas do sistema S em si mesmo, sendo Θ regular, ter-se-á ainda: $\frac{\Phi}{\Theta} + \frac{\Psi}{\Theta} = \frac{\Phi + \Psi}{\Theta}$.

Como se vê, é possível extender ao caso presente, uma a uma, tôdas as propriedades formais das fracções numéricas, sob convenientes restrições [3]. Por outro

[1] Recordemos que, na teoria de GALOIS, são chamadas substituições estas transformações biunívocas dum conjunto finito em si mesmo.

[2] Tem-se com efeito $\Psi^{-1}\Phi = \Psi^{-1}\Phi\Psi\Psi^{-1} = \Psi^{-1}\Psi\Phi\Psi^{-1} = \Phi\Psi^{-1}$, q. e. d.

[3] Tal não deve surpreender-nos. A maneira mais natural de introduzir os números racionais (e mesmo os números reais) consiste em apresentá-los como operadores lineares definidos num sistema de *grandezas contínuas*. Institue-se dêste modo uma *teoria sintética dos números*, que será lógicamente impecável, quando se tiver dado uma conveniente axiomática dos *sistemas de grandezas contínuas*, e se tiver demonstrado a não-contradição dessa axiomática (reduzindo-a à não contradição da aritmética dos inteiros). Em particular, observando que os números positivos formam um sistema de grandezas contínuas a respeito da multiplicação, é-se conduzido a uma teoria dos logaritmos, que é a mais simples, a mais natural e a mais elegante que se possa conceber.

lado, recordando que duas funções racionais inteiras dum mesmo operador linear são sempre operadores lineares permutáveis entre si, e atendendo à proposição 3), torna-se natural agora definir *função racional fraccionária dum operador linear* Φ (suposto variável). Daremos esse nome a toda a função $R(\Phi)$, que, sem ser racional inteira, se possa reduzir à forma $R(\Phi) = \frac{f(\Phi)}{g(\Phi)}$ em que f, g designam duas quaisquer funções racionais inteiras (de coeficientes numéricos). É claro que a função $R(\Phi)$ só será definida para aqueles valores de Φ que tornem o operador $g(\Phi)$ regular.

Podemos agora abordar o problema da decomposição duma fracção racional própria em soma de fracções simples: Dados dois polinómios inteiros em z, $p(z), q(z)$, dos quais o primeiro tenha grau inferior ao segundo, sabe-se que, representando por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ as raizes (oportunamente repetidas quando múltiplas) da equação $q(z) = 0$, a função racional $\frac{p(z)}{q(z)}$ admite uma decomposição do tipo $\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{(z-\lambda_i)^{r_i}}$, em que os k_i representam determinados números complexos e os r_i determinados números inteiros. Pois bem, atendendo aos resultados precedentes, é bem fácil agora demonstrar que, *dado um operador linear* Φ, *para o qual os operadores* $\Phi - \lambda_1, \ldots, \Phi - \lambda_n$ *sejam regulares, poderá ainda escrever-se*

$$\frac{p(\Phi)}{q(\Phi)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{(\Phi - \lambda_i)^{r_i}}.$$

* * *

Todavia, êste resultado não permite ainda justificar o cálculo simbólico, tal como nós o utilizámos de início, na integração da equação linear ordinária a coeficientes constantes:

$$(1) \qquad a_0 D^n \varphi + a_1 D^{n-1} \varphi + \cdots + a_{n-1} D \varphi + a_n \varphi = \psi,$$

pois que, para nenhum valor de λ, o operador $D - \lambda$ é invertível: com efeito, a equação $D\varphi - \lambda\varphi = \theta$ admite infinitas soluções em φ, para cada função θ, dada sob certas condições. Ora não seria difícil, mediante considerações relativas a operadores plurívocos, justificar o uso do método simbólico em tal caso. É contudo preferível encarar o problema de um outro ponto de vista [1].

[1] O processo que vamos seguir é, na sua essência, devido a FANTAPPIÈ.

Representemos por $\mathcal{C}$ o conjunto das funções complexas, definidas num intervalo fechado (a, b) e contínuas nêsse intervalo[1]. Se pusermos

$$(2) \qquad \mathcal{J}f = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leq x \leq b;\ f \in \mathcal{C}),$$

imediatamente se reconhece que $\mathcal{J}$ representa uma transformação linear do sistema vectorial $\mathcal{C}$ em si mesmo. Ora o operador $\mathcal{J}-\lambda$ é regular qualquer que seja o número complexo $\lambda \neq 0$, pois que, como é fácil verificar, a equação integral

$$\mathcal{J}\varphi - \lambda\varphi = \theta \quad (\lambda \neq 0)$$

admite, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, a solução *única*

$$(3) \qquad \varphi(x) \equiv -\frac{1}{\lambda}\,\theta(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x e^{\frac{x-t}{\lambda}}\,\theta(t)\,dt,$$

a qual pertence ainda, manifestamente, ao conjunto $\mathcal{C}$. (Para $\lambda = 0$, o operador $\mathcal{J}-\lambda$ converte-se no operador $\mathcal{J}$, que é visivelmente singular).

Estamos portanto habilitados a integrar a equação (1), com as *condições iniciais* $\varphi^{(i)}(a) = c_i$ $(i = 0, \cdots, n-1)$. Suponhamos, para fixar ideias, $n = 2$:

$$(1^*) \qquad a_0 D^2\varphi + a_1 D\varphi + a_2\varphi = \psi \quad (a_0 \neq 0);$$

aplicando duas vezes o operador $\mathcal{J}$ a ambos os membros de (1^*) (admitindo que $\psi, \varphi \in \mathcal{C}$), ter-se-á sucessivamente, pondo $\varphi(a) = c_0$, $\varphi'(a) = c_1$:

$$a_0 D\varphi - a_0 c_1 + a_1\varphi - a_1 c_0 + a_2\mathcal{J}\varphi = \mathcal{J}\psi$$

$$a_0\varphi - a_0 c_0 - a_0 c_1 x + a_1\mathcal{J}\varphi - a_1 c_0 x + a_2\mathcal{J}^2\varphi = \mathcal{J}^2\psi$$

ou ainda, pondo $\bar{\psi} = \mathcal{J}^2\psi + a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0)\,x$:

$$(1^{**}) \qquad (a_2\mathcal{J}^2 + a_1\mathcal{J} + a_0)\,\varphi = \bar{\psi},$$

equação integral equivalente à equação diferencial (1^*), completada com as condições iniciais $\varphi(a) = c_0$ $\varphi'(a) = c_1$. Podemos ainda escrever (1^{**}) sob a forma: $\varphi = (a_2\mathcal{J}^2 + a_1\mathcal{J} + a_0)^{-1}\bar{\psi}$. Então, atendendo a todas as considerações precedentes[2] e utilizando a fórmula (3) será fácil achar a solução *única* de (1^{**}), expressa por meio de quadraturas a partir de $\bar{\psi}$ e das constantes c_0, c_1. Para que o processo fique completamente justificado, será necessário verificar no final que, pertencendo ψ a $\mathcal{C}$, também φ pertencerá a $\mathcal{C}$, hipótese esta em que o processo foi aplicado. Tal verificação é porém imediata.

Anàlogamente se resolve um sistema de equações diferenciais lineares ordinárias a coeficientes constantes. Como já tivemos ocasião de observar, os problemas relativos a circuitos eléctricos *a constantes concentradas* conduzem sempre a sistemas dêste tipo. A questão requere, porém, uma análise cuidadosa, que não é possível desenvolver aqui.

Espaços de Banach — Até agora tratámos ùnicamente de funções racionais de operadores lineares. Se quisermos ir para além das funções racionais de operadores lineares, *sem abandonar o método da Análise geral que temos seguido até aqui*, será necessário restringir o conceito de «sistema vectorial».

Ora notemos que, no espaço cartesiano K_n (a n dimensões complexas), costuma ser definida uma noção de «comprimento», «módulo» ou «norma» dum vector: a cada vector $\mathbf{u} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, atribui-se, como seu *comprimento*, o número real $\left|\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}\right|$, que representaremos aqui por $|\mathbf{u}|$.[1] Por outro lado, esta *avaliação* (chamemos-lhe assim) verifica as quatro condições seguintes:

$M_1)$ $|\mathbf{u}| > 0$, se $\mathbf{u} \neq 0$;

$M_2)$ $|\mathbf{u}| = 0$, se $\mathbf{u} = 0$;

$M_3)$ $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ } quaisquer que sejam o es-

$M_4)$ $|a\,\mathbf{u}| = |a|\,|\mathbf{u}|$ } calar a e os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Dum modo geral, chamaremos *sistema vectorial normado* a todo o sistema vectorial — relativo ao corpo real ou ao corpo complexo — no qual, a cada vector $\mathbf{u}$, se considere associado, *de harmonia com as condições* M_1 a M_4, um número $|\mathbf{u}|$ chamado *norma*, *comprimento* ou *módulo* de $\mathbf{u}$.

Um exemplo dum sistema vectorial normado relativo ao corpo complexo, além do já citado (o espaço K_n), é o conjunto $\mathcal{C}$ das funções complexas contínuas num intervalo fechado (a, b), chamando *norma* $|\varphi|$ duma função $\varphi \in \mathcal{C}$ ao máximo valor de $|\varphi(x)|$ no intervalo (a, b); isto é, em símbolos:

$$|\varphi| = \max|\varphi(x)| \quad (a \leq x \leq b).$$

(É bem fácil ver como, em tal caso, são verificadas as condições M_1 a M_4).

Seja S um sistema vectorial normado. Diremos que uma dada sucessão $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n, \cdots$ de elementos de S *converge para* um determinado elemento $\mathbf{u}$ de S, e escreveremos então $\mathbf{u} = \operatorname{Lim}_n \mathbf{u}_n$, quando, a todo o número $\varepsilon > 0$, se possa fazer corresponder um número natural N_ε, tal que, para $n > N_\varepsilon$, se tenha necessàriamente $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n| < \varepsilon$.

Consideremos de novo o espaço cartesiano K_n.

---

[1] Trata-se portanto de funções *complexas* da variável *real*. É claro que uma parte deste conjunto será constituída pelas funções reais definidas em (a, b) e aí contínuas. Podíamos tratar o assunto com maior generalidade, considerando espaços funcionais mais amplos do que este, mas isso levar-nos-ía demasiado longe.

[2] Trata-se, evidentemente, de decompor a fracção própria do segundo membro numa soma de fracções simples. (Veja-se o artigo do n.º 31 desta revista).

[1] É claro que, dado um número complexo $z = a + bi$, representamos aqui, como habitualmente, por $|z|$, o módulo de z; isto é, pomos $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Neste espaço é, como se sabe, aplicável o critério de convergência de Cauchy: *Condição necessária e suficiente para que uma sucessão de vectores* $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n, \cdots$ *seja convergente é que, para todo o número* $\varepsilon > 0$, *exista um número natural* N_ε, *tal que, quaisquer que sejam* $p, q > N_\varepsilon$, *se tenha* $|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q| < \varepsilon$.

Por outro lado, não é difícil demonstrar que também no sistema normado $\mathcal{C}$ é válido o referido critério de convergência.

Pois bem, *chamam-se espaços de* Banach *todos aqueles sistemas vectoriais normados em que é válido o critério de convergência de* Cauchy. Um espaço de Banach diz-se *real* ou *complexo* conforme ele for um sistema vectorial relativo ao corpo real ou relativo ao corpo complexo. Os espaços K_n e $\mathcal{C}$ são, portanto, espaços de Banach complexos. Variadíssimos outros exemplos de espaços de Banach poderíamos citar aqui, se esta exposição não fosse já demasiado longa.

Espaços funcionais analíticos. Um primeiro conceito de espaço funcional analítico deve-se a Salvatore Pincherle [1]. Dados um número complexo α e um número real $r \geq 0$, representemos por $[\alpha, r]$ o conjunto de todas as séries $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, cujos raios de convergência são *superiores* a r. Como se sabe, cada uma destas séries define univocamente, no interior do seu círculo de convergência, uma função analítica (isto é, uma função provida de derivada em todos os pontos interiores ao círculo). Adoptando os conceitos usuais de *soma de duas séries* e de *produto duma série por um número complexo*, o conjunto $[\alpha, r]$ torna-se manifèstamente um sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

Diremos que uma sucessão $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$ de elementos de $[\alpha, r]$ *converge para* um determinado elemento f de $[\alpha, r]$ e escreveremos então $\lim_n f_n = f$, quando existir pelo menos um círculo com centro em α e de raio ao mesmo tempo *maior* que r e *menor* que os raios de convergência de *todas* as séries $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$, sobre o qual a função $f_n(z)$ tenda *uniformemente* para a função $f(z)$, quando $n \to \infty$. Com tal conceito de «limite» (que não chegou a ser introduzido por Pincherle), o sistema $[\alpha, r]$ torna-se um caso particular dos espaços funcionais analíticos por mim considerados na nova sistematização que dei à teoria dos funcionais analíticos de Fantappiè [2]. *Para maior brevidade, limitar-me-ei a este caso particular.*

(1) Veja-se Pincherle na lista bibliográfica.

(2) *Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche,* Rediconti Acc. Lincei, 1946, pág. 711. A ideia destes espaços já se encontra esboçada num artigo de R. Caccioppoli sobre o mesmo assunto.

Ocorre desde logo preguntar se é possível introduzir no espaço $[\alpha, r]$ uma noção de «norma», da qual se possa deduzir, conforme as convenções precedentes, a noção de «limite» que nele definimos. Creio que a resposta é negativa. Todavia, é facil reconhecer que o espaço $[\alpha, r]$ se pode exprimir, de certo modo, como soma duma infinidade numerável de espaços de Banach.

Funções analíticas de operadores lineares. Consideremos de novo um espaço funcional analítico $[\alpha, r]$. Seja por outro lado S um espaço de Banach complexo, e representemos por $A(S)$ o conjunto das transformações *lineares* do sistema S em si mesmo. Pregunta-se: ¿Dado um operador $\Phi \in A(S)$ e uma função $f \in [\alpha, r]$, que significado devemos atribuir ao símbolo $f(\Phi)$, que se obtém substituindo em $f(z)$ a variável complexa z pelo símbolo Φ? Vou apenas indicar, em linhas muito gerais, como se responde a esta questão.

Observemos, em primeiro lugar, que o conjunto $[\alpha, r]$ contém todos os polinómios inteiros em z (supõe-se, naturalmente, $\alpha \neq \infty$). Em particular, conterá a função $f(z) \equiv z$ e as funções do tipo $f(z) \equiv a$ (a, const. numérica qualquer); todas as outras funções pertencentes a $[\alpha, r]$ se obtêm a partir dessas funções elementares, mediante adições e multiplicações efectuadas em *número finito ou infinito, com passagens ao limite.* Ora a atribuição dum significado ao símbolo $f(\Phi)$ deve ser feita de modo que subsistam as regras de cálculo usuais e, para isso, devem ser verificadas as seguintes condições:

1) $f(\Phi) \in A(S)$, desde que $\Phi \in A(S)$.

2) Se for $f(z) \equiv z$, será $f(\Phi) = (\Phi)$; e se for $f(z) \equiv a$, será $f(\Phi) = a$.

3) Se $f(z) \equiv f_1(z) + f_2(z)$, então $f(\Phi) = f_1(\Phi) + f_2(\Phi)$, e se $g(z) \equiv g_1(z) \cdot g_2(z)$, então $g(\Phi) = g_1(\Phi) \cdot g_2(\Phi)$.

4) Se for $f = \lim_n f_n$, será $f(\Phi) = \lim_n \Phi_n$.

(Diremos, naturalmente, que uma sucessão (Φ_n) de operadores pertencentes a $A(S)$ converge para um determinado operador $\Phi \in A(S)$, quando se tiver $\lim_n (\Phi_n \mathbf{u}) = \Phi \mathbf{u}$, qualquer que seja $\mathbf{u} \in S$).

Ora bem: *Condição necessária e suficiente para que tal problema seja resolúvel é que o operador* $(\lambda - \Phi)^{-1}$ *seja uma função de* λ *univocamente definida e analítica* [1] *no conjunto complementar do círculo com centro em* α *e de raio* r; *em tal hipótese, a solução é única e dada pela fórmula*

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - \Phi} d\lambda \tag{4}$$

(1) É claro que o significado do termo «analítica» aqui empregado deriva do anterior conceito de «limite duma sucessão de operadores». O mesmo se diga a respeito do integral que aparece na fórmula (4).

em que C representa o contorno, percorrido no sentido positivo, dum círculo com centro em α e de raio ao mesmo tempo maior que r e menor que o raio de convergência da série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$.

Supusemos que S é um espaço de Banach complexo; mas podíamos supor que se trata de um espaço funcional analítico ou, mais geralmente, de um espaço que se possa exprimir, de certo modo, como soma duma infinidade de espaços de Banach complexos [1].

Na hipótese de o operador Φ *ser contínuo* [2], demonstra-se que a função $(\lambda-\Phi)^{-1}$ de λ resulta analítica em todos os pontos λ em que é definida, isto é, em que o *operador* $\lambda-\Phi$ *é invertível.* Chama-se *conjunto resolvente* de Φ, precisamente, o conjunto desses valores de λ para os quais $(\lambda-\Phi)^{-1}$ existe, e chama-se *espectro* de Φ o complementar do conjunto resolvente de Φ. *Portanto, no caso de* Φ *ser contínuo, a condição precedente reduz-se a exigir que o espectro de* Φ *esteja contido no círculo de de centro* α *e raio* r.

Ainda na hipótese de Φ ser contínuo, deduz-se do que foi dito a proposição seguinte: *Dada uma função* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, *condição necessária e suficiente para que a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\Phi-\alpha)^n$ *seja convergente e a sua soma coincida com o valor de* $f(\Phi)$ *dado pela fórmula* (4), *é que o espectro de* Φ *seja interior ao círculo de convergência da série dada.*

Uma outra conclusão importante é ainda esta: *Seja* $f(z,t)$ *uma função analítica das duas variáveis* z, t, *e seja* Φ *uma transformação linear de* S *em si mesmo, para a qual o símbolo* $f(\Phi, t)$ *tenha um sentido, fixado pela fórmula* (4), *para convenientes valores do parâmetro* t; *então, se pusermos* $g(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} f(z,t)$, *será* $g(\Phi,t) \equiv \frac{d}{dt} f(\Phi,t)$.

* * *

Vou agora indicar brevemente, sem entrar em pormenores, algumas aplicações do que acaba de ser estabelecido. Consideremos a equação integro-diferencial

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} \equiv \int_a^y \varphi(x,t)\, dt \qquad (a \leq y \leq b),$$

com a condição inicial $\varphi(x,y) \equiv \theta(y)$, supondo θ pertencente ao conjunto $\mathcal{C}$ das funções complexas, contínuas no intervalo (a,b); e admitamos que a função incógnita $\varphi(x,y)$ é, para cada valor de x, uma função de y pertencente a $\mathcal{C}$. Então, se puzermos $\int_a^y \varphi(x,t)\, dt \equiv \mathcal{J} \varphi(x,y)$ [1], a equação (5) tomará o aspecto

$$(5^*) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,y) \equiv \mathcal{J} \varphi(x,y).$$

Ora, se $\mathcal{J}$ fosse um símbolo numérico, a solução desta equação seria, evidentemente,

$$(6) \qquad \varphi(x,y) \equiv \varphi(a,y)\, e^{x\mathcal{J}} \equiv e^{x\mathcal{J}}\, \theta(y).$$

Mas notemos que, segundo a fórmula (3) atrás considerada, o espectro do operador $\mathcal{J}$ se reduz ao ponto $\lambda = 0$ [2]; donde se conclui que o símbolo $e^{x\mathcal{J}}$ tem sentido para todo o x real ou complexo. Por outro lado, atendendo ao último dos resultados precedentes, vê-se que $e^{x\mathcal{J}}\theta(y)$ é de facto uma solução de (5*) e portanto de (5), solução cuja unicidade é fácil estabelecer. Resta-nos *calcular* $e^{x\mathcal{J}}\theta(y)$; para isso basta utilizar o desenvolvimento $e^{x\mathcal{J}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \mathcal{J}^n$ e observar que é: $\mathcal{J}^n \theta(y) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_a^y (y-t)^{n-1}\, \theta(t)\, dt$ [3]; chega-se deste modo ao resultado:

$$(6^*) \qquad \varphi(x,y) \equiv \frac{d}{dy} \int_a^y J_0 \left[2i\sqrt{x(y-t)}\right] \theta(t)\, dt \;^{(4)},$$

em que J_0 representa a conhecida função de Bessel já tabelada: $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. É fácil agora constatar a legitimidade da hipótese segundo a qual

---

(1) A fórmula (4) foi estabelecida por Fantappiè para o caso das matrizes finitas. A sua extensão aos operadores em espaços a infinitas dimensões foi sugerida por E. Cartan em carta a G. Giorgi, e pode considerar-se efectuada por E. R. Lorch (ver bibliografia). Todavia, Lorch limita-se a operadores lineares *contínuos em espaços de* Banach.

(2) O operador Φ diz-se *contínuo* se, para cada sucessão convergente $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ de elementos de S, se tem

$$\Phi(\lim_n u_n) = \lim_n \Phi u_n.$$

(1) Seria mais correcto escrever $\mathcal{J}_y \varphi(x,y)$ em vez de $\mathcal{J}\varphi(x,y)$, mas prefiro a última notação por me parecer mais sugestiva neste caso.

(2) É fácil ver que o símbolo $\mathcal{J}$ representa uma transformação *linear contínua* de $\mathcal{C}$ em si mesmo.

(3) Para reconhecer a validade desta fórmula, basta derivar n vezes sucessivas em ordem a y (sem esquecer que y é ao mesmo tempo parâmetro e limite superior de integração) e observar que as primeiras $n-1$ expressões se anulam para $y=a$.

(4) Pode ainda verificar-se que o integral que figura nesta fórmula é igual a $\int_a^y J_0\left[2i\sqrt{xt}\right] \theta(y-t)\, dt$.

$\varphi(x,y)$ é, para cada valor de x, uma função de y contida em $\mathfrak{C}$.

Em vez de (5), podíamos considerar a equação mais geral

$$(7)\qquad \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\int_a^y \mu(y,t)\,\varphi(x,t)\,dt+\psi(x,y)$$

com a condição inicial $\varphi(a,y)\equiv\theta(y)$ e designando por $\mu(y,t)$, $\psi(x,y)$ funções dadas sob convenientes restrições. Então, pondo $K\varphi(x,t)\equiv\int_a^y\mu(y,t)\,\varphi(x,t)\,dt$, a equação (7) tomaria o aspecto duma equação diferencial linear de 1.ª ordem, com o parâmetro y, cuja integração faria surgir uma função inteira do operador linear K. Notando, por outro lado, como a inversão de $\lambda-K$ consiste na resolução de uma equação linear de Volterra, ver-se-ia que o espectro de K se reduz ainda, neste caso, à origem, e que, portanto, o símbolo $f(K)$ tem sentido para toda a função $f(z)$ analítica na origem[1]. Em tudo o mais, proceder-se-ia de modo análogo ao precedente, àparte o emprego da função J_0.

Também poderíamos substituir em (7) o limite de integração variável y pelo limite constante b, e assim em vez do operader K, teríamos um outro operador linear $\overline{K}$, cujo espectro já não coincidiria necessàriamente com a origem, mas seria ainda um conjunto *limitado*[2], o que é suficiente para que o símbolo $f(\overline{K})$ tenha sentido quando $f(z)$ é uma função inteira.

Notemos ainda que o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dx}\varphi_i(x)=\sum_{k=1}^{n}a_i^k\,\varphi_k(x)+\psi_i(x)\qquad[i=1,2,\cdots,n],$$

com a condição inicial $\varphi_i(a)=c_i$, designando por ψ_i funções dadas e por a_i^k números quaisquer, se pode integrar por considerações inteiramente análogas às precedentes, com a única diferença de que, em vez do operador $\overline{K}$, nos aparece agora o operador definido pela matriz finita $|a_i^k|$ $(i,k=1,\cdots,n)$.

Em todos estes exemplos, as equações diferenciais são apenas da primeira ordem. Passando a equações de ordem superior, é-se levado a considerar funções analíticas de operadores lineares, que já não são funções inteiras.

(1) Fàcilmente se demonstra que o operador linear K é contínuo: transformação linear contínua do espaço $\mathfrak{C}$ em si mesmo.

(2) É fácil demonstrar que o espectro dum operador linear contínuo é sempre um conjunto limitado: ora $\overline{K}$ é, como K, um operador contínuo. Observe-se ainda como a inversão do operador $\lambda-\overline{K}$ se traduz na resolução duma equação integral linear de Fredholm.

* * *

O cálculo operacional baseado na fórmula (4) pode extender-se às funções de mais de uma variável. Seja S um espaço de Banach (ou mais geralmente um espaço que se possa exprimir como soma de infinitos espaços de Banach) e sejam $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$ transformações lineares do espaço S em si mesmo *permutáveis entre si duas a duas*. Então, em condições inteiramente anàlogas às precedentes, designando por $f(z_1,\cdots,z_n)$ uma função analítica das variáveis $z_1,\cdots,z_n$, a atribuïção dum significado ao símbolo $f(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$ pode fazer-se mediante a fórmula

$$f(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1},\cdots,\int_{C_n}\frac{f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}{(\lambda_1-\Phi_1),\cdots,(\lambda_n-\Phi_n)}\,d\lambda_1,\cdots,d\lambda_n,$$

em que $C_1,\cdots,C_n$ designam convenientes curvas fechadas percorridas no sentido positivo. Tudo o que foi dito a propósito das funções analíticas dum operador linear pode estender-se sem qualquer dificuldade ao caso presente.

É mediante considerações deste género que Fantappiè resolve por quadraturas o problema de Cauchy para os sistemas de equações às derivadas parciais, lineares e a coeficientes constantes. Não me deterei sobre tal assunto: na lista bibliográfica são indicadas as memórias de Fantappiè em que o problema é resolvido. Limitar-me-ei a recordar que, em muitos casos da prática (como, por ex., a propósito da equação do calor, da equação dos telegrafistas, etc.) não é o problema de Cauchy que interessa resolver. Em tais casos, o cálculo operacional atrás exposto tem-se mostrado ineficaz, ou pelo menos pouco cómodo, sendo então aconselhável o método baseado na transformação de Laplace[1]. Este, porem, não é isento de inconvenientes, aos quais não posso aqui referir-me com detalhe. A verdade é que ambos os métodos constituem um campo aberto à investigação, onde muito há ainda a esclarecer e a profundar.

Para êsse campo me é grato chamar a atenção dos estudiosos portugueses que desejem familiarizar-se rápidamente com os métodos de matemática moderna e obter em pouco tempo resultados animadores, que os lancem abertamente no caminho da investigação

Lista bibliográfica

A literatura sobre este assunto é vastíssima. Limito-me a indicar as obras e os artigos de que tenho mais directo conhecimento:

(1) Veja-se a lista bibliográfica.

S. Pincherle e U. Amaldi — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, Bologna, 1901.

O. Heaviside — *Electromagnetic theory*, London, 1922.

G. Giorgi — *Nuove osservazioni sulle funzioni di matrici*, Rendiconti Acc. Lincei, Roma, Luglio, 1928.

J. R. Carson — *Electric circuit theory and the operational calculus*, New York, 1929.

P. Humbert — *Le calcul symbolique*, Paris, 1934.

R. Courant und D. Hilbert — *Methoden des Mathematischen Physik*. Bd. II, Berlin, 1937.

G. Doetsch — *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Berlin, 1937 (reeditado em 1943 pela empresa *Dover publications*, New York).

H. Schwerdtfeger — *Les fonctions de matrices*, Hermann, Paris, 1938.

L. Fantappiè 1) — *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali*, ecc. Rendiconti del Cir. Mat. Pal., 1933.

2) *Sulla soluzione del problema di* Cauchy, ecc., Comm. Pontificia Acc. Scient. 1939.

3) *Risoluzione in termini finiti del problema di* Cauchy *con dati iniziali su una superficie qualunque*, Rend. Acc. Italia, 1941.

K. W. Wagner — *Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik*, Leipzig, 1940.

H. Ertel — *Elemente des Operatorenrechung*, Berlin, 1940.

H. S. Carslaw and J. C. Jaeger — *Operational methods in applied mathematics*, Oxford, 1941.

K. Fan — *Exposé sur le calcul symbolique de Heaviside*, Revue scientifique, 1942.

E. R. Lorch — 1) *The spectrum of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1942.

2) *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc., Nov. 1943.

N. Dunford — *Spectral theory*, Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1943.

A. Ghizzetti — *Calcolo simbolico (La trasformazions di Laplace e il calcolo simbolico degli elettrotecnici)* Zanichelli, Bologna, 1943.

Muitas destas obras referem-se exclusivamente ao método baseado no uso da transformação de Laplace. Entre estas é particularmente notável o tratado de Doetsch.

Errata: No artigo do número precedente, pág. 8, 1.ª coluna, linhas 2 e 3 (a partir do título), deve substituir-se Φ por Ψ e Ψ por Φ.

No artigo do número 31, pág. 3, 2.ª coluna, linha 17, deve substituir-se «reais» por «positivos».

A propósito de uma nota

por José Sebastião e Silva

Na nota que publiquei no último número da *Gazeta de Matemática* como comentário ao artigo sobre a máquina calculadora electrónica, fui levado, por excesso de vigor na defesa dum ponto de vista, a fazer afirmações demasiado esquemáticas, que não traduzem exactamente a minha maneira de pensar sobre o assunto, e que vou procurar agora corrigir, para que não dêem origem a interpretações erradas.

Primeiro que tudo, convém precisar que a fase dos *belos* teoremas, das *belas* propriedades, etc. a que nessa nota me referia, não se estende pròpriamente a todo o século passado, nem dele é exclusiva. Por outro lado, eu não queria de nenhum modo dar a entender que essa fase tivesse sido pouco fecunda. A verdade é que poucos períodos da história da matemática se podem comparar a esse, em abundância e em variedade de produção. Simplesmente — e é sobre este ponto que eu desejo insistir — uma análise mais profunda dos factos levaria a concluir que as premissas para tão frutuosa actividade tinham sido criadas anteriormente, a partir de questões concretas, mais ou menos ligadas a fins práticos. Qualquer coisa de semelhante ao que se verificou no período helénico, que me serviu de termo de comparação — em que, renegando platònicamente a sua origem humilde como «arte de medir terrenos», a geometria se lançou nos etéreos espaços da especulação pura. E quem é que não reconhece a importância da obra então realizada? Todos nós sabemos que a ciencia moderna é, na sua estrutura racionalista, um produto do génio grego. Todavia nós devemos pensar que, se porventura, há cinco mil anos, o homem não tivesse tido necessidade de talhar e medir terrenos nas margens do Nilo, talvez os filósofos gregos não tivessem encontrado matéria para as suas magníficas especulações. O certo é que, esgotada a seiva que lhe dera vida, a geometria de Pitagoras e de Euclides acabou por se estiolar no seco abstractismo medieval; e foi preciso esperar pelo aparecimento da álgebra — forma evoluída daquela «grosseira» arte de contar, própria de comerciantes e de mesteirais — para que a geometria pudesse ressurgir, sob novos aspectos e com novas energias.

Mas tambem não devemos encarar a evolução da ciência com espírito unilateral. É indiscutível que, recìprocamente, sem o trabalho do cientista puro, mesmo guiado por ideais platónicos, os progressos da técnica teriam sido impossíveis.

Entre duas tendências opostas oscila o pensamento através dos séculos — tendências que na idade média se chamaram *realismo* e *nominalismo*, e noutras épocas se chamam *racionalismo* e *empirismo*. No decurso da história, ora é uma, ora é a outra destas atitudes que predomina. Aquela fase da matemática a que eu então me referia, corresponde, de certo modo, ao período áureo do racionalismo científico, que encontrou a sua melhor definição nas célebres palavras de Laplace sobre a possibilidade de prever o futuro e de reconstituir o passado, a partir do conhecimento do «estado actual do universo». Hoje, porém, nós atravessamos, na história da ciência, uma zona de viragem, que se prolonga já desde o fim do século passado: os esquemas clássicos tiveram de ser abandonados, novos modelos estão a ser propostas para interpretar os dados da experiência[1]. No início do seu famoso livro sobre as funções de linha, Vito Volterra cita uma curiosa interrogação feita por Poincaré ao abordar o estudo da questão dos quanta: «Les lois physiques ne seront-elles plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles?». No mesmo livro, Volterra refere-se aos fenómenos em que *a memória do passado se conserva e em que portanto o presente dependerá de toda a história, de modo que, sendo o tempo contínuo, o presente dependerá duma infinidade de elementos ou de variáveis que são as que individualizam os factos passados*; e introduz, para o estudo desses fenómenos, as equações por ele chamadas *integro-diferenciais*, às quais por sua vez aplica o conceito de *função de linha*.

A fundação da análise funcional, depois ampliada em análise geral, marca o início duma nova era em matemática. O que há de particularmente curioso em em tudo isto é que, para resolver questões concretas, seja necessário subir cada vez mais em abstracção. E é precisamente este elevado grau de abstracção que desorienta o leigo, fazendo-o crer que se trata dum afastamento da realidade. De resto, a análise geral é precedida e acompanhada duma intensa actividade crítica e de profundas investigações no campo da lógica pura, as quais, se não constituem pròpriamente actividade criadora, são hoje no entanto condição *sine qua non* para que se possa criar alguma coisa de sólido e de potente. É claro que, sendo assim tão elevado o grau de abstracção, mais do que nunca se torna necessário não perder de vista os problemas concretos que deram origem aos conceitos abstractos, de contrário ir-se-à cair fàcilmente na pura fantasia.

O sentimento estético será ainda e sempre um poderoso guia da investigação; e uma das principais preocupações do professor deve ser, precisamente, a de estimular nos seus alunos esse sentimento, fazendo-os aperceberem-se da *beleza* de certas proposições e da *elegancia* de certos raciocínios. Mas tal não basta ou melhor: *tal é uma condição necessária, mas não suficiente, para que o ensino resulte eficaz.*

Porque a matemática não é apenas a «música da razão»...

[1] Vem a propósito citar que, ainda há pouco tempo, se tratou nos Estados Unidos da constituição de um grupo de insignes matemáticos com o objectivo de estudar os problemas postos pelas novas descobertas sôbre a energia atómica.

PEDAGOGIA

UM METODO ACTIVO NO ENSINO DA GEOMETRIA INTUITIVA[1]

por ***Emma Castelnuovo***

. . . .

A geometria nasceu como ciência experimental, de um ponto de vista prático: da medida dos terrenos; nós sabemo-lo, dizemo-lo até aos rapazes no princípio do curso, mas depois apresentamos a matéria às avessas, relegando o assunto da equivalência, que deveria ser o primeiro capítulo, para último capítulo do último ano de geometria plana. Por outro lado, dedicamos o primeiro capítulo, como introdução do curso, ao estudo dos segmentos e dos ângulos, dando logo as definições destes conceitos; nos melhores textos de geometria intuitiva não falta sequer uma bela colecção de exercícios sobre estas primeiras noções, mas, se tais exercícios servem para mostrar a utilidade prática dos conceitos que foram definidos, êles não possuem por outro lado a virtude de facilitar a aquisição efectiva desses conceitos. Em resumo, visto que as definições precedem a prática, o aluno deve primeiro fazer o

[1] Extracto dum artigo, com o mesmo título, publicado no *Periodico di Matematiche*, Dez. 1946, série IV, vol. XXIV, n.º 3, pág. 129-140. Este artigo reproduz uma conferência feita pela A. no Istituto Romano di Cultura Matematica em 30 de Março de 1946.

esfôrço de conceber as ideias abstractas, e, depois que *não* as compreendeu, fazer as respectivas aplicações.

Pode apresentar-se como exemplo típico de erro didáctico a definição de ângulo que costuma ser dada no início do curso. Qualquer que seja o modo como se apresente o conceito de ângulo (p. ex. como «parte do plano compreendido entre duas semi-rectas com a mesma origem», segundo a definição que aparece pela primeira vez à volta de 1660-70 nos tratados de ARNAUD e de BERTRAND, ou então adoptando a definição euclideana, como «inclinação de uma recta sôbre outra»), ele não é compreendido pela grande maioria dos rapazes — ou pela dificuldade do conceito de área infinita que entra na primeira definição, ou pelo uso duma palavra um tanto vaga para um rapaz como é aquela de «inclinação». O aluno-tipo limita-se a decorar a definição, não sei com que vantagem.

Diz-se: mas são conceitos simples aqueles que nós pomos no início, o conceito de ângulo, por exemplo. Precisamente porque são conceitos simples, idéias abstractas, eles resultam particularmente difíceis. «Ao professor — diz TOLSTOI na sua Crónica da Escola de Isnaja Poliana — parece fácil ùnicamente o que não é complexo e vivo. Todos os textos de ciencias naturais começam pelas leis gerais, os de língua pelas definições, os de história pela divisão em períodos e até os de geometria pelos conceitos de espaço e de ponto matemático».

Feita a crítica do método tradicional do ensino, para ver como poderia desenvolver-se o curso com mais eficiência, fixemos os objectivos que se pretende atingir com esse curso. Eu penso que o objectivo essencial do curso de geometria intuitiva é o de, prosseguindo o estudo já feito na escola primária, chamar o interêsse e a atenção dos rapazes sôbre factos que depois constituirão, para aqueles que continuam, o material do curso sistemático. Mas o interesse por uma disciplina qualquer só nasce quando se tem a sensação de poder, com a própria capacidade e com a própria observação, dar uma contribuição ainda que mínima a esta disciplina. Ora, se uma matéria me vem ministrada do geral para o particular, a partir de leis evidentes, de definições e de conceitos simples, não tenho a sensação de dar eu uma contribuição a êste estudo. O meu professor poderá sugerir-me problemas e aplicações de tudo o que explicou, e eu poderei com entusiasmo procurar resolvê-los, mas, não nos iludamos, é um ardor que se desvanece logo depois de resolvido o problema, e fica ligado àquele determinado capítulo; não tenho a impressão de ser eu a criar toda a geometria e a sucessão dos problemas e dos capítulos. É, digamos assim, um método activo a ilhas, sendo as ilhas os vários capítulos.

É possível, pregunta-se, *criar para a geometria um método activo contínuo?* A resposta apresenta-se logo: o desenvolvimento histórico é, evidentemente, um trabalho activo de séculos. Surge portanto espontânea a ideia de seguir um método histórico, repassando, naturalmente sem exagerar, pela mesma labuta de pesquizas e de êrros.

Eu pretendo, em resumo, *substituir um método descritivo por um método construtivo.*

Depois de ter levado os rapazes a exercitarem-se com o desenho geométrico, que os põe em contacto com as figuras mais simples da geometria e que lhes dá a maneira de se aperceberem da diferença entre uma figura e uma outra (p. ex. entre o quadrado e o losango, entre o rectângulo e o paralelogramo não rectângulo, medindo as suas diagonais), inicio o curso retomando as origens da geometria e fazendo compreender a necessidade do cálculo das áreas, detendo-me, por enquanto, nas figuras poligonais. De resto, o problema das áreas é «sentido» pelos garotos desde a mais tenra idade.

Começo por calcular a área do rectângulo, à maneira habitual, considerando naturalmente as dimensões comensuráveis entre si; da área do rectângulo vêm logo as regras para determinar a área do quadrado, do triângulo, do paralelogramo, do trapézio, do polígono regular, do polígono qualquer dividindo-o em triângulos. Mil exemplos e aplicações se apresentam ao aluno da cidade, e mais ainda ao do campo, sôbre a utilidade prática destas regras de medida.

Observe-se bem que não introduzo de nenhum modo as definições de rectas paralelas e de rectas perpendiculares, mas me sirvo sempre destes conceitos; com o uso contínuo e com a prática do desenho tais conceitos vão-se esclarecendo e consolidando por si mesmos.

Mas além da determinação da área duma sala, dum terreno, etc. é útil que a creança se exercite com qualquer coisa de mais pequeno, de mais tangível direi. Os modelos em cartolina, a *decomposição e a recomposição* das figuras planas, oferecem-lhe ao mesmo tempo a possibilidade de analisar e de sintetisar, desenvolvendo as suas faculdades de observação.

Eis alguns exemplos:

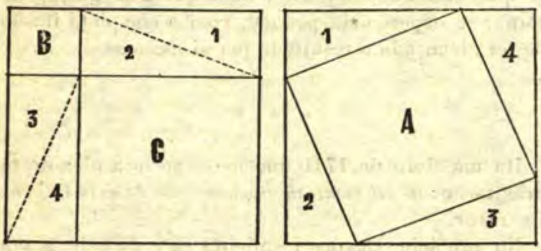
1) decompor um hexágono regular num triângulo equilátero e em três triângulos isósceles iguais; como é a área do triângulo equilátero a respeito da soma das áreas dos três triângulos isósceles?

2) decompor um hexágono regular em dois trapézios iguais e formar com êstes um paralelogramo. Que relação existe entre a base do paralelogramo e o perímetro do hexágono?

E finalmente este, que é, no fundo, a meta a que se pretendia chegar:

Dado um quadrado decompô-lo em dois rectângulos iguais e em dois quadrados desiguais; ou então decompô-lo em quatro triângulos rectângulos iguais e num quadrado (ver figuras).

O executar estas decomposições é simples; torna-se porém necessária uma particular intuição para tirar,



do seu confronto, uma propriedade; mas há sempre alguém na classe que propõe o caminho acertado: os rectângulos podem-se decompor em triângulos. E então? A ideia daquele companheiro lançou a centelha na aula: *o quadrado* A *deve ter a mesma área que a soma dos quadrados* B *e* C; ou seja: *o quadrado construido sobre a hipotenusa dum triângulo rectângulo é equivalente à soma dos quadrados construidos sobre os catetos.*

O efeito deste teorema de PITÁGORAS, redescoberto pelos rapazes nas primeiras lições do curso de geometria, é psicològicamente interessante; acontece ao aluno perante a «revelação» do teorema de PITÁGORAS o que sucede a um de nós que se encontre diante dum quadro maravilhoso ou dum espectáculo da natureza invulgar e sugestivo; é «deveras grandioso» [1]. A princípio esta estranha propriedade do triângulo rectângulo dá apenas um gosto estético; para poder apreciá-la é preciso fazer dela muitas aplicações: eis que o rapaz determina o comprimento da diagonal da sua mesa de estudo, o comprimento duma corda estendida entre a sua janela e a janela do andar inferior da casa em frente, a distância, depois dum certo tempo, de dois combóios partidos simultaneamente de Orte com dadas velocidades e dirigidos um para Arezzo e o outro para Terni, a intensidade da força com que é puxado um barco das duas margens dum rio com cordas em direcções perpendiculares e com forças de dadas intensidades, e vê assim como a geometria presta serviços em todos os domínios, na geografia, na física, na prática em geral (note-se de passagem que os alunos não conhecem ainda a operação de extracção da raiz quadrada, mas fazem uso da tábua de quadrados [1]).

Mas o mesmo rapaz que se interessa pelas aplicações práticas duma verdade geométrica, é capaz de se entusiasmar pelas aplicações e pelas extensões mais abstractas do mesmo teorema, como por exemplo: «o triângulo equilátero construido sobre a hipotenusa dum triângulo rectângulo é equivalente à soma dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos».

Esta lenta e progressiva passagem do concreto ao abstracto, do particular ao geral, faz com que a matéria vá sendo criada e estudada segundo as leis naturais do desenvolvimento psicológico; e eu penso que o teorema de PITÁGORAS, com o seu duplo aspecto prático e abstracto, esteja particularmente indicado para orientar a mente do aluno no sentido do raciocínio matemático. De resto, já PLATÃO no seu diálogo o *Menon* põe em evidência o valor do método heurístico sugerido por tal verdade geométrica, mostrando como o escravo, benèvolamente guiado por SÓCRATES, consegue construir um quadrado duplo de um outro dado.

Mas retomemos o problema que nos propusémos de início: a determinação das áreas dos terrenos. Sim, é fácil medir a área dum campo poligonal, se não há obstáculos, como lagos, bosques, etc. No caso contrário, seria necessário desenhar nas vizinhanças, numa esplanada, um campo *igual* aquêle dado. Surge assim, de maneira natural, o *problema da igualdade*: como se constroe um polígono igual a um polígono dado, em particular um triângulo igual a um triângulo dado?

É necessário para isto chegar ao *conceito de ângulo*; êle brota assim, a meio do primeiro ano de estudo, como uma necessidade. Eis como do complexo (polígono) se chega a pouco e pouco aos elementos (ângulo, segmento) que formam o complexo.

Não se dá a definição de ângulo; muitas medidas de ângulos com o transferidor.

Tal como os problemas práticos sobre as áreas nos conduziram ao facto não evidente do teorema de PITÁGORAS, assim também as medidas de ângulos conduzem a uma propriedade que é, como a primeira, não evidente, e portanto dá verdadeiramente a sensação da descoberta: *a soma dos ângulos dum triângulo tem sempre o mesmo valor, qualquer que seja a forma do triângulo.*

Muitíssimos exercícios sobre este assunto, como por exemplo:

---

(1) No original: «troppo grandioso».

(1) Nesta altura da conferência, a A. referiu-se à conveniência que há em evitar, na medida do possível, o ensino de algoritmos sem justificação. (Nota do T.).

1) Num triângulo isósceles ABC prolongue-se o lado BA de um segmento AD igual a AC e una-se D com C. Se $\widehat{B}=40^{o}$, que valor tem o ângulo $B\widehat{C}D$? Resulta sempre: $B\widehat{C}D=\widehat{B}+\widehat{D}$?

2) Num triângulo rectângulo um ângulo é de 50^{o}. Determinar a amplitude do ângulo compreendido entre a altura e a mediana relativas à hipotenusa. Observa-se que a amplitude deste ângulo é igual à diferença entre as amplitudes dos ângulos agudos. Será sempre verdadeira esta propriedade?

Tal género de exercícios faz sentir desde este momento a necessidade do cálculo literal.

Agora já se pode abordar o problema da construção de um triângulo igual a um outro dado, empregando os três critérios da igualdade (construções com régua, compasso e transferidor); ainda aqui *os critérios de igualdade se impõem como uma necessidade de construção.*

Mas as mais das vezes não é fácil encontrar uma esplanada em que se possa desenhar um campo igual àquele dado. E então?

Surge espontânea uma idea sugerida pela própria vida que circunda o rapaz, pela sua observação quotidiana. Todos os rapazes sabem que pode haver objectos com a mesma forma e com extensão diferente: quem não brincou em criança com aquelas caixas cúbicas que entram umas nas outras ou com aquêles ovos que se abrem e de que um é a forma reduzida do outro? Ou, para nos referirmos a uma época mais recente, qual o rapaz que não viu a planta duma sala, a ampliação duma fotografia, ou uma carta geográfica da mesma região em escalas diversas?

O conceito da semelhança é — parece-me — o conceito geométrico mais natural, mais espontâneo, mais atraente, não sei se mais fácil do que o de igualdade, mas certamente mais sugestivo. È um conceito qne nasce cedíssimo, não exagero se digo que à volta dos dois, ou três anos. Nós vemos disso uma prova no facto de a criança se divertir em ver representado em miniatura o mundo que a circunda: a sua casa, a casa em frente, a igreja da aldeia. De resto, o facto de estas ideas nascerem tão cedo na mente da criança é confirmado pelo estudo da evolução histórica deste conceito geométrico, que nos faz remontar a TALES de Mileto.

Acho pois que um estudo intuitivo-experimental do conceito de semelhança seria oportuno e desejável.

Sem continuar a descrever a sucessão dos capítulos segundo este ponto de vista, bastar-me-á resumir os princípios que o informam: *passagem do concreto ao abstracto, do complexo ao simples, e portanto ordenação o curso segundo o desenvolvimento histórico*; princípios que me parece reencontrar nas belas palavras de G. LOMBARDO-RADICE [1]: «Devemos deixar que o pequeno matemático, que há em todo o espírito infantil, se desenvolva tão livremente quanto possível, com esforços e investigações pessoais... Tem valor para a criança apenas aquele pouco que alcança com a própria experiência, ou que, com a guia dum mestre (o qual saiba donde parte e onde quere chegar), pode tornar-se experiência pessoal, com a completa ilusão de ter alcançado o resultado por si mesmo».

* * *

Há um livro de 1741 que me sugeriu a idea desta orientação: os *Éléments de géométrie* de ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT.

No prefácio, CLAIRAUT salienta este método, a sua originalidade e naturalidade, e agradece à Marqueza de CHÂTELET o ter-lhe suscitado a idea de uma tal orientação, tendo essa desejado uma via «real» para chegar às matemáticas.

É uma verdadeira jóia de exposição: é uma contínua descoberta natural das propriedades das figuras a partir da observação e da medida; é — podemos dizer — uma vista do mundo que nos circunda, com as lentes do geómetra. E é particularmente interessante que um matemático como CLAIRAUT, prodigiosamente dotado e extremamente precoce (como se sabe, aos 10 anos lia o Tratado das secções cónicas de L'HÔPITAL e aos 13 apresentava a sua primeira memória original) tenha dedicado o seu tempo a esta obra de natureza didáctica, com tanto gosto e com tanto amor.

. . . .

Evidentemente, CLAIRAUT previa como seria mal interpretado quando, no fim do prefácio dos *Elementos*, escrevia: «Visto que escolhi a medida dos terrenos para interessar os principiantes, não deverei talvez temer que se confundam êstes Elementos com os ordinários tratados de relêvo? Tal interpretacão não pode ser dada senão por aquêles que não perceberem que a medida dos terrenos não é, de nenhum modo, o verdadeiro objectivo dêste livro, mas que tal assunto me serve unicamente como pretexto para levar a descobrir as principais verdades geométricas».

Segundo refere um dos mais sérios historiadores da matemática contemporâneos — DAVID EUGENIO SMITH — (no seu livro *The Teaching of Elementary Mathematics*»)

---

[1] G. LOMBARDO-RADICE: *Lezioni di Didattica*. Parte III: Il primo insegnamento scientifico.

não parece que os elementos de geometria de Clairaut tenham chegado a entrar com o seu verdadeiro espírito no ensino oficial, nem sequer em França, embora ali tenham logo conquistado larga fama, tanto que Voltaire os eternizou com a frase: «Este cientista (Clairaut), tornando agradável a ciência, torna-a insensívelmente necessária à nossa nação».

Depois de ter experimentado por um ano este método didáctico, considero que possa dar no primeiro triénio médio [1] brilhantes resultados, fazendo nascer nos jóvens espíritos o desejo da investigação e da descoberta.

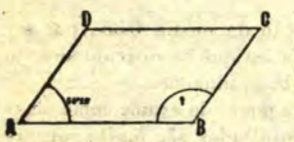
Tradução de J. Sebastião e Silva

[1] Desde a reforma Gentile, o ensino secundário em Itália está assim organizado: 1) três primeiros anos em comum *(escola média ou ginásio)*; 2) cinco anos diferenciados, com predomínio das ciências no chamado *liceu científico* e predomínio das letras no chamado *liceu clássico*.

RESULTADOS DUM EXAME DE GEOMETRIA — 1.º CICLO

por ***Maria Teodora Alves***

Transcrevemos o ponto de exame de Geometria do 1.º ciclo (1.ª chamada) realizado no Liceu de Passos Manuel no ano lectivo findo.



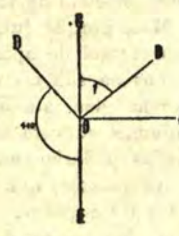
1.º — Condições da figura: $[ABCD]$ é um paralelogramo. O ângulo $\widehat{BAD}$ mede $40^\circ 29'$. Qual é a medida do ângulo $\widehat{ABC}$?

2.º — Construa o triângulo cujos lados medem respectivamente 3 cm, 5 cm e 6 cm e construa as alturas correspondentes aos três lados do triângulo.

3.º — Condições da figura: EC é perpendicular a OA, OD é perpendicular a OB. Ângulo

$$\widehat{EOD} = 140^\circ.$$

Qual é a medida do ângulo $\widehat{BOC}$?



4.º — Descreva uma circunferência de 3 cm de raio. Tome, no plano da circunferência, um ponto O à distância de 5 cm do centro dessa circunferência. Construa a figura simétrica da circunferência descrita, tomando o ponto O por centro de simetria.

5.º — Condições da figura: No triângulo $[ABC]$ é: $\overline{AC} = \overline{BC}$. CD é paralelo a AB. Podemos afirmar que ângulo $\widehat{CAB}$ = ângulo $\widehat{BCD}$. Porquê?

6.º — Os dois lados consecutivos de um rectângulo medem respectivamente 3 decímetros e 12 decímetros. O lado de um quadrado mede 6 centímetros. Calcule a área do rectângulo tomando por unidade a área do quadrado.

7.º — A geratriz de um cilindro de revolução mede 18 centímetros e o raio da base do cilindro é igual a 1/4 da geratriz. Calcule o volume deste cilindro expresso em decímetros cúbicos.

8.º — Quais são os poliedros regulares cujas faces são triângulos equiláteros?

Polígono da frequência das notas da prova escrita

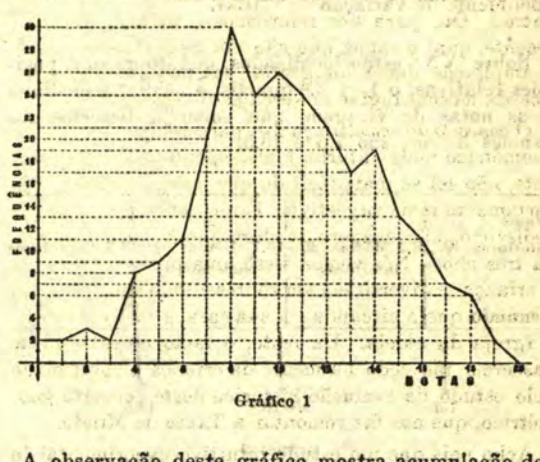


Gráfico 1

A observação deste gráfico mostra acumulação de abcissa nos pontos 8 e 14.

O facto é de fácil interpretação se tivermos em vista que as notas de viragem, nos exames liceais, são 7.5 e 13.5, correspondentes respectivamente à admissão à prova oral e à dispensa da prova oral. Se o examinador aprecia as provas dos alunos com benevolência, a acumulação faz-se no sentido favorável ao aluno. Se o examinador aprecia as provas com severidade, a acumulação faz-se no sentido desfavorável ao aluno.

Em todos os gráficos de frequência de notas de classificação que temos feito, sempre um dos dois casos temos verificado.

A justa medida, por mais objectivo que o examinador pretenda ser, é muito difícil atingir. Mas antes a adopção de um critério de classificação favorável ao aluno do que o critério oposto.

A acumulação no ponto 8 foi talvez excessiva, visto tratar-se de uma prova não decisiva, isto é, que ainda vai ser conjugada com a prova de Aritmética e Álgebra, para decidir depois a sorte do aluno.

Se tivesse sido evitada a acumulação nos pontos 8 e 14, o gráfico de frequência das notas de classificação das provas apresentaria uma regularidade mais satisfatória ainda.

Seguem agora algumas medidas estatísticas determinadas tomando por base a classificação das provas dos alunos e que mostram o comportamento deles perante o ponto:

3.º Quartil	$Q_3 = 13.6$	
mediana	$M_d = 10.7$	
média	$M = 10.8$	$N = 257$
1.º Quartil	$Q_1 = 8.2$	
	$\sigma = 3.85$	
coeficiente de variação	0.35.	

Sobre XX' estão localizados, quanto às suas posições relativas, o 1.º e 3.º quartis, a média, a mediana e as notas de viragem, que, como já dissemos nos exames liceais, são 7.5 e 13.5.

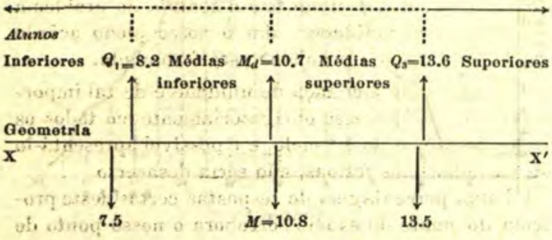


Gráfico 2

Pela inspecção do gráfico vemos que alguns alunos inferiores foram admitidos à prova oral pois o 1.º quartil Q_1 é superior à nota de viragem 7.5; todos os alunos superiores foram dispensados da prova oral, pois o 3.º quartil Q_3 quasi que coincide com a nota 13,5 que marca o limite inferior dos alunos bem dotados.

Por outro lado, a mediana próxima da média e sensìvelmente equidistante dos quartis, indica ter sido atingida uma gradual classificação tanto no grupo abrangido por alunos médios inferiores e inferiores, como no grupo abrangido por alunos médios superiores e superiores, o que é proveniente da ordenação dos alunos quanto à medida da habilidade que revelaram.

Essa regularidade de classificação acentua-se mais nìtidamente se considerarmos que a percentagem de reprovações 22.1 é sensivelmente igual à percentagem de alunos dispensados 22.5.

O valor $\sigma = 3.85$ e que interpretado como representando a diferença das abcissas entre uma questão que é respondida correctamente por 50 °/₀ dos alunos e uma questão que é respondida correctamente por 15.87 °/₀, dá a extensão para a qual diferem da média.

O coeficiente de variação da média 0.35, por ser relativamente pequeno, indica que as dificuldades do ponto foram razoávelmente graduadas.

Podemos considerar este ponto de exame como aceitável e porque os seus resultados são muito concordantes com os resultados do ponto de exame do ano lectivo 1945-1946, de estrutura análoga, e que foram publicados no n.º 30 da Gazeta de Matemática, podemos arriscar a afirmação de que um ponto de exame organizado nos moldes destes dois pontos tem consistência para medir a habilidade dos alunos num exame de Geometria do 1.º ciclo.

Mas, porque julgamos que este ponto de exame é susceptivel de aperfeiçoamento e porque não colaborámos na sua organização nem na classificação das provas dos alunos, seja-nos permitido apresentar algumas sugestões que, se forem consideradas judiciosas, poderão contribuir para melhorá-lo.

As questões que caracterizam êste ponto são a 3.ª, 5.ª e 6.ª e que por êsse motivo merecem estudo especial. Mas, antes de nos referirmos a cada uma delas, desejamos fazer um ligeiro reparo à 2.ª questão.

Nesta questão é pedido ao aluno a construção das três alturas de um triângulo dado. Como o triângulo é obtusângulo bastaria pedir as alturas relativas respectivamente ao lado oposto ao ângulo obtuso e a um dos outros dois lados do triângulo.

Evitar-se-ía uma construção repetida que nenhum novo elemento de informação traz acêrca do aluno; ou, então, sendo pedida a construção das três alturas do triângulo, deveria ser pedida a propriedade de concorrerem no mesmo ponto, o que daria finalidade à questão proposta.

Como está formulada a 2.ª questão, pedimos vénia para confessar a nossa discordância.

Posta esta discordância de pormenor insignificante, vamos ocupar-nos mais particularmente da 3.ª, 5.ª e 6.ª questões que, como já dissemos, dão caracter ao ponto.

O quadro das respostas exactas dadas pelos alunos a estas três questões e das respostas incompletas, mas que mostraram que o aluno teve o entendimento delas, é o seguinte:

Questões do ponto	Respostas exactas	Percentagem	Respostas incompletas com o entendimento da questão	Percentagem
3.ª	210	81.7	1	—
5.ª	39	15.2	18	7.0
6.ª	46	17.9	52	20.0

Na 3.ª questão, dadas as condições de uma figura, pede-se ao aluno que estabeleça determinada conclusão por inferências dos seus conhecimentos ou intuïção.

Na 5.ª questão, afirma-se uma dada conclusão a respeito de uma figura e pede-se ao aluno que indique quais as inferências que conduzem à conclusão estabelecida.

Tanto numa como noutra questão as inferências pedidas são simples.

Somos de opinião que nos pontos de geometria do 1.º ciclo devem sempre figurar questões destes dois tipos, não só porque são funcionais no ensino da Geometria, como porque preparam para o estudo subsequente deste ramo da Matemática.

Geometria intuitiva e experimental não quer significar que os alunos não devam fazer inferências com os resultados da sua intuïção ou experiência.

«O pensamento em geometria é um pensamento em termos de relações» (Russel).

Há, todavia, que estudar o comportamento dos alunos em cada uma das questões para que possam ser, depois, bem graduadas nos pontos de exame.

As percentagens indicadas no quadro acima, parecem aconselhar que, em futuros pontos de exame, questões do tipo da 3.ª sejam mais dificultadas e que questões do tipo da 5.ª sejam mais facilitadas.

Para simplificar questões do tipo da 5.ª bastaria decompôr a conclusão, de modo a sugerir ao aluno a sucessão das inferências a estabelecer e que a justificam.

Dir-se-á que êste procedimento contraria as instruções pedagógicas sobre a organização de pontos de exame emanadas das estâncias superiores.

Um ponto de exame deve ter maleabilidade na sua organização. As alterações a introduzir-lhe devem provir do estudo estatístico dos resultados sem que estejam sujeitas a nenhum molde forçado.

Caso contrário, o ponto de exame cristaliza e mecaniza-se.

A 6.ª questão do ponto de exame é de outra ordem. É um caso simples de um problema de mudança de unidade, embora não apresentado sob a forma clássica.

A percentagem de alunos que o resolveram acertadamente foi, como mostra o quadro, 17.9.

Se lhe adicionarmos a percentagem daqueles alunos que revelaram o entendimento da questão, obtemos a percentagem 37.9 que é muito baixa ainda.

Em estudos subsequentes da Geometria, em Física e em casos correntes da vida de todos os dias, o problema de mudança de unidade é de uso frequente.

Já, na instrução primária, o aluno toma contacto com êste problema e tem larga prática de resolução de problemas dessa espécie, no estudo do sistema métrico. No liceu, principalmente no 2.º ano, no estudo dos números complexos, no sistema métrico e no conceito de razão de duas grandezas, o aluno estuda o problema de mudança de unidade sob vários aspectos.

Poder-se-á dizer que a 6.ª questão teria sido resolvida pela maioria dos alunos se fosse formulada deste modo: Quantos quadrados de 6 cm de lado cabem no rectângulo cujos lados consecutivos medem respectivamente 3 dm e 12 dm?

Todos os professores sabem, que à pergunta: Quantos cabem, os alunos invariàvelmente respondem: Já sei. É um problema de dividir.

Também estamos convencidos de que o número de respostas certas aumentaria, talvez, consideràvelmente.

Mas não é isso o que importa: o que se deve pretender saber, é se o aluno tem o sentido do problema de mudança de unidade e daí o nosso pleno acôrdo com o modo como o problema está formulado.

O problema de mudança de unidade é de tal importância que se figurasse obrigatòriamente em todos os pontos de exame do 1.º ciclo, e é possível apresentá-lo sob variadíssimas formas, não seria desacerto.

A baixa percentagem de respostas certas neste problema do ponto de exame corrobora o nosso ponto de vista.

Ainda considerando um pouco mais sobre a importância do problema de mudança de unidade, devemos dizer que nunca falámos com nenhum professor do 8.º grupo que não desse a êste problema uma capital importância.

Como explicar, portanto, tão baixa percentagem de respostas exactas? A pouca experiência da profissão de professor (considero-me ainda aprendiza) não nos deixa arriscar juizos definitivos sobre este assunto, mas estamos em crer que, se o aluno em vez de resolver problemas teoricos de mudança de unidade, os resolvesse práticamente, isto é, depois de medir e de pesar, adquiriria perfeito sentido do problema. «Nada está no intelecto que não tenha estado nos sentidos» (Locke).

O óbice das turmas grandes e da falta de tempo para cumprir os programas levam-nos a abreviar o ensino desta e doutras questões e, portanto, a actuarmos na percepção dos alunos pelo «ear and eyes» que deu optimos resultados nas observações dos antigos astrónomos, mas dá muito fraco rendimento no ensino de crianças e de adolescentes.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — JULHO DE 1947

Licenciaturas em ciências matemáticas, físico-químicas e geofísicas, preparatórios para as escolas militares, e curso de engenheiros geógrafos — Ponto n.º 1 — Julho de 1947.

2441 — Indique uma condição que assegure a existência de soluções inteiras para a equação $ax+by=c$. R: *Que* a, b *e* c *sejam inteiros e que o* m. d. c. *de* a *e* b *seja um divisor de* c.

2442 — Determine a base do sistema de logaritmos em que é $\log 873=4$. R: $\sqrt[4]{873}$, *pois é* $(\sqrt[4]{873})^4=873$.

2443 — A que condição devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ para que as raizes sejam recíprocas? Justifique a resposta. R: *Deve ser* $a\neq 0$ *e* $c:a=1$ *pois que se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da equação e se estas são reciprocas é* $x_1=1:x_2$ *e então* $x_1x_2=(1:x_2)\cdot x_2=1=c:a$.

2444 — Resolva a equação:

$$(a-x)(x-b)=(x-a)(x-c).$$

R: *Como a equação proposta é equivalente a*

$$(x-a)(2x-b-c)=0,$$

as raizes desta $x_1=a$ *e* $x_2=(b+c):2$ *são as raizes da proposta.*

2445 — Mostre que para valores reais de x o trinómio x^2-4x+5 toma sempre valores positivos. R: *O discriminante do trinómio é* $16-20=-4$; *o trinómio tem, por isso, zeros que são números complexos e então para valores reais de* x *ele toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2, *logo, no caso posto, o trinómio é sempre positivo.*

2446 — Calcule a área da superfície lateral dum recipiente cilíndrico com a capacidade de 5 litros, sabendo que a altura e o diâmetro da base são iguais. R: *Se for* d *o diâmetro da base e a altura do cilindro (supomos tratar-se de um cilindro recto de base circular) será o seu volume* $\pi d^3:4=5\,\text{dm}^3$, *donde* $d=\sqrt[3]{20:\pi}\,\text{dm}$ *e a área da superfície lateral* $\pi d^2=\sqrt[3]{20^2\pi}\,\text{dm}^2$.

2447 — Verifique a identidade:

$$(\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)\operatorname{sen} 2a=2.$$

R: *Como* $\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a=(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a):\operatorname{sen} a\cos a=2:\operatorname{sen} 2a$ *então é* $(\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)\operatorname{sen} 2a=2$.

2448 — Calcule a área dum losango em que cada lado tem 28,345 m de comprimento e um dos ângulos mede 67° 28′ 10″. R: *Como se sabe, se forem* d_1 *e* d_2 *as diagonais do losango, a área deste é dada por* $d_1 d_2:2$ *e se for* α *um dos ângulos internos do losango e* l *o lado é* $l_1=2l\cos\alpha/2$ *e* $d_2=2l\operatorname{sen}\alpha/2$, *logo a área será dada pela expressão* $A=l^2\operatorname{sen}\alpha=28^2{,}345\operatorname{sen}67°28'10''$; *pela aplicação de logaritmos tem-se* $\log A=2\log 28{,}345+\log\operatorname{sen}67°28'10''=2\times1{,}45248+\bar{1}{,}96552=2{,}87047$ *e, portanto,* $A=742{,}1\,\text{m}^2$.

2449 — Mostre que o produto de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 6. R: *Seja* $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ *o produto de três inteiros positivos consecutivos. Destes três números um deles é divisivel por* 2 *pois se* n *o não é, então* $n+1$ *é divisivel por* 2; *e tambem um deles é divisivel por* 3, *pois que se* n *não é divisivel por* 3 *será* $n=3r+1$ *ou* $n=3r+2$; *no primeiro caso* $n+2=3r+3$ *é múltiplo de* 3 *e no segundo* $n+1=3r+3$ *é também múltiplo de* 3. *Então como* 2 *e* 3 *são primos entre si e o produto é divisivel por qualquer deles, ele é também divisivel por* 6.

2450 — Em quantos pontos se intersectam seis rectas dum plano, quando três quaisquer delas não passam por um mesmo ponto? R: *Como não se trata de geometria projectiva e portanto as rectas paralelas não se encontram, temos que considerar os seguintes casos:*

1.º) *Não há, entre as 6 rectas consideradas, duas que sejam paralelas, então o número de pontos de intersecção é* ${}^6C_2=15$.

2.º) *Há um só par de rectas paralelas. Então o número de pontos é* ${}^6C_2-{}^2C_2=15-1=14$.

3.º) *Há três, e só três, rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^3C^2=15-3=12$.

4.º) *Há quatro, e só quatro, rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^4C_2=15-6=9$.

5.º) *Há cinco e só cinco rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^5C_2=15-10=5$.

6.º) *As seis rectas são paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^6C_2=0$.

7.º) *Há dois pares, e só dois, de rectas paralelas, mas não quatro rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-2\cdot{}^2C_2=13$

8.º *Há três pares de rectas paralelas, mas não quatro paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-3\cdot{}^2C_2==15-3=12$.

9.º) *Há três rectas paralelas entre si e mais um par que não pertence àquele triplo de rectas, não havendo cinco rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^3C_2-{}^2C_2=11$.

10.º) *Há dois triplos de rectas paralelas entre si (dentro de cada triplo) mas não há seis rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-2\,{}^3C_2=15-6=9$.

11.º) *Há quatro rectas paralelas entre si e um outro par de rectas paralelas distintas daquelas quatro, mas não há seis rectas paralelas. Então o número de pontos é* ${}^6C_2-{}^4C_2-{}^2C_2=15-6-1=8$.

Soluções dos n.os 2441 a 2450 do José D. da Silva Paulo.

I. S. C. E. F. — Ponto n.º 1 — 5 de Agosto de 1947

I — Aritmética

2451 — Divisibilidade; teorema fundamental da divisibilidade e sua aplicação à dedução de critérios de divisibilidade.

2452 — A soma de dois números inteiros é 589, e o cociente entre o seu menor múltiplo comum e o seu máximo divisor comum é 84. Calcular os números. R: *Sejam* a *e* b *os números e* d *e* m *respectivamente o* m. d. c. *e o* m. m. c. *Segundo o enunciado será:* $a+b=589$ *e* $m/d=84$. *Na relação* 1) $ab/m=d$ *fazendo* 2) $a=dp$ *e* 3) $b=dq$ *e substituindo* m *pelo seu valor* 84d *vem* $pq=84$ *em que* p *e* q *são primos entre si. Fàcilmente se verifica por decomposição em factores primos que os números que verificam esta relação são:* $\begin{cases} p=4,\ 28,\ 12 \\ q=21,\ 3,\ 7 \end{cases}$ *que substituidos em* 2) *e* 3) *dão* $d=589/25,\ 19,\ 31$. *A primeira solução é de rejeitar por não ser inteira. A segunda e terceira por substituição em* 1) *dão as soluções do problema:*

$$\begin{cases} a=28\times19=532 \\ b=\ 3\times19=\ 57 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a=12\times31=317 \\ b=\ 7\times31=217. \end{cases}$$

II — Cálculo Numérico

2453 — Calcule a área lateral de um cone equilátero (diâmetro de base igual à geratriz) inscrito numa esfera cuja superfície tem de área 222,62 m². (Utilize logaritmos). R: *Segundo o enunciado* $4\pi R^2=222{,}62$, *sendo* R *o raio da esfera. A superfície lateral do cone de raio* $R'=R\sqrt{3}/2$ *e de geratriz* $R\sqrt{3}$ *e* $S=\pi R\sqrt{3}/2\times R\sqrt{3}=3\pi R^2/2=3\times222{,}62/8$ $\log S=\log 3+\log 222{,}62+\operatorname{colg} 8=0{,}477\,(12+2{,}34757+$ $+1{,}09691)=1{,}92160$, *donde* $S=83{,}483\ m^2$.

III — Álgebra

2454 — Dada a função $y=2^{\frac{1}{x-1}}$. Calcule os valores da variável x que tornam a função y inferior a $1/4$.

R: *Segundo o enunciado* $2^{\frac{1}{x-1}}<1/4$, $2^{\frac{1}{x-1}}<2^{-2}$,

$$\frac{1}{x-1}<-2 \rightarrow \frac{2x-1}{x-1}<0 \rightarrow \frac{1}{2}<x<1$$

IV — Geometria Plana

2455 — Num círculo de raio r inscreve-se um rectângulo cuja diagonal forma com o lado maior um ângulo de 30º. Calcule, expressa em r, a área do referido rectângulo. R: *O rectângulo fica dividido pela diagonal* 2r *em duas metades dum triângulo equilátero de lado* 2r. *Então a área pedida será*

$$A=2\times(2r)^2\sqrt{3}/8=r^2\sqrt{3}$$

V — Geometria no Espaço

2456 — Triedros: definição; elementos de um triedro; triedro polar; relação entre os diedros dum triedro.

2457 — Dado um tetraedro de aresta a, deduza o seu volume expresso na referida aresta. R: *O volume pedido é o duma pirâmide regular de base triangular, cuja altura cai no centro do triângulo equilátero da base.* Seja ABCD *o tetraedro e* H *o pé da altura* $\overline{DH}$ *tirada de* D *para a base* ABC. *Como o triângulo* AHD *é rectângulo em* H *será* $\overline{DH}=\sqrt{a^2-\overline{AH}^2}$. *Como* H *é simultâneamente o ponto de encontro das mediatrizes e das medianas, visto ser* $[\widehat{ABC}]$ *equilátero, vem* $\overline{AH}=2h/3$ (h *altura da base*) *ou* $\overline{AH}=a\sqrt{3}/3$ *e* $\overline{DH}=\sqrt{2}a\sqrt{3}$.

O volume será $V=a^3\sqrt{2}/12$.

VI — Trigonometria

2458 — Verifique que a soma dos quadrados da secante e da cossecante de um arco é igual ao produto dos seus quadrados.

R: $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}=\sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$.

Nota. É obrigatória a resolução de 4 pontos. A parte primeira dos pontos I e V vem esclarecida em qualquer bom compêndio, respectivamente, de Aritmética Racional do 3.º ciclo e de Geometria do 2.º ciclo.

Soluções dos n.os 2451 a 2458 de Mário Madureira.

I. S. T. e preparatórios para a Faculdade de Engenharia do Porto — Ponto N.º 1 — Julho de 1947.

2459 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação:

$$-1/2\,(1-2x)\,(2x+1)=(1/x2-1)^4-2/3\,(x+1)\,.$$

R: $3x^4-24x^3-24x^2-128x+40=0$.

2460 — Resolva a inequação: $\frac{2x^2+x-4}{x-1}>0$.

R: $x>1{,}1861$; $-1{,}6861<x<1$.

2461 — Diga o que é uma superfície de revolução. Enumere, sem definir, os sólidos que conhece limitados total ou parcialmente por tais superfícies.

2462 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos com o mínimo de 5 decimais, dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aqueles lhe permitem, os valores de α que satisfazem a equação:

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt[3]{0{,}032745\times\cos^2 100^\circ\,12'\,30''}$$

R: $\theta=n\,180^\circ+(-1)^n\,5^\circ\,47'\,36''$.

2463 — Escreva o 5.º termo do desenvolvimento de $(2a\sqrt[3]{x}-x^{-1})^6$ e simplifique-o. R: $\frac{60a_2^2}{x^3\sqrt[3]{x}}$.

2464 — Sendo dadas uma circunferência e uma recta sobre o plano, determine, apenas com o auxílio da régua e do compasso os pontos da recta dos quais se vê a circunferência segundo um ângulo de 30°. Discuta as soluções possíveis.

Soluções dos n.os 2459 a 2464 do Eng. Manuel Amaral.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.ª exame de frequência, — 1945-46.

2465 — Primitivar as funções

a) $e^x/(4+e^{2x})$ *b)* $(x+\operatorname{sen}x\cos x)/\cos^2 x$

R: *a)* $1/2\operatorname{arc\,tg} e^x/_2+K$ *b)* $x\operatorname{tg}x+K$.

2466 — Achar os extremos da função

$$f(x)=\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}^2 x$$

R: *Um máximo nos pontos* $K\pi+\pi/3$, *com o valor* $3\sqrt{3}/8$; *um mínimo nos pontos* $K\pi-\pi/3$, *com o valor* $-3\sqrt{3}/8$.

2467 — Conduzir pelo ponto (1,4) as rectas tangentes à circunferência de centro na origem e raio 2. R: $y=4$ *e* $4y-x+1=0$.

2468 — Determinar o plano conduzido por ox paralelamente ao plano $x-y-z=1$ R: $y+z=0$

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final, Junho de 1947.

2469 — Sendo $0,1,2,4,6,8,10,\cdots$ os quocientes incompletos do desenvolvimento de certo número em fracção contínua, calcular uma fracção racional que represente o número com um erro inferior a 10^{-6}.

2470 — Primitivar a função $f(x)=\log\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$.

2471 — Calcular pelo método de iteração três aproximações da raiz de $x+\log_{10}x-2=0$ compreendida em $(1,2)$.

2472 — Que pontos da recta $3x-3y+2=0$ distam $\sqrt{5}$ do ponto $(2,3)$?

2473 — Dados, dum triângulo esférico, os elementos $A=90^\circ$, $a=72^\circ\,31'\,32''$, $b=120^\circ\,20'\,21''$; calcular B e discutir.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame Final — Julho de 1946.

2474 — Determine a equação da hipérbole de focos $(-1,0)$ $(1,0)$ e de assíntotas $y=\pm\sqrt{3}x$. R: *A equação será* $3x^2-y^2=k^2$ *ou* $\frac{x^2}{k^2/3}-\frac{y^2}{k^2}=1$ *com* $\frac{k^2}{3}+k^2=\frac{4k^2}{3}=1$; $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$; *donde:* $\frac{x^2}{(1/2)^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1$.

2475 — Ache os máximos e mínimos da função: $f(x,y)=(y+x^2)^2-(x-2y)^2$. R: *As condições de es-*

tacionariedade são: $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=2x^3+2xy-x+2y=0$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2x-3y=0$. *Substituindo* y *tirado da 2.ª equação na 1.ª vem:* $8x^3+6x^2+x=0$ *ou* $x(8x^2+6x+1)=0$ *de raízes* $x_1=0$, $x_2=-1/2$, $x_3=-1/4$; *correspondem* $y_1=0$, $y_2=-1/4$, $y_3=-7/48$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2}r=6x^2+$ $+2y-1$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}t=-3$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,dx}=$ $=\frac{1}{2}s=2x+2$; $\frac{s^2-rt}{4}=22x^2+8x+6y+1=\Delta$.

Para $x=0$, $y=0$ $\Delta=1>0$;

Para $x=\frac{-1}{2}$, $y=\frac{-1}{4}$ $\Delta=1>0$,

Para $x=\frac{-1}{4}$, $y=\frac{-7}{48}$ $\Delta=\frac{-1}{2}<0 <\begin{matrix} r<0 \\ t<0. \end{matrix}$

A função tem um máximo para $x=\frac{-1}{4}$, $y=\frac{-7}{48}$.

Nota: Como $t<0$ (para x e y quaisquer) está excluida a hipótese de mínimo.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame Final — Outubro de 1946.

2476 — *a*) Ache a equação geral da família de curvas que satisfazem à equação diferencial $xy'-y-$ $-x^2=0$. *b*) Caracterize geomètricamente a família e determine a equação da curva particular que admite tangente coincidente com o eixo dos xx. R: *a*) $y'-$ $-y/x-x=0$. *É equação linear; admite factor integrante* $u=1/x$; *o integral geral é:* $-y/x+x+C=0$ *ou* $y=x^2+Cx$. *b*) *As curvas da família são parábolas de eixo paralelo ao eixo dos* yy; *todas têm por vértice a origem dos eixos coordenados. Como* $y'=2x+C$ *as curvas da família têm tangente paralela ao eixo dos* xx *para* $x=-C/2, y=-C^2/4$. *Obtém-se a curva particular pedida para* $C=0$.

2477 — *a*) Determine as coordenadas do ponto P do plano para o qual é mínima a soma s dos quadrados das distâncias aos vértices do quadrado limitado pelas rectas de equações $x=0$, $y=1$, $x=1$, $y=0$. *b*) Fixando s num valor constante qual é a equação do lugar dos correspondentes pontos P? Caracterize geomètricamente o lugar e diga que valor deve escolher para a constante, para que o lugar passe pela origem dos eixos coordenados? Que disposição particular toma então o lugar relativamente ao quadrado dado? R: *a*) *Os vértices do quadrado são os pontos de coordenadas respectivamente* $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,1)$; $(1,0)$. *Portanto:* $s=x^2+y^2+x^2+(y-1)^2+(x-1)^2+$ $+(y-1)^2+(x-1)^2+y^2=4x^2+4y^2-4x-4y+4$; $s/4=$ $=x^2+y^2-x-y+1=S$. *As condições de estacionariedade são:* $0=\frac{\partial S}{\partial x}=2x-1$; $0=\frac{\partial S}{\partial y}=2y-1$ *ou seja:* $x=1/2$, $y=1/2$. *Corresponde um mínimo pois* $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=2$; $\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=0$ *ou* $s^2-rt=-4$ $(r,t>0)$.

O ponto P *é pois o ponto de coordenadas* $1/2, 1/2$ *ou seja o centro do quadrado.*

b) *Seja a constante* $s=4k$ *e vem:* $x^2+y^2-x-y=$ $=k-1$ *ou* $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2=k-1/2$. *O lugar é uma circunferência cujo centro está situado no centro do quadrado e cujo raio é* $\sqrt{k-1/2}$. *Para que o lugar passe pela origem dos eixos coordenados deve ser* $k=1$ *e então o raio será* $r=\sqrt{1/2}=\sqrt{2}/2$ *a circunferência correspondente será circunscrita ao quadrado.*

Soluções dos n.ºs 2474 a 2477 de Peter A. Braumann.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência, 1946-47.

2478 — Dado o ponto $P\,(1,0,-1)$ e a recta $r\equiv x+y=z=2$, determine a equação da superfície cónica de revolução que passa por P, tem por eixo a recta r e por vértice V o ponto de r de abcissa 2. R: *Tem-se* $V\,(2,0,2)$ *e* $\overrightarrow{VP}\equiv-\vec{i}-3\vec{k}$, $\vec{r}\equiv\vec{i}-\vec{j}$ *logo* $\cos\alpha=-1/\sqrt{20}=(x-y-2)/\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z-2)^2}.\sqrt{2}$, *donde* $9x^2+9y^2-z^2-36x+40y+4z-20xy+64=0$.

2479 — Mostre que o sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ -bx+ay-dz+ct=0 \\ -cx+dy+az-bt=0 \\ -dx-cy+bz+at=0 \end{cases}$$

não admite soluções diferentes da solução nula, quaisquer que sejam a, b, c, d reais não conjuntamente nulos. R: *Nas condições do problema trata-se dum sistema de Cramer, visto o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas ser igual a* $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

2480 — Considere o sistema $\sum_1^n a_{ij}x_j=0$, $i=1,2,\dots n$, $a_{ij}=(i.j)^2$. Mostre que este sistema admite soluções diferentes da solução nula qualquer que seja $n>1$. R: *Com efeito, o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas tem sempre, para* $n>1$, *duas filas paralelas proporcionais*

2481 — Estude o comportamento das seguintes funções quando $n\to+\infty$: $\frac{1}{n}+\operatorname{sen} n\pi$, $(-1)^n\frac{2n^2+3}{2n}$, $\frac{n^2+1}{2n}+\frac{I\,(0,1.n)}{n^2}$, $\frac{I\,(0,9.n)}{n^3+1}$. R: 1.ª *oscilante finitamente,* 2.ª *oscilante infinitamente,* 3.ª $\to+\infty$, 4.ª $\to 0$.

2482 — Desenhe um quadrado $[A'B'C'D']$ de lado igual a 4 cm.. Considere os pontos A, B, C e D que se projectam em A', B', C' e D' e teem de cotas 1, 2, 4 e 0 respectivamente. Gradue o plano que passa por D é paralelo a BC e perpendicular ao plano que admite AC como recta de maior declive (tome para unidade de medida de cotas o duplo centímetro).

Soluções dos n.os 2478 a 2482 de F. A. Carvalho Araujo.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Julho de 1946.

2483 — Verificar a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 27 \\ 3 & 9 & 27 & 64 \\ 4 & 16 & 64 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 27 & 1 \\ 4 & 16 & 64 & 1 \end{vmatrix}$$

sem calcular os determinantes. R: *O teorema da adição permite-nos escrever*

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 26 \\ 3 & 9 & 27 & 63 \\ 4 & 16 & 64 & 124 \end{vmatrix} = 0$$

Êste determinante pode ser considerado como característico do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x+4y+8z=26 \\ 3x+9y+27z=63 \\ 4x+16y+64z=124 \end{cases}$$

Se houver apenas um característico $c=0$, *a característica será* $p=3$ *e o sistema é então determinado. Com efeito tomando 3 quaisquer das equações, teremos* $x=3$, $y=3$ e $z=1$, *solução que verifica a outra equação.*

2484 — Na equação $x^3-6x^2+13x-\lambda=0$ uma das raízes é a média aritmética das outras duas. Determinar λ e resolver a equação. R: *Sejam* a, b, c *as raizes da equação e* $2a=b+c$. *Pelas fórmulas de Viète e da relação anterior temos*: $3a=6$ *ou* $a=2$, $a(b+c)+bc=13$ *donde* $bc=5$ *e* $\lambda=10$. *Sendo* $a=2$ *as 2 restantes raizes determinam-se pela regra de Ruffini:* $b=2+i$ e $c=2-i$.

2485 — As curvas $y=x^4$ e $3y-4x^3=3$ intersectam-se em dois pontos P e Q reais. Desenhar os gráficos (aproximados) destas curvas e provar pelo cálculo que as tangentes à primeira nos pontos P e Q são concorrentes no ponto $I(1,-3)$. R:

(1) $y=x^4$ *domínio* $(-\infty,+\infty)$; *contradomínio* $(0,+\infty)$

$y'=4x^3$ *crescente para* $x>0$; *decrescente para* $x<0$

Mínimo em $x=0, y=0$; $\lim\limits_{x=\pm\infty} y=+\infty$

(2) $y=4/3 \cdot x^3+1$ *domínio* $(-\infty,+\infty)$; *contradomínio* $(-\infty,+\infty)$

$y'=4x^2$ *Sempre crescente*

Ponto de inflexão $(x=0\ \ y=1)$

$\lim\limits_{x=+\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x=-\infty} y=-\infty$

Seja $P(a,b)$ *e* $Q(c,d)$. *Equação da tangente à curva* $y=x^4$ *no ponto* P:

$$(3) \qquad y-b=4a^3 \cdot (x-a)$$

Equação da tangente à curva $y=x^4$ *no ponto* Q:

$$(4) \qquad y-d=4c^3\,(x-c)$$

Pretende-se provar que a solução do sistema formado pelas equações (3) *e* (4) *é* $I(1,-3)$. *Tendo em conta que* P *e* Q *são pontos de ambas as curvas, teremos:*

$$(5) \qquad b=a^4;\ 3b=4a^3+3;\ d=c^4;\ 3d=4c^3+3.$$

Eliminando y *entre* (3) *e* (4), *vem*:

$x=\dfrac{d-b+4(a^4-c^4)}{4\cdot(a^3-c^3)}$; *e de* (5), $a^4-c^4=b-d$ *e* $a^3-c^3=3/4\cdot(b-d)$, *donde* $x=1$.

De (3), *vem:* $y=b+4a^3-4a^4=b+3b-3-4b=-3$, c. q. p.

2486 — Dados os pontos $A(1,0,0)$; $B(0,0,1)$ e $C(1/2,\sqrt{6}/2,1/2)$, verificar que podem ser vértices de um tetraedro regular e calcular as coordenadas do quarto vértice dêsse tetraedro. R: *Deverá ser o triângulo* $[ABC]$ *equilátero:* $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$. *Com efeito:* $\overline{AB}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\overline{AC}=\sqrt{1/4+3/2+1/4}=\sqrt{2}$ $\overline{BC}=\sqrt{1/4+4/2+1/4}=\sqrt{2}$.

Quarto vértice $D(x,y,z)$; *como* $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, *vem:*

$$\begin{cases} 1) & (x-1)^2+y^2+z^2=2 \\ 2) & x^2+y^2+(z-1)^2=2 \\ 3) & (x-1/2)^2+(y-\sqrt{6}/2)+(z-1/2)^2=2. \end{cases}$$

De 1), 2) *e* 3), *deduz-se* $y=\sqrt{6}/6$ *e* $x=z=(3\pm2\sqrt{6})/6$.

Tem-se pois: $V((3+2\sqrt{6})/6, \sqrt{6}/6, (3+2\sqrt{6}/6))$ *e* $V'((3-2\sqrt{6})/6, \sqrt{6}/6, (3-2\sqrt{6}/6))$.

Soluções dos n.os 2483 a 2486 de Jorge Cândido da Silva.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **2.º Exame de frequência, 1945-46.**

2487 — É dado um plano vertical que forma um ângulo de 45° com o plano vertical de projecção. Conduzir por um ponto uma recta que defina um ângulo de 60° com um plano vertical dado, e um ângulo de 40° com o plano vertical de projecção. R: *Conduzam-se pelo ponto as rectas* r e s *perpendiculares ao plano vertical dado e ao plano vertical de projecção. A recta pedida é a terceira aresta do triedro em que as outras arestas são* r e s *e as faces teem* 30° *e* 50°.

2488 — É dada uma pirâmide quadrangular, recta e regular, de base assente no plano horizontal de projecção. Determinar a secção feita pelo primeiro bissector, e suprimir a parte do sólido acima deste plano.

2489 — Por uma recta do primeiro bissector, cujas projecções formam ângulos de 45° com a L. T., conduzir os planos que formam com esta mesma linha ângulos de 20°. R: *Seja* V *o ponto de intersecção da recta dada,* r, *com a* L. T.. *Os planos pedidos são os planos tangentes conduzidos por* r *à superfície cónica de revolução que tem* V *por vértice, a* L. T. *por eixo, e uma abertura de* 20°.

F. C. C. — Geometria Descritiva — **Exame final, 1945-46**

2490 — Determinar a distância entre duas rectas enviezadas, uma horizontal e outra frontal.

2491 — Dado um plano pelos traços, considere-se um dos seus pontos. Conduzir por este ponto as rectas que definem ângulos de 65° com o plano horizontal de projecção e pertencem ao plano. R: *Considere-se a superfície cónica de revolução que tem o vértice no ponto considerado,* 25° *de abertura. e por eixo uma recta vertical. As rectas pedidas são as geratrizes da secção feita pelo plano dado neste cone.*

Soluções dos n.os 2487 a 2491 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo — **Exame final, 1945-46**

2492 — Determinar por integração a área gerada pela rotação em torno de ox do segmento definido pelos pontos $(1,1,0)$ e $(2,2,1)$. R: $(1-2\sqrt{2})\sqrt{3}\pi/2$.

2493 — Integrar a equação $y''+y=x^3-1$.

R: $y=c_1 \cos x+c_2 \operatorname{sen} x+x^3+6x-1$

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequencia, 1946-47.**

2494 — Determinar os máximos e mínimos da função $x^2y^2-x^2-y^2$ no conjunto fechado, definido pelo losango de vértices $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1/2,0)$ e $(-1/2,0)$.

2495 — Achar o integral geral da equação

$$y''-3y'+y=x^3e^x.$$

2496 — Calcular o volume de revolução quando a área limitada pelo arco de parábola $y^2=x$ e pelo segmento de recta $x=2$ roda em torno da recta $x=-1$.

F. C. C. — Calculo Infinitesimal — **Exame final, Junho de 1946-47.**

1.º Ponto

2497 — Desenvolver a função $\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ em série de potências de $x+1$ e escrever o termo geral desse desenvolvimento.

2498 — Resolver o sistema $\begin{cases} y'+z=x^3 \\ y'+z'=e^x. \end{cases}$

2499 — Calcular por integração o volume do sólido definido pelos planos $x=k$, $y=h$, e $z=x$ e pelos planos coordenados xOy e xOz. R: $hk^2/2$.

2.º Ponto

2500 — Em que direcções emergentes do ponto $(1,-1)$ se anula a 2.ª derivada direccional da função $f(x,y)=x^2-2y^2$?

2501 — Resolver o sistema $\begin{cases} y'=y-z-x-2 \\ z'=z-x. \end{cases}$

R: $\begin{cases} z=e^x c_1-(x+1) \\ y=c_2 e^x-c_1 xe^x+1. \end{cases}$

2502 — Determinar o volume do sólido gerado pela revolução, em torno de Oz, da região limitada pela parábola $z^2=2(x-1)$ e pela recta $x-z=2$.

Soluções dos n.os 2492 a 2502 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — Maio de 1946.

2503 — *a)* Defina envolvente duma família de superfícies caracteristicas e aresta de reversão. Enuncie as propriedades da envolvente e aplique os conceitos definidos à determinação da equação geral das superfícies conicas. *b)* Escreva a equação vectorial duma superfície regrada, indique o significado das grandezas que nela figuram, escreva a equação do plano tangente num ponto de tal superfície e deduza a partir dela a condição para que a superfície seja planificável. *c)* Defina curvatura média num arco de curva plana, curvatura num ponto de tal curva, centro de curvatura relativo a esse ponto e evoluta da curva. Indique como se determina a representação analítica da evoluta da curva e suas propriedades.

2504 — Calcule $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^3}}$.

2505 — Determine os pontos singulares, as assíntotas e a curvatura no ponto $(-1,\ 1)$ da curva

$$y^3 - x^3 - x^2 - y^2 = 0 .$$

I. S. A. — Calculo Infinitesimal — Alguns pontos do 2.º Exame de frequência, 1946-47.

2506 — Calcule a área definida pelas relações

$$xy \leq 8\,,\ y \geq x^2\,,\ y \leq 8\,. \quad \mathrm{R:\ A} = \int_0^8 \sqrt{\mathrm{y}}\,\mathrm{dy} + $$

$$+ \int_0^{\sqrt[3]{8^2}} \sqrt{\mathrm{y}}\,\mathrm{dy} + \int_{\sqrt[3]{8^2}}^{8} 8/\mathrm{y}\,\mathrm{dy} = 16/3\,[1+\sqrt{8}] + 8\log \sqrt[3]{8}\,.$$

2507 — Calcule a área definida pelas relações

$$x^2+y^2-4x \leq 0 \ \text{ e } \ y^2+2-x \leq 0 \,.$$

$$\mathrm{R:\ A} = 2\int_a^b \sqrt{\mathrm{x}-2}\,\mathrm{dx} + 2\int_b^c \sqrt{4\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= 4/3\,[(\mathrm{x}-2)^{3/2}]_a^b + 32\left[\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{4\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{x}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{4\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}}{4\mathrm{x}}\right]_b^c, \ \textit{onde}\ \mathrm{a}=2,\ \mathrm{b}=(3+\sqrt{17})/2 \ \textit{e}\ \mathrm{c}=4.$$

2508 — Mostre que a sucessão de funções da variável x, de termo geral $f_n(x)=1/(1+|x|^n)$, é convergente qualquer que seja x e uniformemente convergente, em qualquer intervalo fechado a que não pertençam os pontos $+1$ e -1. R: *Para* $\mathrm{x}=0$ *e* $|\mathrm{x}|<1$ *tem-se* $\mathrm{f_n(x)} \to 1$; *para* $|\mathrm{x}|>1$, $\mathrm{f_n(x)} \to 0$ *e para* $|\mathrm{x}|=1$, $\mathrm{f_n(x)} \to 1/2$. *Em qualquer intervalo, a que pertençam os pontos* 1 *ou* -1 *ou ambos, a sucessão não converge uniformemente visto nesses pontos a função limite ser discontinua; em qualquer outro intervalo fechado nas condições do problema é fácil de ver que o conjunto* $\mathrm{N}(\varepsilon, \mathrm{x})$ *é limitado superiormente.*

2509 — Mostre que a sucessão de funções, da variável real x, de termo geral $f_n(x)=1/[1+|x|]^n$ é convergente qualquer que seja x e uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado que não contenha a origem.

2510 — Considere a função assim definida:

$f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{2x-y+(x+y)^2}$ para todos os pares de valores (x,y) diferentes de $(0,0)$; $f(0,0)=0$. Estude a continuidade da função dada ao longo das rectas que passam pela origem. Pode concluir alguma coisa àcerca da continuidade da função dada na origem? R: *Fazendo* $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=0$, *ou* $\mathrm{x}=\rho\cos\theta$ *e* $\mathrm{y}=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, *substituindo em* $\mathrm{f(x,y)}$ *e tomando limites, conclui-se que a função é discontinua na origem visto ser discontinua no referido ponto segundo a direcção* $\mathrm{y}=2\mathrm{x}$ *e é discontinua em todos os pontos das rectas* $\mathrm{y}=\mathrm{mx}$ *que satisfazem a* $\mathrm{x}=(\mathrm{m}-2)/(1+\mathrm{m})^2$.

2511 — Idem $f(x,y) = \dfrac{x+(x+y)^2}{2y-(x-y)^2}$, $f(0,0)=0$.

2512 — Supondo que o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{u} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{v} = 1 \\ u^v + y^u = 1 \end{cases}$$

definem u e v como funções de x e y, calcule as derivadas de primeira ordem de u e v em ordem a y.

2513 — Idem $\begin{cases} x\cos u + v\cos y = u \\ x + v = y^u \,. \end{cases}$

Soluções dos n.os 2506 a 2513 de F. A. Carvalho Araújo.

F. C. L. — Análise Superior — 2.º Exame de frequência — 1945-46.

2514 — *a*) Mostre que entre as superfícies integrais da equação $px+3qyx^2-4y^2=0$ existe uma família simplesmente infinita de superfícies cujas características verificam a igualdade $\dfrac{dp}{dq}+\dfrac{dy}{dx}=0$ e determine essa família (S). *b*) Ao longo de que outras linhas das superfícies (S) tem lugar a mesma igualdade? *c*) Determine a dupla infinidade de curvas que cortam sob ângulos rectos as superfícies (S). Projecções ortogonais dessas curvas no plano XOY. R: *a*) *O sistema de Charpit:*

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^3} = \frac{\mathrm{dy}}{3\mathrm{y}\,\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{dz}}{4\mathrm{y}^2} = \frac{\mathrm{dp}}{-(3\mathrm{p}\,\mathrm{x}^2+6\mathrm{q}\,\mathrm{xy})} = \frac{\mathrm{dq}}{-(3\mathrm{q}\,\mathrm{x}^2-8\mathrm{y})}$$

dá, em correspondência com $\mathrm{dp\,dx}+\mathrm{dq\,dy}=0$:

$$-3p\,x^3-6q\,yx^2-9y\,qx^2+24\,y^2=0$$

ou, atendendo à equação dada: $2q\,yx^2-4y^2=0$; *donde* $q=2y/x^2$.

Com este valor de q, *a equação proposta dá, para* p, *o valor* $p=-2y^2/x^3$ *e a equação diferencial total das superfícies* (S) *é a equação de Pfaff:*

$$dz=-\frac{2y^2}{x^3}\,dx+\frac{2y}{x^2}\,dy$$

ou

$$dz=\frac{2y\,x^2\,dy-2y^2\,xdx}{x^4}=d\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Integrando: $z=y^2/x^2+C$.

b) Substituindo as expressões de p *e* q *na igualdade* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *logo se deduz que é* $x^2\,dy^2+3y^2\,dx^2-4xy\,dx\,dy=0$ *o que dá:* $dy/dx=y/x$ e $dy/dx=3y/x$.

A 2.ª corresponde às características; a 1.ª define a outra família de linhas de (S) *ao longo das quais e ainda verdadeira a equação* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *e dá:* $y=c_1\,x$.

c) A ortogonalidade referida no enunciado equivale ao sist. dif.

$$\frac{dx}{-2y^2/x^3}=\frac{dy}{2y/x^2}=\frac{dz}{-1}.$$

Uma primeira combinação integrável é $xdx+ydx=0$ *e dá* $x^2+y^2=\alpha$.

A segunda deduz-se agora por substituição:

$$\frac{\alpha-y^2}{y}\,dy=-2\,dz\,,\quad \log|y^\alpha|-\frac{y^2}{2}=-2\,z+\beta.$$

E as linhas trajectórias são as da congruência:

$$x^2+y^2=\alpha,\ \log|y^\alpha|-y^2/2=-2z+\beta.$$

A circunstância particular de não figurar z *na 1.ª destas equações faz com que seja essa a equação das projecções ortogonais pedidas.*

2515 — Considere o integral $\displaystyle\int_{(c)}\frac{e^z\cdot z^{-1}}{1-z^2}\,dz$ onde (c) se supõe definido por $|z-(1+i)|=R$, condicionado o valor de R ao facto de se encontrar o contorno (c) inteiramente traçado na região do plano (z) em que

$$1<|z-(1+i)|<A.$$

Para que valores de A se pode afirmar que (c) inclui, no seu interior, um só ponto singular da função integrando? E dois pontos singulares? Faça, em cada uma destas hipóteses, o cálculo do integral.

R: *Pontos singulares:* $z=0$, $z=+1$, $z=-1$.

Se $R<\sqrt{2}$, (c) *contém um só ponto singular:* $z=+1$ *e o correspondente valor do integral é* $-\pi ei$.

Se $\sqrt{2}<R<\sqrt{3}$, *são interiores a* (c) *os 2 pontos singulares* $z=0$ *e* $z=+1$; *e o valor do integral, é então:* $2\pi\,i\,(1-e/2)$.

F. C. L. — Análise Superior — Exame final, 21 de Junho de 1947.

2516 — Considere o duplo lacete (c) envolvendo os pontos $z=0$ e $z=1$, percorrido no sentido negativo, e mostre que $I_1=\int_{(c)} f(z)\,dz=2\pi i\,[R(2)+R(-2)+R(\infty)]$ sendo $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-4)\sqrt{z(1-z)}}$.

Faça $z=\rho\,e^{i\theta}$, $z-1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$. Calcule $R(2)$, $R(-2)$ e $R(\infty)$. Mostre que $I_1=2\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$ e calcule $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$.

2517 — As superfícies de certa família (S) verificam a seguinte propriedade: «A soma dos quadrados dos parâmetros directores da normal é igual a z^2+1 (z — cota de um ponto genérico). *a)* Escreva a equação às derivadas parciais, a que se subordinam essas superfícies. *b)* Determine um integral completo (tome $\operatorname{tg} c_1$ como primeira constante). *c)* Mostre que as características constituem nm sistema de linhas de curvatura e determine o outro. Interprete geomètricamente as superfícies do integral completo determinado, mostrando que, ao longo delas, tem lugar uma relação da forma $Ap+Bq+C=0$, com A, B e C constantes. Exprima estas constantes na do integral completo. *d)* Estabeleça a relação entre as constantes do integral completo, à qual corresponde a superfície de Cauchy relativa à curva $z-1=1-xy=0$. *e)* Estabeleça a equação diferencial a que se sujeitam as superfícies (S) — família simplesmente infinita — que são de revolução em torno de $0y$. Prove a existência de essas superfícies.

Enunciados e soluções dos n.os 2514 a 2517 de Humberto de Menezes.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

64 — ADAM, Pedro Puig — **Curso de Geometria Metrica**, Tomo I, Fundamentos — Primera Edicion — Madrid 1947—Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales. Preço 80 pts.

Depois dos trabalhos de David Hilbert sobre os fundamentos da geometria é impossível escrever qualquer obra sobre o assunto que os ignore. A análise profunda feita naquela época, principalmente, por

Hilbert e pelos seus discípulos marca uma nova fase na forma de encarar não só a geometria mas toda a matemática. Se é certo que em Euclides o metodo seguido é, como em Hilbert, o axiomático o que é verdade também é que existe diferença fundamental entre um e outro, diferença que se nota não só quanto à arrumação e independência dos axiomas, mas também á introdução explicita de outros que em Euclides eram subentendidos durante a exposição ou mesmo ignorados, e, o que é muito mais importante e fundamental, os entes de que trata a geometria, em Hilbert, são de natureza não especificada, (o que permite encontrar muitos sistemas de entes concretos aos quais se aplica inteiramente tudo o que, com Euclides, só era válido para certos elementos bem determinados dados pela experiência imediata) e a existência do conjunto de tais entes é implicitamente postulada.

As geometrias elementar e projectiva, finitas ou não finitas, euclideanas ou não, podem ser estudadas ràpidamente uma vez que se tenha feito, pelo método axiomático de Hilbert, o estudo de uma delas, e esta é uma das outras grandes vantagens do método que invadiu todas as matemáticas modernas, pela necessidade de profundar a natureza e interdependência dos conceitos da matemática e de poupar esforço.

A obra do Prof. Puig Adam, bem conhecido já pelos seus trabalhos didáticos de matemática de colaboração com Rey Pastor, é baseada nos estudos da escola moderna alemã que teve em Hilbert e Klein os verdadeiros impulsionadores, e tem por isso e desde logo todas as vantagens apontadas.

A obra que se destina á preparação para o ingresso na Escola de Engenheiros Industriais de Madrid, pretende, como afirma o autor, a formação científica do futuro técnico, não pela resolução de muitos, muitíssimos exercícios como requere certa técnica preparadora que não é senão uma ginástica deformadora, mas pelo ensimo racional da geometria, e isto sem no entanto cair no defeito oposto de demasiada abstracção, já que se trata de preparar um técnico. Este fim é conseguido pelo Prof Adam no seu livro, que pelo equilibrado desenvolvimento dos assuntos e pelas contribuições pessoais, o tornam utilíssimo não só para o fim proposto, mas ainda para todos os que desejam iniciar o estudo racional da geometria elementar sob um ponto de vista moderno. É por isso um livro precioso, em especial para nós povos da Península, onde livros com estas características são raros.

Neste primeiro volume (Fundamentos) trata-se aquela matéria que é em geral conhecida por geometria elementar, a qual é aqui estudada com certa originalidade na formulação de alguns axiomas (Axioma III, da rigidez), em demonstrações de certos teoremas (por exemplo o das curvas de Jordan) e em certas noções como a da equivalência geométrica de polígonos.

Promete-nos o autor para breve um segundo volume (Complementos) onde tratará a Trigonometria, a Geometria Métrico-Projectiva e as Cónicas, o que ficamos aguardando com o maior interesse.

J. Silva Paulo

65 — JEFFREYS, H. and B. S. — Methods of Mathematical Physics. IX+679 pp. Cambridge University Press, 1946.

Este livro dá com apreciável clareza os elementos de muitas teorias matemáticas de aplicação frequente na física (integrais múltiplos, potencial, cálculo das variações, funções de variável complexa e representação conforme, séries e integral de Fourier, equações diferenciais lineares de 2.ª ordem, equações das ondas e do calor, funções de Bessel e de Legendre, funções elípticas, etc.). O tratado não faz duplo emprego com a obra clássica de Hilbert-Courant e poderá ser de grande utidade para os físicos que desejam refrescar os seus conhecimentos matemáticos clássicos. Não pode no entanto ser considerado como um guia para investigações na física moderna porque não contem nada ou quási nada sobre algumas teorias matemáticas que são o «pão quotidiano» do físico moderno (cálculo tensorial, espaços de Riemann, geometria não-riemaniana, geometria diferencial das hipersuperfícies, spinores, grupos de transformações, espaço de Hilbert e seus operadores, funções e valores próprios dos operadores lineares, desenvolvimentos em séries de funções ortogonais, equações integrais, probabilidades e estatística, etc.). São precisamente estas teorias que deviam ser desenvolvidas completamente numa verdadeira introdução à física matemática, e seria muito para desejar que os autores o fizessem num segundo volume. Prestariam então a todos os físicos um inestimável serviço, visto que não existe ainda, *num só tratado homogéneo*, uma exposição completa destas doutrinas fundamentais.

É interessante notar um detalhe curioso do livro: os diferentes capítulos são encimados por citações de clássicos da literatura que, no espírito dos autores, são uma espécie de «síntese» das doutrinas tratadas. Por exemplo: o capítulo sobre representação conforme começa pela seguinte citação de Alphonse Karr: «Plus ça change, plus c'est la même chose». Confessamos que não nos é possível encontrar qualquer verdadeira relação entre o texto e estas citações; pelo contrário achamos que elas deparam um livro deste género. Mas trata-se aqui talvez dos «mistérios» do «humour».

A. Gião

EM 1947

GAZETA DE MATEMÁTICA

publicará quatro números no meado de cada um dos meses seguintes
FEVEREIRO, MAIO, AGOSTO E NOVEMBRO
Cada número terá, em geral, 32 páginas e o preço de 10 escudos

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de 30 escudos, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automáticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Tôdas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUÍTAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os números 1, 2, 4 a 11, 13 e 14. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes: 3, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23 cada 6,50 escudos; 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29 30, 31 e 32 cada 10 escudos.

COLECÇÕES COMPLETAS

O pequeno número de colecções completas ainda existentes destina-se a bibliotecas de escolas e estabelecimentos oficiais sendo a sua venda feita ao preço de 330 escudos (colecção dos 30 primeiros números).

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição dêstes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.
1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.
2.º exame de frequência — número de Maio.
Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

NOVA EDIÇAO DO PRIMEIRO ANO

Por motivos alheios à vontade da redacção e da administração da *Gazeta de Matemática* a anunciada reedição do ano I, que se encontra no prelo, não poude ser publicada na época prevista. A acumulação de trabalho na tipografia obriga a adiar mais uma vez a conclusão desta reedição que julgamos poderá aparecer até ao fim do corrente ano lectivo.

Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções, no formato e características actuais e com textos cuidadosamente revistos. À nova edição do primeiro ano seguir-se-à a do segundo ano, também com o texto revisto e no formato actual.

A nova edição do primeiro ano da *Gazeta de Matemática,* número 1 a 4, será posta à venda ao preço de 40 escudos. Beneficiará do preço especial de 30 escudos quem se inscrever até 31 de Outubro de 1947 e pagar esta quantia à administração da revista.

Assine a *Gazeta de Matemática* e concorrerá para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N