GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII **N.° 34** NOVEMBRO-1947

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N.

ANO VIII - N.º 34 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO - 1947

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

... Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

René Descartes — La Géométrie

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Ordenadas

por ***Ruy Luís Gomes***

Seja $f(x)$ uma função numérica, limitada, não-negativa, $0 \leq f(x)$, integravel-Riemann num intervalo fechado $[a, b]$.

No cálculo de áreas planas utiliza-se constantemente o facto de $\int_a^b f(x)\,dx$ coincidir com a *área* limitada pelo eixo dos x, as rectas $x=a$, $x=b$ e o próprio gráfico da função $f(x)$ (fig. 1).

Em termos de maior rigor podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = J(S),$$

designando por $J(S)$ a medida [(1)] — J do conjunto das ordenadas de $f(x)$, quere dizer, do conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Se, em vez de uma função integrável-R, considerarmos uma função integrável-L, teremos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = m(S),$$

utilizando o integral-L de $f(x)$ e a medida-L de S.

Ora, se o integral-L representa a medida-L de um conjunto, S, do plano, podemos calculá-lo [(2)] como supremo das medidas-L dos conjuntos fechados $F \subset S$.

(1) Caderno 2-5 da Colecção da Junta de Investigação Matemática.

Sobre a igualdade consultar, por exemplo, Haupt e Aumann — III — pág. 39.

(2) Ver colecção de Cadernos da Junta de Investigação Matemática, Teoria da Medida — 5, por Neves Real.

E surge naturalmente o problema de saber se não será possível substituir *os conjuntos fechados quaisquer* $\mathrm{F} \subset \mathrm{S}$ por *conjuntos fechados de ordenadas* $\mathcal{F} \subset \mathrm{S}$.

Interessa igualmente caracterizar os *conjuntos fechados de ordenadas* em termos das respectivas funções.

O objectivo deste artigo é precisamente a resolução desses dois problemas e para isso vamos demonstrar os seguintes teoremas.

TEOREMA 1: *Seja F um conjunto fechado contido no conjunto* S *das ordenadas de uma função numérica, limitada e não-negativa num intervalo fechado* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

É sempre possível construir um conjunto de ordenadas, fechado, $\mathcal{F}$, tal que $\mathrm{F} \subset \mathcal{F} \subset \mathrm{S}$.

a) *Construção de $\mathcal{F}$.*

Dado um ponto (x_0, y_0) e F, determinemos o supremo $g(x_0)$ das ordenadas dos pontos de F situados na recta $x=x_0$ (Fig. 1).

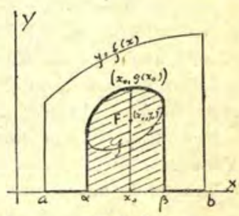


Fig. 1

Como F é um conjunto fechado, $(x_0, g(x_0)) \in \mathrm{F}$, sendo portanto, o *ponto mais alto* de F na recta $x=x_0$.

Consideremos agora o ínfimo α e o supremo β das abscissas x' das rectas $x=x'$ que têm pontos comuns com F.

A circunstância de F ser um conjunto fechado faz com que $x=\alpha$ e $x=\beta$ intersectem F, ficando assim definidos os pontos $(\alpha, g(\alpha))$ e $(\beta, g(\beta))$.

Pondo finalmente $g(x)=0$ para $a \leq x < \alpha$ e $\beta < x \leq b$, será $g(x)$ uma função numérica, limitada e não-negativa cujo conjunto das ordenadas, $\mathcal{F}$ (constituído pelos segmentos $[a, \alpha]$, $[\beta, b]$ e a parte tracejada), verifica evidentemente a condição $F \subset \mathcal{F} \subset S$.

b) *$\mathcal{F}$ é um conjunto fechado*

Seja (x_0, y_0) um ponto que não pertence a $\mathcal{F}$. Vamos demonstrar que não pode ser ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

Como $F \subset \mathcal{F}$, (x_0, y_0) não pertence a F, portanto podemos traçar um círculo aberto C, de centro (x_0, y_0), que também não contém ponto algum de F.

Suponhamos, no entanto, que C contém um ponto (x', y') de $\mathcal{F}$, com $x_0 \leq x'$

Neste caso, há-de haver na recta $x = x'$ um ponto de F, mais alto do que êle, (ver *Nota 1*), portanto situado na própria circunferência de C ou para cima, pois o próprio círculo não contém pontos de F, por construção. Calculemos agora o ínfimo β_0 das abscissas x' das rectas $x = x'$ que intersectam F sobre a circunferência de C ou acima.

Trata-se das rectas $x = x'$, com $x_0 \leq x'$, que intersectam F em pontos situados também no conjunto F_1, tracejado na figura 2 (reduzida ao essencial), que é um conjunto fechado.

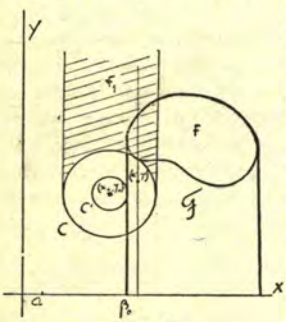


Fig. 2

A recta $x = x_0$ é evidente que não está nessas condições, pois se assim fosse, (x_0, y_0) pertenceria a $\mathcal{F}$, o que é absurdo.

Mas também não pode ser $\beta_0 = x_0$, pois nessa hipótese pelas propriedades de ínfimo, seria possível construir uma sucessão de pontos $P_n \in F \cdot F_1$ convergente para um ponto (x_0, y'), que pertenceria simultaneamente à recta $x = x_0$, ao conjunto F e ao conjunto F_1.

Mas se um ponto — (x_0, y'), — de ordenada y' superior à de (x_0, y_0), pertence a F, e, portanto, a $\mathcal{F}$, o mesmo acontece ao próprio (x_0, y_0), o que é absurdo.

Logo, $x_0 < \beta_0$ e anàlogamente $\alpha_0 < x_0$, se fôr α_0 o supremo das abcissas das rectas $x = x'$, $x \leq x_0$, que intersectam F em pontos pertencentes a F_1 (ver *Nota 2*).

Tracemos agora um segundo círculo aberto C', de centro em (x_0, y_0), mas situado no interior de C e da faixa compreendida entre as duas rectas $x = \alpha_0$ e $x = \beta_0$.

C' não contém ponto algum de $\mathcal{F}$.

Na verdade, se contivesse um — (x', y') — haveria na recta $x = x'$ um ponto de F, de ordenada maior do que y', portanto um ponto de F_1.

Ora, isso é absurdo, pois as rectas $x = x'$, $\alpha_0 < x' < \beta_0$ não intersectam $F \cdot F_1$.

Em conclusão, C' não contém pontos de $\mathcal{F}$, por consequência, (x_0, y_0) não é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. *O conjunto $\mathcal{F}$ é fechado.*

Corolário: *Para o cálculo da medida interior*-L *do conjunto das ordenadas* S *de uma funcão* f (x) *limitada e não-negativa num intervalo fechado* [a, b], *não é preciso utilizar todos os conjuntos fechados* F⊂S*: basta considerar os que são também conjuntos de ordenadas.*

É uma consequência imediata do teorema anterior e da monotonia da medida-L: $m(F) \leq m(\mathcal{F})$.

As funções $g(x)$ relativas aos conjuntos $\mathcal{F}$ satisfazem à condição

$$g(x) \leq f(x),$$

pois que $\mathcal{F} \subset S$.

Teorema 2: *O fecho* $\bar{S}$ *do conjunto das ordenadas da função* f (x) *coincide com o conjunto das ordenadas* $\mathcal{S}$ *de* $\bar{f}(x)$ *— limite superior de* f (x).

Na verdade, se $(x_0, y_0) \in \bar{S}$, tem-se

$$a \leq x_0 \leq b \quad \text{e} \quad y_0 \leq \bar{f}(x_0) \quad \text{ou} \quad \bar{f}(x_0) < y_0.$$

Se $y_0 \leq \bar{f}(x_0)$ é imediato que $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$. Se, pelo contrário, $\bar{f}(x_0) < y_0$, tomemos um número k tal que $\bar{f}(x_0) < k < y_0$.

Como $\bar{f}(x_0)$, por definição, é o ínfimo dos supremos de $f(x)$ nos intervalos fechados[1] de centro x_0, poderemos arranjar um intervalo $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ onde o supremo dos valores da $f(x)$ seja inferior a k.

Nesse intervalo teremos, pois, $f(x) < k$ e, consequentemente, o rectângulo

$$x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$
$$y_0 - (y_0 - k) \leq y \leq y_0 + (y_0 - k),$$

de centro (x_0, y_0), não contém pontos de S, o que é absurdo, visto, por hipótese, $(x_0, y_0) \in \bar{S}$. *Logo* $y_0 \leq \bar{f}(x_0)$ *e, portanto,* $\bar{S} \subset \mathcal{S}$.

Suponhamos agora que $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$.

Tem de ser $a \leq x_0 \leq b$ e $y_0 \leq \bar{f}(x_0)$.

Mas, atendendo à definição de $\bar{f}(x_0)$, é possível determinar uma sucessão $x_n \to x_0$ tal que $f(x_n) \to \bar{f}(x_0)$.

Se $y_0 = \bar{f}(x_0)$, vem $(x_0, y_0) = \lim\limits_{n} (x_n, f(x_n))$ donde $(x_0, y_0) \in \bar{S}$.

Se $y_0 < \bar{f}(x_0)$, a partir de uma certa ordem n será também $y_0 < f(x_n)$ e, portanto, $(x_n, y_0) \in S$, donde $(x_0, y_0) \in \bar{S}$.

---

(1) Pode ser qualquer outro sistema admissível de vizinhanças

Logo, $\mathcal{S} \subset \bar{S}$.

Está, pois, demonstrado que $\mathcal{S} = \bar{S}$.

Corolário 1: *A condição necessária e suficiente para que o conjunto das ordenadas de* f (x) *seja fechado, é que* f (x) *seja superiormente contínua.*

Na verdade, $S = \bar{S} = \mathcal{S}$ é equivalente a $\bar{f}(x) = f(x)$.

Corolário 2: *Para o cálculo da medida interior*-L *do conjunto das ordenadas*, S , *de* f (x) , *basta considerar os conjuntos das ordenadas*, S , *das funções superiormente contínuas* g (x) $\leq$ f (x) .

Tem-se

$$m_i(S) = \sup m(\mathcal{S}) .$$

Os resultados anteriores mostram bem o partido que se pode tirar de $m(\mathcal{S})$, ou seja do integral-L das funções superiormente contínuas, para a definição do integral inferior-L de uma função não negativa qualquer.

É essa a marcha seguida, por exemplo, por Mc. Shane em *Integration* [Princeton Univ. Press, 1940].

Deixamos ao leitor o estudo dos problemas duais, que fazem intervir as funções inferiormente contínuas.

Nota 1. Na demonstração de que $\mathcal{F}$ é fechado, é evidente que se tem de supor $0 < \mathcal{J}_0$ e, por conseguinte, o círculo pode ficar todo para cima do eixo dos x .

Nota 2. Pode acontecer, e é o caso indicado na fig. 2, que não tenha sentido falar de α_0 , por ser vazio o conjunto das abscissas das rectas $x = x'$, $x' \leq x_0$ que intersectam $F \cdot F_1$.

Mas se assim fôr obrigaremos C' à única condição de ser concêntrico de C e não intersectar a recta $x = \beta_0$. É anàloga a hipótese de não ter sentido falar de β_0 .

Nota 3. A igualdade tão conhecida

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} \bar{f}(x)\,dx , \quad 0 \leq f(x) ,$$

sinifica apenas que $J_e(S) = J_e(\bar{\bar{S}})$.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA REFORMA POMBALINA

por ***Luís Mendonça de Albuquerque***

Ainda recentemente tivemos ensejo de fazer referência à Reforma de ensino superior elaborada pelo governo do Marquez de Pombal (1) ; procurámos então analisar nas suas linhas gerais o que nela se determinou quanto ao ensino das ciências exactas. Julgamos, porém, ser a *Gazeta de Matemática* lugar mais aconselhado para certas considerações de maior detalhe sobre o que nessa Reforma respeita ao ensino da Matemática.

Para se ter uma ideia da época em que foram publicados os Estatutos pombalinos, bastará certamente recordar que o racionalismo setecentista alcançara então todo o seu prestígio, amparado pelas grandes conquistas conseguidas nas ciências experimentais e fundamentado numa nova linha de desenvolvimento da Filosofia.

Porém, diversas circunstâncias mantinham o nosso país afastado dos progressos que a ciência atingira na Europa. É bem prova disso o facto de terem decor--rido perto de duzentos anos entre os últimos Estatutos pré-pombalinos (1612) e a Reforma do Marquez (1773). Se não se esquecer que, por um lado, esses dois séculos foram dos períodos mais fecundos para a evolução da ciência e, por outro, em consequência de certas influências talvez propositadamente regressivas, os Estatutos de 1612 já não eram actuais mesmo à data da sua publicação — poder-se-á avaliar o atrazo em que então se debatiam os nossos estudos universitários.

No que, em particular, respeita à matemática, a situação agravava-se ainda por outra razão : o ensino desta ciência nunca creara tradições entre nós (já Herculano o fez notar), a despeito de algumas belas obras publicadas nos séculos XVI e XVII por matemáticos portugueses, e das grandes viagens marítimas terem exigido a preparação de cosmógrafos e cartógrafos competentes. Contribuiu sem dúvida para isso, o facto de na Universidade só ter sido creada uma cadeira para o ensino desta ciência ; para o mal ser ainda maior, esta cadeira estava enquadrada na Faculdade de Medicina — que era, aliás, a Faculdade onde menos forçadamente podia ser acolhida. (2)

Não esqueceu a Junta de Providência Literária que, presidida pelo Marquês, se encarregou dos trabalhos preparatórios para a Reforma e, depois, a redigiu, de

(1). *Vértice*, Vol. IV, pag. 499 e seguintes.

(2). No plano fixado pelos Estatutos de 1612, figuravam ao lado da Faculdade de Medicina, mais duas : a de Cânones e a de Teologia.

ponderar estes factos ao criar o Curso Matemático (3). Explicitamente o afirma em períodos um pouco retóricos mas justos, quando considera que «se a Universidade ficasse destituida das luzes matemáticas, *como infelizmente esteve nos dois séculos próximos precedentes*, não seria mais do que um caos semelhante ao universo se fosse privado dos resplendores do Sol». (4)

Não era fácil a tarefa de criar sobre o que tinha sido ultrapassado há alguns séculos, uma escola de matemática ao nível das boas escolas europeias. Antes de começar a estabelecer o plano do novo Curso, a Junta escreveu duas páginas de considerandos em que mostra ter consciência do atrazo em que caíramos e das dificuldades que havia a vencer: «(o estudo da matemática acostuma o entendimento) a desprezar os raciocínios vãos, frívolos, escuros, ociosos e gratuitos, nos quais por um gosto corrompido e estragado se tinham transformado as Faculdades literárias nos séculos tenebrosos da Filosofia *Arábigo-peripatética*, a qual, despòticamente suprimiu e afugentou das escolas as ciências exactas para deslocar mais fàcilmente o entendimento humano» (5). Este estilo perdulário de palavras (a herança do gongórico não estava ainda perdida!) cede o lugar a uma redacção mais concisa e firme logo que os Estatutos entram a delinear a orgânica do novo Curso. E quando se atingem os capítulos que se referem ao plano dos estudos (6) e aos programas das diversas cadeiras (7), afirma-se com todo o vigor o realismo da Reforma.

Quanto ao plano, o Curso era composto de quatro cadeiras, cada uma ensinada no período de um ano. No primeiro ano estudava-se Geometria e Trigonometria plana (Primeira Cadeira), com aplicações à Geodesia, à Estereotomia, etc. Na segunda cadeira (segundo ano) ensinava-se Álgebra e davam-se «os princípios de cálculo infinitesimal, directo e inverso; e com a sua aplicação à Geometria sublime e transcendente.» (8) No terceiro ano ministravam-se ensinamentos de «Phoronomia» (Terceira Cadeira), com as suas aplicações à Estática, à Dinâmica, Hidrostática, Hidraulica, Ótica, etc. Enfim: O último ano do Curso era dedicado à Astronomia (Quarta Cadeira), com «a teórica do movimento dos astros», «a prática do cálculo e das observações astronómicas» e as «mais ciências que dependem da mesma Astronomia.» (9)

Por outro lado, os programas destas Cadeiras procuravam acompanhar o desenvolvimento atingido pela Matemática no século XVIII. Parece-nos que merecem ser transcritos para aqui nas suas linhas gerais, para melhor se poder ajuizar do valor da Reforma. Assim:

Primeira Cadeira. *Elementos de Aritmética.* Número e unidade. Numeração (10). Operações fundamentais. Números simples e complexos; inteiros e quebrados; «tanto ordinários como decimais, sexagesimais, etc.» Números quadrados e cúbicos e suas raízes. Propriedades das proporções e progressões, tanto aritméticas como geométricas. Regra de três simples e composta; directa e inversa; regras de falsa posição, de sociedade, de liga, etc. Logarítmos e suas aplicações (11).

Geometria elementar. Estudo baseado nos «Elementos de Euclides» (de que se excluiam os livros dedicados á Aritmética), completados com as propriedades e teoremas estabelecidos por Arquimedes. Os «Comentários» de Proclo deviam servir de fundamento para o ensino da história da Geometria.

Segunda Cadeira. *Álgebra.* Equações e sua resolução. Propriedades e uso das séries.

Geometria Tratado analítico das cónicas.

Cálculo diferencial. «Fluxões ou elementos infinitésimos». Regras de diferenciação de funções algébricas e transcendentes (senos, cosenos, etc.). Estudo de certas curvas (evolutas, evolventes e causticas). Máximos e mínimos.

Cálculo integral. «Integração de quantidades transcendentes». Rectificacão de curvas. Quadratura de áreas. Cubatura de sólidos.

Terceira Cadeira. Leis do movimento uniforme e variado. Teoria do centro de gravidade. Rotação. Teoria do choque dos corpos «moles, duros e elásticos». Teoria do pêndulo simples. Problema das forças centrais. Movimento dos corpos planetários. «Arquitectura hidraulica e das máquinas». Estudo da luz. Ótica. Acústica.

Quarta Cadeira. Tratado elementar de Trigonometria esférica. Estudo dos movimentos centrais. Estudo dos movimentos dos planetas. Teoria da Lua.

(3). Estatutos, Livro III, Parte II; aí se trata da creação do Curso e da sua orgânica. As referências deste artigo dizem sempre respeito a este Livro e a esta Parte, seguindo-se a 1.ª edição, com a ortografia actualizada.

(4). Pág. 141.

(5). Pág. 142.

(6). Título III, «Do tempo, Disciplinas, Cadeiras e férias do Curso Matemático».

(7). Título IV, «Da distribuição das lições pelos anos do Curso Matemático e do modo que nelas se há-de haver.»

(8). Isto é: Geometria analítica e diferencial. Título III, Cap. III, § 2, bis.

(9). Id., Id., § 4.

(10). Título IV, Cap. I, § 2. «Com distinção do que nela há de natural e de arbitrário.»

(11). Título IV, Id. «Também mostrará a ideia fundamental dos números artificiais e arbitrários, conhecidos pelo nome de logaritmos; e o uso vantajoso deles nas operações numéricas.»

Acrescente-se que as primeiras lições do ano eram reservadas, em todas as Cadeiras, para os professores indicarem resumidamente (os Estatutos descem ao pormenor de planificar esses resumos) a evolução histórica das ciências que serão depois estudadas.

Porém, ao mesmo tempo que atendiam às condições indispensáveis para que o ensino da matemática fosse actual, os legisladores não èsqueciam que a nova escola só podia subsistir se os estudantes fossem atraidos para ela. Com este sentido os Estatutos concediam aos alunos do Curso Matemático regalias de que não gozavam os outros estudantes universitários: não só os «fidalgos da Casa Real» que nele se matriculassem viam os quatro anos de Curso contados como «tempo de serviço vivo em campanha» (12), como se dava o direito ao hábito de uma das ordens militares a quem quer que frequentasse a nova Faculdade (13). Estas medidas tinham, como não podia deixar de ser, caracter transitório; mas foram decisivas para se atingir uma frequência estável na Faculdade de Matemática.

* * *

A leitura dos programas revela (já o dissemos) que a Junta conhecia bem o nível científico da época. Contudo, quem ler a Parte II do Livro III dos Estatutos, encontra alem disso um conjunto de observações e directrizes que mostram com nitidez que os legisladores estavam também decididamente voltados para uma pedagogia de orientação racionalista. Já se viu em exemplos dados em transcrições anteriores que tudo o que até então era verbalismo ou falta de clareza, merece nos Estatutos uma frase de crítica condenatória; porém, mais do que isso: a seguir às críticas, quase sempre, se apontam as soluções, desempoeiradas e justas.

Passemos em rápida revista os pontos que (supomos) mais merecem ser postos em destaque.

Em vários parágrafos dos Estatutos criticam-se as «sombrias especulações peripatéticas»; reagindo contra elas, os legisladores defendem um ensino ìntimamente ligado ao real e ao concreto. Por exemplo: quando, no programa da Terceira Cadeira, se fala da definição de força, que era ainda por esse tempo um conceito impreciso e nebuloso, indica-se que basta «... considerar os efeitos (das forças) sem pretender decifrar a natureza escura delas» (14); talvez esta indicação nos pareça hoje demasiadamente radical ou mesmo errada, mas era o único meio de desenvencilhar um estudante de ciências positivas da teia metafísica em que inevitàvelmente cairia numa época em que não conseguiramos ainda libertar-nos das especulações escolásticas. Outro exemplo: contrariando o método até aí adoptado no ensino da Geometria, método que se divorciara de todas as relações com o concreto (15), os Estatutos aconselham os professores a evidenciar essas relações quando tal for útil ou necessário — como sucede nas lições sobre os sólidos que o professor «exporá à vista dos corpos geométricos (16)».

Numa outra directriz que os Estatutos não esquecem, definem-se a teoria e a prática como complementares, só se considerando eficiente o ensino em que sejam encarados estes dois aspectos. Isto se escreveu explícitamente a propósito da Geometria: o professor desta Cadeira deve fazer «quanto possível for para ajuntar a teórica com a prática. Providenciando para que os «alunos aprendam a manejar os instrumentos (...)»... para o que lhes (indicará) alguns dias feriados em que eles se devem achar em algum lugar do campo nas visinhanças da cidade. Tendo feito conduzir para eles grafómetros, pranchetas e outros aparelhos de Geodesia» (18).

No mesmo sentido se ordena que o professor, ao tratar da Trigonometria, dê prática da resolução de triângulos «em todos os casos (...), exercitando o discípulo nalguns problemas escolhidos, nos quais veja sensivelmente a utilidade do cálculo trigonométrico» (19); e se escreve que, ao tratar das cónicas, o professor não se deve esquecer de indicar «... os diferentes usos para que elas servem» (20). De resto, esta íntima ligação entre a teoria e a prática é uma ideia que domina todos os Estatutos; de facto, à Reforma pombalina se ficou devendo a creação do Observatório Astronómico, directamente ligado á Faculdade de Matemática (observatório que o sentido prático de Monteiro da Rocha depois organizou modelarmente); e ainda, pela primeira vez na história do nosso ensino, se organizaram laboratórios de Física e de Química e um Jardim Botânico (ligados à Faculdade de Filosofia) e se crearam, adstritos à de Medicina, um Teatro Anatómico e o Hospital Escolar.

Um outro problema que mereceu os cuidados da Junta de Providência Literária, foi o da escolha de livros que deviam servir no ensino.

---

(12). Título I, Cap. II, § 9.

(13). Id., Id., § 8.

(14). Título IV, Cap. III, § 8.

(15). Conta Verney («O verdadeiro método de estudar», vol. II, carta X) que num acto de doutoramento a que assistira, o arguente não permitira que o candidato recorresse a uma figura para expôr a sua defesa.

(16). Título IV, Cap. I, § 2.

(17). Id., Id., Id.

(18). Título V, Cap. III, § 3. Deve-se notar que (segundo o testemunho de José Anastácio da Cunha) esta disposição não foi cumprida, pelo menos nos primeiros dez anos que se seguiram à Reforma.

(19). Título IV, Cap. I, § 2.

(20). Título IV, Cap. II, § 6.

Até a época pombalina serviam de guia nas lições tratados há muito ultrapassados, impondo-se aos professores a obrigação de os seguir e aos alunos a de estudar por eles; chegara-se a escrever expressamente nos Estatutos de 1612, que os estudantes deviam *sempre* defender as opiniões (muitas vezes velhas de um milhar de anos!) que os autores desses tratados neles defendiam. Ora, considerando que nestas ciências «se aperfeiçoam cada dia mais coisas e se inventam outras» (21), mandam os Estatutos que a congregação da Faculdade deve todos os anos indicar quais os livros que convém adoptar para o ensino das diversas Cadeiras; e previnem que, para se não desvirtuar o sentido desta medida, que era o de manter o ensino actualizado, não pode a escolha de um livro feita uma vez, servir de razão para preferência no futuro — desde que apareça outro mais actual ou mais perfeito do ponto de vista pedagógico. Quando em lingua portuguesa não estivesse publicado um tratado que merecesse a escolha (22), devia a mesma congregação nomear um professor ou grupo de professores para a tarefa de traduzir um compêndio estrangeiro considerado nas condições (23). Convém observar que, no entanto, o desenvolvimento dado às várias matérias no compêndio que fosse adoptado, não era um limite rígido para a actividade do professor; porque este «...explicará as proposições do Autor; e acrescentará as que lhe parecerem necessárias e nele faltem; dando sempre por escrito aos discípulos a demonstração de todas elas» (24).

(21). Título III, Cap. I, § 9.

(22). Sabe-se que a primeira redacção dos «Princípios matemáticos» de José Anastácio da Cunha foi apresentada a uma congregação da Faculdade de Matemática para ser adoptada como livro de texto na Primeira Cadeira, e rejeitada.

(23). Para a Segunda Cadeira, por exemplo, foram traduzidos os «Elementos de Análise», de Bezout.

Propositadamente deixamos para o fim uma orientação revelada nos Estatutos que só em nossos dias voltou a ser activamente defendida: a de que o papel da Universidade não deve ser apenas o de dotar o país com diplomados para prover às exigências do funcionalismo ou das profissões chamadas liberais; cabe-lhe também o encargo de promover e organizar a investigação científica. Não podem ter outra interpretação estes períodos dos Estatutos (25): «... idearam-se os Grémios das Faculdades, (para) que neles se recebessem todos aqueles que, (tivessem acabado) os seus respectivos Cursos com mais distinção e louvor; (...) para que ligados mais particularmente às disciplinas da sua profissão (...), se vissem compreendidos em trabalhar (...); fazendo (...) os estudos mais avançados e profundos (...)».

* * *

Supomos que é inútil apontar os erros (que os houve, como não podia deixar de ser) que os Estatutos revelam; por muitos que fossem (e não foram muitos) não podiam invalidar as qualidades que ficam apontadas. Pena foi que o governo do Marquês de Pombal não sobrevivesse o tempo indispensável para consolidar tão grande obra. De facto, enquanto algumas dessas medidas não chegaram a passar da letra dos Estatutos para a prática, outras, embora realmente fossem cumpridas, não conseguiram impor-se até o momento em que Pombal cedeu o lugar ao Marquez de Angeja — e foram ràpidamente esquecidas.

Mas o que ficou, ainda representava um grande passo no caminho do progresso.

(24). Título III, Cap. I, § 11.

(25). Título I, Cap. I, § 2 e 3.

NOTA HISTÓRICA (*)

por ***José Gaspar Teixeira***

Estamos na Europa do século XIV.

O desenvolvimento crescente do comércio e da indústria, o aparecimento constante de novos burgos e o aumento da população dão origem a violentos antagonismos entre a burguesia nascente e a aristocracia feudal.

Nessas lutas, os reis e os príncipes unem-se aos habitantes dos burgos contra os senhores feudais, e invocam a necessidade de unificação dos diversos países. Essa unificação consolida-se por dois meios — guerras e comércio —; e verifica-se então a formação de exércitos nacionais, sob o controle directo dos reis, e o nascimento de grandes empresas comerciais dirigidas pela burguesia. Isto é, as guerras e o comércio tomam uma amplitude incomparàvelmente maior, pois deixam de interessar a Feudos para interessar às Nações.

É deste estado de coisas que nasce o Renascimento — movimento que se manifesta em todos os aspectos e ramos da vida dos povos europeus: relações económicas, políticas e sociais, indústria, ciência, letras, artes, etc.

É esta a razão por que, pela primeira vez, os reis e os comerciantes dão importância à ciência, pelas suas

(*) Transcrito de *Tábuas de Logaritmos*, Porto Editora, Lda. 1947.

aplicações a todos os sectores vitais do desenvolvimento dos povos.

É esta a razão da atenção e acolhimento que os nossos reis dão aos astrónomos do Reino, ao matemático Pedro Nunes, às Escolas Náuticas, etc.

Daí as honras e protecção com que nas cortes de certos países são acolhidos alguns dos maiores valores da ciência da época.

Da preparação das guerras e navegações surgem dois problemas de índole científica, que necessitam solução prática: os problemas do tiro e da determinação das coordenadas geográficas exigem um cálculo rápido e bastante rigoroso. É assim que, no século XV, os calculadores [1] não podem dar conta do trabalho exigido pelo volume e natureza dos cálculos necessários às soluções desses problemas, sentindo-se portanto a necessidade de criar algoritmos de maior rendimento. É o caso da descoberta do «nónio» por Pedro Nunes, destinado a introduzir maior rigor na leitura dos ângulos.

Já no tempo de Arquimedes (II séc. A. C.) se conhecia um processo rápido para multiplicar e dividir grandes números, contando que fossem potências duma mesma base. Assim, consideremos, por exemplo, a sucessão das potências de 2

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}, 2^{11}, \cdots, 2^{14}, \cdots, 2^{25}, \cdots$$

e os respectivos valores numéricos

$$1, 2, 4, 8, \cdots, 1024, 2048, \cdots, 16384, \cdots, 33554432, \cdots;$$

para multiplicarmos dois números quaisquer da sucessão inferior, não temos mais que procurar o valor numérico daquela potência de 2, cujo expoente é a soma dos expoentes desses números, considerados como potencias de 2.

Exemplo: Para multiplicar 2048 por 16384, faz-se

$$2048 \times 16384 = 2^{11} \times 2^{14} = 2^{25} = 33.554.432,$$

e o cálculo reduz-se a simples leituras na tábua anterior.

A divisão de dois números que figurem na sucessão numérica anterior decorre de maneira igualmente simples.

Este processo de cálculo de produtos e cocientes tem o inconveniente de estar restrito a operações sobre números que sejam *potências duma mesma base, de expoente inteiro.*

[1] A semelhança dos escribas e chanceleres — homens que junto das cortes e conventos tinham por única missão escrever e copiar os «documentos» — havia os «calculadores», apenas destinados a fazer contas, o que na época era operação laboriosíssima, dados os poucos recursos técnicos de cálculo.

O mérito e simplicidade formal da descoberta dos *logaritmos* consiste na construção de uma tábua de potências de determinada base, onde figuram todos os números, e não apenas as potências inteiras. Isto é, os espaços compreendidos entre duas potências inteiras consecutivas devem ser preenchidos, obedecendo à continuidade, pelas potências de expoente fraccionário e irracional.

Exemplo: entre 2^2 e 2^3 deveremos introduzir por exemplo, as potências

$$2^{2.1}, 2^{2.2}, 2^{\sqrt{5}}, 2^{2.3}, 2^{2.4}, 2^{\sqrt{6}}, 2^{2.5}, 2^{2.6}, 2^{\sqrt{7}}, 2^{2.7}, 2^{2.8}, 2^{\sqrt{8}}, 2^{2.9}$$

entre $2^{2.1}$ e $2^{2.2}$ deveremos introduzir outras potências de expoente racional e irracional; e assim por diante.

Deveremos, por outro lado, completar a tábua com os valores numéricos das potências anteriores:

$$2^0, \cdots, 2^1, \cdots, 2^2, 2^{2.1}, 2^{2.2}, 2^{\sqrt{5}}, \cdots, 2^3, \cdots, 2^4, \cdots,$$

$$1, \cdots, 2, \cdots, 4, 4{,}29, 4{,}60, 4{,}69, \cdots, 8, \cdots, 16, \cdots.$$

Uma conclusão imediata decorre da natureza destes valores numéricos: são números irracionais, e portanto quando escritos na numeração decimal só os podemos conhecer com determinada aproximação.

O cálculo logaritmo conduzirá pois a um *resultado essencialmente aproximado*, cujo rigor depende apenas da aproximação com que essas tábuas são calculadas.

Perguntar-se-á agora: — Se a idéia para a construção duma tábua de logaritmos é tão simples, por que razão ficou «em germen» durante 1500 anos?

Em primeiro lugar, é impossível calcular directamente, isto é, por extracção de raízes, os valores numéricos das potências de expoente fraccionário e irracional [1].

Por outro lado, só no fim da Idade Média, como há pouco mostramos, surgiu a necessidade premente de resolver o problema das operações com grandes números.

É essa a razão por que, no início do séc. XVII, Simão Stevin comerciante da Flandres, Justo Bürgis, relojoeiro de Praga, e João Neper, monge escocês, desconhecendo os trabalhos uns dos outros, constroem as primeiras tábuas de logaritmos.

Stevin chegou às suas tábuas dedicando-se ao estudo dos juros compostos dos capitais. Realmente, se fôr j o juro do capital *1* no fim de um ano, no fim de $0, 1, 2, 3, \cdots,$ anos o capital obtido será 1, $1+j$, $(1+j)^2$, $(1+j)^3, \cdots$: «o número de anos é o logarítmo, na base $(1+j)$, do capital obtido».

[1] Exceptuando a raiz cúbica, não há regra ou operação para extracção de raízes de índice ímpar.

Kepler (que *teve de abrir caminho através de grandes massas de cálculos, para o seu trabalho sobre astronomia, perdeu anos da sua vida em infindáveis estopadas numéricas* — D. J. Struik — Concerning Mathematics, citação da «Gazeta de Matemática») já fala das tábuas de Bürgis como instrumento de utilidade para os cálculos astronómicos, mas acrescenta que não são mais que uma fase mais avançada que as tábuas de Stevin para o cálculo de juro composto.

Em oposição, as tábuas de Neper têm a sua origem na necessidade de cálculos rápidos para a navegação.

O sistema de logaritmos de Neper constroi-se por processo verdadeiramente revolucionário para o seu tempo. O idealismo, tão bem conservado desde Platão até o fim da Idade Média, opunha-se a toda a ideia de movimento (evolução ou alteração de posição) e a raciocínios sobre esquemas mecânicos. Ora Neper parte dum movimento mecânico:

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mid}O & {}_{\mid}X & {}_{\mid}A \\ \hline {}_{\mid}O' & {}_{\mid}Y' & {}_{\mid}A' \\ \hline \end{array}$$

faz mover sobre duas rectas paralelas, a partir de origens O e O', dois pontos — um X, percorre toda a recta OA com movimento uniforme, $x=vt$. o outro Y, descreve um segmento $O'A'=1$ de modo que a sua velocidade, a velocidade de X, a distância $y=YA'$ e o segmento $O'A'$ sejam proporcionais. A velocidade de Y tem a expressão $\frac{d(1-y)}{dt}$, e então será $\frac{d(1-y)}{dt}:\frac{dx}{dt}=y:1$, ou, o que é o mesmo, $\frac{dy}{dx}=-y$.

O integral será $y=e^{-x}$, e a base de Neper é portanto e^{-1}.

Henrique Brigss é o primeiro a construir uma tábua de logaritmos decimais; é impulsionado pelos trabalhos de Stevin, Bürgis e Neper, e parte duma regra estabelecida havia um século pelo matemático Miguel Stifel. Este viveu numa época de agitação religiosa e explorou todas as suas descobertas com o fito de prever o fim do mundo e outras locubrações cabalísticas. Um século depois, as regras de Stifel tornam-se bastante fecundas em face de outros problemas.

Stifel descobrira que, dadas as duas sucessões, já nossas conhecidas da pág. 7,

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\cdots \\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\cdots, \end{array}$$

se tomarmos três números consecutivos quaisquer da progressão aritmética, o médio é sempre a média aritmética dos outros dois; anàlogamente, dados três números consecutivos da progressão geométrica, o médio é sempre a média geométrica dos outros dois. Brigss, notando que a sucessão aritmética é constituída pelos logarítmos da sucessão geométrica, preencheu os intervalos das duas progressões, fazendo corresponder a cada média aritmética de dois elementos da primeira progressão, a média geométrica dos elementos correspondentes na segunda progressão, e assim sucessivamente.

Exemplo: nas sucessões anteriores, seria então

$$\begin{array}{l} 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 2{,}5,\ 3,\ 3{,}5,\ 4,\cdots \\ 2,\ \sqrt{8},\ 4,\ \sqrt{32},\ 8,\ \sqrt{128},\ 16,\cdots. \end{array}$$

Este processo teve a vantagem de evitar, para o cálculo dos logaritmos, o trabalho laboriosíssimo, e impossível por vezes, de interpolação mediante extracção de raízes de índice diferente de 2 e 3, mas tem o inconveniente de calcularmos com aproximação os números, e não os logaritmos, isto é, de obtermos uma tábua de antilogaritmos e não de logaritmos.

Actualmente, porém, o cálculo de tábuas de logaritmos e antilogaritmos faz-se por processos totalmente diferentes.

O desenvolvimento em série

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

é convergente para todos os valores finitos de x; é fácil determinar a aproximação que se obtém quando se toma para soma da série a soma dalguns dos seus primeiros termos. Mas essa soma representa o valor do número cujo logaritmo natural é x.

Por exemplo, se fizermos $x=\frac{1}{5}$ e somarmos os cinco primeiros termos do desenvolvimento anterior, teremos

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{5^3}\cdot\frac{1}{3!}+\frac{1}{5^4}\cdot\frac{1}{4!}=1{,}22139$$

(com cinco casas decimais)

Então 1,22139 é o número (com aproximação até às centésimas milésimas) cujo logaritmo natural é $\frac{1}{5}$. Calculamos assim uma tábua de antilogaritmos.

Por outro lado, a série

$$\log x=\log a+2\left[\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a+a}\right)^3+\cdots\right],$$

é convergente sempre que

$$\left|\frac{x-a}{x+a}\right|<1;$$

permite-nos pois calcular $\log x$ quando seja conhecido o $\log a$.

É este o desenvolvimento em série que serve actualmente para o cálculo duma tábua de logaritmos.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

FÍSICA TEÓRICA

PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DE LA MATIÈRE EN ROTATION

par ***Antonio Gião***

Résumé. — De la théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme, développée par l'auteur dans des publications antérieures, on déduit une formule générale qui exprime la proportionnalité du moment magnétique au moment du rotation des masses sphériques en rotation constante. Cette formule est valable quelle que soit la charge électrique de la masse, même lorsque cette charge est nulle. On trouve ainsi que toute masse non électrisée en rotation, par le fait même qu'elle est en rotation, engendre un champ magnétique. La formule en question est appliquée d'abord à l'électron et ensuite au neutron et au proton pour déduire les valeurs «anormales» de leur moment magnétique. Enfin, les résultats récents de M. Blackett sur le moment magnétique des astres en rotation peuvent être expliqués facilement par la même formule.

I — Théorie du moment magnétique des masses en rotation.

Considérons les équations du second ordre des fonctions propres universelles et non-arbitraires de l'opérateur laplacien attaché à la métrique externe de l'espace-temps:

(1) $\Delta_\omega \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn} \quad (m=1,2,3,4;\ n=1,\cdots,\infty)$

c'est-à-dire:

(1 bis) $$\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{\omega}\,\omega^{ik}\frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial x^i}\right)=\beta_n\,\Phi_{mn}\,.$$

Soit un domaine matériel D à l'extérieur duquel les composantes des tenseurs de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle et électrique sont négligeables. Supposons que l'on a dans ce domaine

(2) $$\omega_{ik}=\chi g_{ik}+\tilde{\omega}_{ik}$$

les $\tilde{\omega}_{ik}$ étant des petites quantités par rapport à χg_{ik} pour $i=k=1,2,3,4$ et χ la courbure moyenne de l'espace-temps. On a donc aussi

(3) $$\omega^{ik}=\frac{g^{ik}}{\chi}+\tilde{\omega}^{ik}$$

les $\tilde{\omega}^{ii}$ étant également des petites quantités. Par suite de (2, 3) les équations (1 bis) deviennent, en supprimant les termes du second ordre

(4) $$\Delta\Phi_{mn}+\frac{\chi}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,\tilde{\omega}^{ik}\right)\right]\frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial x^i}+$$
$$+\chi\tilde{\omega}^{ik}\frac{\partial^2\Phi_{mn}}{\partial x^i\,\partial x^k}=\chi\,\beta_n\,\Phi_{mn}\,,$$

Δ étant le laplacien attaché à la métrique interne de l'espace-temps. Supposons que les $\tilde{\omega}^{ik}$ pour $i,k\neq 4$ sont petits par rapport à $\tilde{\omega}^{44}$ dans le domaine D. Comme on a:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\,\tilde{\omega}^{ik}\right)\cong 0\,,$$

les équations (4) se réduisent à

(5) $$\Delta\Phi_{mn}=\chi\left(\beta_n-\tilde{\omega}^{44}\frac{\partial^2}{\partial(x^4)^2}\right)\Phi_{mn}\,.$$

Si les phénomènes du domaine D sont quasi statiques il existe un référentiel x^1, x^2, x^3, ict par rapport auquel on a

$$\Phi_{mn}\cong\Phi_{mn}(x^1,x^2,x^3,x^4)\,e^{-\frac{t}{\tau_n}}\,,$$

c'est-à-dire

(6) $$\frac{\partial^2\Phi_{mn}}{\partial(x^4)^2}=-\frac{1}{c^2\,\tau_n^2}\Phi_{mn}$$

les τ_n étant des quantités que l'on peut appeler les «vies moyennes», dans le domaine D, des particules élémentaires qui correspondent, d'après notre théorie, aux différentes valeurs $n=1,2\cdots,\infty$ de l'indice de numérotage des valeurs propres des opérateurs laplaciens Δ et Δ_ω.

Appliquons en particulier les équations (5) aux électrons $(n=1)$ en admettant naturellement que ces particules ont une vie moyenne pratiquement infinie dans le domaine D (rappelons que les protons et neutrons sont formés par la fusion d'électrons sans perte de masse [1] ce qui exige que $\tau_1=\infty$). Par suite de (6) les équations (5) s'écrivent

(7) $$\Delta\Phi_{mn}=\chi\left(\beta_n+\frac{\tilde{\omega}^{44}}{c^2\,\tau_n^2}\right)\Phi_{mn}\,.$$

En appliquant ces équations aux électrons $(n=1)$ pour lesquels $\tau_1\cong\infty$ on obtient donc dans le domaine D:

(8) $$\Delta\Phi_{m1}=\chi\beta_1\,\Phi_{m1}\,.$$

Comparons cette équation à l'équation des valeurs et fonctions propres universelles et non arbitraires du laplacien de la métrique interne

$$(9) \qquad \Delta\Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn} .$$

Comme les Φ_{mn} et les Ψ_{mn} s'annulent sur la frontière du domaine D étant donnée la condition, posée plus haut, de l'évanouissement des composantes des tenseurs de densité d'énergie quantité de mouvement qui sont des fonctions des Φ_{mn} et des Ψ_{mn}, la comparaison des équations (9) aux équations (8) *pour* $n=1$ montre immédiatement que l'on doit nécessairement avoir dans le domaine D:

$$(10\,a,b) \qquad \Phi_{m1} = \lambda\Psi_{m1}\,; \quad \chi\beta_1 = \alpha_1\,,$$

λ étant une constante (on aurait en effet $\lambda=1$ si $\omega_{ik}=\chi g_{ik}$ partout).

Envisageons maintenant les expressions des tenseurs de densité d'énergie quantité de mouvement matérielle T^{ik} et électrique U^{ik} en fonction des Ψ_{mn} et des Φ_{mn}. D'après notre théorie ces expressions sont les suivantes [1]:

$$(11\,a) \quad T^{ik}_{\rho} \equiv \sum_{1}^{\infty}{}_n (T_\rho)^{ik}_n = \sum_{1}^{\infty}{}_n \sum_{1}^{4}{}_m \Big[\Psi_{mn}\,\varepsilon^i_n \frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho_k} - \frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho_k}\,\varepsilon^i_n\,\Psi_{mn} + \Psi_{mn}\,\varepsilon^k_n \frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho_i} - \frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho_i}\,\varepsilon^k_n\,\Psi_{mn}\Big],$$

et:

$$(11\,b) \quad U^{ik}_q \equiv \sum_{1}^{\infty}{}_n (U_q)^{ik}_n = \sum_{1}^{\infty}{}_n \sum_{1}^{4}{}_m \Big[\Phi_{mn}\,\varepsilon^i_{nq} \frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q_k} - \frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q_k}\,\varepsilon^i_{nq}\,\Phi_{mn} + \Phi_{mn}\,\varepsilon^k_{nq} \frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q_i} - \frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q_i}\,\varepsilon^k_{nq}\,\Phi_{mn}\Big],$$

les ρ^i et q^i étant, en un point quelconque, des axes géodésiques *locaux* orthogonaux relatifs à la métrique interne et à la métrique externe de l'espace-temps. Les ε^i_n et ε^i_{nq} sont des matrices vecteurs définies par:

$$(12\,a,b) \qquad \varepsilon^i_n = \varepsilon^k_0 \frac{\partial\rho^i}{\partial\rho^k_n}\,; \quad \varepsilon^i_{nq} = \varepsilon^k_0 \frac{\partial q^i}{\partial q^k_n}$$

où les ρ^k_n et q^k_n sont les axes locaux ρ^k et q^k dans une orientation (appelée orientation principale) bien définie en chaque point pour chaque valeur de l'indice n. Les Ψ_{mn} et les Φ_{mn} satisfont aussi aux équations:

$$(13\,a,b) \quad \varepsilon^i_n \frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho^i} = -\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\,; \quad \varepsilon^i_{nq} \frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q^i} = -\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}$$

les orientations principales des ρ^i et des q^i, pour une valeur donnée quelconque de l'indice n, étant précisément celles qui rendent valables ces équations de propagation du premier ordre pour la même valeur de n. Par suite de $dq^i \cong \sqrt{\chi}\,d\rho^i$, les équations (13 b), appliquées aux électrons ($n=1$), s'écrivent aussi comme suit:

$$\varepsilon^i_{1q} \frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial\rho^i} = \pm\sqrt{\alpha_1}\,\Phi_{m1}\,,$$

puisque nous savons que $\alpha_1=\chi\beta_1$, c'est-à-dire $\sqrt{\alpha_1} = \pm\sqrt{\chi\beta_1}$ dans le domaine D. La condition (10 a), valable dans ce domaine, donne alors:

$$\varepsilon^i_{1q} \frac{\partial\Psi_{m1}}{\partial\rho^i} = \pm\sqrt{\alpha_1}\,\Psi_{m1}$$

ou bien:

$$\varepsilon^k_0 \frac{\partial q^i}{\partial q^k_1} \frac{\partial\Psi_{m1}}{\partial\rho^i} = \pm\sqrt{\alpha_1}\,\Psi_{m1}$$

En comparant ces équations aux équations (13 a) qu'on peut écrire sous la forme

$$\varepsilon^k_0 \frac{\partial\rho^i}{\partial\rho^k_1} \frac{\partial\Psi_{m1}}{\partial\rho^i} = -\sqrt{\alpha_1}\,\Psi_{m1}\,, \quad (n=1)\,,$$

on voit que

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^k_1} = \pm \frac{\partial\rho^i}{\partial\rho^k_1}$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad \varepsilon^i_{1q} = \pm\,\varepsilon^i_1\,, \quad (n=1)\,,$$

dans le domaine D (le signe $-$ correspond à des axes locaux q^i_1 et ρ^i_1 antiparallèles et le signe $+$ à des axes q^i_1 et ρ^i_1 parallèles). En introduisant les conditions (14) et (10 a) dans les expressions (11 b) du tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement électrique on trouve par comparaison avec (11 a)

$$(15) \qquad (U^{ik}_q)_{(1)} = \pm\frac{\lambda^2}{\sqrt{\chi}}\,(T^{ik}_\rho)_{(1)}$$

dans un domaine tel que le domaine D où la métrique externe satisfait aux conditions (2) et où les phénomènes peuvent être considérés comme quasi statiques ($U^{ik}_{(1)}$ et $T^{ik}_{(1)}$ représentent la contribution des électrons ($n=1$) aux tenseurs de densité d'énergie-quantité de mouvement électrique et matérielle).

Nous allons introduire maintenant cet important résultat dans les équations générales du champ métrique interne et externe. Ces équations (Cf. les mémoires cités) sont les suivantes:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}\,(R+\lambda_g) = \varkappa_g\,T_{ik}\,;$$

$$S_{ik} - \frac{1}{2}\,\omega_{ik}\,(S+\lambda_\omega) = \varkappa_\omega\,U_{ik}$$

et peuvent s'écrire sous la forme:

$$(16\,a,b) \qquad \Delta_3\,g_{ik} = 2\varkappa_g\,\Big(T_{ik} - \frac{1}{2}\,g_{ik}\,T\Big)\,;$$

$$\Delta_3\,\omega_{ik} = 2\chi\varkappa_\omega\,\Big(U_{ik} - \frac{1}{2}\,\omega_{ik}\,U\Big)\,,$$

dans le cas analysé ici d'un champ quasi statique satisfaisant à (2) et en négligeant naturellement les

[1] «*Portugaliae Physica*», 2, fasc. 1. 1946, pp. 1-98; «*Portugaliae Mathematica*», 5, fasc. 3. 1946, pp. 145-192.

termes qui dépendent des très petites constantes cosmologiques λ_g et λ_ω. Le résultat (15), écrit en coordonnées ρ^i pour les $U^{ik}_{(1)}$, prend la forme:

$$(17) \qquad (U^{ik}_\rho)_{(1)} = \pm \lambda^2 \sqrt{\chi}\,(T^{ik}_\rho)_{(1)},$$

ou bien:

$$(U_{(\rho)ik})_{(1)} = \pm \lambda^2 \sqrt{\chi}\,(T_{(\rho)ik})_{(1)}$$

de sorte que les équations (16*b*) deviennent:

$$(18) \qquad \Delta_3\,\omega_{ik} = \pm 2\lambda^2 \chi \sqrt{\chi}\,\varkappa_\omega \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right)$$

puisqu'on peut naturellement ne pas tenir compte de la très faible influence des termes pour $n \geq 2$ [qui correspondent aux microélectrons][1] de la série (11*a*). Cette série est en effet très rapidement convergente, son terme général tendant vers zéro comme n^{-5} quand $n \to \infty$. Ceci prouve qu'il existe dans le domaine D *deux* solutions pour le champ métrique externe qui sont compatibles avec le *même* tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle. Appliquons alors les équations (16*a*) et (18) spécialement aux composantes g_{4i} et ω_{4i} pour $i=1,2,3$. Un simple coup d'oeil sur ces équations montre que les solutions de (18) s'annulant en tout point infiniment éloigné du domaine D satisfont nécessairement à la condition:

$$(19) \qquad \omega_{4i} = \xi g_{4i} \qquad (i=1,2,3)$$

ξ étant une constante dans le domaine D dont la valeur est donnée par:

$$(20) \qquad \xi = \pm \lambda^2 \chi \sqrt{\chi}\,\frac{\varkappa_\omega}{\varkappa_g}.$$

Comme l'espace-temps véritable est un espace-temps de De Sitter légèrement déformé dont le rayon est P_0, et pour lequel on a

$$\varkappa_g = \frac{1}{P_0}; \quad \varkappa_\omega = \frac{1}{\sqrt{P_0}},$$

la relation (20) peut donc s'écrire comme suit:

$$(21) \qquad \xi \cong \pm \lambda^2 \chi$$

puisque $\chi \cong 1/P_0$. Nous écrirons d'ailleurs en général: $\bar{\lambda}^2 = \lambda^2 \sqrt{\chi}\,\varkappa_\omega/\varkappa_g$, c'est-à-dire:

$$(21') \qquad \xi = \pm \bar{\lambda}^2 \chi$$

Considérons maintenant une masse en rotation. En faisant apparaître la constante newtonienne K de la gravitation par la relation bien connue $\varkappa_e = 8\pi K/c^2$ l'expression du tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle devient:

$$T_{ik} = \frac{8\pi}{c^2}\frac{K}{\varkappa_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \Theta_{ik}$$

où Θ_{ik} est le tenseur des tensions donné approximativement par: $\Theta_{ik} = -\frac{8\pi}{c^4}\frac{K}{\varkappa_g} p\,\delta_{ik}$ et μ la densité de masse propre. Pour une masse en rotation on a:

$$ic\,\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{\Omega}_{\text{rot}} \times \vec{l},$$

$d\vec{x}/ds$ étant le trivecteur vitesse (spatial), $\vec{\Omega}_{\text{rot}}$ la vitesse angulaire de rotation et $\vec{x}$ le rayon vecteur d'un point à la distance spatiale l de l'axe de rotation. On a donc:

$$T_{41} = -\frac{8\pi}{ic^3}\frac{K}{\varkappa_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\,x_2;$$

$$T_{42} = \frac{8\pi}{ic^3}\frac{K}{\varkappa_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\,x_1;$$

$$T_{43} = 0,$$

en faisant coïncider l'axe de rotation avec l'axe des x_3. A l'aide de cette expression on obtient la solution des équations (16*a*) pour une masse en rotation. La solution extérieure s'écrit:[1]

$$g_{41}(P) = -\frac{4K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\frac{x_2}{r(P,Q)}\,dv_Q;$$

$$g_{42}(P) = \frac{4K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\frac{x_1}{r(P,Q)}\,dv_Q;$$

$$g_{43} = 0,$$

r étant la distance spatiale des points P et Q (nous appelons solution extérieure la solution pour tout point P extérieur au domaine D). La solution extérieure correspondante des équations (18) s'écrit donc comme suit, compte tenu de (20):

$$(22) \quad \omega_{41}(P) = -\frac{4\xi K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\frac{x_2}{r(P,Q)}\,dv_Q;$$

$$\omega_{42}(P) = \frac{4\xi K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\frac{x_1}{r(P,Q)}\,dv_Q; \quad \omega_{43} = 0.$$

Envisageons le cas particulier très important où la masse en rotation est sphérique. On a alors

$$(23) \qquad \int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\frac{x_j}{r(P,Q)}\,dv_Q =$$

$$= \frac{x_j}{2r_0^3}\,\gamma\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}\,l^2\,dv_Q \equiv \frac{x_j}{2r_0^3}\,\gamma M_{\text{rot}},$$

r_0 étant la distance du point P au centre de la sphère, γ un coefficient numérique égal à l'unité quand $\mu + \frac{p}{c^2}$

---

[1] Au sujet de ces particules élémentaires, dont l'existence est prévue par notre théorie, voir: «*Comptes Rendus*», 224 (1947), p. 454, et *Portugaliae Mathematica*, vol. 6, fasc. 2, pp. 67-114 (1947).

[1] Voir par exemple: Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, p. 171, Paris, 1934; G. L. Clark, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 43 (1947), 2, pp. 164-177.

et Ω_{rot} ont une symétrie sphérique ou sont constants dans D, et M_{rot} le moment de rotation de la masse. Quand $\mu + \frac{p}{c^2}$ et Ω_{rot} sont constants dans D, on a évidemment:

$$M_{\mathrm{rot}} = \frac{2}{5} M \Omega_{\mathrm{rot}} R^2$$

le rayon de la sphère étant R et M sa masse définie par:

$$M \equiv \int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) dv$$

c'est-à-dire en tenant compte de l'équivalent de masse de l'énergie de pression. Par suite de (23) la solution (22) devient donc pour une sphère en rotation:

$$\omega_{41} = -2\xi \frac{K}{ic^3} \frac{x_2}{r_0^3} \gamma M_{\mathrm{rot}}\,; \tag{24}$$

$$\omega_{42} = 2\xi \frac{K}{ic^3} \frac{x_1}{r_0^3} \gamma M_{\mathrm{rot}}\,; \quad \omega_{43} = 0\,.$$

D'après notre théorie unitaire *les phénomènes électromagnétiques sont essentiellement des propriétés de la métrique externe de l'espace-temps*; en d'autres termes, ils sont décrits par les ω_{ik} ou par des fonctions des ω_{ik}. En particulier, les composantes H_i $(i = 1, 2, 3)$ du champ magnétique statique $\vec{H}$ sont données par les expressions [1]:

$$H_i = \frac{c^2}{i\chi} \frac{(m_0)_e}{e} \left(\frac{\partial \omega_{4k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{4j}}{\partial x^k}\right); \quad \left(\begin{matrix} i, j, k = \text{permutation} \\ \text{circulaire de } 1, 2, 3 \end{matrix}\right)$$

En tenant compte de la solution (24) pour les ω_{4i}, on obtient donc pour une sphère en rotation:

$$\vec{H} = 2\frac{\xi}{\chi} \frac{(m_0)_e}{ec} K\gamma \left(M_{\mathrm{rot}}\right) \left[\mathrm{rot}\left(\vec{u}_3 \times \frac{\vec{x}}{r_0^3}\right)\right] \tag{26}$$

$\vec{u}_3$ étant le vecteur unitaire de l'axe des x_3 en coïncidence avec l'axe de rotation. On démontre en électromagnétisme classique la formule:

$$\vec{H} = M_{\mathrm{magn}}\, \mathrm{rot}\left(\vec{u}_3 \times \frac{\vec{x}}{r_0^3}\right) \tag{27}$$

qui relie le moment magnétique M_{magn} d'une sphère uniformément aimantée au champ magnétique $\vec{H}$ qu'elle produit à l'extérieur. On voit donc par (26) que le moment de rotation M_{rot} de la sphère engendre une aimantation dont le moment magnétique est donné par:

$$\boxed{M_{\mathrm{magn}} = 2\frac{\xi}{\chi} \frac{(m_0)_e}{ec} K\gamma M_{\mathrm{rot}}} \tag{28}$$

Telle est la formule fondamentale que nous cherchions [1]. Elle est évidemment valable quelle que soit la charge électrique de la sphère, *même lorsque cette charge est nulle. Une masse en rotation, par le simple fait qu'elle est en rotation, engendre donc un champ magnétique.* En tenant compte de (21') on peut écrire la formule (28) sous la forme:

$$\boxed{M_{\mathrm{magn}} = \pm 2\bar{\lambda}^2 \frac{(m_0)_e}{ec} K\gamma M_{\mathrm{rot}}} \tag{29}$$

---

[1] *Portugaliae Mathematica*, vol. 5, fasc. 3, pag. 169. Les symboles $(m_0)_e$ et e désignent la masse propre et la charge de l'électron.

[1] Il va sans dire que dans (28) M_{magn} est le moment magnétique de la sphère abstraction faite de l'aimantation permanente éventuelle de la masse et de l'aimantation induite qui correspond aux courants de *conduction* dans D. Ces aimantations s'éliminent, dans le problème traité ici, par suite même de la condition $\tilde{\omega}^{44} > \tilde{\omega}^{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ posée dans l'équation (4). Si cette condition n'était pas satisfaite il faudrait évidemment ajouter aux seconds membres de (15) un tenseur U'_{ik} dont les composantes U'_{41}, U'_{42}, U'_{43} correspondent précisément, à un facteur constant près, à la densité d'aimantation permanente et induite.

(à suivre)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

ISTITUTO ROMANO DI CULTURA MATEMATICA

Sob a designação de «Istituto Romano di Cultura Matematica», fundou-se em Roma, pouco depois de 4 de Junho de 1944 — quando a vida na capital italiana começava a regressar à normalidade — um centro de estudos pedagógicos, cuja principal actividade consiste em séries anuais de conferências sobre didáctica matemática e questões afins. Participam nesta actividade vários professores, liceais e universitários. Cada conferência é seguida de discussão, geralmente longa e animada, em que pode intervir qualquer dos presentes.

Durante a minha permanência em Roma, tive a possibilidade de assistir a algumas destas conferências, entre as quais uma proferida pela Prof. Emma Castelnuovo, de que foi publicado um extracto no n.º 33 da «Gazeta de Matemática». A esta conferência assistiam Guido Castelnuovo e Federigo Enriques, os dois grandes mestres da escola geométrica italiana, respectivamente pai e tio da conferente [1].

Entre as iniciativas, todas interessantes, do I.R.C.M. há uma que merece particular menção. Persuadidos de que, sem o contacto com os professores e os livros estrangeiros, o ensino da matemática em Itália corre périgo de se fossilizar, deixando de corresponder às necessidades das novas gerações, os componentes daquele Instituto decidiram organizar trocas de livros de texto de matemática, ou atinentes à didáctica matemática, *para as escolas secundárias*, entre a Itália e o estrangeiro. Foi já estabelecido contacto com vários países e estão a chegar, de alguns «Colleges» dos Estados Unidos, livros de texto americanos.

Apresenta-se agora a idéia de estabelecer também permuta com textos portugueses. Aproveito a oportunidade para dar aqui, aos possíveis interessados, conhecimento desta idéia, na esperança de que ela venha a frutificar e a constituir o começo dum fecundo intercâmbio entre a Itália e Portugal, no campo da pedagogia matemática.

No corrente ano lectivo, os trabalhos do referido Instituto, iniciados em Outubro, têm consistido até agora em conferências-lições sobre questões críticas, relativas às matemáticas elementares, com o objectivo de preparar jovens licenciados aos próximos concursos para lugares de professor do ensino secundário. Tomam parte nestes trabalhos, além da Prof. Castelnuovo, os Prof.s Viola, Lombardo, Pompili, Franchetta e outros.

Uma nota interessante destas actividades é a cooperação entre professores do liceu e professores universitários, a qual parece estar no espírito da tradição pedagógica italiana. A este respeito, acodem-nos logo à mente as «Questioni riguardanti le matematiche elementari», a colectânea de artigos de autores vários, superiormente organizada por F. Enriques, que se tornou mundialmente conhecida e exerceu nítida influência não apenas sobre ensino, mas até sobre desenvolvimento da matemática. De resto, parece evidente, mesmo *a priori*, que na organização do ensino secundário, o concurso do professor universitário é elemento imprescindível. A favor desta tese, são ainda argumento valioso as célebres lições de F. Klein sobre «As matemáticas elementares consideradas dum ponto de vista superior». E quem tiver o cuidado de procurar encontrará certamente muitos outros exemplos a corroborar o mesmo facto.

J. Sebastião e Silva

[1] Enriques faleceu pouco tempo depois, em 14 de Junho de 1946.

SOCIEDADES MATEMATICAS

SOCIEDADE DE MATEMÁTICA DE S. PAULO

Temos o prazer de trazer ao conhecimento dos nossos leitores a notícia da fundação desta Sociedade em 7 de Abril de 1945. Do 1.º fascículo do Vol. 1 do «Boletim» transcrevemos: «Um grupo de pessoas interessadas no estudo e no ensino de Matemática lançou a idéia da formação de uma Sociedade com o fim de estimular e manter um interêsse activo pela Matemática, incentivar a pesquisa nêsse ramo da ciência e estudar as questões relativas ao seu ensino de grau secundário e superior».

Entre os sócios fundadores temos a alegria de encontrar alguns colaboradores da nossa Revista como os Profs. Omar Catunda, presidente da Sociedade eleito para o primeiro triénio, António Monteiro, José Abdellay e investigadores como Oscar Zariski, André Weil, etc.

O 1.º número do «Boletim» inclui alem dos Estatutos da Sociedade colaboração preciosa de André Weil, Lacaz Netto e Omar Catunda.

Os nossos votos de prosperidade à nova Sociedade.

M. Z.

SOCIEDADE MATEMÁTICA SUISSA

Comunicações feitas na reunião anual (Genebra, 31-8-47):

Th. Reich (Glarus). Das Verhalten der regulären Quaternionen-funktionen in der Nähe isolierter unwesentlich singulärer Punkte, Kurven und Flächen.

A. Kriszten (Zürich). Areolar monogene Funktionen.

G. de Rham (Lausanne). Sur la théorie des distributions de M. Laurent Schwartz.

L. Kollros (Zürich). Solution d'un problème de Steiner.

H. Hadwiger (Bern). Eine elementare Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung im Raum.

S. Piccard (Neuchâtel). Un théorème concernant le nombre total des bases d'un groupe d'ordre fini.

S. Piccard (Neuchâtel). Sur les bases du groupe symétrique.

F. Fiala (Neuchâtel). La représentation conforme des réseaux.

A. Challand (Bern). Qu'est-ce qu'un grand nombre? La notion de grand nombre dans le calcul des probabilités.

M. Diethelm (Schwyz). Ueber Anwendungen des Lehrsatzes von Ptolemnäos.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

A Sociedade iniciou em 1947, a publicação do seu «Boletim» há muito já decidida por Direcções anteriores.

O Boletim compreende 2 séries, uma reservada à publicação de comunicações e conferências promovidas pela Sociedade, outra que incluirá estatutos, movimento de sócios, relatórios da Direcção e das Comissões Permanentes, resultadas de estudos e de inquéritos, etc.

O Boletim é distribuido aos sócios gratuitamente e sairam já dois números. Oportunamente, quando concluida a publicação do Vol. 1, será posto à venda ao público.

Das outras actividades da Sociedade durante 1947 será dada notícia no próximo n.º 35 da *Gazeta de Matemática*.

SOCIEDADE MATEMÁTICA DE FRANÇA

No Instituto Henri Poincaré, realizaram-se de 8 de Maio a 2 de Julho de 1947 as seguintes conferências e colóquios:

Oystein Ore, Prof. Yale Univ: Quelques conséquences du théorème de Jordan-Hölder.

Oystein Ore: Les relations entre les structures et les opérations topologiques.

Florent Bureau, Prof. Univ. Liège: Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, totalement hyperboliques, d'ordre plus grand que 2.

Colloque sur la *Topologie Algébrique* (Président: *A. Denjoy*).

Na Faculdade de Ciências de Nancy, de 15 a 22 de Junho 1947: Colloque sur *l'Analyse Harmonique* (Président: *S. Mandelbrojt*).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — 1947

Exames de aptidão para frequencia das licenciaturas em ciências matemáticas, ciênçias físico-químiças e ciências geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — 1947.

2518 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação: $3x+2y=31$. R: *Com fàclimente se vê* $x_1=7$, $y_1=5$ *constitue uma solução inteira da equação proposta e todas as solucões inteiras são dadas pelas expressões* $x=7+2n$ *e* $y=5-3n$ *onde* n *é um inteiro qualquer. As solucões inteiras e positivas obtêm-se fazendo* $n=3, -2, -1, 0$ *e* 1 *naquelas expressões pois é* $-7/2<n<5/3$.

2519 — Escreva a expressão da qual por aplicação de logaritmos se obteve: $2\log a+1/3\cdot\log b+4\operatorname{colog} c$. R: $a^2 \,.\, \sqrt[3]{b} : c^4$.

2520 — Qual é a equação do segundo grau que admite as raizes $1+i$ e $1-i$? R: $x^2-(1+i+1-i)\,x+(1+i)\,(1-i)=x^2-2x+2=0$.

2521 — Decomponha 19 em duas parcelas que tenham por produto 84. R: *Será* $x+y=19$ *e* $xy=84$, *donde* x *e* y *serão as raizes da equação* $x^2-19x+84=0$ *isto é,* $x=7$, $y=12$.

2522 — **Quais são os valores reais de x que tornam negativo o valor do trinómio $x^2-10x+24$? Justifique a resposta.** R: *Como* $\Delta=10^2-4\cdot 24>0$, *os valores de reais de* x *que tornam o trinómio negativo são os compreendidos entre as raizes, por o coeficiente de* x^2 *ser positivo; logo será* $4<x<6$.

2523 — Calcule a área da esfera cujo volume é de 3 metros cúbicos. R: *Como* $V=4/3\pi R^3=3m^3$ *será* $R=\sqrt[3]{9/4\pi}\ m$ *e* $S=4\pi R^2=\sqrt[3]{324\pi}\ m^2$.

2524 — Verifique a identidade: $\operatorname{tg} a \operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen}^2 a$. R: *Como* $\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cos a$ *tem-se* $\operatorname{tg} a\operatorname{sen} 2a=\operatorname{sen} a\cdot 2\operatorname{sen} a\cos a/\cos a=2\operatorname{sen}^2 a$.

2525 — Calcule os catetos dum triângulo rectângulo, sabendo que um dos ângulos agudos mede $28^\circ\,12'\,15''$ e que a sua área é de 296 metros quadrados. R: *Como* $b\cdot c=2S$, *onde* b *e* c *são os catetos e* S *a área, e como por outro lado é* $b=c\operatorname{tg} B$, *tem-se* $c^2\cdot\operatorname{tg} B=2S$ *ou* $b^2\cdot\operatorname{tg}(\pi/2-B)=2S$, *donde:* $\log b=1/2\,\{\log 2+\log 296+\log\operatorname{cotg} 61^\circ\,47'\,45''\}=0{,}15051+1{,}23565+\bar{1}{,}86469=1{,}25085$ *e portanto* $b=17{,}82\ m$; *ou* $\log c=1/2\,\{\log 2+\log 296+\log\operatorname{cotg} 28^\circ\,12'\,15''\}=0{,}15051+1{,}23565+0{,}13530=1{,}52146$ *donde* $c=33{,}22\ m$.

2526 — Como se escreve no sistema de base 5 o número que aparece escrito 111 no sistema de base 3? R: *O número* 111 *escrito no sistema de base* 3 *representa o polimónio* $1\cdot 3^2+1\cdot 3+1$. *Ora como podemos escrever* 3^2 *sob a forma* $1\cdot 5+4$, *temos* $1\cdot(1\cdot 5+4)+1\cdot 3+1=1\cdot 5+4+3+1=2\cdot 5+3$ *e portanto o número* $111_{(3)}$ *escreve-se no sistema de base* 5 *sob a forma* 23.

2527 — De quantos modos diferentes se podem sentar quatro pessoas em volta de uma mesa redonda? R: $P_4=2\cdot 3\cdot 4=24$.

Soluções dos n.os 2518 a 2527 de José Duarte da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE UMA CÓNICA

por **José Ribeiro de Albuquerque**

Tomemos uma cónica fixa no plano, sempre a mesma. Se escolhermos um referencial no plano da curva, dois eixos coordenados rectangulares ou não, a equação da cónica será

$$(1)\qquad Ax^2+2B\,xy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Se variarmos o referencial, mas conservarmos a cónica, variam os coeficientes, A, B, C, D, E, F, mas a equação é sempre do segundo grau e portanto da forma (1).

Se nos dão a equação da cónica num sistema de eixos coordenados oblíquos, podemos conservar a origem e um dos eixos, e, mudando apenas o outro, passar a novo sistema em que os eixos sejam rectangulares. Suporemos então que a equação (1) é já a equação da nossa cónica referida a um sistema de eixos coordenados rectangulares.

Vamos dar uma translação ao referencial levando a origem para o centro da cónica.

Se as coordenadas do centro são α,β a translação é definida por $x=\alpha+X$, $y=\beta+Y$, e teremos a nova equação da nossa cónica:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &AX^2+2B\,XY+CY^2+2\,(A\alpha+B\beta+D)\,X+\\ &+2\,(B\alpha+C\beta+E)\,Y+A\alpha^2+2B\,\alpha\beta+\\ &+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0\,. \end{aligned}$$

Mas como a nova origem está no centro da curva, se (X,Y) são coordenadas de um ponto da cónica, e portanto verificam (2), também $(-X,-Y)$ são coordenadas de outro ponto da curva, e portanto também verificam (2); por consequência

$$(3)\qquad \begin{aligned} &AX^2+2B\,XY+CY^2-2\,(A\alpha+B\beta+D)\,X-\\ &-2\,(B\alpha+C\beta+E)\,Y+A\alpha^2+2B\,\alpha\beta+\\ &+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0\,. \end{aligned}$$

Comparando (2) e (3) tem que ser

$$(4)\qquad \begin{cases} A\alpha+B\beta+D=0\\ B\alpha+C\beta+E=0\,. \end{cases}$$

O sistema (4) dá as coordenadas α,β do centro, e estes valores dão à equação (2) a forma

$$(5)\qquad AX^2+2B\,XY+CY^2=H$$

onde

$$(6)\qquad H=-(A\alpha^2+2B\,\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F)$$

Concluímos que em qualquer referencial formado por dois diâmetros perpendiculares, a nossa cónica tem sempre uma equação da forma (5).

Se muda o referencial, mudando os diâmetros, variam os coeficientes A, B, C, mas conserva-se a forma da equação (5), só com termos de grau par, e conserva-se o termo independente.

Quando a cónica se mantém fixa, e varia o referencial, não haverá outras coisas que se conservem constantes? Vamos demonstrar a seguinte propriedade de uma cónica.

É constante a soma dos inversos dos quadrados de dois semi-diâmetros perpendiculares de uma cónica.

Tomemos um sistema de eixos coordenados rectangulares com origem no centro. Nesse referencial a cónica tem a seguinte equação: $Ax^2+2B\,xy+Cy^2=H$.

Sejam $y=mx$ e $x=-my$ dois diâmetros perpendiculares, não necessàriamente conjugados. O sistema

$$\begin{cases} Ax^2+2B\,xy+Cy^2=H\\ y=mx \end{cases}$$

conduz a

$$x^2=\frac{H}{A+2Bm+Cm^2}\,,\quad y^2=\frac{m^2\,H}{A+2Bm+Cm^2}$$

e as coordenadas de um ponto P_1 em que o diâmetro $y=mx$ corta a cónica obtêm-se associando convenientemente um dos valores de x com um dos valores de y. O semi-diâmetro é a distância de P_1 à origem; o inverso do quadrado do semi-diâmetro é

$$\frac{1}{x_1^2+y_1^2}=\frac{A+2Bm+Cm^2}{H\,(1+m^2)}\,.$$

Para o diâmetro $x=-my$ vem sucessivamente

$$\begin{cases} Ax^2+2B\,xy+Cy^2=H\\ x=-my \end{cases}\qquad y^2=\frac{H}{Am^2-2Bm+C}$$

$$x^2=\frac{m^2\,H}{Am^2-2Bm+C}$$

e o inverso do quadrado do semi-diâmetro é

$$\frac{1}{x_2^2+y_2^2}=\frac{Am^2-2Bm+C}{H\,(1+m^2)}\,.$$

Portanto a soma S dos inversos dos quadrados dos semi-diâmetros perpendiculares de uma cónica é constante e igual a $\dfrac{A+C}{H}$.

Desta propriedade resulta o seguinte: *se* $Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H$ *é a equação de uma cónica fixa num sistema de eixos coordenados rectangulares* O, x, y *com origem no centro, e se* $A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 = H$ *é a equação da mesma cónica noutro sistema de eixos coordenados rectangulares* O, X, Y *com origem também no centro, temos* $A + C = A' + C'$.

Calculemos agora as direcções assintóticas da nossa cónica fixa, a partir da sua equação num sistema de eixos coordenados rectangulares. As direcções assintóticas são dadas por $A + 2Bm + Cm^2 = 0$ e, às duas raizes

(7) $$m_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \quad m_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

correspondem os seguintes valores

$$m_1 - m_2 = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{C}, \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{A}{C},$$

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}$$

o último dos quais é o da tangente do ângulo formado pelas duas assíntotas $y = m_1 x$, $y = m_2 x$, quer estas assíntotas sejam reais ou não, distintas ou não.

Mantendo-se fixa a cónica e variando o referencial (eixos coordenados rectangulares com origem no centro) mantém-se constante o valor $\dfrac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}$ e portanto mantém-se constante o valor de $B^2 - AC$.

Resumindo: *se a cónica é fixa e se variam os eixos coordenados conservando-se porém rectangulares e com a origem no centro, as diversas equações da cónica são da forma* $Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H$, *variando os seus coeficientes* A, B, C *mas conservando-se constantes, de equação, para equação, os valores de* $A + C$, *de* $B^2 - AC$, *e do termo independente* H.[1]

* * *

Suponhamos que já temos a equação da cónica referida a um par de diâmetros perpendiculares

(8) $$Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H$$

e que queremos a equação da mesma cónica referida aos eixos de simetria. A equação desejada é da forma $MX^2 + 2R\,XY + NY^2 = H$ onde deverá ser

(9) $$A + C = M + N, \quad B^2 - AC = R^2 - MN$$

Mas como os eixos de simetria são diâmetros conjugados, cada um deles divide ao meio as cordas paralelas ao outro. Por consequência, para valores constantes de X (ou de Y) a equação deverá dar valores simétricos de Y (ou de X) o que obriga a ser $R = O$. Com efeito, para $X = k$ temos sucessivamente

$$(Mk^2 - H) + 2RkY + NY^2 = 0,$$

$$Y_1 = \frac{-Rk + \sqrt{R^2k^2 - N(Mk^2 - H)}}{N},$$

$$Y_2 = \frac{-Rk - \sqrt{R^2k^2 - N(Mk^2 - H)}}{N}$$

e pondo $Y_1 = -Y_2$ resulta $R = 0$.

Então devemos ter a seguinte equação

(10) $$MX^2 + NY^2 = H$$

e as condições (9) transformam-se em: $A + C = M + N$, $AC - B^2 = MN$. Os números M e N são as raizes da equação de segundo grau

(11) $$S^2 - (A + C)\,S + AC - B^2 = 0.$$

Do referencial onde a cónica tem a equação (8) passa-se ao referencial onde a cónica tem a equação (10) com uma rotação de um ângulo ω cuja tangente é o coeficiente angular do novo eixo dos XX relativamente ao primeiro referencial. Mas os coeficientes angulares dos eixos de simetria no sistema onde a cónica tem a equação (8) são dados por

$$Bm^2 + (A - C)\,m - B = 0.$$

a esta equação dá dois valores sempre reais, distintos se a cónica tem centro. As duas rotações são dadas por

$$m_1 = \operatorname{tg}\omega_1 = \frac{C - A}{2B} + \frac{\sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}{2B},$$

$$m_2 = \operatorname{tg}\omega_2 = \frac{C - A}{2B} - \frac{\sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}{2B}$$

e como $m_1 \cdot m_2 = -1$, da relação $\operatorname{tg}(\omega_1 - \omega_2) = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$ resulta $\omega_1 - \omega_2 = \pi/2$. As duas rotações diferem apenas na ordem em que se tomem os eixos de simetria.

* * *

Suponhamos que a cónica é uma hipérbole equilátera e que já temos a sua equação referida a um par de diâmetros perperdiculares,

(12) $$Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H.$$

Uma hipérbole é equilátera quando as suas assíntotas são perpendiculares; as fórmulas (7) dos coeficientes angulares das assíntotas deverão satisfazer a condição de perpendicularidade

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C} = \frac{C}{B + \sqrt{B^2 - AC}}$$

donde resulta $-A = C$.

Numa hipérbole equilátera são simétricos os coeficientes dos termos em x^2 *e* y^2. Isto permite reconhecer as hipérboles equiláteras.

[1] Os valores de $A + C$ e $B^2 - AC$ são constantes, de equação para equação, precisamente porque se supõe que as equações ao centro da mesma cónica têm *todas* o mesmo termo independente H.

Se queremos a equação da hipérbole referida às suas assíntotas, ela será da forma $JX^2+2KXY+LY^2=H$ e deverá ser

(13) $\qquad A+C=J+L\,,\quad B^2-AC=K^2-JL\,.$

Mas quando se tomam as assíntotas para eixos coordenados a curva cai toda em dois quadrantes diagonalmente opostos. Para valores constantes de X (ou de Y) a equação deverá dar um único valor real de Y (ou de X) o que obriga a ser $J=L=0$.

As condições (13) reduzem-se a $K^2=B^2-AC$, e a equação da curva é

(14) $$XY=\frac{H}{\pm 2\sqrt{B^2-AC}}\,.$$

Para passar do referencial onde a cónica tem a equação (12) para o referencial onde ela tem a equação (14) deverá executar-se uma rotação medida pelo ângulo que o novo eixo dos XX, a assíntota, faz com o antigo, e cuja tangente é o coeficiente angular da assíntota.

* * *

Seja dada a equação de uma parábola

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

num sistema de eixos coordenados rectangulares. Como $B^2=AC$ os três primeiros termos são um quadrado perfeito. Ponhamos

(15) $$a=\sqrt{A}\,,\quad c=\sqrt{C}$$

e teremos

(16) $$(ax+cy)^2+2Dx+2Ey+F=0\,.$$

As rectas $ax+cy=0$ e $2Dx+2Ey+F=0$ encontram-se num ponto $P_0\,(x_0,y_0)$ da parábola. A recta $2Dx+2Ey+F=0$ encontra duas vezes a curva no ponto P_0 e portanto é tangente à curva nesse ponto. A recta $ax+cy=0$ encontra a curva uma única vez e portanto é o diâmetro que passa por P_0.

Se $V\,(\alpha,\beta)$ é o vértice da parábola, para obter a equação reduzida $Y'^2=2pX'$ vamos dar uma rotação ω aos eixos O,x,y de modo a levar o eixo dos XX a coincidir com o diâmetro $ax+cy=0$. Ao efectuar esta rotação obteremos uma equação $(Y-\beta)^2=$ $=2p\,(X-\alpha)$ ou

(17) $$Y^2=2\beta Y+2pX-(\beta^2+2p\alpha)$$

A rotação ω tem uma tangente igual ao coeficiente angular de $ax+cy=0$.

(18) $$\operatorname{tg}\omega=-\frac{a}{c}\,.$$

As fórmulas de transformação de coordenadas são

(19) $$\begin{cases} x=X\cos\omega-Y\operatorname{sen}\omega \\ y=X\operatorname{sen}\omega+Y\cos\omega\,. \end{cases}$$

Antes de substituir estes valores em (16) daremos a seguinte forma à expressão

$$\left(\frac{ax+cy}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2=-\frac{2Dx+2Ey+F}{a^2+c^2}$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância de um ponto da parábola ao novo eixo dos XX, isto é, Y^2. Fazendo agora a transformação (19) vem

$$Y^2=-2D\,\frac{X\cos\omega-Y\operatorname{sen}\omega}{a^2+c^2}-$$
$$-2E\,\frac{X\operatorname{sen}\omega+Y\cos\omega}{a^2+c^2}-\frac{F}{a^2+c^2}$$

ou ainda

$$Y^2=\frac{2}{a^2+c^2}\,(D\operatorname{sen}\omega-E\cos\omega)\,Y-$$
$$-\frac{2}{a^2+c^2}\,(D\cos\omega+E\operatorname{sen}\omega)\,X-\frac{F}{a^2+c^2}$$

e comparando com (17) temos

(20) $$\beta=\frac{1}{a^2+c^2}\,(D\operatorname{sen}\omega-E\cos\omega)\,,$$

$$p=-\frac{1}{a^2+c^2}(D\cos\omega+E\operatorname{sen}\omega),\quad \alpha=\frac{1}{2p}\left[\frac{F}{a^2+c^2}-\beta^2\right].$$

Notando que $\operatorname{tg}\omega$ é negativa e que se tem $\operatorname{sen}\omega$ e $\cos\omega$ com sinais contrários

$$\operatorname{sen}^2\omega=\frac{a^2}{a^2+c^2}\qquad \cos^2\omega=\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

teremos

$$p^2=\frac{1}{(a^2+c^2)^2}\left[D^2\frac{c^2}{a^2+c^2}+E^2\frac{a^2}{a^2+c^2}-2DE\,\frac{ac}{a^2+c^2}\right]=$$
$$=\frac{(Ea-Dc)^2}{(a^2+c^2)^3}$$

e portanto

(21) $$p=\pm\frac{Ea-Dc}{(a^2+c^2)^{3/2}}=\pm\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{(A+C)^{3/2}}\,.$$

Os dois valores achados para p conduzem a duas equações da forma $Y'^2=\pm 2pX'$ mas uma só delas dá valores reais de Y' para valores positivos X'. Escolhe-se o sinal de p que realiza esta condição; os dois sinais correspondem aos dois sentidos que se podem atribuir ao eixo VX'.

* * *

Façamos uma aplicação prática do que se expôs.

Em eixos rectangulares uma cónica tem a equação $2x^2+3xy-2y^2+2x-11y-22=0$. As coordenadas do centro são dadas pelo sistema (4) ou seja

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta/2+1=0 \\ 3\alpha/2-2\beta-11/2=0 \end{cases}\qquad \alpha=1\quad \beta=-2\,.$$

A fórmula (6) dá o valor $H=10$ e a equação (5) tem a forma

$$2x^2+3xy-2y^2=10\,.$$

A equação (11) é então

$$S^2-25/4=0\quad S=\pm 5/2$$

e a equação (10) toma as formas $\pm 5x^2/2 \mp 5y^2/2=10$.

Obtemos assim duas equações

$$x^2/4-y^2/4=1\,; \quad -x^2/4+y^2/4=1$$

para a primeira o semi-eixo real é OX e para a segunda o semi-eixo real é OY.

Como a cónica é uma hipérbole equilátera, visto que satisfaz a condição $-A=C$, podemos referi-la às suas assíntotas. A equação (14) transforma-se em

$$XY=\pm 2\,.$$

Seja $4y^2-4xy+x^2+4x+12y-1=0$ a equação de uma parábola em eixos coordenados rectangulares.

A equação (16) toma a forma

$$(x-2y)^2+4x+12y-1=0$$

e a fórmula (21) dá

$$p=\pm 2/\sqrt{5}\,.$$

Surgem assim duas equações da forma $Y^2=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}X$ mas uma sòmente dá valores reais de Y para valores positivos de X.

A equação reduzida da parábola é portanto

$$Y^2=\frac{4}{\sqrt{5}}X\,.$$

O MÉTODO DA INTRODUÇÃO DE UM PLANO VERTICAL EM PERSPECTIVA

por Luís Mendonça de Albuquerque

1. Na resolução de alguns problemas de geometria descritiva pelo método das projecções cotadas (distância dum ponto a um plano; ângulo de dois planos; etc.) recorre-se vulgarmente ao método da dupla projecção ortogonal (Monge); para isso, introduz-se um plano perpendicular ao plano de comparação, que desempenha o papel de segundo plano de projecção.

Se é lícito objectar que tal procedimento destrói a independência do método das projecções citadas, nem por isso ele deixa de ser correntemente aconselhado e seguido em quase todas as obras didáticas da especialidade.

Surpreende, porém, o facto de não se seguir igual critério no estudo das perspectivas. Aí (pelo menos nas obras que conhecemos) evita-se sempre ir além dos elementos que definem o sistema de projecção, mesmo quando para atingir tal objectivo se tem de recorrer a construções bastante trabalhosas.

Vamos tentar mostrar que, ainda neste caso, a aplicação de tal método simplifica de maneira apreciável a resolução de certos problemas. Se o seu valor prático, em perspectiva rigorosa, se pode pôr em discussão, porque obriga a construções subsidiárias sobre dois elementos do traçado (operações que o método dos rebatimentos dispensa), em perspectiva cavaleira são inegáveis as vantagens que oferece.

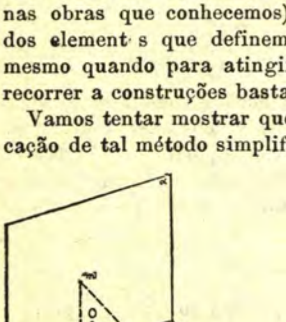


Fig. 1

2. Perspectiva rigorosa. Limitar-nos-emos, neste caso, a mostrar como se poderia obter a dupla projecção ortogonal de um ponto, conhecida a sua representação em perspectiva e o plano α, de traço (F), que se adopta para segundo plano de projecção, (fig. 1).

Seja: π, o plano do quadro; O, o centro de projecção cónica; P, o ponto principal; M', o ponto dado; M, a sua imagem; e m, a sua projecção ortogonal no quadro. Introduzindo o plano $\alpha \perp \pi$ de traço (F), o duplo sistema de projecção ortogonal é (α, π). A cota do ponto M' é, então, dada por $z=\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}\cdot\overline{Mm}$ e determina a projecção vertical do ponto, (m', m).

3. Perspectiva cavaleira. Suponhamos que o sistema de projecção é definido pelo quadro, π, (fig. 2), e pela direcção das projectantes oblíquas, δ.

Seja ainda: M', o ponto dado; M, a sua imagem; m, a sua projecção ortogonal; e $k=\text{cotg}\,x$, a constante de redução.

Introduza-se o plano $\alpha \perp \pi$, de traço (F), como segundo plano de projecção para o sistema de Monge, (α, π). A cota de M' é, evidentemente:

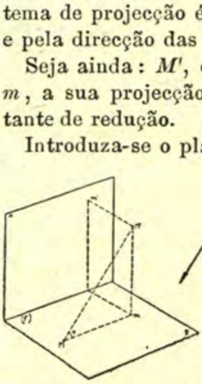


Fig. 2

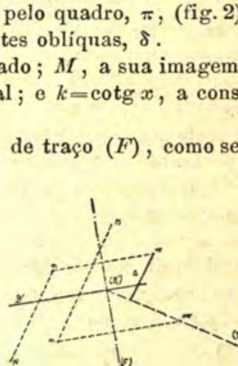


Fig. 3

$$z=\overline{mM'}=k\,.\,\overline{mM}\,.$$

Aplicação I. Determinar a distância do ponto (M, m) ao plano $(B\,; N, n)$, $(k=1/2)$.

Introduz-se o plano vertical de projecção de traço (F) perpendicular ao traço do plano dado, B (fig. 3).

No sistema de dupla projecção ortogonal, definido pelo quadro e pelo plano (F), o plano dado é o plano de topo, (T'); e o ponto dado é (m', m).

A distância pedida é, pois: Δ.

Aplicação II. Determinar o ângulo de dois planos de traços paralelos (ou com o mesmo traço). (Supõe-se $k=1/2$).

Aplicação III. Determinar o ângulo de duas rectas ($k=2/3$).

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — Alguns exercícios de exames em 1946-47.

2528 — Integre a equação diferencial $x^2 y''-2xy'+2y=0$. R: *Seja* $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $y'=2\alpha x+\beta$, $y''=2\alpha$. *Substituindo na equação proposta deduz-se* $\gamma=0$, $\alpha=\mathcal{C}_1$, $\beta=\mathcal{C}_2$. *O integral geral é* $y=\mathcal{C}_1 x^2+\mathcal{C}_2 x$.

2529 — Determine a equação da hipérbole que tem por focos $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$ e por assíntotas $y=\pm\sqrt{3}\,x$. R: $b/a=\sqrt{3}$, $b^2/a^2=3$, $c=1$, $c^2=1$, $c^2=a^2+b^2=a^2(1+b^2/a^2)=4a^2$, $a^2=c^2/4=1/4$, $a=1/2$, $b=\sqrt{3}/2$, donde $\dfrac{x^2}{(1/2)^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1$ (*eixos ortog.*).

2530 — Determine a relação existente entre as excentricidades de duas elipses, supondo que os focos de uma são vértices da outra e que as duas têm uma directriz comum. R: *Designe* d *a distância duma directriz da 1.ª elipse ao centro. Então é* $d=d'$, *por hipótese. Considerando um dos extremos do eixo menor fàcilmente se vê que* $e=a/d$ *ou* $d=a/e$. *Da mesma forma* $d'=a'/e'$. *Como* $a'=c$ (*por hipótese*): $ae'=ce$ *ou* $e'=c/a \times e=e^2$. *Em resumo:* $e'=e^2$.

2531 — Determine o vértice, o eixo, a directriz e o foco da parábola $y=x-x^2$ e o ponto em que esta curva tem por tangente a recta $X+Y=1$ (eixos ortogonais). R: *A equação da parábola está referida a uma paralela à tangente no vértice* (*como eixo das abscissas*) *e a uma paralela ao eixo de simetria* (*como eixo das ordenadas*). *E pois da forma:* $(x-a)^2=\pm 2p\,(y-b)$, *sendo* a *e* b *as coordenadas do vértice e* p *a distância do foco à directriz. Desenvolvendo:* $x^2-2ax\mp 2py+a^2\pm 2bp=0$, *donde* $-2a=-1$, $\mp 2p=1$, $a^2\pm 2bp=0$. *Resulta* $a=1/2$, $p=1/2$ ($p>0$ *e é preciso optar pelo sinal* $+$ *na 2.ª equação e pelo sinal* $-$ *na 3.ª*), $b=1/4$. *A equação da parábola é pois* $(x-1/2)^2=-2\cdot 1/2\cdot(y-1/4)$. *Eixo de simetria:* $x=1/2$; *tangente no vértice:* $y=1/4$; *foco:* $F\,(1/2,0)$; *directriz:* $y=1/2$. *Equação geral das tangentes:* $(x-1/2)(X-1/2)=-1/2\cdot(y-1/4+Y-1/4)$ *ou* $Y=(1-2x)X+x-y$. *Identifica-se com* $Y=-X+1$ *quando* $1-2x=-1$ *e* $x-y=1$ *ou* $x=1, y=0$ (*ponto cujas coordenadas satisfazem à equação da parábola*).

2532 — É possível determinar λ por forma que a cónica $x^2/(a^2-\lambda)+y^2/(b^2-\lambda)-1=0$ passe por um dado ponto $P(x_0, y_0)$ do plano? De que natureza é essa cónica? Determine o ângulo sob o qual se cruzam duas cónicas concorrentes. (Eixos ortogonais).

2533 — Calcule a grandeza d da perpendicular baixada do ponto $M(x, y)$ da curva $y=x^2/(1+x)$ sobre a recta $Y=X+p$, e determine depois p por forma que seja $\lim\limits_{x=\infty} d=0$. (Eixos ortogonais).

R: *A equação hesseana da recta do enunciado é:* $\dfrac{X-Y+p}{\pm\sqrt{2}}=0$. *Logo* $d=\dfrac{|x-x^2/(1+x)+p|}{\sqrt{2}}=$ $=\left|\dfrac{x(p+1)+p}{\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}}\right|$, $\lim\limits_{x=\infty} d=\left|\dfrac{p+1}{\sqrt{2}}\right|=0$ *desde que* $p=-1$.

Soluções dos n.os 2528 a 2533 de P. T. Braumann.

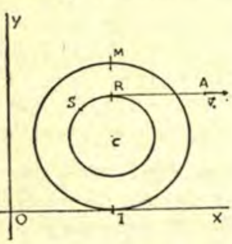
Errata: No n.º 33 de *Gazeta de Matemática*, pág. 19, 1.ª coluna, linhas 24 e 25 (exercício n.º 2476) deve ler-se «passam pela» em lugar de «têm por vértice a».

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — MECÂNICA RACIONAL — 1.º Exame de frequência, 1946-47 — 1.ª Chamada.

2534 — Qual é o mínimo de tempo gasto por um comboio a percorrer os 12,5 km que separam duas estações A e B sabendo-se que os máximos da velocidade e das acelerações de arranque e de travagem são respectivamente 10 km/h, 1 km/h/s e 2 km/h/s. Traçar o diagrama (v, t) da marcha do combóio. R: *O esquema da marcha do comboio é, evidentemente,* *o seguinte: primeiro, acelera até atingir a velocidade máxima, durante o tempo* t_1; *segue depois, no tempo* t_2, *com essa velocidade máxima; por fim, começa a retardar, o que se verifica durante um tempo* t_3 *tal que* $v_m - a_2 t_3 = 0$, *se adoptarmos as designações: velocidade máxima* $v_m = 100\ \mathrm{km/h}$, *aceleração de arranque* $a_1 = 1\ \mathrm{km/h/s}$ *e aceleração de travagem* $a_2 = 2\ \mathrm{km/h/s}$. *De* $a_1 t_1 = v_m$, *vem* $t_1 = v_m / a_1$; *de (1)* $a_1 t_1^2/2 + v_m t_2 + v_m t_3 - a_2 t_3^2/2 = 12{,}5$, *vem* t_2. *O tempo pedido será:* $t = t_1 + t_2 + t_3$. (*Mudando unidades, virá:* $a_1 = 3.600\ \mathrm{km/h/h}$; $a_2 = 7.200\ \mathrm{km/h/h}$, *valores com que entramos em (1)*).

2535 — Os discos concêntricos D_1 e D_2 são solidários e os seus raios b_1 e b_2 conhecidos e tais que $b_2 < b_1$. D_1 rola sem resvalamento sôbre Ox e o extremo A do fio SRA, fixo em S a D_2, deloca-se com velocidade constante $\vec{v_0}$ também dada, e paralela a Ox. *a*) Calcular os elementos definidores do estado cinético do conjunto $D_1 D_2$. *b*) Calcular a aceleração de I sôbre D. *c*) Determinar o centro das acelerações do conjunto $D_1 D_2$. *d*) Calcular a aceleração de R oposto a I, e deduzir do valor obtido o raio de curvatura da trajectória descrita por êsse ponto, na posição considerada. R: *A velocidade de* R *é a de* A; $\vec{v}_R = \vec{v}_0$. *Então,* $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{R-I}$; $v_0 = -\varphi'(b_2 + b_1)$ *ou* $\varphi' = -v_0/(b_1+b_2)$ *sendo* $\varphi = (\widehat{SC, CR})$. *O vector* $\bar{v}_0$ *e a rotação* $\vec{\omega}$ *de valor algébrico* φ', *constituem um par de elementos definidores do estado cinético.*



Outra solução: o par (v_C, ω), *em que* C *é o centro dos discos. Se* l *é o comprimento do fio, temos:* $b_2\varphi + RA = l$, $b_2\varphi' + RA' = 0$ (1).

Sendo aliás I_0 *centro de rotação, é:* $\bar{v}_C = \bar{\omega} \wedge \overline{C-I} = \overline{OI'}$, ou $v_C = -\varphi' b_1$ $(\varphi' < 0)$. Ora, como $OI + RA = x_A$, *derivando:* $OI' + RA' = x'_A$, *ou* $v_C + RA' = v_0 \rightarrow RA' = v_0 - v_C$, *o que, em (1), dá:* $b_2\varphi' + v_0 = v_C$; *com* $v_C = -\varphi' b_1$, *vem um sistema que dá* φ' *e* v_C, *ficando:* $(b_2 + b_1)\varphi' = -v_0$; $\therefore \begin{cases} \varphi' = -v_0/(b_1+b_2) \\ v_C = b_1 v_0/(b_1+b_2). \end{cases}$

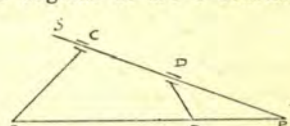
b) *Movimento relativo:* $\begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{XOY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{D_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{D_1} \\ \mathrm{XOY} \end{pmatrix}$

$\bar{V}_I^r$ *é a velocidade de permutação de* I (*a mesma em relação a* D_1 *e ao* XOY) *seja* $\bar{V}$. *É claro que* $\bar{V} = \bar{v}_c$; *e como* $\bar{a}_I^{tr} = \bar{V} \wedge \bar{\omega}$; *e* $\bar{V} = \text{const.}$, $a_I^a = 0$, *virá de* $\bar{a}_I^a = \bar{a}_I^r + \bar{a}_I^{tr} + 2(\bar{\omega} \wedge \bar{V}_r)$, $\bar{a}_I^r = \bar{V} \wedge \bar{\omega}$.

c) *Como* $\bar{v}_C = \text{const.}$, *é o próprio* C.

d) $\bar{a}_R = -\omega^2 \cdot \overline{R-C} = -\omega^2 \cdot b_2 \bar{j}$; $\bar{V}_R = \bar{V}_A = \bar{V}_0$; então $a_n = V_0^2/\rho$ *e* $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{V_0^2}{\omega^2 b_2} = \dfrac{(b_1+b_2)^2}{b_2}$.

2536 — P, Q e R são fixos; C e D são dois cursores que correm ao longo de PS. Sabendo que a velocidade angular de RC é constante e igual a



80 r. p. m. determinar: *a*) as velocidades dos cursores ao longo de PS; *b*) a aceleração do cursor C ao longo de PS. R: *A solução mais simples é obtida pelos métodos da Cinemática Gráfica.*

Soluções dos n.os 2534 a 2536 de A. Andrade Guimarães.

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (Rio de Janeiro) — Análise Superior — **Julho de 1946 — 1.ª Prova Parcial.** (duração 4 h).

2537 — Seja R um reticulado e L um sub-reticulado de R tal que:

E 1) *Qualquer que seja* a e R *existem dois elementos* h *e* k *de* L *tais que* $h \subseteq a \subseteq k$.

Tomando R como conjunto fundamental daremos o nome de vizinhança de um ponto p de R a todo o conjunto $V(p)$ de elementos x de R tais que $h \subseteq x \subseteq k$, onde h e k são elementos de L tais que $h \subseteq p \subseteq k$.

Demonstre que o espaço topológico assim definido é um espaço de Kuratowski em que os pontos são conjuntos abertos e que L é um conjunto denso em R.

Exemplo: Seja R o conjunto das sucessões limitadas de números reais. Dadas duas sucessões limitadas

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

convencionemos escrever $x \subseteq y$ se e só se $x_i \leq y_i$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Verifique que R é um reticulado distributivo onde $c = x \cup y$ é a sucessão cujo termo geral é $c_n = \max(x_n, y_n)$ e que $x \cap y$ é a sucessão cujo termo geral é $\min(x_n, y_n)$.

Seja L o conjunto das sucessões de números reais em que quási todos os termos são iguais entre si. Verifique que L é um sub-reticulado de R que verifica a propriedade E 1.

2538 — Seja $f(x)$ uma funcional que a cada elemento x de L faz corresponder um número real $f(x)$.

DEFINIÇÃO 1. Diremos que $f(x)$ *é monótona sobre* L se fôr verificada a seguinte condição

F1: $a \subseteq b$ implica $f(a) \subseteq f(b)$, onde $a, b \in L$.

DEFINIÇÃO 2. Diremos que $f(x)$ *é aditiva sobre* L se

F2: $f(a \cup b) + f(a \cap b) = f(a) + f(b)$ quaisquer que sejam a e b de L.

DEFINIÇÃO 3. Dado x de R ponhamos:

$f^0(x) =$ ínfimo $f(k)$ para todos os valores possiveis de $k \in L$ tais que $x \subseteq k$.

$f_0(x) =$ supremo $f(h)$ para todos os valores possíveis de $k \in L$ tais que $h \subseteq x$.

Diz-se que f é prolongável no ponto x de R se fôr $f^0(x) = f_0(x)$.

Demonstre os seguintes teoremas:

TEOREMA 1. Tôda a funcional $f(x)$ definida e monótona sôbre L é contínua em todos os pontos de L.

TEOREMA 2. Para que $f(x)$ monótona sobre L seja prolongável no ponto a de R é necessário e suficiente que dado $\delta > 0$ exista um par de elementos h e k de L tal que $h \subseteq a \subseteq k$ e $f(k) - f(h) < \delta$.

DEFINIÇÃO 4. Seja P o conjunto de todos os pontos nos quais f é prolongável. Dá-se o nome de prolongamento da funcional $f(x)$ à funcional $F(x)$ definida sôbre P da seguinte maneira:

$$F(x) = f^0(x) = f_0(x) \quad \text{para} \quad x \in P,$$

Demonstre:

TEOREMA 3. L é uma parte de P e $F(x) = f(x)$ se $x \in L$.

Exemplo (continuação). Se quási todos os termos da sucessão $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ são iguais a a, ponhamos $f(x) = a$. Mostre que são verificados sôbre L os axiomas F1 e F2 e que os elementos de R em que f é prolongável são precisamente as *sucessões convergentes*. A funcional $F(x)$ é o limite da sucessão convergente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ isto é

$$F(x) = \lim_{n=\infty} x_n .$$

2539 — Demonstre o seguinte teorema:

TEOREMA 4. Se f é uma funcional monótona e aditiva sôbre L, P é um sub-reticulado de R e $F(x)$ é não só monótona mas também aditiva sôbre P.

Exemplo (continuação). Mostre que o axioma F2 é satisfeito sôbre L e que o teorema 4 exprime que se x_n e y_n são sucessões convergentes então:

$$\lim_{n=\infty} [\max(x_n, y_n)] + \lim_{n=\infty} [\min(x_n, y_n)] = \lim_{n=\infty} x_n + \lim_{n=\infty} y_n .$$

Sugestão. Considere o exemplo a estudar como um caso concreto susceptível de encaminhar a resolução das questões propostas.

Nota — As questões propostas foram extraidas de uma memória de Ky Fan.

Enunciados do Prof. António A. R. Monteiro

Université D'Alger – MÉCANIQUE RATIONNELLE – **Epreuve Théorique — Mai 1947.** (durée 4 h).

2540 — Etude d'une fusée interplanétaire assez éloignée de tout astre pour pouvoir négliger l'attraction newtonienne.

Le problème comporte deux parties indépendantes.

I. Dans cette première partie, on néglige la variation de masse de la fusée due aux gaz éjectés durant l'intervalle de temps considéré.

On considère un solide S de centre de gravité O, et un repère $R\,(Oxyz)$ lié à S. L'ellipsoïde d'inertie de S est de révolution autour de Oz. Le solide est soumis à une force $\vec{f}$ constante par rapport à R, et appliquée en un point Q de Oz de coordonnées $(0, 0, -a)$ (force représentant la réaction des gaz éjectés).

1°. On suppose que la force passe par O. Décrire le mouvement de S par rapport à un repère d'origine O et de directions parallèles à celles d'une repère galiléen R_0, puis étudier le mouvement du point O par rapport à R_0 les conditions initiales étant quelconques.

2°. On suppose que $\vec{f}$ est contenue dans le plan xOz et fait avec Oz un angle α (cas où la tuyére d'échappement serait inclinée par rapport à Oz). Exprimer en fonction du temps les coordonnées du vecteur rotation $\vec{\omega}$ de S par rapport à R; lieu de l'extrémité de $\vec{\omega}$ par rapport à R. Démontrer que si $\vec{\omega}$ est convenablement choisi à l'instant initial, ce vecteur reste fixe par rapport à R; étudier dans ce cas le mouvement de O par rapport à R_0. Peut-il arriver que $\vec{\omega}$ reste fixe par rapport à R_0?

II. On suppose que la fusée éjecte une masse de gaz μ par seconde (μ pouvant être fonction du temps) et que la force $\vec{f}$ passe par O.

3°. Montrer que le vecteur $-\frac{1}{\mu}\vec{f}$ représente la vitesse $\vec{V}$ d'éjection des gaz par rapport à la fusée, vitesse supposée la même en tout point de l'orifice de sortie et à tout instant.

2°. La fusée étant au repos par rapport à R_0 à l'instant $t=0$, calculer sa vitesse à l'instant t en fonction de $|\vec{v}|$, et des masses de la fusée $m(0)$ à l'instant $t=0$ et $m(t)$ à l'instant t.

3°. Déterminer la vitesse de la fusée en fonction du temps de sorte que le chemin parcouru entre les instantes $t=0$ et $t=T$ soit maximum, connaissant le rapport $k=\dfrac{m(0)}{m(T)}$ et sachant que l'accélération ne doit jamais dépasser une valeur donnée γ. Calculer en fonction de γ, V, k et T le chemin parcouru dans ces conditions. Donner la valeur du débit μ en fonction du temps.

Application numérique: on donne $k=e$ (base des logarithmes népériens), $v=100$ km/sec., $\gamma=8\,g$ (g étant l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre)· Quel sera le temps nécessaire pour parcourir une distance de $1{,}5\cdot 10^9$ km. (approximativement la distance de Saturne) ?

R : 1°.) *Par rapport au repère indiqué,* S *a un mouvement Poinsot, avec ellipsoïde d'inertie de révolution:* Oz *fait un angle constant* θ_0 *avec un direction fixe* Oz_0. *En projection sur* Oz_0, O *est soumis à une force constante* $f\cos\theta_0$*; sur un plan perpendiculaire,* O *est soumis à une force* $f\sin\theta_0$ *qui tourne d'un mouvement uniforme: le mouvement de* O *résulte d'un mouvement circulaire de même vitesse angulaire et d'accélération* $f\sin\theta_0$, *composé avec une translation rectiligne et uniforme arbitraire.*

2°.) *La 3.e équation d'Euler donne* $r=r_0$ *et les deux premières s'écrivent (si* $A\neq C$*) :*

$$\frac{dp}{dt}+\Omega q=0,\quad \frac{dq}{dt}-\Omega(p-b)=0,$$

avec $$\Omega=\frac{C-A}{A}r_0,\quad b=\frac{af\sin\alpha}{(C-A)\,r_0}.$$

On en tire

$$p=b+C\cos(\Omega t-\varphi),\quad q=C\sin(\Omega t-\varphi).$$

L'extrémité de $\vec{\omega}$ *décrit donc un cercle d'un mouvement uniforme dans un plan parallèle à* xOy. *Si* $p_0=b, q_0=0$, *il se réduit à son centre, et* $\vec{\omega}$, *fixe par rapport à* R, *est fixe par rapport à* R_0*; le mouvement de* S *est une rotation uniforme. En ce cas,* $\vec{f}$ *fait un angle constant avec* Oz_0, *et le mouvement de* O *est identique à celui du 1°.*

Si $A=C$, *l'extrémité de* $\vec{\omega}$ *décrit une droite.*

II. 1°. Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement entre les instants t *et* t+dt ($\vec{u}$ *désignant la vitesse de la fusée) :*

$$m\vec{u}=(m-\mu dt)(\vec{u}+d\vec{u})+\mu dt(\vec{V}+\vec{u}),$$

d'où

$$(1)\qquad m\,d\vec{u}+\mu\,dt\,\vec{V}=0,$$

Puisque $\vec{f}=m\dfrac{d\vec{u}}{dt}$, *on en déduit*

$$\frac{1}{\mu}\vec{f}+\vec{V}=0.$$

2°. *Tenant compte de* $\dfrac{dm}{dt}=-\mu$, (1) *donne* $m\,du=-V\,dm$, *d'où*

$$u=V\log\frac{m(0)}{m(t)}.$$

3°. *Il faut rendre maximum* $\int_0^T u\,dt$, *sorchant que* u *croit de* 0 *à* V Log k *quand* t *varie de* 0 *à* T *et que l'on a* $\dfrac{du}{dt}\leq\gamma$. *Il faut* $T\geq\dfrac{V\,\mathrm{Log}\,k}{\gamma}=t_1$, *et la solution est alors*

$u(t)=\gamma t$ *pour* $0<t<t_1$, $u(t)=$ *constante pour* $t>t_1$

Le chemin parcouru est

$$(2)\qquad L=\gamma\frac{t_1^2}{2}+\gamma t_1(T-t_1)=\gamma t_1\left(T-\frac{t_1}{2}\right).$$

On a $m(t)=m(0)\,e^{-u/v}$, *et le débit est*

$$\mu=-\frac{dm}{dt}=\frac{m(0)}{V}e^{-u/V}\frac{du}{dt}=\frac{m(0)}{V}\gamma\,e^{-\gamma t/V}$$

pour $0<t<t_1$ *et* $\mu=0$ *pour* $t>t_1$.

De (2) *on tire*

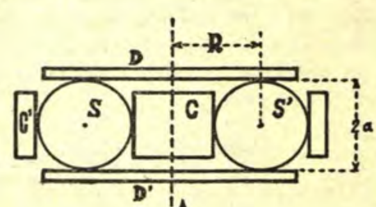
$$T=\frac{t_1}{2}+\frac{L}{\gamma^{t_1}}=\frac{V\,\mathrm{Log}\,k}{2\gamma}+\frac{L}{V\log k},$$

d'où le résultat numérique demandé, le 1.er terme étant négligeable vis-à-vis du 2eme.

MÉCANIQUE RATIONNELLE — **Epreuve Pratique — Alger, Mai 1947.** (durée 3 h).

2541 — Deux cylindres de révolution ont le même axe A; l'un C a pour rayon extérieur $R-a$ $(a<R)$, l'autre C' est creux et a pour rayon intérieur $R+a$; ils peuvent tourner autour de A.

Deux disques D et D' de même axe A peuvent également tourner autour de A. Deux sphères S et S'



de rayon a sont situées entre les disques et entre les cylindres; chacune d'elles est tangente à ces quatre solides en quatre points où le contact a lieu sans glissement.

On suppose que les disques et les cylindres ne se touchent pas, et que les deux sphères ne se touchent pas non plus. La figure ci-contre représente une coupe du système dans le cas où les centres des deux sphères sont dans un même plan passant par l'axe A, ce qu'on ne suppose pas nécessairement.

I. *Partie cinématique.* Montrer que le mouvement du système est possible en supposant seulement qu'il existe entre les vitesses angulaires ω de D, ω' de D', ω_1 de C et ω'_1 de C' une relation qu'on déterminera.

Application numérique: Quel est le rapport ω_1/ω'_1 si on suppose que D et C sont reliés par un mécanisme tel que $\omega'_1/\omega=2/3$ et que D' et C' sont reliés par un autre mécanisme tel que $\omega'/\omega_1=11$. On donne $a=10{,}1$ mm et $R=20$ mm.

II. *Partie dynamique.* On suppose que C, C', D, et D' peuvent tourner sans frottement autour de A, et que S et S' sont libres à part les contacts dont il a été question qui ont toujours lieu sans glissement et sans frottements de roulement ou de pivotement. On néglige les poids des divers solides. On suppose les sphères pleines, homogènes et de même masse m. On désigne par I, I', J et J' les moments d'inertie par rapport à l'axe A des solides D, D', C et C'.

1° Etudier le mouvement du système.

2° C et C' étant immobiles et D et D' en mouvement, on suppose que les trois solides C, D et D' sont brusquement liés de manière à constituer un solide unique, les différents contacts ayant toujours lieu sans glissement. Connaissant les vitesses angulaires de D et D' avant le choc, en déduire les vitesses du système après le choc.

Enunciados e soluções dos n.^{os} 2540 e 2541 do Prof. René de Possel.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do Autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os Autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2542 — Mostre que

$$\sum_{p=0}^{m-1} \frac{p\,!}{(n+p)\,!} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)\,!} - \frac{m\,!}{(m+n-1)\,!}\right)$$

2543 — Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}(p\,!)^{r/p} \Big/ \sum_{p=1}^{n} p^r\right) = e^{-r}.$$

2544 — Dados num plano α um ponto P e três rectas a, b e c, construir um triângulo rectângulo isósceles cuja hipotenusa passe por P e tenha um vértice em cada uma das rectas dadas.

2545 — Considere os seguintes trinómios:

$P_2 = 1-ax+bx^2$.
$P_4 = 1-(a^2-2b)\,x^2+b^2\,x^4$.
$P_6 = 1-(a^3-3ab)\,x^3+b^3\,x^6$.
$P_8 = 1-(a^4-4a^2\,b+2b^2)\,x^4+b^4\,x^8$.
$P_{10} = 1-(a^5-5a^3\,b+5a\,b^2)\,x^5+b^5\,x^{10}$.
$P_{12} = 1-(a^6-6a^4\,b+9a^2\,b^2-2b^3)\,x^6+b^6\,x^{12}$.
$P_{14} = 1-(a^7-7a^5\,b+14a^3\,b^2-7a\,b^3)\,x^7+b^7\,x^{14}$.
. . . .

onde o coeficiente c_n $(n>2)$ de $-x^n$, no polinómio P_{2n} é dado por $c_n = ac_{n-1} - bc_{n-2}$.

Prove que P_{2n} divide P_{2m} se n divide m.

(De Howard D. Grossman, *Scripta Mathematica*, vol. IX, 1943, págs. 59-60).

Problemas n.^{os} 2542 a 2544 propostos por José Morgado J.^{or}.

REVISTAS RECEBIDAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Ano XX, n.^{os} 1 a 8 — 1947.

Mathematicae Notae — (Rosario) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Año 6 — Fascs. 3 e 4 — 1946; Año 7 — Fasc. 1 (1947).

Revista de la Union Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Vol. XII — n.^{os} 3, 4 e 5 — 1947.

Brasil

Boletim da Sociedade Matemática de S. Paulo — Vol. 1, fasc. 1 — 1946.

Revista Politécnica — (S. Paulo) — n.° 151 — 1946.

Summa Brasiliensis Mathematicae — (Fundação Getulio Vargas — Rio de Janeiro) — Vol. 1 — 1946:

Fasc. 1. *La notion de fonction continue* por Antonio Monteiro e Hugo Ribeiro.

Fasc. 2. *Sôbre uma modificação da fórmula de Cauchy* por Omar Catunda.

Fasc. 3. *On linear expansions. II* por Leopoldo Nachbin.

Fasc. 4. *Sur quelques résultats de Siegel* por André Weil.

Fascs. 5 e 6 — *Classical theory of the point electron* por Mario Schönberg.

Fasc. 7 — *Limites d'ensembles dans les espaces abstraits* por Lélio I. Gama.

Cuba

Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matematicas — (Habana—Cuba) — Vol. 2 — n.º 3 —1946.

Espanha

Acta Salmanticensia —Universidad de Salamanca — Ciencias: Sección de Matemáticas.

II — *Birrational Invariants of Algebraic Manifolds* por B. L. van der Waerden.

Euclides — (Madrid)—Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones Técnicas — n.os 68 a 70—1946; n.os 71 a 77 — 1947.

Matemática Elemental — (Madrid) —Revista publicada por el Instituto de «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série — Tomo VII (1947) n.os 1 a 6.

Revista Matemática Hispano-Americana, publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemática y la Real Sociedad Matemática Española — Tomo VII (1947) — n.º 2 a 6.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Mathematica — New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics — Vol. XII, n.os 3 e 4 (1946).

França

Annales de l'Université de Grenoble. (Nouvelle Série) — Section des Sciences Mathématiques et Physiques — Tomo XXII (1946).

Bulletin Astronomique, publié par l'Observatoire de Paris — Tome XIII, fascs. 1, 2 e 3 (1947).

Congrès de la Victorie — Association Française pour l'Avancement des Sciences — 64me session — Paris — 20 au 26 Octobre 1945 — Supplément au fasc. 9 de l'Intermédiaire des Recherches Mathématiques.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sujets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tome 3, fascs. 10 e 11, (1947).

Revue générale des Sciences pures et appliquées — (Paris) — Tome LIII — n.os 1 à 11 — 1946; Nouvelle Série T. LIV n.os 1 à 5 — 1947.

Inglaterra

The Mathematical Gazette — (London) — edited by the Mathematical Association — Vol. 31, n.os 293 a 296 (1947).

Portugal

Agros — (Lisboa) — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVIII — n.os 5-6 — 1945.

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática — Série A — Vol. 1, n.º 1 (1947). — Série B — Vol. 1, n.º 1 (1947).

Gazeta de Física — (Lisboa) — Revista dos Estudantes de Física e dos Físicos e Técnico-Físicos Portugueses — Vol. 1, fasc. 2, 3, 4 e 5 — 1947.

Instituto dos Actuários Portugueses — Boletim — Ano I — n.º 1 (Junho, 1946) — Lisboa. Ano II — n.º 2 (Junho 1947) — Lisboa.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenheiros dos Alunos do I. S. T. — n.os 172 a 177 — 1947.

Vértice — (Lisboa) — Revista de cultura e arte — Vol. III — n.º 45; Vol. IV — n.º 46 a 51.

Suiça

Elemente der Mathematik — (Basel) Band I — n.º 6 (1946); Band II — n.os 1 a 6 (1947).

CORRECÇÕES

Ao último artigo sobre o cálculo simbólico publicado no n.º 33 da *Gazeta de Matemática* há que fazer as seguintes correcções: na página 4, 1.ª coluna, linhas 24 e 25, deve substituir-se x por $x-a$; na pág. 5, 2.ª coluna, linha 35, deve substituir-se $\lim_{n} \varphi_n$ por $\lim_{n} f_n(\Phi)$; na pág. 6, 2.ª coluna, linha 4, deve substituir-se $\varphi(x, y)$ por $\varphi(0, y)$; na mesma pág. e coluna, linha 14 e na pág. 7, 1.ª coluna, linha 6, deve substituir-se $\varphi(a, y)$ por $\varphi(0, y)$.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará quatro números por ano.
Preço: 10 escudos cada número

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de 30 escudos, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automáticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Tôdas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes: 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 23 cada 6,50 escudos; 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 33 cada 10 escudos; n.os 1-4, 2.a ed., 40 escudos.

COLECÇÕES COMPLETAS

O pequeno número de colecções completas ainda existentes destina-se a bibliotecas de escolas e estabelecimentos oficiais sendo a sua venda feita ao preço de 330 escudos (colecção dos 30 primeiros números).

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição dêstes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.

1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.

2.º exame de frequência — número de Maio.

Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

2.a EDIÇÃO DO VOL. 1 (N.os 1 a 4)

Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções, no formato e características actuais e com textos cuidadosamente revistos. À nova edição do primeiro ano seguir-se-á a do segundo ano, também com o texto revisto e no formato actual.

Preço da 2.a edição do volume 1: 40 escudos.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

---

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N