GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IX **N.° 35** FEVEREIRO-1948

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*   ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

ANO VIII-N.º 35 GAZETA DE MATEMÁTICA FEVEREIRO-1948

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação

por *J. Sebastião e Silva*

No célebre programa de Erlangen [1], mostrou FELIX KLEIN como o conceito de transformação permite iluminar a interdependência lógica dos diversos conceitos da geometria, sugerindo novas conexões e conduzindo a uma visão do mundo geométrico, que é a mais penetrante, a mais racional e a mais dominadora a que se possa chegar. As ideias de F. KLEIN neste campo foram também fecundamente exploradas por SOPHUS LIE e por HENRI POINCARÉ — e a elas anda indissolùvelmente ligado o nome de ÉVARISTE GALOIS, que tinha anteriormente introduzido o conceito de «grupo», para o estudo da resolubilidade algébrica das equações.

Não se limitaram estas pesquizas ao domínio da geometria elementar, nem se reduziram a um simples trabalho de classificação. Com a contribuição de vários investigadores, entre os quais é forçoso destacar o nome de ÉLIE CARTAN, tem sido possível chegar a resultados de ampla projecção, mesmo fora do campo da matemática. As aplicações destes resultados à física e, em particular, à teoria da relatividade, não podem hoje de nenhum modo passar despercebidas. É bem significativo o facto [2] de, algum tempo antes da guerra, em Liège, ter sido concedido por unanimidade o prémio MONTEFIORE a um engenheiro americano, GABRIEL KRON, que mostrou como o uso das geometrias mais gerais, aliado ao emprego do cálculo matricial e tensorial, permite simplificar e generalizar a resolução de importantes problemas de electrotecnia, relativos à construção de máquinas de corrente contínua ou de corrente alterna [1].

Os artigos que vou aqui publicar sobre este assunto terão carácter elementar e divulgativo. Eles são dedicados aos estudantes de matemática das nossas universidades, aos quais me pareceu que poderiam ser de algum auxílio no estudo da geometria, constituindo, ao mesmo tempo, um pretexto para os pôr em contacto com os problemas empolgantes da filosofia da matemática. Na apresentação dos assuntos, e em certas demonstrações, poderá também o leitor mais informado encontrar aqui alguma novidade.

1. Os conceitos primitivos da geometria euclideana. É um facto geralmente conhecido que, em geometria elementar, como em qualquer ciência dedutiva, é necessário fixar como *primitivas* ou *indefiníveis* certas noções, a partir das quais é possível depois definir formalmente todas as outras noções que se apresentam no desenvolvimento lógico da teoria — chamadas, por isso mesmo, *noções derivadas*. Todavia, este facto só ficou devidamente esclarecido com a análise lógica das geometrias empreendida em fins do século passado por vários matemáticos, entre os quais HILBERT em lugar proeminente [2].

Foi assim possível *demonstrar* que, tomando como elemento genérico do espaço o *ponto*, e considerando portanto as rectas e os planos como particulares con-

(1) Programa exposto por F. KLEIN ao tomar posse duma cátedra da Universidade de Erlangen, em 1872.

(2) Citado por LANGEVIN na sua última conferência, de que se publicou um extrato no n.º 31 da *Gazeta de Matemática* (pág. 16),

(1) De G. KRON é conhecida em Portugal entre outras a obra *Tensor Analysis of networks*, WILEY, New York, 1939 (duma série escrita no interesse do *Advanced Course in Engineering of the General Electric Company*).

(2) Será brevemente publicada uma tradução portuguesa da obra de HILBERT «Grundlagen der Geometrie».

juntos de pontos, se podem adoptar como noções primitivas da geometria euclideana, *por exemplo*, a de «recta», a de «situado entre» e a de «igualdade de distâncias» (sem falar já do conceito de «ponto», nem dos conceitos lógico-formais comuns a todas as ciências dedutivas).

Em vez da noção de «recta» (como conjunto de pontos), preferem ainda alguns autores tomar para primitiva a noção de «colinearidade», referida a grupos de três pontos. Como se sabe, dizer que três pontos A, B, C são *colineares*, equivale a dizer que existe uma recta que os contém. Para indicar que esta propriedade é verificada, faremos uso da expressão simbólica [1]

$Rt(A, B, C)$ (ler: «A, B, C são colineares»).

Trata-se portanto aqui duma *relação ternária*, isto é, duma propriedade relativa a *ternos* de pontos.

Um outro exemplo de relação ternária é aquela a que se refere a expressão «situado entre». Para indicar que, sendo A, B, M três pontos colineares, o ponto M está *situado entre* A e B, escreveremos. simbòlicamente

$Tr(M; A, B)$ (ler: «M está situado entre A e B»)

Finalmente, a noção de «igualdade de distâncias» consiste em saber quando é que, a respeito de quatro pontos A, B, C, D, se diz que *a distância de A a B é igual à distância de C a D*; facto que podemos traduzir mais brevemente pela expressão:

$$dist(A, B) = dist(C, D).$$

Trata-se portanto duma *relação quaternária*. Veremos contudo mais adiante que, em vez desta relação, basta tomar como primitiva a noção de «equidistância», aplicada a grupos ordenados de três pontos. Para indicar que dois pontos A e B são *equidistantes* dum terceiro ponto C ou (o que é o mesmo) que o ponto C é *equidistante* de A e de B, usaremos a abreviatura:

$Eq(A, B; C)$ (ler: «A e B são equidistantes de C»).

Posto isto, importa observar que as três referidas noções (correspondentes aos símbolos «Rt», «Tr» e «Eq») não são ainda independentes entre si. Assim, por exemplo, a noção de colinearidade pode ser definida a partir da noção de equidistância: «Diz-se que três pontos distintos A, B, C são *colineares*, quando não existe nenhum ponto que seja equidistante de A, de B e de C; isto é, quando não existe nenhum ponto X tal que se tenha ao mesmo tempo: $Eq(A, B; X)$, $Eq(B, C; X)$». (É preciso não perder de vista que, enquanto nada se diga em contrário, estas considerações se referem ao *espaço euclideano*, isto é, ao conjunto de todos os pontos possíveis na geometria de EUCLIDES — conjunto que designaremos por R_3).

Por outro lado, teremos a oportunidade de ver que a relação de «situado entre» é — por muito estranho que tal pareça — lògicamente exprimível na relação de colinearidade. E deste modo chegaremos à conclusão de que a *noção de equidistância pode ser tomada como única noção primitiva da geometria euclideana.* Todavia, quando se trata de desenvolver sistemàticamente a geometria euclideana a partir dos postulados, revela-se *mais cómodo*, e sobretudo *mais natural*, assumir como primitivas as três referidas noções: a de «colinearidade» (ou de «recta»), a de «situado entre» e a de «equidistância».

2. Noções métricas e noções afins. Chamam-se *noções afins* ou *descritivas* aquelas noções da geometria euclideana que podem ser definidas partindo ùnicamente das noções de «recta» e de «situado entre» [1].

Dizem-se *métricas* as noções euclideanas em que intervem necessàriamente o conceito de equidistância.

Importa desde logo observar que, além das noções métricas euclideanas (que poderíamos também denominar *noções métricas relativas*), há ainda a considerar as *noções métricas absolutas*. Quando eu digo, por exemplo, que um dado segmento mede 5 cm, enuncio uma propriedade métrica absoluta, visto que não é possível, de modo nenhum, definir o conceito de «centímetro» a partir do conceito de «igualdade de distâncias»; mas se eu disser, por exemplo, que a *razão* entre um dado segmento $\overline{AB}$ e um dado segmento $\overline{CD}$ é igual a 5/3, então sim, terei afirmado um facto respeitante à geometria euclideana. É interessante notar ainda que — ao contrário do que sucede com as unidades de medida de segmentos — as unidades de medida de ângulos (grau, radiano, etc.) constituem noções métricas euclideanas.

Chama-se *geometria afim* aquela parte da geometria euclideana que se limita ao estudo das noções afins. Entre estas, apresentam se em primeiro lugar a noção de «plano» e a de «paralelismo»: «Dadas duas rectas a e b distintas, com um ponto comum M, chama-se *plano* definido por a e por b, ao conjunto dos pontos de todas as rectas que intersectam ao mesmo tempo a e b em pontos distintos de M [2]. Duas rectas dizem-

[1] Em vez do símbolo «Rt», usa HILBERT o símbolo «Gr» (de «Gerade», *recta*) e, em vez do símbolo «Tr» que introduzimos mais abaixo, usa o símbolo «Zw» (de «zwischen», *entre*). Veja-se HILBERT und BERNAYS, «Grundlagen der Mathematik» Springer, Berlim, 1934.

[1] É claro que, sendo a noção de «situado entre», como veremos adiante, definível a partir da noção de «recta», bastará definir *noções afins* como aquelas noções geométricas que se podem exprimir lògicamente na noção de colinearidade.

[2] Os planos são pois todos os conjuntos de pontos assim gerados, *e só esses*.

-se *paralelas* quando, pertencendo a um mesmo plano, ou não têm nenhum ponto comum ou são coincidentes». Como se vê, não chega a intervir nestas definições o conceito de «equidistância», nem sequer o de «situado entre».

São ainda noções afins as de «semi-recta», «semi-plano», «segmento de recta», «polígono», etc., que se reduzem imediatamente às noções de «recta» e de «situado entre». Mas não é uma noção afim a de «igualdade de segmentos»: «Dizer que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *iguais* (ou *congruentes*) equivale a dizer que $dist\,(A\,,B) = dist\,(C, D)$». Para indicar que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são iguais, podemos também escrever $\overline{AB} = \overline{CD}$ [1].

Observe-se todavia o seguinte facto, de importância capital para o que segue: *O conceito de igualdade de segmentos só é um conceito métrico enquanto referido a segmentos não paralelos (isto é, não pertencentes a rectas paralelas), reduzindo-se a conceito afim, quando aplicado a segmentos duma mesma recta ou de rectas paralelas.* Com efeito, sabe-se que: 1) dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ contidos em rectas paralelas não coincidentes, dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *iguais*, equivale a dizer que eles são os lados opostos dum paralelogramo (isto é, equivale a dizer que se verifica uma, pelo menos, das relações: $AC//BD$, $AD//BC$); 2) dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ contidos numa mesma recta r, dizer que $\overline{AB} = \overline{CD}$, equivale a dizer que existe pelo menos um terceiro segmento $\overline{EF}$, contido numa recta s paralela a r (mas distinta de r), de modo que se tenha, simultâneamente: $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{CD} = \overline{EF}$. [2]

Uma consequência fundamental deste facto é a seguinte: *O conceito de «razão entre dois segmentos» reduz-se a conceito afim, quando referido a segmentos paralelos.* Com efeito, recordemos as seguintes definições: «Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$: 1) diz-se que $\overline{AB} = n\cdot\overline{CD}$ (com n inteiro), quando existem $n+1$ pontos *distintos* $P_0\,, P_1\,,\cdots, P_n$, pertencentes à recta AB, tais que: $P_0 \equiv A$, $\overline{P_0P_1} = \overline{P_1P_2} = \cdots = \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{CD}$, $P_n \equiv B$; 2) diz-se que $\overline{AB} = m/n\,.\,\overline{CD}$ (com m e n inteiros) quando existe pelo menos, um terceiro segmento $\overline{EF}$ tal que: $\overline{AB} = m\cdot\overline{EF}$, $\overline{CD} = n\cdot\overline{EF}$; 3) diz-se que $\overline{AB} = \alpha\cdot\overline{CD}$ (com α irracional), quando, dado um número racional r qualquer, se tem: $\overline{AB} > r\cdot\overline{CD}$ ou $\overline{AB} < r\cdot\overline{CD}$, conforme for $\alpha > r$ ou $\alpha < r$» [1]. Ora é fácil ver, depois do que atrás foi dito, que, *tratando-se de segmentos paralelos*, as definições precedentes não exigem outros conceitos primitivos além dos de «recta» e de «situado entre» (as duas primeiras não exigem sequer o conceito de «situado entre»).

Em particular, são noções afins: a de «paralelogramo», a de «trapézio», a de «ponto médio dum segmento», a de «baricentro dum triângulo» (ponto de intersecção das medianas), a de «figuras homotéticas entre si», etc. etc. Mas já a noção de «ortocentro dum triângulo» (ponto de concurso das alturas), a de «circunferência», a de «triângulo escaleno», a de «losango» a de «perpendicularidade», a de «ângulo agudo», etc. etc. — são noções euclideanas não afins, como teremos ocasião de verificar.

3. Transformações pontuais. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ dois conjuntos de pontos quaisquer. Chama-se *transformação pontual unívoca de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}^*$* toda a operação Φ que faça corresponder a cada ponto P de $\mathcal{A}$, um *e um só*, ponto P^* de $\mathcal{A}^*$, chamado a *imagem* ou o *transformado* de P *por meio de* Φ, e que se poderá designar pelo símbolo $\Phi\,(P)$:

$$P^* \equiv \Phi\,(P)\,.$$

O ponto variável P^* de $\mathcal{A}^*$ dir-se-á ainda *função unívoca* do ponto variável P de $\mathcal{A}$. Quando se tem $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^*$, diz-se que Φ é uma transformação unívoca do conjunto *$\mathcal{A}$ sobre si mesmo.*

A transformação unívoca Φ de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}^*$ dir-se-á uma transformação *biunívoca* ou *reversível* (de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}^*$), quando, para cada ponto P^* de $\mathcal{A}^*$, existir *um, e um só,* ponto P de $\mathcal{A}$, do qual P^* seja a imagem por meio de Φ; isto é, tal que $\Phi\,(P) \equiv P^*$. Em tal hipótese, chama-se transformação *inversa* de Φ, e representa-se por Φ^{-1}, a transformação de $\mathcal{A}^*$ sobre $\mathcal{A}$ que faz passar de P^* para P; em símbolos:

$$P \equiv \Phi^{-1}\,(P^*)\,.$$

Exemplos: 1) Seja $\mathcal{A}$ o espaço inteiro, isto é: $\mathcal{A} \equiv R_3$, e seja $\mathcal{A}^*$ um plano α qualquer, isto é: $\mathcal{A}^* \equiv \alpha$. Se fizermos corresponder a cada ponto P do espaço a sua projecção P' sobre α, segundo uma direcção determinada d (não paralela a α), a correspondência $P \rightarrow P'$ assim definida será uma transfor-

---

[1] Transigimos aqui com a tradição, usando o sinal «=» para exprimir *igualdade euclideana* (ou *congruência*) e o sinal «≡» para exprimir *coincidência* (ou *identidade*). Todavia, modernamente, usa-se o sinal «=» para exprimir *identidade* e um outro sinal para exprimir *igualdade geométrica*.

[2] É assim que se reconhece o facto (a que já atrás aludimos) de ser possível tomar como primitiva a relação ternária de equidistância, em vez da relação de igualdade de distâncias referida a dois pares de pontos.

[1] Como se sabe, dados dois segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, diz-se que $\overline{MN} < \overline{PQ}$, quando existe um ponto N^* *situado entre* P e Q tal que $\overline{PN^*} = \overline{MN}$.

mação unívoca de R_3 sobre α; mas não uma transformação biunívoca de R_3 sobre α, porque, dado um ponto M qualquer de α, existem infinitos pontos de R_3 cujas projecções coincidem com M: todos os pontos da recta projectante que passa por M.

2) Sejam agora dois planos quaisquer, α e β. A operação Φ que faz corresponder, a cada ponto P de α, a projecção P' desse ponto sobre β segundo uma determinada direcção d (não paralela a nenhum dos planos), é visivelmente uma transformação biunívoca de α sobre β, cuja transformação inversa, Φ^{-1}, é a que consiste em passar, de cada ponto de β, para a projecção desse ponto sobre α, segundo a *mesma* direcção d.

3) Exemplos notáveis de transformações biunívocas do espaço R_3 sobre si mesmo ou dum plano sobre si mesmo são as *homotetias*, as *rotações*, as *translações* e as *simetrias*: *a*) Chama-se homotetia de *centro* O e de *razão* r a transformação que faz corresponder a cada ponto $P \neq O$ o ponto P^* tal que $\overline{OP^*}/\overline{OP} = |r|$, ficando P e P^* do mesmo lado ou de lados opostos a respeito de O, conforme r for positivo ou negativo; ao ponto O corresponderá o próprio ponto O, o que se exprime dizendo que O é *invariante* para a transformação considerada [1]. *b*) Chama-se translação definida pelo *segmento orientado* $\overrightarrow{AA^*}$ a transformação que faz corresponder a cada ponto P o ponto P^* tal que os segmentos $\overrightarrow{PP^*}$ e $\overrightarrow{AA^*}$ resultem *equipolentes* (isto é, com o mesmo *comprimento*, a mesma *direcção* e o mesmo *sentido*) [2]. *c*) Chama-se rotação do plano, de *centro* O e de *amplitude* θ, a transformação que deixa o ponto O invariante e transforma cada ponto $P \neq O$ no ponto P^* tal que: $dist\,(P^*, O) = dist\,(P, O)$, $P\hat{O}P^* = \theta$. [3] Quanto às rotações do espaço em torno dum *eixo*, a definição é análoga. *d*) Cada simetria é, como se sabe, definida por um ponto, por uma recta ou por um plano.

4. Transformações afins. Seja Θ uma correspondência pontual biunívoca entre dois planos α e α^* (distintos ou coincidentes) ou entre o espaço inteiro R_3 e ele mesmo. Diz-se que Θ é uma *transformação afim* ou uma *afinidade*, quando respeita a relação de colinearidade, isto é, quando transforma pontos A, B, C colineares em pontos A^*, B^*, C^* ainda colineares — o que, em símbolos, se pode exprimir do seguinte modo:

(1) $$Rt\,(A, B, C) \rightarrow Rt\,(A^*, B^*, C^*),$$ [1]

sendo

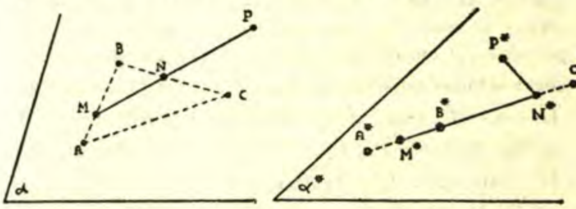
$$A^* \equiv \Theta(A),\ B^* \equiv \Theta(B),\ C^* \equiv \Theta(C).$$

Exemplo duma transformação afim é a projecção dos pontos dum plano α sobre um outro plano β, segundo uma direcção d que não seja paralela nem a α nem a β. São afinidades as homotetias, as rotações, as translações e as simetrias; mas estas, além da relação de colinearidade, respeitam ainda a relação de equidistância (chamam-se por isso *transformações euclideanas* ou *de semelhança*), o que já não acontece geralmente, a respeito da projecção paralela dos pontos dum plano sobre outro plano.

Já especificámos que as afinidades são tranformações pontuais entre dois planos ou entre o espaço R_3 e ele mesmo. No segundo caso, a afinidade dir-se-á *espacial* ou *sólida* [2]; exemplos de tais afinidades são as homotetias espaciais, as simetrias oblíquas em relação a um plano, etc., etc.

Teorema. *A transformação inversa duma afinidade (biunívoca) é ainda uma afinidade* [3].

(Demonstraremos este teorema apenas para o caso das afinidades entre dois planos; para o caso das afinidades sólidas, a demonstração pode fazer-se de modo análogo). Sejam pois α e α^* dois planos quaisquer, distintos ou coincidentes, e seja Θ uma transformação afim (reversível) de α sobre α^*. Suponhamos, por um momento, que a transformação Θ^{-1} não é uma afinidade: quer isto dizer que existem pelo menos três pontos *colineares* A^*, B^*, C^* de α^*, os quais são trans-



formados por Θ^{-1} em três pontos A, B, C (de α) *não colineares* (fig. 1). Mas seja então P^* um ponto de α^* não pertencente à recta A^*B^* $(\equiv B^*C^*)$. É claro

(1) É claro que, se for $r=1$, todos os pontos serão invariantes, e então a homotetia será a chamada «transformação idêntica» ou «identidade». Notemos ainda que a transformação inversa da homotetia de centro O e de razão r é, precisamente, a homotetia de centro O e de razão $1/r$.

(2) É fácil ver que a transformação inversa da translação definida por $\overrightarrow{AA^*}$ é a translação definida por $\overrightarrow{A^*A}$. É claro que, se for $A \equiv A^*$, a translação se reduz à identidade.

(3) A transformação inversa da rotação de centro O e de amplitude θ é a rotação de centro O e de amplitude $-\theta$. Se $\theta=0$, a rotação reduz-se à identidade.

(1) O sinal «$\rightarrow$» deve ler-se «implica».

(2) Muitos autores chamam *afinidade espacial* à transformação afim entre dois planos distintos, reservando a denominação «afinidade plana» para o caso das transformações afins dum plano sobre si mesmo.

(3) Quando nada se diga em contrário, subentende-se que as afinidades são transformações reversíveis.

que o ponto P de α, correspondente ao ponto P^* de α^* (segundo Θ^{-1}) não pode pertencer a nenhuma das rectas AB, AC e BC, de contrário o ponto P^* (sendo Θ uma afinidade) pertenceria a $A^* B^* (\equiv B^* C^*)$ — contra o que supusemos. Por outro lado, se P não pertence a nenhuma das rectas AB, AC e BC, será sempre possível conduzir por P uma recta que encontre em dois pontos *distintos* M, N duas das rectas AB, AC e BC (por exemplo, AB e BC) e, como os transformados M^*, N^* de M, N por meio de Θ devem pertencer a $A^* B^* (\equiv B^* C^*)$, também P^* deveria pertencer a $A^* B^* (\equiv M^* N^*)$ — o que é ainda contrário ao que supusemos. Tem-se pois que a transformação biunívoca Θ^{-1} de α^* sobre α não pode deixar de ser uma afinidade. q. e. d.

Podemos ainda exprimir este teorema dizendo que as afinidades respeitam *nos dois sentidos* ou deixam *invariante* a relação de colinearidade, e poderemos escrever, em vez de (1), a condição mais explícita

$$(2) \qquad Rt(A, B, C) \rightleftarrows Rt(A^*, B^*, C^*),$$

que é, como acabámos de ver, equivalente a (1).

Ora o estudo das geometrias mediante o conceito de transformação assenta precisamente sobre o seguinte

Princípio fundamental. *Se uma transformação biunívoca respeita nos dois sentidos uma dada noção ou um dado conjunto de noções, respeita necessàriamente qualquer outra noção que se possa definir lògicamente a partir das primeiras. Recìprocamente, se uma noção é respeitada por todas as transformações biunívocas que deixam invariantes as noções dadas, ela será lògicamente exprimível a partir destas* [1].

Deste modo, qualquer noção afim será respeitada por todas as possíveis transformações afins, visto que as noções afins são, *por definição*, todas aquelas que se podem exprimir lògicamente no conceito de colinearidade (admitindo já que o é também a noção de «situado entre») e as transformações afins são, *por definição*, precisamente aquelas que respeitam a noção de colinearidade. Tem-se pois que *toda a transformação afim deve transformar planos em planos, rectas paralelas entre si em rectas paralelas entre si, o ponto médio dum segmento no ponto médio do transformado desse segmento, o baricentro dum triângulo no baricentro do transformado desse triângulo*, etc., etc.

Se quisermos demonstrar directamente, prescindindo do anterior princípio fundamental, que um dado conceito afim é respeitado por todas as transformações afins, não temos mais do que seguir *pari passu* a definição desse conceito. Seja, por exemplo, a noção de «paralelismo»: consideremos uma transformação afim, Θ, entre dois planos α e α^*, e proponhamo-nos demonstrar que Θ transforma necessàriamente rectas paralelas entre si em rectas paralelas entre si; suponhamos então, por um momento, que tal não acontece, isto é, que existem duas rectas a, b de α, *paralelas entre si*, as quais são transformadas por Θ em duas rectas a^*, b^* (de α^*) *não paralelas entre si:* quere isto dizer, *segundo a definição de paralelismo*, que as rectas a^*, b^* terão um (e um só) ponto comum P^*; mas, sendo assim, também as rectas a, b devem ter um, e um só, ponto comum, que será o ponto $P \equiv \Theta^{-1}(P^*)$: ora isto é contrário à hipótese de ser a paralela a b.

Este e outros exemplos dão uma idea de qual possa ser o espírito duma demonstração geral do anterior princípio, pelo menos no que se refere à sua primeira parte.

Consideremos agora a noção de «igualdade de segmentos». É um facto bem conhecido que, em projecção paralela, dois segmentos iguais entre si, exceptuadas posições particulares, se projectam segundo dois segmentos desiguais — o que significa, portanto, segundo o anterior princípio, que *o conceito geral de igualdade de distâncias não é redutível ao de colinearidade.* Existe portanto toda uma classe de noções euclideanas não afins (a que já no n.º 2 chamámos *noções métricas*); tais são, por exemplo — além da noção geral de equidistância — a de perpendicularidade, a de bissectriz dum ângulo, a de losango, a de baricentro dum triângulo, etc., etc. Que estas noções não são afins, podemos reconhecê-lo agora, observando que não são necessàriamente respeitadas por projecção paralela.

Todavia, como já vimos no n.º 2, a noção de igualdade de segmentos (e portanto a de razão entre dois segmentos) reduz-se a conceito afim, quando referido a segmentos paralelos. Tem-se pois que *a razão entre dois segmentos paralelos é necessàriamente respeitada por toda a transformação afim.*

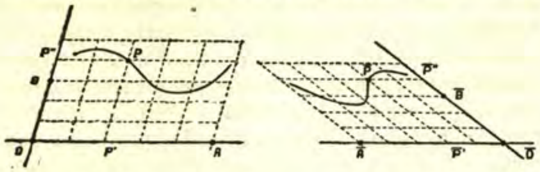
5. Determinação de todas as possiveis transformações afins. Consideremos um plano α qualquer e, sobre α, três pontos O, A, B, *não colineares*, fixados ao arbitrio (fig. 2).

Sendo agora P um ponto qualquer de α, designemos por P' a projecção de P sobre OA paralelamente a OB, e por P'' a projecção de P sobre OB paralelamente a OA; designemos ainda por x a razão $\overline{OP'}/\overline{OA}$, afectada do sinal + ou −, conforme A e P' estiverem do mesmo lado ou de lados opostos em rela-

---

[1] É este um teorema pertencente a um novo ramo da matemática, chamado *metamatemática* ou *sintaxe*. No que se refere à sua primeira parte, a veracidade desta proposição pode ser reconhecida mesmo intuitivamente. Exemplo dum outro teorema de metamatemática é o princípio da dualidade da geometria projectiva.

ção a O, e por y a razão $\overline{OP''}/\overline{OB}$, afectada do sinal $+$ ou do sinal $-$ conforme P'' e B estiverem do mesmo lado ou de lados opostos em relação a O. Diremos então que x, y são, respectivamente a 1.ª e a



2.ª *coordenada* (ou a *abscissa* e a *ordenada*) do ponto P a respeito do *referencial* $[OAB]$. Assim, por exemplo, no caso da fig. 2, tem-se $x=2/5$, $y=4/3$.

Deste modo, a cada ponto P de α, ficará a corresponder *um, e um só*, par ordenado (x, y) de números reais; reciprocamente, para cada par ordenado (x,y) de números reais existirá *um, e um só*, ponto P de α que admite x, y como abscissa e ordenada a respeito de $[OAB]$. Além disso, a relação de colinearidade poderá agora ser traduzida por meio das coordenadas, *de maneira independente do referencial considerado:*

Dados três pontos de α, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, *condição necessária e suficiente para que* P_1, P_2, P_3 *sejam colineares é que se tenha*

$$(y_1-y_3)/(x_1-x_3)=(y_2-y_3)/(x_2-x_3). \tag{3}$$

Esta proposição é uma consequência imediata do teorema de Tales e do seu recíproco.

Consideremos agora um outro plano, $\bar\alpha$ (podendo ser, em particular, $\alpha\equiv\bar\alpha$), e seja Θ uma afinidade de α sobre $\bar\alpha$. Em tal hipótese, os pontos *não colineares* O, A, B, serão transformados por Θ em pontos *não colineares* $\bar O, \bar A, \bar B$; por outro lado, sendo $\bar P$ o transformado de P por meio de Θ, as projecções P', P'' de P, respectivamente, sobre OA e sobre OB, paralelamente a OB e a OA, serão transformadas, respectivamente, nas projecções $\bar P'$ e $\bar P''$ de $\bar P$ sobre $\bar O\bar A$ e sobre $\bar O\bar B$, paralelamente a $\bar O\bar B$ e a $\bar O\bar A$ (visto que a relação de paralelismo é respeitada por Θ). Deste modo, atendendo a que razão entre dois segmentos de um mesma recta é uma propriedade afim, chega-se finalmente à conclusão de que as coordenadas de $\bar P$ em relação ao referencial $[\bar O\,\bar A\,\bar B]$ coincidem com as coordenadas x, y de P em relação a $[OAB]$. *A afinidade* Θ *fica portanto determinada uma vez conhecidos os pontos* $\bar O, \bar A, \bar B$ *de* $\bar\alpha$ *em que são transformados por* Θ *os pontos do referencial* $[OAB]$ *de* α: *basta fazer corresponder, a cada ponto* P *de* α, *o ponto* $\bar P$ *de* $\bar\alpha$, *cujas coordenadas em relação a* $[\bar O\,\bar A\,\bar B]$ *são precisamente as mesmas que as de* P *em relação a* $[OAB]$.

Reciprocamente, tomados três pontos não colineares $\bar O, \bar A, \bar B$ *sobre* $\bar\alpha$, *completamente ao arbítrio, existe sempre uma, e uma só, transformação afim* Θ *de* α *sobre* $\bar\alpha$, *tal que* $\bar O\equiv\Theta(O)$, $\bar A\equiv\Theta(A)$, $\bar B\equiv\Theta(B)$: *e é a transformação que faz corresponder a cada ponto* P *de* α, *o ponto* $\bar P$ *de* $\bar\alpha$ *cujas coordenadas em relação a* $[\bar O\,\bar A\,\bar B]$ *são precisamente as mesmas que as de* P *em relação a* $[O\,A\,B]$. A transformação Θ assim definida respeita efectivamente a relação de colinearidade: dizer que três pontos P_1, P_2, P_2 de α são colineares equivale a dizer que as suas coordenadas em relação a $[OAB]$ verificam a igualdade (3); mas as coordenadas das imagens $\bar P_1, \bar P_2, \bar P_3$ destes pontos, em relação a $(\bar O\,\bar A\,\bar B)$, coincidem, por hipótese, respectivamente com as de P_1, P_2, P_3 em relação a $[OAB]$; ora, como já atrás observámos, a maneira por que a condição de colinearidade se traduz mediante as coordenadas é independente do referencial adoptado. Tem-se pois: $Rt(P_1, P_2, P_3) \rightleftarrows Rt(\bar P_1, \bar P_2, \bar P_3)$.

Ficam assim determinadas todas as possíveis afinidades (reversíveis) entre dois planos. Anàlogamente se determinam todas as possíveis afinidades entre o espaço R_3 e ele mesmo: neste caso, cada referencial deve ser constituído por quatro pontos O, A, B, C não complanares. *(Continua)*

Sobre uma fórmula simbólica de Topologia

Tradução dum artigo publicado em *Elemente der Mathematik*, II. 2, amàvelmente autorizada pelo Autor e pela Redacção

por **H. Hadwiger** (Berne)

A presente Nota trata duma fórmula topológica elementar da geometria plana que, apesar de não revelar resultados novos para os topologistas, merece no entanto ser considerada na forma simbólica que lhe daremos.

Encarada assim, a fórmula em questão resume diferentes relações e expressões da topologia combinatória (por ex. o teorema de Euler sobre os poliedros, a relação das «árvores», o teorema de Helly-Radon) e também muitas outras fórmulas combinatórias como as que se apresentam na divisão do plano por meio de rectas, etc.

Notemos a este respeito que a fórmula é susceptível de sêr generalizada de diferentes maneiras, mas em vista do carácter elementar deste trabalho é recomendável considerá-la apenas com certas restrições.

No estudo que segue limitar-nos-emos aos conjuntos planos A que podem ser considerados como a reunião

(1) $$A = K_1 + K_2 + \cdots K_n$$

de conjuntos K_i fechados, convexos, limitados e em número finito. A fig. 1 representa um destes conjuntos.

Fig. 1

Todos os conjuntos que gozam desta propriedade formam um sistema ao qual pertencem, ao mesmo tempo que dois conjuntos A e B, a soma $A+B$ (reunião) e o produto AB (intersecção) de A e de B.

Designaremos sempre por E o plano indefinido. Como A é fechado, o seu conjunto complementar $E-A$ será aberto. Seja $z(A)$ o «índice de divisão» de A, isto é o número de componentes [1] diferentes em que A pode ser dividido; anàlogamente, designaremos por $z(E-A)$ o «índice de divisão» de $E-A$, isto é o número de regiões [2] diferentes em que $E-A$ pode ser dividido.

Temos então a seguinte fórmula simbólica:

(2) $$(E-K_1)(E-K_2)\cdots(E-K_n) = z(E-A) - z(A),$$

onde o primeiro membro deve ser desenvolvido completamente como se fosse um produto algébrico, dando em seguida a dada parcela o valor 0 ou 1 conforme essas parcelas, consideradas como produtos de conjuntos, forem ou não vazias.

Demonstraremos a fórmula (2) por indução, supondo pois que ela é verdadeira para todos os conjuntos A' que podem ser representados como somas de $n-1$ conjuntos convexos K_i. Escrevemos então

$$A' = K_1 + K_2 + \cdots + K_{n-1}$$

(3) $$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = E\,(E-K_1)\cdots(E-K_{n-1}) - K_n\,(E-K_1)\cdots(E-K_{n-1}).$$

(1) Damos o nome de componente a uma parte conexa máxima.
(2) Uma região é um conjunto aberto e conexo.

O factor E pode evidentemente ser suprimido no primeiro termo do segundo membro porque não tem influência sobre o valor numérico do factor seguinte. No segundo termo podemos primeiramente escrever $n-1$ vezes o factor K_n sem influenciar o valor do produto, de maneira que cada parêntese pode ser afectado por este factor. Em seguida, podemos escrever evidentemente:

$$K_n(E-K_i) = (EK_n - K_i K_n).$$

Finalmente, a redução $(EK_n - K_i K_n) = (E - K_i K^n)$ de cada parentese não altera o valor do produto. Com efeito, temos por um lado $(EK_n)^{n-1} = E^{n-1} = 1$ e por outro lado todos os termos do desenvolvimento dos produtos que se não confundem com este primeiro termo só diferem entre si por potências diferentes de K_n de expoentes positivos. Podemos portanto escrever

$$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = (E-K_1)\cdots(E-K_{n-1}) - (E-K_1 K_n)\cdots(E-K_{n-1}K_n).$$

Sequndo a hipótese de indução temos pois

(4) $$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = [z(E-A') - z(A')] - [z(E-A'K_n) - z(A'K_n)].$$

Definindo pela expressão

(5) $$\varphi(A) = z(E-A) - z(\mathrm{A})$$

uma função $\varphi(A)$ para um conjunto arbitrário A da espécie considerada, então é fácil verificar a validade do teorema bem conhecido de adição:

(6) $$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB).$$

Tendo em conta a condição $\varphi(K_n) = 0$ [em virtude das propriedades a priori de K_n temos com efeito $z(K_n) - z(E-K_n) = 0$], resulta agora de (4) que

$$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = \varphi(A') + \varphi(K_n) - \varphi(A'K_n) = \varphi(A'+K_n),$$

isto é $(E-K_1)\cdots(E-K_n) = \varphi(A)$.

Fica assim provado que a fórmula (2) tambem é verdadeira para todos os conjuntos A que podem ser representados como somas de n conjuntos convexos K_i. Isto completa a demonstração por indução, visto que (2) é trivialmente verdadeira para $n=1$.

Vamos agora examinar algumas aplicações e consequências da fórmula (2).

1. Complexos de segmentos

Um complexo de segmentos de recta do plano, isto é um sistema finito de segmentos de recta (lados) sem pontos comuns excepto certas extremidades (vértices), é evidentemente um conjunto da espécie estudada neste trabalho. A fig. 2 representa um complexo de segmentos de recta.

Os conjnntos convexos K_i de que se compõe o conjunto A (isto é o complexo de segmentos) são evidentemente neste caso os diferentes lados ou arestas.

Seja k o número de arestas e e o número de vértices de A onde concorrem ν arestas.

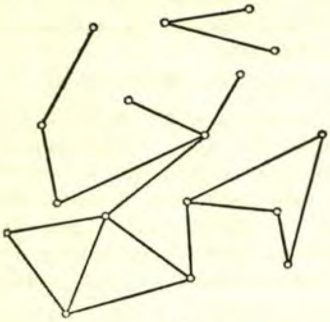


Fig. 2

Temos então as relações

(7) $e=e_1+e_2+e^3+\cdots, \quad 2k=e_1+2e_2+3e_3+\cdots$

Para determinar o produto da formula (2) calculemos preparatòriamente:

$$\begin{aligned}
&E^k=1 \\
&K_1+\cdots &&=k \\
&K_1K_2+\cdots &&=\binom{2}{2}e_2+\binom{3}{2}e_3+\cdots \\
&K_1K_2K_3+\cdots &&=\binom{3}{3}e_3+\binom{4}{3}e_4+\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots &&=\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Obtemos pois em primeiro lugar

$$(E-K_1)\,(E-K_2)\cdots(E-K_k)=1-k+$$
$$+\binom{2}{2}e_2+\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{3}\right]e_3+\left[\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]e_4+\cdots$$

ou ainda em virtude de (2)

$$z\,(E-A)-z\,(A)=1k+e_2+2e_3+3e_4+\cdots$$

e finalmente, tendo em conta a relação (7)

(8) $$z\,(E-A)-z\,(A)=1+k-e$$

Esta relação (8) é uma *fórmula topológica geral para complexos de segmentos* (1)

2. Relação das «árvores»

Para «árvores», isto é para complexos conexos de segmentos de recta sem cadeias fechadas, devemos pôr $z\,(A)=z\,(E-A)=1$ na relação (8). Obtém-se então a *relação das «árvores»* (1):

(9) $$1+k-e=0\,.$$

Na fig. 3 está representada uma árvore.

3. Teorema de Euler sobre os poliedros

Consideremos um complexo de segmentos de recta, imagem estereográfica do sistema de arestas dum poliedro convexo.

Uma tal imagem pode construir-se da seguinte maneira: Se designarmos por $E_1, E_2, \cdots, E_f$ os planos definidos pelas faces do poliedro, então o plano E_i divide o espaço em dois semi-espaços, positivo e negativo, e chamaremos positivo o semi-espaço que contém o poliedro. Seja S um ponto interior da intersecção do semi-espaço negativo correspondente a E_1 com os semi-espaços positivos dos outros planos $E_2, \cdots, E_f$. Por meio de raios passando por S (considerado como centro de projecção) é possível representar únivocamente, sobre o interior da face situada

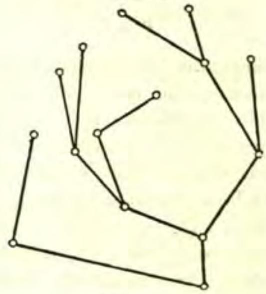


Fig. 3

sobre E_1, a parte da superfície do poliedro sem pontos comuns com E_1. O bordo da face situada sobre E_1 é a sua própria projecção. Esta representação do sistema de arestas do poliedro é um simples complexo de segmentos no plano E_1.

A cada parte de E_1 limitada por uma cadeia fechada de segmentos do complexo corresponde uma face do poliedro não situada sôbre E_1. Finalmente, pode-se fazer corresponder a face situada sobre E_1 à parte externa ilimitada do complexo.

Temos então evidentemente: $z\,(A)=1$ e $z\,(E-A)=f$, sendo f o número de faces do poliedro. Da relação (8) resulta portanto a fórmula clàssica de Euler (2):

(10) $$f-k+e=2\,.$$

---

(1) Designando por z o número de partes conexas do complexo de segmentos A, o número $\mu=z+k-e$ é o «número de conexão» de A. Ver D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936, p. 53.

(1) Cf. sobre este teorema de Listing as considerações de D. König, loc. cit., p. 51.

(2) cf. por ex. a demonstração simples de D. HILBERT—S. COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie*, Berlin 1932, pp. 255-256.

4. Fórmula de divisão do plano

Consideremos uu sistema de n conjuntos K_i convexos e limitados, tendo dois quaisquer desses conjuntos uma intersecção não vazia e três quaisquer uma intersecção vazia. A reunião A dos K_i será evidentemente conexa e portanto $z(A)=1$. No caso particular que consideramos agora temos o valor seguinte do 1.º membro de (2):

$$1-n+\binom{n}{2},$$

e obtemos portanto:

$$z(E-A)=2-n+\binom{n}{2},$$

o que significa que:

«*Se de n conjuntos conexos e limitados dois quaisquer têm uma intersecção não vazia e três quaisquer uma intersecção vazia, então esses n conjuntos dividem o plano*[1] *em* $(n^2-3n+4)/2$ *regiões*»[2]. Ver as figuras 4 e 5.

5. Teorema de Helly-Radon

Consideremos um sistema de n conjuntos convexos e limitados, dos quais três quaisquer tem uma intersecção não vazia. Se $n \geq 4$ escolhemos arbitràriamente 4 dos conjuntos K_i e escrevemos

$$(E-K_1)(E-K_2)(E-K_3)(E-K_4)=z(E-A)-z(A)$$

de acordo com a nossa fórmula (2).

Como A é evidentemente conexo, teremos $z(A)=1$, e visto que A é limitado $z(E-A)\geq 1$, de maneira que devemos ter

$$1-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+K_1K_2K_3K_4 \geqq 0$$

em virtude das condições admitidas. Donde se deduz que

$$K_1K_2K_3K_4=1$$

e portanto que 4 quaisquer dos conjuntos K_i do sistema tem uma intersecção não vazia. Se $n \geq 5$ então consideramos um sistema parcial de 5 conjuntos K_i escolhidos arbitràriamente e construimos os 4 conjuntos-intersecções convexos:

$$K_1K_5,\ K_2K_5,\ K_3K_5,\ K_4K_5.$$

Em consequência do que acabámos de demonstrar, 3 quaisquer destes conjuntos tem uma intersecção não vazia e portanto, segundo os mesmos resultados, também estes 4 conjuntos devem ter uma intersecção não vazia; isto mostra pois que os 5 conjuntos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 tem uma intersecção não vazia. O raciocínio pode repetir-se e permite portanto deduzir o seguinte resultado:

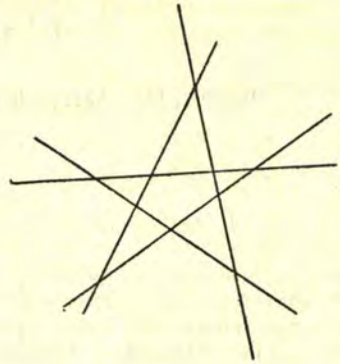


Fig. 4

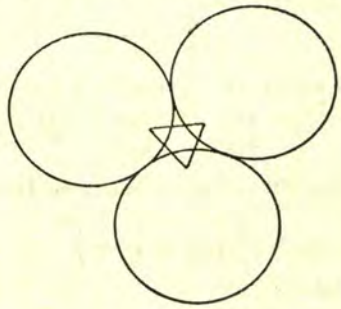


Fig. 5

«*Se três quaisquer de* n *conjuntos convexos e limitados tem uma intersecção não vazia, esses* n *conjuntos tem também uma intersecção não vazia*».

Este enunciado é, como se sabe, uma forma algum tanto especializada do teorema de Helly-Radon para o plano[1].

Trad. de A. G.

---

(1) Um conjunto fechado A divide o plano E em m regiões quando o conjunto complementar $E-A$ pode ser decomposto em m regiões.

(2) O problema que acabamos de resolver está intimamente relacionado com a determinação do número de regiões em que um plano indefinido é dividido por n rectas arbitràriamente situadas. Cf. E. STEINITZ, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin, 1934, p. 274.

(1) Cf. J. Radon, Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Math. Ann, 83, 113-115, 1921; E. Helly, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jber. D. M. V. 32, 175-176, 1923.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

FÍSICA TEÓRICA

PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DE LA MATIÈRE EN ROTATION

par ***Antonio Gião***

II. Applications

Application à l'électron. Le globule de matière et d'électricité qui correspond à l'électron peut être considéré comme une sphérule en rotation (spin). Appliquons-lui la formule fondamentale. Compte tenu de la valeur du moment magnétique de l'électron et de la valeur de son moment de rotation propre (spin) qui est $\pm h/4\pi$, en trouve immédiatement par (28), en supposant naturellement qu'à l'intérieur de la sphérule électronique la densité matérielle et la rotation ont une symétrie sphérique ou sont constantes $(\gamma=1)$:

$$\xi = \frac{\chi}{2}\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2} \tag{30}$$

ou bien en utilisant le résultat (21'):

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_0}} \quad (\text{avec } \chi_0 = 1/P_0). \tag{31}$$

La relation (10 a) devient donc pour l'électron:

$$\Phi_{m1} = \left(\frac{1}{2}\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_0}}\right)^{1/2}\Psi_{m1} \tag{32}$$

d'où l'on déduit:

$$\sum_1^4{}_m \Phi_{m1}^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_0}}\right)\sum_1^4{}_m \Psi_{m1}^2. \tag{33}$$

Or, d'après la Mécanique ondulatoire que nous avons développée parallèlement à la théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme (voir les mémoires cités), $\sum_1^4{}_m \Psi_{m1}^2$ et $\sum_1^4{}_m \Psi_{m1}^2$ sont les «*intensités de présence*» de l'électron considéré respectivement en tant que particule de matière et d'électricité. D'autre part, remarquons que $(m_0)_e\sqrt{K}$ est la masse de l'électron en «unités gravitationnelles». *La constante* λ *de* (10 a), *dans le cas de l'électron, est donc, au facteur* $\sqrt[4]{\chi/4\chi_0}$ *près, la charge spécifique gravitationnelle de l'électron; et le résultat* (33) *exprime que le rapport des intensités de présence électrique et matérielle de l'électron est, au facteur* $\sqrt{\chi}/2\sqrt{\chi_0}$ *près, le carré de sa charge spécifique gravitationnelle.*

Comme on a:

$$\frac{e}{(m_0)_e\sqrt{K}} = 0{,}2\times 10^{22},$$

on voit que l'intensité de présence électrique de l'électron est *beaucoup plus grande* que son intensité de présence matérielle. Ceci n'est en somme qu'une traduction du fait que le rapport F_g/F_e des forces gravifiques et électrostatiques agissant sur un électron se trouvant dans un champ gravifique et électrostatique produit par des masses M et des chargos Q comparables est beaucoup plus petit que l'unité. On a en effet:

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{(m_0)_e\sqrt{K}}{e} = 4{,}9\times 10^{-22}$$

si $M\sqrt{K}/Q=1$.

Moments magnétiques du neutron et du proton. Comme deuxième application de la formule fondamentale (28) nous allons maintenant analyser le cas du neutron et du proton. On sait que le moment magnétique du neutron n'est pas nul malgré l'absence de charge électrique et que sa valeur est donnée par:

$$a_N\frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_N}$$

$(m_0)_N$ étant la masse propre du neutron et a_N un coefficient numérique égal à $-1{,}911$ d'après les déterminations les plus récentes. La valeur négatice de a_N signifie que le moment magnétiqne du neutron est antiparallèle à son spin. Comme ce spin a les valeurs $\pm h/4\pi$, la formule (29) donne:

$$|\,a_N|\,\frac{eh}{4\pi\,(m_o)_e\,c}\,\frac{(m_o)_e}{(m_o)_N} = 2\bar{\lambda}^2\,\frac{(m_o)_e}{ec}\,K\gamma\,\frac{h}{4\pi}$$

c'est-à-dire

$$\bar{\lambda}_N^2\,\gamma_N = \frac{|\,a_N|}{2}\,\frac{e^2}{(m_o)_e^2\;K}\,\frac{(m_o)_e}{(m_o)_N}$$

les indices N du premier membre indiquant qu'il s'agit des valeurs de λ et de γ pour le neutron. On voit donc que dans le cas du neutron il faut utiliser la solution négative de (21') pour la constante ξ.

Remarquons maintenant que le moment magnétique du proton doit être la somme du moment magnétique qu'aurait le proton s'il n'avait pas de charge et du moment magnétique qui est dû exclusivement à cette charge douée de spin. Le moment magnétique $(M_{\text{magn}})_P$ du proton doit donc avoir la valeur :

$$(M_{\text{magn.}})_P = a_P \frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P} + \frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P}.$$

La formule (29), appliquée au moment magnétique du proton engendré par son spin $(\pm h/4\pi)$ *indépendamment de sa charge électrique*, donne avec la valeur positive (21′) de ξ:

$$\bar{\lambda}_P^2\,\gamma_P = \frac{a_P}{2}\,\frac{e^2}{(m_0)_e^2\,K}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P},$$

ou bien:

$$\bar{\lambda}_P^2\,\gamma_P \cong \frac{a_P}{2}\,\frac{e^2}{(m_0)_e^2\,K}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_N} = \frac{a_P}{|\,a_N\,|}\,\bar{\lambda}_N^2\,\gamma_N, \tag{34}$$

puisque la masse propre du proton est presque égale à la masse propre du neutron. En supposant que la densité et la vitesse de rotation ont une symétrie sphérique ou sont constantes dans les sphérules neutroniques et protoniques, ce qui est naturel puisque ces particules se comportent comme des particules élémentaires [bien qu'étant formées par la fusion d'électrons et de microélectrons [1]], il faut poser $\gamma_P = \gamma_N = 1$, de sorte que:

$$a_P = |\,a_N\,|\left(\frac{\lambda_P^0}{\lambda_N}\right)^2,$$

et compte tenu du fait que $\xi < 0$ pour le neutron et > 0 pour le proton, le moment magnétique du proton sera donc donné par:

$$(M_{\text{magn}})_P = \frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P}\left[\,|\,a_N\,|\left(\frac{\lambda_P^0}{\lambda_N}\right)^2 + 1\right],$$

ou bien en petits magnétons de Bohr:

$$(M_{\text{magn}})_P = 1 + |\,a_N\,|\left(\frac{\lambda_P^0}{\lambda_N}\right)^2.$$

Mais on a d'après $(10a)$:

$$(\lambda_P^0)^2 = \left[\frac{\sum_1^4{}_m\,(\Phi_{m1}^{(0)})^2}{\sum_1^4{}_m\,\Psi_{m1}^2}\right]_P;\qquad \lambda_N^2 = \left[\frac{\sum_1^4{}_m\,\Phi_{m1}^2}{\sum_1^4{}_m\,\Psi_{m1}^2}\right]_N$$

(l'indice 0 qui affecte les Φ_{m1} dans l'expression de λ_P^2 sert à rappeler qu'il s'agit des fonctions d'onde indépendamment de la charge électrique du proton). Comme l'intensité de présence matérielle du proton doit être pratiquement égale à l'intensité de présence matérielle du neutron puisque ces deux particules ont presque la même masse, on a simplement:

$$\left(\frac{\lambda_P^{(0)}}{\lambda_N}\right)^2 = \frac{\sum_1^4{}_m\,(\Phi_{m1}^{(0)})_P^2}{\sum_1^4{}_m\,(\Phi_{m1})_N^2} = \frac{(\mathcal{J}_e^{(0)})_P}{(\mathcal{J}_e)_N} = k,$$

$(\mathcal{J}_e^{(0)})_P$ et $(\mathcal{J}_e)_N$ désignant les intensités de présence électriques du proton (*abstraction faite de sa charge*) et du neutron. Le rapport ci-dessus doit donc être voisin de l'unité. Il doit cependant être légèrement inférieur à l'unité puisque, quand on fait abstraction de sa charge, le proton manifeste sa présence électrique d'une manière légèrement moins intense que le neutron, par suite de l'influence de l'énergie de pression du «fluide électrique» sur le tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement électrique U_{ik} (voir dans *Port. Math.* vol. 5, loc. cit., p. 163, l'expression de ce tenseur en fonction de la densité de charge et des tensions du fluide électrique). Dans ces conditions, la formule (36) donne pour le moment magnétique du proton avec $|\,a_N\,| = 1{,}911$:

$$(M_{\text{magn}})_P = 1 + 1{,}911\,k$$

k étant un coefficient numérique légèrement inférieur à l'unité. Pour avoir la valeur expérimentale 2,785 il suffit de poser $k = 0{,}934$. On voit que l'explication des moments magnétiques du neutron et du proton est possible par la formule (28) grâce essentiellement au fait, démontré plus haut, qu'à une seule solution g_{ik} pour la métrique interne relative à un tenseur donné de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle dans un domaine quasi statique, correspondent a priori deux solutions pour la métrique externe ω_{ik}, ces deux solutions ne différant que par leur signe.

Application astrophysique. Dans un travail récent [1], M. Blackett a trouvé empiriquement que le moment magnétique M_{magn} de la Terre, du Soleil et de l'étoile 78 Virginis (l'une des seules étoiles dont on a déterminé (Babcock) jusqu'à présent le champ magnétique par voie spectroscopique) est proportionnel à leur moment de rotation M_{rot} conformément à la formule

$$M_{\text{mgan}} = \beta\,\frac{\sqrt{K}}{2c}\,M_{\text{rot}}, \tag{37}$$

β étant un coefficient numérique voisin de $1/4$. Le point important est la constance du rapport $M_{\text{magn}}/M_{\text{rot}}$ pour les trois astres examinés et ce résultat découle immédiatement de notre formule (28) appliquée à l'échelle macroscopique [2]. Par la comparaison de la

---

(1) La théorie des particules fondamentales lourdes (neutrons protons, mésons), considerées comme le résultat de la fusion d'électrons et microélectrons, fait l'objet d'un travail qui paraîtra bientôt.

(1) *Nature*, 159 (1947), pp. 658-666.

(2) Des mesures récentes de Babcock pour d'aurtes étotles confirment (37).

relation (28) et de (37) on trouve immédiatement, compte tenu de (21′), que la valeur $\bar{\lambda}_m$ de $\bar{\lambda}$ qui convient à l'échelle macroscopique est la suivante

$$(38) \qquad \bar{\lambda}_m^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{e}{(m_0)_e\sqrt{K}}\,.$$

Le coefficient β de M. Blackett subit une légère influence de la non-uniformité spatiale de la densité de l'astre et de la vitesse angulaire de rotation de ses éléments matériels. Il en est de même, comme nous l'avons vu, de notre coefficient γ et il est permis de supposer que $\beta/\gamma \cong 1$ pour les trois astres analysés, surtout pour les deux astres fluides: le Soleil et l'étoile 78 Virginis. La comparaison de la relation (38) et de (31) donne:

$$(39) \qquad \lambda_m^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^{1/4}\lambda_e \cong \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\lambda_e\,,$$

λ_e étant la valeur de la constante fondamentale λ qui convient à l'échelle électronique. Il est clair que la relation (39) doit avoir une signification physique profonde, puisque ce résultat provient évidemment de l'influence sur les fonctions d'onde du passage de l'échelle électronique à l'échelle macroscopique dans les équations des valeurs propres (8) et (1) des opérateurs laplaciens de la métrique interne et externe [1].

Octobre, 1947.

---

[1] Remarquons que (29) montre qu'un même M_{rot} est compatible avec deux M_{magn} égaux et de signes contraires, de sorte que β peut être négatif. Ce résultat, joint à une éventuelle variation de λ quand γM_{rot} est fonction du temps, expliquerait que certaines étoiles puissent présenter un renversement de polarité au cours d'un «cycle».

MOVIMENTO CIENTÍFICO

ISTITUTO ROMANO DI CULTURA MATEMATICA

Este centro de estudos pedagógicos a que nos referimos no número anterior iniciou em 31 de Janeiro de 1948 o seu quarto ciclo anual de conferências. Duma carta circular enviada a grande número de professores transcrevemos o programa das conferências:

31 de Janeiro — *G. Fano.* Matemáticos e filósofos;

14 de Fevereiro — *U. Bini*, *L. Lombardo Radice* e *E. Monferrini.* Debate sobre o tema: É lícito ignorar a matemática?

28 de Fevereiro — *R. Roghi*, *T. Viola*, *M. Tereza Zapelloni.* Debate sobre o tema: O ensino da algebra nas escolas secundárias.

13 de Março — *M. Ageno*, *A. Fraiese* e *M. Manacorda.* Debate sobre o tema: Relações entre o ensino da matemática e das outras disciplinas nas escolas secundárias.

10 de Abril — *R. Giannarelli.* A preparação dos professores de matemática.

24 de Abril — *Emma Castelnuovo*, *G. Cerocchi* e *A. Perna.* Debate sobre o tema: O ensino da geometria nas escolas secundárias.

15 de Maio — *G. Colonnetti.* O valor formativo e humanístico dos ensinamentos da matemática e da física nas escolas secundárias.

Os quatro debates servem também para retomar e enquadrar os assuntos e idéias expostos nas conferências realizadas nos anos precedentes e nas discussões que se seguiram.

UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL

A Sociedade Matemática de França promoveu uma reunião de matemáticos de vários países com o objectivo de reorganizar a União Matemática Internacional, dissolvida no Congresso de Zurique de 1932, e solicitou a representação da Sociedade Portuguesa de Matemática. A Direcção da S. P. M. tendo julgado útil a reorganização da U. M. I. pediu ao sócio Dr. António Gião, então em Paris, para a representar.

A reunião teve lugar em 24 de Junho de 1947, na Casa da U. N. E. S. C. O. e foi presidida pelo Prof. Chatelet (França). A ela assistiram os seguintes matemáticos: Balanzat (Argentina), Bureau (Bélgica), H. Bohr e B. Jessen (Dinamarca), P. Belgodère, Chapelon, A. Denjoy, Janet, G. Julia, Mandelbrojt e Valiron (França), Bruins e Van der Corput (Holanda), Nikodym (Polónia), A. Gião (Portugal), Sergescu (Roménia), de Beurling e Carleman (Suécia), Ostrowski, Plancherel e de Rham (Suíça), Compton, Lyndon, Salem, Whitney e Wiener (E. U. A.) e como representantes da U. N. E. S. C. O. os Drs. Establier, Laves e Malina.

Não foi completamente atingido o objectivo proposto pelo que ficou decidido retomar o assunto em discussão em reuniões posteriores.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

A Direcção eleita para o biénio 1947-48 não poude, por motivos alheios à sua vontade, realizar o programa de trabalhos apresentado aos sócios na parte relativa a comunicações, conferências e colóquios. A sua actividade limitou-se, assim, à publicação do Boletim da S. P. M., como já foi referido no n.º 34 de *Gazeta de Matemática* e à tradução da obra fundamental de Van der Waerden, *Álgebra Moderna* (2.ª ed. alemã). Deste trabalho encarregou-se o sócio Dr. Hugo B. Ribeiro como lhe foi pedido pela Direcção anterior. Encontra-se no prelo o 1.º fascículo do vol. 1 abrangendo 5 capítulos (Números e conjuntos, Grupos, Anéis e corpos, Funções racionais inteiras e Teoria dos corpos), devendo a publicação estar concluida dentro de 3 meses.

A Direcção reconheceu também as vantagens que adviriam à Sociedade do estabelecimento dum intercâmbio no plano cultural com Sociedades congéneres estrangeiras. Assim aceitando a sugestão do Secretário da Sociedade Matemática de França, Paul Belgodère, também sócio da S. P. M., foi elaborado e discutido um acordo de reciprocidade de regalias entre os membros das duas sociedades (redução de quotas para os membros duma sociedade admitidos como sócios da outra e redução de preço para certas publicações matemáticas).

Oportunamente a Direcção estudará outros aspectos do problema de intercâmbio e esforçar-se-á por estabelecer acordos análogos com outras Sociedades, nomeadamente com a Real Sociedade Matemática Espanhola e a Sociedade Matemática de S. Paulo.

Brevemente será distribuído um novo número do Boletim com colaboração dos sócios Maurice Fréchet, António Gião, G. Viguier e de Enzo Aparo.

COLABORADORES DA GAZETA DE MATEMÁTICA

A *Gazeta de Matemática* tem o prazer de comunicar aos seus leitores que a Redacção conta mais dois colaboradores estrangeiros, os Profs. Emma Castelnuovo, de Roma, e Luiz Freire, de Recife. A nossa revista incluiu já, no n.º 33, colaboração da distinta professora italiana, que muito apreciámos, e num próximo número publicar-se-á um artigo do novo colaborador, professor L. Freire, que teremos o prazer de ler. Regosijamo-nos por contribuir assim para o estreitamento das relações culturais no campo da matemática com outros países, e podermos, mais fàcilmente, conhecer e divulgar algumas das recentes conquistas e iniciativas progressivas no campo científico e pedagógico fora de Portugal.

— Dois dos nossos colaboradores e amigos ausentaam-se para o estangeiro privando temporàriamenter o meio matemático português da sua tão valiosa cooperação. Referimo-nos ao Doutor Hugo B. Ribeiro, que se encontra em Berkeley, Califórnia, desde o início do presente ano lectivo, a convite do Departamento Matemático da Universidade, desempenhando actualmente as funções de «lecturer», e ao Doutor Alfredo Pereira Gomes, agora em Paris, como bolseiro do «Centre National de la Recherche Scientifique» onde prossegue as suas investigações sob a orientação dos professores Fréchet e Denjoy.

Se sentimos bastante a sua ausência e lastimamos a perda do auxílio prestado às nossas tarefas quotidianas continuamos pensando que contribuem para fazer, no estrangeiro, a melhor propaganda cultural portuguesa.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA ELEMENTAR

DETERMINAÇÃO, POR MEIO GEOMÉTRICO, DO RAIO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA A UM PENTÁGONO REGULAR DE LADO CONHECIDO

por ***Mário da Silva Reis***

1. Dado o lado do pentágono regular $l_5 = \overline{PQ}$ (fig. 1), construa-se uma circunferência que tenha esse lado por diâmetro. Numa das extremidades deste diâmetro faça-se centro e trace-se uma nova circunferência de raio igual ao lado do pentágono dado. Levante-se nesse mesmo ponto uma perpendicular ao diâmetro, $\overline{QS}$. Considere-se a recta $\overline{SO}$, definida pelo ponto S e pelo centro da primeira circunferência.

A recta $\overline{SO}$ intersecta a circunferência de diâmetro $\overline{PQ}$ no ponto R; o segmento $\overline{PQ}$ é o raio da circunferência procurado.

2. *Demonstração.* Pretende demonstrar-se que

$$\overline{PR}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,l_5 .$$

Por construção, tem-se

$$\overline{PQ}\perp\overline{SQ}\,,\ \overline{RT}\perp\overline{SQ}\,,\ \overline{OP}=l_5/2 \quad \text{e} \quad \overline{SQ}=l_5 .$$

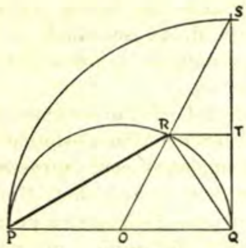


Fig. 1

Pelo teorema de Pitágoras

$$\overline{OS}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QS}^2=l_5^2/4+l_5^2=5l_5^2/4$$

e

$$\overline{OS}=\sqrt{5}\,l_5/2\,;$$

observando a figura vê-se que:

$$\overline{RS}=\overline{OS}-\overline{OR}=\sqrt{5}\,l_5/2 \quad l_5/2=(\sqrt{5}-1)\,l_5/2\,;$$

Pelo teorema de Thales temos ainda:

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OS}}=\frac{\overline{ST}}{\overline{SQ}}$$

donde resulta

$$\overline{ST}=\frac{\overline{RS}\cdot\overline{SQ}}{\overline{OS}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\,l_5\,;$$

analisando a figura, vemos também que

$$\overline{QT}=\overline{SQ}-\overline{ST}=l_5-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\,l_5=\frac{1}{\sqrt{5}}\,l_5\,;$$

recorrendo de novo ao teorema de Thales

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{ST}}{\overline{QS}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{RT}}{l_5/2}=\frac{\overline{ST}}{l_5}$$

donde, evidentemente $\overline{RT}=\overline{ST}/2$.

Temos, finalmente, todos os elementos para justificar a construção, pois a aplicação do teorema de Pitágoras dá:

$$\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2-\overline{RQ}^2=\overline{PQ}^2-(\overline{RT}^2+\overline{TQ}^2)=$$

$$=\overline{PQ}^2-(\overline{ST}^2/4+\overline{TQ}^2)=l_5^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)^2 l_5^2-$$

$$-\frac{1}{5}\,l_5^2=\frac{4}{10-2\sqrt{5}}\,l_5^2$$

ou seja, como queríamos provar

$$\overline{PR}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,l_5 .$$

3. A demonstração que acabo de fazer é, como se vê, analítica. Dou, a seguir, duas demonstrações feitas por colegas meus da Faculdade de Ciências do Porto, demonstrações essas de carácter geométrico.

a) Demonstração de Mário Rui Flores dos Santos (Preparatórios de Engenharia). Na fig. 2, $\overline{DE}$ é,

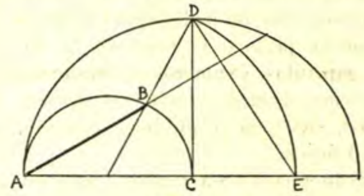


Fig. 2

como é sabido, o lado do pentágono inscrito na circunferência de lado $\overline{AC}$. Se conseguirmos provar que os triângulos ABC e DCE são semelhantes então $\overline{AB}$ será o raio da circunferência na qual se pode inscrever o pentágono de lado $\overline{AC}$.

Por construção:

$$\overline{BC}//\overline{DE}\,;\ \overline{AB}\perp\overline{BC}\,;\ \overline{AB}\perp\overline{DE}\,;\ \overline{AC}\perp\overline{CD}.$$

Por consequência os ângulos BAC e CDE são iguais, ou seja, os triângulos ABC e DCE, rectângulos res-

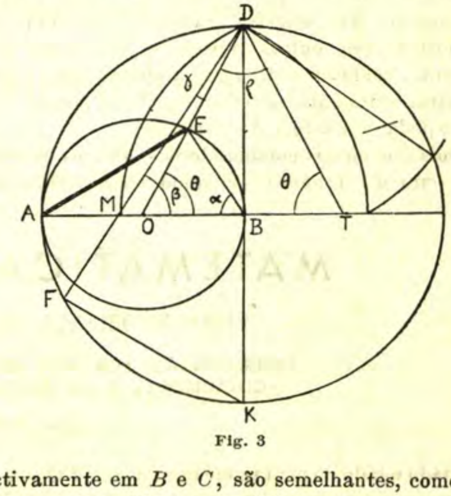


Fig. 3

pectivamente em B e C, são semelhantes, como queríamos provar. Nestas condições

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

o que mostra o rigor da construção indicada.

b) Demonstração de António Andrade Guimarães (Licenciatura em Ciências Matemáticas).

Tese: $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$ (fig. 3).

Por construção $\overline{DM} = l_5$ (na circunferência de raio $\overline{BD}$); $\overline{AB} = l_5'$ (na circunferência de raio $\overline{OA}$). Da figura tira-se $M\widehat{D}T = T\widehat{M}D$ e ainda $O\widehat{E}B = O\widehat{B}E$. Vamos provar que $O\widehat{B}E = D\widehat{M}B$ porque então fica provada a tese. Para isso, façamos $O\widehat{B}E = \alpha, E\widehat{O}B = \theta$, $D\widehat{M}B = \beta, M\widehat{D}O = \gamma$, e $O\widehat{D}T = \rho$.

Provar que $\beta = \alpha$ é o mesmo que provar a igualdade $\beta = (\pi - \theta)/2$; ora $\theta = \beta + \gamma$, por ser ângulo externo do triângulo DOM; e também $2\theta = \pi - \beta$, bem como $\rho + \gamma = \beta$. Portanto: $2\theta = \pi - \beta + \gamma$ e ainda

$$2\theta = \pi - \beta - \beta + \theta$$

donde

$$\beta = (\pi - \theta)/2 \quad \text{q. e. d.}$$

Conclui-se, pois, a semelhança dos triâugulos e então

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$$

o que prova ser $\overline{AE}$, de facto, o raio da circunferência cujo pentágono regular tem por lado $\overline{AB}$.

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — 1947

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — 1947.

2546 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação

$$(1 - x/3)^3 - (1/2 - x^2)^2/6 = 3 - (1 - x)/2$$

R: $36x^4 + 8x^3 - 108x^2 + 108x + 333 = 0$.

2547 — Resolva a inequação

$$2(x^2 - 3x - 1)(3x^2 - x + 1) > 0$$

R: *Os zeros do factor* $3x^2 - x + 1$ *são números complexos, por isso este factor é sempre positivo qualquer que seja o valor real atribuido a* x; *basta então que seja* $x^2 - 3x - 1 > 0$; *os zeros do trinómio* $x^2 - 3x - 1$ *são os valores* $(3 + \sqrt{13}) : 2$ *e* $(3 - \sqrt{13}) : 2$; *então o trinómio é positivo para valores de* x *tais que* $x > (3 + \sqrt{13}) : 2$ *ou* $x < (3 - \sqrt{13}) : 2$.

2548 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos, com o mínimo de 5 algarismos decimais, dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aqueles lhe permitirem, os valores de α que satisfazem à equação

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha = -\frac{0{,}27562}{\cos 342^\circ 45' 20''}$$

R: *Tem-se*

$$2 \log \operatorname{cotg} \alpha = \log 0{,}27562 + \operatorname{colg} \cos 35^\circ 14' 40'' = \\ = \bar{1}{,}44031 + 0{,}08795 = 0{,}52826$$

donde $\log \operatorname{cotg} \alpha = 0{,}26413$ *e, por isso,* $\alpha = 28^\circ 33' 58''$.

2549 — Diga o que é um triedro. Enuncie as relações que conhece entre os seus elementos.

2550 — Escreva o 5.º termo do desenvolvimento de $(a^3 \sqrt{x} - x^{-2})^7$ e simplifique-o.

R: $T_5 = \binom{7}{4} (a^3 \sqrt{x})^3 \cdot (x^{-2})^4 = 35 a^9 x^{-7} \sqrt{x}$.

2551 — Construa um triângulo sendo dada a base e as alturas correspondentes aos outros dois lados. Que método ou métodos geométricos empregou para a sua resolução? O problema tem sempre solução? Justifique a resposta. R: *Seja* $\overline{AB}$ *o lado dado e* h_a *e* h_b *as alturas relativas aos outros dois lados. Com centros em* A *e* B *trace duas circunferências de raios respectivamente* h_a *e* h_b. *Dos pontos* A *e* B *tire as tangentes às duas circunferências, respectivamente, de centros* B *e* A. *A intersecção destas tangentes é o terceiro vértice* C *do triângulo. O problema tem uma solução se* A *e* B *são ambos exteriores, ou um deles exista sobre uma das circunferências, de centros respectivamente* B *e* A. *Não tem solução se o raio* h_a *ou o raio* h_b *são maiores do que o lado* $\overline{AB}$.

Soluções dos n.os 2546 a 2551 de J. da Silva Paulo.

I. S. C. E. F. — Ponto n.º 3 — 10 de Outubro de 1947

NOTA — É obrigatória a resolução de 4 pontos

I — Aritmética

2552 — Números primos; decomposição em factores primos; divisores de um número composto.

2553 — Dada a fracção 39/91, determine uma fracção que lhe seja igual e tal que a soma dos seus termos seja um múltiplo de 15. Das soluções possíveis escolha a fracção de termos menores. R: 9/21.

II — Cálculo Numérico

2554 — Simplifique a expressão

$$E = \frac{\operatorname{tg}(\pi/2 + 2x) - \operatorname{cotg}(2x)}{\operatorname{sen}(2j - 5\pi/2)}$$

e calcule o seu valor numérico para $x = 18^\circ 30' 41''$ e $j = 22^\circ 17' 52''$. (*Utilize logaritmos*). R: Tem-se $E = (2 \operatorname{cotg} 2x)/\cos 2j$, *donde* $E = 3{,}724$.

III — Algebra

2555 — Dada a equação $(k-2)\,x^2-(k+2)\,x+2k=0$ determine k de modo que a soma dos quadrados das raízes seja igual a 13. R: *Sendo* x_1 *e* x_2 *as raízes, deverá ser* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\,x_1x_2=13$. *Tendo em conta os valores de* x_1+x_2 e x_1x_2 *obtém-se* $k=(-3\pm\pm\sqrt{3}\,i)/2$.

IV — Geometria Plana

2556 — Divisão da circunferência em partes iguais; polígonos regulares inscritos; determinação dos seus perímetros expressos no raio da circunferência circunscrita.

2557 — Duas circunferências do mesmo raio r são descritas de modo que cada uma passa pelo centro da outra. Calcule, expressa em r, a área do quadrilátero cujos vértices são os centros das duas circunferências e os seus pontos de encontro. R: *Trata-se dum losango de lado* r, *cuja área é* $r^2\cdot\sqrt{3}/2$.

V — Geometria no Espaço

2558 — Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo rectângulo em torno da hipotenusa, sabendo que um dos ângulos do triângulo é de 60° e que a hipotenusa é igual a $2a$. R: *O triângulo rectângulo considerado é metade dum triângulo equilátero de lado* $2a$, *portanto, de catetos* a *e* $a\sqrt{3}$ *e altura relativa à hipotenusa,* $a\sqrt{3}/2$. *O sólido gerado é constituido por dois cones de revolução de base comum, de raio* $a\sqrt{3}/2$ *e geratrizes* a *e* $a\sqrt{3}$. *O seu volume é* $V=\pi a^3/2$.

VI — Trigonometria

2559 — Quais são os ângulos compreendidos entre 3π e 5π radianos e cujo seno é igual a $-\sqrt{2}/2$? R: $13\pi/4$ e $15\pi/4$.

Soluções dos n.os 2552 a 2559 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra — 1.° Exame de frequência — 1946-47 — 1.° Ponto.

2560 — Calcular a soma da série de termo geral $u_n=n/4^n$ com erro inferior a 10^{-2}. R: *Devem somar-se cinco termos da série.* $S=0{,}44$.

2561 — Primitivar a função $y=(1+\operatorname{sen}x)/(1+\cos x)$. R: *Multiplicando ambos os membros da fracção por* $1-\cos x$, *conclui-se logo que:* $Py=\log|\operatorname{sen}x|-\log|\operatorname{cosec}x+\operatorname{cotg}x|-(\operatorname{cosec}x+\operatorname{cotg}x)+C$.

2562 — Primitivar a função $y=(x^2+1)/(x+1)^3$. R: *O método de Fubini conduz a* $Py=\log|x+1|+\dfrac{1}{4}\,\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}+C$.

2.° Ponto

2563 — Determinar a natureza do produto infinito de termo geral $u_n=1+\left(1+\dfrac{0{,}5}{n}\right)^{n^2}$. R: *A natureza do produto infinito é a da série corrospondente de termo geral* $v_n=(1+0{,}5/n)^{n^2}$. *Pelo critério de Cauchy, conclui-se a divergência.*

2564 — Primitivar a função $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x+1}$.

R: *Primitivando por partes vem:*

$$Py=\sqrt{x}\operatorname{arc\,sec}\sqrt{x+1}-\log\sqrt{x+1}+c.$$

2565 — Primitivar a função $y=(3x^2-1)/(x^3-x)$. R: *Pelo método de Fubini tem-se* $Py=\log|x|+\log|x+1|+\log|x-1|+C$.

F. C. C. — 2.° Exame de frequência — 1946-47 — 1.° Ponto.

2566 — Escrever a equação das assíntotas da curva de equação $y=x\,\operatorname{th}x$. R: *Pode escrever-se* $y=x\,\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *e tem-se* $m=\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y}{x}=1$ *e* $k=\lim\limits_{x=\infty}(y-mx)=0$. *Logo a equação da assíntota é* $y=x$.

2567 — De que natureza é o sistema

$$x+3y+2z=0,\quad x-y=0,\quad 9x-y+4z=0\,?$$

R: *Compatível e indeterminado.*

2568 — Dados os elementos $a=120°\,0'\,0''$, $b=108°\,36'\,26''$ e $A=71°\,23'\,34''$ de um triângulo esférico, determinar B e discutir o resultado. R: *Não existe triângulo esférico com os elementos dados.*

2.º Ponto

2569 — Para que valores de α e β a equação $(x^2+2\alpha xy+y^2+2y)(\alpha x^2+4xy+\beta y^2+2y)=0$ representa duas parábolas? R: $\alpha=\pm1$, $\beta=\pm4$.

2570 — Calcular pelo método de Newton duas aproximações da raiz de $x^3-2x+2=0$ compreendida no intervalo $(-2,-1)$. R: *1.ª aproximação:* $-1{,}8$; *2.ª aproximação:* $-1{,}77$.

2571 — Dados os elementos $a=80°\,0'\,0''$, $b=120°\,0'\,0''$ e $c=79°\,19'\,15''$ de um triângulo esférico, calcular B. R: $B=123°\,21'\,36''$.

Soluções dos n.os 2560 a 2571 de L. Mendonça de Albuquerque.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência (extraordinário) — 27 Março 1948.

2572 — Dada a função $\Phi(n)=\dfrac{\cos(1-n)\pi/2}{n}$. *a*) Represente-a gràficamente para $n=1,2,\cdots,6$; *b*) Determine a de modo que exista uma ordem $n_0(\delta)$ tal que, para $n>n_0(\delta)$, se tenha

$$\left|\frac{\cos(1-n)\pi/2}{n}-a\right|<\delta$$

qualquer que seja $\delta>0$; *c*) considerando o conjunto A dos valores de n para os quais

$$\left|\frac{\cos(1-n)\pi/2}{n}-a\right|>0{,}01$$

e o conjunto B dos valores positivos de n que anulam $\operatorname{sen} n\pi/3$, determine $A+B$ e $A\cdot B$.

R: $$a=\lim\frac{\cos(1-n)\pi/2}{n}=0.$$

Como $\cos(1-2k)\pi=0$ *e* $\cos[1-(2k+1)]\pi/2=\pm1$, *tem-se* $\left|\dfrac{\cos(1-n)\pi/2}{n}\right|>0{,}01$ *para os valores ímpares de* n *inferiores a* 100. *O conjunto* B *será constituído pelos múltiplos de* 3 *de modo que* $A+B=\{2l-1,3m\}$ $(1\leq l\leq 50)$ *e* $A\cdot B=\{3(2p-1)\}$ *com* $1\leq p\leq 17$.

2573 — Determine as equações dos lados e das diagonais e o perímetro do quadrado que tem como mediana o segmento $\overline{E(-2;2)\,F(2,2)}$ e a equação da bissectriz do ângulo obtuso formado por um qualquer dos lados com uma diagonal. R: *Equações dos lados:* $x+y=\pm4$ *e* $x-y=\pm4$; *diagonais:* $x=0$ *e* $y=0$, $P=16\sqrt{2}$; *bissectriz do ângulo do lado situado no 1.º quadrante com* OX: $y=(1+\sqrt{2})(x-4)$.

2574 — Algebrizou-se o conjunto E, formado pelos quatro elementos a,b,c,d, por intermédio de uma operação a que corresponde a tabela seguinte:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	b
d	b	c	d	a

Verifique se o conjunto E assim algebrizado constitui ou não um grupo relativamente à operação considerada. R: *Como a unidade à esquerda,* a, *não é unidade à direita (o que resulta de se não verificar a propriedade associativa) o conjunto* E: *não constitui um grupo.*

2575 — Verifique que a sucessão assim definida: $u_1=\sqrt{2}$, $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$ $(n\geq2)$ é crescente e prove (por indução) que $u_n<2$. Calcule o seu limite. R: *Se* $u_p<2$, $u_{p+1}=\sqrt{2+u_p}<2$; *e como* $u_1<2$, *será* $u_n<2$ *para qualquer valor de* n. *A condição* $u_n>u_{n-1}$ *implica* $u_{n-1}^2-u_{n-1}-2<0$, *o que sempre se verifica por ser* $u_{n-1}<2$. *Provada assim a existência do limite, tem-se* $\lim u_n=\lim u_{n-1}=l$ *e* $\therefore$ $l=\sqrt{2+l}$ *donde* $l=2$.

Soluções dos n.os 2572 a 2575 de F. R. Dias Agudo.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência, 1947-48

2576 — Dada a função $\varphi(n)=\dfrac{5^n-1}{5^n+1}$: *a*) Determine o seu limite quando $n\to\infty$; *b*) Determine a ordem a partir da qual a diferença entre $\varphi(n)$ e o seu limite é, em valor absoluto, inferior a 0,001; *c*) Designando por A o conjunto dos valores de n para os quais essa mesma diferença é, em valor absoluto, superior a 0,001 e por B o conjunto dos valores de n para os quais é definida a função

$$\psi(n)=\frac{\operatorname{arc\,sec}(n-4)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

verifique se A e B são complementares em relação ao conjunto dos inteiros positivos.

2577 — Determine as equações dos lados do losango de centro $O(0,0)$ de vértice $A(0,4)$ e de diagonal menor, igual a 6. Considerando as mediatrizes dos seus 4 lados calcule a razão entre a área do losango e a da figura limitada por essas mediatrizes.

2578 — Verifique se o conjunto $E\{0,2,10^{1-n},2-10^{1-n}\}$ é ou não fechado. Considere como conjunto fndamental o conjunto dos números reais.

2579 — Dada a sucessão de termos positivos $u_n=1/u_{n-1}$ onde u_1 é qualquer $\neq1$: *a*) Estude a sua natureza; *b*) Estude a natureza das sucessões de termos gerais u_{n+1}/u_n e $\sqrt[n]{u_n}$ que dela se obtêm; *c*) Estude o caso $u_1=1$. Indicar os limites nos casos de convergência.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — 1.º Exame de frequência, 1947-48.

2580 — São dados: um plano α oblíquo, definido pelos traços, e um ponto $P \cdot / \alpha$. Determine o trajecto do raio luminoso que, partindo de P paralelamente a ν_0, se reflete sobre α paralelamente a φ_0. R: *Determine-se o simétrico* P_1 *de* P *em relação a* α. *Segundo as leis da reflexão, o prolongamento do raio reflectido deve passar por* P_1. *Conduza-se então por* P *um plano* $\nu // \nu_0$ *e por* P_1 *um plano* $\varphi // \varphi_0$: *a intersecção* I *dos três planos* α, ν, φ *é o ponto de incidência, que, unido com* P *e com* P_1, *dá o trajecto pedido.*

2581 — Dado um tetraedro $[ABCD]$, com $AB \perp \nu_0$ e $CD \perp \varphi_0$, determinar as projecções da esfera inscrita nêsse tetraedro. R: *O centro* O *da esfera será o ponto de intersecção dos bissectores dos diedros internos de* [ABCD]. *Consideremos o diedro* $C\widehat{AB}D$: *visto que a sua aresta* AB *é* $\perp \nu_0$, *o mesmo acontecerá com as suas faces e com o seu plano bissector; o traço horizontal deste plano bissector será pois a bissectriz do ângulo* $C' \hat{A}' D'$. *Anàlogamente, o traço vertical do bissector de* $A\widehat{CD}B$ *será a bissectriz de* $A'' \hat{C}'' B''$. *Estas duas bissectrizes coincidirão, respectivamente, com a projecção horizontal e com a projecção vertical da intersecção* r *dos bissectores considerados. Basta portanto achar a intersecção de* r *com o bissector de um outro diedro interno de* [ABCD], *para ter o centro* O *da esfera em questão, cujas projecções se determinam depois fàcilmente.*

2582 — São dados: uma recta d oblíqua, um triângulo [ABC] existente num plano oblíquo e uma recta $e \perp \nu_0$, que não passe por nenhum dos pontos A, B, C. Fazer rodar $[ABC]$ em torno de e, de modo que a sua sombra sobre ν_0, paralelamente a d, se reduza a um segmento de recta. R: *Para que a sombra do triângulo* [ABC] *sobre* ν_0, *paralelamente a* d *se reduza a um segmento de recta, é necessário e suficiente que o seu plano se torne paralelo a* d. *Determine-se pois a intersecção* I *de* e *com* ABC *e conduza-se por* I *a recta* $d_1 // d$. *Bastará agora fazer rodar o plano* ABC *em tôrno de* e, *de modo que o traço horizontal de* ABC *fique a passar pelo traço horizontal de* d_1. *(Duas soluções, uma ou nenhuma).*

2583 — São dados: um plano α oblíquo, definido por h_α e v_α, um ponto $P \cdot / \alpha$ e um tetraedro escaleno, assente por uma das faces em ν_0. Construir um tetraedro semelhante ao primeiro, com um dos vértices em P e a face oposta assente em α, ficando um dos lados desta face paralelo a ν_0. (A face do tetraedro pedido assente em α, deve ser semelhante à face do tetraedro dado, assente em ν_0). R: *Seja* [ABCD] *o tetraedro dado, com* $[ABC] -\cdot- \nu_0$. *Em tetraedros semelhantes, a razão entre alturas correspondentes a faces homólogas e igual à razão de semelhança. Determine-se pois a distância* d *de* P *a* α, *e considere-se um plano de nível* ν *cuja distância ao vértice* D *do tetraedro dado seja igual a* d; *pondo* $A_0 \equiv \nu \cdot AD, B_0 \equiv \nu \cdot BD, C_0 \equiv \nu \cdot CD$, *será* $[A_0 B_0 C_0 D]$ *um tetraedro igual ao pedido, com* $[A_0 B_0 C_0] \sim [ABC]$. *Basta agora determinar a projecção ortogonal* P_1 *de* P *sobre* α *e construir sobre* α *(mediante um rebatimento sobre* ν_0*) um triângulo* $[A_1 B_1 C_1] = [A_0 B_0 C_0]$, *ficando por exemplo* $A_1 B_1 // h_\alpha$ *de modo que se tenha:* $\text{dist}(A_1, P_1) = \text{dist}(A'_0, D')$, $\text{dist}(B_1, P_1) = \text{dist}(B'_0, D')$, $\text{dist}(C_1, P_1) = \text{dist}(C'_0, D')$.

2584 — Dados dois pontos A, B distintos e uma recta t, colocados em posição genérica entre si e a respeito dos planos de projecção, determine sobre t um ponto P de modo que a distância de P a A esteja para a distância de P a B numa razão dada r. Execute o desenho para $r = 2$. R: *Faça-se rodar* B *em em torno de* t *de modo a colocá-lo sobre o plano* At. *O problema pode agora resolver-se, num rebatimento recorrendo a um teorema elementar de geometria plana. (Duas soluções, uma ou nenhuma).*

2585 — Dadas $r, s // \nu_0$, com um ponto comum M, determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $\text{dist}(P, M) = 2\,\text{dist}(P, r) = 3\,\text{dist}(P, s)$. Discussão. R: *Seja* P *um ponto genérico do lugar geométrico. Imaginando rebatidos sobre o plano* $\nu \equiv (r, s)$ *os dois planos* Pr *e* Ps, *haverá dois pontos* P_1, P_2 *sobre* ν *que representam* P *nesses rebatimentos, devendo ter-se:* $\text{dist}(P_1, M) = \text{dist}(P_2, M) = 2\,\text{dist}(P_1, r) = 3\,\text{dist}(P_2, s)$, *Isto indica o caminho a seguir: Tomem-se ao arbítrio* P_1, P_2 *sobre* ν *(no interior dos dois ângulos maiores formados por* r, s*), de modo que sejam verificadas as precedentes condições de distancias. O ponto* P, *transformado em* P_1 *e* P_2 *nos dois rebatimentos, poderá ser determinado (se existe) invertendo a técnica do rebatimento: as perpendiculares baixadas de* P_1, P_2, *respectivamente, sobre* r *e* s *devem encontrar-se em* P'; *a cota de* P *em relação a* ν *será, em valor absoluto, um dos catetos dum triângulo de rebatimento, de que o outro cateto é a distância de* P' *a* r' *e a hipotenusa a distância de* P'_1 *a* r'. *O número de pontos* P *nestas condições poderá ser* 2, 1 *ou* 0. *Unindo* P *com* M *tem-se o lugar geomé-*

trico pedido, que será portanto constituído por duas rectas, por uma recta ou só por M, *conforme o ângulo* $\widehat{r,s}$ *for menor, igual ou maior que*

$$\text{arc sen } 1/2 + \text{arc sen } 1/3 \, .$$

2586 — Dadas a, b, c oblíquas, tendo a, b um ponto comum e sendo c não complana com as primeiras, determine as projecções duma esfera com o centro sobre a recta c e tangente às rectas a, b.

2587 — Dada uma recta r oblíqua que não intersecte LT, conduzir por r um plano que faça com LT um ângulo dado. Discussão. R: *Por um ponto* M *qualquer de* r, *conduza-se* t//LT *e um plano* $\alpha \perp \nu_0$, *que forme com* LT *o ângulo dado. Basta agora fazer rodar* α *em torno de* t, *de modo que* α *fique a conter a recta* r, *para o que pode utilizar-se uma mudança de plano que torne a recta* t *projectante* $(L_1T_1 \perp LT)$.

Soluções dos n.^{os} 2580 a 2587 de J. Sebastião e Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de frequência — 1946-47 — 1.º Ponto.**

2588 — Primitivar a função

$$y=(x^4+8x+4)/[x^2(x^2+2x+2)] \, .$$

R: *Decompondo a fracção em elementos simples* (*ou aplicando o método de Fubini*), *vem*

$$Py = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4}\log(x^2+2x+2) - $$
$$-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C \, .$$

2589 — Determinar os seis primeiros termos do desenvolvimento da função $y = \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{tag} x$ em série de potências de x. R: $y = 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{360}x^4 + \cdots$.

2590 — Em que pontos da curva $y = 1 - \operatorname{sen} x$ se anula a segunda derivada direccional da função $f(x,y) = (x-y)^2$ segundo a direcção da normal? R: *Pontos de coordenadas* $(2k\pi, 1)$ (*com* k *inteiro*).

2.º Ponto

2591 — Primitivar a função

$$y=(x^5-8x^2-8x-4)/[x^3(x^2+2x+2)^2] \, .$$

R: $Py = \frac{1}{2x^2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + C$.

2592 — Determinar quatro termos não nulos do desenvolvimento de $y = \operatorname{arctg} x/(x^2 \operatorname{sen} x)$ em série de potências de x. R:

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} + \frac{13}{90}x^2 + \frac{1}{30}x^4 + \cdots \, .$$

2593 — Sendo $u = xy + z$, com $x = \cos\varphi\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $z = \operatorname{sen}\theta$ calcular $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta}$. R:

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \cos^2\theta\cos 2\varphi \, ; \; \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta} = -\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\varphi \, .$$

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência — 1946-47 — 1.º Ponto.**

2594 — Determinar os extremos da função $f(x,y) = (x^2-y^2)^2$. R: *A função dada tem como linhas de mínimos as rectas* $y+x=0$ *e* $y-x=0$.

2595 — Determinar o integral geral da equação diferencial $x\cos x\frac{dy}{dx} + y(x\operatorname{sen} x + \cos x) = 1$.
R: *É uma equação linear de 1.ª ordem:* $y = (kx-1)\sec x$.

2596 — Determinar a área interior à curva $\rho = \cos^2\theta$ e à circunferência $\rho = 3/4$. R: $(7\sqrt{3}-2\pi)/64$.

2.º Ponto

2597 — Fazer a mudança de variáveis $\theta = \cos t$ na equação $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{\theta}{1-\theta^2}\frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\rho}{1-\theta^2} = 0$. R: $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho = 0$.

2598 — Resolver o sistema

$$\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ x' + y' - x + y = t \, . \end{cases}$$

R: $x = c_1(t+2) + c_2 - (t+1)$ *e* $y = c_1 t + c_2$.

2599 — Calcular o integral duplo da função $f(x,y) = x+y$ na área limitada pelas linhas de equações $y=0$, $y^2 = 2-x$ e $y = \sqrt{3}x$. R: Tem-se

$$\iint (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} (x+y)\,dy +$$
$$+ \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} (x+y)\,dy = \frac{47}{60} + \frac{\sqrt{3}}{6} \, .$$

Soluções dos n.^{os} 2588 a 2599 de L. Mendonça de Albuquerque.

F. C. P. — Calculo — **2.º exame de frequência, 1947.**

I

2600 — Determinar a linha integral solução da equação $y'' - 5y' + 6y = 4x^2 e^x$, que passa pelo ponto (0,7) *onde* $y' = 13$. R: *Fazendo* $y = ze^x$ *vem:* $z'' - 3z' + 2z = 4x^2$, $z_0 = 7$, $z'_0 = 6$. *Aplicando o método de Hea* *viside temos:* $\overline{z}=7/p+6/p^2+4/p^3$, *donde* $z=7+6x+2x^2$ *e* $y=(7+6x+2x^2)\,e^x$.

2601 — Integrar a equação $xy'+y=x\log x$. R: *Temos* $y=c/x+\log x\cdot x/2-x/4$.

II

2602 — Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\rho\,d\theta$ começando por considerar θ constante. O domínio D situado no 1.º quadrante é limitado pelas linhas $\theta=0$, $\theta=\pi/5$, $\rho=\sqrt{2}$ e $\rho^2=1/\cos 2\theta$. R: $\displaystyle I=\int_0^{\pi/5}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta\int_{1/\sqrt{\cos 2\theta}}^{\sqrt{2}}d\rho=$ $\displaystyle=\int_0^{\pi/5}\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta-\int_0^{\pi/5}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}\,d\theta=\left[-\sqrt{2\cos 2\theta}+\right.$ $\left.+1/2\log\cos 2\theta\right]_0^{\pi/5}=\sqrt{2}-\sqrt{2\cos 2\pi/5}+1/2\log\cos 2\pi/5$.

2603 — Determinar as equações da normal principal da linha: $x^y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=6$ no ponto $(1,1,2)$. R: *Temos* $x'=1$; $y'=1$; $z'=-1$; $x''=0$; $y''=1$; $z''=-2$. As equações da normal principal são:

$$\begin{cases} X+Y-Z=0 \\ X-2Z-Z+3=0. \end{cases}$$

III

2604 — Integrar a equação

$$(2x^2-2x+1)\,y''-2\,(2x-1)\,y'+4y=2$$

sabendo que um dos integrais particulares da equação sem 2.º membro é a derivada do outro. R: *Temos*

$$(2x^2-2x+1)\,y_1''-2\,(2x-1)\,y_1'+4y_1=0$$

derivando: $(2x^2-2x+1)\,y_1'''+(4x-2)\,y_1''-2\,(2x-1)\,y_1''-$ $-4y_1'+4y_1'=0$ *e atendendo a que* y_1' *é solução temos:* $(4x-2)\,y_1''-4y_1'=0$, $y_1'=z$, $(4x-2)\,z'-4z=0$, $z=c\,(4x-2)$ *e portanto:* $y_1=c\,(2x^2-2x)=c_1\,(x^2-x)$

$$y_2=y_1'=c_2\,(2x-1).$$

Logo $y=c_1\,(x^2-x)+c_2\,(2x-1)+1/2$.

Soluções dos n.os 2600 a 2604 de Jayme Rios de Souza.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — Alguns exercícios do 1.º exame de frequência de 1947-48.

2605 — Tomando por volume aproximado da coroa esférica $4\pi r^2 h$, onde h é a espessura infinitesimal da coroa, qual é a ordem do infinitésimo desprezado: *a*) se r for o raio da esfera interior *b*) se r for o raio médio. R: *a*) *Tem-se* $V_c=4\pi\,(3r^2h+3rh^2+h^3)/3$ *e portanto o infinitésimo desprezado é* $4\pi/3\,(3r\,h^2+h^3)$, *evidentemente de 2.ª ordem em relação a* h. *b*) $\displaystyle V_c==4\pi\left(3r^2h+\frac{h^3}{4}\right)/3$, *logo o infinitésimo desprezado é* $\pi h^3/3$, *de 3.ª ordem em relação a* h.

2606 — Mostre que no intervalo $(0,\pi/2)$ é sempre $\displaystyle\frac{2}{\pi}<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$. R: *Considere a função* $\displaystyle y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. *É* $y\to 1$ *quando* $x\to 0$ *e* $y\to 2/\pi$ *quando* $x\to\pi/2$; *por outro lado em* $(0,\pi/2)$ *é* $\displaystyle y'=\frac{(x-\operatorname{tg} x)\cos x}{x}<0$ *visto* $\operatorname{tang} x>x$, *e portanto* y *decrescente.*

2607 — Sejam OAP e OBP os arcos de curva representativos das funções $y=+\sqrt{x}$ e $y=x^2$ no intervalo $[0,1]$ onde $O\,(0,0)$ e $P\,(1,1)$. O comprimento do segmento variável AB, perpendicular a OP, é no intervalo considerado uma função de x. Mostre que esta função está, no referido intervalo, nas condições do teorema de Rolle. Calcule o valor de x para o qual é máximo o comprimento de AB. R: *A função procurada é* $y=\sqrt{2}\,(\sqrt{x}-x)$, *contínua em* $[0,1]$, *derivável em* $(0,1)$ e $y\,(0)=y\,(1)=0$. *Está pois nas condições exigidas pelo teorema de Rolle. É máxima para* $x=1/4$.

2608 — Seja $y=f(x)$ a função real da variável real x assim definida:

$y=2x^2$ para $x\neq\pm 1/n$,

$y=4x^2-|x|$ para $x=\pm 1/n$ (n inteiro $\neq 0$).

Estude a continuidade desta função e a existência e continuidade da sua derivada no intervalo $[-1,1]$. R: *A função é contínua para todos os valores de* x *excepto para os da forma* $1/n\neq\pm 1/2$ *visto* $2x^2=4x^2-$ $-|x|$ *para* $x=\pm 1/2$. *Como para* $h\to 0$, *positivo ou negativo, é* $[2\,(1/2+h)^2-1/2]/h\to 2$, $[2\,(-1/2+h)^2-$ $-1/2]/h\to -2$, $(4h^2-h)/h\to -1$ *e* $2h^2/h\to 0$ *podemos concluir que a função dada é derivavel em todos os pontos excepto para* $x=1/n\neq\pm 1/2$ *e* $x=0$ *que são também pontos de descontinuidade da sua derivada.*

2609 — Estude as variações da função $f(x)=e^{-1/x^2}$ para $x\neq 0$, $f(x)=0$ para $x=0$. R: *Se* $x\to 0$, $e^{-1/x^2}\to 0$ *e como para* $h\to 0$, *positivo ou negativo,* $e^{-1/h^2}/h\to 0$ *podemos concluir que a função é contínua e derivável em todos os seus pontos. Mínima para* $x=0$; *pontos de inflexão* $x=\pm\sqrt{2/3}$; $y''>0$ *para* $\sqrt{43}<x<\sqrt{2/3}$, *negativa para todos os outros valores de* x; *assíntota* $y=1$.

2610 — Calcule

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$, *b*) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\,(\cos^2\log x-\operatorname{sen}^2\log x)}$

c) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{2/3}}$ *d*) $\displaystyle\int(a^2-x^2)^{5/2}\,dx$ por redução sucessiva. R: *Os dois primeiros são imediatos, o segundo é uma irracional binómia e para o terceiro basta fazer* $\int(a^2-x^2)^{5/2}\,dx=x\,(a^2-x^2)^{5/2}+5\int x^2\,(a^2-x^2)^{5/2-1}\,dx=$ $=x\,(a^2-x^2)^{5/2}+5\int[a^2-(a^2-x^2)]\,(a^2-x^2)^{5/2-1}\,dx$, *etc.*

Soluções dos n.os 2605 a 2610 de F. Carvalho Araújo

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame ordinário — 1948

Parte Prática

2611 — Integrar a equação $xr = ap$

2612 — Achar as geodésicas da superfície:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = k\theta$$

Parte Teórica

2613 — Conceitos de geodésica. Sua equivalência.

2614 — Conceitos e propriedades das funções harmónicas.

2615 — Determinação dos eixos e momentos principais de inércia num ponto qualquer do espaço, conhecidos os mesmos elementos em relação ao centro de gravidade.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame extraordinário — 1948

Parte Prática

2616 — Integrar a equação: $s = x^2 + y^2$.

2617 — Determinar a curva plana, passando pelos pontos $A\,(1,0)$ e $B\,(2,1)$ para o qual o integral $\int_1^2 (x^2+y'^2)\,dx$ é estacionário, sob a condição de

$$\int_1^2 y\log x\,dx = 3.$$

Parte Teórica

2618 — Equação de Monge-Ampère. Método da dualidade, na integração das equações de 2.º ordem às derivadas parciais.

2619 — Parentesis de Poisson e Lagrange. Exprimir, por seu intermédio, as condições de completa canonicidade.

2620 — Potenciais. Definição e propriedades gerais.

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

University of Manchester — Honours School of Mathematics — **Part I — 12 de Junho de 1945.** (duração 3 h).

2621 — (i) Prove that a determinant does not change its value if its rows and columns are interchanged.

Hence show that

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & j \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -j & -k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) Show that

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^4\,(1+x)^4\,(1+x^2)^2.$$

2622 — Obtain the real quadratic factors of

$$x^{2n} - 2x^n\,y^n\cos n\theta + y^{2n}.$$

Show that

$$2^{1-n} = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{2k+1}{2n}\,\pi.$$

2623 — Define a point of accumulation of a sequence of real numbers, and state the theorem of Bolzano-Weierstrass concerning such a point.

Prove that the greatest point of accumulation of a sequence is the upper limit of the sequence, and that the least point of accumulation is the lower limit.

Find the points of accumulation and the upper and lower limits of the sequence

$$\left\{ \frac{2n-1}{n}\sin\frac{\pi n}{2} \right\}.$$

2624 — Show that if $f'(x)$ exists and is monotonically decreasing in $a \le x \le b$, then

$$f'(b) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(a).$$

Hence prove that, for $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x};$$

and deduce that, for every positive integer n,

$$\log(n+1) < 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n < \log(n+1) + 1.$$

2625 — If

(i) $a_n > 0, \; b_n > 0$ for all n

(ii) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0,$

show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge and diverge together.

Discuss the convergence of the series

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\log(n+1) - \log n}{n}}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2n^2-1}{n^6+2n^4+3}}.$

2626 — (i) Show that, for $|r| < 1$,

$$r \sin \varphi - r^3 \sin 3\varphi + r^5 \sin 5\varphi - r^7 \sin 7\varphi + \cdots = \frac{r(1-r^2)\sin\varphi}{1+r^2\cos 2\varphi + r^4}.$$

(ii) Sum to infinity

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

2627 — Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges or diverges according as $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$ is < 1 or > 1.

Deduce the formula for the radius of convergence of any power series.

Find the radius of convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

2628 — By meaus of the substitution $x = \frac{\mu t + \nu}{t+1}$ where μ, ν are appropriate constants, or otherwise, find the integral

$$\int \frac{x\,dx}{(3x^2+8x+2)\sqrt{x^2+4x+1}}.$$

2629 — Define a Riemann integral.

By dividing the interval $0 \leq x \leq 1$ into parts whose lengths are in the ratio $1:2:3:\cdots:n$, show that, as $n \to \infty$,

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx,$$

where $f(x)$ is any function continuous in $0 \leq x \leq 1$.

Hence, or otherwise, show that

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2(n+1)^2 + k^2(k+1)^2}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2630 — Solve:

(i) $(y - xy')^2 = y'$;

(ii) $y'''' + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

O exame incluia ainda outra prova de matemáticas aplicadas (respectivamente Geometria e Mecânica).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

66 — HEITLER, W. — **Elementary Wave Mechanics**. VIII + 136 pp. Clarendon Press, Oxford, 1945. Preço 7s 6d.

Este pequeno livro — uma das melhores introduções elementares à Mecânica Ondulatória que conhecemos — parece ter sobretudo por fim conduzir o leitor à compreensão clara da natureza essencialmente não clássica, isto é quântica, do fenómeno que é talvez o mais fundamental da química: a valência homopolar. Depois de mostrar a necessidade da descrição ondulatória das partículas e de deduzir a equação de onda para estados estacionários de um só electrão (equação estática de Schrödinger), trata o átomo de hidrógénio e discute a sua quantificação e o efeito Zeeman. Vem a seguir uma exposição simplificada mas admirável do problema do átomo de hélio (problema de dois electrões) por meio da equação das ondas estacionárias no chamado «espaço de configuração» a seis dimensões. Desprezando primeiramente a interacção dos dois electrões, põe em evidência a relação íntima que existe entre o princípio de exclusão de Pauli e a propriedade de indiscernibilidade de partículas da mesma espécie e mostra como esta propriedade restringe as funções de onda às classes simétrica e antisimétrica relativamente às permutacões das posições das partículas. A interacção dos electrões é analizada então pela teoria das perturbações, o que faz aparecer o fenómeno caracteristicamente quântico da «energia de troca» a que correspondem forças de natureza não clássica. A origem destas forças é afinal a indiscernibilidade das partículas de mesma espécie. A mesma propriedade fundamental aparece com um papel dominante no capítulo sobre a teoria da ligação química homopolar e no capítulo final sobre valência, onde são tratadas, entre outras questões, a molécula de hidrogénio, os gazes inertes, a relação entre a valência e o spin, a valência do carbono, etc.

A clareza e o poder didactico destes dois últimos capítulos não podem ser excedidos, o que de resto era de esperar da parte do autor, um dos físicos teóricos que mais contribuiram para a criação da química quântica. Devemos no entanto chamar a atenção para três características do livro que consideramos como defeitos.

1.º O autor, resolutamente indeterminista, dá às funções de onda da Mecânica Ondulatória uma interpretação essencialmente probabilística de acordo com as ideias de Born e da «escola de Copenhague». Isto pode induzir no espírito dos principiantes a ideia errónea que essa interpretação faz parte dos fundamentos da Mecânica Ondulatória, quando é certo que as funções de onda podem ser interpretadas duma maneira muito diferente, compatível com um determinismo essencial dos fenómenos e em que a noção de probabilidade cede o lugar à noção mais geral de intensidade (dos valores possíveis das grandezas), sendo por exemplo a noção de probabilidade de presença duma partícula num elemento de volume substituida pela noção de intensidade de presença da partícula nesse volume.

2.º As funções de onda nos espaços de configuração para sistemas de mais de uma partícula são consideradas da mesma natureza que as funções de onda para sistemas de uma única partícula. Ora, existem diferenças essenciais entre estes dois casos. Ao passo que as funções de onda de sistemas «monoparticulares» descrevem estados reais, as funções no espaço de configuração para sistemas «pluriparticulares» servem apenas para descrever os estados virtuais, isto é os estados em que se encontrariam os sistemas se as partículas que os compõem, em vez de se encontrarem, num determinado momento, nas posições que ocupam efectivamente se encontrassem em qualquer outra posição. É precisamente este carácter puramente virtual das funções de onda que permite compreender a significação física dos espaços de configuração e da indiscernibilidade.

3.º A dedução da equação de onda para um sistema pluriparticular é feita por uma generalização da regra da Mecânica Ondulatória que faz corresponder os operadores de derivação espacial e temporal aos momentos e à energia. Ora, é possível deduzir esta equação por um processo mais fundamental, utilizando apenas a indiscernibilidade de partículas da mesma espécie.

As três características que acabamos de apontar são de resto comuns à grande maioria dos livros e memórias de física teórica quântica. Por um lado a vaga de indeterminismo que assola a ciência contemporânea e a que poucos físicos têm resistido, vai obscurecendo os fundamentos da Mecânica Ondulatória, interpretando infundadamente as chamadas relações de «incerteza» das medidas simultâneas de grandezas «canonicamente conjugadas» e fazendo uma separação arbitrária e cosmologicamente insustentável entre observador e objecto observado. Por outro lado, a confusão entre funções de onda de estados reais e funções de onda de estados virtuais não deixa ver que é possível estabelecer uma Mecânica Ondulatória cujas funções de onda descrevam duma maneira não arbitrária o conjunto dos corpúsculos elementares do espaço-tempo sem separações entre observadores e sistemas observados.

António Gião

67 — FLETCHER, A., MILLER. J. C. P. and ROSENHEAD, L. — **An Index of Mathematical Tables,** London, 1946 — Scientific Computing Service, Ltd.

Matemáticos, físicos, engenheiros, astrónomos, estatísticos e todos aqueles que, acidental ou frequentemente, têm de utilizar ou elaborar tabelas de funções para a investigação ou para as variadas aplicações à técnica, ficaram devendo aos Autores deste Index um enorme serviço pela economia de tempo nas consultas de bibliotecas, ou na repetição escusada de cálculos, e pela fonte de numerosas e preciosas informações que a publicação fornece guiando e facilitando a construção de novas tabelas.

Não se trata duma simples catalogação das tabelas publicadas até hoje desde o século XVI mas sim duma ordenada e inteligente compilação.

Para poder ser utilizado com proveito o Index, é indispensável a leitura da Introdução onde os Autores indicam como planearam a obra e nos dão indicações da maneira de dela nos servirmos. Apresentam-nos em seguida uma lista das abreviaturas utilizadas para indicar os meios de interpolação que uma tabela referida nos fornece.

Segue-se a 1.ª parte do Índice, relativo às funções, compreendendo 24 secções, cada uma agrupando um tipo, ou congéneres, de funções. É impossível resumir o conteúdo destas secções apontando a simples título de ilustração: números primos, potências de números, factoriais, coeficientes binomiais, números de Bernoulli e de Euler, logaritmos, funções trigonométricas naturais e seus logaritmos, funções circulares inversas, funções hiperpólicas, função Γ e B, função de Legendre. Bessel, elípticas, etc, etc.

Para cada tabela de funções citada é indicado o número de decimais ou de algarismos significativos, os valores extremos e a equidistância dos valores do argumento, as facilidades que a tabela fornece para efeitos de interpolação, os erros que dada edição apresenta, etc.

A 2.ª parte contém a Bibliografia por autores das publicações abrangidas na 1.ª parte.

Termina o Index por um índice analítico da 1.ª parte.

Anteriormente à publicação desta obra eram únicos auxiliares uma lista elaborada pelo Dr. Comrie, do «Scientific Computing Service» publicado em «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society» e o jornal americano «Mathematical Tables and other Aids to Computation», cuja existência em Portugal ignoramos.

Julgamos que todas as bibliotecas científicas, observatórios, laboratórios, centros de estudos científicos e vários dos nossos serviços públicos devem possuir esta obra como valioso auxiliar.

Manuel Zaluar

68 — COLEROOK, F. M. — **Basic Mathematics for Radio Students,** Wireless Word — Ilife & Sons Ltd. — Dorset House, Stamford Str., London.

O livro pretende dar o esssncial para que o estudante de assuntos de rádio possa abordar os problemas que este lhe põe, e consegue-o. Nos primeiros cinco capítulos o autor estuda gradualmente as *idéias fundamentais da álgebra*, ou melhor a simbologia da álgebra e as operações algébricas, depois as *equações e os números complexos,* a *continuidade*, os *limites*, as *séries* e por fim *noções de geometria e trigonometria*, tendo sempre em vista as suas aplicações.

No capítulo VI aborda o estudo do cálculo diferencial e integral e finalmente no capítulo VII faz aplicação do estudo feito a problemas da rádio, ou melhor de electricidade aplicada.

O livro é de formato reduzido com 270 páginas; é por isso um livro essencialmente prático onde os factos físicos, em geral, dão a sugestão ou justificação da teoria. Não põe, no entanto, inteiramente de lado toda a justificação teórica da matéria apresentada.

Em princípio o livro dirige-se aos estudantes de rádio, mas, como o autor diz, as idéias básicas da matemática são comuns a todas as suas aplicações e o livro pode assim ser útil a todos os que queiram estudar a física com vista ás suas imediatas aplicações.

José da Silva Paulo

69 — FERREIRA DE MACEDO, A. A. — **A Geometria ao alcance de toda a gente** — Vol. 2 — Col. «Cosmos».

Neste volume apresenta o autor o estudo intuitivo das áreas e volumes de alguns sólidos, precedidos de um breve mas essencial estudo da geometria do espaço.

Pela clareza da matéria exposta recomenda-se a todo o indivíduo que pretenda adquirir uma cultura elementar sobre a geometria; pela sistematização, precisão e exactidão dos conceitos, aconselha-se a sua leitura a todo o candidato a uma escola superior e aos alunos dos anos mais adiantados do curso liceal. Em especial para os alunos que frequentam actualmente o 5.º ano, o livro é da máxima utilidade por estar em flagrante harmonia com os programas vigentes.

Este segundo volume bem como o primeiro, constituem preciosos e valiosos livros de iniciação matemática, pela segurança científica e exposição pedagógica que uma leitura cuidadosa põe em evidência. Como exemplo veja-se logo de início no livro I pág. 19 a maneira como o autor apresenta a «distância entre dois pontos». Na frase — . . . é o que acontece quando nos encontramos num terreno plano, que podemos percorrer entre (dois pontos) A e B . . . , verifica-se não só a finalidade de aclarar um conceito, como a de evitar induções que levem erradamente a supor-se que a distância mínima entre dois pontos seja sempre um segmento de recta.

Mais adiante, a páginas 27, dá o autor o significado da linha recta. Para isso materializa-a no traço obtido por uma ponta de um lápis que corre ao longo de uma régua assente num papel. Se bem que não tire dessa experiência a definição de linha recta como eixo de rotação (por não lhe interessar na orientação tomada), completa-a por fazer indirectamente alusão a tal definição.

Ainda no mesmo livro no Cap. IX apresenta aplicações práticas dos conhecimentos expostos.

No segundo livro destaca-se a maneira como o autor introduz a noção de perpendicularidade entre recta e plano, e as referências feitas à divisão de ângulos e de arco de circunferência.

Resumindo pode afirmar-se, que estes dois livros, escritos numa exposição corrente, são notáveis pelo rigor e simplicidade com que o autor trata as questões expostas.

Joaquim de S. M. G. Calado

MONOGRAFIAS DIDÁCTICAS SÔBRE ANÁLISE MATEMÁTICA: 1

SÉRIES NUMÉRICAS

por

Lelio Gama

Ex-professor Catedrático da Faculdade Nacional de Filosofia; da Academia Brasileira de Ciências; do Observatório Nacional (Rio de Janeiro

Capítulo I — Complementos de cálculo dos limites.
Capítulo II — Noções fundamentais sobre os conjuntos de números reais ou complexos.
Capítulo III — Sucessões numéricas.
Capítulo IV — Séries numéricas.
Capítulo V — Séries positivas fundamentais. Escalas de convergência.
Capítulo VI — Redução às séries fundamentais.
Capítulo VII — Princípios de formação de critérios de convergência.
Capítulo VIII — Principais escalas de critérios de convergência.
Capítulo IX — Critérios aplicáveis às séries não positivas.
Capítulo X — Convergência das séries de potências.
Capítulo XI — Processos elementares de somação.
Capítulo XII — Somação de algumas séries de potências.
Capítulo XIII — Adição e multiplicação de séries.

A primeira monografia em lingua portuguesa sobre a teoria das séries numéricas.
Livro indispensável na biblioteca dos engenheiros e estudantes de matemática.
A elegância da exposição alia-se ao rigor num livro de carácter didáctico.
Contém cerca de 300 exercícios criteriosamente seleccionados.

PUBLICAÇÃO DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

INTEGRAL DE RIEMANN

por

Ruy Luís Gomes

— Noções fundamentais da topologia do espaço euclideano.
— Elementos da teoria das funções numéricas de um ponto do espaço euclideano.
— Teoria da medida à Jordan.
— Definição, interpretação geométrica e propriedades dos integrais inferior e superior de Darboux.
— Integral de Riemann.
— Integral de Riemann-Stieltjes.
— Generalizações.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará quatro números por ano.
Preço: 10 escudos cada número

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de 30 escudos, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automáticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Tôdas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes: 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 23 cada 6,50 escudos; 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 33 cada 10 escudos; n.os 1-4, 2.a ed., 40 escudos.

COLECÇÕES COMPLETAS

O pequeno número de colecções completas ainda existentes destina-se a bibliotecas de escolas e estabelecimentos oficiais sendo a sua venda feita ao preço de 330 escudos (colecção dos 30 primeiros números).

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição dêstes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.

1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.

2.º exame de frequência — número de Maio.

Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

2.a EDIÇÃO DO VOL. 1 (N.os 1 a 4)

Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções, no formato e características actuais e com textos cuidadosamente revistos. À nova edição do primeiro ano seguir-se-á a do segundo ano, também com o texto revisto e no formato actual.

Preço da 2.a edição do volume 1: 40 escudos.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N