GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IX **N.° 36** MAIO-1948

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa - N

NOS PRÓXIMOS NÚMEROS DE «GAZETA DE MATEMÁTICA»:

Caracterização dos espaços topológicos regulares e normais por meio de coberturas, por *J. Abdelhay*

Les géométries de figures orientées, por *Paul Belgodère*

Conchoïdes de cercles et équation de Riccati, por *Gabriel Viguier*

O teorema dos residuos e o cálculo da soma de uma série, por *João Farinha*

Um teorema sôbre a estrutura dos divisores de um grupo, por *Fernando R. Dias Agudo*

Sôbre a resolução numérica da equação, por *José Morgado* e *Laureano Barros*

As definições correntes de probabilidade, por *Maurice Fréchet* (trad.)

Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação (continuação) por *J. Sebastião e Silva*

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

ANO IX-N.º 36 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1948

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Sur le déficit isopérimétrique d'un polygone formé par des arcs de cercle

par H. Hadwiger (Berne)

Si, dans la présente notice, nous tenons à communiquer quelques relations géométriques élémentaires concernant le déficit isopérimétrique d'un polygone plan formé par des arcs de cercle, c'est tout d'abord parce que ces constatations sont facilement vérifiables.

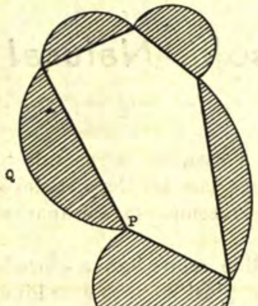


Fig. 1

Considérons un polygone convexe P. Nous lui adjoignons un polygone Q formé par des arcs de cercle et tracé selon le procédé suivant: chaque côté de P est remplacé par un arc de cercle reliant ses deux extrémités et dirigé contre le dehors (voir fig. 1).

Pour éviter une intersection des arcs de Q, nous exigeons ce que nous appellerons la propriété (*): la somme des deux angles inscrits dans les segments de cercle formés par deux arcs consécutifs ne doit pas dépasser 2π.

Les arcs consécutifs d'un polygone de la propriété (*) forment une courbe fermée, sans points doubles, circonscrite au polygone initial P. Désignons respectivement par L et $\overline{L}$ la longueur des polygones Q et P, par F et $\overline{F}$ l'aire engendrée par Q et P, et considérons le déficit isopérimétrique

$$D = L^2 - 4\pi F \tag{1}$$

du polygone Q. Selon l'inégalité isopérimétrique classique on a

$$D \geq 0 .$$

Comme on sait, il existe un polygone convexe P_0 inscrit à un cercle K et ayant les mêmes côtés que P dans le même ordre cyclique. Si nous remplaçons les côtés de P_0 par des arcs de cercle congruents aux arcs correspondants employés pour remplacer les côtés de P, nous obtenons un polygone Q_0 formé par les mêmes arcs que Q et ayant également — ceci est manifeste — la propriété (*) (voir fig. 2).

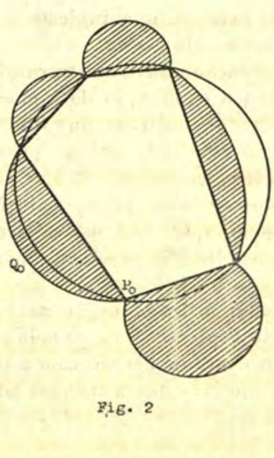


Fig. 2

En analogie à ce qui précède, nous désignerons par L_0 et $\overline{L}_0$ la longueur des polygones Q_0 et P_0, par F_0 et $\overline{F}_0$ leurs aires respectives. Posons également

$$D_0 = L_0^2 - 4\pi F_0 \tag{2}$$

Il est évident que

$$D - D_0 = 4\pi(\overline{F}_0 - \overline{F}) . \tag{3}$$

On en déduit très simplement le théorème géométrique suivant bien connu: Si l'on choisit les arcs de Q de telle façon (désignons par Q' ce polygone bien défini formé par des arcs de cercle et circonscrit au polygone P) que le polygone Q_0', formé par les mêmes arcs que Q', soit congruent au cercle K (K, considéré comme polygone en arcs de cercle, a la propriété (*)), on aura D_0', $= 0$ et, d'après la formule (3)

$$\overline{F} = \overline{F}_0 - \frac{D'}{4\pi} ; \tag{4}$$

à cause de $D' \geqq 0$, on en déduit

$$\overline{F} \leqq \overline{F}_0, \tag{5}$$

l'égalité étant réalisée dans le cas où Q' est un cercle, et seulement dans ce cas. Le fait qu'un polygone aux côtés donnés est inscrit à un cercle est donc une condition nécessaire et suffisante pour que son aire soit un maximum.

Comparons encore les déficits isopérimétriques des deux polygones en arcs de cercle Q et Q'. Selon (3) nous avons

$$D - D_0 = 4\pi(\overline{F}_0 - \overline{F})$$

et

$$D' - D_0' = 4\pi(\overline{F}_0 - \overline{F}) .$$

Comme $D_0' = 0$, on en déduit

$$D = D' + D_0 \tag{6}$$

et, à cause de $D_0 \geqq 0$,

$$D \geqq D' . \tag{7}$$

Cela signifie que le déficit isopérimétrique D d'un polygone Q de la propriété (*), formé des arcs de cercle et circonscrit à un polygone convexe donné P, prend la plus petite valeur possible, quand Q est formé par les mêmes arcs que le cercle K circonscrit au polygone P_0, ayant les mêmes côtés que P. Cette condition est nécessaire et suffisante.

A função exponencial em Filosofia Natural

por **Luís Freire** (Recife)

Newton chamava de Filosofia Natural, expressão essa conservada pelos autores inglezes, ao que as demais escolas chamam de Física.

Aquela denominação visava mostrar iniludivelmente que se procurava a explicação dos fenomenos físicos recorrendo a métodos positivos, que tinham por cenário o campo experimental, que se processavam no seio da Natureza, pois.

E isso em contraposição às especulações apriorísticas dos filósofos que, até então, tentavam fora da Natureza a explicação dos seus próprios fenómenos.

Pode-se extender a denominação de Filosofia Natural ao conjunto explicativo da ciência experimental por inteiro — isso está de acordo com a índole da expressão, com os motivos que a fizeram adotar.

É o que faremos.

Conta-nos uma lenda árabe que, em recompensa à sua descoberta do jogo de xadrez, um sudito dum grande rei pediu *apenas* o seguinte:

Um grão de trigo sobre a primeira casa, dois sobre a segunda, quatro sobre a terceira, e nessa dupla razão até chegar a casa 64; a soma de todos os grãos de trigo que deveriam ser depositados sobre o taboleiro, seria a sua recompensa, em aparência, das mais modestas.

Ora, esse pedido representava a produção mundial de trigo durante quási 80 anos e na hipótese de serem semeados todos os continentes!

O número de grãos do trigo pedido seria este, verdadeiramente astronómico: 18 quintilhões + quási 1/2 quintilhão!

E isso porque enquanto que o número das casas do taboleiro do jogo de xadrez crescia em progressão aritmética, o número de grãos de trigo crescia em progressão geométrica, ou, em outros termos, *o número de grãos do trigo é uma função exponencial do número de casas do taboleiro referido.*

No pitoresco dessa lenda se acha envolvido um dos mais interessantes problemas de Filosofia Natural — a lei exponencial governa um número vastissimo de fenómenos das mais variadas ciências experimentais.

Façamos uma rápida catalogação da expressão exponencial dêsses fenómenos, seguindo Marcel Boll:

A pressão atmosférica é uma função exponencial da altitude;

Nas bombas de vácuo, o grau do vácuo é uma função exponencial do número de cilindradas;

No resfriamento dos corpos, a baixa de temperatura é uma função exponencial do tempo;

Ao longo de uma barra, aquecida sòmente em uma das suas extremidades, a temperatura em cada ponto é uma função exponencial da sua distância à fonte de calôr;

A luz absorvida por um corpo é uma função exponencial da espessura atravessada;

A extra-corrente de rutura, na self-indução, é uma função exponencial do tempo.

No fenómeno termoeléctrico, a emissão de electrons é uma função exponencial da temperatura;

Nas desintegrações radioactivas, o peso dos corpos, em um instante dado, é uma função exponencial do tempo contado a partir de um certo instante;

A amplitude das oscilações amortecidas é uma função exponencial do tempo;

O pH dos corpos é definido pela função exponencial inversa do inverso da concentração iónica do hidrogénio;

A lei de Fechner nos diz que a intensidade da sensação é uma função exponencial inversa da excitação;

Em cinética biológica, temos: *a*) evolução duma população *isolada* $N=N_0 e^{(n-m)t}$, sendo N o número dos indivíduos em um certo instante, n o coeficiente de natalidade, m o coeficiente de mortalidade. Essa equação é modificada no caso das populações muito numerosas. *b*) simbiose e parasitismo, isto é, estudo do desenvolvimento simultaneo de duas ou várias espécies vivas, em um meio limitado: a lei é ainda exponencial;

No cálculo das probabilidades, a curva de Gauss, género «curva em sino», é representada pela função dos erros de Laplace e Gauss $g(x)=e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$;

No campo da sociologia encontra-se também a função exponencial; etc, etc.

Vemos, pois, serem as leis dos mais importantes fenómenos dos mais variados domínios do conhecimento, de forma exponencial. A função exponencial como que «assimila fenómenos dispares», mostrando que, se os elementos que neles intervêm são diferentes, o seu comportamento é o mesmo, o mecanismo que os põe em acção é o mesmo.

Já Quételet, o grande estatístico belga, acreditava na universalidade da lei exponencial, a considerava como «uma norma à qual a experiência deve necessàriamente se submeter».

Na análise encontra-se a função de Mittag Leffler:

$$E_\alpha(x)=1+\frac{x}{\lfloor\underline{\alpha}}+\frac{x^2}{\lfloor\underline{2\alpha}}+\frac{x^3}{\lfloor\underline{3\alpha}}+\cdots$$

Ora, para $\alpha=1$, ela dá:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

que não é senão a função exponencial e^x em série.

Daí, as oportunas palavras de Buhl, de Toulouse, em seu Curso de Análise:

«Sendo dada a imensa importância da exponencial, é de admirar que a função $E_\alpha(x)$ não tenha até aqui encontrado uma multidão de aplicações mais ou menos de igual importância. Todavia, para $\alpha=1/2$, seu papel, no cálculo das probabilidades, é já grande e tem sido assinalado».

Coube ao Prof. Francisco de Oliveira Castro, da Escola Nacional de Engenharia (Rio de Janeiro, Brasil), achar, no campo das ciências físicas, a primeira aplicação da função $E_\alpha(x)$, de Mittag Leffler.

Vejamos.

O técnico Bernard Gross, do Instituto Nacional de Tecnologia, fez cuidadosos estudos sobre «as propriedades físicas dos dieléctricos reais».

Em uma das suas comunicações sobre o assunto à Academia Brasileira de Ciências, ele estuda o «condensador anómalo no campo alternado» (Anais, 937 e 938).

Os condensadores, quando submetidos a tensões alternadas, têm a sua capacidade e condutibilidade variando com a frequência.

É, como se vê de pronto, grande a importância técnica desse fenómeno.

Gross achou que, durante os periodos de descarga ou regeneração, a diferença de potencial $U(t)$, existente entre as armaduras de um condensador anómalo, deve satisfazer à equação integro-diferencial:

$$C\frac{dU}{dt}+\frac{U}{R}+\int_0^t\frac{dU}{d\tau}\varphi(t-\tau)\,d\tau+i_0(t)=0,$$

onde C representa a capacidade do sistema, R a resistência final do mesmo, $\varphi(t)$ a função hereditária, $i_0(t)$ a intensidade da corrente anómala proveniente das variações de tensão.

A integração rigorosa da equação funcional de Gross, foi feita por Oliveira Castro, seguindo a teoria das equações integrais de Volterra.

Considerando dU/dt como incógnita, reduziu Castro a integração daquela equação funcional a de uma equação integral de Volterra de 2.ª espécie, cujo núcleo é uma função das conhecidas pela denominação de «funções de classe α».

Aos núcleos dessa forma se aplicam os métodos de integração de Volterra.

A solução da equação funcional de Gross se reduz, obtida a solução da equação de Volterra, a uma simples quadratura.

Esse o caminho seguido por Oliveira Castro (Anais da Academia Brasileira de Ciências, Tomo XI, 1939, n.º 2).

No caso de interesse teórico, do condensador anómalo perfeitamente isolado, faz-se R tender para ∞.

Assim, o termo U/R desaparece da equação funcional em questão, e o núcleo resolvente da equação integral de Volterra se simplifica, apresentando notável relação com a função de Mittag-Leffler.

Seguindo a memória de Oliveira Castro, $\varphi(t)$ se exprime pela função de Schweidler:

$$\varphi(t) = \beta t - \alpha \; (0 < \alpha < 1) \, , \; (\beta > 0) \, ;$$

para simplificar põe-se $k = \beta R \, , p = 1 - \alpha \, , \lambda = 1/RC$,

$$K(\tau, t) = \lambda \, [1 + k \, (t - \tau) \, p - 1] \, ,$$
$$f(t) = - \, [\lambda U(0) + i_0(t)/C] \, .$$

Assim, a equação de Gross torna-se, fazendo $dU/dt = \psi(t)$:

$$\psi(t) + \int_0 \psi(\tau) \, K(\tau, t) \, d\tau = f(t) \, .$$

É a equação integral de Volterra de 2.ª espécie; a função $K(\tau, t)$ é o núcleo dessa equação integral.

Iterando os núcleos, tem-se:

$$K^{(1)}(\tau, t) = - K(\tau, t)$$

....

$$K^{(h)}(\tau, t) = \int_\tau^t K^{(h-1)}(\tau, s) \, K^{(1)}(s, t) \, ds \, .$$

$\sum_{h=1}^{\infty} K^{(h)}(\tau, t)$ converge absoluta e uniformemente em t, para uma função $S(\tau, t)$, continua em t, que é o núcleo resolvente da equação integral.

No caso do condensador anómalo perfeitamente isolado, o núcleo resolvente da equação de Volterra é:

$$G = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-X)^h}{\Gamma(hp+1)} \, ,$$

Γ sendo a função euleriana de 2.ª espécie e pondo, para simplificar,

$$X = \beta/C \, . \, \Gamma(p) \, (t-s)^p \, .$$

Ora, a função $E_\alpha(X)$, de Mittag Leffler, nos dá:

$$E_\alpha(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{X^h}{\Gamma(h\alpha+1)} \, .$$

Portanto: $G = E_p(-X)$.

Essa a relação entre $E_\alpha(X)$ e G entre a função de Mittag Leffler e o núcleo resolvente da equação de Volterra para o caso considerado dos fenómenos físicos dos dielétricos reais.

A física dos dielétricos reais se comporta, pois, segundo a estrutura analítica da função de Mittag Leffler.

Equivalência de poliedros

*por **José da Silva Paulo***

Em 1900, entre os célebres 21 problemas de Paris, propoz Hilbert a seguinte questão:

Todos os poliedros de igual volume são equivalentes?

A equivalência aqui era entendida no seguinte sentido: *dois poliedros dizem-se equivalentes se é possível decompô-los em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois.*

Como se sabe, o problema análogo no plano é sempre soluvel, isto é, dados dois polígonos de igual área é sempre possível decompô-los em polígonos elementares (em particular triângulos) congruentes entre si dois a dois.

É baseado nesta propriedade que se pode construir uma teoria das áreas dos polígonos planos sem recorrer aos métodos infinitesimais. No espaço no entanto todos os esforços do subtil espírito grego falharam na resolução de problema análogo para os poliedros.

Em 1896, M. J. M. Hill, professor de matemática do University College de Londres, publicava nos Proceedings of London Mathematical Society, vol. XXVII, o artigo: *Determinação do volume de certas espécies de tetraedro*[s] *sem o emprego do método dos limites*, que veio pôr outra vez o problema que preocupara os gregos e que o cálculo infinitesimal tinha, mais ou menos, colocado em plano apagado. Este artigo de Hill vem dar relevo ao problema posto por Hilbert.

Foi M. Dehn, discípulo de Hilbert, quem, em 1902, nos Math. Ann. 55, pp 465-468, deu solução negativa ao problema. Demonstrou então que *existem poliedros com o mesmo volume que não são equivalentes.*

A sua demonstração é complicada, e nem mesmo as demonstrações simplificadas de Kagan e de Amaldi são elementares.

Em 1925, na Revista Matemática Hispano-Americana, Rey Pastor publicou a demonstração que a seguir se dá que é de facto acessível e sem dúvida muito mais simples que qualquer das anteriormente citadas.

Iremos então demonstrar o teorema de Dehn:

«*Se dois poliedros* P *e* P' *são equivalentes então as somas das medidas dos seus diedros, alguns dos quais serão, eventualmente, contados um certo número de vezes, diferem de um número inteiro de ângulos rasos.*

Para isso consideremos primeiro uma generalização dos conceitos de polígono plano e de poliedro. Chamaremos ainda polígono plano àquele que tenha dois ou mais lados contíguos em linha recta e poliedro o que tenha duas ou mais faces contíguas sobre o mesmo plano ou duas ou mais arestas contíguas sobre a mesma recta. Assim se, por exemplo, intercalarmos num lado dum triângulo um novo vértice obteremos um quadrilátero com um ângulo raso. Do mesmo modo se nas arestas de um poliedro se intercalam novos vértices obtém-se um poliedro generalizado com o mesmo número de faces mas mais arestas e vértices que o primeiro; e se numa face se intercala um vértice que se une com dois ou mais vértices dessa face, obtém-se um poliedro com mais faces, arestas e vértices e no qual alguns diedros são rasos. Mas deve-se notar desde já que a fórmula de Euler para os poliedros convexos $(F+V=A+2)$, bem como o teorema: *a soma das medidas dos ângulos internos dum polígono plano de* n *lados é igual a* $(n-2)$ *ângulos rasos*, para os polígonos simples, são válidos para estes poliedros e polígonos generalizados daqueles.

Para os polígonos o facto é imediatamente visível. Para os poliedros verifiquemo-lo em casos particulares. Consideremos um tetraedro em cada aresta do qual se intercala um novo vértice; teremos então 10 vértices, 12 arestas e 4 faces. Se considerarmos um cubo e em cada uma das faces intercalarmos um vértice que se une com todos os vértices dessa face obtém-se um poliedro generalizado com 24 faces, 14 vértices e 36 arestas, existindo 24 ângulos diedros rasos. Em qualquer destes dois exemplos a fórmula de Euler é verificada.

Consideremos agora dois poliedros P e P' equivalentes, isto é, tais que

$$P=P_1+P_2+\cdots+P_n \quad \text{e} \quad P'=P'_1+P'_2+\cdots+P'_n$$

de tal modo que $P_i \equiv P'_i$ para todos os valores de i, quere dizer, de modo que os poliedros componentes P_i e P'_i sejam congruentes entre si dois a dois.

Consideremos um qualquer poliedro componente de P, por exemplo P_1. Os poliedros contíguos a P_1 na decomposição de P tem alguns vértices e arestas que coincidem com os de P_1, ou situados nas arestas ou nas faces de P_1; todos estes vértices e arestas os agregamos a P_1 formando assim um poliedro generalizado. Anàlogamente completaremos P'_1 com os vértices e arestas dos poliedros que lhe são contíguos na decomposição de P'. Os poliedros P_1 e P'_1 que eram congruentes deixarão, em geral, de o ser depois de lhe agregarmos os novos vértices e arestas, pois deixarão de ter igual número de vértices, de arestas e de faces. Pode no entanto restabelecer-se a congruência intercalando em cada um deles os vértices e arestas novos que correspondem ao outro. Se assim procedermos para todos os pares de poliedros componentes de P e P' conseguiremos uma decomposição em que os poliedros contíguos tem arestas comuns completas.

A fig. 1 representa um caso muito simples no qual se põem em evidência, nos poliedros componentes os os vértices e arestas que se agregam a cada um.

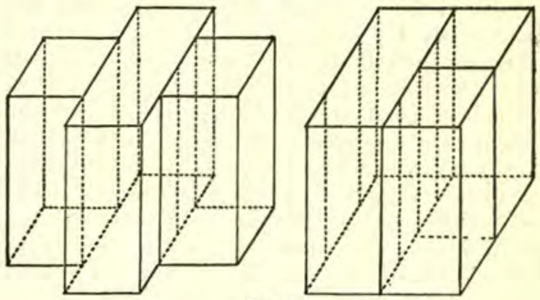


Fig. 1

Como cada poliedro P_i tem todos os seus diedros iguais aos diedros de P'_i a soma dos diedros dos poliedros P_i é igual à soma dos diedros dos poliedros P'_i.

Consideremos então o poliedro P.

As arestas dos seus poliedros componentes P_i são de três classes: *a*) *arestas que pertencem a uma aresta de* P; *b*) *arestas situadas em faces de* P; *c*) *arestas situadas no interior de* P.

Para cada aresta do tipo *a*) a soma dos diedros dos poliedros P_i a que pertença é precisamente o diedro de P (veja fig. 2 aresta AB ou CD) e este diedro aparecerá contado tantas vezes quantas as arestas elementares que, componham a aresta de P.

Para cada aresta do tipo *b*) [por exemplo EF na fig. 2], a soma dos diedros dos poliedros P_i a que a aresta pertence é um *ângulo raso.*

Finalmente para cada aresta do tipo *c*) [por exemplo GH na fig. 2] a soma dos diedros, dos poliedros componentes aos quais a aresta pertence, é igual a *dois ângulos rasos.*

Daqui resulta que a soma dos diedros dos poliedros componentes P_i é igual à soma dos diedros do poliedro total P (eventualmente repetindo-se algum diedro várias vezes) mais um número inteiro de ângulos rasos. Quere dizer, as duas somas são congruentes para o módulo π.

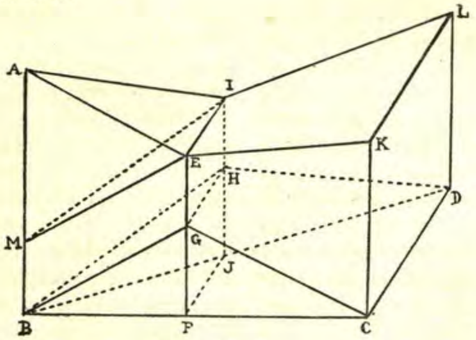


Fig. 2

Coisa análoga se passa com o poliedro P' e seus componentes P'_i.

Da congruência dos poliedros P_i e P'_i resulta imediatamente por transitividade o *teorema*.

Como aplicação demonstremos que o tetraedro regular *não é equivalente* a um cubo de igual volume.

De facto a soma dos diedros dum tetraedro regular, repetindo-se eventualmente alguns deles, é $K\cdot\alpha$, onde α é tal que $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{8}$ e K um inteiro, e a soma dos diedros do cubo, algum repetido eventualmente, é $K'\cdot\pi/_2$; então pelo teorema de Dehn será

$$K\cdot\alpha\equiv K'\cdot\pi/_2 \pmod{\pi}$$

donde

$$\operatorname{tg} K\alpha = \operatorname{tg}(K'\cdot\pi/2)$$

ou se fôr $K/K'=p/q$ (p e q primos entre si) será

$$\operatorname{tg} p\alpha = \operatorname{tg} q'\cdot\pi/2\,.$$

Mostremos que esta igualdade é impossível. Como se sabe

$$\operatorname{tg} p\alpha = \frac{p\cdot\operatorname{tg}\alpha-\binom{p}{3}\operatorname{tg}^3\alpha+\binom{p}{5}\operatorname{tg}^5\alpha-\cdots}{1-\binom{p}{2}\operatorname{tg}^2\alpha+\binom{p}{4}\operatorname{tg}^4\alpha-\cdots}$$

e como $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{8}$ será

$$\operatorname{tg} p\alpha=\sqrt{8}\cdot\frac{p-\binom{p}{3}8+\binom{p}{5}8^2-\cdots}{1-\binom{p}{2}8+\binom{p}{4}8^2-\cdots}$$

Então se q é par $\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q\cdot\pi/2=0$ donde

$$p-\binom{p}{3}8+\binom{p}{5}8^2-\cdots=0$$

e portanto $p=\dot{8}$, o que é impossível visto p e q serem primos entre si.

Se q é impar então $\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q\,\pi/2=\pm\infty$ e por isso

$$1-\binom{p}{2}8+\binom{p}{4}8^2-\cdots=0$$

igualdade manifestamente impossível.

É então *impossível* decompor o tetraedro regular e o cubo de igual volume, em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois, o que resolve pela negativa o problema de Hilbert.

Uma aplicação da Geometria Projectiva ao problema das imagens eléctricas

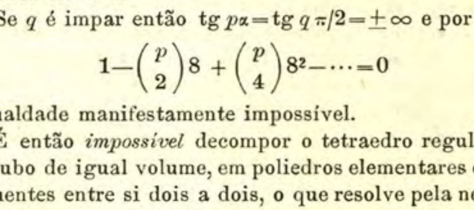
por **Fernando R. Dias Agudo** (*Assistente do I. S. A*).

O estudo da influência electrostática exercida por uma carga pontual Q sobre um condutor esférico ligado ao solo (quando mergulhados num dieléctrico de constante dieléctrica ε) levou Kelvin a substituir a esfera condutora por uma esfera do mesmo dieléctrico, na qual determinaria a posição de uma outra carga pontual Q' (imagem eléctrica da primeira) tal que fosse nulo o potencial devido a Q e Q' em todos os pontos da esfera (visto que se supõe ligada ao solo).

Designando por p e q as distâncias de um ponto P da esfera a Q e Q', respectivamente, deve ter-se portanto

$$\frac{Q}{\varepsilon p}+\frac{Q'}{\varepsilon q}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{Q'}{Q}=-\frac{q}{p}$$

e o problema que se põe é o de saber se será de facto possível encontrar uma carga Q' que verifique a relação anterior para qualquer ponto da esfera.



Raciocinando para a secção determinada por qualquer plano diametral que passe por Q, a Geometria Projectiva responde-nos afirmativamente, uma vez que o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos estão numa razão constante é precisamente a circunferência de centro O cujo diâmetro $\overline{AB}$ divide harmònicamente o segmento $\overline{Q'}\,\overline{Q}$ dos dois pontos fixos (circunferência de Apolónio).

E de $(AB\,Q'\,Q)=-1$ resulta ainda, como se sabe do estudo das pontuais harmónicas, $\overline{OB}^2=\overline{OQ'}$, $\overline{OQ}=d'\,d$, donde $d'=r^2/d$.

Em particular,

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AQ}}=\frac{r+d'}{r+d}=\frac{r\,(1+r/d)}{d\,(1+r/d)}=\frac{r}{d},$$

e, por conseguinte, $Q'=-Qr/d$.

Obtém-se assim o valor e a posição da carga Q' que, juntamente com Q, permite calcular o campo e o potencial em todos os pontos do dieléctrico exteriores à esfera condutora.

ASTRONOMIA

O PRETENSO PROBLEMA DA HORA NA ACTUALIDADE

O astrónomo não terá possibilidade, por muito tempo ainda, de reconhecer sequer esse milésimo do segundo que dizem ter-lhe oferecido a Radiotécnica

por ***A. Baptista dos Santos*** *(Astrónomo de 1.ª classe do Observatório Astronómico de Lisboa)*

Inicia-se entre nós, segundo parece, a propaganda entusiástica da obtenção radio-astronómica do milésimo do segundo. Diz-se, e escreve-se mesmo, mercê provàvelmente de influências estrangeiras mais animosas e por isso menos reflectidas, ou, talvez melhor, por errada interpretação do que se tem dito e escrito lá por fora, que em matéria de determinação e conservação da hora *entrámos na era do milésimo do segundo* — tal qual se disse da bomba atómica.

E isto se afirma porque possuimos, também se diz, um guarda-tempo, o relógio de quartzo, que nos garante esse milésimo na sua preciosa marcha e porque os astrónomos melhoraram consideràvelmente os seus instrumentos de observação e estão hoje de posse de um novo registador do tempo de extraordinária precisão e... velocidade porque nele *o segundo tem meio metro de comprimento.*

Com estas razões se procura, em conferências, nos jornais e em revistas técnicas, interessar professos e entusiasmar leigos, prometendo a estes o milésimo do segundo — àqueles seria menos fácil — como se da sua posse pudesse resultar-lhes uma melhoria certa das condições de vida.

Não podemos concordar com a afirmação e dizê-mo-lo com mágoa porque a aquisição real do milésimo do segundo seria certamente de incalculável valor na investigação astronómica e, segundo parece, na Física Electrónica moderna.

E não podemos concordar porque as razões apresentadas não bastam para nela crermos e é até à afirmação contrária — *estamos longe, ainda, de atingir artronòmicamente o milésimo do segundo* — que nos conduz a análise fria do conjunto de tudo quanto possa influir na determinação exacta da hora; além do que se nos afigura bem discutível, por enquanto, que os astrónomos tenham melhorado consideràvelmente os instrumentos de observação.

Em poucas e por outras palavras poderíamos apresentar as razões da nossa discordância se nos dirigíssemos apenas aos da especialidade, mas, porque o assunto é já do domínio público nacional e nos parece fácil expô-lo de modo que todos o entendam, para todos escrevemos na esperança de que seremos compreendidos.

*

Coube sempre ao astrónomo, em todos os tempos, a determinação exacta da hora porque só ele sabe e pode ler o padrão clássico de medida do tempo, esse gigantesco relógio natural que é a Terra animada do seu movimento de rotação.

A Mecânica ensinou-lhe que este movimento seria rigorosamente uniforme — condição indispensável a um padrão de medida do tempo — se a Terra fosse um sólido perfeitamente livre e invariável; e se ele sabe, por considerações também de ordem mecânica, que esta última condição se não pode realizar rigorosamente, a verdade é que determinados os defeitos de uniformidade, por comparação com outros relógios naturais — os movimentos dos planetas em torno do Sol —, os valores obtidos não justificam o abandono do padrão.

A condição de uniformidade não tem sido coisa que possa estabelecer-se por absoluto no laboratório e, deste modo, qualquer relógio construido pelo homem só tem sido considerado uniforme se, em relação ao padrão natural, ele se atrazar ou adiantar sempre da mesma quantidade em intervalos de tempo iguais.

Por bom ou mau que seja esse relógio, garanta ele ou não o desejado milésimo do segundo, o único meio de o reconhecer astronòmicamente, isto é, de conhecer o seu *estado* em vários instantes e dele deduzir a sua *marcha* — respectivamente a correcção que é necessário fazer à leitura do seu mostrador para obter a hora exacta e a quantidade de que ele se adianta ou atraza diàriamemente — tem sido sempre o da sua comparação com o padrão natural.

Nessa indispensável comparação o astrónomo terá de fazer a leitura deste padrão cujo mostrador é a esfera celeste e em que o ponteiro em qualquer lugar da Terra é o seu próprio meridiano. As zero horas são por convenção indicadas no mostrador por um ponto notável da esfera celeste, o equinócio vernal, que não é absolutamente fixo mas de que o astrónomo conhece as leis do movimento, podendo, assim, determinar a sua posição em qualquer instante.

Quando em qualquer lugar da Terra o seu meridiano coincidir com o equinócio vernal serão zero horas nessse lugar; em qualquer outro momento a hora do lugar será o ângulo horário do equinócio vernal, isto é, a sua distância angular ao meridiano, exactamente como no mostrador do nosso relógio da sala de jantar se ele só tivesse o ponteiro das horas — distância angular do ponteiro às zero horas (1).

Mas porque é incómodo um mostrador com uma só hora marcada e porque o equinócio vernal, não tendo existência real, não é um ponto visível que possa observar-se directamente, o astrónomo adoptou outros bem visíveis que a natureza se encarregou de distribuir profusamente por toda a esfera celeste, as estrelas, cujas distâncias a esse ponto notável das zero horas — distâncias angulares na direcção do movimento da Terra — ele mediu com o rigor que poude e vem acertando dia a dia. A esta distância chamou «*ascensão recta*» e ela será a hora dum lugar quando a estrela respectiva coincidir com o seu meridiano, porque, evidentemente, nesse momento a ascensão recta da estrela será igual ao ângulo horário do equinócio vernal.

Cada estrela indicará, assim, no mostrador a hora α, designando por esta letra grega a sua ascensão recta.

O meridiano não é, igualmente, uma linha real e já por isto já porque o observador tem fraca sensibilidade visual para determinar com perfeita exactidão, à vista desarmada, o momento da coincidência, ele serve-se, na observação, dum instrumento provido dum óculo cujo eixo óptico deveria descrever rigorosamente o meridiano. Este absoluto rigor não é, porém, possível na prática e, assim, o instrumento mantém sempre uma certa distância ao meridiano quo é uso designar por «*ângulo horário do instrumento*» e que o astrónomo procura conhecer com a mais perfeita exactidão.

A hora do lugar de observação, em dado momento, será, portanto, igual à ascensão recta da estrela que nesse momento cruza o meridiano do instrumento somada com o ângulo horário deste meridiano ou dele subtraida conforme o instrumento estiver a oeste ou a leste do meridiano verdadeiro, visto que a Terra gira de oeste para leste em torno do seu eixo.

Assim se lê o relógio padrão. E para o comparar com outro cujo estado queiramos conhecer basta ler este ao mesmo tempo, o que se consegue com o rigor necessário registando o momento em que sa faz a leitura do padrão num aparelho cronográfico que marque os segundos do relógio a comparar.

* *

Vejamos que rigor poderemos esperar nesta comparação.

A exactidão da hora lida no padrão depende, como se vê, da exactidão com que são conhecidos o ângulo horário do instrumento e a ascensão recta da estrela; e ainda, evidentemente, do rigor com que o observador apreciou o momento da coincidência na leitura do padrão.

Os astrónomos têm procurado desde sempre melhorar o instrumento e os métodos de observação de modo a obterem com o mais perfeito rigor o ângulo horário daquele e o momento exacto da coincidência.

Muito se tinha já conseguido neste ponto mas a ânsia de atingir a perfeição fez-nos aparecer na América, há uns dez anos, um novo instrumento — ou melhor, uma adaptação ao serviço da hora de um instrumento destinado até então só à determinação da latitude, o Tubo Zenital (2) — que de novidade só tem o registo fotográfico da imagem da estrela utilizando um processo engenhoso, mas de eficiência prática ainda duvidosa, que dispensa a intervenção do astrónomo na observação, eliminando, assim, o seu erro pessoal. Procede-se com ele de modo a eliminar também o efeito do seu ângulo horário, mas os processos usados são os clássicos, um dos quais, o da inversão do instrumento nas observações meridianas, se deve a um português, o falecido almirante Frederico Augusto Oom, primeiro director do Observatório da Tapada.

(1) Não é por esta hora a que chamamos «hora sideral», das estrelas, que regulamos a nossa vida civil. Esta é regulada pela «hora solar» em que a referência é o Sol, mas o astrónomo sabe passar daquela para esta em qualquer instante. O padrão é o mesmo, a rotação da Terra, mas tem dois mostradores o se o astrónomo lê aquele e não este é porque isso lhe é mais fácil e a leitura mais rigorosa.

(2) Há cerca dum ano não havia ainda na Europa um único destes instrumentos.

Neste instrumento, a que poderemos chamar o instrumento moderno, puzeram os *«milesimistas»* todas as suas esperanças e nós poderíamos admitir com o Sr. J. Tinoco, distinto astrónomo do País vizinho, um dos que no-lo descrevem e que dele nos faz a justa crítica, que o erro a esperar, usando-o na leitura do padrão, é de um centésimo do segundo por cada observação isolada de uma estrela — isto, é claro, em condições ideais de perfeição instrumental que não foi ainda possível obter inteiramente na prática. Mas por comodidade nossa e do leitor e porque desejamos falar, apenas, daquelas causas de erro de que pouco ou nada se tem dito e que reputamos de muito maior importância, vamos supôr nulo aquele êrro: o *instrumento é rigorosamente perfeito*.

Fica-nos, portanto, apenas o êrro da ascensão recta.

Ora, é do conhecimento de todos os que observam e sabem interpretar os resultados da observação que, não obstante esse já tão longo e continuado trabalho dos astrónomos de todo o Mundo, dispendido durante muito mais dum século em acertar as ascensões rectas das estrelas, elas não são ainda hoje conhecidas com perfeita exactidão; mesmo as daquelas estrelas de posições mais rigorosas que designamos por *fundamentais*. O seu êrro sobe a alguns centésimos do segundo, por vezes ao décimo. E note o leitor que isto se reconhece, em qualquer observatório, mesmo com aqueles instrumentos e aquelas pêndulas que a moda, e não a razão fundamentada, entende dever agora substituir.

Mas nem só da experiência, da observação, nos pode advir aquele conhecimento. Pode toma-lo quem quizer consultando o Fk_3, a efeméride de fundamentais por excelência: na última coluna de cada uma das páginas que contêm as posições médias das estrelas para o começo do ano, esse encontrará os êrros prováveis dessas posições, e embora estes números não sejam de modo algum a medida da exactidão daquelas posições mas tão sòmente indiquem a precisão das observações que lhes deram origem, precisão essa que diminui de ano para ano devido à incerteza, no conhecimento dos movimentos próprios, por eles se poderá já formar uma ideia.

O erro cometido na determinação da hora seria, assim, exactamente o da ascensão recta, alguns centésimos do segundo, mais raramente o décimo, se fosse observada apenas uma estrela; mas o astrónomo observa sempre mais e o êrro da média é menor.

A teoria dos erros ensina-nos que o seu valor é o quociente do erro duma observação simples pela raiz quadrada do número total das observações. Se, portanto, na medida duma grandeza uma só observação no-la der com um certo erro e quizermos obtê-la com um êrro dez ou vinte vezes menor teremos que a medir cem ou quatrocentas vezes e tomar a média das medidas simples.

Procuremos então determinar o número de estrelas que seria necessário observar para obter a hora com o erro de um milésimo do segundo apenas.

Admitamos, para isso, que é em média de três centésimos do segundo o valor absoluto da correcção que necessita cada uma das ascensões rectas de um grande grupo de estrelas e que as correcções se distribuem por elas segundo as leis dos êrros acidentais de modo a podermos, legìtimamente, aplicar-lhes a teoria dos êrros. Por ela se sabe que o êrro provável duma observação simples é aproximadamente igual à média dos êrros e esta é exactamente igual a três centésimos do segundo, ou sejam trinta milésimos. Se quizermos obter a hora com o êrro de um milésimo do segundo, trinta vezes menos do que aquele, teremos que observar *novecentas estrelas* visto que trinta é exactamente a raiz quadrada de novecentos.

O leitor viu já, certamente, como isto seria impraticável: novecentas estrelas, com o intervalo de quatro minutos, apenas, entre duas consecutivas, levariam sesenta horas seguidas a observar; o dia só tem vinte e quatro e dessas vinte e quatro só são úteis para a observação das estrelas aquelas em que o Sol está abaixo do horizonte.

Tomemos pois um grupo mais modesto: dezasseis estrelas, por exemplo, que é o número indicado para a observação com o instrumento moderno.

A hora obtida pela sua média virá com o erro de sete ou oito milésimos do segundo — cociente de trinta por quatro — e aí temos já um erro da ordem do centésimo do segundo.

Abandonemos agora as condições ideais, em que nos colocámos, de obedecerem as correcções às leis dos erros acidentais — num pequeno grupo de estrelas é pouco provável que isso suceda.

A aplicação da teoria dos erros não é já legítima, deixando de ter significação o número que por ela acabámos de determinar. A média das observações aparecer-nos-á, então, com um erro já de aspecto sistemático que é, evidentemente, igual à média das correcções (afectadas do seu sinal, positivo ou negativo) e se aproximará tanto mais do valor médio absoluto que adoptámos (tres centésimos do segundo) quanto maior for a disparidade entre o número das estrelas cujas ascensões rectas requerem correcções positivas e o das que requerem correcções negativas.

Logo, a inexatidão das ascensões rectas, e só ela, introduz na determinação da hora um erro compreendido entre *um e tres centésimos* do segundo.

É esta a primeira causa de erro em que não falam, pelo menos em Portugal, os propagandistas do milésimo.

Mas há ainda outra e essa de maior gravidade.

O observador — Perdão ! O instrumento moderno quando estiver, com eficiência, em uso. — tem na atmosfera da Terra um inimigo até agora irredutível que caprichosamente, sem lei, ou, pelo menos, segundo lei que os astrónomos ainda desconhecem por absoluto, lhe falseia a observação das coincidências, desviando-lhe para um e outro lado da sua posição verdadeira a direcção em que é vista a estrela.

Quero referir-me às refracções laterais na direcção do parelelo: a cintilação paralactica e as refracções acidentais.

A primeira traduz-se por uma vibração da imagem da estrela, de pequena amplitude e curto período, devida à agitação das camadas altas da atmosfera. Por ser de período bastante curto, é de pequena importância visto que na observação de uma estrela se fazem sempre várias coincidências e a sua média vem pràticamente isenta dos desvios por ela provocados.

As segundas dão origem a deslocamentos da imagem da estrela, para um e ontro lado, da ordem do décimo do segundo e de período compreendido entre quinze e vinte segundos. Têm explicação na forma ondulada, e não perfeitamente esférica, das superfícies de separação das camadas baixas da atmosfera de densidades diferentes.

Estas são já de grande importância na observação porque, sendo o seu período de quinze a vinte segundos, não é a média de algumas coincidências que consegue eliminar completamente os seus efeitos; mas se aquela ondulação é larga e teimosamente se mantem sem mudança de forma por largo tempo, a refracção perde o caracter acidental e passa a ser constante, o que é pior porque desvia da mesma quantidade e no mesmo sentido todas ou grande parte das estrelas a observar.

E aqui temos, então, outro erro inevitável que pode atingir o décimo do segundo e que, como o da ascensão recta, nenhum instrumento, moderno ou antigo, consegue eliminar.

Neste também não falam os entusiastas do milésimo.

*

Estabelecido, portanto, como parece ter ficado, que a leitura do padrão se não pode fazer com precisão muito superior a alguns centésimos do segundo — — apenas um ou dois centésimos quando nos sai a sorte grande por ter a atmosfera da Terra assinado conosco tréguas momentâneas — procuremos, agora, determinar a marcha dum cronómetro — do relógio de quartzo, por exemplo, que, se não estamos em erro, conta já um quarto de século de existência não obstante só agora se lhe reconhecerem as virtudes todas.

Para o fazermos, teremos de o comparar com o padrão pelo menos duas vezes, uma no princípio e outra no fim dum certo intervalo de tempo. Admitamos que é de cinco centésimos do segundo o erro cometido na leitura do padrão em qualquer das comparações.

O erro do intervalo de tempo medido, quer ele seja grande quer seja pequeno, — diz-no-lo a teoria dos erros — é aproximadamente de sete centésimos do segundo, para mais ou para menos.

Se, por simplicidade de racionínio, supozermos ainda que o nosso cronómetro é rigorosamente uniforme e que é nula a sua marcha em relação ao padrão, que nos levará, não obstante, a dizer dele aquele erro cometido?

Como em astronomia é o resultado da observação que faz fé, se errámos para mais diremos que ele se atrazou de sete centésimos do segundo naquele intervalo de tempo; se para menos, que ele se adiantou dos mesmos sete centésimos.

Se o intervalo medido for pequeno, menor do que vinte e quatro horas, da sua medida deduziremos uma marcha diária superior a sete centésimos do segundo, positiva ou negativa.

Se o intervalo for grande, de setenta dias, por exemplo, poderíamos dizer que o nosso cronómetro se atrazou ou se adiantou de um milésimo do segundo por dia. Mas teremos a certeza de que ele assim marchou regularmente durante todo o intervalo? — Pode ter tido irregularidades da ordem do segundo e de curto período sem termos dado por elas; e se para o reconhecermos medirmos, a seguir, um intervalo menor, cometeremos um erro da mesma ordem e teremos de concluir que deve ter havido irregularidades porque a marcha do cronómetro é agora muito diferente.

Mas admitamos que a fé no nosso relógio é grande: conhecedores como somos, de que é precária a precisão da leitura do padrão, chegados que fomos à determinação de um milésimo do segundo para a sua marcha diária, não procuraremos irregulari lades medindo intervalos menores e adoptaremos o sistema de observar sòmente de setenta em setenta dias, isto é, apenas cinco vezes por ano. Deste modo determinaremos sempre o milésimo do segundo para marcha diária do nosso cronómetro, umas vezes positiva, outras vezes negativa, segundo as leis do acaso.

Será isto que nos permite afirmar que entrámos na era do milésimo do segundo? Se é, já lá entramos muitas vezes e desde há muito, com aquelas pêndulas e aqueles instrumentos velhinhos que há no Observatório da Tapada: ali verificámos nós, há dias, que o astrónomo encarregado das observações de tempo — por sinal o Director — obteve uma diferença de dois milésimos do segundo na medida de um intervalo de sete dias; desta vez entrou ele na era dos três décimos milésimos do segundo.

Mas voltemos ao nosso raciocínio. Admitamos que na medida do primeiro intervalo de setenta dias determinamos, pela observação, a marcha positiva de um milésimo do segundo para o nosso cronómetro; ele atraza-se, portanto, diàriamente de um milésimo do segundo. Como só voltaremos a observar passados outros setenta dias, o estado do cronómetro durante o intervalo seguinte terá de ser determinado por extrapolação e para o obtermos em certo dia nó somaremos um milésimo do segundo ao do dia anterior. Imediatamente antes da observação seguinte nós teremos adicionado setenta milésimos ao estado determinado pela observação anterior. Se na medida do segundo intervalo tivermos errado da mesma quantidade e para menos, como é natural segundo as leis do acaso, verificaremos que o estado determinado por extrapolação requer a correção de dezassete centésimos do segundo.

Quer dizer: a observação indica-nos que tínhamos o relógio errado de cento e setenta milésimos. Que isto nos suceda irremediavelmente em plena era do milésimo é coisa que não cabe na cabeça de ninguém.

E afinal, todas estas conclusões são ilusórias porque de antemão supozemos que é nula a marcha do cronómetro.

Conclusão real, verdadeira, só pode ser esta: *No estado actual da Astronomia é impossível reconhecer pela observação que as irregularidades da marcha dum cronómetro são da ordem do milesimo do segundo.*

E por muito tempo ainda se manterá a situação visto que a revisão das ascensões rectas e a determinação rigorosa dos movimentos próprios das estrelas não é tarefa de meia dúzia de anos. Quanto a refracções laterais cremos bem que nem mesmo se sabe por onde se lhes pegar.

O problema da hora na actualidade é, pois, o de ontem e será o de amanhã porque não são o relógio de quartzo e o instrumento moderno que lhe dão a solução.

Como é então que com tanta facilidade e convicção, que só o entusiasmo irreflectido pode justificar, se afirma que entrámos na era do milésimo do segundo?

Haverá algum processo alheio à Astronomia, processo de laboratório que desconheçamos, que permita reconhecer a rigorosa uniformidade do relógio de quarto e determinar rigorosamente a sua marcha em relação à rotação da Terra, já que por esta temos regulado o calendário e a nossa vida toda? Dispensa de facto esse relógio o «*controle*» da Astronomia?

Em caso afirmativo, parece naturalmente indicado o abandono do padrão clássico e a sua substituição pelo padrão de laboratório. Mas haverá alguem que se atreva a fazê-lo sem recear sèriamente ter de constatar, passado algum tempo, que, por exemplo, o dia de S. Martinho indicado pelo seu padrão lhe cai exactamente em verdadeiro I°. de Dezembro de tão grata comemoração para os portugueses?

Lisboa, Maio de 1948.

PEDAGOGIA

INSEGNARE COSE VECCHIE IN MODO NUOVO

di ***Umberto Forti*** (Milano)

Da tempo lo spirito dogmatico, che aspirava a fare del sapere una collezione di «nozioni», è stato detronizzato. Noi cerchiamo di cogliere le dottrine ed i fatti nella loro genesi e nel loro significato. La storia, la poesia, la filosofia, vogliamo studiarle al vero, cogliendone i valori nel loro stesso prodursi, nell'atto unico e — in certo senso — supremo in cui si formano, e prendono vita, e parlano al nostro spirito. Nè è da rimproverare ai docenti di matematica di rimanere indietro in questo moto della coscienza moderna. Ma quà e là, nella matematica come in ogni altro dominio del sapere, vi sono ancora «nozioni» così semplici e di così scarso rilievo — vere cenerentole della scienza — che passando accanto ad esse noi non vi gettiamo più di uno sguardo sbadato, per puro obbligo di ufficio.

Se una volta però, noi ci soffermiamo a pensarle, anche queste nozioni ci appaiono interessanti, e presto osserviamo che esse sono tanto vive quanto altre, a cui siamo soliti dedicare meno affrettata considerazione. Ma per le prime occorre propiziare il genio delle piccole cose, se non addirittura quell'esprit des infiniments petits che un Ministro poco benevolo rimproverava al grande Newton. E noi lo propiziamo volentieri a favore di un vecchio e modesto argomento: *Il quadrato del binomio.* La prima osservazione è che esso, insieme al prodotto notevole, non è che un caso particolare di un'operazione più generale: e che dunque converrebbe che come tale venisse insegnato, per ragioni che accenneremo poco appresso, e che — del resto — è facile intuire.

I vari libri di algebra elementare indicano quà e là questa operazione più generale, ma non le danno una speciale denominazione, ciò che è in contrasto tanto con la sua importanza, quanto con l'opportunità che vi è, invece, di inciderla nella memoria del principiante.

Proporrò dunque di denominarla *prodotto abbreviato.* [1]

Il lettore ha già compreso che tale operazione è il ben noto prodotto

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab\,.$$

Se $a=b$, si ha $x^2+(a+a)\,x+a^2$, cioè il quadrato del binomio; se invece $b=-a$ si ha $x^2+(a-a)\,x-a^2$, cioè il prodotto notevole.

Coordinare queste nozioni nel modo anzidetto, sarebbe molto opportuno, in primo luogo per abituare il principiante a unificare le sue formule scorgendone le relazioni, e poi anche perchè fissare l'attenzione sul prodotto abbreviato significa fissarla su una formula chiave. A parte infatti il piccolo vantaggio che deriva dall'abituarsi a scrivere sempre in tre termini quel prodotto, ciò che più conta è l'uso dell'operazione inversa, cioè la scomposizione in fattori del trinomio di 2° grado. Semplici applicazioni fatte ad occhio, come $x^2-5x+6=(x-2)\,(x-3)$ costituiranno una efficace preparazione all'equazione di 2° grado, e allo studio delle relazioni fra coefficienti e radici. Non è detto che tale studio debba assolutamente presentarsi in modo indipendente da tali nozioni, e solo a grande distanza di tempo, quando l'alunno — per mancanza di memoria — non è più in grado di scorgere la relazione fra i due argomenti. Ma di ciò vedremo più oltre.

Ora converrà invece notare che lo studio del prodotto abbreviato può essere esteso a tre o più fattori conducendo ad intravedere punti di vista nuovi, e risultati brillanti, atti a sviluppare ed a soddisfare quel gusto per la vera ricerca matematica che non manca quasi mai in un giovinetto intelligente, e che — ad ogni modo — è la qualità più preziosa che noi cerchiamo di suscitare.

Spesso, per naturale desiderio di completezza, noi siamo indotti ad introdurre le successive potenze del binomio mediante il celebre *triangolo* detto di Tartaglia, perchè edito da questo grande matematico italiano nel suo *General Trattato di numeri e misure* (1556). Notiamo di passata che quel triangolo era già noto in Oriente alcuni secoli prima, tanto che un enunciato se ne trova nel *Prezioso specchio dei quattro elementi*, del cinese Tchou-Che-Kie (1303).

Ora del triangolo stesso noi diamo, in genere, una formulazione astratta e dogmatica che non ne chiarisce in alcun modo la genesi, ciò che è contrario a quello spirito di inventività cui sopra si è accennato, e che soprattutto interessa al vero maestro. E del resto, anche ai più, e giustamente, che cosa importa che i coefficienti di una potenza siano tali o tal'altri? Ma, al contrario, non è mai priva di interesse quella ricerca attiva che portandoci nel vivo del problema ci mostra come la formula viene a costituirsi in base alle stesse leggi fondamentali del calcolo, per cui la formula stessa non ti sta più avanti nella sua vuota esteriorità, ma si inserisce organicamente nel tutto.

A ciò si giunge in modo molto semplice estendendo appunto il *prodotto abbreviato*, e fornendo così, naturalmente, una prima introduzione al concetto di combinazione, secondo la via più piana ed interessante, che è quella stessa della evoluzione storica.

Sarà facile infatti comprendere che — nel caso di tre fattori — il prodotto abbreviato diviene

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + (a+b+c)\,x^2 + \\ +(ab+ac+bc)\,x + abc$$

con le combinazioni a uno a uno, a due a due, a tre a tre delle lettere a,b,c, ed ecco così aprirsi alla mente del principiante un punto di vista nuovo, capace di chiarire un campo che appariva confuso e imprevedibile. Opportunissimo sarà spiegare il perchè di tale struttura singolare, osservando che in quella moltiplicazione occorre moltiplicare fra loro tanti singoli termini quanti sono i fattori (e cioè x per x per x, poi x per x per c, ecc.); ciò che risulterá forse più chiaro servendosi anche del passagio intermedio $(x+c)\,[x^2+(a+b)\,x+ab]$. La ricerca può essere portata facilmente anche sul prodotto di quattro o cinque fattori $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)$, ecc.
e la notazione già usata dal Leibniz riuscirà molto opportuna per riassumerne i risultati:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + \begin{array}{c|l} a & x + ab \\ b & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + \begin{array}{c|c|l} a & x^2 + ab & x + abc \\ b & ac & \\ c & bc & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d) = x^4 + \begin{array}{c|c|l} a & x^3 + ab & x^2 + \\ b & ac & \\ c & ad & \\ d & bc & \\ & bd & \\ & cd & \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c|l} abc & x + abcd \\ abd & \\ acd & \\ bcd & \end{array}$$

---

[1] Come io stesso ho fatto nei miei trattati di *Algebra* (Torino, Paravia, e Milano, Garzanti) nonchè nei miei volumetti *Il Primo libro di Algebra* (Carabba, Lanciano) *Nel Mondo di Diofanto* (Carabba) e *Capire l'Algebra* (Pin, Varese).

Nulla esclude che a questo punto possa accennarsi ai noti simboli $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots$ che indicano i numeri delle combinazioni degli n elementi a uno a uno, a due a due, ... pur notando che in questo caso le combinazioni sono — in pari tempo — moltiplicazioni.

Per il nostro scopo basta ora porre:

$$a = b = c = d = e$$

per avere subito:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$
$$(x+a)^5 = \cdots$$

da cui è, infine, facile ricavare la trascrizione del triangolo di Tartaglia, e le regole di formazione che vi si riferiscono.

Oggi che il calcolo delle probabilità acquista sempre maggiore importanza, una breve parentesi su questo punto potrebbe tentare più di un docente. A noi è capitato più di una volta di vedere a questo punto un'intera classe alzarsi in piedi per non lasciarsi sfuggire il numero di combinazioni di quattro giocatori di *scopa* che possono formare otto amici, o il numero di ambi (o di terni) che possono formarsi con i cinque numeri estratti al Lotto, e quello degli ambi (o terni) che possono formarsi con i totali *novanta*, e la conseguente probabilità di vincere (1:11748 per il terno, com'è noto), e *il vantaggio* che l'Erario ne trae, e i naturali accenni alla *legge dei grandi numeri*, e via dicendo.

Ed ora un'ultima osservazione:

Si giudicherebbe un mediocre maestro quello che insegnasse la tavola pitagorica solo per prodotti, senza insistere ugualmente sulla operazione inversa.

Avviene spesso però di non insistere abbastanza sulle operazioni correlative al quadrato del binomio come: scrivere sotto forma di quadrato perfetto un dato trinomio (se possibile), o completare un binomio in modo da renderlo quadrato perfetto. Il risultato è che l'alunno messo — più tardi — di fronte ai semplici processi di calcolo che conducono alla formula dell'equazione di 2° grado o alla ricerca delle coordinate del centro di una circonferenza di data equazione, o alla stessa equazione di una parabola, e via dicendo, ha l'impressione di trovarsi di fronte a procedimenti artificiosi che richiedono un notevole intervento della memoria e non riflette che tutto si riduce ad un procedimento naturale e ben noto fino dalle prime tappe dell'algebra. Se invece il completamento del quadrato fosse stato fissato nella mente al momento opportuno, l'alunno non avrebbe ora quasi nulla di nuovo da imparare, il suo sforzo sarebbe quasi nullo, e il risultato ben maggiore perchè egli potrebbe rammentare indefinitamente quelle nozioni, e se ne renderebbe conto in modo più profondo.

Per contro, sfogliando vari trattati di algebra, non accade nemmeno di incontrare un enunciato esplicito della regoletta che si segue completando il quadrato, sicchè lo scolaro si abitua ad andare a tentoni: riesce nei casi facili, è imbarazzato in quelli difficili, e finisce con il non rendersi nemmeno conto che l'operazione è sempre possibile, qualunque sia il dato binomio di cui un termine rappresenta un quadrato, e l'altro un doppio prodotto. Provate a dare ad uno scolaro da completare, non dico $36\,a^4-31\,b^2$ ma soltanto un'espressione come $4\,a^4-80\,a^2\,b^3$, e lo vedrete cercare ad occhio, molto imbarazzato — ciò che fa a al caso suo. Che accadrebbe se gli si ponesse un a^2+b^2 in cui $+b^2$ dovesse figurare come doppio prodotto? E perchè mai non toglierlo d'imbarazzo una volta per tutte spiegandogli la regola che deve seguire, come gli si spiega quella del quadrato? Spiegandogliela, cioè portandolo a riflettere che se nella relazione $(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$ egli dovesse trovare il b, null'altro dovrebbe fare che estrarre la radice del primo termine, e dividere il secondo per il doppio di tale radice. E il principiante non avrà neanche bisogno di studiare tale regola perchè essa non è altro che il procedimento da lui seguito in aritmetica per estrarre una radice quadrata: opportuno avvicinamento dunque, anche qui, fra nozioni artificialmente separate da un astrattismo dogmatico.

Si apre così una finestra a cui sarà opportuno affacciarsi — sia pure per pochi minuti — per vedere su un chiaro esempio numerico come la regola di estrazione di radice quadrata sia appunto il procedimento inverso del quadrato. Ad esempio: $1369=1300+69=$ $=900+420+49=30^2+2\cdot30\cdot7+7^2$, accompagnando alla lavagna con la nota trascrizione della estrazione di radice.

Infine, quando l'alunno avrà imparato le equazioni di primo grado (se già non ne ha idea da un più riassuntivo corso precedente) queste nozioni potrebbero essere applicate a titolo di esercizio, e per fissare bene una relazione che forse più tardi sfuggirebbe, alla risoluzione di qualche facile equazione di secondo grado *senza l'uso di formula alcuna*, ma solo completando quadrati perfetti, come ad esempio: $4x^2-7x-$ $-30=0$ attraverso i notti passaggi (dividere per 4 ambo i membri, completare il quadrato perfetto, ecc.).

Le radici trovate offrirebbero infine il modo di scomporre in fattori anche quel trinomio. Così una riflessione attiva ci avrebbe ricondotto al punto di partenza, ma con possibilità accresciute rispetto al primo momento, quando il trinomio doveva scomporsi ad occhio.

Forse la trattazione qui proposta sarà giudicata attuabile solo in parte. Ma quello che abbiamo voluto raccomandare è un metodo che permetta di integrare e coordinare le sparse membra di nozioni prospettate sovente in un poco opportuno isolamento. In questa continua coordinazione e trasformazione é gran parte dello stesso spirito matematico, e bisogna conservare appunto tale spirito, più che non le singole nozioni. Chi è disposto benevolmente a condividere il nostro punto di vista, ci rimprovererà di non aver considerato affatto la geometria: ad esempio la nota trasformazione del teorema di Pitagora ottenuta da Ippocrate (il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso o acuto, ecc.), facilmente ricavabile dal quadrato del binomio.

Ci scuseremo osservando che abbiamo già abbastanza abusato della pazienza del lettore, insistendo troppo a lungo su di un tema così comune.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO CURSO COMPLEMENTAR DE CIÊNCIAS DOS LICEUS

Ponto 1

2631 — Determine os valores de K para os quais é negativa a raiz da equação $K^2(1-x)=4-5Kx$. R: *Como* $x=(K^2-4):(K^2-5K)$, *a raiz da equação será negativa quando o for o produto* $(K^2-4)(4^2-5K)$ *ou seja quando* $(K+2)K(K-2)(K-5)<0$. *Ora para* $K<-2$ *todos os factores se tornam negativos e o seu produto é positivo; se* $-2<K<0$ *três deles são negativos e o outro é positivo, logo o produto é negativo se* $0<K<2$, *dois são negativos e dois positivos, e o produto é positivo; se* $2<K<5$, *três dos factores são positivos e um negativo e o produto é negativo, e finalmente se* $K>5$ *todos os factores são positivos. São então soluções do problema os valores de* K *tais que* $-2<K<0$ *e* $2<K<5$.

2632 — Calcule m de modo que

$$[m!+(m-1)!]:[(m+1)!-m!]=6:25\,.$$

R: *Se no primeiro membro pusermos em evidência os factores comuns ao numerador e denominador, simplificando, obtém-se sucessivamente:*

$$[(m-1)!\,(m+1)]:[(m-1)!\,(m^2+m-m)=6:25$$

ou $(m+1):m^2=6:25$, *donde* $m=5$.

2633 — Sabendo que: na equação $ax^2+bx+c=0$ é $x'+x''=-b/a$ e $x'x''=c/a$; demonstre que: se uma das raizes de $x^2+px+q=0$ é o quadrado da outra tem lugar a relação $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. R: *Notemos que será* $x_1+x_2=-p$ *e* $x_1x_2=q$ *se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes de* $x^2+px+q=0$ *e então* $p^3=-(x_1+x_2)^3=-(x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3)$ $q(3p-1)=-(3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_1x_2)$ *e* $q^2=x_1^2x_2^2$. *Como, por hipótese, é* $x_1^2=x_2$, *obtém-se imediatamente* $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.

2634 — Indique a expressão geral dos múltiplos de 3 que divididos por 9 produzem restos superiores a 4. R: *As expressões gerais dos números que divididos por* 9 *dão restos superiores a* 4 *são* $9m+5$; $9m+6$; $9m+7$ *e* $9m+8$ *onde* m *é um inteiro qualquer; destes o único que é múltiplo de* 3 *é* $9m+6$.

2635 — Mostre que a soma $\dfrac{7n+1}{7}+\dfrac{5p-1}{5}$ é uma fracção irredutível. R: *De facto*

$$(7n+1):7\ (+5p-1):5=[(35n+5)+35p-7]:35=(35n-2):35\,,$$

e como $35n-2$ *é primo com* 35 *então a fracção é irredutível.*

2636 — Resolva pelo método das figuras semelhantes o problema: «Construa um triângulo conhecendo o comprimento h_1 da altura relativa a um dos lados e os ângulos α e β adjacentes a esse lado».

Indique em que consiste o método: R: *Constroe-se um triângulo cujos angulos sejam* α,β *e* $180^\circ-(\alpha+\beta)$ *e de altura* h *qualquer. Constroe-se em seguida um triângulo homotético do primeiro e cuja razão de homotetia seja* h_1/h *se* h_1 *for o comprimento dado da altura relativa ao lado a que* α *e* β *são adjacentes.*

Ponto 2

2637 — Dada a equação $2x^2-2(1-2m)x+m^2=0$ de raizes x' e x'' forme a equação do 2.º grau cujas raízes são $y'=x'+m$ e $y''=x''+m$. R: *Como* $y'+y''=x'+x''+2m=1-2m+2m=1$ *e* $y'y''=x'x''+m(x'+x'')+m^2=m^2/2+m(1-2m)+m^2=(2m-m^2)/2$, *a equação pedida será* $2y^2-2y+2m-m^2=0$.

2638 — Escreva, convenientemente simplificado, o 5.º termo do desenvolvimento de $(a\sqrt{b}/2+i\sqrt{2}/a^2b)^8$. R: $T_5={}^8C_4 i^4\cdot 2^2\cdot a^4\cdot b^2/2^4\cdot a^8\cdot b^4=35/2a^4b^2$.

2639 — Resolva a inequação

$$(2x^2-3x-35):(x^2-6x-16)>0\,.$$

R: *Para que a fracção seja positiva é necessário que* *os seus termos sejam do mesmo sinal. As raizes do numerador são* 5 *e* $-7/2$ *e as do denominador* 8 *e* -2. *Então os valores de* x *que verificam a desigualdade são os que verificam uma das seguintes desigualdades*

$$x<-7/2\,,\ -2<x<5 \quad ou \quad x>8\,.$$

2640 — Determine o resto da divisão por 11 do produto $37^4 \times 1020$. R: $37=\dot{1}\dot{1}+4$ e $1020=\dot{1}\dot{1}+1$, *então o resto da divisão por* 11 *do produto considerado é o mesmo que o da divisão por* 11 *de* $4^4 \times 1=256$ *o qual é* $5-8+11=8$.

2641 — Sabendo que: um número primo é o que só é divisível por si mesmo e pela unidade; demonstre que, se um número primo p é a diferença dos quadrados de dois números, estes dois números são $(p-1)/2$ e $(p+1)/2$. R: *Seja* $p=a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$: *então* $a+b$ *e* $a-b$ *só podem ser: um dêles igual a* 1 *e o outro igual a* p. *Se* a e b *são inteiros positivos necessàriamente é* $a+b=p$ *e* $a-b=1$ donde $a=(p+1)/2$ *e* $b=(p-1)/2$.

2642 — Considere o seguinte:

Problema: Construir em triângulo ABC, sendo dados os ângulos A e B e o perímetro p.

Resolução: Construir um triângulo $A'B'C'$ em que o ângulo $A'=$ ângulo A e o ângulo $B'=$ ângulo B. Dividir o segmento p em partes a b e c proporcionais aos lados a', b' e c' do triângulo $A'B'C'$. Os lados do triângulo pedido são a, b e c.

Demonstração: O triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$ por ter dois ângulos iguais cada um a cada um.

O perímetro do triângulo é p, visto que, por construção $a+b+c=p$. Qual foi o método empregado na resolução do problema? Qual foi o método empregado na demonstração?

Soluções dos n.os 2631 a 2641 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.º Exame de frequência, 1947-48.

1.º Ponto

2643 — Resolver a equação $\log 5+\log(x+1)=\log(9x-3)+\operatorname{colog}(x-1)$. R: $x=10/9$.

2644 — Calcular $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{n!\left(\frac{2}{n\pi}\right)^n}$. R: $\frac{2}{e\pi}$.

2645 — Para que valores de x converge a série de termo geral $u_n=\sqrt[n]{\frac{\log(n+1)}{(x+2)^n}}$? R: *Tem de ser* $x>3$ *ou* $x<-2$.

2.º Ponto

2646 — Resolver a equação $\sec^2 x-2\operatorname{cosec}^2 x+2\sec^2 x\operatorname{cosec}^2 x=0$. R: $x=k\pi$ (k *inteiro, qualquer*).

2647 — Para que valores de λ se tem a igualdade $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}\lambda^n}=2$. R: $\lambda=2e$.

2648 — Para que valores de x é convergente a série de termo geral $u_n=\frac{\binom{n}{k}}{x^n}$ ($k>0$ e inteiro)? R: $|x|>1$.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º Exame de Frequência, 1947-48.

1.º Ponto

2649 — Nos rectângulos de área constante, substitua-se um dos lados pela semi-circunferência que o tem por diâmetro. Em que condições atinge um extremo o perímetro da figura? R: *Se* 4k *representa a área do rectângulo, o perímetro da figura dada é máximo quando os lados do rectângulo são*

$$\sqrt{\frac{2k}{\pi+4}} \quad e \quad \sqrt{\frac{k(\pi+4)}{2}}.$$

2650 — Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos médios da hipotenusa dos triângulos de área igual a 4 cujos catetos estão sobre os semi-eixos positivos Ox e Oy. R: *É a hipérbole de equação* $xy=1$.

2651 — Primitivar a função $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{6-x-x^2}}$.

$$\text{R:}\quad \mathrm{Pf}(x)=\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C.$$

2.º Ponto

2652 — Considerem-se os triângulos rectângulos de área constante. Em que condições atinge um extremo a área da circunferência circunscrita? R: *A área é mínima quando o triângulo rectângulo é equilátero.*

2653 — Estabelecer a equação do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados nas rectas que contêm o ponto $(1,0)$ por este ponto e pela recta $y=x$. R: $2y=x$.

2654 — Primitivar a função

$$f(x)=\frac{1}{x+1-\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

R: $\mathrm{Pf}(x)=\log\left(\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}-1\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}-$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{4}{x+1}+C.$$

Soluções dos n.os 2643 a 2654 de L. Mendonça de Albuquerque

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º **exame de frequência extraordinário — 29 de Maio de 1948.**

2655 — Dada a série $\sum(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

a) Investigue a sua natureza (em caso de convergência verificar se é simples ou absolutamente convergente). *b*) Determine x e y de modo a transformar a relação $\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{x}{n}+\frac{y}{n+1}$ numa identidade e, a partir dela, calcule a soma da série. R: *A série é simplesmente convergente e tem por soma*

$$S=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=1.$$

2656 — Seja C a curva formada pelo arco do círculo de centro $(-1,0)$ e raio 2 situado no 2.º quadrante e pelo arco do círculo de centro $(1,0)$ e raio 2 situado no 1.º quadrante. Considere o segmento variável OM com os extremos O em $(0,0)$ e M em C. *a*) Defina o comprimento OM como uma função $f(x)$. *b*) Verifique se $f(x)$ satisfaz às condições do teorema de Rolle. *c*) Determine os máximos e mínimos de $f(x)$. Explique como operou. R:

$$f(x)=\sqrt{3+2|x|}=\begin{cases}\sqrt{3-2x} & \text{para } -3\leq x\leq 0\\ \sqrt{3+2x} & \text{para } \quad 0\leq x\leq 3\end{cases}$$

é contínua no intervalo $[-3,3]$, *em cujos extremos toma valores iguais, mas não é derivável para* $x=0$; $f(-3)$ *e* $f(3)$ *são máximos e* $f(0)$ *é um mínimo, sendo* $f'_e(0)<0, f'_d(0)>0$.

2657 — Estude as variações da função assim definida:

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1} \text{ para } x\leq 0, \text{ e } f(x)=e^{-1/\sqrt{x}}-2 \text{ para } x>0.$$

R: *Para* $x<0$: $y'=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$ $y''=4\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$.

Para $x>0$:

$$y'=\frac{1}{2x\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{x}},\ y''=\frac{1}{4x^2}e^{-1/\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right).$$

$$y'_e(0)=y'_d(0)=0 \quad \text{mas} \quad y''_e(0)<0;\ y''_d(0)=0.$$

A função é crescente, apresenta um ponto de inflexão para $x=1/9$ *e a curva por ela representada tem como assíntotas* $y=0$, $x=-1$, $y=-1$. *Em* $(-1,0)$ *a 2.ª derivada é negativa e em* $(0,1/9)$ *positiva.*

2658 — Estude para os pontos do intervalo $[0,3]$ a continuidade e a derivabilidade da função $y=I(x)-|2-x|^{I(x)}$. Caso seja possível, calcule o valor da sua derivada nos pontos de abcissa $x=1/2$, $x=3/2$, $x=5/2$. Esboce o gráfico da função no intervalo considerado. R: *Contínua e derivável em* $[0,1)$ (*onde* $y=-1$), *em* $(1,2)$ (*onde* $y=x-1$) *e em* $(2,3)$ (*onde* $y=-(x^2-4x+2)$). *No ponto* $x=0$ *só pode definir-se* $y'_d(0)$; $y'(1/2)=0$ $y'(3/2)=1$ $y'(5/2)=-1$.

2659 — Considere o triângulo ABC de base $AB=6$ e altura $h=8$. Seja L um ponto qualquer em AB e r uma recta paralela a AB que intersecta AC e BC respectivamente, em M e N. Para que posição da recta r é máxima a área do triângulo LMN? R: *Designando por* b *a base e* h *a altura do triângulo, a função* $S(h)=3h(8-h)/8$ *será máxima para* $h=4$, *pelo que* r *deve passar pelos pontos médios de* AC *e* BC.

I. S. A. — Matematicas Gerais — 2.º **Exame de frequência (extraordinário) — 29-5-948.**

2660 — Considere a série $\sum u_n$ definida por $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2$ para $n\geq 0$, $u_0=1$. *a*) Determine a sua natureza. *b*) Determine o termo geral. *c*) Calcule um limite superior do êrro que se comete quando se toma para soma da série a soma dos seus 9 primeiros termos. R: *Como* $\lim_{n\to\infty} n\,(u_n/u_{n+1}-1)=2$, *a série é convergente. O termo geral é* $u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ *e*

$$R_9=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots<\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\cdots=$$
$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\cdots=\frac{1}{9}.$$

2661 — Considere o sector circular determinado no círculo $x^2+y^2=2$ pelas bissectrizes do 1.º e 4.º quadrantes e designe por $f(x)$ o comprimento do segmento variável, perpendicular a Ox, cujas extremidades se apoiam na fronteira do sector. *a*) Defina $f(x)$ e verifique se satisfaz às condições exigidas pelo teorema de Rolle. *b*) Determine os pontos de máximo e mínimo de $f(x)$. *c*) Como explica que $f(x)$ tenha um máximo sem que $f'(x)$ se anule? R: *A função*

$$f(x)=\begin{cases}2x & se\ 0\leq x\leq 1\\ 2\sqrt{2-x^2} & se\ 1\leq x\leq\sqrt{2}\end{cases}$$

é contínua no intervalo $[0,\sqrt{2}]$, *em cujos extremos se anula, mas não é derivável para* $x=1$. $f(0)$ *e* $f(\sqrt{2})$ *são mínimos e* $f(1)=2$ *é um máximo, sendo* $f'_e(1)>0$, $f'_d(1)<0$.

2662 — Estude as variações da função

$y=\log\left(\frac{x+1}{x}e^{2x}\right)$. R: $y=2x+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $y'=2-\frac{1}{x(x+1)}$; $y''=\frac{2x+1}{(x+1)^2x^2}$. *A função não está definida no intervalo* $[-1,0]$, *sendo* $x=-1$, $x=0$ *e* $y=2x$ *assíntotas da curva por ela representada. Tem um máximo para* $x=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, *um mínimo para* $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *e não tem inflexões. É crescente para* $x<\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ *e* $x>\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *e decrescente em* $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},-1\right)$ *e* $\left(0,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

2663 — Estude, no intervalo $[0,3]$, a continuidade e derivabilidade da função $y=|1-x|^{I(x)-1}$. Caso seja possível, calcule o valor da sua derivada nos pontos de abcissa $x=1/2$, $x=3/2$, $x=5/2$. Esboce o gráfico da função no intervalo considerado. R: *Contínua e derivável em* $[0,1)$ $\left(onde\ \ y=\frac{1}{1-x}\right)$; *em* $(1,2)$ (*onde* $y=1$) *e em* $(2,3)$ (*onde* $y=x-1$); $x=3\rightarrow y=4$. *No ponto* $x=2$ *a função é contínua mas não derivável* ($y'_e(2)=0$; $y'_d(2)=1$); $y'(1/2)=4$; $y'(3/2)=0$; $y'(5/2)=1$.

2664 — Determine a posição do ponto P do semi-eixo positivo dos xx do qual se vê sob um ângulo máximo o segmento $\overline{BC}$, onde B e C são os pontos de coordenadas $(0,b)$ e $(0,a+b)$ respectivamente $(a>0,\ b>0)$. R: *Designando por* β *e* γ *os ângulos segundo os quais se vêem de* P *os segmentos* $\overline{OC}$ *e* $\overline{OB}$ *respectivamente e maximizando a função*

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\frac{ax}{x^2+(a+b)b},\quad vem\ \ x=\sqrt{b(a+b)}.$$

Soluções dos n.os 2645 a 2664 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência ordinário — Março de 1948.

2665 — Derive

$$y=e^{2x}\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)+x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\log x+\operatorname{arctg}\frac{\pi}{x+1}.$$

Sabe de algum ponto onde seja imediata ou particularmente simples a derivada de uma ou outra parcela? R: $y'=2\cdot x\cdot e^{2x}\cdot\cos(x^2-1)+2\cdot e^{2x}\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)+\operatorname{sen}x\cdot\log x+x\cdot\cos x\cdot\log x+\operatorname{sen}x-\frac{\pi}{(x+1)^2+\pi^2}$ *para* $x=1$ *as duas primeiras parcelas simplificam-se vindo*

$$[y']_{x=1}=2\cdot e^2+\operatorname{sen}1-\frac{\pi}{4+\pi^2}.$$

2666 — Escreva as equações gerais das cordas suplementares da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e determine o ângulo dessas rectas. Determine os pontos de ordenada positiva, em que a tangente tem o coeficiente angular $+1$ ou -1. Determine uma hipérbole (de focos em $x'ox$) cujas assíntotas sejam diâmetros conjugados da elipse. R: *As equações são*

$$\frac{y}{b}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right);\ \frac{y}{b}=\frac{1}{y}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Os coeficientes angulares são $m_1=-\lambda\frac{b}{a}$; $m_2=+\frac{1}{\lambda}\frac{b}{a}$ *e portanto* $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{ab}{a^2-b^2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)$; *o ângulo que as cordas suplementares fazem entre si é*

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-ab}{a^2-b^2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right).\quad Tem\text{-}se\ \ \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

e portanto $-\frac{b^2x}{a^2y}=\pm1$. *Então os pontos onde a ordenada é positiva e o coeficiente angular da tangente* $+1$ *ou* -1 *são as soluções do sistema*: $y=\pm\frac{b^2}{a^2}x$, $y=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. *As assíntotas da hipérbole são diâmetros conjugados da elipse igualmente inclinados sôbre o eixo maior, e portanto paralelos às cordas suplementares* $\frac{y}{b}=\left(1-\frac{x}{a}\right)$, $\frac{y}{b}=\left(1+\frac{x}{a}\right)$ *de coeficientes angulares* $m_1=-\frac{b}{a}$, $m_2=+\frac{b}{a}$; *as equações das assíntotas são portanto* $Y=-\frac{b}{a}X$; $Y=+\frac{b}{a}X$ *ou*

$\frac{Y}{b}+\frac{X}{a}=0$; $\frac{Y}{b}-\frac{X}{a}=0$. *A equação da hipérbole obtém-se particularizando* k *em*

$$\left(\frac{Y}{b}+\frac{X}{a}\right)\left(\frac{Y}{b}-\frac{X}{a}\right)=\frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=-k^2.$$

2667 — Defina série absolutamente convergente e prove que uma tal série é sempre convergente. Prove também que a ordem dos termos não influi na soma. Que se entende por intervalo de convergência da série $\Sigma a_n x^n$? Como se lhe determina a semi-amplitude λ? e como se porta a série no interior? Que valor tem λ quando Σa_n é simplesmente convergente?

2668 — Seja $f(x)$ definida em (a,b), mas em ponto algum igual ao número λ, compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$. Prove que $f(x)$ é descontínua em algum ponto, e mostre que havendo uma só descontinuidade e sendo a função crescente, λ não é o único valor inatingido entre $f(a)$ e $f(b)$.

Sendo $f(x)$ crescente, e com um só ponto de descontinuidade $c>a$, como fica constituido em geral o conjunto dos valores de $y=f(x)$ em (a,c)? Há casos particulares?

2669 — Defina as derivadas laterais de $f(x)$ para $x=c$ e figure geomètricamente a hipótese $f'(c)=\mp\infty$. Supondo $f(x)$ par em $(-a,a)$, prove que $f'(c)$ existe sempre que exista $f'(c)$ $(0\leq c<a)$ e relacione os dois valores. Que deduz daí quanto a $f'(0)$? e quanto a $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$?

Exemplifique com alguma função indefinidamente derivável.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência extraordinário — Março de 1948.

2670 — Derive

$$y=\sqrt{1-x^3}+\operatorname{sen} x\cdot\log(1+x)\cdot e^{x^2}+\frac{x}{chx}\cdot$$

Prove que $f(x)$ é contínua onde tenha derivada finita.

R: $$y'=-\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}+\cos x\cdot\log(1+x)\cdot e^{x^2}+$$
$$+\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{1+x}e^{x^2}+$$
$$+2x\cdot\operatorname{sen} x\cdot\log(1+x)\,e^{x^2}+\frac{chx-xshx}{ch^2x}\cdot$$

Se o
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

é finito quando h *tende para* 0, *então* $|f(x+h)-f(x)|=f'(x)\cdot h+\varepsilon h$, *isto é,* $|f(x+h)-f(x)|<\delta$ *na vizinhança* h *de* x, *o que significa ser* f(x) *contínua em* x.

2671 — Escreva a equação da circunferência que passa pela origem 0 e que tem por centro $C(\alpha,\alpha)$ $(\alpha>0)$. Ache a tangente no ponto P diametralmente oposto a 0, e a sua intersecção com $\overline{OX}$. Deduza a equação da parábola de foco C e directriz conduzida por $H(\beta,0)$ $(\beta>2\alpha)$ perpendicularmente a $\overline{OP}$, e ache a equação da recta que passa pela intersecção desta curva com a anterior. Indique os limites entre os quais deve variar β para que as duas linhas tenham realmente pontos comuns. Que se observa quando β atinge o seu máximo? R: *A equação da circunferência é* $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2$; *a equação do diâmetro que passa pela origem é* $y=x$ *e o sistema*

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2\\ y=x\end{cases}$$

dá para coordenadas de P: $x=2\alpha$, $y=2\alpha$. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{x-\alpha}{y-\alpha}$$

que para as coordenadas de P *dá* $=-1$; *a equação da tangente em* P *será pois* $Y-2\alpha=-(X-2\alpha)$. *O traço desta recta é a solução do sistema*

$$\begin{cases}y-2\alpha=-(X-2\alpha)\\ y=0\end{cases}$$

isto é, o ponto de coordenadas $(4\alpha,0)$.

A equação da directriz é da forma $Y=m(X-\beta)$ *porque passa por* H, *e como deverá ser perpendicular a* $y=x$, *será* $m=-1$; *portanto,* $y=-(x-\beta)$ *ou* $y+x-\beta=0$.

Seja M(x, y) *um ponto corrente da parábola; distância de* M *ao foco* $+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2}$, *distância de* M *à directriz* $\frac{|y+x-\beta|}{+\sqrt{2}}$; *logo*

$$(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=(y+x-\beta)^2/2$$

é a equação da parábola. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=(y+x-\beta)^2/2\\ (x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2\end{cases}$$

tem-se $y+x-\beta=2\alpha$ *para equação da recta pedida. Deverá ser* $\frac{|2\alpha+2\alpha-\beta|}{\sqrt{2}}=-\sqrt{(2\alpha-\alpha)^2+(2\alpha-\alpha)^2}$ *e portanto* $2\alpha<\beta\leq 6\alpha$.

2672 — Qual é a condição necessária e suficiente para que uma série alternada decrescente convirja? Satisfeita essa condição, como se aprecia R_n? De acordo com a resposta à pregunta precedente, quantos termos se hão-de tomar em $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots$ para se obter S a menos de uma milésima (erro sistemático)?

Enuncie e demonstre algum teorema que possa esclarecer a natureza de uma série em que a_{n+1}/a_n tem por limite a unidade.

2673 — Que se entende por sucessão crescente? e em que condições admite tal sucessão limite finito? Que é o limite relativamente ao conjunto dos termos da sucessão?

Prove que uma função crescente em (a,b) tem limite finito para $x=b$. Está este limite na dependência do valor $f(b)$? Razão disso.

2674 — Seja $f(x)$ pròpriamente crescente em (a,b) e descontínua no ponto intermédio c, onde a oscilação tem o valor Δ.

Prove que $f(x'')-f(x')$ excede Δ sempre que seja $x'<c<x''$. Pode $f(x)$ ter em uma infinidade de pontos oscilação igual ou superior a Δ? Nas condições precedentes, determine as derivadas laterais de $\varphi(x)=$ $=(x-c)f(x)$ para $x=c$.

Soluções dos n.os 2665 a 2671 de José R. de Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo — Junho de 1947

I

2675 — Determinar a tangente à linha $y^x+(\operatorname{sen} x)^y=$ $=2$, $x+y+z=2+\pi/2$, no ponto $(\pi/2,1,1)$.
R: $X+Z=\pi/2+1$, $Y=1$.

2676 — Calcular $\int_0^{1/2} \operatorname{arc tg} 2x\, dx$.

R: $I=[x \operatorname{arc tg} 2x-1/4 \log(1+4x^2)]_0^{1/2}=\pi/8-1/4\log 2$.

II

2677 — Dada a equação $z=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(x-\frac{dz}{dx}\right)$, determinar a solução na qual a $x=1/2$ corresponde $dz/dx=0$. Determinar a equação da superfície gerada pela rotação em torno da recta $x=1/2$, da curva obtida. Calcular a curvatura da secção feita na superfície encontrada, no ponto $(1/2,0,0)$, pelo plano $2x-4y+8z=1$. R: *Fazendo* $z'=p$ *e derivando em ordem a* x *temos:* $\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p-1}=\frac{3p}{p-1}$; *integrando vem:* $x=c_1(p-1)^{-2}$, $c_1=p^3-3p^2/2+c_2$. *Portanto:* $x=\frac{c_2}{(p-1)^2}+\frac{2p^3-3p^2}{2(p-1)^2}$. *A solução pedida é:* $x=\frac{2p+1}{2}$, $z=\frac{p^2}{2}$. *Eliminando* p *temos:* $z=(2x-1)^2/8$. *A equação da superfície é:* $4x^2+4y^2-$ $-8z-4x+1=0$. *Temos no ponto* $(1/2,0,0)$; $p=0$; $q=0$; $r=1$; $s=0$ e $t=1$. *A curvatura feita pelo plano* $2x+4y-1=0$ *é:* $1/\rho=1$. *A curvatura da secção plana pedida é:* $\frac{1}{R}=\sqrt{\frac{21}{5}}$.

2678 — Dada a linha

$$x=\frac{2t}{1+t+t^2+t^3};\quad y=\frac{2}{1+t+t^2+t^3},$$

determinar o lugar dos pontos donde se podem tirar tangentes cujos pontos de contacto estão em linha recta. Determinar a envolvente destas rectas.

R: $x'=2\,\frac{1-t^2-2t^3}{(1+t+t^2+t^3)^2}$; $y'=-\,2\,\frac{1+2t+3t^2}{(1+t+t^2+t^3)^2}$.

A equação da tangente é:

$$Y(1-t^2-2t^3)+X(1+2t+3t^2)=2.$$

Se a recta $ax+by=c$ *passa por* $x=\frac{2t}{1+t+t^2+t^3}$, $y=\frac{2}{1+t+t^2+t^3}$ *temos:* $2at+2b=c(1+t+t^2+t^3)$.

Portanto: $\frac{-2Y}{c}=\frac{3X-Y}{c}=\frac{2X}{c-2a}=\frac{X+Y-2}{c-2b}$ *donde* $-2Y=3X-Y$ *ou seja* $3X+Y=0$, *equação do lugar pedido. As rectas são:* $2xX+(4x+1)Y-6x=0$ *que passam todas por* $(3,0)$.

Soluções dos n.os 2675 a 2678 de Jayme Rios de Souza

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de frequência ordinário — 1947-48.

2679 — Um triângulo rectângulo isósceles variável com os extremos da hipotenusa assentes nas curvas do plano xoy, de equações $y=3x$ e $x^2+y=0$ e cujo plano é perpendicular ao plano xoy está animado dum movimento de translação de tal modo que a sua hipotenusa se conserva sempre paralela a oy. Calcule: *a)* O volume do sólido gerado pelo triângulo quando a sua hipotenusa se desloca desde a recta $x=0$ até à recta $x=2$; *b)* Usando coordenadas polares a área limitada pelo eixo dos xx e pela curva descrita pelo ponto médio da hipotenusa. R: *a) Comprimento da hipotenusa* $3x+x^2$; *área do triângulo* $(3x+x^2)^2/4$, *logo*

$$V=\int_0^2(3x+x^2)^2/4\,dx=68/5.$$

b) Curva descrita pelo ponto médio da hipotenusa $y=(3x-x^2)/2$ *ou em coordenadas polares* $\rho=(3\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)/\cos^2\theta$, *logo*

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} 3/2} \rho^2\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\left[9 \operatorname{tg}\theta + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3\theta - 6\sec^2\theta\right]_0^{\operatorname{arctg} 3/2} = 27/12 .$$

2680 — Se $z=f(x,y)$ é máxima ou mínima em (a,b), a função $z=f(a+ht, b+kt)$ obtida da anterior fazendo a substituição $x=a+ht, y=b+kt$ (h e k arbitrários não conjuntamente nulos) é também máxima ou mínima em $t=0$. *a*) Verifique, considerando o caso particular da função $z=(2y-x^2)(y-4x^2)$, se a afirmação recíproca desta é ou não verdadeira. *b*) Discuta o problema e justifique as conclusões a que for conduzido. R: *a*) *Com efeito, fazendo a substituição indicada, tem-se* $z=(2kt-h^2t^2)(kt-4h^2t^2)$ *mínima para* $t=0$; *no entanto para a função original tem-se, em* $(0,0)$, $s^2-rt=0$ *e é fácil de ver estudando-a directamente que não é máxima nem mínima no referido ponto. b*) *A substituição considerada, para efeitos de determinação dos pontos de máximo e mínimo, não é em geral legítima, porquanto equivale a estudar o comportamento da função dada apenas ao longo de todas as rectas que passam pelo ponto* (a, b).

2681 — Considere o sistema $x+yz=1, xz-y=-1$. *a*) Mostre que este sistema define nas vizinhanças do ponto $(1,1,0)$ y e z como funções de x. *b*) Calcule d^2z e d^2y. R: *a*) *Com efeito* $(1,1,0)$ *é uma solução inicial, as derivadas parciais são contínuas e*
$$\partial(f_1, f_2)/\partial(y,z) = 1 \neq 0 .$$
b) *Efectua-se pelo método habitual.*

2682 — Calcule $I=\iiint_D z\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ onde D é definido pelas superfícies de equações $z=0$, $z=h$ e $x^2+y^2=a^2$ (h e a constantes positivas). R: *Em coordenadas cilíndricas é*
$$I=\iiint_{D'} z\rho^3\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a d\rho \int_0^h z\rho^3\,dz = \pi h^2 a^4/16 .$$

2683 — Seja C uma curva plana, fechada, simples e regular que delimita um domínio S de área A. *a*) Mostre que $\int_C ay\,dx+bx\,dy=(b-a)\,A$. *b*) Calcule $\oint (3y\,dx+x dy)$ ao longo do triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(2,3)$ e verifique o resultado usando a fórmula da alínea *a*). R: *a*) *Obtém-se imediatamente usando a fórmula de Green. b*) *É*
$$\oint (3y\,dx + x dy) = \int_1^3 3dx + \int_2^4 (6x-18)\,dx -$$
$$-\int_1^2 (12x-9)\,dx = -9 ;$$
por outro lado é $b=1$, $a=3$ e $A=9/2$, *logo* $(b-a)A=-9$.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de frequência extraordinário — 1947-48.

2684 — Sejam a e b os catetos dum triângulo rectângulo cujo plano é perpendicular ao plano xoy. O cateto a tem as suas extremidades apoiadas nas curvas, do plano xoy, de equações $y=x^2$ e $y=x^2-2x$ e o cateto b tem um comprimento igual a 10. Supondo o triângulo animado de um movimento de translação de tal maneira que o cateto a se conserva sempre paralelo ao eixo dos yy, calcule: *a*) O volume gerado pelo triângulo, quando o cateto a se desloca desde a recta de equação $x=0$ à recta de equação $x=1$; *b*) Usando coordenadas polares a área do domínio do 4.º quadrante limitado pelo eixo dos xx e pela curva gerada pelo ponto médio do cateto a. R: *a*) *Comprimento do cateto* $2x$; *área do triângulo* $10x$; *volume*
$$V=\int_0^1 10x\,dx = 5 ;$$
b) *Curva descrita* $y=x^2-x$; *área em coordenadas polares* $\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \frac{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2}{\cos^4\theta}\,d\theta = 1/6$.

2685 — Considere o sistema $zx+xy-yz^2=1; yz-x^2=1$ *a*) Verifique se este sistema define nas vizinhanças do ponto $(1,2,1)$, y e z como funções de x; *b*) Calcule d^2y no ponto $(1,2,1)$. R: *a*) *Define de facto visto* $(1,2,1)$ *ser uma solução inicial, as derivadas parciais serem contínuas e* $\partial(f_1, f_2)/\partial(y,z)=3\neq 0$.

2686 — Considere a função $z=4y^2+x+x^2$ e a equação de condição $x+x^2+2y+y^2+1=0$. *a*) Exprimindo z como função da variável única y determine os seus pontos de máximo e mínimo; *b*) Resolva o problema sem explicitar na equação de condição qualquer das variáveis; *c*) Como explica os resultados obtidos? Qual dos métodos é correcto e porquê? R: *a*) *Se da equação de condição tirarmos* $x+x^2=-y^2-2y-1$ *é* $z=3y^2-2y-1$, $dz/dy=6y-2$ *e* $dz/dy=0$ *e* $d^2z/dy^2>0$ *para* $y=1/3$. *b*) *Não explicitando, são* $(-1/2, -1/2)$ *e* $(-1/2, -3/2)$ *as soluções do sistema de estacionaridade. Como se trata de determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função contínua, para os pontos* (x, y) *variando sobre uma curva fechada, a menos que a função seja constante, existem necessàriamente um máximo e um mínimo. Substituindo as soluções achadas na função dada tem-se, respectivamente*

$z=3/4$ e $z=35/4$, *correspondendo, portanto, a primeira a um mínimo e a segunda a um máximo. c) A contradição é aparente e provém do facto de em a) termos feito uma escolha ilegítima da variável independente. A equação de condição não define nas vizinhanças de* $y=1/3$ *qualquer função* $x(y)$ *visto a este valor de* y *corresponderem valores complexos de* x. *Se em a) exprimíssemos* y *em função de* x *e portanto* z *em função de* x, *obteríamos os resultados determinados em b).*

2687 — Calcule $I=\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ onde D é o domínio do primeiro oitante limitado pelas superfícies de equações $x+y=4$, $x+y-2z=-2$, $z=0$, $y=0$, $x=0$. R: *Tem-se*

$$I=\int_0^4 dx\int_0^{4-x}dy\int_0^{\frac{x+y+z}{2}} z\,dz\,.$$

2688 — Sejam $f(x)$ e $g(y)$ funções contínuas. *a)* Mostre que $\oint_C [by+f(x)]\,dx+[ax+g(y)]\,dy$ é constante ao longo de qualquer circunferência de raio r. *b)* Calcule $I=\oint 4y\,dx+2x\,dy$ ao longo da circunferência de equações $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ e verifique o resultado recorrendo à propriedade *a)*.
R: *a) Recorrendo à fórmula de Green é fácil de ver que o integral dado é igual a* $-(b-a)\pi r^2$. *b) Tem-se*

$$I=\int_0^{2\pi} -6\operatorname{sen}^2 t\,dt+2\,dt=-2\pi\,.$$ *Por outro lado é* $f(x)=0$, $g(y)=0$, $a=2$, $b=4$ *e portanto* $I=-2\pi$, *visto* $r=1$.

Soluções dos n.os 2678 a 2689 de F. Carvalho Araujo

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência ordinário — 3 de Março de 1948.

2689 — Estudar a convergência do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2}\,.$$

2690 — Achar os máximos e mínimos da função

$$z=(x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}.$$

2691 — Calcular a distância mínima da origem à circunferência definida pelas equações: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-9=0$ e $ax+by+cz-d=0$.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência extraordinário — 10 de Março de 1948.

2692 — Calcular o integral $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. R: *Fazendo* $\operatorname{tg} x=t^2$ *vem* $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}$, *integral impróprio de 2.ª espécie convergente. Tem-se*

$$I=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left[\log\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}+2\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

2693 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x,y)=x^4+x^2y+y^2.$$

R: *O sistema de estacionaridade* $4x^3+2xy=0$, $x^2+2y=0$ *tem por solução* $x=0$, $y=0$ *e neste ponto é* $s^2-rt=0$. *Como* $f(x,y)=(x^2+y/2)^2+3y^2/4>0$ *trata-se de um mínimo.*

2694 — Determinar sobre o plano $x+ay+z=3$ um ponto cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos dados seja mínima. R: $F=\overline{PM}^2+\overline{PM'}^2=$
$=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2$
é a função soma dos quadrados das distâncias do ponto $P(x,y,z)$ *do plano dado aos pontos dados* $M(\alpha,\beta,\gamma)$ *e* $M'(\alpha',\beta',\gamma')$. *A equação de ligação é* $\varphi\equiv x+ay+z-3=0$. *Tem-se*

$$\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(x,y)}=2\begin{vmatrix}2x-\alpha-\alpha' & 2y-\beta-\beta'\\ 1 & a\end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(y,z)}=2\begin{vmatrix}2y-\beta-\beta' & 2z-\gamma-\gamma'\\ a & 1\end{vmatrix}.$$

Resolvendo o sistema

$$\varphi=0,\ \frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(x,y)}=0,\ \frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(y,z)}=0$$

obtinham-se as possíveis soluções do problema.

Soluções dos n.os 2689 a 2694 de Mário Madureira.

I. S. T. — Calculo Infinitesimal — Exame final — 1947

2695 — Dada a curva $y=x^2+3x^3$, $z=ax^2+4y^2$ será possível determinar a de modo tal que o plano osculador da curva na origem dos eixos passe pelo ponto $P(0,1,2)$? R: *Tem-se* $x'=1$, $x''=0$, $y'_0=0$, $y''_0=2$, $z'_0=0$ *e* $z''_0=2a$. *A equação do plano osculador na origem é* $\begin{vmatrix}X & Y & Z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2a\end{vmatrix}=0$. *Para o plano passar por* $P(0,1,2)$ *terá de ser* $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2a\end{vmatrix}=0$ *ou* $a=2$.

2696 — Determinar a família de curvas planas para as quais a projecção da ordenada sobre a normal é igual à abscissa. R: *Designando por* α *o ângulo da ordenada com a normal tem-se* $\operatorname{tg}\alpha = y'$ *e a projecção de ordenada sôbre a normal é pois* $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$. *A equação diferencial da família de curvas procurada é então* $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = x$, *quação linear em* y *e* x.

2697 — Substituir, na equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

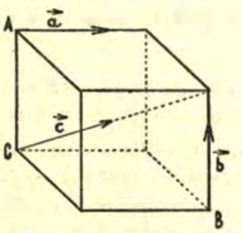
a variável dependente z e a variável independente x, respectivamente por v e u, sendo $v = z^2 x$ e $u = x + z$.

2698 — Investigar a existência de máximos e mínimos para a função

$$f(u) = \int_0^{u^2} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{u^2}\,dx .$$

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — **Exame final — Outubro, 1947.**



2699 — Três vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ estão aplicados sôbre duas arestas e uma diagonal dum cubo de lado l, como se indica na figura.

Determinar a, b e c de modo tal que o sistema seja equivalente a um vector único e determinar o eixo central nesse caso.

2700 — Verificar se um cone de revolução homogéneo pode ter pontos focais e determiná-los, no caso afirmativo.

2701 — Um pêndulo composto é constituído por uma esfera de raio R e massa M, suspensa por um fio de comprimento l e de peso despresível. Determinar o comprimento do pêndulo simples síncrono e calcular a reacção no eixo de suspensão.

2702 — Sejam

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial q'_h} \qquad h = 1, 2 \cdots n$$

as equações do movimento dum sistema holónomo, sendo λ uma constante. Verificar que, mudando a variável t na variável t_1, com ela ligada pela relação $dt = e^{-\lambda t}\,dt_1$, as precedentes equações se reduzem às dum movimento espontâneo.

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame de frequência ordinário — Abril de 1948.**

Parte Prática

2703 — Determinar o centro de gravidade do sólido que se obtém fazendo girar as duas parábolas $y^2 = 4x$ e $y^2 = 6(1-x)$ em torno do eixo comum.

2704 — Um ponto P descreve a espiral hiperbólica $r\theta = 5$ cm com movimento central, no sentido dos θ crescentes. Se a aceleração estiver dirigida para o polo da espiral, e se para $t=0$ for $\theta = \pi$ radianos e $|P'| = 10$ cm/seg., qual é a constante das áreas e quais são a velocidade e a aceleração de P para $\theta = 5\pi/6$ rad.?

Parte Teórica

2705 — Conceito geral de tensor — Tensores de Ricci e suas operações — Tensores em elasticidade.

2706 — Donde resulta a importância analítica dos sistemas de referência de König?

No movimento mais geral dum sólido, haverá sempre, num dado instante, algum ponto de aceleração nula?

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Université de Paris — Faculté des Sciences — Certificat d'Algèbre et de Théorie des Nombres — **Mars 1948.**

Épreuve pratique

2707 — On considère le groupe abélien G engendré par deux éléments A_1 et A_2 indépendants et chacun d'ordre 4, de sorte que:

$$A_1^x \times A_2^y = 1 \quad \text{équivalent à} \quad x \equiv 0 \quad \text{et} \quad y \equiv 0\ (4)$$

1. Construire les sous-groupes *cycliques* de G, d'ordre 4 et indiquer pour chacun d'eux la structure du groupe quotient. On pourra raisonner directement ou passer par l'intermédiaire de matrices.

2. On considère le groupe abélien H' engendré par deux éléments B_1 et B_2, indépendants et chacun d'ordre 2. Montrer qu'il y a un et un seul sous-groupe H de G_1, isomorphe à H'. Indiquer la structure du groupe quotient G/H. Montrer que H reste invariant dans tout automorphisme de G.

3. Montrer que le groupe des automorphismes de H' est isomorphe au groupe symétrique de *degré* 3. Montrer qu'il est isomorphe au groupe des matrices carrées d'ordre 2, à termes entiers, défini mod. 2 et de déterminant non congru à 0 (mod. 2) (groupe multiplicatif).

4. Indiquer quels sont les automorphismes de G qui laissent invariants *chacun* des éléments de H. En déduire l'ordre du groupe des automorphismes de G. Montrer que ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre 2, à termes entiers, définis, mod. 4, et à determinant non congru à 0, mod. 4. Vérifier l'égalité des ordres.

Note — Les questions 2, 3, 4 peuvent être traitées indépendament de 1. La première partie de la question 4 peut être traitée indépendament de la deuxième partie de 3.

Épreuve Théorique

2708 — On considère des systèmes de n nombres entiers (positifs, negatifs ou nuls): $\bar{a} = \| a_1 a_2 \cdots a_n \|$, constituant un espace E, de dimension n. L'addition des points $\bar{a}$ est définie par l'addition de leurs coordonnées de même rang. On appellera matrices des matrices carrées d'ordre n, dont les lignes (ou les colonnes) sont des points de E.

I

2709 — On définit dans E une comparaison (ou une relation d'ordre) des points par la condition que un point $\bar{a}'$ est au plus égal à un point $\bar{a}$, lorsque chacune de ses coordonnées a'_i est au plus égale à la coordonnée a_i de même rang de $\bar{a}$.

1. Démontrer que l'ensemble des points $\bar{\delta}$ au plus égaux à deux points $\bar{a}$ et $\bar{b}$ est égal à l'ensemble des points au plus égaux à un point (déterminé) qu'on notera $\bar{d} = (\bar{a}, \bar{b})$.

2. Montrer que l'ensemble des points $\bar{\mu}$ au moins égaux à $\bar{a}$ et $\bar{b}$ est égal à l'ensemble des points au moins égaux à un point (déterminé), qu'on notera $\bar{m} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

On a ainsi défini deux opérations sur des points (de E); indiquer leurs propriétés, montrer que chacune d'elles est distributive par rapport à l'autre.

3. Montrer que, pour 4 points, notés $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$

$$[\cdots \bar{i} + \bar{j} + \cdots] + (\cdots \bar{i} + \bar{j} \cdots) = \bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \bar{4};$$

les opérations $[\cdots]$ et $(\cdots)$ étant étendues aux 6 couples de points. Généraliser cette propriété pour un système de n points groupés k à k et $n-k$ à $n-k$.

4. Appliquer ces résultats à l'ensemble des nombres rationnels, obtenus en considérant les produits des puissances entières (positives, négatives et nulles) d'un système de h facteurs premiers différents.

II (indépendant de I)

2710 — On considère deux matrices regulières (á déterminants non nuls) A et B et les deux modules de points: $\mathcal{A}$ de base A et $\mathcal{B}$ de base B. On suppose que le seul module (dans E) qui contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est E lui même. Rappeler comment cette hypothèse peut être exprimée par une propriété des matrices A et B.

1. On cherche l'ensemble des points communs aux deux modules, c'est-à-dire, les systèmes d'entiers x'_1 et y'_1 tels que:

$$\| x'_1\ x'_2 \cdots x'_n \| \times A = \| y'_1\ y'_2 \cdots y'_n \| \times B.$$

Montrer que ces systèmes, considérés dans un espace E', constituent des modules $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ dont on peut déterminer des bases A' et B' telles que:

$$A' \times A = B' \times B.$$

2. Montrer que l'hypothèse sur A et B reste vérifiée et que le problème précédent est remplacé par un problème «équivalent» quand on remplace A et B respectivement par des matrices:

$$A_1 = S \times A \times \Sigma, \quad B_1 = S' \times B \times E,$$

S, S', Σ étant des matrices unimodulaires. Préciser le sens du mot «équivalent».

3. On profitera de ce changement pour prendre A_1 sous la forme réduite d'Hermite et B_1 sous la forme réduite de Smith:

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a'_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ a''_1 & a''_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|, \qquad B_1 = \left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|;$$

e_i divisant e_{i+1}. Montrer que la condition necessaire et suffisante pour que la condition imposée à A et B soit vérifiée est que a_i et e_i soient premiers entre eux (pour chaque valeur de i). Determiner alors une base du module et montrer qu'elle est équivalente à la matrice A (on pourra se borner au cas de matrices d'ordre 3).

En déduire une propriété générale de 4 matrices régulières A, A', B, B' telles que:

$$A' \times A = B' \times B;$$

A et B étant sans diviseurs à droite et A' et B' sans diviseurs à gauche.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

70 — WEATHERBURN, C. E. — **A first course in Mathematical Statistics** — Cambridge University Press, 1946.

É grande o número de tratados, livros didácticos e notas de Estatística Matemática publicados nos últimos anos sobretudo em língua inglesa. Entre os primeiros não podemos deixar de citar os de Wilks, Kendall e recentemente, na valiosa colecção de Princeton, o do Prof. Harold Crámer.

A obra de que nos ocupamos pertence à 2.ª categoria e reune as lições feitas num curso anual da «University of Western Australia» creado a pedido de vários departamentos científicos da Universidade (Agricultura, Biologia, Economia, Física e Química, e Psicologia) os quais pretendiam que os respectivos alunos adquirissem alguns conhecimentos sobre os fundamentos matemáticos da Estatística, conhecimentos que dia a dia se tornam de maior valor. De tão difícil tarefa desempenhou-se admiràvelmente, na nossa opinião, o prof. Weatherburn cujos livros didácticos sobre Geometria Diferencial e Geometria Riemanniana são, porventura, conhecidos dole itor. O livro é de fácil leitura e acompanhado de numerosos exemplos ilustrando o emprego dos vários métodos. Resente-se porém, por vezes, da dificuldade que há da parte do professor que tem de dirigir-se a um público tão heterogéneo e não especializado em Matemática. A maioria das demonstrações é apresentada em notas no fim dos capítulos ou propostas como exercício ao leitor mais interessado e experiente.

A obra compreende generalidades sobre distribuições a uma e mais variáveis, elementos da teoria da correlação, da teoria da amostragem, «tests» de significância, análise de variância, etc.

A leitura deste livro será certamente muito útil a todos os que queiram iniciar-se, mas sobretudo para os estudantes da Agronomia e Economia que poderão seguidamente, com maior rendimento, empreender o estudo das aplicações da Estatística àqueles assuntos em que se especializarão.

Manuel Zaluar

71 — SMITH, David Eugene. — **The Poetry of Mathematics and other Essays.** Scripta Mathematica. Yeshiva College. — New York, 1947.

Os leitores de *Scripta Mathematica*, *American Mathematical Monthly* e *Mathematics Teacher*, que se interessam pelas coisas da história amena da Matemática já tinham conhecimento dos artigos que o prof. *Smith* reuniu em 1934, sob aquele titulo na colecção da Scripta Mathematica, e do qual em 1947 se fez uma 2ª edição. Contem o livro cinco artigos o primeiro dos quais dá o titulo ao livro, intitulando-se os outros: *The Call of Mathematics, Religio Mathematici*, *Thomas Jefferson and Mathematics*, e *Gaspar Monge, Politician.*

Todos os artigos são de interesse, como quase sempre o eram os do prof. David Eugene Smith, o autor da *Rara Arithemetica.*

José da Silva Paulo

72 — **Newton Tercentenary Celebrations.** Cambridge University Press, 1947.

A Royal Society celebrou em Julho de 1946 o tricentenário do nascimento de Sir Isaac Newton e convidou as academias científicas de todo o mundo a participarem na homenagem à memória do grande cientista. A referida celebração deveria ter tido lugar em 1942 mas teve de ser adiada por causa da guerra.

As mensagens e estudos apresentadas pelos delegados das diversas academias, focando aspectos vários da vida e obra de Newton, foram reunidas em volume. Destacaremos: «Newton» pelo Prof. E. N. da Costa Andrade, «Newton, o Homem» pelo falecido Lord Keynes, «Newton e o Cálculo Infinitesimal» pelo Prof. J. Hadamard (França), «Newton e a Teoria Atómica» por S. I. Vavilov (U. R. S. S.), «Os Princípios de Newton e a Moderna Mecânica Atómica» pelo Prof. N. Bohr (Dinamarca), «Newton: o Algebrista e o Geometra» pelo Prof. H. W. Turnbull, etc. .

A interessante publicação inclui várias fotografias entre as quais reproduções dalguns retratos de Newton.

Manuel Zaluar

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

PUBLICAÇÕES DA SOCIEDADE MATEMÁTICA DE S. PAULO

4. *Corpos Comutativos* por J. Dieudonné
5. *Teoria de Galois* por J. Dieudonné

Pedidos ao Prof. Cândido Dias, Sociedade Matemática de S. Paulo, Rua Alfredo Ellis, 301 — S. Paulo — BRASIL

NOTAS DE MATEMÁTICA, publicadas sob a direcção do Prof. A. Monteiro

1. *Combinação de Topologias* por L. Nachbin . . . . 35$00
2. *Filtros e Ideais* por A. Monteiro . . . . 45$00

SÉRIES NUMÉRICAS por Lélio Gama

Distribuidora desta obra e das Notas de Matemática: Livraria Boffoni, Rua Chile, 1 — Rio de Janeiro — BRASIL

PUBLICAÇOES DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Álgebra Moderna por L. Van der Waerden (trad. da 2.ª ed. por Hugo B. Ribeiro)

PUBLICAÇÕES DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Integral de Riemann por Ruy Luís Gomes

Sumários destas três últimas obras publicados nos números anteriores de Gazeta de Matemática

ACTUALITES SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES, Hermann & Cie, Paris

1029. *Éléments de Mathématiques-V* par N. Bourbaki
1ère partie — *Les Structures Fondamentales de l'Analyse*
Livre III — *Topologie Générale*

1032. *Éléments de Mathématiques-VI* par N. Bourbaki
Livre II — *Algèbre*

1040. *Sur les Groupes Classiques* par J. Dieudonné

1041. *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en déduisent* par André Weil

Algèbre et Analyse Linéaires par A. Lichnerowicz — Masson & Cie. — Paris

Théorie des Fonctions par George Valiron (2ème ed.) — Masson & Cie. — Paris

Introduction Mathématique aux Théories Physiques Modernes — 1ère Partie par Max Morand — Librarie Vuibert — Paris

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará quatro números por ano.
Preço: 10 escudos cada número

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de 30 escudos, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automáticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Tôdas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes: 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 23 cada 6,50 escudos; 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 33, 34 e 35 cada 10 escudos; n.os 1-4, 2.a ed., 40 escudos.

COLECÇÕES COMPLETAS

O pequeno número de colecções completas ainda existentes destina-se a bibliotecas de escolas e estabelecimentos oficiais sendo a sua venda feita ao preço de 330 escudos (colecção dos 30 primeiros números).

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição dêstes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.

1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.

2.º exame de frequência — número de Maio.

Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. 1 (N.os 1 a 4)

Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções, no formato e características actuais e com textos cuidadosamente revistos. À nova edição do primeiro ano seguir-se-á a do segundo ano, também com o texto revisto e no formato actual.

Preço da 2.ª edição do volume 1: 40 escudos.

ASSINE A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N