GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CANDIDATOS AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

A. MONTEIRO, B. CARAÇA, H. RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR

ANO I **N.º 4** OUTUBRO - 1940

PREÇO DÊSTE NÚMERO 3$00

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

26-06-7

1.º ANO - N.º 4 OUTUBRO DE 1940

GAZETA DE MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Sejam

$$\begin{cases} a\ x+b\ y+c=0 \\ a'\ x+b'\ y+c'=0 \\ a''\ x+b''\ y+c''=0 \end{cases}$$

as equações de três rectas não concorrentes. E representemos por C, C', C'' *os complementos algébricos dos elementos* c, c', c'' *do determinante*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

A condição necessária e suficiente para que o ponto $P(x_1, y_1)$ *seja interior ao triângulo formado pelas três rectas, é que*

$$(a\ x_1+b\ y_1+c)\cdot\frac{C}{\Delta}>0$$

$$(a'\ x_1+b'\ y_1+c')\cdot\frac{C'}{\Delta}>0$$

$$(a''x_1+b''y_1+c'')\cdot\frac{C''}{\Delta}>0.$$

Na verdade, a identidade

$$(ax+by+c)\cdot\frac{C}{\Delta}+(a'x+b'y+c')\cdot\frac{C'}{\Delta}+(a''x+b''y+c'')\cdot\frac{C''}{\Delta}\equiv 1,$$

dá-nos

$$(ax_1+by_1+c)\cdot\frac{C}{\Delta}\equiv 1>0,$$

no caso particular de o ponto P coïncidir com o *vértice oposto* ao lado de equação $ax+by+c=0$. E se o ponto é interior ao triângulo, o sinal de $ax+by+c$ não varia com êsse ponto (sempre interior!).

Logo,

$$(a\ x_1+b\ y_1+c)\cdot\frac{C}{\Delta}>0$$

$$(a'\ x_1+b'\ y_1+c')\cdot\frac{C'}{\Delta}>0$$

$$(a''x_1+b''y_1+c'')\cdot\frac{C''}{\Delta}>0.$$

— Êste problema foi enviado à Redacção pelo Professor da Faculdade de Ciências do Pôrto Doutor Madureira e Sousa.

CORPOS QUADRÁTICOS E SEUS IDEAIS

(CONTINUADO DO N.º 2)

Chama-se norma de um número α ao produto $n(\alpha)=\alpha\,.\,\alpha'$, de α pelo seu conjugado, que é igual a $\frac{a_0}{a_2}$, se α satisfaz à equação $a_2 x^2+a_1 x+a_0=0$, e é um número racional e inteiro se α fôr um inteiro. A norma de um número racional é então igual ao quadrado do módulo e a norma de um inteiro α é um inteiro racional.

É fácil ver que a norma de um produto é igual ao produto das normas dos factores; efectivamente $n(\alpha\beta)=(\alpha\beta)(\alpha\beta)'=$ $=\alpha\beta\alpha'\beta'=n(\alpha)\,n(\beta)$, por ser $(\alpha\beta)'=\alpha'\beta'$, isto é o conjugado de um produto igual ao produto dos conjugados.

Chamaremos unidade de um corpo, a qualquer inteiro ε do corpo tal que $\frac{1}{\varepsilon}$ seja também um inteiro ε', e diremos que um inteiro β divide um inteiro α se existir um terceiro γ tal que $\alpha=\beta\,.\,\gamma$. Quere dizer então que $\varepsilon\varepsilon'=1$, e portanto ε' é também uma unidade. Uma unidade divide todo o inteiro α do corpo pois que $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\alpha=\varepsilon'\alpha$ visto que o produto de dois inteiros é um inteiro. No caso do corpo de Gauss as unidades são ± 1 e $\pm i$.

Diremos que dois números α e β são associados se qualquer dêles é divisível pelo outro; tem-se então (7) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$ e $\alpha=\varepsilon\beta$, isto é, α e β só diferem por um factor unidade. De facto de (7) vem $\alpha=\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}$ e como $\frac{\alpha}{\beta}$ é um inteiro γ e $\frac{\beta}{\alpha}$ é também um inteiro igual a $\frac{1}{\gamma}$, γ é uma unidade ε, e $\alpha=\varepsilon\,.\,\beta$.

Concluímos assim que todo o inteiro é divisível pelas unidades do corpo e pelos seus associados; se o inteiro não tiver outros divisores diremos que êle é *indecomponivel* no corpo e como vemos esta noção generaliza a de número primo no corpo R. Demonstra-se que todo o número α cuja norma é um número primo ordinário é indecomponível em $R(\sqrt{m})$.

Se fôr $\alpha=\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$, e pertencendo os $\beta\beta$ ao corpo nenhum dêles é uma unidade ou associado a α, diz-se que aquela decomposição de α é *essencial;* e esta decomposição é equivalente à decomposição em factores primos no campo racional.

Concretizemos estas definições num exemplo. Seja o corpo $R(\sqrt{-5})$. Os números do corpo são da forma $\frac{a+b\sqrt{-5}}{c}$, e os inteiros da forma $a+b\sqrt{-5}$; as unidades são ± 1. A norma de um inteiro será $(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})=a^2+5b^2$. Mas sucede agora que existem no corpo números que têm mais do que uma decomposição em factores indecomponíveis o que não sucede no corpo dos números racionais, em que a decomposição em factores primos é única. Assim o número $21=3.7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})$ em que os inteiros $3, 7, 4+\sqrt{-5}, 4-\sqrt{-5}, 1+2\sqrt{-5}$ e $1-2\sqrt{-5}$ são indecomponíveis em $R(\sqrt{-5})$. De facto se $3=(a+b\sqrt{-5})(a_1+b_1\sqrt{-5})$ então $3=aa_1-5bb_1$ e $0=ab_1+a_1b$, e da última tira-se $\frac{a}{a_1}=-\frac{b}{b_1}=r$ ou $a=ra_1$, e $b=-rb_1$, e por conseqüência $3=ra_1^2+5rb_1^2$ em que ra_1^2 e rb_1^2 são inteiros não negativos, e como para $b_1\neq 0$ $5rb_1^2>3$ a primeira igualdade é impossível e então $b_1=0$, $b=0$, $a=3$ e $a_1=1$ ou $b_1=0$, $b=0$, $a=1$ e $a_1=3$ quere dizer que 3 é indecomponível. Anàlogamente se demonstra que 7 é indecomponível. Se fôsse $4+\sqrt{-5}=(a+b\sqrt{-5})(a_1+b_1\sqrt{-5})$ então tomando as normas, $21=(a^2+5b^2)(a_1^2+5b_1^2)$ e por serem racionais e inteiros os dois membros será $21=a^2+5b^2$ e $1=a_1^2+5b_1^2$ sistema que tem as soluções $(a=4, b=1)(a_1=\pm 1, b_1=0)$ que não satisfazem a (8) e as soluções $a=1$, $b=2$ e $a_1=\pm 1$, $b_1=0$ ou então $3=a^2+5b^2$ e $7=a_1+5b_1^2$ que é impossível. Logo $4+\sqrt{-5}$ é indecomponível. Demonstrações análogas se fazem para os outros números.

As decomposições de 21 são por isso essencialmente diferentes.

Um número pode assim apresentar, num dado corpo, mais do que uma decomposição em factores indecomponíveis, e como conseqüência tôda a teoria dos números racionais, que assenta na decomposição única de qualquer número em produto de factores primos, é insusceptível de se generalizar.

Para obviar a êste inconveniente, Kummer que o tinha notado quando do estudo da divisão da circunferência em partes iguais, criou o conceito de números ideais, números de que se fazia a adjunção ao corpo.

Mais tarde Dedekind modifica a noção e em vez de um número não pertencente ao corpo introduz um conjunto de números pertencentes ao corpo. Esta noção permite a decomposição única de qualquer número do corpo em factores ideais.

Vejamos num caso particular como se pode explicar o conceito de ideal.

Consideremos o conjunto de números da forma $4n+1$, que não formam evidentemente um corpo, pois que a soma ou diferença de números do conjunto não pertence ao conjunto, mas para os quais o produto e a divisão se podem definir à maneira ordinária.

Seja então a sucessão $1, 5, 9, 13, 17\cdots 73, 77\cdots 141\cdots$ é claro que $(4n+1)\times(4m+1)=4p+1$.

Daquela sucessão os números $5, 9, 13, 17, 21, 29\cdots$ são indecomponíveis no conjunto considerado.

No entanto o número $10857=141\times 77=21\times 517$ pode ser decomposto de 2 modos essencialmente diferentes. Da mesma maneira $693=21\times 33=9\times 77$ e $441=21^2=9\times 49$.

Mas nós sabemos neste caso como restabelecer a decomposição única. Basta juntar ao conjunto dos números considerados, quando por exemplo se trata da decomposição de 10857, os números $3, 7, 11$ e 47. De modo que $10857=3\times 7\times 11\times 47$.

Esta era a idéia de Kummer: a adjunção de certos números que não pertencendo ao corpo restabelecem a decomposição única. Notemos que 3 pode ser considerado como o *m. d. c.* de 21 e 141, 7 o *m. d. c.* de 21 e 77, 11 o *m. d. c.* de 77 e 517 e 47 o *m. d. c.* de 141 e 517.

Se designarmos pelo símbolo $j=(a, b)$ o máximo divisor comum dos inteiros a e b o número 3 do exemplo anterior é exactamente igual a $(21, 141)$. E o número 10857 pode escrever-se $10857=(21,141)(21,77)(77,517)(141,517)$.

Vejamos agora como se define ideal no corpo quadrático, segundo Dedekind.

Chama-se ideal do corpo $R(\sqrt{m})$ e designa-se por $j=(\alpha, \beta, \gamma\cdots)$ um sistema infinito de números do corpo tais que tôda a combinação linear $\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu+\cdots$ dos números $\alpha, \beta, \gamma\cdots$ em que os coeficientes $\lambda, \mu, \nu\cdots$ são números inteiros do corpo, pertence ainda ao corpo.

Em particular um ideal chama-se ideal principal, quando os números que o definem são múltiplos dum inteiro do corpo $j=(\alpha, \alpha\lambda, \alpha\mu\cdots)$ escreve-se então $j=(\alpha)$.

Quando um ideal contém 1 ou um divisor ε de 1, chamar-lhe-emos ideal unidade e designa-se pelo símbolo $j=(1)$.

Define-se então, igualdade de ideais, produto de ideais, etc.

Apliquemos agora estes conceitos à decomposição de 21 no corpo $R(\sqrt{-5})$ já estudado.

Formemos os ideais do exemplo anterior $(3, 4+\sqrt{-5})$ $(3, 4-\sqrt{-5})$, $(3, 1+2\sqrt{-5})$, $(3, 1-2\sqrt{-5})$, $(7, 4+\sqrt{-5})$, $(7, 4-\sqrt{-5})$, $(7, 1+2\sqrt{-5})$, $(7, 1-2\sqrt{-5})$, $(4+\sqrt{-5}, 1+2\sqrt{-5})$, $(4+\sqrt{-5}, 1-2\sqrt{-5})$, $(4-\sqrt{-5}, 1+2\sqrt{-5})$, $(4-\sqrt{-5}, 1-2\sqrt{-5})$ o que nos vai permitir tornar única a decomposição 3×7 de 21.

Os ideais que formamos não são todos diferentes uns dos outros. É fácil ver que $(3, 4+\sqrt{-5})=(3, 1-2\sqrt{-5})$ porque $3.3-2(4+\sqrt{-5})=1-2\sqrt{-5}$. Quere dizer $(3, 4+\sqrt{-5})=-(3, 4+\sqrt{-5}, 1-2\sqrt{-5})$. Só são diferentes os ideais $(3, 4+\sqrt{-5})$, $(3, 4-\sqrt{-5})$, $(7, 4+\sqrt{-5})$ e $(7, 4-\sqrt{-5})$; ora $(3)=(3, 4+\sqrt{-5})(3, 4-\sqrt{-5})=(9, 12+3\sqrt{-5}, 12-3\sqrt{-5}, 21, 3)$ porque $3=21-2.9$ e $(7)=(7, 4+\sqrt{-5})(7, 4-\sqrt{-5})=(49, 28+7\sqrt{-5}, 28-7\sqrt{-5}, 21)$ e portanto $21=(3, 4+\sqrt{-5})(3, 4-\sqrt{-5})(7, 4+\sqrt{-5})(7, 4-\sqrt{-5})$ o que restabelece a decomposição única do número 21 no corpo $R(\sqrt{-5})$.

J. DA SILVA PAULO

NOTA: — Os exemplos foram tirados da tradução francesa do livro de J. Sommer, *Introduction à la théorie des nombres algébriques.* Podem consultar-se com proveito além dêste livro os seguintes:

Hilbert — *Théorie des corps de nombres algébriques.*

Bianchi — *Teoria dei numeri algebrici.*

J. S. P

DO INTEGRAL DE RIEMANN AO INTEGRAL DE LEBESGUE

(duma conferência de Henri Lebesgue realizada na Sociedade de Matemática em Copenhague e publicada no n.º 2 (1927) da Révue de Métaphysique et de Morale)

Os Geómetras do século XVII consideravam o integral de $f(x)$, — o têrmo integral não era ainda usado, mas pouco importa — como a soma duma infinidade de indivisíveis cada um dos quais era a ordenada, positiva ou negativa, de $f(x)$. Pois bem: nós não fizemos mais do que agrupar os indivisíveis de grandeza comparável, ou, como se diz em álgebra, reünimos, reduzimos os termos semelhantes. Pode dizer-se ainda que, com o procedimento de Riemann, se tentava somar indivisíveis tomando-os pela ordem em que eram dados pela variação de x; operava-se, pois, como o faria um comerciante sem método que contasse moedas e notas ao acaso pela ordem em que lhe chegassem às mãos; ao passo que nós operamos como o comerciante metódico que diz:

tenho $m(E_1)$ moedas de 1 corôa (Dinamarca) o que dá $1 . m(E_1)$
tenho $m(E_2)$ moedas de 2 corôas o que dá $2 . m(E_2)$
tenho $m(E_3)$ notas de 5 corôas o que dá $5 . m(E_3)$, etc.
tenho, portanto, ao todo $S = 1 . m(E_1) + 2 . m(E_2) + 5 . m(E_3) + \cdots$

Os dois modos de proceder conduzirão, certamente, o comerciante ao mesmo resultado, porque, por mais rico que êle seja, só tem um número finito de notas para contar; mas, para nós, que temos que adicionar uma infinidade de indivisíveis, a diferença entre as duas maneiras de proceder é capital.

Trad. H. R.

Nota do Prof. Dr. Ruy Luis Gomes

Representando por $m(E_i)$ a medida (L) do conjunto dos pontos x tais que os valores correspondentes, $f(x)$, estão situados dentro dos limites $y_i < f(x) \leq y_{i+1}$, tem-se em $S = \Sigma \eta_i \, m(E_i)$, com $y_i < \eta_i \leq y_{i+1}$, a soma que conduz ao integral L de $f(x)$

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo

379 — Determine m de modo que o trinómio $(m+1)x^2 - 8x + m + 1$ seja positivo para qualquer valor real de x. R: m *deve satisfazer à desigualdade* $4^2 - (m+1)^2 < 0$ *donde se deduz* $m > 3$ *ou* $m < -5$.

M. Z.

380 — *a)* Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação: $ax + by = c$ para que esta tenha uma infinidade de soluções inteiras e positivas. *b)* Defina permutações de n objectos. Relacione os números de arranjos ${}^{n}A_p$ e ${}^{n+1}A_p$ de n objectos tomados p a p e de $n+1$ objectos tomados p a p.

381 — Sendo 12,12 m o comprimento dos lados dum losango e 6,34 m o comprimento da sua diagonal menor, determine por cálculo logarítmico os valores dos ângulos do losango. R: *Os ângulos são* $30^\circ 19' 26''$ *e* $149^\circ 40' 34''$.

382 — Verifique a seguinte igualdade:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x .$$

R: *Dividindo ambos os têrmos por* $\cos x + \operatorname{sen} x$ *vem:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \operatorname{sen} x),$$

igualdade evidente atendendo a que $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

M. Z.

383 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de $\operatorname{cotg}(-390^\circ)$ e de $\sec\frac{9}{4}\pi$. R: $\operatorname{cotg}(-390^\circ) = \operatorname{cotg} 330^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ = -\sqrt{3}$; $\sec\frac{9\pi}{4} = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

M. Z.

384 — Considere um triângulo ABC, rectângulo em A e designe por a, b e c os comprimentos dos lados opostos aos ângulos A, B e C. Exprima os comprimentos m, m' e m'' das medianas do triângulo em função dos lados. R: $m = \frac{a}{2}$, $m' = \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}$, $m'' = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{4}}$.

M. P. R.

385 — Calcule, sem efectuar as operações, o resto da divisão por 4 do número $86 \times 381^4 + 74$. Enuncie as regras que usou.

I. S. C. E. F. — 25 de Julho de 1940

386 — *a)* Defina sistema de logarítmos e enuncie as propriedades fundamentais do cálculo logarítmico. Dada a decomposição em números primos dum número $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ exprima $\log n$ em função de $\log p_1, \log p_2, \cdots \log p_n$. *b)* Calcule por logarítmos $x = \frac{0{,}01^3 \sqrt{1{,}002}}{0{,}0004}$. R: $x = 0{,}0024973$.

387 — Diga em que consiste o desenvolvimento do binómio de Newton; escreva o têrmo geral e enuncie a lei de passagem dum têrmo para o seguinte. Calcule

$$f(x) = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{(x+1)^n - (x-1)^n}.$$

388 — São dadas no mesmo plano duas circunferências, uma de raio r, outra de raio $3r$; conhecendo o comprimento d da corda comum, calcular a distância dos centros. Discussão R: *Deverá ser* $d \leq 2r$ *para que o problema seja possivel. Com* $d < 2r$ *o problema tem as duas soluções*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{36r^2 - d^2} + \sqrt{4r^2 - d^2}\right) \text{ e } \frac{1}{2}\left(\sqrt{36r^2 - d^2} - \sqrt{4r^2 - d^2}\right).$$

Com $d = 2r$ *há a solução única* $\frac{1}{2}\sqrt{36r^2 - d^2}$.

M. P. R.

389 — Num rectângulo de lados L e l tiram-se as bissectrizes dos ângulos interiores. Verificar que os pontos de encontro dessas bissectrizes definem um quadrado e determinar a área dêsse quadrado. R: *A diagonal do quadrado é igual a* L−1 *e portanto a sua área será* $\frac{1}{2}(L-1)^2$.

M. P. R.

390 — Num triângulo rectângulo de ângulos agudos B e C exprimir $\operatorname{sen}(B-C)$, $\cos(B-C)$, $\operatorname{tg}(B-C)$ em função dos catetos b e c. R: $\operatorname{sen}(B-C)=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}$, $\cos(B-C)=\frac{2bc}{b^2+c^2}$, $\operatorname{tg}(B-C)=\frac{b^2-c^2}{2bc}$.

M. P. R.

391 — Determinar os inteiros n tais que a soma $1^2+2^2+\cdots+n^2$ seja divisível por $1+2+\cdots+n$.

Nota: — Sabe-se que $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

R: *O quociente de* $1^2+2^2+\cdots+n^2$, *por* $1+2+\cdots n$ *é* $\frac{2n+1}{3}$.

Deverá pois ser $2n+1=3(2p+1)$ (p *inteiro*) *e portanto os inteiros* n *a determinar são os sucessores dos múltiplos de* 3.

M. P. R.

ÁLGEBRA SUPERIOR

I. S. C. E. F. — Exame final, Outubro de 1940

392 — Dado o complexo $z=\frac{3}{2+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$ pô-lo sob a forma $x+yi$ e verificar que o lugar dos afixos de z é a circunferência $(x-2)^2+y^2=1$. R:

$$\frac{3}{2+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}=\frac{3(2+\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta)}{(2+\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta}-\frac{3\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta}i.$$

O lugar geométrico dos afixos é definido paramètricamente pelas equações

$$\begin{cases} x=\dfrac{6+3\cos\theta}{5+4\cos\theta} \\ y=-\dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta} \end{cases}$$

donde, por eliminação de θ, *se deduz*

$$(x-2)^2=\left(\frac{-4-5\cos\theta}{5+4\cos\theta}\right)^2=\frac{16+40\cos\theta+25\cos^2\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$$

$$y^2=\frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{5+4\cos\theta}$$

$$(x-2)^2+y^2=\frac{16+40\cos\theta+9+16\cos^2\theta}{(5+\cos\theta)^2}=1.$$

M. Z.

393 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=2\operatorname{sen}^2 x-3\cos^2 x$.

394 — Calcular as raízes reais da equação $x^4+x-10=0$. As raízes irracionais serão determinadas com um êrro inferior a $\frac{1}{10}$.

F. C. C. — Exames de freqüência, 1938-1939

395 — Achar com duas casas decimais exactas a raíz real da equação: $f(x)=\operatorname{sen}x-2x+1=0$ pelo método de iteração.

396 — Encontrar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x=cy+bz \\ y=az+cx \\ z=bx+ay \end{cases}$$

represente uma linha recta; mostrar que a recta é representada por

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{y}{\sqrt{1-b^2}}=\frac{z}{\sqrt{1-c^2}}.$$

397 — Resolver a equação

$$\cos a\cos^2 x-\operatorname{sen}a\cos\frac{a}{2}\cos x+\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}=0.$$

398 — Como aplicação da teoria dos complexos resolver a equação $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4=\frac{1+ia}{1-ia}$. (Pode fazer-se $x=\operatorname{tg}\varphi$ e $a=\operatorname{tg}\alpha$).

399 — Calcular o limite para $n=\infty$ de $\frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}n^{\frac{1}{12}}$.

400 — Em que casos são convergentes as séries:

$$\Sigma\, n(n+1)x^n \quad \text{e} \quad \Sigma\, x^n \operatorname{sen} n\theta\,?$$

401 — Traçar a curva $y=e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

402 — Num triângulo esférico é

$$a=113^\circ 2' 56'',\quad b=82^\circ 39' 28'',40,\quad c=74^\circ 54' 31''.$$

Calcular os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

F. C. L. — Alguns exercícios do curso

403 — Expressão geral dos números cujo produto por $a+bi$ é um número real. Mostre que o conjugado de $a+bi$ está contido nesta expressão. Lugar geométrico das imagens. R: *Seja* $x+iy$ *um número complexo tal que o produto* $(a+ib)(x+iy)=z$ (número real). *Ora* $z=(ax-by)+i(ay+bx)$. *Se* z *deve ser real, deve ter-se* $ay+bx=0$ *donde* (1) $\frac{x}{y}=\frac{a}{-b}$. *Sendo* λ *um número real arbitrário será pois* $x=\lambda a$ $y=-\lambda a$. *A expressão geral dos números* $(x+iy)$ *será então* (2) $x+iy=\lambda a-\lambda bi$. *O conjugado de* $a+bi$ *está contido nesta expressão: corresponde a* $\lambda=1$.

Lugar geométrico das imagens: *Êste lugar geométrico tem por equação, no plano* XOY, *a equação* (1). *É pois uma recta definida pela origem* (0,0) *e pela imagem do conjugado de* $a+bi$.

V. B.

404 — Escreva a expressão geral dos números cujo cociente por $a+bi$ é um imaginário puro. Lugar geométrico das imagens. R: *Procuramos a expressão geral dos números* $(x+iy)$ *tais que* $\frac{x+iy}{a+ib}=\lambda i$ *onde* λ *é um número real arbitrário. Logo,* $x+iy=-\lambda b+\lambda ai$ *ou* $kb-kai$ $(k=-\lambda)$. *Vê-se fàcilmente que o lugar geométrico das imagens dos números* $(x+iy)$ *é uma recta que passa pela origem e é perpendicular ao segmento orientado* OM, *que define o número* $a+bi$.

V. B.

405 — Extraia algèbricamente a raiz quadrada a $a+bi$ e aproveite o resultado para: 1.º Provar que as raízes quadradas do conjugado de um número são respectivamente conjugadas das raízes quadradas dêsse número. 2.º Extrair algèbricamente a raíz quadrada a $1+i\sqrt{3}$ e a $1-i\sqrt{3}$. R: *Seja* $x+iy$ *uma raiz quadrada de* $a+bi$. *Teremos, por definição* $(x+iy)^2=a+bi$ *ou* $(x^2-y^2)+i2xy=a+bi$. *Portanto:*

$$(1)\ \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy\quad\ =b \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x^2+(-y^2)=a \\ x^2(-y^2)=-\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$$ *o que mostra serem*

x^2 *e* $-y^2$ *as raízes da equação* (2) $u^2 - au - \frac{b^2}{4} = 0$ *que admite duas raízes reais* $\left(-\frac{b^2}{4} < 0\right)$. *Resolvendo a equação, obtemos* $u = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. *Por conseguinte*

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\[2mm] y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\[2mm] y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.\end{cases}$$

A 2.ª expressão (1) *mostra que* xy *tem o sinal de* b *e que portanto* x *e* y *têm o mesmo sinal ou sinais contrários conforme* $b \gtrless 0$. *Das 4 combinações possíveis de sinais em* (3) *só duas conduzem pois a soluções do problema. O número* $a+bi$ *tem portanto duas raízes quadradas que são*

$$(4)\qquad \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b_2}}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

onde $\varepsilon = +1$ *se* $b>0$, $\varepsilon=-1$ *se* $b<0$.

Conclusões: 1.ª *Dados os números* $a+bi$ *e* $a-bi$, *para um dêles é* $\varepsilon=1$ *e para o outro* $\varepsilon=-1$.

A expressão (4) *mostra que* $a+bi$ *e* $a-bi$ *têm raízes quadradas respectivamente conjugadas.* 2.ª *Para o número* $1+i\sqrt{3}$ *é* $\varepsilon=1$, *e as expressões* (4) *dão, para as suas raízes quadradas, os valores:* $\frac{\sqrt6}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$ *e* $-\frac{\sqrt6}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$. *As raízes quadradas de* $1-i\sqrt3$ *serão* $\frac{\sqrt6}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$ *e* $-\frac{\sqrt6}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$.

V. B.

406 — Prove que todo o complexo de módulo 1 se pode pôr na forma $\frac{1+ix}{1-ix}$ com x real. R: *O problema equivale ao seguinte: Prove que, dado um complexo qualquer de módulo* 1, $\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$ *se pode determinar sempre um número real* x, *em função de* φ, *tal que* $\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{1+ix}{1-ix}$.

1.º modo de resolução: *Sendo* x *real, o complexo* $\frac{1+ix}{1-ix}$ *tem efectivamente o módulo* 1 *pois que* $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1$. *Sendo* α *um argumento de* $1+ix$ *é* $-\alpha$ *um argumento de* $1-ix$, *seu conjugado. Um argumento do cociente é pois* $\alpha-(-\alpha)=2\alpha$. *Teremos* $2\alpha = \varphi+2k\pi$ *donde* $\alpha = \frac{\varphi}{2}+k\pi$ *e portanto* (1) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$. *Mas, visto ser* α *um argumento de* $1+ix$, *temos* (2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} = x$. *Atendendo a* (1) $x=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$.

2.º modo de resolução: *Temos, se* x *é real* $\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2} = \cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi$ (*verifica-se fàcilmente que* $a^2+b^2=1$) (3) $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \\[2mm] \mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{2x}{1+x^2}.\end{cases}$ *Mas, sendo*

$\cos\varphi = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$ *e* $\mathrm{sen}\,\varphi = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$, *e atendendo a* (3), *vemos que terá de pôr-se, para satisfazer ao problema* $x=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$.

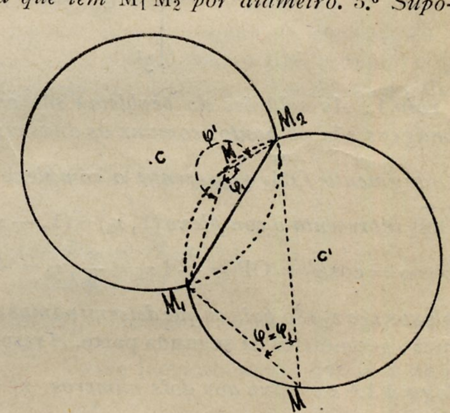
V. B.

407 — Onde deve estar a imagem M dum número z para que, sendo M_1 e M_2 as imagens de z_1 e z_2, o cociente $\frac{z-z_1}{z-z_2}$

1.º seja real?
2.º seja imaginário puro?
3.º tenha um argumento dado φ?

R: *Escrevamos o cociente na forma* $\frac{z_1-z}{z_2-z}$ *e notemos que* z_1-z *é representada pelo segmento* $\overrightarrow{MM_1}$ *e que* z_2-z *é representada pelo segmento* $\overrightarrow{MM_2}$. *O cociente tem por módulo* $\frac{MM_1}{MM_2}$ *e tem por argumento um dos ângulos* α *que* $\overrightarrow{MM_1}$ *forma com* $\overrightarrow{MM_2}$ *(suporemos* $\alpha>0$ *e portanto contado no sentido directo de* $\overrightarrow{MM_2}$ *para* $\overrightarrow{MM_1}$*).*

Nestas condições: 1.º *O cociente é real se* $\alpha = k\pi$, *isto é, se* M *é colinear com* M_1 *e* M_2. 2.º *O cociente é imaginário puro se* $\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($\alpha=90°$ *ou* $\alpha=270°$). *Então* M *deve estar sôbre a circunferência que tem* M_1M_2 *por diâmetro.* 3.º *Suponhamos que* φ' *é o argumento positivo mínimo que corresponde ao argumento dado* φ *e designemos por* φ_1 *o ângulo* φ' *se* $0<\varphi'<180°$ *e o ângulo* $\varphi'-180°$ *se* $180°<\varphi'<360°$. *Construam-se os dois segmentos capazes do ângulo* φ_1 *e passando por* M_1 *e* M_2. *Os segmentos são simétricos relativamente à recta* M_1M_2 *e tem-se* $M_1\hat{C}M_2 = M_1\hat{C'}M_2 = 2\varphi_1$. *Então: se* $\varphi'<180°$, M *está sôbre aquêles dois segmentos do qual se veja* M_1 *à esquerda de* M_2. *Se* $\varphi'>180°$, M *está sôbre aquêle dos dois segmentos do qual se veja* M_1 *à direita de* M_2.



Nota — Se $\varphi_1<90°$ os dois segmentos são os traçados a ponteado. Se $\varphi_1>90°$ os dois segmentos são os traçados a cheio.

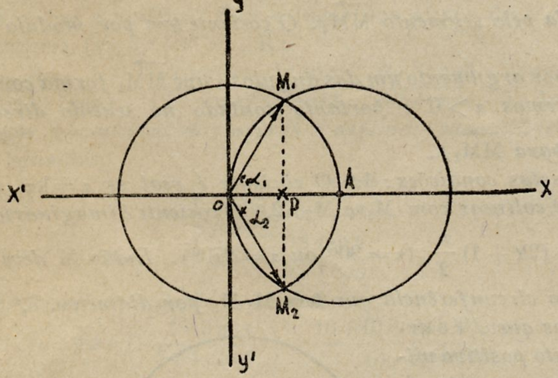
V. B.

408 — Determine um número z de modo que z, $\frac{1}{z}$ e $1-z$ tenham módulos iguais. Idêntica questão com z, $\frac{1}{z}$ e $1+z$. Resolva também geomètricamente o problema. R: Resolução algébrica da primeira parte: *Pondo* $z=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ *teremos* $\frac1z = \frac1\rho(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ *e* $1-z=(1-\rho\cos\alpha)-i\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha$. *Se* $\left|\frac1z\right|=|z|$ *será* $\frac1\rho=\rho$ *donde* $\rho=1$. *Temos ainda:*

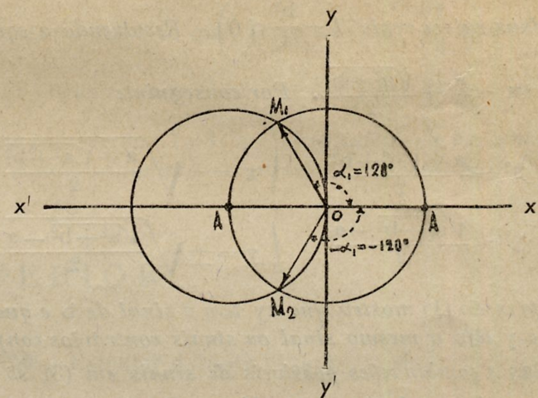
$|1-z| = (1-\cos\alpha)^2 + \text{sen}^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha$. *E como tem de ser* $|1-z|=1$, *será* $2-2\cos\alpha=1$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. *Logo* $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}$.

Há, por conseguinte, duas soluções: (1) $\begin{cases} z=\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \\ z=\cos\frac{\pi}{3}-i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Resolução geométrica. *Provámos fàcilmente que* $\rho=1$, *a partir da condição* $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$. *As imagens de todos os complexos tais que* $\rho=1$, *são os pontos da circunferência de centro na origem e raio* 1. *Por outro lado,* $1-z$ *deve ter o módulo* 1. *Ora, sendo* A *a imagem de* 1 *e* M *a de* z, $1-z$ *é representado pelo segmento orientado* $\overrightarrow{AM}$. *As imagens* M *de todos os números* z *tais que* $|1-z|=1$ *estão pois sôbre a circunferência de centro* A



e raio 1. *As soluções do problema são os dois números cujas imagens são os pontos comuns às duas circunferências citadas. O segmento* $\overrightarrow{OM_1}$ *representa o complexo* $(1,\alpha_1)$. *O segmento* $\overrightarrow{OM_2}$ *representa o complexo* $(1,\alpha_2)=(1,-\alpha_1)$. *Da figura tira-se* $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=OP=\frac{1}{2}\left(\alpha_1=\frac{\pi}{3}, \alpha_2=-\frac{\pi}{3}\right)$. *Os dois complexos* z_1 *e* z_2 *são pois os que determinámos algebricamente.* Resolução geométrica da segunda parte. *A resolução algébrica é análoga à* 1.ª *e conduz aos dois números* $z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ *e* $z_2=\cos\frac{2\pi}{3}-i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$ (2). *As imagens dos números* z *tais que* $|z|=1$ *estão na circunferência de raio* 1 *e centro* O, *como vimos. Notemos agora que* $1+z=1-(-z)$ *e que, por conseguinte, as imagens dos números tais que* $|1+z|=|1-(-z)|=1$ *estão sôbre a circunferência de centro* A' *e raio* 1, *simétrica da circunferência* A *relativamente a* O, *visto que as imagens*



(N. B. Dos pontos indicados na figura o mais à esquerda deve ser A' e não A)

dos números $-z$ *devem estar, como vimos, na circunferência de centro* A *e raio* 1. *As soluções* z_1 *e* z_2 *são os afixos dos pontos* M_1 *e* M_2, *os quais afixos são bem os complexos* (2).

V. B.

409 – Resolva a equação $(x+1)^m-(x-1)^m=0$ (m inteiro positivo). R: *A equação dada pode escrever-se* $mx^{m-1}+\binom{m}{3}x^{m-3}+\binom{m}{5}x^{m-5}+\cdots=0$, *ou ainda* $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m=1$ *donde* $\frac{x+1}{x-1}=\sqrt[m]{1}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$ $\left(\theta=\frac{2k\pi}{m}\right)$. *A equação decompõe-se assim em* m *equações lineares em* x. *Uma porém destas equações é impossivel — a que corresponde a* $\theta=0$ *ou ao valor* 1 *de* $\sqrt[m]{1}$.

Temos pois: $\frac{x+1}{x-1}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$; $x(1-\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta)=-\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta-1$; $x=\frac{\cos\theta+1+i\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta-1+i\,\text{sen}\,\theta}=\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta-1}i=-\text{cotg}\,\frac{\theta}{2}\cdot i$.

As soluções são então dadas por $x=-\text{cotg}\,\frac{\theta}{2}\cdot i$ *com* $\theta=\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \frac{6\pi}{m}, \ldots, \frac{2(m-1)\pi}{m}$, *por exemplo.*

M. Z.

410 – Resolva a equação $(x+i)^m-(x-i)^m=0$.

411 — Resolva $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^m-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^m=0$.

412 — Resolva $\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)^m-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^m=0$.

A resolução da equação **410** é análoga à do n.º **409**; **411** e **412** reduzem-se ao mesmo tipo fazendo $\sqrt{1-x^2}=z$.

M. Z.

Os exercícios 403 a 412 foram cedidos à Redacção pelo assistente Dr. Vergilio S. Barroso.

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Exame final, Julho de 1939

413 — Calcule $\displaystyle\int_{-2-i}^{-2+i}\frac{dz}{(z+1)(z-1)^2\sqrt{(z+2)^2+1}}$.

414 — Determine o integral geral da equação $x(x-y')+y(1-y)=0$ de que é integral particular $y=x$.

415 — Aplique o teorema dos resíduos ao cálculo de

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+5)^2(3x^2+1)}.$$

416 – Determine o integral geral da equação $(3+x)^3y'''+(3+x)^2y''+2(3+x)y'-2y=0$.

417 — Determine o sistema de integrais gerais do sistema:

$$\begin{cases} 2y'-z'+3y-z=x \\ y'+2z'+y-3z=1. \end{cases}$$

418 — Determine os extrêmos do integral $\int_{x_1}^{x_2} y'^2\,dx$ sob a condição de ser $\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx=1$ sendo $x_1=0$ $y_1=2$, $x_2=1$ $y_2=0$.

F. C. C. — Exame final, Julho de 1939

419 – Seja $f(z)$ uma função holomorfa no interior da região R, de contôrno C, e seja z_0 um ponto interior a C. Provar que $f(z)$ necessàriamente se anula dentro de R quando se tenha, sôbre C, $|f(z)| > |f(z_0)|$.

420 – Sejam $I_1, I_2, \cdots I_n, \cdot \cdot$ $[I_n = (\alpha_n, \beta_n)]$ os intervalos contíguos a um conjunto C, de medida nula, perfeito e não-denso no intervalo $(0,1)$. Pondo $f(0)=0$, $f(1)=1$ e, em geral,

$$f(x) = \sum_0^x (\beta_n - \alpha_n) \quad \text{para} \quad 0 < x < 1,$$

abrangendo o somatório apenas os intervalos I_n situados no interior do intervalo $(0, x)$, pregunta-se:

¿É $f(x)$ de variação limitada? ¿Absolutamente contínua? Derivável? Achar os derivados à direita e integrá-los em $(0, x)$.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Exame final, 1939 (Alguns exercícios)

421 — Determinar os pontos singulares da curva
$$y^2 = (2-x)^2(1-x).$$

422 — Calcule $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\cos x\,(1-2\cos x)}\,dx$.

423 — Calcule o integral geral de $xy^2\,dy = (x^3+y^3)\,dx$.

424 — Transforme a equação $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ noutra em que as variáveis independentes x e y sejam substituídas pelas novas variáveis t e z relacionadas com as primeiras por $x = z^2 + t^2$ $y = t^2 - z^2$.

425 — Dadas as funções u e z de x e y definidas pelo sistema $\begin{cases} xz - \log u + e^y = 0 \\ uz - y^2 = 0, \end{cases}$ calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

426 — Calcule $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

427 — Calcule o integral geral de $y^2\left[1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = 3$.

428 — Calcule a área limitada pela curva $y^2 = 4x^2 - x^4$.

429 — Calcule o volume gerado pela rotação em tôrno de OY da curva $x^2 = y^3 - 4y$.

430 — Calcule $\int x \log(x^4 - 1)\,dx$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

431 — *a)* Determinar o coeficiente-função (escalar) $\mu(x)$ do vector x de um espaço E por maneira que a transformação $x' = Tx = x + \mu(x) . a$ seja (separadamente) ortogonal, hermítica, unitária, de projecção. *b)* Estudar igualmente o caso em que T se reduz a uma simetria. Qual é o hiperplano da simetria? O vector a pode ser qualquer? *c)* Indicar em todos os casos as constantes e os vectores fundamentais de T.

Indicação: partir do produto interno (x, y) de dois vectores de E_n. *Nota:* — O caso da simetria encontra-se em *Leçons sur la théorie des Spineurs*, E. Cartan, pág. 12, 13. R. L. G.

432 – Mostre que, de todos os rectângulos que podem inscrever-se numa elipse, tem a área máxima o que tem por lados as diagonais dos quadrados construídos sôbre os semi-eixos da elipse.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

209 — Pela aplicação do método de Fubini virá:
$$\int \frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx = M\log(x-c) + N\log(x-d) + \frac{Ox+P}{(x-c)(x-d)}$$
em que M, N, O, P são constantes a determinar.

Para que a primitiva se reduza a uma função racional, terá que ser necessàriamente $M = N = 0$, logo:
$$\int \frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}\,dx = \frac{Ox+P}{(x-c)(x-d)}.$$

Derivando esta igualdade vem:
$$\frac{(x-a)\,(x-b)}{(x-c)^2\,(x-d)^2} = \frac{O(x-c)(x-d)-(Ox+P)(2x-c-d)}{(x-c)^2\,(x-d)^2}$$
donde
$$(x-a)(x-b) = O(x-c)(x-d) - (Ox+P)(2x-c-d)$$
$$x^2 - (a+b)x + ab = -Ox^2 - 2Px + Ocd + P(c+d).$$

Identificando: $O = -1$, $-(a+b) = -2P$, $ab = Ocd + P(c+d)$; e eliminando O e P vem:
$$ab = -cd + \frac{(a+b)(c+d)}{2} \quad \text{ou} \quad 2(ab+cd) = (a+b)(c+d).$$

O. MORBEY RODRIGUES

210 — Seja $abcde$ o conjunto pedido. Em qualquer base
$$(abcde) = (a0000) + (bcde) \text{ e } (a0000) > (bcde);$$
portanto, se fôr $(a0000) = N$, será $(bcde) = \theta N$ e $0 \leq \theta < 1$ em que θ é função não crescente da base considerada, para cada sistema $abcde$. Seja k a razão dos valores do número $(a0000)$ na base x considerada e na base 10. Se fôr $M = a . 10^4$ teremos
$$(abcde)_{10} = M(1+\theta) \qquad\qquad 0 \leq \theta' \leq \theta < 1.$$
$$(abcde)_x = kM(1+\theta')$$

A equação $(abcde)_x = 2(abcde)_{10}$ escreve-se $kM(1+\theta') = 2M(1+\theta)$ ou $k = \dfrac{2(1+\theta)}{1+\theta'}$. Vê-se imediatamente que terá de ser $2 < k < 4$.

Ora $k = \left(\dfrac{x}{10}\right)^4 = \dfrac{x^4}{10000}$.

Temos $11^4 = 14641 < 20000$, $12^4 = 20736$, $13^4 = 28561$, $14^4 = 38416$, $15^4 = 50625 > 40000$.

As únicas bases possíveis são pois $x = 12, 13, 14$.

O problema consiste em resolver em números inteiros positivos e menores que 10 as equações $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dc + c = 2(a . 10^4 + b10^3 + c . 10^2 + d10 + c)$ em que x tome os valores 12, 13, 14 e a, b, c, d, e são as incógnitas.

Para $x = 12$ a equação toma a forma $736a - 272b - 56c - 8d - e = 0$.

Parametrando, a solução geral pode escrever-se:
$$a = u + v + 7w - t,\quad b = t,\quad c = 13u + 13v + 92w - 18t,\quad d = v,\quad e = 8u.$$

A discussão das soluções desta equação forneceria tôdas as soluções do problema dado, para $x = 12$. Anàlogamente se obteriam as soluções para $x = 13$, $x = 14$.

Por exemplo, para $u = 0$, $v = 2$, $t = 1$, $w = 0$ temos a solução $(11820)_{12} = 2 . (11820)_{10}$.

M. A.

CRÍTICA DE LIVROS

Lições de Álgebra e Análise. Vol. II, fasc. 1.º. Bento Caraça — O professor Bento de Jesus Caraça, do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, acaba de publicar o volume II das suas «Lições de Álgebra e Análise», valioso instrumento de trabalho para os alunos das nossas Escolas Superiores e belo exemplo de dedicação e interêsse pelo ensino. É um exemplo tanto mais para salientar quanto é certo que, no nosso país, raros são os professores universitários que conseguem estender a sua actividade docente para além das suas obrigações imediatas, quero dizer, o serviço de aulas e exames.

Não podemos deixar de lamentar que assim tenha de ser, pois a publicação dos respectivos cursos e uma certa actividade no domínio da investigação científica, são elementos essenciais de *personalidade moral e científica de um professor.*

Relativamente ao primeiro aspecto, isto é, à personalidade moral do professor, a publicação das suas lições tem mesmo um significado de particular valor. Na verdade, o professor que se apresenta assim à crítica com os seus cursos, assume imediatamente a responsabilidade da forma por que orienta o ensino, nada portanto nos escondendo, desde as suas qualidades até aos seus defeitos o que tem um valor educativo de primeira importância.

Quanto ao segundo aspecto — a personalidade científica do professor — o vol. II de Bento Caraça contém apenas assuntos de Análise — é evidente que êle se define precisamente na medida em que o professor se *afirma* igualmente como investigador.

Ao encarar agora pròpriamente a orientação que deve presidir a um livro de curso, nomeadamente de Álgebra e Análise — estou a lembrar-me do que escreveu, já em 1893 a êste respeito, o grande matemático F. Klein.

«Le professeur est arrêté par la difficulté d'établir l'harmonie entre deux nécessités opposées et presque contradictoires. D'une part, il lui faut tenir compte du pouvoir intellectuel jusqu'ici limité et non développé de ses élèves et du fait que la plupart d'entre eux n'étudient les mathématiques qu'en vue des aplications pratiques; d'autre part, sa conscience de professeur et d'homme de science semble le forcer à ne rien abandonner de la rigueur mathématique et à le pousser, par conséquent, à introduire dès le début tous les raffinements et tous les points délicats des mathématiques modernes».

E depois de fazer alusão aos inconvenientes de colocar na mão de principiantes livros do nível, por ex., do célebre *Cours d'Analyse*, de Camille Jordan, conclue nestes termos: «c'est mon opinion que dans l'enseignement il est non seulement admissible, mais même absolument nécessaire, que l'on soit moins abstrait au début; l'on doit aussi avoir constamment recours aux applications et ne faire allusion aux raffinements que graduellement, à mesure que l'étudiant devient capable de les comprendre».

Estes princípios de ordem geral, tão brilhantemente desenvolvidos por F. Klein, aparecem-nos ainda, e muito especialmente no nosso meio, com o mesmo valor, a mesma actualidade.

Ora, dentro desta orientação que nos parece a melhor, entendemos que o livro de Bento Caraça está um tanto sobrecarregado de noções que se não coadunam bem com a sua índole de «Lições de Álgebra e Análise».

Na verdade, para justificar as noções apresentadas, nomeadamente *na teoria dos conjuntos e no capítulo dedicado às funções*, teria o autor de aprofundar muito mais cada um dêsses domínios e, a certa altura, seria levado a escrever um livro de Topologia, por exemplo, no género das conhecidas monografias polacas.

Mas se o autor tinha apenas em vista um 2.º vol. de Álgebra e Análise, então deveria libertar-se da preocupação de reünir no seu livro tantas noções de Análise Moderna.

Devo acrescentar, no entanto, que o autor se pode justificar de certo modo, dizendo, e com fundamento, que o seu intuito foi o de despertar a curiosidade do leitor pelos domínios relativos a essas mesmas noções. E com certeza assim sucederá muitas vezes.

Mas no sentido de valorizar êsse intuito, achavamos que devia ter fechado os respectivos capítulos com exercícios de índole um pouco mais delicada. Teria conseguido assim um livro mais completo e, parece-nos, em condições de satisfazer melhor aos objectivos enunciados no prefácio do Vol. I.

Aplaudimos com entusiasmo e apontamos como exemplo, o cuidado com que o autor organizou a bibliografia.

O livro de Bento Caraça, é, pois uma manifestação de trabalho, de sistematização e de cultura, que nos não cansaremos de recomendar aos alunos das nossas Universidades.

RUY LUÍS GOMES

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Portugaliae Mathematica. Faculdade de Ciências. R. da Escola Politécnica. Lisboa. Publicação subsidiada pelo Instituto para a Alta Cultura. Vol I, fasc. 4.º — 1940 — Prêço 20$00.

Jorge César Oom. Problemas de Mecânica Racional. Editados com a colaboração de Maria Alexandra de Almeida Eusébio. Lisboa, 1940, 200 pág. — Prêço 50$00. Contém: *Cálculo Vectorial, Cinemática, Estática* e *Dinâmica.*

Francisco Leite Pinto. Lições de Aritmética Racional. Livraria Franco. Lisboa, 1940, 370 págs. — Prêço 15$00.

Dêstes 2 livros faremos referência especial num número posterior.

Agros — *Revista dos Estudantes de Agronomia.* — Ano XXIII — N.os 1, 2 e 3.

RECTIFICAÇÕES

Todos os exercícios do n.º 3 da «Gazeta de Matemática» a partir da página 11, 2.ª coluna, têm a numeração errada. O exercício número 238 deve ter o número 338, a numeração deve continuar e o último exercício é o número 378, problema proposto.

AVISO

A partir do próximo número a «Gazeta de Matemática» vai entrar numa nova fase. Alargará o quadro dos seus colaboradores permanentes, ampliará a parte destinada aos exames de admissão às Escolas Superiores, e aos primeiros anos destas. O plano pormenorizado será apresentado no próximo número. As condições de assinatura serão por êsse motivo modificadas e só a partir do próximo número aceitaremos novas assinaturas. Mantêm-se no entanto tôdas as que forem recebidas na Redacção até ao fim de Dezembro de 1940.