GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO X N.° 40 SETEMBRO 1949

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

ANO X-N.º 40 GAZETA DE MATEMÁTICA SETEMBRO-1949

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Problemas do nosso ensino superior

À memória do prof. B. Caraça

por ***Luís Neves Real***

As definições do número real

O Professor Ruy Luís Gomes, ao fazer no último número da *Gazeta de Matemática*, uma referência crítica às Lições de Álgebra e Geometria Analítica recentemente publicadas pelo Professor Madureira e Sousa e ao focar sobretudo a maneira aí adoptada para definir *número real*, obriga, por espírito de justiça, a alargar a discussão, transformando-a de simples crítica a um determinado livro em debate geral sobre a forma como se expõe no nosso ensino superior a base em que assenta todo o edifício do Cálculo Infinitesimal: a estrutura do domínio da variável real.

Na verdade trata-se de um significativo aspecto da debilidade e desconexão do movimento matemático nacional. Encontrando-se em quase todos os domínios a uma distância aflitiva dos problemas que são actualmente objecto da investigação matemática de todo o mundo, o nosso ensino superior precisa de não esquecer a obrigação de integrar no núcleo de conhecimentos matemáticos que transmite, ano após ano, as conquistas definitivas da nossa ciência na progressiva resolução dos seus problemas mais antigos. Minado pelos defeitos de uma organização, que, assoberbada com uma população escolar desmedida, quase se limita a conferir diplomas, mediante exames — muitos exames! — mostra também incompreensível indiferença pelo trabalho alheio, até naqueles aspectos em que dele depende a valorização do trabalho próprio. A carência de uma direcção superior — isenta de partidarismo e competente — e preconceitos mesquinhos estão a impedir que se coloquem nos seus precisos termos os problemas da investigação e do ensino da matemática em Portugal. António Monteiro — o grande animador do movimento matemático nacional de entre os anos 1939 e 1945 — via, uma vez mais, justo e alto ao pugnar pela criação do *Instituto Português de Matemática*, que era já, ao tempo do seu afastamento do país, uma necessidade, para dirigir a investigação dos diversos centros de estudos então existentes, orientar os seus trabalhos, garantir uma continuidade à nossa investigação matemática, forçar a um estreito contacto a investigação e o ensino superior e permitir uma direcção central do movimento bibliográfico. O *Instituto Português de Matemática* é hoje condição essencial de firme arrepio do caminho trilhado nestes últimos três anos. Para isso é preciso que seja não uma simples gravura a preto e branco no *Diário do Governo*, mas sim um organismo de autêntica unidade nacional imposta por um problema nacional. E antes de tudo, num primeiro acto de eficiência e justiça, deve investir no alto lugar a que têm direito nessa tarefa de renovação os dois matemáticos portugueses que mais aptos se mostraram para organizar escolas de investigadores: Ruy Luís Gomes e António Monteiro.

São as palavras que ficaram escritas de certo modo necessárias porque só no «clima» matemático português através delas esboçado se pode compreender plenamente como foi possível a uma personalidade da categoria do Professor Vicente Gonçalves, cientista a quem a matemática portuguesa deve serviços incalculáveis, redigir tão lamentávelmente o primeiro capítulo da «última e completamente remodelada edição» do seu Curso de Algebra Superior. Sinto-me obrigado a uma análise da forma como nessa obra se definem número irracional e número real por ser essa publicação utilizada por centenas de estudantes portugueses, nomeadamente de Coimbra e Lisboa, que, nas Faculdades de Ciências e no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, se iniciam nos estudos superiores da matemática, e particularmente no estudo da análise. Mas antes de prosseguir desejo que nenhuma dúvida se possa levantar a respeito da consideração que nos merece, como matemático, o Professor Vicente Gonçalves — matemático no mais elevado sentido do termo: capaz de formular problemas da sua Ciência e de contribuir para resolvê-los. Insisto em fazê-lo no plural e através de uma passagem de um documento dirigido ao Instituto para a Alta Cultura, em Dezembro de 1942, pelo Centro de Estudos Matemáticos do Porto: «...*seria de aconselhar que no campo da Análise pura se promovesse um curso sobre a teoria das funções, desde a obra de Borel, Lebesgue, Lusin, Baire e os seus continuadores até às aquisições mais recentes. Na verdade, não é possível abordar em bases sólidas os problemas actuais da Análise sem ter vivido os grandes problemas que aqueles matemáticos resolveram e formularam no princípio deste século. Para a regência deste curso, o nome indicado pela obra que já realizou, é o do Professor Vicente Gonçalves, da Universidade de Coimbra. Pedimos portanto à direcção do Instituto para a Alta Cultura se digne estudar com esse Professor a possibilidade de realização desse curso, durante o ano de 1943 na Universidade do Porto*». A transcrição mostra claramente o espirito que animava aqueles que do Porto procuravam criar um amplo movimento nacional a favor dos estudos matemáticos colocando na sua função própria os melhores valores da nossa ciência e como julgavam a posição que nela ocupava o Prof. Vicente Gonçalves. Lamentamos hoje, por nós e pelo Prof. Vicente Gonçalves, que não tenha sido possível a realização desse curso. Quem, através dos trabalhos publicados pelo Centro de Estudos Matemáticos do Porto e pela équipe portuense da Junta de Investigação Matemática, procure seguir as dificuldades de uma aprendizagem auto-didacta verá logo quanto teriam aproveitado da experiência e dos conhecimentos de um analista como Vicente Gonçalves. Recìprocamente é de supor que o contacto com um método de trabalho tão entusiástico e eficiente como o adoptado pelo Prof. Ruy Luís Gomes teria influenciado a concepção precária do Prof. Vicente Gonçalves relativamente à formação de uma verdadeira escola de Matemática. E é muito possível que a estreita colaboração que, desde essa data se poderia ter estabelecido com o Prof. Vicente Gonçalves tivesse evitado as lições iniciais deste seu *Curso de Álgebra*. A exposição do Prof. Vicente Gonçalves é, por um lado — no seu aspecto universitário — típicamente reveladora das desastrosas consequências da absoluta ausência de orientação no aproveitamento óptimo dos valores matemáticos de que a pátria dispõe. (Com uma vida de trabalho largamente depondo a seu favor era para a regência e direcção de cursos altamente especializados que estava naturalmente indicado o Prof. Vicente Gonçalves). E, por outro — no seu aspecto puramente pessoal — demonstra cabalmente quanto é difícil a um especialista (por excepcionalmente dotado que seja) abandonar o domínio particular da matemática a que se dedica desde que o ambiente cultural em que mergulha se não encontre saturado — pelo trabalho intenso de seminários, de cursos de especialização, de debates científicos generalizados, — das ideas mestras à volta das quais se vão estruturando os capítulos da ciência em que habitualmente não trabalha. E sob este aspecto a lição é bem digna de ser meditada, pois que o terreno escolhido pelo o Prof. Vicente Gonçalves fica logo abaixo do que lhe é próprio; e tão bem lavrado por analistas de primeira plana que a semente da álgebra moderna aí frutificou de modo a dissipar todas as incertezas que subsistiam ainda nas exposições clássicas de Dedekind, Méray e Cantor. Pois, apesar dessa afinidade de terrenos, apesar de todas as cautelas formais, não são os passos do Prof. Vicente Gonçalves menos falsos, menos reveladores do seu desconhecimento dos termos modernos da definição de número real.

«*Todos formamos ideia clara do que sejam números racionais e conhecemos as leis por que tais números se regem no cálculo. Disso faremos a base do nosso estudo.*» Assim começa o § 1-*Números irracionais*—do primeiro capítulo — *Números Reais* — do *Curso de Algebra Superior*. Pensando na insuficiente preparação dos seus alunos não podemos deixar de estranhar e reprovar esta atitude. Era absolutamente indispensável, já que desejou partir dos números racionais recordar essas leis essenciais a que se refere. Confesso que não imagino a atitude do Prof. Vicente Gonçalves perante o aluno perspicaz e irreverente que desconfiando da forma subjuntiva da sua frase (... *o que SEJAM números racionais*...) interrompesse a exposição, interrogando-o sobre *o que SÃO afinal os números racionais*.

¿ Expor-lhe-ia o seu ponto de vista de 1939 expresso no Compêndio de Aritmética segundo o qual *os números racionais (o mesmo que números fracionários) são relações de números inteiros* a, b, a', b', *etc*....

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$$

hierarquizadas pelos princípios

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \text{ se } ab'=a'b\,; \quad \frac{a}{b}\lessgtr\frac{a'}{b'} \text{ se } ab'\lessgtr a'b$$

e somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas respectivamente de acordo com as normas

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{ab'+a'b}{bb'}\,; \quad \frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{ab'-a'b}{bb'}\,;$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=\frac{ab'}{a'b} \text{ (com } a'>0) \text{ ?}$$

Quere-me parecer que não, ainda que alargasse esta definição de forma a incluir os simétricos destes *números racionais*, e a corrigisse com a restrição indispensável de nunca o 0 ser um b, um b', etc.... A não ser que retomasse com vagar, cuidado e clareza a distinção sobre que tanto insiste nesse compêndio: *«um número inteiro não é uma relação, é um conceito de quantidade»*. Em tal insistência, que reveste uma forma mais autoritária que persuasiva, vejo eu uma adaptação da advertência de Bertrand Russell (in *Introduction à la Philosophie Mathématique)* para que se não confundam *relação* e *conjunto de conjuntos* e portanto se não identifique o *número real (cardinal)* m nem com o inteiro m, nem com o *número racional* m, visto que o primeiro é um *conjunto de conjuntos equivalentes*, enquanto que os dois últimos são relações. Mas a exposição de Russell mantém-se no plano lógico-matemático enquanto que a do Professor Vicente Gonçalves entronca numa definição metafísica de número natural — *o modo da quantidade nas colecções de unidades*. Como quer que seja, fixemos porém que a definição de números racionais do *Compêndio de Aritmética* do Professor Vicente Gonçalves, implica serem esses números *«relações de inteiros»* e de modo algum *«conceitos de quantidade»*. Ora sucede, como teremos ocasião de ver, que no seu Curso de Álgebra Superior os números racionais se unem, na totalidade dos números reais, aos números irracionais e estes são considerados como *conceitos de quantidade*! A resposta à pergunta do aluno insatisfeito exigia pois uma meditada apreciação crítica das noções que correm nos nossos cursos elementares e na própria obra do Professor Vicente Gonçalves. Feito em Portugal, qualquer curso de introdução ao estudo da Análise, em que se não adopte a legítima atitude de partir do conjunto dos números reais como um dado, não deve prescindir de uma rigorosa caracterização do conjunto dos números racionais: ou do ponto de vista algébrico como *«corpo ordenado mínimo»*, ou do ponto de vista da teoria dos conjuntos, como *conjunto do tipo de ordenação* η; e é necessário tanto num caso como no outro, com o objectivo de ir habituando os estudantes aos esquemas fundamentais da teoria dos limites, fazer a sua organização topológica, evidenciando as suas propriedades de espaço L^* ou de espaço métrico separável, mas não completo. Creio que este aspecto deveria reter acima de tudo a atenção de um analista que redigiu o seu curso com a preocupação de habituar os leitores aos rigores do cálculo infinitesimal e que se não cansa de nos convencer (na sua linguagem rebuscada) ser *o conceito de limite nexo fundamental nas matemáticas modernas*. Ora, sendo precisamente a tentativa para solução da crise secular da teoria dos limites a origem das definições modernas de número real, dificilmente se compreende que o Professor Vicente Gonçalves não tenha insistido sobre as dificuldades que a operação de passagem ao limite encontra no espaço L^* dos números racionais. Seria de resto uma oportunidade para familiarizar os jovens estudantes de matemática com uma página magistral de Dedekind que, numa simplicidade de estilo digna de ser tomada como exemplo, nos coloca de um golpe em frente ao problema central da criação dos números reais. Transcrevo na integra essas palavras cujo conhecimento devo ao saudoso Mestre Bento Caraça que tanto se empenhou em integrar na nossa cultura matemática este aspecto da obra científica de Ricardo Dedekind:

«Então (1858) e pela primeira vez recebi o encargo, como Professor do Instituto Politécnico de Zürich, de realizar algumas lições sobre os elementos do cálculo diferencial, e nessa ocasião, senti mais do que nunca a falta de uma base verdadeiramente científica da Aritmética. Assim, por exemplo, ao considerar uma grandeza variável tendente a um valor-limite fixo (e isto na demonstração do teorema que toda grandeza sempre mas não ilimitadamente crescente tende certamente para um limite) recorri à intuição geométrica. Concedo ainda agora que, do ponto de vista didático, o uso de considerações geométricas seja muito útil numa primeira aprendizagem do cálculo diferencial e que seja indispensável se se quer evitar uma excessiva perda de tempo. Mas ninguém, creio eu, desejará sustentar que uma tal intromissão possa gabar-se de ser científica. Era tão grande a minha insatisfação que me decidi a refletir firmemente no assunto até obter uma base puramente aritmética e completamente rigorosa dos princípios do cálculo diferencial. A miudo se diz que o cálculo diferencial se ocupa de grandezas contínuas; todavia não se dá nunca uma definição desta continuidade; antes se utilizam mais ou menos conscientemente representações geométricas, ou teoremas que por sua vez não foram nunca rigorosamente demonstrados com meios puramente aritméticos. A estes teoremas pertence, por exemplo, o acima mencionado e eu, depois de um exame mais cuidadoso convenci-me que este teorema, ou qualquer outro que lhe seja equivalente, pode ser considerado num certo sentido como base suficiente do cálculo diferencial. Tratava-se então ùnicameute de descobrir nos elementos da aritmética a verdadeira origem deste teorema, adquirindo simultâneamente uma definição efectiva da continuidade. Consegui atingir este objectivo no dia 24 de Novembro de 1858.»

Importa recordar aqui resumidamente como esse objectivo foi atingido; e só na medida em que disso precisamos para o que terá de seguir-se. Notemos em primeiro lugar que Dedekind virou costas ao problema típico que lhe surgira no desenvolvimento da teoria dos limites, para seguir o que a intuição geométrica lhe dizia da *continuidade* da recta e chegar assim ao célebre axioma: «*Se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo ponto duma classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe então um e só um ponto da recta que produz essa repartição*». Definindo depois o que se entende por *corte* no conjunto R dos números racionais — uma *repartição* de R em dois conjuntos A e A' de tal modo que todo número de A seja menor que todo número de A' — e observando que todo número racional *produz* dois cortes, que não considera como *essencialmente distintos*, prova que há no conjunto dos números racionais infinitos cortes (cortes irracionais) que não são produzidos por nenhum número — facto esse que caracteriza (segundo Dedekind) a descontinuidade de R. E propõe então resolver a dificuldade, pela forma seguinte: «sempre que é dado um corte (A, A') que não seja produzido por nenhum número racional *criamos* nós *um novo número, um número irracional*, que consideramos como *completamente definido* por este corte e dizemos que o número *corresponde* a este corte ou que *ele o produz*». É necessário insistir sobre este *momento* capital do pensamento de Dedekind. Dominado pela imagem da linha recta, *figura* o conjunto dos números racionais ordenado pela relação «$<$» paralelamente ao conjunto dos pontos da linha recta, ordenado pela relação «estar à esquerda de». Mas da comparação de ambos resulta que, enquanto neste todos os cortes *cortam* um ponto, naquele, pelo contrário, podem definir-se cortes (os cortes irracionais), que não cortam nenhum número racional. Então *coloca por entre os números racionais* novos seres a que chama números irracionais, de modo a preencher todas as lacunas reveladas pelo «test» dos cortes. «Por livre criação do espírito humano» surge o *número real* — elemento de uma totalidade *abstracta*, constituída por todos os números racionais e por todos os números irracionais — abstração esta que tem por representação concreta um conjunto *matemàticamente* trabalhável: o conjunto $\bar{R}$ cujos elementos são os números racionais — instrumentos já sem mistérios para o matemático — e todos os *cortes irracionais* no conjunto conhecido dos números racionais. E a primeira preocupação de Dedekind é verificar se $\bar{R}$ resulta já um conjunto contínuo. Para isso sujeita o *corte irracional* a definições que permitem a ordenação e a algebrização de $\bar{R}$, pela comparação e combinação dos cortes entre si e com os números racionais. E é assim simplicíssima a demonstração de que o objectivo está plenamente atingido: «Se o conjunto $\bar{R}$ de todos os números reais é decomposto em duas classes A_1 e A_2 de tal modo que cada número α_1 de A_1 é menor que todo número α_2 de A_2, existe então um e um só número α que produz este corte». Por outras palavras: o conjunto dos números reais, exactamente como o conjunto dos pontos da recta é um contínuo (à Dedekind).

É esta, a traços gerais, a concepção de Dedekind. Falta-lhe o enunciado firme do que é um número real; e desagrada-nos a junção num mesmo conjunto dos números racionais não com os próprios números irracionais (o que lhe está vedado por falta de definição matemática) mas com os cortes nos números racionais.

Mas não esqueçamos que nos legou uma condição a que tem de satisfazer todo conjunto ordenado que se tome como domínio da variável real: a *continuidade*.

Evitar à exposição de Dedekind o pouquíssimo que ela tem de menos claro, sem sacrificar (e, pelo contrário, recordando) a sua contribuição positiva para a caracterização do número real — eis, quanto a mim, a tarefa que se poderia ter proposto o Professor Vicente Gonçalves, uma vez que, mais ou menos directamente, preferiu seguir na esteira de Dedekind e dos seus *cortes* e não desejou, como analista, retomar o problema de limite com que Dedekind começara por tropeçar. Essa seria a forma (a única) de ir mais além do trabalho realizado em língua portuguesa para divulgação da teoria dos cortes — trabalho minucioso a que se devotou com tanto brilho o Professor Bento Caraça, nos *Conceitos fundamentais da Matemática*, e nas *Lições de Algebra e Análise*. Mas Bento Caraça na escrupulosa modéstia com que seguiu o pensamento de Dedekind trouxe para a sua obra as mesmas imprecisões da exposição original. Assim encontramos no primeiro daqueles livros: «...*Há cortes no conjunto R que não têm um elemento de separação? São estes mesmos que nos vão criar os novos elementos de separação. Basta para isso dar a seguinte definição: — chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com este número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional*».

Habilitados a ajuizar do que seria legítimo exigir em 1944-45 de quem entre nós se dispusesse a abordar a definição do número real, passaremos, no próximo número da *Gazeta de Matemática*, à análise da exposição adoptada pelo Prof. Vicente Gonçalves no primeiro capítulo dos seus *Elementos Gerais de Análise Real*, 1.ª Parte do *Curso de Álgebra Superior* publicação iniciada em Lisboa no final do ano de 1944.

(*Continua*)

Inégalités — II

par ***Jean Aczél***

Solutions des problèmes et des exercices de la partie I.

Exercice 1. La partie recouverte du plan est un carré Q, dont les diagonales sont égales à la moitié du périmètre k commun à tous les rectangles et ces diagonales sont parallèles aux côtés des rectangles. En effet si l'on choisit pour origine le centre commun des rectangles et pour axes de coordonnées les directions communes des côtés, alors Q sera déterminé par les inégalités $\pm x \pm y \leqslant k/4$.

Exercice 2. Le carré. Car en posant, comme dans l'introduction, $ab=A, 2a+2b=k$, on a, d'après (1), $\sqrt{A}\leqslant k/4$ où, cette fois, A est fixe. k atteint son minimum pour $a=b$.

Exercice 3. La partie recouverte du plan est la figure P située entre deux hyperboles équilatères, dont les demi-axes sont égaux à $\sqrt{2A}$, où A désigne l'aire commune à tous les rectangles, et dont les asymptotes sont parallèles aux côtés des rectangles. En effet, si l'on choisit pour origine le centre commun des rectangles et pour axes de coordonnées les directions communes des côtés, alors P sera déterminé par les inégalités $\pm xy \leqslant A/4$.

Problème 1. Pour démontrer l'inégalité $K>L$ (resp. $K<L$) entre deux nombres K et L, il suffit de démontrer que $K-L>0$ (resp. $K-L<0$).

Si $A>B$, c'est-à-dire $A-B>0$, alors on a $(A+D)-(B+D)=A-B>0$. Si $A>B$, alors $CA-CB=C(A-B)$ est >0 pour $C>0$ et <0 pour $C<0$. Si $A>B, A>0, B>0$, alors

$$A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+ + \cdots + AB^{n-2}+B^{n-1})>0$$

et

$$1/A^n-1/B^n=(B^n-A^n)/A^nB^n<0.$$

Si $A>B, C>D$, alors $(A+C)-(B+D)=(A-B)+ +(C-D)>0$.

Si $A>B, C>D, B>0, D>0$, alors

$$AC-BD=(A-B)(C-D)+B(C-D)+ +D(A-B)>0.$$

Problème 2. Posons $a=1/A, b=1/B$. On a d'après (1) $(A+B)/2>\sqrt{AB}$; donc $2/(A+B)<1/\sqrt{AB}=\sqrt{(1/A)(1/B)}$. En inscrivant les valeurs $A=1/a$, $B=1/b$ dans cette dernière inégalité, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 4. Désignons par a et b les deux segments en lesquels la hauteur h divise l'hypothénuse c. On a $c=a+b$ et $h=\sqrt{ab}$, donc, par l'inégalité (1), $c\geqslant 2h$, où h est fixé. c atteint son minimum lorsque $a=b$, ce qui est le cas du triangle isocèle.

Exercice 5. En conservant les notations de l'exercice 4, on a de même $c\geqslant 2h$ où, cette fois, c est fixé. h atteindra son maximum lorsque $a=b$, ce qui est le cas du triangle isocèle.

Problème 3. La transformation de $f(x)$ en $-f(x)$ est une symétrie par rapport à l'axe des x. Si donc la corde inscrite à la fonction $f(x)$ laisse l'arc qu'elle sous-tend *au dessous* d'elle, alors la corde correspondante par symétrie, inscrite à la fonction $-f(x)$, laisse l'arc qu'elle sous-tend *au dessus* d'elle.

Problème 4. $y=x^2$ est toujours convexe; $y=x^3$ est convexe pour $x>0$, concave pour $x<0$; $y=\sqrt[3]{x^2}$ est toujours concave; $y=\sqrt{x^3}$ est convexe pour $x>0$; $y=1/x$ est convexe pour $x>0$, concave pour $x<0$; $y=1/x^3$ est convexe pour $x>0$, concave pour $x<0$; $y=1/\sqrt{x^3}$ est convexe pour $x>0$; $y=+\sqrt{x}$ est concave pour $x>0$; $y=-\sqrt{x}$ est convexe pour $x>0$; $y=2^x$ est convexe pour $x>0$; $y=10^x$ est convexe pour $x>0$; $y=\log x$ est concave pour $x>0$; $y=\sin x$ est concave pour $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, convexe pour $(2k-1)\pi<x<2k\pi$; $y=tg\,x$ est convexe pour $2k\pi/2<x<(2k+1)\pi/2$ et concave pour $(2k-1)\pi/2<x<2k\pi/2$.

Problème 5. Les fonctions linéaires de la forme $y=ax+b$ sont les seules qui sont à la fois convexes et concaves (au sens large).

2. L'inégalité de Jensen. Dans le nº précédent, nous avons donné une définition *géométrique* de la convexité d'une fonction, en nous servant de son graphique. Dans ce nº—ci nous en donnerons une autre définition, bien entendu équivalente à la précédente, mais qui, cette fois, aura un caractère *algébrique*.

Problème 6. Une fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si pour tout couple d'abscisses x_1, x_2 et pour tout couple q_1, q_2 de nombres vérifiant $q_1>0$, $q_2>0, q_1+q_2=1$, l'inégalité

(2) $\qquad f(q_1x_1+q_2x_2)<q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$

est vérifiée.

La relation (2) est la fameuse *inégalité de Jensen pondérée* qui caractérise donc les fonctions convexes.

Problème 7. Par quelle relation faut-il remplacer l'inégalité (2), pour définir les fonctions convexes au sens large, resp. concaves, resp. concaves au sens large ?

Problème 8. L'énoncé du problème 6 est équivalent au suivant: Une fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si pour tout couple d'abscisses x_1, x_2 et pour tout couple p_1, p_2 de nombres positifs, l'inégalité

$$f\left(\frac{p_1 x_1+p_2 x_2}{p_1+p_2}\right)<\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)}{p_1+p_2}$$

est vérifiée. (Les quantités p_1 et p_2 seront appelés les *poids*).

L'inégalité de Jensen nous donne la possibilité de déterminer d'une façon rigoureuse le caractère convexe ou concave d'une fonction, au lieu de la méthode graphique grossière dont nous nous sommes servis au cours du problème 4.

Problème 9. Démontrer en utilisant l'inégalité (2) que la fonction linéaire $f(x)=ax+b$ (a, b quelconques) est à la fois convexe et concave au sens large (cf. Problème 5).

Problème 10. Déterminer en utilisant l'inégalité (2), pour quelles valeurs de x les fonctions suivantes sont convexes resp. concaves: $y=1/x, y=x^2, y=+\sqrt{x}$.

Problème 11. Soient p_1 et p_2 deux nombres positifs. On appelle *moyenne arithmétique pondérée* de deux nombres positifs x_1 et x_2, l'expression

$$(p_1 x_1+p_2 x_2)/(p_1+p_2),$$

moyenne harmonique pondérée de deux nombres positifs x_1 et x_2 l'expression

$$(p_1+p_2)\Big/\left(\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}\right),$$

et *moyenne quadratique pondérée* de deux nombres positifs x_1 et x_2 l'expression

$$\sqrt{\frac{p_1 x_1^2+p^2 x_2^2}{p_1+p_2}}$$

(les quantités p_1 et p_2 seront appelées des *poids*). Démontrer les inégalités suivantes:

$$(p_1+p_2)\Big/\left(\frac{p_1}{x_1}+\frac{p_2}{x_2}\right)\leqslant\frac{p_1 x_1+p_2 x_2}{p_1+p_2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{p_1 x_1^2+p_2 x_2^2}{p_1+p_2}}$$

l'inégalité n'ayant lieu que si $x_1=x_2$. (Pour $p_1=p_2$ ces moyennes se réduisent aux moyennes *symétriques* et ainsi la première des deux inégalités généralise celle démontrée au problème 2.)

Exercice 6. Considérons tous les rectangles ayant une diagonale d commune.

a) Lequel parmi ces rectangles a le plus grand périmètre ?

b) Lequel a la plus grande aire ?

Exercice 7. Considérons tous les rectangles ayant le même périmètre k (resp. la même aire A). Lequel parmi ces rectangles a la plus petite diagonale ?

Si l'on pose dans l'inégalité (2) les valeurs $q_1=q_2=1/2$, on obtient le résultat que toute fonction convexe vérifie l'inégalité

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{3}$$

Réciproquement si l'inégalité (3) est satisfaite pour une fonction *continue*, alors la validité de l'inégalité (2) en résulte. En d'autres termes, si une fonction *continue* vérifie (3), quels que soient x_1 et x_2, alors elle est convexe.

Démontrons cette assertion ! L'inégalité (3) signifie géométriquement que le milieu de toute corde de la

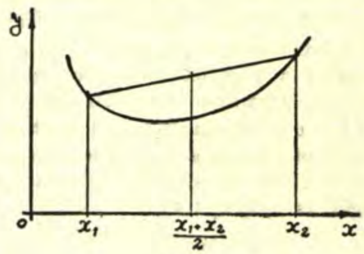


Fig. 6

courbe $y=f(x)$ est au dessus du point correspondant de l'aire qu'elle sous-tend (fig. 6). Il s'ensuit que toute corde est située entièrement au dessus de l'arc

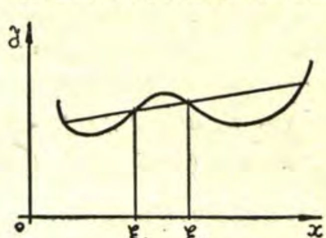


Fig. 7*a*

qu'elle sous-tend, ce qui est précisément la définition d'une fonction convexe donnée au nº 1. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un point de l'intervalle dans lequel la courbe serait située sur ou au dessus de la corde. Désignons l'équation de la corde par $y=l(x)$. D'après la propriété de Darboux (cf. nº 1) appliquée à la fonction *continue* $f(x)-l(x)$, il existeraient deux points ξ_1 et ξ_2 tels que $f(\xi_1)=$ $=l(\xi_1)$, $f(\xi_2)=l(\xi_2)$ et $f(x)>l(x)$ pour $\xi_1<x<\xi_2$ (fig. 7 *a*), ou bien un point ξ tel que $f(\xi)=l(\xi)$ et $f(x)<l(x)$ pour $x\neq\xi$, mais suffisamment voisin de ξ

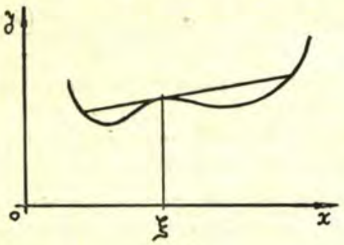


Fig. 7 *b*

(fig. 7 *b*). En aucun cas la relation (3) ne pourra être satisfaite pour x_1 et x_2 convenablement choisis.

Si l'on remplace dans (3) le symbole $<$ par $\leqslant$, resp. $>$, resp. $\geqslant$, alors on obtient une caractérisation des fonctions continues convexes au sens large, resp. concaves, resp. concaves au sens large. L'inégalité (3) est la forme *symétrique* de l'inégalité de Jensen.

Problème 12. Déterminer si les fonctions $y=10^x$, $y=\log_{10} x$ ou plus généralement les fonctions $y=a^x$, $y=\log_a x$ $(a>0)$ sont convexes ou concaves. [On sait que ces fonctions sont continues].

Problème 13. Soient $x_1>0$, $x_2>0$, $q_1>0$, $q_2>0$ et $q_1+q_2=1$. Démontrer les inégalités

$$(4)\qquad 1\Big/\left(\frac{q_1}{x_1}+\frac{q_2}{x^2}\right)\leqslant x_1^{q_1}x_2^{q_2}\leqslant q_1x_1+q_2x_2\,,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $x_1=x_2$. L'expression $x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ est, par définition, la *moyenne géométrique pondérée* des deux nombres x_1 et x_2. La deuxième inégalité dans (4) généralise l'inégalité (1), à laquelle elle se réduit si l'on pose $q_1=q_2=1/2$.

Problème 14. Soit $h>-1$. On a $(1+h)^x>1+hx$ pour $x>1$ et pour $x<0$, et $(1+h)^x<1+hx$ pour $0<x<1$.

Exercice 8. Soient $a>0$, $b>0$, $r>0$, $s>0$, $1/r+1/s=1$; démontrer l'inégalité

$$ab\leqslant a^r/r+b^s/s\,.$$

Exercice 9. Soient $a>0, b>0$; démontrer l'inégalité $a^2b\leqslant 4\,((a+b)/3)^3$.

Problème 15. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les fonctions $y=\sin x$ et $y=\cos x$ sont convexes resp. concaves. [Utiliser les formules bien connues relatives à $\sin\alpha+\sin\beta$ et $\cos\alpha+\cos\beta$].

Problème 16. *a*) Soit n un entier naturel. Démontrer l'inégalité

$$(5)\qquad \begin{aligned}&(x_1^n+x_2^n)^{n+1}/(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})^n<\\&<(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})^n/(x_1^n+x_2^n)^{n-1}\,,\end{aligned}$$

oú $x_1>0, x_2>0, x_1\neq x_2$.

b) Soit n un entier positif ou négatif. L'expression

$$\sqrt[n]{(x_1^n+x_2^n)/2}$$

est dite *moyenne de n-ièmes puissances* des deux nombres x_1 et x_2. Démontrons que pour $x_1>0, x_2>0$ et $x_1\neq x_2$ les inégalités

$$\sqrt[n]{(x_1^n+x_2^n)/2}<\sqrt[n+1]{(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})/2}$$

ont lieu.

c) Soit $q_1>0, q_2>0$ et $q_1+q_2=1$. Nous appelons l'expression

$$\sqrt[n]{q_1x_1^n+q_2x_2^n}$$

la *moyenne pondérée de n-ièmes puissances* des deux nombres x_1 et x_2. Démontrons que pour $x_1>0, x_2>0$ et $x_1\neq x_2$, les inégalités

$$\sqrt[n]{q_1x_1^n+q_2x_2^n}<\sqrt[n+1]{q_1x_1^{n+1}+q_2x_2^{n+1}}$$

ont lieu.

Problème 17. Au cours de ce problème r et r' désignent toujours des nombres *rationnels.* Soient $q_1>0$, $q_2>0, q_1+q_2=1$. Démontrer que la fonction $y=x^r$ $(x>0)$ est convexe si $r>1$ ou si $r<0$ et qu'elle est concave si $0<r<1$. Démontrer que si $r<r'$, alors

$$(6)\qquad (q_1x_1^r+q_2x_2^r)^{1/r}<(q_1x_1^{r'}+q_2x_2^{r'})^{1/r'}$$

et que, si $r<0<r'$, alors

$$(7)\qquad (q_1x_1^r+q_2x_2^r)^{1/r}<x_1^{q_1}x_2^{q_2}<(q_1x_1^{r'}+q_2x_2^{r'})^{1/r'},$$

où $x_1>0, x_2>0, x_1\neq x_2$. (L'inégalité (7) généralise l'inégalité (4), à laquelle elle se réduit si l'on pose $r=-1, r'=1$. Remarquons que les énoncés de ce problème-ci restent exacts si l'on remplace le nombre rationnel r par un nombre réel quelconque. (Nous verrons ceci plus tard).

Si on considère les couples de fonctions $f(x)=a^x$ et $f(x)=\log_a x$; $f(x)=x^n$ et $f(x)=\sqrt[n]{x}$; $f(x)=1/x^n$ et $f(x)=1/\sqrt[n]{x}$, on s'aperçoit qu'il y a une certaine relation entre les deux membres d'un tel couple. En quoi consiste cette relation ? On voit que si l'on pose $y=a^x$, on aura $x=\log_a y$, de même si $y=x^n$, alors $x=\sqrt[n]{y}$. On dit que deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(y)$ sont les *inverses* l'une de l'autre, si les relations $y=f(x)$ et $x=\varphi(y)$ sont équivalentes. Une fonction possède une inverse bien déterminée uniquement si elle est monotone au sens strict, c'est-à-dire si elle croît partout ou bien si elle décroît partout.

Problème 18. Soient $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$ deux fonctions, dont chacune est l'inverse de l'autre. Que signifie géométriquement cette relation ? Démontrer que si $y=f(x)$ est *croissante* et convexe, alors

$y=\varphi(x)$ est croissante et concave; si au contraire $y=f(x)$ est *décroissante* et convexe, alors $y=\varphi(x)$ est aussi décroissante et convexe.

Exercice 10. Démontrer que la fonction $y=a^{x^2}$ est convexe $(a>0)$.

Soient $y=\varphi(t)$ et $t=\psi(x)$ deux fonctions telles que $\varphi(t)$ soit définie pour toute valeur que $\psi(x)$ peut prendre. La fonction $y=\chi(x)=\varphi(\psi(x))$ s'appelle la fonction *composée* des deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(x)$. Par exemple la fonction $y=a^{x^2}$ est composée des deux fonctions $y=a^t$ et $t=x^2$.

Problème 19. Démontrer que si $y=\varphi(t)$ est une fonction *croissante* et convexe et que si $t=\psi(x)$ est une fonction convexe, alors la fonction composée $y=\chi(x)=\varphi(\psi(x))$ est une fonction convexe.

Les mots *poids*, *pondéré* nous rappellent des notions physiques. Nous allons voir maintenant la raison de cette terminologie. Considérons d'abord un système de deux poids (points de masses) p_1 et p_2 dans le plan. Plaçons le poids p_1 au point (x_1,y_1) et le poids p_2 au point (x_2,y_2) et déterminons le centre de gravité de ce système. Les coordonnées x_0 et y_0 du centre de gravité seront calculées en utilisant le fait que les composantes du moment du système par rapport à ce point sont égales à zéro, c'est-à-dire

$$p_1(x_0-x_1)=p_2(x_2-x_0)\,,\ p_1(y_0-y_1)=p_2(y_2-y_0)\,,$$

d'où il vient que

$$x_0=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2},\quad y_0=\frac{p_1y_1+p_2y_2}{p_1+p_2}.$$

Maintenant on a l'interpretation suivante de l'inégalité de Jensen: Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si en plaçant deux poids sur sa courbe représentative, le centre de gravité de ces deux poids aura une ordonnée supérieure à celle du point correspondant (c. à d. ayant la même abscisse) de la courbe. On a évidemment des énoncés analogues pour les fonctions convexes au sens large, concaves, et concaves au sens large.

Problème 20. Plaçons les poids $p_1,p_2,\cdots,p_k$ aux points $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)$ du plan. Déterminons le centre de gravité en calculant d'abord le centre de gravité des deux premiers points; puis concentrons la masse p_1+p_2 au point ainsi obtenu et calculons le centre de gravité de ce nouveau point et du troisième point et continuons ainsi de suite. (Nous verrons au résultat qu'il est indépendant de l'ordre dans lequel on a pris les poids $p_1,p_2,\cdots,p_k$).

Problème 21. Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si l'inégalité

$$(8)\qquad f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_kx_k)<\\<q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_kf(x_k)$$

est vérifiée quelles que soient les valeurs $x_1,x_2,\cdots,x_k$ et les quantités positives $q_1,q_2,\cdots,q_k$ vérifiant $q_1+q_2+\cdots+q_k=1$. De même une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si l'inégalité

$$(9)\qquad f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\right)<\\<\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_kf(x_k)}{p_1+p_2+\cdots+p_k}$$

est vérifiée quelles que soient les valeurs $x_1,x_2\cdots,x_k$ et les quantités positives $p_1,p_2,\cdots p_k$.

Les inégalités (8) et (9) sont nommées les *inégalités de Jensen pondérées à k termes.*

Problème 22. Si l'on pose $q_1=q_2=\cdots=q_k$ resp. $p_1=p_2=\cdots=p_k$ dans les inégalités (8) resp. (9), on obtient

$$(10)\qquad f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)<\\<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}.$$

Démontrons que cette inégalité est nécessaire et suffisante pour que la fonction $y=f(x)$ *continue* soit convexe.

L'inégalité (10) sera nommée *l'inégalité symétrique de Jensen à k termes.*

Nous avons vu que si la fonction $y=f(x)$ est *continue* alors les inégalités (8), (9) et (10) résultent de l'inégalité (3). Nous examinerons maintenant dans quelle mesure ceci subsiste si l'on supprime la condition que $y=f(x)$ est continue.

Problème 23. Démontrons que si une fonction $y=f(x)$ vérifie l'inégalité (3), alors elle vérifie aussi l'inégalité (10). [Démontrer d'abord (10) pour les k ayant la forme $k=2^j\ (j=1,2,3,\cdots)$ par récurrence sur j. Si maintenant $2^{j-1}<k<2^j$, on posera

$$x_{k+1}=\cdots=x_{2^j}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},$$

et on aura

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)=\\=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+\cdots+x_{2^j}}{2^j}\right)<\\<\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})+\cdots+f(x_{2^j})}{2^j},$$

c'est-à-dire

$$\left(1-\frac{2^j-k}{2^j}\right)f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)<\\<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{2^j},$$

ce qui équivaut à la formule que l'on veut démontrer.

Cette méthode de démonstration est due au grand mathématicien français Augustin Louis Cauchy].

Problème 24. Démontrons que si une fonction $y=f(x)$ vérifie l'inégalité (3), alors elle vérifie aussi les inégalités (8) et (9) avec des poids $q_1, q_2, \cdots q_k$ resp. $p_1, p_2, \cdots p_k$ *rationnels.*

Problème 25. Soient $q_1>0, q_2>0, \cdots, q_k>0$, $q_1+q_2+\cdots+q_k=1$. L'expression

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_k x_k$$

s'appelle la *moyenne arithmétique pondérée* des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_k$. D'une façon plus générale, pour ρ réel, l'expression

$$(11) \quad M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (q_1 x_1^\rho + q_2 x_2^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho}$$

s'appelle la *moyenne pondérée de n-ièmes puissances* des nombres $x_1>0, x_2>0, \cdots, x_k>0$. Pour $\rho=1$ ceci se réduit à la moyenne arithmétique, pour $\rho=-1$ à la moyenne harmonique. $M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ est par définition l'expression

$$M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_k^{q_k}$$

la *moyenne géométrique pondérée* des nombres $x_1>0$, $x_2>0, \cdots, x_k>0$. Démontrer que, si r et r' sont rationnels et si $r<r'$, alors $M_r<M_{r'}$ [généralisation de (6) et de (7)].

Problème 26. Désignons par $\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ le plus grand des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_k$ et par $\min(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ le plus petit de ces nombres. Démontrer que si $x_j = \mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ et si

$$M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k), \ (x_1>0, x_2>0, \cdots, x_k>0)$$

est défini par (11), alors pour $\rho<0$

$$\sqrt[\rho]{q_j}\ \mathrm{Max}(x_1, x_2 \cdots, x_k) \leqslant M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leqslant \leqslant \mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k).$$

En déduire que $M_\rho(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ tend vers

$$\mathrm{Max}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

lorsque ρ tend vers $+\infty$. Etablir les théorèmes analogues pour $\min(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

Exercice 11. *a*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même surface (resp. même somme de longueur d'arrêtes, resp. même diagonale), lequel a le plus grand volume? *b*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même volume, lequel a la plus petite surface (resp. la plus petite somme de longueur d'arrètes, resp. la plus petite diagonale)? *c*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même somme de longueur d'arrètes, lequel a la plus petite diagonale? *d*) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles ayant même diagonale, lequel a la plus grande somme de longueur d'arrètes?

Exercice 12. Parmi tous les triangles ayant le même périmètre, lequel a la plus grande aire?

Exercice 13. Soient $a_1>0, a_2>0, \cdots, a_k>0$. Démontrer les inégalités

$$[a_2 a_3 \cdots a_k (a_2+a_3+\cdots+a_k) + a_1 a_3 \cdots a_k (a_1+a_3+ +\cdots+a_k) + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{k-1}(a_1+a_2+ +\cdots+a_{k-1})] / k a_1 a_2 \cdots a_k \geqslant k-1$$

et

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)(1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_k) \geqslant k^2.$$

Exercice 14. Démontrer que si $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2 \leqslant 1$, alors $a_1+a_2+\cdots+a_k \leqslant \sqrt{k}$.

Exercice. 15. Comment faut-il choisir les nombres positifs a, b, c pour que, si $S=a+b+c$ est constant, ab^2c^3 soit aussi grand que possible? Comment faut-il choisir les nombres positifs a, b, c pour que, si ab^2c^3 est constant, $S=a+b+c$ soit aussi petit que possible?

Exercice 16. Démontrer que les fonctions $\log_a(1+a^x)$ et $\sqrt{1+x^2}$ sont convexes. Démontrer les inégalités

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} \geqslant 1+\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

et

$$\sqrt{k^2+(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2} \leqslant \sqrt{1+a_1^2} + + \sqrt{1+a_2^2} + \cdots + \sqrt{1+a_k^2}.$$

Exercice 17. Parmi tous les polygones à k sommets, inscrits au cercle, lequel a la plus grande aire (resp. le plus grand périmètre)? *(continua)*

Equação geral das escalas termométricas. Fórmulas e definições

*por **Luís Freire** (Recife)*

Seja x uma determinada *característica* de um corpo termoscópico.

Sendo t a temperatura, temos: $x=f(t)$. Nos limites de temperatura que realizamos, a função x pode ser desenvolvida em série acentuadamente convergente.

Assim, aplicando a fórmula de MacLaurin, vem:

$$x_t = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \cdots = = f(0)\left[1 + \frac{f'(0)}{f(0)} t + \frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f(0)} t^2 + \cdots\right] = = x_0(1 + at + bt^2 + \cdots),$$

fazendo $\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0 = a$, etc. A expressão geral desses coeficientes é $\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right)_0$.

Para valores pequenos de t, podemos ficar no segundo termo do desenvolvimento de x, e então teremos:

$$(1) \qquad x_t = x_0(1 + at).$$

É nesta fórmula que se baseia a construção dos termómetros.

Vejamos a sua teoria geral.

A fórmula (1) permite escrever:

$$(2) \qquad t = A + Bx_t,$$

sendo A e B independentes de x_t.

Designemos por t' a temperatura do gelo fundente, por t'' a do vapor d'água em ebulição, ambos os casos se processando à pressão atmosférica normal; por x' e x'' os valores correspondentes da característica adoptada do corpo termoscópico.

Teremos então: $t' = A + Bx'$ e $t'' = A + Bx''$.

Daí:

$$t'' - t' = B(x'' - x'), \quad B = \frac{t'' - t'}{x'' - x'},$$

$$A = t' - \frac{t'' - t'}{x'' - x'}x' = \frac{t'x'' - t''x'}{x'' - x'}.$$

A expressão geral de t (2), tornar-se-á:

$$t = \frac{t'x'' - t''x'}{x'' - x'} + \frac{t'' - t'}{x'' - x'}x_t \quad \text{ou}$$

$$(3) \qquad t = \frac{t'' - t'}{x'' - x'}\left[x_t - \left(\frac{t''}{t'' - t'}x' - \frac{t'}{t'' - t'}x''\right)\right],$$

que é a *equação geral das escalas termométricas*.

A cada definição numérica, completa, do intervalo termométrico $t'' - t'$, corresponde uma escala.

Para $t'' - t' = 100$, sendo $t' = 0$, vem:

$$t = \frac{100}{x_{100} - x_0}(x_t - x_0),$$

que é a *equação da escala centígrada*.

Para $t'' - t' = 80$, sendo $t' = 0$, vem:

$$t = \frac{80}{x_{80} - x_0}(x_t - x_0)$$

— *equação da escala Réaumur*.

Para $t'' - t' = 180$, sendo $t' = 32$, vem:

$$t = \frac{180}{x_{212} - x_{32}}\left[x_t - \left(\frac{212}{180}x_{32} - \frac{32}{180}x_{212}\right)\right]$$

— *equação da escala Fahrenheit*.

Obtenhamos, partindo de (3), a definição *geral* do grau termométrico.

A expressão (3) pode ser posta sob a forma:

$$(4) \qquad t = \frac{1}{x'' - x'}[t'(x'' - x_t) + t''(x_t - x')].$$

Chamando de *grau* à variação de temperatura correspondente à passagem do valor t ao valor $t+1$, vem:

$$t + 1 - t = \frac{1}{x'' - x'}[t'(x'' - x_{t+1}) + t''(x_{t+1} - x') -$$
$$- t'(x'' - x_t) - t''(x_t - x')] \quad \text{ou}$$

$$1 = \frac{1}{x'' - x'}[t'(x_t - x_{t+1}) + t''(x_{t+1} + x_t)].$$

Daí:

$$x'' - x' = (x_{t+1} - x_t)(t'' - t') \quad \text{ou}$$

$$x_{t+1} - x_t = \frac{1}{t'' - t'}(x'' - x').$$

O grau termométrico definido por meio da equação geral, o grau termométrico *geral*, é, pois: *a variação de temperatura correspondente à variação da característica adoptada do corpo termoscópico empregado igual a $\dfrac{1}{t'' - t'}$ da variação total que essa característica experimenta entre as temperaturas convencionais do gelo fundente e do vapor d'água em ebulição, sob a pressão atmosférica normal.*

Nos termómetros ordinários, a característica adoptada é o volume.

Tem-se, assim:

$v_{t+1} - v_t = \dfrac{1}{100}(v_{100} - v_0)$, que define o *grau centígrado*

$v_{t+1} - v_t = \dfrac{1}{80}(v_{80} - v_0)$, que define o *grau Réaumur*

$v_{t+1} - v_t = \dfrac{1}{180}(v_{212} - v_{32})$, que define o *grau Fahrenheit.*

Nos termómetros a gaz, que têm para padrão o *termómetro normal a hidrogénio* instalado em Sèvres no «Bureau International des Poids et Mesures», a característica adoptada é a pressão.

O «Comité International» adoptou para o grau desses termómetros o definido pelo termómetro normal de hidrogénio segundo a fórmula

$$p_{t+1} - p_t = \frac{1}{100}(p_{100} - p_0),$$

em que p_0 foi tomado igual a 100 cm. de mercúrio e p_{100} foi medido e obtido igual a 136,62 cm.

Coeficiente termométrico *geral*.

A expressão (4) pode ser posta sob a forma:

$$(5) \qquad t = \frac{(x_t - x')\left[t'' + \dfrac{t'(x'' - x_t)}{x_t - x'}\right]}{x'' - x'} =$$

$$= \frac{x_t - x'}{(x'' - x') \cdot \dfrac{x_t - x'}{t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)}} =$$

$$= \frac{x_t - x'}{\dfrac{(x'' - x')(x_t - x')}{x'[t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)]} \cdot x'} .$$

Desiguando por β a fracção do denominador que multiplica x', vem:

$$\beta = \frac{(x'' - x')(x_t - x')}{x'[t''(x_t - x') + t'(x'' - x_t)]} =$$

$$= \frac{x'' - x'}{(t'' - t')\, x' \cdot \dfrac{x_t - \left[\dfrac{t''}{t'' - t'}\, x' - \dfrac{t'}{t'' - t'}\, x''\right]}{x_t - x'}} .$$

É β a expressão *geral* do coeficiente termométrico. No caso centígrado, temos:

$$\beta = \frac{x_{100} - x_0}{100\, x_0} .$$

As fórmulas *gerais* de dilatação linear e cúbica, resultam da expressão (5).

Com efeito:

$$t = \frac{x_t - x'}{\beta\, x'} ; \text{ daí } x_t = x' + t\beta x' = x'(1 + \beta t) .$$

Quando a característica adoptada é o comprimento, temos: $l = l'(1 + \beta t)$, que é a fórmula *geral* de dilatação linear, sendo β o coeficiente correspondente.

No caso centígrado $\beta = \dfrac{l_{100} - l_0}{100\, l_0}$, $l_t = l_0(1 + \beta t)$.

Quando a característica adoptada é o volume, vem: $v_t = v'(1 + \beta t)$ — fórmula *geral* de dilatação cúbica, sendo β o coeficiente correspondente.

No caso centígrado $\beta = \dfrac{v_{100} - v_0}{100\, v_0}$, $v_t = v_0(1 + \beta t)$.

A expressão *geral* do coeficiente termométrico que designamos por β, só o é em relação à forma binomial de x_t donde partimos e que é $x_t = x_0(1 + at)$, forma restrita, como já vimos, de x_t.

Tomando a verdadeira expressão de x_t que é $x_t = x_0(1 + at + bt^2 + \cdots)$, a expressão *absolutamente geral* do coeficiente termométrico é $\dfrac{1}{n!}\,\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{d^n x}{dt^n}\right)_0$.

Poder-se-à, então, denominar a β de coeficiente termométrico *geral escalar*, atendendo a que as escalas termométricas só encontram significação em

$$x_t = x_0(1 + at) .$$

A definição analítica de a que é $\dfrac{1}{x_0}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0$, encontra a sua correspondente escalar em β.

Observação. Sob forma diversa e menos completo já foi publicado este trabalho, no Brasil. A forma, porém, que ele agora reveste, acrescido das primeira e última partes, constituem a sua apresentação definitiva.

No artigo desta gazeta, Ano IX — N.os 37-38 intitulado «Os potenciais escalar e vectorial etc.», no ante-penúltimo período da pág. 12, onde se lê «o extremo do paradoxo de Peano», leia-se: *a extreme* do paradoxo de Peano.

Les géométries de figures orientées — II

par **Paul Belgodère** (Attaché de Recherches C. N. R. S.)

Orientation et Imaginaires

Dans le Chapître précédent, puisque nous étions en Géométrie Analytique, nous n'avons fait aucune hypothèse de réalité, et les résultats sont valables dans le domaine complexe. Pour certains domaines de réalité des variables initiales, le choix de la détermination pour une racine carrée prend un aspect particulier.

Par exemple, si la quantité sous radical est réelle et positive, l'orientation est liée au choix du signe + ou — devant la valeur arithmétique du radical: c'est la relation élémentaire entre sens et signe.

Par contre, si la quantité sous radical est négative, le radical est susceptible de deux déterminations $+iR$ et $-iR$, et la combinaison de ces symboles imaginaires avec des nombres réels permet d'associer conventionnellement à deux orientations opposées deux éléments complexes conjugués, mais dans le cas seulement où les variables initiales appartiennent à un certain *domaine de réalité* (réelles, imaginaires pures de module 1, ...)

Prenons par exemple la liaison des *foyers* d'un cercle réel de l'espace (centres des sphères de rayon nul passant par ce cercle) avec les sens de parcours possibles par ce cercle: cela revient à orienter l'axe du cercle en fonction du sens du cercle, puis à porter sur cet axe orienté la longueur $+iR$ à partir du centre O du cercle. Ceci nécessite deux conventions préalables, qui assurent l'unicité et la non contradiction des opérations à effectuer; une orientation préalable de l'espace par la donnée d'un trièdre de référence, et le choix entre les deux points complexes d'un axe de référence à qui on attribuera *arbitrairement* les abscisses $+i$ et $-i$: la double orientation au point de vue réel et complexe de l'espace tout entier s'en déduit par continuité. Mais une convention initiale est indispensable et, de même qu'un mathématicien et son image dans un miroir traitent tous leurs problèmes avec des sens d'orientation qu'ils ne peuvent amener en coincidence, un mathématicien supposé non purement réel (capable par exemple de dessiner sur un axe d'équation réelle, le point d'abcisse $+i$) se trouverait constamment en désaccord avec le mathématicien conjugué lorsqu'il leur faudrait travailler dans le même espace.

Quoique liée à une convention préalable, mais à cause de son invariance par continuité, l'association d'éléments imaginaires à des éléments réels orientés constitue un moyen de recherche et de démonstration. Evidemment, le sens dans lequel une spirale logarithmique tourne en s'éloignant de son pôle est indépendant d'un choix possible entre les isotropes qui en sont issus (la spirale ne passe pas par un point cyclique avant de passer par l'autre); mais ces deux choix (orientation du plan, distinction des points cycliques) sont covariants par les transformations anallagmatiques, qui les altèrent ou conservent en même temps; les isotropes qui sont des éléments géométriques très expressifs et très maniables, permettent de préciser, sans calcul, les notions d'orientation.

Représentations impropres

Toute représentation paramétrique impropre, constituant par exemple une correspondance (1, 2) entre deux espaces, peut être considérée comme une orientation, les éléments critiques de la correspondance apparaissant comme non orientables. Par exemple, la représentation paramétrique impropre d'une droite par une fonction du second degré, revient à considérer les points de la droite comme perspective des points d'une conique sur la polaire du point de vue, après avoir installé sur la conique une représentation paramétrique unicursale.

Réciproquement, on peut chercher un paramétrage impropre (souvent par *l'intermédiaire* de fonctions transcendantes telles que les lignes trigonométriques) qui permette l'extraction rationnelle d'une racine carrée liée à une orientation. Soit, par exemple, à montrer que toute courbe parallèle à la parabole est unicursale: pour représenter, paramétriquement la parabole ou l'hypocycloïde à 3 rebroussements, ou toute courbe ayant une tangente et une seule parallèle à une direction non orientée donnée, il y a intérêt à prendre pour paramètre la pente t de la normale à la courbe, ou plutôt un paramètre impropre u dont t soit fonction du second degré, les valeurs critiques de t qui correspondent à une seule valeur de u étant $+i$ et $-i$, qui donnent des tangentes isotropes pouvant à priori correspondre à une particularité de la courbe parallèle. Ces conditions sont les plus aptes à fournir si c'est possible, un paramètrage unicursal de la courbe parallèle, se traduisant sur la courbe initiale par un paramétrage impropre. Posons donc $\frac{t-i}{t+i}=\left(\frac{u-i}{u+i}\right)^2$ d'où $t=\frac{u^2-1}{2u}$ ce qui revient à paramétrer la courbe initiale par la tangente du demi-angle que fait une normale variable avec l'axe, en fonction de laquelle on peut exprimer rationnellement les cosinus directeurs de la normale, donc les coordonnées d'un point de la courbe parallèle.

Voici un autre exemple: soit à étudier le birapport de droites joignant deux points d'une conique (C) à un point O n'appartenant pas à la conique, avec les tangentes issues de O. Soit (D) la polaire de O. Un paramètre unicursal t de (C) dans lequel les points de contact I, J avec les tangentes issues de O ont pour paramètres respectifs 0 et ∞ induit sur (D) par perspective à partir de O, un paramétrage impropre pour lequel t^2 est paramètre propre; à deux valeurs opposées de t correspondent deux points de (C) en involution, conjugués harmoniques par rapport aux points doubles I et J, la droite de jonction passant donc par O: à toute valeur de t^2 correspond donc un seul point de (D) et réciproquement. Donc le birapport de deux points de (C) avec les deux points doubles a pour carré le birapport de leurs perspectives: si (C) est un cercle de centre O, on retrouve la propriété de l'angle inscrit, moitié de l'angle au centre. De même, sur une droite, le milieu des points divisant un segment AB dans le rapport $a, -a$, est représenté par le paramètre propre a^2 et divise donc AB dans le rapport a^2 puisqu'il en est ainsi pour les points A, B, ∞.

La notion d'orientation permet d'éclaircir certaines propriétés d'Analysis situs liées à la Géométrie considérée, dont elle permet un dédoublement. Par exemple, le plan de la Géométrie Cayleyenne elliptique doit être considérée comme unilatère; la séparation d'un point géométrique en deux éléments (points analytiques normés) selon la détermination à donner à la racine carrée de la puissance du point par rapport à la conique absolue revient à distinguer les deux faces du plan, le raccordement de l'une à l'autre se faisant «au travers» de la conique absolue, avec une singularité apparente sur la droite de l'infini, la géométrie elliptique ainsi orientée devient identique à la géométrie sphérique, comme on s'en rend compte en prenant pour modèle la géométrie métrique des droites non orientées issues d'un point fixe de l'espace euclidien à 3 dimensions. C'est ce que W. BLASCHKE et les géomètres japonais appelent *«géométrie doublement orientée»*, un même point géométrique donnant naissance à deux éléments considérés comme distincts.

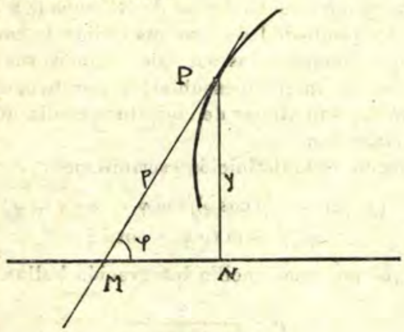
En résumé, la notion d'orientation constitue, malgré ses multiples aspects, une méthode précieuse de recherche et de découverte; elle explique et rend intuitives certaines propriétés d'apparence initiale mystérieuse: s'est cette coordination qui constitue l'élégance des méthodes géométriqees au sens de KLEIN.

Curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$

por *Ginés Nasano Oliva* (*)

Vamos a hacer un pequeño estudio de las curvas definidas por la ecuación $p=f(\varphi)$.

Designamos por p a la distancia comprendida entre un punto generico de la curva y el de corte de su tangente con un eje fijo. φ es el angulo que forma la tangente con esta recta.



Sistema de coordenadas que apesar de la bibliografia consultada no hemos encontrado ninguna referencia que nos indique hayan sido anteriormente estudiadas.

Cambio de coordenadas

Supongamos que el eje fijo sea el eje OX.

Entonces será:

(1) $$y=p\operatorname{sen}\varphi$$

El valor de la abscisa será arbitrário y dependerá de donde tomemos el eje Y.

Esto se ve inmediatamente al derivar con respecto de φ la igualdad (1)

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi;\quad \text{y como}\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi$$

(2) $$\frac{dx}{d\varphi}=(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi$$

por tanto

$$x=\int(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\operatorname{cotg}\varphi+C$$

donde C es una constante de integración.

Expresión del radio de curvatura

Sabemos que $R=(1+y'^2)^{3/2}/y''$ en donde $y'=\operatorname{tg}\varphi$; obteniendo el valor de y'' derivando com respecto de φ el anterior valor de y' con lo que teniendo en cuenta (2) sale:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)\cos^3\varphi}$$

y como $R=1/y''\cos^3\varphi$ así pues queda finalmente $R=(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Expresión de la diferencial del arco

Sabemos que $ds=R\,d\varphi$ y por la expresión anterior $ds=\dfrac{p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}d\varphi$.

Determinación de algunas curvas

Circunferencia de centro en el eje fijo. Si llamamos O el centro de la circunferência, P el punto generico de ella y M el punto donde la tangente en P corta a este eje, el triangulo OPM da $p=r\cot\varphi$. Analogamente si el centro no está en el eje sino en un punto de ordenada b se tendra $p=(b+r\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi$.

Tractriz

Su ecuación conforme a su definición será: $p=c$. *Punto* impropio segun una dirección será para $\varphi=c$.

Parabola

Si la parabola tiene su eje coincidiendo con nuestro eje es pues su ecuación $y^2=2bx$.

Sea P un punto generico y M el punto donde esta

(*) Alumno de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid y aspirante a ingreso en la E. E. de Ingenieros de C. C. y P.

tangente corta al eje y N la proyección de P sobre el eje perpendicularmente a este eje: $MP=p$, $p\cos\varphi=2x_1$ y como $x_1=y_1^2/2b$, $p\cos\varphi=y_1^2/b=p^2\operatorname{sen}^2\varphi/b$ por (1) $p=b\cos\varphi/\operatorname{sen}^2\varphi$.

Esta es pues la ecuación de la parabola de parametro b y de eje el eje fijo.

Catenaria

Sea la catenaria de ecuación $y=c\,(e^{x/c}+e^{-x/c})/2$; si derivamos con respecto de x, $y'=\sqrt{y^2-c^2}/c$ ecuación diferencial que verifica, de donde en nuestras coordenadas se deduce $p=2c/\operatorname{sen}2\varphi$.

Evoluta

La ecuación de la evoluta de una curva definida por una ecuación de este tipo admite una expresión inmediata.

Basta ver que si es N el trozo de normal comprendido entre el punto generico de la curva y el eje fijo y si llamamos p_E y φ_E a los correspondientes p y φ de la evoluta se verificara, $p_E=N\pm R$ $\varphi_E=\pi/2+\varphi$, segun la concavidad de la curva.

Supongamos que la curva dada presenta la concavidad hacia las y positivas: $p_E=N+R$, $N=p\operatorname{tg}\varphi$ $p_E=(p'\operatorname{sen}2\varphi+2p)/\operatorname{sen}2\varphi$, $\varphi_E=\pi/2+\varphi$.

Teorema. *La evoluta de la tractriz es una catenaria.*

Como la tractriz tiene de ecuación $p=c$. Sustituyendo este valor en la expresión hallada de la evoluta viene $p=2c/\operatorname{sen}2\varphi$, ecuación de la catenaria que hemos obtenido anteriormente.

Cicloides

La cicloide como sabemos satisface a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-ay}{ay}}\quad \text{ó, llamando}\quad \frac{1}{a}=c,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{c}{y}-1$$

y basandonos en esto hallamos inmediatamente su ecuación en nuestras coordenadas: $p=\dfrac{c\cdot\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$.

Teorema. *El radio de curvatura en un punto de la cicloide es dos veces el valor de la normal en este punto.*

La demostración sale enseguida de sustituir p y p' en la expresión que nos da el radio de curvatura, por los valores correspondientes a la cicloide. Así pues obtenemos

$$p'=-c\cdot\cos\varphi\,(1+\operatorname{sen}^2\varphi)/\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$R=c\cdot\cos\varphi\,(1-\cos 2\varphi)/\operatorname{sen}^2\varphi=2c\cos\varphi$$

y como $N=p\operatorname{tg}\varphi=c\cos\varphi$, luego $R=2N$, proposición enunciada.

Curvas de Ribaucour

Se da el nombre de curvas de Ribaucour a las que poseen la propiedad de que sus radios de curvatura son proporcionales a las normales en todos sus puntos. Estas curvas fueron descubiertas por Ribaucour al estudiar las superficíes de curvatura media nula, llamadas elasoides.

Partiendo de la definición escribiremos:

$$(p'\operatorname{sen}\varphi+p\cos\varphi)/\operatorname{sen}\varphi=m\cdot p\operatorname{tg}\varphi$$
$$p'/p=m\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{cotg}\varphi$$

de las que por una sencilla integración hallase:

$$p=\frac{c}{\cos^m\varphi\operatorname{sen}\varphi},$$

curvas pedidas en las que se observa que para: $m=1$ Catenaria; $m=-1$ Circunferencia; $m=-2$ Cicloide. La expresión del radio de curvatura en un punto de ella será $R=mp\operatorname{tg}\varphi$ ó sea $R=c/\cos^{m+1}\varphi$.

Uma aplicação do diagrama de Venn

por Maria Teodora Alves

Como é sabido, o diagrama de Venn permite interpretar graficamente as operações da Álgebra de Boole, aplicadas a duas e a três classes.

Uma ligeira modificação no diagrama de Venn permitirá também estudar e interpretar o teorema

(1) $$H\supset T$$

e os teoremas dele reduzidos.

Na figura seguinte:

O quadrado representa V (classe universal); o círculo de maior raio, H; o círculo de menor raio, T.

A região quadriculada do quadrado será representada por $\sim H$; a região tracejada a traços horizontais por $\sim T$; a região compreendida entre os círculos H e T, por $H\cap\sim T$.

A figura mostra que é sempre:

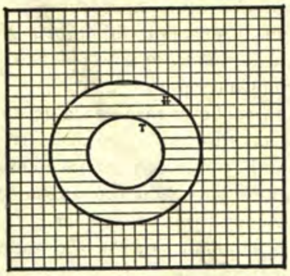
(2) $$\sim T\supset\sim H$$

que é o teorema contrapositivo de (1). Isto é, demonstrado um teorema, o seu contrapositivo é sempre verdadeiro.

A expressão de $\sim T$, como mostra a figura, é

(3) $$\sim T \equiv \sim H \cup (H \cap \sim T) .$$

Se H e T não forem classes vasias, o produto $H \cap \sim T$ só poderá ser nulo (H e $\sim T$ serão divisores



de zero) se H e $\sim T$ forem complementares uma da outra, o que implica

(4) $$H \equiv T$$

e (1) transformar-se-á, por substituição de equivalentes, em

$$T \supset H$$

que é o teorema recíproco de (1).

Também de (4), ou de H e $\sim T$ serem complementares, se deduz

$$\sim H \equiv \sim T$$

e, portanto, (2) transformar-se-á em

$$\sim H \supset \sim T$$

que é o teorema contràrio de (1).

Em resumo, demonstrado o teorema (1), o teorema contrapositivo é sempre verdadeiro, mas se

$$H \equiv T,$$

serão também verdadeiros o teorema recíproco e o teorema contrário.

Em vez de estabelecer que um teorema e o seu recíproco são simultaneamente verdadeiros quando se verifica a condição $H \equiv T$, poderiamos seguir um processo inverso e deduzir a condição $H \equiv T$ do facto de serem verdadeiros um teorema e o seu recíproco.

Com efeito uma das propriedades da teoria das classes é:

«Se $K \subset \mathcal{L}$ e $\mathcal{L} \supset K$, então é $K \equiv \mathcal{L}$[1]».

Se substituirmos K por T e $\mathcal{L}$ por H, vem:

Se $T \subset H$ e $H \supset T$, então é $H \equiv T$.

Podemos, pois, dizer que se um teorema e o seu recíproco são verdadeiros, H e T são identicos.

Estes resultados podem ser enuciados de outro modo. No teorema

$$H \supset T$$

diz-se que H é condição suficiente para T, e que T é condição necessária para H.

Servindo-nos dos termos suficiente e necessário, podemos dizer que:

Se uma condição, que é suficiente, é também necessária, os dois teoremas, directo e recíproco, são verdadeiros; e recíprocamente, se são verdadeiros dois teoremas, um dos quais é recíproco do outro, há uma condição suficiente que é necessária.

No compêndio de geometria para o 7.º ano da autoria dos Snrs. Doutores A. Nicodemos e J. Calado, o estudo dos teoremas deduzidos de um dado teorema é feito pelo recurso a considerações de outra ordem, mas eu julgo que a interpretação gráfica dessa questão, como aqui foi apresentada, além de a esclarecer, ajudará também a fixá-la.

Eu sinto-me na obrigação de dizer que esta minha observação ao compêndio da autoria daqueles ilustres Professores, e outras que já tive oportunidade de fazer em nada vêm desmerecer o valor do compêndio, cuja leitura contribuiu para o ajustamento de algumas das minhas ideias e, sobretudo, fez despertar em mim o desejo de fazer o ajustamento de outras.

[1] Tarski — Introdution to Logic, pág. 75.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS

Paris, 17-22 de Outubro de 1949

Tema: *Ciência e Método.*

Presidentes de honra: Jacques Hadamard e André Lalande, membros do Instituto.

Presidentes: Émile Borel, membro do Instituto e Gaston Bachelard, professor da Sorbonne;

Organização: O congresso compreenderá as 11 secções seguintes de que se indicam os respectivos presidentes:

Lógica — Prof. René Poirier.

Filosofia Matemática — Prof. Arnaud Denjoy.

Cálculo das Probabilidades — Prof. Maurice Fréchet.

Mecânica e Astronomia — Prof. Joseph Pérès.

Física Teórica — Prof. Louis de Broglie.

Físico-Química — Pierre Auger, Chefe da Secção das Ciências, UNESCO.

Biologia — Prof. Georges Teissier, Director do C. N. R. S.

Ciências da Terra — Prof. Jean Piveteau.

Epistemologia — Prof. Gaston Bachelard.

História das Ciências — Pierre Sergescu, presidente da Academia Internacional de História das Ciências.

Pedagogia das Ciências — Prof. Albert Chatelet, Director da Faculdade de Ciências de Paris.

Cada secção organizará um Colóquio compreendendo a exposição de comunicações, que *serão solicitadas individualmente por cada presidente*, e a discussão das exposições entre os especialistas que para tal tiverem sido convidados.

Síntese Geral das Ciências — Prof. Raymond Bayer.

O final do Congresso será dedicado à Síntese Geral das Ciências: cada secção apresentará um relatório sobre o conjunto dos trabalhos e dos resultados obtidos, numa ou várias secções plenárias que o Instituto Internacional de Filosofia se encarregará de organizar, de acordo com cada Presidente de Colóquio e com o Prof. R. Bayer, Administrador permanente do Instituto.

Haverá 3 categorias de *participantes*:

1.° *Convidados* que apresentarão *comunicações*. (Prevê-se uma dezena por Colóquio). 2.° *Convidados* que participarão nas *discussões*; 3.° *Ouvintes* que se inscreverão no Congresso.

Cada comunicação durará cerca de 45 minutos e as intervenções nas discussões serão de 10 minutos.

Cada Colóquio publicará em fascículo separado as suas actas que compreenderão o resumo das comunicações e o essencial das discussões.

Os congressistas convidados não pagam inscrição e os ouvintes 500 francos.

A inscrição não dá direito às actas mas sim o de assistir a todas as sessões dos diferentes Colóquios e e de participar em todas as manifestações que venham a ser organizadas por ocasião do Congresso.

Toda a correspondência deve ser dirigida a: *Organização Geral do Congresso* — Mlle. Delorme, Secretariado do Instituto Internacional de Filosofia, 61, rue du Mont-Cenis, Paris, 18e.

NOTICIÁRIO

JUBILEU CIENTÍFICO DO PROFESSOR FRÉCHET

Atinge no próximo ano lectivo a idade de aposentação o Prof. Fréchet. Os seus amigos, colegas e alunos testemunhando a sua admiração, dedicação e reconhecimento associaram-se para celebrar o seu Jubiléu Científico. Esta manifestação será caracterizada por uma grande simplicidade para corresponder ao desejo expresso pelo homenageado.

No princípio do ano de 1950 serão atribuidos um ou dois prémios ao autor ou autores dum trabalho inédito sobre Análise Geral. A Comissão encarregada do exame dos trabalhos apresentados e atribuição dos prémios será nomeada pela Sociedade Matemática de França, que publicará no seu Boletim os nomes dos premiados. Publicamos seguidamente o

Regulamento do Concurso: Os manuscritos em língua estrangeira devem ser acompanhados dum resumo em francês e devem ser endereçados ao Presidente da Sociedade Matemática de França, Instituto Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e. O prazo de recepção termina em 28 de Fevereiro de 1950. Os manuscritos devem tratar de Análise Geral (teoria dos espaços abstractos, transformações de elementos abstractos em elementos abstractos) ou das suas aplicações. Os manuscritos devem indicar o nome e direcção do autor. Os autores que desejem eventualmente conservar-se anónimos poderão inscrever em epigrafe do manuscrito uma frase reproduzida em envelope fechado contendo o seu nome e direcção. Os envelopes que corresponderem às memórias não aceites serão destruídos sem serem abertos.

Todas as subscrições para a homenagem a prestar devem ser enviadas a: Prof. Daniel Dugué, 52, rue d'Authie, Caen, Calvados, France (Compte de Chèques postaux: Rouen, 131-147).

PRÉMIO EINSTEIN

Celebrando o 70° aniversário do ilustre matemático e físico a Universidade de Princeton instituiu o prémio Einstein, prémio de 15.000 dólares que será atribuido todos os triénios ao sábio cujos trabalhos forem considerados como a mais importante contribuição aos conhecimentos humanos no domínio das ciências matemáticas ou físicas.

OS MÉTODOS TENSORIAIS DA MECÂNICA ANALÍTICA

Em Março e Abril de 1949 o Prof. A. Lichnérowicz da Universidade de Strasbourg, realizou no Instituto de Astrofísica de Paris (C. N. R. S.) uma série de lições sobre *Os métodos tensoriais na Mecânica Analítica.* Mostrou primeiro que as equações canónicas da Mecânica Analítica tomam uma forma simples utilizando o Cálculo Tensorial nos espaços de configuração dos sistemas, e tratou depois sobretudo das métricas de Riemann que podem ser impostas às variedades de configuração para reduzir as equações das trajectórias dos pontos figurativos dos estados dos sistemas à forma geodésica.

CONFERÊNCIAS DO PALÁCIO DA DESCOBERTA

Dentre as variadas e numerosas conferências realizadas no Palácio da Descoberta destacaremos: *Les mathématiques et les sciences sociales* pelo Prof. M. Fréchet da Faculdade de Ciências de Paris, em 19 de Março, e *La topologie* por Sainte-Lagüe, professor do Conservatoire National des Arts et Métiers, em 30 de Abril deste ano.

M. Z.

MOVIMENTO MATEMÁTICO EM ESPANHA

No Conselho Superior de Investigações Científicas e na Faculdade de Ciencias Matemáticas de Madrid durante Fevereiro e Março deste ano o Prof. H. Wold, director do Instituto de Estatística da Universidade de Upsala, fez um curso sobre «Processos estocásticos» e quatro conferências sobre «Econometria» (Análise de regressão). Estas lições redigidas pelo Prof. A. Guiraum de Granada serão em breve publicadas.

No Instituto Jorge Juan de Matemática o Prof. C. Gini, director da Faculdade de Ciencias Económicas e Estatísticas de Roma, tratou da «Metodologia Estatística».

No Instituto Nacional de Técnica Aeronautica o Prof. J. Kampé de Fériet, director do Instituto de Aerodinâmica da Universidade de Lille (França) fez um curso sobre «Processos estocásticos e aplicações à teoria da turbulência».

O Prof. Gaston Julia, da Faculdade de Ciencias de Paris, fez no Seminário Matemático da Universidade de Barcelona um curso sobre «Operadores no espaço de Hilbert» e no Instituto Nac. de Técnica Aeronautica três lições sobre «Representação conforme».

O Prof. Severi de Roma fez várias conferências sobre «Geometria Algébrica» na R. Academia de Ciencias e no Instituto Jorge Juan de Matemáticas.

Também o grande matemático holandês Brouwer realizou uma conferência de 3 horas sobre a «Influencia da Matematica na Lógica».

O Prof. M. Picone de Roma fez uma palestra sobre «As actividades do Instituto Para As Aplicações do Cálculo» de que é o director.

No Instituto Nac. de Técnica Aeronautica tiveram também lugar um curso sobre «Equações às derivadas parciais de tipo parabólico e as suas aplicações aos vôos ultrasónicos» feito pelo Prof. Rey Pastor, e várias conferências sobre «As aplicações da teoria das funções a problemas de aerodinâmica» pelo Prof. Eng. Milne-Thomson.

S. R.

SEMINÁRIOS DA UNIVERSIDADE DE PARIS

SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA

Sob a direcção do Professor Louis de Broglie realizaram-se durante o ano lectivo as reuniões deste Seminário da Faculdade de Ciências Paris onde foram expostos e discutidos os seguintes temas:

Nov. 23 — Mme. Tonnelat — Rapport sur le Congrès Solvay.

Nov. 30 — M. Daudel — Applications des fonctions d'onde moléculaires.

Déc. 7 — M. D. Massignon — Sur la théorie des liquides de Max Born et de H. S. Green.

Déc. 14 — M. Valatin — Quantités invariantes relativistes et couplage des électrons de Dirac.

Déc. 21 — M. Durand — Sur la diffraction des ondes.

Janv. 4 — M. Magnan — La mesure des sections efficaces d'absorption des neutrons avec une file à oscillateurs.

Janv. 11 — M. Costa de Beauregard — Sur le premier mémoire de Schwinger.

Janv. 18 — M. Slansky — Spin et vitesse.

Janv. 25 — M. Bass — La densité de probabilité de Wigner en mécanique ondulatoire.

Fév. 1 — M. Causse — La notion de masse et ses conditions en relativité cinématique.

Fév. 8 — M. d'Espagnat — Sur la théorie du méson.

Fév. 15 — M. Bass — Application hydrodynamique de la densité de probabilité de Wigner.

Fév. 22 — M. Colombo — Les principes de la similitude electrodynamique.

Mars 8 — M. Potier — Sur la théorie relativiste des particules à spin.

Mars 15 — Mme. Tonnelat — Rapport sur le Congrès Solvay.

Mars 22 — M. Kahan — La propagation des ondes electromagnétiques au dessus du sol. Solution du problème de l'onde de surface.

Avril 5 — M. A. Gião — Les équations de Codazzi et les rapports entre gravitation et electro magnétisme.

Avril 26 — M. Colombo — La théorie analytique du signal.

SEMINÁRIO DE CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

Como complemento à pequena notícia do número anterior sobre a actividade deste seminário da Faculdade de Ciências de Paris damos seguidamente a indicação das exposições de trabalhos originais ou de análises de memórias e livros feitos a partir de Fevereiro deste ano:

Fév. 4 — Quelques propriétés analytiques des fonctions caractéristiques — D. Dugué.

Fév. 11 — Valeurs typiques d'ordres zéro ou infini — Fréchet.

Fév. 18 — Les sondages d'opinion publique (J. Stoetzel) — Mlle. Duhamel.

Fév. 25 — La Cybernétique: quelques extraits du livre de N. Wiener — Le Cam.

Mars 4 — Une classe de «statistiques» à distribution asymptotiquement laplacienne (Hoeffding) — — R. Féron.

Mars 11 — Sur une généralisation des polynômes de Legendre suggérée par un problème de Calcul des Probabilités — Pollaczek.

Mars 18 — Sur des tests d'hypothèses — Mlle. C. Rothschild.

Mars 25 — Variétés sur des questions de Statistique — Dumas.

Avril 1 — Problèmes de probabilités suscités par la théorie des télécommunications — Fortet.

Avril 8 — Variétés sur des questions de Statistique (suite) — Dumas.

Avril 29 — Une classe de «statistiques» à distribution asymptotiquement laplacienne (Hoeffding) — — R. Féron.

Mai 13 — Retard dans l'atterrissage des avions (T Pearcey) — R. Risser.

Mai 27 — Sur les théorèmes limites de Kolmogorov-Smirnov relatifs aux distributions empiriques (Feller) — R. Féron.

Juin 3 — Sur un test non paramétrique de normalité — D. Dugué.

Juin 10 — Le système de courbes de Pearson et le schéma d'urne de Polya (A. Bricas) — M. elle J. Duhamel.

Juin 17 — Applications de la théorie des ensembles statistiques renouvelés — R. Féron.

Juin 24 — Sur les lois de probabilité à priori des paramètres d'une loi laplacienne ou binomiale — E. Baticle.

M. Z.

SEMINÁRIO DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

No segundo semestre as sessões do seminário foram quase exclusivamente preenchidas por conferências do Professor Henri Cartan que expôs, em alguns capítulos, ideias originais. Eis os títulos dessas conferências, no seguimento daquelas que indicámos no número anterior:

8 e 9 — Operadores de homotopia (continuação): subdivisão baricêntrica, deformações; homologia singular dum complexo simplicial, por H. Cartan. 10 — Coeficientes locais, por Frenkel. 11 — Produtos tensoriais, por J. Serre. 12 — Feixes e carapaças (Definições e exemplos). 13 — Feixes (continuação): estudo local. 14 — Feixes finos. 15 — Produtos tensoriais de feixes. 16 — Teoremas fundamentais da teoria dos feixes. As conferências 12-16 foram feitas pelo Prof. H. Cartan.

SEMINÁRIO DE ÁLGEBRA SUPERIOR

A partir do mês de Março, este seminário ocupou-se das aplicações da Álgebra Moderna à Geometria, tendo o Prof. P. Dubreil efectuado uma série de conferências sobre *Variedades Algébricas,* detinadas a um auditório não especializado.

SEMINÁRIO BOURBAKI

A segunda reunião do seminário teve lugar nos dias 12, 13 e 14 de Março com os seguintes assuntos:

1 — Continuação da exposição dos trabalhos de Koszul, por H. Cartan. 2 — Continuação da exposição sobre a demonstração por Weil da hipótese de Riemann, por C. Chevalley. 3 — Continuação da exposição de P. Samuel sobre a teoria das correspondências birracionais, por Gauthier. 4 — Os recentes resultados de Brauer na teoria dos Grupos, por Krasner. 5 — A demonstração de Wielandt da hipótese da torre dos automorfismos, por Bracconier. 6 — Os trabalhos de Petrowski sobre as equações de derivadas parciais não lineares, por L. Schwartz.

A terceira reunião do seminário efectuou-se em 28, 29 e 30 de Maio, sendo feitas as seguintes conferências:

1 — Os trabalhos de Koszul, 3.ª exposição por H. Cartan. 2 — Sobre o Teorema de Koszul, por C. Chevalley. 3 — Sobre o problema de Cauchy para sistemas de equações de derivadas parciais (segundo uma memória de Petrowsky, Recueil Math. (Sbornik), 1937, t. 2 (44), p. 815-868)), por L. Schwartz. 4 — Teoremas fundamentais da teoria das funções téta (segundo memórias de Poincaré e Frobenius), por A. Weil. 5 — Continuação da exposição sobre os trabalhos recentes de R. Brauer na teoria dos grupos (Brauer: «On Artin's L-series with general group characters», Ann. of. Math. (2) 48 (1947), p. 502-514), por Krasner. 6. — Trabalhos de Heins sobre diversas majorações do crescimento de funcões analíticas de sub-harmónicas, por Mme M. H. Schwartz.

Para o ano de 1949-1950 estão previstas três reuniões do seminário (em Dezembro, Março e Maio). Alguns dos assuntos que serão tratados encontram-se já afixados.

P. G.

NOTAS DE MATEMÁTICA

NOTA I

Na *Gazeta de Matemática* n.os 37-38, de Agosto-Dezembro 1948, o Sr. Mauricio Matos Peixoto publica uma demonstração da desigualdade

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

$(0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n , x_{n+1} > 0$ e $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

Afigura-se-nos essa demonstração escusadamente complicada de tal modo que ficam escondidas as razões do facto que se procura esclarecer. Mais simples será notar que desejamos provar

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(n-1)\, x_i}{S-x_i} - 1 \right) \geqslant 0 ,$$

isto é:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n x_i - S}{S-x_i} \geqslant 0 .$$

E que, se for j o menor dos índices para o qual $n x_j - S \geqslant 0$, se tem não só

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{n x_i - S}{S-x_i} \geqslant \sum_{i=j}^{n} \frac{n x_i - S}{S-x_j} ,$$

mas ainda (para $j > 1$)

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{n x_i - S}{S-x_i} \geqslant \sum_{i=1}^{j-1} \frac{n x_i - S}{S-x_j} .$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n x_i - S}{S-x_i} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} n x_i - nS}{S-x_j} = 0$$

Berkeley HUGO RIBEIRO

NOTA II

Sobre a desigualdade $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$ estabelecida pelo Prof. M. Matos Peixoto

A relação entre números positivos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1} , \tag{1}$$

onde $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$, é um caso particular de uma desigualdade deduzida da relação de Jensen:

$$f\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right] \leqslant \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_1)] , \tag{2}$$

no qual $f(x)$ é função *convexa* de x definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pontos pertencentes ao mesmo.

Com efeito.

Consideremos $f(x) = x\,(k-x)^{-1}$, $x > 0$ variando em $[a, b]$ e $k > b > 0$.

A função $f(x)$, assim definida, é convexa; pois $f''(x) > 0$ e o critério de convexidade é verificado.

Substituindo a expressão de $f(x)$ em (2), virá:

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left[k - \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right]^{-1} \leqslant \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{k + x_i}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{k - x_i} \geqslant S \left(k - \frac{S}{n}\right)^{-1} \tag{3}$$

Fazendo-se $k = S$, esta desigualdade geral fornece a relação (1):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{n-1}{n} .$$

Rio de Janeiro GASPAR S. M. RODRIGUES PEREIRA

ANTOLOGIA

O DESENVOLVIMENTO DA TOPOLOGIA *

por ***Maurice Fréchet e Ky Fan***

Na história do desenvolvimento das ciências geométricas, a topologia é um ramo relativamente recente. Basta citar os termos seguintes, empregados por Gauss em 1833 para definir o estado da topologia nesta época: «Da geometria de situação, que Leibniz presentiu e sobre a qual foi reservado unicamente a dois geómetras, Euler e Vandermonde, lançar um ligeiro golpe de vista, pouco mais do que nada sabemos e adquirimos um século e meio depois».

É Riemann quem, procurando as relações profundas entre o estudo das superfícies e a teoria das funções, fez em 1851 as primeiras aplicações da topologia às matemáticas clássicas. Com os trabalhos de Riemann, os de Möbius, Jordan, Schälfli, Dyck, Betti, Kronecker vieram constituir os primeiros resultados da topologia combinatória. Mas estes geómetras não foram senão os percursores desta ciência, que deve os seu mais notáveis progressos a H. Poincaré. As cinco memórias que publicou sobre esta ciência foram o ponto de partida dum grande número de pesquisas de diversos autores, entre os quais podemos citar Brouwer, Lebesgue, Veblen, Alexander, Lefschetz, Alexandroff, Hopf. Com Poincaré, começou em 1895 a teoria sistemática da topologia combinatória como hoje é considerada. Pode afirmar-se que o ilustre geómetra foi o promotor da topologia combinatória.

Por outro lado, independentemente da topologia combinatória, G. Cantor fundou em 1879 a topologia dos conjuntos com a teoria dos conjuntos. Foi ele o primeiro a definir as noções topológicas fundamentais no espaço cartesiano a n dimensões e obteve os resultados essenciais sobre a estrutura topológica da recta e do plano. A teoria de Cantor foi em breve utilizada e largamente difundida pela escola francesa da teoria das funções. À medida que estas ideias se espalhavam, começava a pensar-se na sua possível aplicação aos conjuntos, não já de pontos mas de curvas ou de funções. Esta ideia devida a Ascoli, Volterra, Hadamard, surgia em 1884 e estava estreitamente ligada à creação do cálculo funcional por Volterra em 1887. Mas mais tarde, tomou-se consciência de que o conhecimento da natureza dos elementos do conjunto (pontos, curvas, funções, etc.) pouco importava e que o essencial era a estrutura topológica entre os elementos do conjunto. Assim, libertando-se do que há de comum às propriedades dos conjuntos de pontos e de funções, tinha-se sido levado a generalizar o conceito de espaço e introduzia-se a topologia dos espaços abstractos, espaços cujos pontos são elementos abstractos de natureza qualquer. As primeiras tentativas nesta via foram feitas por um de nós dois em 1904. Desde então, a topologia dos conjuntos teve um desenvolvimento novo para se tornar o que se poderia com mais propriedade descrever sob o nome de *topologia abstracta* ou *togologia geral* [1].

Uma boa parte das recentes investigações topológicas é consagrada à fusão da topologia combinatória e da topologia dos conjuntos. Este objectivo foi atingido no mais alto grau nestes últimos anos. Toda a teoria de Poincaré se encontra hoje generalizada a conjuntos muito gerais. Este progresso exerceu uma penetrante influência sobre toda a topologia contemporânea.

O desenvolvimento considerável da Topologia contemporânea provém de ser actualmente impossível o conceber uma teoria de Análise que não assente num estudo topológico prévio. Os factos topológicos estão, apesar de aparentemente vagos, estreitamente ligados aos mais precisos factos matemáticos. Em quase todos os ramos da Análise ou da Geometria, considerações topológicas conduzem frequentemente a impulsos dos mais fecundos. A introdução dos métodos topológicos

---

* De *«Introduction à la Topologie Combinatoire»* — I — Initiation, por M. Fréchet e Ky Fan, (Lib. Vuibert, Paris, 1946). Cap. I — Generalidades sobre a Topologia, § 10.

(1) Para ter uma ideia geral sobre a topologia consultar: F. Severi, *Topologia*, págs. 152-159, (Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales, Serie B, Publicación n.º 9), Buenos Aires, 1931. Para um estudo aprofundado deste ramo da topologia, o leitor poderá utilizar: M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1928; N. Bourbaki, *Eléments de mathématique: Livre III, Topologie générale (Actual. scient. et industr.*, n.º 858), Paris, Hermann, 1940; W. Sierpinski, *Introduction to general topology*, Toronto, The Univ. of Toronto Press, 1934; P. Alexandroff e H. Hopf, *Topologie* I, págs. 23-124, Berlin, Julius Springer, 1935; G. T. Whyburn, *Analytic topology (Amer. Math. Soc. Colloq. Publications*, n.º 28), New-York, 1942.

em Análise remonta a RIEMANN e a sua aplicação foi renovada por POINCARÉ nas suas pesquisas sobre as equações diferenciais e sobre os sistemas dinâmicos. Desde então, a aplicação dos métodos topológicos no Cálculo das variações por BIRKHOFF, MORSE, LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, na Teoria das equações diferenciais e funcionais por BIRKHOFF, KELLOGG, SCHAUDER, em Geometria algébrica por LEFSCHETZ, SEVERI, VAN DER WAERDEN, em Geometria diferencial por diversos autores, constitue uma renovação de cada uma destas disciplinas matemáticas.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. P. — ALGEBRA SUPERIOR — Alguns problemas dos exercícios de revisão e 1.º exame de frequência.

2884 — Mostrar, a partir da definição, que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$.

R: *Se* $|a_n/a_{n-1}-L|<\delta$ *para* $n>N(\delta)$ *tem-se* $|a_{n+1}/a_n-L|<\delta$, *para* $n>N(\delta)-1$.

2885 — Mostrar, a partir da definição, que, se $\lim a_n=2$, é $\lim 1/a_n=1/2$. R: *notar que* $a_n>1$ *para* $n>n_1$.

2886 — Estudar, sobre a *circunferência de convergência*, as séries:

a) $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$; *b)* $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n}$; *c)* $\sum\limits_1^\infty \frac{2^n}{2n+1}z^n$; *d)* $\sum\limits_1^\infty nz^n$.

R: a) *O raio de convergencia é* 1. *Sobre a circunferência de convergência,* $z=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z^n=\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta$;

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2}=\sum_1^\infty\frac{\cos n\theta}{n^2}+i\sum_1^\infty\frac{\mathrm{sen}\,n\theta}{n^2}.$$

Logo, a série abeliana converge sobre a circunferência. b) *O raciocínio anterior a nada conduz. Aplicamos o resultado geral seguinte:*

A série $\sum\limits_1^\infty a_n\cos n\,\theta$ *é convergente, desde que* $a_n>0$, $\lim a_n=0$, $\theta\neq 2k\pi$. *Logo, sobre toda a circunferência, excepto no ponto* $z=1$, *a série de potências converge; para* $z=1$, *vemos que diverge.* c) $\sum\limits_1^\infty\frac{2^n}{2n+1}z^n$. *Como*

$$\lim\sqrt[n]{\frac{2^n}{2n+1}}=2/\lim\sqrt[n]{2n+1}=2\Big/\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\right)=2,$$

o raio de convergência é $1/2$. *Sobre a circunferência de convergência,*

$$z=[\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta]/2,\ z^n=(\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta)/2^n.$$

$$\sum_1^\infty\frac{2^n}{2n+1}Z^n=\sum_1^\infty\frac{1}{2n+1}\cos n\theta+i\sum_1^\infty\frac{1}{2n+1}\mathrm{sen}\,n\theta.$$

A série dada converge, excepto para o ponto $z=1/2$, *como directamente se vê.*

2887 — Classificar as séries

$$a)\ \sum_1^\infty 2^{-n-(-1)^n}\quad b)\ \sum_1^\infty\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^n\frac{1}{n^k}.$$

R: a) *É convergente. Notar que o limite do cociente de 2 termos consecutivos não existe, existindo, no entanto* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$. b) *Convergente* $(k>0)$.

2888 — Relacionar a com b de modo que $(a+ib)^4$ seja *real*.

2889 — Mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} a & b & c\\ 1 & 2 & d\\ a' & b' & c'\end{vmatrix}$ não pode ser ortogonal, se a e a' forem reais.

2890 — Calcular a função simétrica $\sum\frac{1}{x_1^2+x_1-1}$ das raízes da equação $x^3+x^2-x-4=0$ R: $x_1^3+x_1^2-x_1-4=0$; $x_1(x_1^2+x_1-1)=4$ $x_1^2+x_1-1=4/x_1$.
Logo, $\sum 1/(x_1^2+x_1-1)=\sum x_1/4=s_1/4=-1/4$.

2891 — Transformar a equação $x^3+x^2+x-1=0$ pela relação de 2.ª espécie $y_1=1/x_2^3+1/x_3^3-1/x_1^3$, reduzindo-a prèviamente a outra de 1.ª espécie.

2892 — Aplicando a continuidade da função «$\log x$» mostrar que, se $\lim c_n=c$, $\lim a_n=a$, $(a\neq 0)$ é $\lim a_n^{c_n}=a^c$.

R: *Seja* $\lim a_n^{c_n}=\lambda$; *tomando logaritmos vem*
$\log\lim a_n^{c_n}=\lim\cdot\log a^{c_n}=\log\lambda=\lim(c_n\cdot\log a_n)=\lim c_n\cdot\lim\log a_n=c\cdot\log a=\log a^c$; logo, $\lambda=a^c$.

2893 — Sabendo que a equação $f(x)\equiv x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$, tem 2 raízes diferindo de 4, resolvê-la, aplicando a teoria da eliminação. R: $f(x)=0$ *e* $f(x+4)=0$ *tem* 1 *raiz comum.*

2894 — Supondo que a equação $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ tem as raízes em progressão aritmética resolver a equação. R: *Raízes:* $\alpha,\alpha+r,\alpha+2r,\alpha+3r$. (1) $S_1=4\alpha+6r=-a$; $2\Sigma x_1x_2=S_1^2-S_2=2b$; (2) a^2-

$-2b=4\alpha^2+14\,r^2+12\,\alpha r$. *Para resolver o sistema* (1), (2), *quadremos* (1): $16\,\alpha^2+36\,r^2+48\,\alpha r=a^2$; *multipliquemos* (2) *por* 4: $16\,\alpha^2+56\,r^2+48\,\alpha r=4a^2-8b$; *por subtração ordenada, vem* $20\,r^2=3a^2-8b$, *que juntamente com* (1) *permite calcular* r *e* α.

Nota: Este método de resolução é aplicável à equação de grau n, na hipótese feita: tal categoria de equações é portanto algèbricamente resolúvel, qualquer que seja o seu grau.

Soluções dos n.os 2884 a 2894 de Andrade Guimarães

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. P. — Cálculo das Probabilidades — Outubro de 1948.

2895 — Um dado tem as faces numeradas de 1 a 6, outro tem numeradas de 0 a 5.

Lançam-se esses dados ao acaso, somando-se os dois pontos obtidos; e tornam a lançar-se ao acaso, se essa soma for superior a 6.

a) Calcular a probabilidade de no 1.º lançamento, ou no 2.º, sair a soma 6.

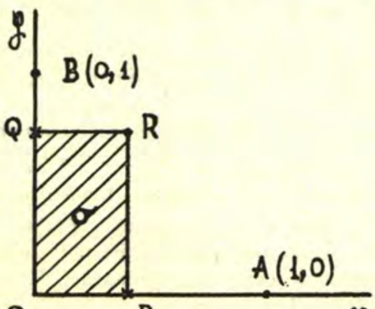
b) Não se obteve essa soma. Calcular a probabilidade de terem sido lançados uma única vez os dados.

R: a) *Probabilidade de num lançamento sair a soma* 6: $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. *Probabilidade de num lançamento sair uma soma superior a* 6: $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

$$(A)=1/6+5/12\cdot 1/6=17/72.$$

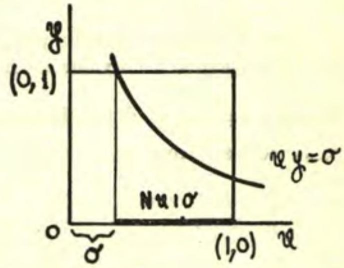
$$\text{b)}\ (B\,|\,\overline{A})=\frac{(B\overline{A})}{(\overline{A})}=\frac{15}{36}:\left(1-\frac{17}{72}\right)=\frac{15\cdot 2}{55}=\frac{6}{11}.$$

2896 — Sobre os segmentos perpendiculares OA e OB são lançados ao acaso dois pontos P e Q.



Seja σ a área do rectângulo $OPRQ$ por eles determinado. *a*) Calcular a taxa T_σ. *b*) Calcular o valor médio dessa área, sem utilizar o resultado anterior.

$$\text{R: } a)\quad \begin{cases} x=x \\ \sigma=x\cdot y \end{cases}\quad \therefore\quad T_{x\sigma}=\frac{1}{x}\cdot T_{xy}=\frac{1}{x},$$

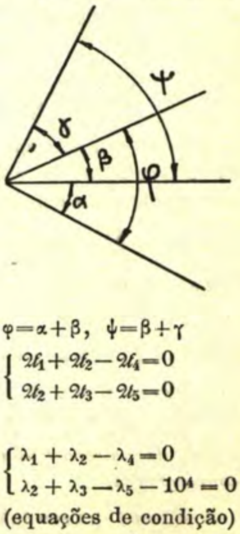


$$T_\sigma=\int_{Nx|\sigma}\frac{1}{x}\,dx=[\log x]_{Nx|\sigma}=[\log x]_\sigma^1=-\log\sigma.$$

$$b)\ M(\sigma)=\iint_{Nxy}(x\cdot y)\cdot T_{xy}\,dx\,dy=\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{4}.$$

2897 — Medições igualmente precisas dos cinco ângulos indicados deram

$\alpha=20°\,47'\,15''$,
$\beta=25°\,12'\,50''$,
$\gamma=30°\,49'\,10''$,
$\varphi=46°\ \ 0'\ \ 5''$,
$\psi=56°\ \ 2'\,10''$.



a) Calcular os valores mais plausíveis desses cinco ângulos, por compensação;

b) e avaliar os correspondentes erros. R:

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_1=\alpha=20°\,47'\,15''+\lambda_1 \\ \mathfrak{A}_2=\beta=25°\,12'\,50''+\lambda_2 \\ \mathfrak{A}_3=\gamma=30°\,49'\,10''+\lambda_3 \\ \mathfrak{A}_4=\varphi=46°\ \ 0'\ \ 5''+\lambda_4 \\ \mathfrak{A}_5=\psi=56°\ \ 2'\,10''+\lambda_5 \end{cases}$$

$$\varphi=\alpha+\beta,\quad \psi=\beta+\gamma\quad\therefore\quad \begin{cases}\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2-\mathfrak{A}_4=0\\ \mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_3-\mathfrak{A}_5=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4=0\\ \lambda_2+\lambda_3-\lambda_5-10''=0\end{cases}$$

(equações de condição)

Enunciados e soluções dos n.os 2895 a 2897 de Manuel Gonçalves Miranda.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

77 — BRAGA, António Garcia — **Teoria neo-clássica de propagação luminosa**, — Vila do Conde, 1948.

O Autor do presente trabalho não se limitou a apresentar uma Teoria da propagação da Luz, mas pretendeu, além disso, ao longo das cento e poucas páginas do seu livro, ilustrar a potência da «Teoria» que imaginou, aplicando-a a variadíssimos domínios da Física.

Não sabemos ao certo qual foi a intenção do Sr. Garcia Braga — que, segundo as suas próprias palavras, «não é um matemático nem um físico» — ao publicar este livro. Do que não podem restar dúvidas é do alto conceito que faz da própria obra. Com efeito é assim que termina o seu prefácio: «Não tem o autor a pretensão de possuir a chave do Universo, mas está convencido de que conseguiu levantar mais um pouco de argamassa das suas pulquérrimas e potentíssimas muralhas». Para tanto confessa ter lançado mão das «armas» forjadas por filósofos e físicos desde Demócrito a Planck,lançando-as «Sob um único comando ao ataque da fortaleza que julga ter sido retardado pela colaboração genial mas puramente abstracta de Lorentz e de Einstein».

Afirmações como esta são duma extrema gravidade e não consentiremos que o Autor as faça impunemente. Porque na nossa opinião — e também, com toda a certeza, na opinião de quem quer que tenha consciência do que seja uma teoria científica — o «ataque» do Autor foi um desastre burlesco. E tanto que, se estivéssemos certos de que o seu trabalho só seria lido por quem quer que tenha uma ideia clara do que seja hoje trabalhar em física, não lhe faríamos certamente tão longa referência. Mas é o própro Autor quem afirma — e aqui estamos de acordo! — que «A divulgação científica deve ser levada a todas as classes sociais, porque em todas elas se encontram homens com espírito criador». Ora este facto impõe ao divulgador responsabilidades pesadíssimas, que decorrem da ausência de espírito crítico, que infelizmente se há-de verificar em muitos dos seus leitores. E quando alguém, inconsciente dessas responsabilidades, vem a público com um trabalho mistificador, impõe-se o dever dum esclarecimento categórico.

Nesse sentido, devemos começar por assentar nos pontos seguintes:

1.º — A teoria apresentada neste livro não é uma teoria física;

2.º — As ideias expressas neste trabalho não têm, na sua essência, qualquer aspecto original.

O livro inclui nove capítulos, a que não faremos (por desnecessárias) referências detalhadas.

A chamada «Teoria Neo-Clássica» resume-se numa interpretação qualitativa, puramente retórica, de algumas leis e princípios da Física à base de conceitos metafísicos, entre os quais se destaca o de Eter-Neo-Clássico. O Eter-Neo-Clássico do Autor é um éter elástico e pesado (!) que reune propriedades, as mais dispares, impostas *a posteriori* para «explicar» os vários fenómenos analisados.

Por exemplo, a lei da atracção, de Newton, é estabelecida em primeiro lugar para o caso de esferas mergulhadas num meio de borracha *sui generis* (que entre outras habilidades, obedece às leis dos gases perfeitos) e imediatamente generalizada, sem mais considerações, ao caso de corpos quaisquer mergulhados em Eter-Neo-Clássico.

É claro que um conceito com a elasticidade de propriedades do éter do Sr. Braga «explica» tudo o que se queira. O método é simples. Se se pretende «explicar» em termos de Eter-Neo-Clássico o fenómeno A postula-se simplesmente: o Eter-Néo-Clássico tem estas e aquelas propriedades que explicam o fenómeno A.

Isto não é Física nem é nada, e parece-nos inconcebível que alguém possa, em 1948, dar-se por satisfeito com semelhante técnica.

Todo o trabalho do Sr. Garcia Braga se reduz a um esforço incompreensível e inconsequente de compatibilização de velhos conceitos com algumas ideias de segunda plana da Física de hoje.

Atreve-se a classificar de «fisicamente ilógicos», «metafísicos», «matemàticamente discutíveis», etc., os luminosos fundamentos e os métodos da Teoria da Relatividade. No entanto, não hesita em enunciar o seguinte «axioma» da sua Relatividade Neo-Clássica»: «Um observador que se julga em repouso está realmente animado de movimento uniforme ao longo do sentido convencional positivo do eixo dos tempos com velocidade $dt/dt=$constante$=1$». E acrescenta: «O valor desta velocidade é, claramente, não um valor com significado físico mas um valor com um significado metafísico. O valor dt do numerador representará a variação da quarta dimensão convencional do espaço e o valor dt do denominador representa a variação do tempo tal como o concebemos no terra-à-terra dos nossos simples espíritos».

E também não hesita em concluir o seu livro enunciando aquilo a que chama a «Lei Universal»: «Quando no espaço universal constituido por Eter-Neo-Clássico, se exercem acções perturbadoras, formam-se forças tendentes a anular ou a reduzir ao mínimo os efeitos das causas perturbadoras».

Serão estes os «métodos lógicos positivos» de que faz alarde o Autor?

A sua ignorância dos princípios e métodos da Física clássica e moderna transparece em cada página. Só para citar alguns exemplos:

— Afirma que, segundo a teoria electro-magnética de Maxwell, «por um ponto onde passa energia luminosa passa então alternadamente uma massa eléctrica positiva e uma massa eléctrica negativa»; diz que «a Teoria da Relatividade» não só não consegue explicar o efeito Doppler—Fizeau como, ao contrário, impõe a sua negação;»

— Sustenta que o volume do neutrão é igual à soma dos volumes do protão e do electrão. A ausência total de referência a teorias da importância actual da Relatividade Geral e da Mecânica Ondulatória, que interpretam de facto fenómenos que a «teoria Neo-Clássica» romanceia e deturpa, faz-nos supor que tais domínios da Física nem sequer de nome são conhecidos pelo Autor.

Não queremos terminar estas considerações, a que a gravidade das circunstâncias impôs a inevitável dureza, sem deixar de salientar o que há de positivo no trabalho do Sr. Garcia Braga: o grande esfôrço que ele traduz no sentido de superar uma preparação que a escola lhe não deu.

Pena é que, através das leituras que teve de fazer, não se tenha o Autor apercebido da tremenda responsabilidade de publicar resultados pretensamente originais, principalmente com a amplitude a que este seu trabalho aspira.

Fernando Soares David

78 — GARCIA SERRANO, Vicente Inglada — **Métodos para la resolución de los problemas geométricos** — Editorial Dossat, Madrid, 1948.

Hace ya mucho tiempo que leíamos en una revista alemana la recensión de una obra de un distinguido profesor. El crítico afirmaba que entre sus páginas se contenía «mucho bueno y original». Pero, a continuación, advertía a sus lectores que lo original no era bueno, ni lo bueno original. El distinguido ingeniero de Caminos e ingeniero Geógrafo don Vicente Inglada, acaba de publicar un libro cuya mejor crítica podría ser la contraria a la anterior. En menos de 500 páginas el autor ha conseguido dar una visión muy completa de los métodos aplicables a la resolución de los problemas geométricos, y a pesar de su aparente desconexión, las soluciones analíticas y las sintéticas se refunden colectivamente en una unidad superior que, si bien no conduce siempre a la más rápida solución de la cuestión, permite al lector desarrollar potentes métodos de cálculo que contribuirán, sin duda, a su formación científica.

Como afirma el Sr. Inglada, «en algunos tipos de problemas los métodos analíticos gozan, por último, de la ventaja de no exigir el conocimiento previo de la solución, el cual es casi siempre imprescindible para el empleo de los métodos sintéticos», y juiciosamente declara a continuación que «si en el enunciado del problema no se exige la aplicación de un tipo determinado de métodos, el criterio fundamental debe ser la brevedad o sencillez de la solución».

Ejemplos notorios de la aplicación de este criterio se encuentran profusamente repartidos por el libro; verbigratia: la demostración del bello teorema de la invariancia de la razón doble de las cuatro tangentes a una cúbica (págs. 137, 138 y 139) — en donde además se introduce el nuevo concepto de homografía «bastante indeterminada» —. El problema número 6 de la página 391 — del cual, sin embargo, recordamos haber visto una solución un pouco más breve, debida al alumno de la Escuela de Caminos Sr. Lacleta, — y el problema número 2 de la página 350.

Parece útil subrayar que, además de las erratas advertidas, se han deslizado otras muchas que pueden fácilmente inducir a confusión al joven lector. En la página 307, al demostrar el teorema de Mannheim, se dice, por ejemplo, que «(se conoce la razón de los segmentos $A_1 I_{12}$ e $A_2 I_{21}$, y se sabe que $I_{12}\,C_3\,I_{21}$ es perpendicular a $A_1 A_2$)». ¡Basta mirar la figura 117 para darse cuenta que I_{12}, C_3 y I_{21} no son colineales!

Otras erratas tienen aún más importancia. Por ejemplo, en el ejercicio número 8 de la página 288 se indica que la curva ortóptica de una cardioide es una circunferencia, cuando se sabe (véase «Juel. Tidskrift Math.») desde 1880 que es una séxtica que degenera en un caracol de Pascal y una circunferencia.

Es extraño que en algunos problemas la solución se encuentra bastante alejada del enunciado. Así, por ejemplo, el problema número 12 propuesto en la página 319 no aparece resuelto hasta la página 353.

Tampoco resulta de fácil comprensión la manifiesta ausencia de indicaciones bibliográficas que, sin duda, tan útil resultaría al lector. En recompensa a nuestra búsqueda hemos hallado, justo es decirlo, una sola, en la página 223, en que el autor remite a una magistral monografía del sabio matemático francés Henri Cartan. Pero no hubieran sobrado, al menos, las notas bibliográficas referentes a autores nacionales. Por ejemplo, en la deducción del teorema de Ptolomeo, hecha por números complejos en la página 150, hubiera sido de agradecer citar la nota de don Augusto Krahe «Sobre el teorema de Ptolomeo», publicada en la «Revista Matemática Hispano-Americana», pág. 147, 1926. También en la solución del problema V, página 240, el homenaje del autor al Sr. Krahe está implícito.

La redacción es cuidadosa y no carece de rigor. Sin embargo, en algunas ocasiones hay algo, sin poder precisar qué, no satisfactorio del todo. Por ejemplo, en la página 292 se dice: «Una magnitud M es función *continua* de las magnitudes X, Y, Z, variables independientes, cuando escogida una magnitud M_ε de la misma *especie* que M y arbitrariamente pequeña, pueden determinarse otras $X'_\varepsilon, Y''_\varepsilon, Z'''_\varepsilon$, *similares* a las X, Y, Z, respectivamente, y tales que el incremento $M(X_1, Y_1, Z_1) - M(X, Y, Z)$ resulte inferior en valor absoluto a M_ε siempre que los incrementos $X_1 - X$, $Y_1 - Y$ y $Z_1 - Z$ lo sean a $X'_\varepsilon, Y''_\varepsilon, Z'''_\varepsilon$.

De las transformaciones de contacto se da un solo ejemplo. Talvez no conviniera multiplicar éstas; pero un estudio y clasificación de tan importantes transformaciones (y de sus aplicaciones diversas; las de Sophus Lie, Blosch Ke, Duporcq, etcétera) hubieran resultado de interés para el lector.

Igualmente hay que lamentar que el brillante estudio realizado en las homografías y correlaciones del E_2 no haya sido prolongado en el E_3.

Los pequeños reparos que hacemos a la obra sólo intentan mejorarla, en lo posible, en una segunda edición. En general, los problemas originales y bien elegidos, como el de la determinación del perfil de la pista de un velódromo y la introducción de útiles artificios, como el del clinante — 338, — son tan numerosos, que bastarían para aplaudir la publicación de esta obra, con la cual el Sr. Inglada renovará los éxitos ya alcanzados con sus anteriores publicaciones, tan bien acogidas por la juventud estudiosa de nuestra Patria.

R. Coro

(Transcrição de *Revista Euclides* VIII, pág. 400 — Madrid, 1948).

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará quatro números por ano

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição destes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.

1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.

2.º exame de frequência — número de Maio.

Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dos quatro números anuais da *Gazeta de Matemática* poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Está desde já aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, se não antes, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.º 3 (número especial dedicado aos exames de aptidão, últimos exemplares que restam da 1.ª edição, no antigo formato)	10$00
N.ºs 12 e 15 a 38, cada número	12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 12$50