GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO X N.os 41-42 DEZEMBRO 1949

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

ANO X – N.os 41-42 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO – 1949

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Una métrica universal para las ciencias experimentales

por J. Gallego Diaz

1. Introduccion. — Por una explicable fuerza de inercia se utiliza, desde hace siglos, la métrica euclidea en las ciencias experimentales. La rutina, enemiga acérrima del progreso cientifico actúa sobre nosotros con fuerzas insospechadas y operando en las zonas abismales del subconsciente se atrinchera, blindada de tradicion, en cómodas zanjas de indiferencia peyorativa. Pretendemos con éste nuestro trabajo, introducir una nueva métrica en las ciencias de la naturaleza es decir en todos aquellas que se basan en la observación y experimentacion y que dependen, por tanto, de medidas, estando asi sometidas al control numérico siempre, lo cual permite sechazar o admitir una hipótesis contrastándola con la realidad. La Termodinámica, la Economia, la Biologia, la Psicofisica, la Cibernética e otras muchas ciencias entran de lleno en nuestro domínio.

Queremos advertir que nuestro objeto no es dar una respuesta causal o intrinseca de la gran masa de fenómenos cuya sede es el espacio-tiempo. Ni el de interferir, por ende, con la teoria de la relatividad. Nuestra métrica aspira a *describrir* tan sólo los múltiples fenomenos de la realidad en cuanto son susceptibles de representacion en el plano o en el espacio euclideo ordinario de tres o de n dimensiones. Pero, precisamente, su interés y su originalidad — si es que la tienen — radica en ello. Nuestra posicion es de tendencia extremista en un sólo sentido: negamos la validez o vigencia de la métrica euclidea para la explicacion de los fenomenos experimentales y ello en atencion a que, como veremos em seguida, sus intrinsecas caracteristicas son totalmente inadecuadas al fin perseguido. He aqui los dos principales motivos *a*) el método de comparacion obligadamente seguido en ello es impróprio para lo que se intenta medir: la superposicion parece que debe convenir únicamente objetos espaciales: la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ está expresada en geometria euclidea, como se sabe, por la fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ó lo que es equivalente: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ — La propriedad que *caracteriza* a esta distancia es que resulta invariable respecto a cualquier rotacion de ejes coordenados. Y en general que permanece invariable respecto al grupo de los movimientos. Pero: ¿ que significado puede tener dicha rotacion de ejes en la representacion de los fenómenos naturales? Piénsese, por ejemplo, para no citar más que dos casos, en los transformaciones adiabáticos de la termodinámica o en los fenómenos de crecimiento en biologia. En cambio, parece evidente que la métrica *natural* de los fenómenos naturales debe darnos *distancias* que resulten invariantes cuando efectuemos un cambio de escalas; esto es, un cambio de unidades de medida. Por ejemplo: si estudiamos el crecimiento en peso de un organismo en funcion del tiempo, la *distancia* entre dos puntos cualesquiera de la curva de crecimiento no deberá variar cuando expresemos el peso en kilogramas en lugar de en gramos y el tiempo en minutos en lugar de en segundos. Esto nos lleva a admitir el postulado de que que la distancia entre dos puntos representativos de un fenómeno natural debe ser invariable respecto al grupo de transformaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha x_1 \\ y = \beta y_1 \end{cases}$$ en donde α y β son parámetros que expresan el cambio de unidades de medida.

Naturalmente la generalización al caso de una magnitud funcion de n variables independientes es obvia.

b) La eleccion de una determinada unidad de medida parece tan inconveniente como innecesaria. Ningun objeto natural posee propriedades de *arquetipo.* Es decir, que carece de propriedades fisicas que puedan caracterizar e asi creemos sinceramente que no existe magnitud alguna que goce del privilegio de ser ella — y no otra — *metro.*

Intentamos, pues, realizar un nuevo análisis del concepto de medida ya que como justamente dice BAUER[1] «c'est evidemment sur la mesure que sont fondées toutes nos sciences exactes de la nature, depuis la géométrie jusqu'à la biologie».

2. Determinacion axiomática de la métrica. Para construir la métrica partiremos de tres axiomas: el primero ha sido justificado en el apartado anterior. Si nos limitamos por comodidad al espacio de dos dimensiones podemos formular lo asi:

AXIOMA I — *La distancia entre dos puntos* $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, $[z = d(A, B) = F(x_1, x_2, y_1, y_2)]$ *ha de ser una funcion homogenea, de grado cero en* x, y. Es decir que:

$$d(A, B) = F\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}\right). \tag{1}$$

El segundo y el tercero, de acuerdo con la teoria de los espacios abstractos semimétricos, son los siguientes:

(2) AXIOMA II: $d(A, B) = d(B, A)$

(3) y AXIOMA III: $d(A, A) = 0$

3. Resolucion de las ecuaciones funcionales que permiten determinar la forma cuadrática fundamental.

Si hacemos: $\dfrac{x_1}{x_2} = m$; $\dfrac{y_1}{y_2} = n$, en virtud de (1) y (2) se verifica:

$$F(m, n) = F\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

A pesar de que la literatura relativa a ecuaciones funcionales de varias variables independientes no es muy rica, hemos resuelto la ecuacion funcional (4) de la seguiente sencilla manera:

Efectuando el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = Lm \\ v = Ln \end{cases}$$

o lo que es lo mismo: $\begin{cases} m = e^u \\ n = e^v \end{cases}$

La ecuacion (4) se convierte en:

$$F(e^u, e^v) = F(e^{-u}, e^{-v})$$

Es decir: $$F(u, v) = F(-u, -v).$$

Esta ecuacion la satisfacen todas las superficies $z = F(u, v)$ que sean simetricas respecto al aje z. Pero como la distancia debe ser tal que la forma diferencial: $ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{22}\,dy^2 + 2\,g_{12}\,dx\,dy$ sea cuadrática, elegimos, de los dos posibles, la mas sencilla, esto es:

$$z^2 = uv.$$

Asi pues la distancia buscada será

$$z = d(A, B) = \sqrt{L\frac{X_1}{X_2} \cdot L\frac{Y_1}{Y_2}} \tag{5}$$

Esta distancia como es fácil comprobar satisface a nuestros tres axiomas.

Es inmediato obtener

$$ds^2 = \frac{dx}{x} \cdot \frac{dy}{y}$$

Es decir:

$$ds = \frac{\sqrt{dx\,dy}}{\sqrt{xy}} \tag{6}$$

4. Geodésicas. Para encontrar las geodésicas del espacio de RIEMANN definido por (6) hemos de hallar las curvas que hagan estacionaria la

$$\int ds \quad \text{es decir} \quad \int \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{xy}}\,dx$$

La ecuacion de EULER, del Cálculo de Variaciones es como se sabe:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial y'}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

que aplicada a nuestro caso nos dá:

$$y'' - \frac{y'^2}{y} + \frac{y'}{x} = 0$$

ó

$$xyy'' - xy'^2 + yy' = 0 \tag{7}$$

cuja integracion es imediata y nos dá:

$$y = Ax^m \tag{8}$$

Las diversas significaciones de la formula (8) son conocidas en las ciencias experimentales. Asi, por exemplo: en biologia matemática representa la ley del crecimiento relativo o allométrico[1]; en termodinámica la ley de los transformaciones adiabáticas[2]; en economia la curva de la demanda de MARSHALL[3], etc.

[1] E. BAUER: La mesure des grandeurs: Dimensions et unités. *Actualités scientifiques Hermann* (n.º 796).

[1] HUXLEY: *Problems of relative growth.* Londres, pg. 4.

[2] BRUHAT: *Thermodynamique.* Paris, 1947, pg. 90.

[3] GALLEGO-DIAZ: Un principe de la moindre action en Economie Politique. *Rev. Scientifique.* Paris, 1947, pgs. 597 a 600.

5. El principio de minimo en las ciencias experimentales. Análogamente al principio de HAMILTON en mecanica, debe admitirse que gran número de fenómenos en las ciencias experimentales deben obedecer a una ley de variacion estacionaria del tipo:

$$\int \Phi \, ds = \text{máximo o minimo}$$

Si suponermos, por análogas razones a las expuestas en la introduccion, que la funcion Φ es homogénea, debemos hallar los extremos de la integral:

$$\int x^m y^n \sqrt{dx \, dy}$$

Para aplicar la correspondiente ecuacion de EULER efectuemos el cambio de variables

$$\begin{cases} v = 2y \\ u = 2x \end{cases}$$

con lo cual la expresion a extremos se convierte en:

$$\int e^{\alpha_1 u + \beta_1 v} \sqrt{\frac{dv}{du}} \, du$$

y la ecuacion de EULER:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v' \, \partial v'} v'' + \frac{\partial^2 F}{\partial v \, \partial v'} v' + \frac{\partial^2 F}{\partial v \, \partial v'} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

se transforma em

$$v'' + 2\beta_1 (v')^2 - 2\alpha_1 v' = 0$$

que, puesta en la forma:

$$v''/v' + 2\beta_1 v' - 2\alpha_1 = 0$$

dá por integracion immediata:

$$v' = k_1 x^{2\alpha_1} / y^{2\beta_1}$$

y teniendo en cuenta el cambio de variables antes realizado, resulta, finalmente:

$$y^{2\beta_1} = C_1 x^{2\alpha_1} + C_2 \tag{9}$$

que comprenden, como caso particular ($C_2=0$) a las geodesicas antes determinadas.

Es interesante observar que recordando la definicion de la elasticidad de una funcion $y=f(x)$ (vease, por ejemplo: GALLEGO DIAZ: Sobre la permutacion de los operadores d/dx y Ex. *Gazeta de Matemática*, n.º 26) las curvas definidas por (9) pueden asi mismo caracterizarse por:

$$E_2(y) = aE_1(y) + b \,. \tag{10}$$

(a e b constantes: $E_2(y)$ es la elasticidad segunda de la funcion y $E_1(y)$ la elasticidad primera).

Y en el caso particular $a=0$ se obtiene la *curva normal de error*.

6. Braquistocronas. Si se supone ahora que estudiamos la variacion de un fenómeno en funcion del tiempo fisico x y admitimos una ley del tipo $y=f(x)$ y reconocemos la existencia de un segundo «tiempo» (*tiempo biológico* de CENEL o *tiempo fisiológico* de LECONTE DE NOUY, por ejemplo) que representamos por τ podemos escribir

$$\frac{ds}{d\tau} = v(x, y) \tag{11}$$

siendo v la velocidad de crecimiento en funcion del tiempo fisico.

Para hallar la braquistocrona hemos de extremar la integral

$$\tau = \int \frac{ds}{v(x, y)}$$

Pueden hacerse varias hipótesis sobre la naturaleza de la funcion $v(x, y)$.

Si suponermos que es homogénea, de grado cero, por ejemplo:

$$v = k \sqrt{\frac{a-y}{x}}$$

se obtiene:

$$\tau = \int \frac{\sqrt{x} \, dy}{k \sqrt{y(a-y)}}$$

y resuelta la correspondiente ecuacion de EULER, resulta

$$y = \frac{a}{1 + b \,.\, c^x} \tag{12}$$

que es la ecuacion de la conocida curva *logistica*, encontrada empiricamente por milhares de observadores y que nosotros hemos obtenido como *braquistócrona* de nuestro espacio, resultando asi una sorprendente analogia entre biologia y óptica, que seria interesante profundizar más.

7. Aplicaciones a la biologia y a la psicofisica. Nueva curva de crecimiento. Finalmente, si además de exigir que la *distancia* sea independiente de las unidades de medida, admitimos que la velocidad de crecimiento v es funcion de la elasticidad E y por tanto, independiente del cambio de unidades y adoptamos la forma mas sencilla $v=E$, resulta, despues de integrada la correspondiente ecuacion de EULER:

$$y = \frac{ax^k}{1 + bx^k} \tag{13}$$

cujo gráfico es en determinados casos muy parecido al de la curva logistica.

La ecuacion (13) que proponemos como curva de crecimiento no figura en la lista exhaustiva de curvas de crecimiento dada por L. G. M. BAAS BECKING («On the analysis of sigmoid curves», *Acta Biotheoretica,* vol. VIII. Parts I/II).

Podemos generalizar ahora las conocidas curvas del crecimiento heterogenico o allométrico de Huxley y Teissier.

Pues si suponemos que ademas de (13) tenemos otra ecuacion del mesmo tipo

$$z = \frac{a_1 x^{k_1}}{1 + b_1 x^{k_1}} \tag{14}$$

— en donde x representa el tiempo fisico — y eliminamos entre (13) y (14) el tiempo x, nos resulta

$$y = \frac{az^m}{(a_1 - b_1 z)^m + bz^m} \tag{15}$$

que llamamos *curva generalizada* del *crecimiento allométrico* ó heterogónico y que permite explicar los diversos fenómenos del crecimiento enantrométrico hasta ahora inexplicables.

Para subrayar su interés, recuerdense las palabras del sabio biólogo francés G. Teissier:

«Il n'existe donc pas de loi d'allométrie généralisée, la seule généralisation actuellement possible consistant à representer les croissances complexes par plusieurs arcs de courbes puissances que separent des points anguleux plus ou moins nettement marqués» [1].

Para terminar, observemos que si calculamos la distancia geodésica entre dos puntos $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ teniendo en cuenta las fórmulas (5) y (8) resulta

$$d\,(A\,,B) = \sqrt{m}\,L\,\frac{X_2}{X_1} \tag{16}$$

Lo que nos dice, recordando la conocida ley psicofisica de Weber-Fechner, que la distancia entre los dos puntos significa, en este caso, la intensidad de la sensacion.

[1] G. Teissier: Les lois quantitatives de la croissance. Paris. *Actualités Scientifiques Hermann,* 1937, n.º 455, pg. 31.

Inégalités

par **Jean Aczél**

III

Solutions des problèmes et des exercices de la partie II

Problème 6. Etant donnés x_1 et x_2, sur la corde AB (fig. 8) le point d'abscisse $q_1 x_1 + q_2 x_2$ a pour ordonnée $q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$; sur la courbe $y = f(x)$, le point

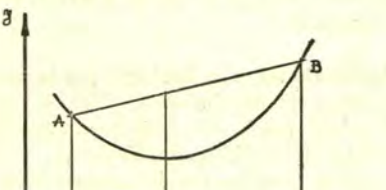


Fig. 8

ayant même abscisse que le précédent, a pour ordonnée $f(q_1 x_1 + q_2 x_2)$. La corde laisse l'arc $\widehat{AB}$ au-dessous d'elle si et seulement si (2) est satisfaite.

Problème 7. Par

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \leqslant q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

pour les fonctions convexes au sens large, par $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) > q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ pour les fonctions concaves, et par $f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geqslant q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$ pour les fonctions concaves au sens large.

Problème 8. Poser $q_1 = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2}$ et $q_2 = \dfrac{p_2}{p_1 + p_2}$.

Problème 9. On a

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = a\,(q_1 x_1 + q_2 x_2) + b = q_1 (ax_1 + b) + q_2 (ax_2 + b) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2),$$

puisque $q_1 + q_2 = 1$.

Problème 10. La fonction $f(x) = 1/x$ est concave pour $x < 0$, et convexe pour $x > 0$. En effet, on a la relation

$$(q_1 x_1 + q_2 x_2)\left(\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}\right) = q_1^2 + q_1 q_2 \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + q_2^2 > q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2 = (q_1 + q_2)^2 = 1$$

(puisque $x + 1/x > 2$, cf. l'*Introduction*), donc pour $x_1, x_2 > 0$ (cf. Problème 1),

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} < q_1/x_1 + q_2/x_2 = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2), \tag{12}$$

et pour $x_1, x_2 < 0$,

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} > q_1/x_1 + q_2/x_2 = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2).$$

La fonction $f(x)=x^2$ est convexe car, d'après (1),

$$(13)\quad f(q_1x_1+q_2x_2)=(q_1x_1+q_2x_2)^2=q_1^2x_1^2+ \\ +2q_1q_2x_1x_2+q_2^2x_2^2<q_1^2x_1^2+q_1q_2x_1^2+q_1q_2x_2^2+ \\ +q_2^2x_2^2=(q_1+q_2)\,q_1x_1^2+(q_1+q_2)\,q_2x_2^2= \\ =q_1x_1^2+q_2x_2^2=q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

La fonction $f(x)=+\sqrt{x}$ est concave car, de la relation suivante, conséquence immédiate de (1),

$$(q_1\sqrt{x_1}+q_2\sqrt{x_2})^2=q_1^2x_1+2q_1q_2\sqrt{x_1x_2}+ \\ +q_2x_2^2<q_1^2x_1+q_1q_2x_1+q_1q_2x_2+q_2x_2^2= \\ =(q_1+q_2)\,q_1x_1+(q_1+q_2)\,q_2x_2=q_1x_1+q_2x_2$$

on déduit que

$$f(q_1x_1+q_2x_2)=+\sqrt{q_1x_1+q_2x_2}>q_1\sqrt{x_1}+ \\ +q_2\sqrt{x_2}=q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

Problème 11. En posant $q_1=p_1/(p_1+p_2)$, $q_2=$ $=p_2/(p_1+p_2)$, on a $q_1+q_2=1$, et les inégalités à démontrer se transforment en

$$\frac{1}{q_1/x_1+q_2/x_2}<q_1x_1+q_2x_2<\sqrt{q_1x_1^2+q_2x_2^2}.$$

Or ces inégalités (qui expriment précisément le fait que $y=1/x$ est convexe pour $x>0$ et que $y=x^2$ est convexe) ont été démontrées au cours du problème précédent (cf. (12) et (13)).

Exercice 6. Désignons par a et b les côtés du rectangle, par $K=2a+2b$ son périmètre et par $A=ab$ son aire. On a $d=\sqrt{a^2+b^2}$.

a) On a, d'après la seconde inégalité du problème précédent (en y posant $q_1=q_2=1/2$): $(a+b)/2\leqslant$ $\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)/2}$, c'est-à-dire $K/4\leqslant d/\sqrt{2}$, l'égalité n'ayant lieu que si $a=b$. C'est donc le carré qui a le plus grand périmètre.

b) On a d'après (1) $ab=\sqrt{a^2b^2}\leqslant(a^2+b^2)/2$, c'est-à-dire $A\leqslant d^2/2$, l'égalité n'ayant lieu que si $a=b$. C'est donc encore le carré qui a la plus grande aire.

Exercice 7. En conservant les notations de l'exercice précédent, on a $K/4\leqslant d/\sqrt{2}$ resp. $A\leqslant d^2/2$, où cette fois K resp. A sont fixés. d est minimum quand $a=b$; c'est donc encore pour le carré que ce minimum est réalisé.

Problème 12. La fonction $y=a^x$ est convexe, la fonction $y={}^a\log x$ est concave (pour $x>0$), car d'après (1) on a les relations

$$a^{(x_1+x_2)/2}=\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}<(a^{x_1}+a^{x_2})/2,$$

$$\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\log\sqrt{x_1x_2}=\frac{1}{2}(\log x_1+\log x_2).$$

Problème 13. D'après le problème précédent, la fonction $\log x$ est concave, d'où, en vertu de l'inégalité de Jensen, il vient que

$$\log(q_1x_1+q_2x_2)>q_1\log x_1+q_2\log x_2=\log x_1^{q_1}x_2^{q_2},$$

c'est-à-dire $x_1^{q_1}x_2^{q_2}<q_1x_1+q_2x_2$, pour $x_1\neq x_2$. L'inégalité $1/(q_1/x_1+q_2/x_2)<x_1^{q_1}x_2^{q_2}$ résulte de ceci comme dans la démonstration du problème 2.

Problème 14. La fonction $y=(1+h)^x$ est convexe (cf. Problème 12) et la droite $y=1+hx$ rencontre la courbe $y=(1+h)^x$ aux points d'abscisses $x=0$ et $x=1$. (Cf. la définition d'une fonction convexe au nº 1 et la remarque qui la suit).

Exercice 8. Posons $a^r=x_1$, $b^s=x_2$, $1/r=q_1$, $1/s=q_2$. On a d'après (4) $ab=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\leqslant q_1x_1+q_2x_2=a^r/r+b^s/s$.

Exercice 9. Posons $x_1=a/2, x_2=b, q_1\;\;2/3, q_2=1/3$. On a d'après (4)

$$a^2b=4x_1^2x_2=4\,(x_1^{2/3}x_2^{1/3})^3\leqslant \\ \leqslant 4\left(\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)^3=4\left(\frac{a+b}{3}\right)^3.$$

Problème 15. On a

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2},$$

donc, puisque $0<\cos[(x_1-x_2)/2]<1$ si $0<x_1-x_2<\pi$, la fonction $\sin x$ est concave où elle est positive, c'est-à-dire pour $2n\pi<x<(2n+1)\pi\;(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ et convexe où elle est négative, c'est-à-dire pour $2(n-1)\pi<x<2n\pi\;\;(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. De même, il résulte de la relation

$$\frac{\cos x_1+\cos x_2}{2}=\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$$

que la fonction $\cos x$ est concave pour $(2n-1/2)\pi<$ $<x<(2n+1/2)\pi$ et convexe pour $(2n-3/2)\pi<x<$ $<(2n-1/2)\pi$, $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

Problème 16. *a*) En utilisant la relation $x+1/x>2$, on a

$$(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})^n(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})^n= \\ =(x_1^{2n}+x_1^nx_2^n(x_2/x_1+x_1/x_2)+x_2^{2n})^n> \\ >(x_1^{2n}+2x_1^nx_2^n+x_2^{2n})^n=(x_1^n+x_2^n)^{2n}.$$

b) Nous démontrons l'inégalité par recurrence sur n pour $n>0$. La relation est vérifiée pour $n=1$ (cf. Problème 11). Supposons que

$$\sqrt[n-1]{(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})/2}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n/2}$$

subsiste. On a alors

$$(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})^n<2\,(x^n+x_2^n)^{n-1}.$$

En multipliant membre à membre par l'inégalité (5), on obtient

$$(x_1^n + x_2^n)^{n+1} < 2\,(x_1^{n+1} + x_2^{n+1})^n,$$

d'où résulte l'inégalité à démontrer pour $n>0$. Pour $n<0$, on ramène le problème au précédent en posant $n=-n'$ $(n'>0)$, $x_1'=1/x_1$ et $x_2'=1/x_2$.

c) Il faut d'abord démontrer l'inégalité analogue à (5):

$$(14)\qquad \frac{(q_1 x_1^n+q_2 x_2^n)^{n+1}}{(q_1 x_1^{n-1}+q_2 x_2^{n-1})^n} < \frac{(q_1 x_1^{n+1}+q_2 x_2^{n+1})^n}{(q_1 x_1^n+q_2 x_2^n)^{n-1}}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}(q_1 x_1^{n-1} + q_2 x_2^{n-1})^n\,(q_1 x_1^{n+1} + q_2 x_2^{n+1})^n &=\\ = (q_1^2 x_1^{2n} + q_1 q_2 (x_2/x_1+x_1/x_2)\, x_1^n x_2^n + q_2^2 x_2^{2n})^n &>\\ > (q_1^2 x_1^{2n} + 2q_1 q_2 x_1^n x_2^n + q_2^2 x_2^{2n})^n &=\\ = (q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{2n}.\end{aligned}$$

Or la relation a démontrer est vraie pour $n=1$ (voir Problème 11). Supposons qu'elle subsiste pour $n-1$, ce qui revient à dire que

$$(q_1 x_1^{n-1} + q_2 x_2^{n-1})^n < (q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{n-1}$$

subsiste. En multipliant membre à membre par l'inégalité (14), on obtient

$$(q_1 x_1^n + q_2 x_2^n)^{n+1} < (q_1 x_1^{n+1} + q_2 x_2^{n+1})^n,$$

d'où résulte l'inégalité à démontrer.

Problème 17. Posons $r=m/n$; soit d'abord $0<m<n$. On a, d'après le problème précédent,

$$\left(\frac{x_1^m+x_2^m}{2}\right)^{1/m} < \left(\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\right)^{1/n},$$

c'est-à-dire, en posant $x_1^n=t_1$, $x_2^n=t_2$,

$$\frac{t_1^r+t_2^r}{2} < \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^r.$$

De même, pour $n<0<m$; pour $0<n<m$, on obtient l'inégalité opposée. Pour démontrer (6) on pose $r=m/n$, $r'=m'/n'$, $x_1^{1/n}=y_1$, $x_2^{1/n}=y_2$. On a $m<m'$ et l'inégalité (6) se transforme en

$$(q_1 y_1^m + q_2 y_2^m)^{1/m} < (q_1 y_1^{m'} + q_2 y_2^{m'})^{1/m'},$$

ce qu'on a démontré au problème 16. Finalement, pour démontrer (7), il suffit, en vertu de (6), de considérer le cas où $-r=r'>0$. En posant $x_1^{r'}=y_1$ et $x_2^{r'}=y_2$, l'inégalité (7) est équivalent à

$$\frac{1}{q_1/y_1+q_2/y_2} < y_1^{q_1} y_2^{q_2} < q_1 y_1 + q_2 y_2,$$

qui n'est autre chose que la formule (4).

Problème 18. Les courbes qui représentent les fonctions $y=f(x)$ et $y=\varphi(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$ qui est la bissectrice du premier et du troisième quadrant. La proposition résulte de cette représentation géométrique.

Exercice 10. D'après (1) et l'inégalité démontrée au problème 11, on a

$$a^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2} < a^{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} = \sqrt{a^{x_1^2}\,a^{x_2^2}} < \frac{a^{x_1^2}+a^{x_2^2}}{2}.$$

Problème 19. On a

$$\begin{aligned}\chi\,(q_1 x_1 + q_2 x_2) = \varphi\,(\psi\,(q_1 x_1 + q_2 x_2)) &<\\ < \varphi\,(q_1 \psi\,(x_1) + q_2 \psi\,(x_2)) < q_1 \varphi\,(\psi\,(x_1)) &+\\ + q_2 \varphi\,(\psi\,(x_2)) = q_1 \chi\,(x_1) + q_2 \chi\,(x_2)&.\end{aligned}$$

Problème 20. Le centre de gravité des poids $p_1, p_2, \cdots, p_k$, sera le point

$$\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}, \frac{p_1y_1+p_2y_2+\cdots+p_ky_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\right).$$

On voit ceci par recurrence. En effet, si le centre de gravité des poids $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$ est

$$\left(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_{k-1} x_{k-1}}{p_1+\cdots+p_{k-1}}, \frac{p_1 y_1+\cdots+p_{k-1} y_{k-1}}{p_1+\cdots+p_{k-1}}\right),$$

alors, par exemple, l'abscisse du point en question sera, d'après la constrution indiquée,

$$\frac{(p_1+\cdots+p_{k-1})\left(\dfrac{p_1 x_1+\cdots+p_{k+1} x_{k-1}}{p_1+\cdots+p_{k-1}}\right)+p_k x_k}{(p_1+\cdots+p_{k-1})+p_k} = \\ = \frac{p_1 x_1+\cdots+p_k x_k}{p_1+\cdots+p_k}.$$

Problème 21. La démonstration se fait par récurrence, moyennant un calcul analogue à celui qui vient d'être effectué.

Problème 22. Pour $k=2$, on a démontré l'énoncé dans le texte. Pour $k>2$, on le voit par récurrence.

Problème 23. Supposons que l'énoncé est vrai pour $k=2^{j-1}$. Il subsiste alors aussi pour $k=2^j$, car

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^j}}{2^j}\right) < \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^{j-1}}}{2^{j-1}}\right)\right. &+\\ \left. + f\left(\frac{x_{2^{j-1}+1}+\cdots+x_{2^j}}{2^{j-1}}\right)\right] &<\\ < \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^{j-1}})+f(x_{2^{j-1}+1})+\cdots+f(x_{2^j})}{2^j}&.\end{aligned}$$

La démonstration s'achève comme on l'a déjà indiqué dans l'énoncé du problème.

Problème 24. Soit $p_1=\mu_1/\nu$, $p_2=\mu_2/\nu$, $\cdots$, $p_k=\mu_k/\nu$, alors on a

$$f\left(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_k x_k}{p_1+\cdots+p_k}\right) = f\left(\frac{\mu_1 x_1+\cdots+\mu_k x_k}{\mu_1+\cdots+\mu_k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{\mu_1 \text{ fois}}+\cdots+\overbrace{x_k+\cdots+x_k}^{\mu_k \text{ fois}}}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}\right) <$$

$$<\frac{\overbrace{f(x_1)+\cdots+f(x_1)}^{\mu_1 \text{ fois}}+\cdots+\overbrace{f(x_k)+\cdots+f(x_k)}^{\mu_k \text{ fois}}}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k}=$$
$$=\frac{p_1 f(x_1)+\cdots+p_k f(x_k)}{p_1+\cdots+p_k}.$$

Démonstration analogue pour les $q_1, q_2, \cdots, q_k$ rationnels.

Problème 25. Il faut démontrer que si $r<r'$, alors $(q_1 x_1^r + \cdots + q_k x_k^r)^{1/r} < (q_1 x_1^{r'} + \cdots + q^k x_k^{r'})^{1/r'}$.

Supposons que $0<r<r'$ et posons $x_1^{r'}=t_1, \cdots, x_k^{r'}=t_k$, $0<s=r/r'<1$. L'inégalité à démontrer se transforme en

$$q t_1^s + \cdots + q_k t_k^s < (q_1 t_1 + \cdots + q_k t_k)^s,$$

ce qui, d'après le problème 21, équivaut à la concavité de la fonction $y=t^s$, laquelle a été prouvée au problème 17. Le cas $r<r'<0$ se réduit au précédent en considérant les réciproques. Si maintenant $r=0<r'$, alors l'inégalité à démontrer devient

$$x_1^{q_1} \cdots x_k^{q_k} < \left(q_1 x_1^{r'} + \cdots + q_k x_k^{r'}\right)^{1/r'},$$

donc, en posant $x_1^{r'}=t_1, \cdots, x_k^{r'}=t_k$ et en prenant les logarithmes,

$$q_1 \log t_1 + \cdots + q_k \log t^k < \log(q_1 t_1 + \cdots + q_k t_k),$$

ce qui équivaut à la concavité de la fonction $\log t$ (cf. Problème 12). Démonstration analogue pour $r<0=r'$.

Problème 26. Puisque x_j est le plus grand des $x_1, \cdots, x_k$, on a pour $\rho>0$

$$(q_1 x_1^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho} \leqslant (q_1 x_j^\rho + \cdots + q_k x_j^\rho)^{1/\rho} = x_j,$$

et d'autre part

$$(q_1 x_1^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho} \geqslant (q_j x_j^\rho)^{1/\rho} = x_j \sqrt[\rho]{q_j}.$$

Or $\sqrt[\rho]{q_j} \to 1$ lorsque $\rho \to \infty$, ce que démontre que $M_\rho \to x_j$. On a de même pour $\rho<0$, en posant $x_i = \min(x_1, \cdots, x_k)$

$$x_i \leqslant (q_1 x_1^\rho + \cdots + q_k x_k^\rho)^{1/\rho} \leqslant x_i \sqrt[\rho]{q_i},$$

d'où $M_\rho \to x_i$ lorsque $\rho \to -\infty$.

Exercice 11. Soient a, b, c les côtés différents du parallélépipède rectangle, $S=2(ab+bc+ca)$ sa surface, $o=4(a+b+c)$ la somme des longueurs de ses arêtes, $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ sa diagonale et $V=abc$ son volume. On a les inégalités

$$V^{2/3}=\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca} \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3}=\frac{S}{6},$$
$$V^{1/3}=\sqrt[3]{abc} \leqslant (a+b+c)/3 = o/12,$$
$$V^{2/3}=\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2} \leqslant (a^2+b^2+c^2)/3 = d^2/3,$$
$$\frac{o}{12}=\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Tous les extrema sont donc réalisés quand $a=b=c$, ce qui est le cas d'un cube.

Exercice 12. Soient a, b, c les côtés d'un triangle, K son périmètre, A son aire. En posant $2s=a+b+c=K$ on a, d'après la formule de Héron, l'inégalité

$$A^{1/2}=\sqrt[4]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{s+(s-a)+(s-b)+(s-c)}{4}=\frac{K}{4},$$

c'est donc le triangle équilatère qui a la plus grande aire.

Exercice 13. D'après l'inégalité qui lie la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique on a

$$\frac{\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{a_1}+\cdots+\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{a_k}}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{k}{\dfrac{a_1}{a_1+\cdots+a_k}+\cdots+\dfrac{a_k}{a_1+\cdots+a_k}}=k,$$

ce qui équivaut à la première inégalité à démontrer. De même

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geqslant \frac{k}{1/a_1+\cdots+1/a_k}.$$

Exercice 14.

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_k^2}{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 15. D'après l'inégalité

$$\frac{S}{6}=\frac{1}{6}a+\frac{2}{6}\frac{b}{2}+\frac{3}{6}\frac{c}{3} \geqslant a^{1/6}\left(\frac{b}{2}\right)^{2/6}\left(\frac{c}{3}\right)^{3/6}=\sqrt[6]{\frac{ab^2c^3}{36}}.$$

les extrema en question sont réalisés si $a=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}$.

Exercice 16. La convexité de la fonction $\log(1+a^x)$ résulte de l'inégalité

$$2\log\left(1+a^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)=\log(1+2\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}+a^{x_1}a^{x_2}) \leqslant$$
$$\leqslant \log(1+a^{x_1}+a^{x_2}+a^{x_1}a^{x_2})=$$
$$=\log(1+a^{x_1})+\log(1+a^{x_2}).$$

En posant $a_1=a^{x_1}, \cdots, a_k=a^{x_k}$ on a, par la convexité de $\log(1+a^x)$,

$$\log\sqrt[k]{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}=\frac{\log(1+a^{x_1})+\cdots+\log(1+a^{x_k})}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \log\left(1+a^{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}\right)=\log\left(1+\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}\right).$$

La convexité de la fonction $\sqrt{1+x^2}$ résulte de l'inégalité

$$\left(\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}\right)^2=2+x_1^2+x_2^2+$$
$$+2\sqrt{1+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} \geqslant 2+x_1^2+x_2^2+$$
$$+2\sqrt{1+2x_1x_2+x_1^2x_2^2}=4+(x_1+x_2)^2.$$

De là il vient que

$$\sqrt{1+\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+a_1^2}+\cdots+\sqrt{1+a_k^2}}{k}$$

Exercice 17. Désignons par r le rayon du cercle, par $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ les angles au centre du polygone, par A son aire et par K son périmètre. On a, d'après la concavité de la fonction $\sin x$:

$$A=\frac{r^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\sin\varphi_i\leqslant\frac{r^2}{2}k\sin\left(\frac{\varphi_1+\cdots+\varphi_k}{k}\right)=\frac{r^2}{2}k\sin\frac{2\pi}{k},$$

$$K=2r\sum_{i=1}^{k}\sin\frac{\varphi_i}{2}\leqslant 2rk\sin\left(\frac{\varphi_1+\cdots+\varphi_k}{2k}\right)=2rk\sin\frac{\pi}{k}.$$

Les extremas sont donc réalisés pour $\varphi_1=\cdots=\varphi_k=$ $=2\pi/k$, c'est-à-dire pour le polygone régulier.

3. Autres propriétés caractérisant la convexité. Il résulte immédiatement de la définition géométrique de la convexité que si A, B et C désignent trois

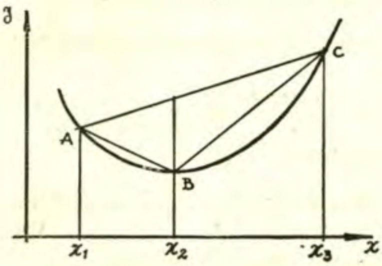


Fig. 9

points successifs quelconques sur la courbe qui représente $y=f(x)$, alors chacune des trois conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $y=f(x)$ soit convexe:

a) La corde AB est toujours au-dessous de la corde AC;

b) La corde BC est toujours au-dessous de la corde AC.

c) La corde AB a toujours une plus petite pente que la corde BC.

On peut mettre ces conditions aussi sous la forme *algébrique* suivante: Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si l'une quelconque des trois conditions suivants est satisfaite:

a) On a toujours

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},\quad (x_1<x_2<x_3).$$

b) On a toujours

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}>\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},\quad (x_1<x_2<x_3).$$

c) On a toujours

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},\quad (x_1<x_2<x_3).$$

On a évidemment des conditions analogues pour caractériser les fonctions convexes au sens large, concaves et concaves au sens large. Nous utiliserons maintenant ces propriétés pour démontrer quelques inégalités.

Problème 27. Démontrer que pour $a>0$, et pour $n=1,2,3,\ldots$

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)>(n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right).$$

Problème 28. Démontrer que la suite $\log(1+1/n)^n$ croit et que la suite $\log(1-1/n)^{-n}$ décroit avec $n\to\infty$ $(n=1,2,3,\ldots)$. En déduire que la suite $a_n=(1+1/n)^n$ croit et que la suite $b_n=(1+1/n)^{n+1}$ décroit quand $n\to\infty$. Démontrer que tout a_n est plus grand que tout b_m et que a_n et b_m sont arbitrairement voisins lorsque n et m sont suffisamment grands.

Il résulte du problème précédent qu'il existe un nombre et un seul, que nous désignerons par la lettre e, qui est plus grand que tout a_n et plus petit que tout b_m. On a donc

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}$$

e est *la base des logarithmes naturels ou népériens* et on écrira $\log_e x=ln\,x$.

Remarquons qu'on a aussi les relations

$$e=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{x+1}$$

lorsque x est une variable qui tend continûment vers $+\infty$.

Problème 29. Soit t une valeur réelle quelconque; posons $a_n(t)=(1+t/n)^n$ et $b_n=(1+t/n)^{n+1}$. Démontrer les relations

$$e^t=\lim_{n\to\infty}a_n(t)=\lim_{n\to\infty}b_n(t).$$

L'interprétation géométrique de la convexité montre qu'une fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si la tangente en un point quelconque à la courbe qui la représente, laisse la courbe *au-dessus* d'elle (fig. 10). Nous supposons pour simplifier les choses que cette tangente existe toujours; ce sera bien le cas pour les fonctions que nous considérons ici. Rappelons que la pente de la tangente en un point x n'est autre chose que la dérivée $f'(x)$ en ce point. L'intuition géométrique prouve que la fonction $f(x)$ est convexe si et seulement si $f'(x)$ est strictement croissante, ou encore si $f''(x)$ est strictement positive. On établira sans

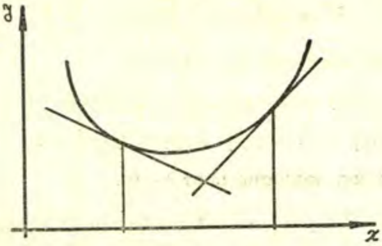


Fig. 10

peine les propositions analogues pour les fonctions convexes au sens large, concaves et concaves au sens large.

Problème 30. Démontrer l'inégalité $e^x > x+1$, qui est valable pour tout x réel. [Utiliser le fait que la dérivée de e^x est aussi e^x].

Problème 31. Déterminer la pente de la corde entre les points d'abscisses x et $x+1/n$ de la courbe $\ln x$. En déduire la valeur de la dérivée de $\ln x$. Démontrer l'inégalité $\ln x < x-1$ $(x>0)$. Démontrer que $(x^r-1)/r$ tend vers $\ln x$ lorsque $r \to 0$.

Problème 32. Nous utilisons les notations du problème 25. Démontrer que

$$M_r(x_1, x_2, \cdots, x_k) \leqslant q_1 \frac{x_1^r-1}{r} + q_2 \frac{x_2^r-1}{r} + \cdots + q_k \frac{x_k^r-1}{r}.$$

Démontrer que

$M_r(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ tend vers $M_0(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, lorsque r tend vers 0.

On peut énoncer sous une forme plus générale la caractérisation des fonctions convexes donnée au dé-

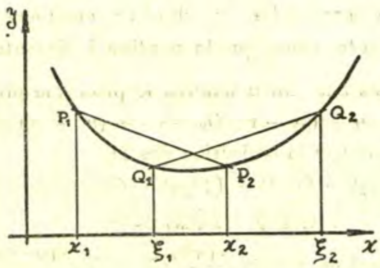


Fig. 11 a

but de ce n°. Une fonction $y=f(x)$ est convexe si et seulement si la condition suivante est satisfaite: quels que soient les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 aux abscisses x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 $(x_1 < x_2;\ \xi_1 < \xi_2)$ tels que $x_1 \leqslant \xi_1, x_2 \leqslant \xi_2$,

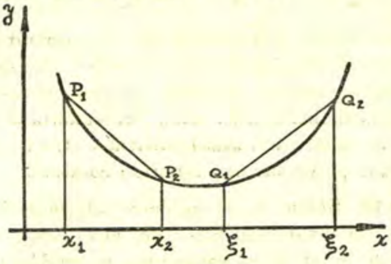


Fig. 11 b

le signe $<$ étant valable pour au moins une de ces deux relations, on a toujours

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1},$$

c'est-à-dire la pente de la corde $P_1 P_2$ est inférieure à celle de la corde $Q_1 Q_2$. De cette proposition on déduit le cas *a)* du résultat donné au début de ce n° en posant $x_1=\xi_1$, le cas *b)* en posant $x_2=\xi_2$ et le cas *c)* en posant $x_2=\xi_1$. On a évidemment des propositions analogues pour les fonctions convexes au sens large, concaves et concaves au sens large.

Problème 33. Soit $y=f(x)$ une fonction convexe. Soit $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_k$, $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_k$; posons

$$D_1 = \frac{f(v_1)-f(u_1)}{v_1-u_1}, D_2 = \frac{f(v_2)-f(u_2)}{v_2-u_2}, \cdots, D_k = \frac{f(v_k)-f(u_k)}{v_k-u_k},$$

et $U_1 = u_1, U_2 = u_1 + u_2, \cdots, U_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$, $V_1 = v_1, V_2 = v_1 + v_2, \cdots, V_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. Supposons que $U_1 < V_1, U_2 < V_2, \cdots, U_{k-1} < V_{k-1}$, mais $U_k = V_k$. Démontrer que

$$\begin{aligned}(15) \qquad & U_1(D_1-D_2) + U_2(D_2-D_3) + \cdots + \\ & + U_{k-1}(D_{k-1}-D_k) + U_k D_k < V_1(D_1-D_2) + \\ & + V_2(D_2-D_3) + \cdots + V_{k-1}(D_{k-1}-D_k) + V_k D_k.\end{aligned}$$

En déduire que

$$u_1 D_1 + u_2 D_2 + \cdots + u_k D_k < v_1 D_1 + v_2 D_2 + \cdots + v_k D_k.$$

Problème 34. Démontrer que la condition suivante est nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit convexe: Quels que soient les valeurs $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_k$, $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_k$, tels que, $u_1 < v_1$, $u_1+u_2 < v_1+v_2, \cdots, u_1+u_2+\cdots+u_{k-1} < v_1 + v_2 + \cdots + v_{k-1}$, mais $u_1+u_2+\cdots+u_k < v_1+v_2+\cdots+v_k$, on a

$$\begin{aligned}(16) \qquad & f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_k) < f(v_1) + \\ & + f(v_2) + \cdots + f(v_k).\end{aligned}$$

[Nécessaire: utiliser le problème précédent; suffisant: poser $u_1 = u_2 = \cdots = u_k = \dfrac{v_1+v_2+\cdots+v_k}{k}$].

C'étaient Hardy, Littlewood et Pólya qui ont prouvé que le critère précédent est nécessaire. La démonstration qu' on obtient à partir du Problème 33. est due à M. Ladislas Fuchs. M. J. Karamata a remarqué que le critère est aussi suffisant. On a le signe opposé dans (16) pour une fonction concave.

EXERCICE 18. Soient π_1 et π_2 deux polygones inscrits au cercle. Soient $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_l$ les côtés de π_1 et de π_2 rangés par ordre décroissant. Supposons que $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \cdots, a_l < b_l$. Désignons par A_j l'aire et par K_j le périmètre du polygone π_j (j=1,2). Démontrer que $A_1 > A_2$ et que $K_1 > K_2$.

IV

Solutions des problèmes et des exercices de la partie III.

PROBLÈME 27. Par la convexité de la fonction a^x, on a

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\frac{a^{1/n}-a^0}{1/n}>\frac{a^{1/n+1}-a^0}{1/n+1}= \\ =(n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right).$$

PROBLÈME 28. Par la concavité de la fonction $\log x$, on a

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log 1}{\frac{1}{n}}<$$

$$<\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\log 1}{\frac{1}{n+1}}=\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

et

$$\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\log 1}{-\frac{1}{n}}>$$

$$>\frac{\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\log 1}{-\frac{1}{n+1}}=\log\left(\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}$$

La croissance de a_n résulte aussitôt; celle de b_n résulte de ce que

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n-1}= \\ =\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}.$$

Il suffit de démontrer que $b_n > a_n$ pour le même indice n, ce qui résulte de

$$a_n-b_n=a_n\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right)=-\frac{a_n}{n}<0.$$

Ceci montre aussi que $a_n - b_n \to 0$.

PROBLÈME 29. Posons $n = t\xi$, on a alors

$$a_n(t)=(1+t/n)^n=(1+1/\xi)^{t\xi}\to e^t.$$

Démonstration analogue pour $b_n(t)$.

PROBLÈME 30. $y = x+1$ est l'équation de la tangente au point $x=0$ à la courbe $y=e^x$, qui est convexe.

PROBLÈME 31.

$$\frac{ln\,(x+1/n)-ln\,x}{1/n}=ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)^n\to ln\,e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x},$$

lorsque $n\to\infty$ · $y=x-1$ est l'équation de la tangente au point $x=1$ à la courbe $y=ln\,x$, qui est concave. Posons $\rho=x^r$ alors on a

$$\frac{x^r-1}{r}=\frac{\rho-1}{\frac{ln\,\rho}{ln x}}=ln\,x\left(\frac{ln\,\rho-ln\,1}{\rho-1}\right)^{-1}\to ln\,x.$$

PROBLÈME 32. D'après le problème 25 et le problème précédent, on a

$$ln\,x_1^{q_1}\cdots x_k^{q_k}\leqslant ln\sqrt[r]{q_1x_1^r+\cdots+q_kx_k^r}=$$

$$=\frac{1}{r}ln\,(q_1x_1^r+\cdots+q_kx_k^r)\leqslant\frac{q_1x_1^r+\cdots+q_kx_k^r-1}{r}=$$

$$=q_1\frac{x_1^r-1}{r}+\cdots+q_k\frac{x_k^r-1}{r}\to q_1ln\,x_1+\cdots+q_kln\,x_k=$$

$$=ln\,x_1^{q_1}\cdots x_k^{q_k}.$$

PROBLÈME 33. Par la convexité de $f(x)$, on a $D_i - D_{i+1} > 0$ pour $i=1,2,\cdot\cdot,k-1$, d'où résulte (15), d'après les hypothèses sur U_i et V_i. (15) s'écrit sous la forme

$$U_1D_1+(U_2-U_1)D_2+\ldots+(U_k-U_{k-1})D_k<V_1D_1+ \\ +(V_2-V_1)D_2+\cdots+(V_k-V_{k-1})D_k,$$

qui n'est autre chose que la relation à dèmontrer.

PROBLÈME 34. On a d'après le problème précédent

$$(u_1-v_1)D_1+(u_2-v_2)D_2+\cdots+(u_k-v_k)D_k<,0$$

c'est-à-dire, par la définition des D_i,

$$(f(u_1)-f(v_1))+(f(u_2)-f(v_2))+\cdots+ \\ +(f(u_k)-f(v_k))<0.$$

D'autre part on a $v_1 \geqslant \dfrac{v_1+v_2}{2} \geqslant \cdots \geqslant \dfrac{v_1+\cdots+v_k}{k} = u_1 = u_2 = \cdots = u_k$, donc $kf\left(\dfrac{v_1+\cdots+v_k}{k}\right) < f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_k)$.

Exercice 18. Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$ les angles au centre de π_1, par $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_l$ ceux de π_2 et posons $\psi_{l+1} = \cdots = \psi_k = 0$. On a évidemment $\sum_{i=1}^{j} \varphi_i < \sum_{i=1}^{j} \psi_i \; (j=1, 2, \cdots, k-1)$ et $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = \sum_{i=1}^{k} \psi_i$. On voit, par le problème 34 et par la concavité de la fonction $\sin x$, que

$$A_1 = \frac{r^2}{2} \sum_{i=1}^{k} \sin \varphi_i < \frac{r_2}{2} \sum_{i=1}^{k} \sin \psi_i = A_2,$$

$$K_1 = 2r \sum_{i=1}^{k} \sin \frac{\varphi_i}{2} < 2r \sum_{i=1}^{k} \sin \frac{\psi_i}{2} = K_2.$$

4. Fonctions convexes de plusieurs variables. Dans ce n°-ci nous géneraliserons la notion de convexité à des fonctions de plusieurs variables. Une fonction $z = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de n variables sera dite convexe si pour tout couple de points $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$ et $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots x_n^{(2)})$ et pour tout couple de nombres positifs q_1 et q_2, tels que $q_1 + q_2 = 1$, on a l'inégalité

$$(17) \quad F(q_1 x_1^{(1)} + q_2 x_1^{(2)}, q_1 x_2^{(1)} + q_2 x_2^{(2)}, \cdots, q_1 x_n^{(1)} + q_2 x_n^{(2)}) < \\ < q_1 F(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) + q_2 F(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}).$$

Cette inégalité est *l'inégalité de Jensen pondérée à n variables et à deux termes.* Dans le cas d'une fonction $z = F(x, y)$ de deux variables, l'inégalité (17) s'écrit

$$(17 \text{ bis}) \quad F(q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 y_1 + q_2 y_2) < \\ < q_1 F(x_1, y_1) + q_1 F(x_2, y_2).$$

La signification géométrique de cette inégalité est évidente : La surface qui représente la fonction $z = F(x, y)$ est située au-dessous d'une quelconque de ses cordes (c'est pourquoi on appelle parfois les fonctions convexes de plusieurs variables, des fonctions *sous-linéaires*). De l'inégalité (17) on déduit, de la même façon qu'au problème 21, l'inégalité pondérée de Jensen à n variables et à k termes, que le lecteur aura soin d'écrire explicitement.

Pour qu'une fonction *continue* $z = F(x, y)$ de deux variables soit convexe, il faut et il suffit que l'inégalité *symétrique* de Jensen

$$(18) \quad F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)}{2}.$$

déduite de (17) en posant $q_1 = q_2$, soit vérifiée. D'ici on déduit, comme au problème 22, qu'une fonction continue de deux variables $z = F(x, y)$ est convexe si et seulement si elle vérifie l'inégalité symétrique de Jensen à deux variables et à k termes

$$(19) \quad F\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \cdots + y_k}{k}\right) < \\ < \frac{F(x_1, y_1) + \cdots + F(x_k, y_k)}{k}.$$

Le lecteur pourra vérifier ces résultats et les expliciter pour les fonctions de n variables $z = F(x_1, x_2, \cdots x_n)$. On a évidemment des définitions et des propositions analogues pour les fonctions de plusieurs variables convexes au sens large, concaves et concaves au sens large.

Il est aussi facile à voir (cf. Problèmes 23 et 24) que si une fonction $z = F(x, y)$ de deux variables [de n variables], non nécéssairement continue, vérifie l'inégalité symétrique (18), allors elle vérifie aussi l'inégalité (19) et l'inégalité (17), mais cette dernière avec des poids *rationnels*.

Problème 35. Démontrer que la fonction $F(x, y) = \sqrt{xy}$ est concave, que la fonction

$$F(x, y) = {}^a\log(a^x + a^y)$$

est convexe, et que les fonctions $F(x, y) = x^{q_1} y^{q_2}$ $(q_1 > 0, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1)$ et $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n}$ $(q_1 > 0, q_2 > 0, \cdots, q_n > 0, q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1)$ sont concaves.

Problème 36. Démontrer l'inégalité

$$(20) \quad (x_1^{(1)} + \cdots + x_1^{(k)})^{q_1} (x_2^{(1)} + \cdots + \\ + x_2^{(k)})^{q_2} \cdots (x_n^{(1)} + \cdots + x_n^{(k)})^{q_n} \geqslant \\ \geqslant x_1^{(1)\, q_1} x_2^{(1)\, q_2} \cdots x_n^{(1)\, q_n} + \cdots + x_1^{(k)\, q_1} x_2^{(k)\, q_2} \cdots x_n^{(k)\, q_n}.$$

Soit $r > 1$ et $1/r + 1/s = 1$, démontrer l'inégalité

$$(a_1^r + a_2^r + \cdots + a_k^r)^{1/r} (b_1^s + b_2^s + \cdots + b_k^s)^{1/s} \geqslant \\ \geqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_k b_k$$

(Inégalité de Hölder). A quoi se réduit cette inégalité lorsqu'on pose $r = s$? (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Problème 37. Démontrer que la fonction $F(x, y) = \left(\frac{x^r + y^r}{2}\right)^{1/r}$ et plus généralement que la fonction $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{1/r}$ $(r > 1)$ est convexe. [Poser dans l'inégalité de Hölder d'abord $s = r/(r-1)$, $b_1 = (x_1 + x_2)^{r-1}$, $b_2 = (y_1 + y_2)^{r-1}$. Introduire ensuite $a_1 = x_1$, $a_2 = y_1$, puis $a_1 = x_2$, $a_2 = y_2$; et ajouter les deux inégalités].

Problème 38. Démontrer l'inégalité $(r > 1)$:

$$[(a_1 + b_1)^r + (a_2 + b_2)^r + \cdots + (a_k + b_k)^r]^{1/r} \leqslant \\ \leqslant (a_1^r + a_2^r + \cdots + a_k^r)^{1/r} + (b_1^r + b_2^r + \cdots + b_k^r)^{1/r}$$

(Inégalité de Minkowski).

Exercice 19. Démontrer l'inégalité

$$\frac{u_1^p}{v_1^{p-1}} + \frac{u_2^p}{v_2^{p-1}} + \cdots + \frac{u_k^p}{v_k^{p-1}} \geqslant \frac{(u_1 + u_2 + \cdots + u_k)^p}{(v_1 + v_2 + \cdots + v_k)^p}$$

Exercice 20. Démontrer l'inégalité

$$\sqrt[k]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_k + b_k)} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a} + \\ + \sqrt[k]{b_1 b_2 \cdots b_k},$$

où k est un entier positif. *(continua)*

Problemas do nosso ensino superior (II)

As definições do número real

por *Luís Neves Real*

Fundamentalmente essa exposição assenta na noção de *secções contíguas*, parente muito próxima das de *corte* e *encaixe*. No conjunto R dos números racionais, uma *secção inferior*, U, é um subconjunto próprio de R tal que: (i) com um número racional, contém todos os menores; e (ii) não possui último elemento, isto é não há em U nenhum elemento que seja maior que todos os outros. Um subconjunto próprio, V, de R, será uma *secção superior* se (i) com um número contiver todos os maiores; e (ii) se não possuir primeiro elemento, isto é, se não houver em V nenhum número que seja menor que todos os outros.

Um *par*, (U/V), *de secções contíguas de números racionais* é um conjunto ordenado cujos elementos são uma secção inferior, U, e uma secção superior, V, de R, tais que: (i) são disjuntas; e (ii) a sua união, $U \cup V$, é densa em R, isto é: entre dois quaisquer números racionais há sempre elementos de $U \cup V$.

Note-se bem que não é nestes termos que o Professor Vicente Gonçalves nos apresenta estas noções. Mas verificando-se que sobre a base — pares de secções contíguas — se pode efectivamente ordenar uma exposição coerente, na estricta linha das caracterizações ordinais dos conjuntos, fiel portanto ao que há de essencial no pensamento de Dedekind[1], mas apresentando vantagens em relação à forma como originàriamente foi exposto, procurei libertar as definições que nos dá o Professor Vicente Gonçalves de tudo o que me parece menos conforme com esse pensamento. Em primeiro lugar é conveniente chamar *conjunto* ao que o autor chama *colecção*. Não se compreende o cuidado que põe o autor em manter-nos afastados do uso habitual em matemática da palavra «conjunto» até à página 34 das suas lições, altura em que num parágrafo (!), subordinado ao capítulo *Limite de sucessões*, introduz o *conceito geral de conjunto*, conceito que lhe será necessário não apenas na teoria dos limites, mas em toda a obra, inclusivé antes de nela o ter caracterizado, como, por exemplo, nos passos a que nos estamos a referir. Por outro lado só como sacrifício, bem deslocado, ao *preciosismo* da sua linguagem, se pode perceber que usasse essa palavra numa frase que briga com a maneira de dizer corrente nos modernos livros de matemática: *as secções contíguas devem englobar*, **em seu conjunto,** *todos os números racionais, com uma só excepção possível* — quando pretendia dizer que na união das duas secções constitutivas de um *par* estão, como elementos, todos os números racionais com uma só excepção possível!! De resto entende-se hoje que a importância assumida na matemática pela álgebra dos conjuntos, não só como instrumento de análise, mas pelo seu interesse próprio de álgebra de Boole, lhe dá direito a um lugar à parte em qualquer curso de matemáticas gerais. A orientação escolhida pelo Professor Vicente Gonçalves para o seu obrigava a tratá-la logo de entrada num primeiro capítulo ou numa introdução, logrando ainda a incontestável vantagem metodológica de ficar no seu livro rigorosamente delimitada a região contestável dos fundamentos da análise matemática.

Igualmente na definição de secções contíguas substituí a condição (ii) à condição equivalente enunciada pelo Professor Vicente Gonçalves nos termos seguintes: *Podem sempre encontrar-se dois elementos, u de U e v de V satisfazendo a $v-u<\delta$, por menor que seja o número racianal e positivo δ prèviamente dado.* Êste anunciado confere desnecessàriamente à noção de *par de secções contíguas* um caracter híbrido: combinações típicas da caracterização ordinal com outras — métricas — de natureza topológica: a condição exprime, de facto, que no espaço R, metrizado com o valor absoluto da diferença de dois números racionais, tem de ser nula a distância das duas secções contíguas.

Parece-nos importante salientar que o par de secções contíguas quando aproximado do corte apresenta, do ponto de vista da teoria ordinal, a real vantagem de serem equivalentes (correspondência biúnivoca) o conjunto R e o conjunto de todos os pares (U/V), cujos elementos, U e V, não são complementares, enquanto que a cada número racional correspondem dois cortes de Dedekind. Mas quando na definição de *par de secções contíguas* recordamos o encaixe (e é o que faz o Professor Vicente Gonçalves com a sua condição (ii)) o ponto de vista do cálculo infinitesimal leva a preferir o próprio encaixe para a definição de número irracional, pois que esta se faz então à custa de *sucessões* de números racionais.

Quanto ao uso da expressão *par de secções contíguas*, ela permite, dentro desta orientação, um enunciado perfeitamente aceitável na definição de *número real*: *«um número real é um par de secções contíguas de números racionais; se as secções são complementares,*

(1) Cf. *Gazeta de Matemática*, n.º 40.

o número diz-se real irracional, se o não são o número diz-se real racional». Desta definição simples e acessível esteve muito próximo o Professor Vicente Gonçalves, que dela se afastou brusca e essencialmente ao embrenhar-se nas suas considerações sôbre dízimas, separação de valores, etc.... ; acabou por preferir mascarar uma posição outrora legitima, (ultrapassada hoje nas exposições rigorosas do assunto) com uma terminologia que obscurece e complica a forma como os tratados com mais de dez anos a ele se referem; sem que daí resultasse qualquer utilidade prática, pois, como veremos, nenhumas das definições de caracter metafísico, que abruptamente nos aparecem no desenvolvimento matemático da teoria, tem com ela qualquer relação.

Não nos diz o Professor Vicente Gonçalves por que motivo foi levado a adoptar, como base de definição de números irracionais, as *classes contíguas*. Vimos que o *corte* surgiu a Dedekind, como resultado da procura de um axioma que traduzisse a *continuidade*, sugerida pela linha recta — conjunto ordenado sem saltos nem lacunas; quanto ao encaixe é ele processo conhecido, desde a antiguidade, para avaliação aproximada dos números irracionais. Mas o Professor Vicente Gonçalves não teve a preocupação de aproximar o par de secções contíguas de qualquer problema concreto, que de qualquer modo preparasse os leitores, os seus alunos, para o aceitarem, como sua solução. Limitou-se a ir procurar sugestões ao confronto dos tipos de ordenação do conjunto de todas as dízimas infinitas e do conjunto de todos os números racionais. Mas que força de persuasão pode ter, nas pessoas a quem a obra se dirige, a *dízima infinita* se esta aí aparece sem ser relacionada com qualquer questão matemática? Tanto mais que o autor não dá de dízima infinita qualquer definição! Embora o o facto seja quasi inacreditável, a verdade é que o Professor Vicente Gonçalves vai buscar a um conjunto que não definiu, num jôgo vazio de qualquer coerência lógica e de poder de convicção, as razões que, segundo ele, *comandam* a inserção de *novos* números, por *entre* os números racionais. Na realidade — e essa será a conclusão a que adeante teremos de chegar — o que todo o parágrafo 2.º do primeiro capítulo da obra nos mostra é que, se a sua aguda intuição de analista o não engana sobre *o que sejam* números racionais ou irracionais, muito pouco cuidou de se habilitar a poder dizer-nos que coisa eles *são*.

Ao iniciar as considerações desse parágrafo, exige o autor que saibamos que um número racional admite um desenvolvimento em dízima periódica. Como se não trata de assunto que faça parte dos programas liceais, bom seria que tivesse dado, a tal propósito, as bem necessárias indicações bibliográficas. Esta falta (que é, de resto defeito geral de toda a obra) obrigou-nos naturalmente a abrir de novo o seu *Compêndio de Aritmética*. Verificamos que há dele duas edições, com a mesma data, diferindo apenas em que uma delas tem a menos que a outra precisamente o capítulo, onde o assunto vem tratado, e que tem por título: *Dízimas periódicas* Lá vimos que a dízima (periódica, claro está) aparece com base no número racional, sujeitando-o ao algoritmo de base 10. Mas sendo assim (e como poderia ser de outro modo?) não tem qualquer sentido falar de dízima não representativa de um número racional, nem falar de dízimas sem ser como o resultado do desenvolvimento dos números racionais — base única, adoptada no «Curso de Algebra Superior» para a exposição. Se é legítimo considerar, como o faz na página 5, a sucessão $\{x_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n\}$, onde x_n é o maior número com n decimais que pertence à secção inferior de um dado par de secções contíguas, já o não é passar dessa sucessão bem definida (que pode ter ou não limite — e nisto sim reside a questão primordial que interessa esclarecer para fundamentar o estudo do cálculo) para a *figura* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ representada no texto pelo símbolo (A) e a que o autor sem mais explicações chama repentinamente *dízima*, como se essa figura fôsse familiar ao leitor, como se este soubesse o que ela *é*... embora possa vislumbrar *o que seja*. No curso do Professor Vicente Gonçalves não há nenhuma indicação sobre o sentido que nós devamos atribuir ao que chama *dízima*!

Uma vez fixada esta falta, procuremos, com o objectivo de poder prosseguir neste comentário, qual poderá ser o pensamento do autor sobre o que se entende por uma *dízima*. Na edição referida do «Compêndio de Aritmética», numa nota da página 239, diz-nos o Professor Vicente Gonçalves: *Dízima infinita é a figura em que pela imaginação dispomos em ordem determinada uma infinidade de algarismos, precedidos de um número inteiro e dele separados por uma vírgula*. Partamos pois desta descrição, que nos dá a dízima como creação imaginativa, só gràficamente semelhante às conhecidas dízimas periódicas. Consideremos o conjunto $\overline{D}$ constituído por todas as dízimas e ordenemo-lo pelo critério de anterioridade adoptado pelo autor da página 4. Resulta logo um isomorfismo entre $\overline{D}$ e o conjunto $\overline{P}$ de todos os pares de secções contíguas. Não interessou porém ao Profesor Vicente Gonçalves elevar-se do conjunto dos números racionais ao conjunto $\overline{P}$. Se o tivesse feito, e uma vez que se dispôs a apoiar a *sua* creação dos números irracionais na dízima, o isomorfismo entre $\overline{D}$ e $\overline{P}$ justificaria que tomasse como definição de número real aquela que acima propuzemos — *um par de secções contíguas de números racionais.*

Justificação que se completaria invocando Dedekind e mostrando que o conjunto $\overline{P}$, como o conjunto $\overline{D}$ são ambos *contínuos*. Ficou-se porém o Professor Vicente Gonçalves apenas na comparação de $\overline{D}$ e R.

Guiado pela intuição geométrica, não confessada (aí o grande mal, pois é origem de todo o obscuro da explicação), de que o conjunto dos números racionais imaginado estendido sobre uma recta a deixa a descoberto nos pares de secções contínuas complementares e que, pelo contrário, $\overline{D}$ se adapta perfeitamente a essa recta — cada ponto desta e cada dízima correspondendo-se biunivocamente e com respeito da ordem relativa — ficou-se na tradução incompleta das diferenças entre uma régua contínua de dízimas e uma régua lacunar de números racionais. Mas não aprofundou, lògicamente, esta visão intuitiva do problema numa exposição que sugerisse aceitàvelmente a continuidade à Dedekind do conjunto ordenado das dízimas. Por isso as suas explicações comparadas com as de Dedekind e com aquelas que devemos a Bento Caraça muito deixam a desejar. Insiste sim em concluir que todo par de secções contíguas de números racionais, supostos escritos como dízimas periódicas, dá lugar em $\overline{D}$ a uma separação das dízimas em dois conjuntos, um contendo todas as dízimas correspondentes aos números racionais da secção inferior do par e outro todas aquelas que representam os números racionais da secção superior — separação essa que, ao contrário do que sucede no conjunto R, é feita sempre por uma dízima (que não pertence a nenhum daqueles conjuntos). É pois, *sem que nunca o nomeie, à continuidade* do conjunto das dízimas que pretende conduzir-nos o Professor Vicente Gonçalves. Mas para quê, uma vez que a dízima não passa duma *figura da nossa imaginação... ?!* Não se consegue atinar no livro com razões que nos permitam compreender o ter o autor passado dos pares de secções contínuas para as dízimas. Vantagens para o prosseguimento da exposição? nenhumas, pois que será a partir das secções contíguas que definirá as leis para o cálculo com os números reais.

Omisso a tal respeito o Professor Vicente Gonçalves, sem se preocupar com a confusão que esse desvio da exposição possa provocar aos seus leitores, passa convictamente a definir-nos números irracionais. Retomando figura já acima considerada, $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$, e designada pelo símbolo (A), a dízima correspondente ao par (A_1/A_2), afirma-nos: *Sendo* (A) *periódica, é representação decimal de certo número racional e esse número, que não pertence a* A_1 *nem a* A_2, *excede todos os elementos* a_1 *de* A_1 *e é excedido por todos os elementos* a_2 *de* A_2*: a separação das dízimas reflecte assim uma separação de valores.* Interrompamos a transcrição para anotar esta misteriosa palavra: «valores». Ao certo não sei o que por trás dela se oculta. Pode levar-se à conta da preocupação tantas vezes revelada pelo Professor Vicente Gonçalves de exibir um estilo literário: ela teria impedido que mais uma vez dissesse «números racionais» e aconselharia, com o mesmo significado, o termo «valores». Mas pode também ser que esta palavra traduza qualquer enquadramento filosófico da teoria dos números. A verdade é que o não revela, embora nos dê em vários pontos desta hermética página 8, sinais da sua possível existência. A ser assim, então a frase citada procuraria indicar-nos que nas dízimas, até aí consideradas meras *figuras imaginadas*, etc... se reflecte qualquer outra *realidade*. Será esta, ao fim e ao cabo, que justifica o desvio da exposição pelo parágrafo das dízimas? Mistério, que mais se adensa ao embrenharmo-nos na segunda parte do trecho que estávamos a transcrever: *Não sendo dízima periódica,* (A) *não é representação decimal de qualquer número racional, nem existe número desta espécie* (note-se que é a primeira vez que no livro encontramos esta expressão. *N. R.*) *que separe* A_1 *de* A_2*; mas subsiste a separação das dízimas e isto nos leva a ver em* (A) (Como? Porquê? Afirmação completamente arbitrária! *N. R.*) *a representação de um número de outra espécie. Êsse número superior a todos os* a_1 *de* A_1 *e inferiores a todos os* a_2 *de* A_2 *é então um número irracional.*

Antes de prosseguir recordemos os passos essenciais da exposição do Professor Vicente Gonçalves: 1.º — os números racionais dão lugar pela sua representação decimal a dízimas infinitas periódicas; 2.º — sugerem estas (e nada mais do que estas?! N. R.) a criação de *figuras da nossa imaginação* designadas por analogia (Apenas?! *N. R.*) com o nome de dízimas; 3.º — a cada par de secções contíguas de números racionais pode fazer-se corresponder uma dessas figuras — uma das dízimas; 4.º — que no conjunto $\overline{D}$, de certa maneira ordenado, produz uma separação entre as dízimas anteriores e as posteriores. 5.º — Se as duas secções do par forem separadas por um número racional, essa separação, feita por uma dízima periódica reflecte uma separação de *valores* (?!), que é realizada por um número racional; 6.º — mas no caso de serem as duas secções do par conjuntos complementares de R, e não sendo pois periódica a *dízima* que lhe podemos fazer corresponder (agora simples *figura etc...* sem qualquer significado dentro da aritmética), *então* (e apenas! *N. R.*) pelo facto de continuarem as *tais figuras imaginadas* a serem separadas umas das outras por uma delas (embora se não possa dizer que há um *valor* que separa os valores maiores dos valores menores), *somos levados* a ver nessa *figura a representação* de um *número* (Que coisa é um *número*?! *N. R.*); 7.º — que é de *outra espécie* (?!).

8.º — *É então* (?!) êste número um número irracional; 9.º — que se *declara* (sic., linha 20 da página 9) maior que todos os números racionais da secção inferior e menor do que todos os da secção superior.

É isto, quanto a mim, um encadeamento de considerações, que não tem por base nem a lógica nem a intuição. De modo que é impossível *ver* a tal separação de valores a que se vai buscar o forçoso da *existência* (levantando-se desnecessàriamente e sem o esclarecer o problema do que se entende por tal *existência*) de números de *espécie diferente da* (?) dos números racionais: os números irracionais. O Professor Vicente Gonçalves, desdenhando preocupações didáticas sem ter sequer a desculpa da procura de originalidade (que, de certo modo poderia ter logrado, fazendo uma construcão lògicamente inatacável, partindo do par de secções contíguas de números racionais, como definição de número real) chega a dar a impressão que procurou ocultar-nos, o que constantemente deve ter guiado o seu espírito e que só revela mais adeante, na página 14, sob a forma de um teorema: a recta continua identificada ao conjunto ordenado das dízimas. Como consequência desta continuidade têm limite todas as sucessões de números decimais que satisfaçam a certas condições (é o caso da sucessão $\{x_n\}$ acima considerada). Ora o conjunto de todas as dízimas infinitas (consideradas ou não como figuras da imaginação, o que para o caso nada importa) é susceptível de uma organização topológica segundo a qual esses limites existem (para a sucessão $\{x_n\}$ o seu limite é precisamente a dízima (A)). Entendo que deveria afirmar, sem subterfúgios, que é para obter êste resultado (e não em obediência àquele misterioso critério de separação de valores) que o Professor Vicente Gonçalves é obrigado a intercalar (muito à força, sem as sugestões persuasivas das exposições citadas) por entre os números racionais os números irracionais. Creio que, para o matemático Vicente Gonçalves o número irracional é uma dízima infinita não periódica. Porque o não confessou, humilde e simplesmente, desenvolvendo em seguida, sem mais delongas, todas as propriedades dos números reais que é indispensável considerar numa obra do género da sua — as algébricas do corpo ordenado, as topológicas de espaço distanciado completo? Tudo resultaria em termos simples e fàcilmente assimilável, pelos seus alunos. No cotêjo com obras estrangeiras que ao assunto se referem ficaria na companhia dos nomes de Courant, Haupt, Aumann, etc... Mas não; o Professor Vicente Gonçalves arreigado à ideia de projectar para as núvens o número real e ver nas secções contíguas a sua sombra cá na terra, chega às definições:

«Número irracional é o conceito de quantidade que decompõe em duas secções contíguas a totalidade dos números racionais. Cada número irracional excede todos os elementos da respectiva secção inferior e é excedido por todos os da secção superior. Os números irracionais que acabamos de definir e os números racionais já conhecidos têm a designação geral de números reais.»

No primeiro período da transcrição anterior inclui-se uma noção metafísica — o conceito de quantidade — a confirmar que relega o Professor Vicente Gonçalves para a filosofia o esclarecimento do problema. Mas não a analisando, deixa-nos a convicção, de que nada lhe serve o seu trabalho com os números irracionais, antes aparece incòmodamente a dar aspectos de círculo vicioso às definições adoptadas: por um lado, parte-se das secções contíguas complementares à procura da noção do número irracional, mas, por outro diz-se que é êste que *decompõe em duas secções contíguas a totalidade dos números racionais*... O segundo período dá-nos a ordenação do número irracional entre os números racionais, considerando-os a todos como elementos de um mesmo conjunto ordenado. E como não acha literàriamente aceitável repetir expressões, diz agora *excede* (de excesso ou diferença — termo da Aritmética) onde antes dizia *maior*, e *é excedido* onde dizia *menor*. Tenho dúvidas sôbre o bom gosto literário de tal redacção, mas tenho a certeza dos seus inconvenientes do ponto de vista didático; matemàticamente é imprópria. No terceiro período coloca num mesmo plano — o dos números reais — aos números racionais e irracionais. Não conseguindo, ou não se preocupando com subordinar as exposições correntes nos antigos livros de análise às distinções logísticas, o Professor Vicente Gonçalves coloca-se (êle tão escrupuloso no seu Compêndio de Aritmética!) em conflito consigo mesmo: o número real, é tanto uma *relação* (quando racional) como um *conceito de quantidade* (quando irracional)!

Quere parecer-me que o Professor Vicente Gonçalves se comporta em relação aos números irracionais de três formas diversas: (*i*) como analista e investigador, considera-o uma dízima infinita não periódica; (*ii*) como autor do «Curso de Algebra Superior», um par de secções contíguas e complementares de números racionais; e (*iii*) como elemento de destaque do do Mundo Culto na nossa terra, *um conceito de quantidade*, *que separa*, *etc.*... Não conseguiu o Professor Vicente Gonçalves na obra que estamos comentando, fazer a necessária coordenação das três concepções. Pelo contrário é pela força de uma afirmação inesperada que a uma delas dá a primazia. Mas não foi nem o *analista* nem o *autor da obra* quem ousou fazer prevalecer nesta as suas legítimas convicções, preciosos e necessários instrumentos de prossecução do seu trabalho. Só o homem culto foi capaz de afirmar (e em *tipo* destacado) a sua certeza; a ele se subordinou o analista, que terá de contentar-se com saber que um número real é representável por uma dízima; e também ao obreiro de centenas de páginas de matemática há-de bastar saber que o número irracional gosa da propriedade de *poder ser dado pelas secções que* **lhe** *são contíguas.*

A confusão do *arranjo lógico* das três definições vieram sobrepor-se todos os inconvenientes, todos os perigos de um insistente preciosismo da sua linguagem. Atente-se nos dois períodos seguintes:

«Todo o número real se supõe dado pelas secções que *lhe* são contíguas.»

«A cada par de secções contíguas A_1 e A_2, graças ao conceito de número irracional, fica a corresponder em todos os casos um número real que designaremos por a.»

Pela primeira destas transcrições, se quero designar um número real, dou-o pelas secções que *lhe* (a ele, número real preexistente) são contíguas. Mas pela segunda, sempre que tenha um par de secções contíguas, *há* (que significa este *há*?) um número real que lhe corresponde. Se pergunto:

— Mas que número real? — designar-mo-ão pelo próprio par de secções contíguas: número real e par de secções contíguas ficam assim identificados.

Se se pretende desviar a questão, nomeando o número real por intermédio de uma certa dízima, dizendo-se que o número real a que nos referimos é aquele que certa dízima representa, notar-se-à que o algoritmo que permite encontrar para um certo número real a dízima correspondente, não parte do «conceito de quantidade que ele é» mas das próprias secções contíguas. O ciclo fecha-se de novo; na verdade dele se não pode sair e uma exposição desta natureza toma forçosamente aspetos de circulo vicioso.

Temos de apontar um outro exemplo de descuido do autor ao definir-nos novos conceitos: «*O número real* a *que corresponde ao par de secções contíguas* A_1 *e* A_2 *é como que o fecho comum de* A_1 *e* A_2*: introduzido em A ficaria sendo o maior elemento; em A o menor*». Quem seguir a exposição do Professor Vicente Gonçalves, terá de recorrer a este período para ver nele a definição do que o autor continuará chamando *fecho de uma secção.* É claro que é inadmissível dizer-se «como que» numa definição. Mas infelizmente há aqui muito peor e quase inacreditável! Refiro-me aquela operação (!) de *introduzir* um número numa secção, que é um conjunto de elementos de que o tal número não faz parte!! O Professor Vicente Gonçalves, inexorável examinador que é, não admitiria nunca a um aluno seu uma sombra do atrevimento de linguagem que neste passo a si mesmo permitiu. Na realidade julgo que o rigor e o cuidado em não deixar ideias confusas aos leitores, (que pela primeira vez contactam, através da sua obra, com as matemáticas superiores) exigiria termos análogos aos seguintes:

«Consideremos duas secções A_1 e A_2 e o número real a que elas representam; «ao conjunto formado pela união do conjunto A_1 e do conjunto cujo único elemento é o número a ordenemo-lo de acordo com as relações de ordem dos números racionais e com as convenções de ordenação adoptadas na própria definição de número real: a é o último elemento desse conjunto união. Procedendo de simétrica forma para com A_2 e a, chega-se a um outro conjunto de que é a o primeiro elemento.»

São afinal estas circunstâncias — o de ser primeiro elemento num conjunto e último no outro — que levam o Professor Vicente Gonçalves a considerar *a como que um fecho comum* de A_1 e A_2. Não seriam antes as de ele ser o supremo de A_1 e o infimo de A_2 ou o limite comum desses dois conjuntos que valeria a pena salientar? Além de que a expressão *fecho de um conjunto* possui, na literatura matemática nacional, um significado consagrado por diversos e valiosos trabalhos originais de António Monteiro, Hugo Ribeiro e Pereira Gomes. O Professor Vicente Gonçalves sabe que esse é o significado da palavra *fecho* na maioria das publicações e colóquios dos Centros de Estudos Matemáticos de Lisboa e Porto e nos Cadernos de Análise geral da Junta de Investigação Matemática. É um facto e, quer se aceite quer não, é um facto consumado. Respeitá-lo é respeitar a insistência do labor de um grupo de matemáticos que periòdicamente e em circunstâncias ou pouco favoráveis ou nìtidamente adversas lembram ao estrangeiro que existe em Portugal actividade científica criadora.

Ora em relação a esse significado, tanto o conjunto A_1 como o conjunto A_2, (subconjuntos do espaço R dos números racionais, com a sua topologia habitual, à base da métrica universalmente adoptada) são já conjuntos fechados. Não há nada a *introduzir-se-lhes* para os fechar!! Mergulhados no conjunto dos números reais (em absoluto rigor, por isomorfismo), então o que o Professor Vicente Gonçalves pretende que seja o fecho comum de A_1 e A_2 é apenas a intersecção dos respectivos fechos.

Acima fizemos notar como a intuição da recta estava por trás de todas as considerações feitas pelo Professor Vicente Gonçalves a propósito dos números racionais e dos números reais. E salientamos, estranhando-o, que nunca a ela se referisse no propósito de tornar admissíveis as definições adoptadas. Vamos ver como este silêncio é coroado com a demonstração de um teorema, que, sem o menor comentário, o Professor Vicente Gonçalves insere nas páginas 14 e 15: «Cada número real e positivo a é a medida de um segmento OA de Ox». É a seguinte a prova feita pelo autor: «Marque-se sobre Ox o segmento OM_1 de comprimento a_1 (número racional da secção inferior de a) e os segmentos OM_2 de comprimento a_2 (número racional da secção superior). As colecções de segmentos OM_1 e OM_2 satisfazem às condições seguintes: todo OM_1 é parte de OM_2 e há segmentos de diferença arbitràriamente pequena. Nestas condições o postulado de Cantor-Dedekind afirma que um e só um segmento extrema as duas colecções». É esta a demonstração. Nem uma palavra de esclarecimento mais; nem um comentário. Nós é que não podemos deixar de o fazer. Deixemos de lado o pecado (tão repetidamente praticado através de todo o livro) de, ainda em passo tão delicado, em redacção tão elíptica, nos arremessar com uma nova (nova no texto) palavra, sem que nos tenha explicado o seu significado matemático: *extrema*. Insistamos ante em reprovar que o autor tenha desenvolvido toda uma pretensa justificação da necessidade dos números irracionais, feitas, em última análise, à luz do postulado de Dedekind (de Cantor-Dedekind) sem que uma única vez a ele aludisse e sem portanto beneficiar de todo o seu poder sugestivo para nos fazer admitir a noção abstracta de secções contíguas. Assim ao invocar sùbitamente — como se se tratasse de coisa com que os leitores estivessem familiarizados — esse axioma, com um enunciado particularizado à estrutura da recta — conjunto ordenado de pontos — afim de estabelecer o enlace entre o contínuo da análise e o da geometria, deixando na sombra a íntima conexão do desenvolvimento dessas noções na história da matemática, desvia-se o leitor, (ou não se lhe dá conta) do facto essencial da teoria: são os cortes que caracterizam a continuidade da recta; são eles que convenientemente traduzidos numa linguagem de números nos revelam a descontinuidade do conjunto dos números racionais.

Independentemente desta restrição deve ainda observar-se que não decorre directamente do axioma de Dedekind a conclusão que interessa à demonstração do teorema. O enunciado desse axioma (enunciado que o Professor Vicente Gonçalves não dá e em relação ao qual não faz a mínima citação bibliográfica!!) podia redigir-se em termos de secções contíguas de pontos da recta, ordenados pela relação «estar à esquerda de»: *Todo par de secções contíguas de pontos da recta é separado por um único ponto da recta.*

Ora para chegar deste enunciado ao resultado necessário ao Professor Vicente Gonçalves era indispensável fazer notar que, se pela escolha de uma origem e de uma unidade, destacarmos na recta um subconjunto com o tipo de ordenação do conjunto dos números racionais, todo par de secções contíguas neste subconjunto da recta corresponde biunivocamente a um par de secções contíguas na própria recta. Não tendo dado o enunciado do axioma de Dedekind, e não tendo feito esta observação, o Professor Vicente Gonçalves não habilita os seus leitores a esclarecerem, com o texto que lhes fornece, as legítimas dúvidas que necessàriamente hão-de surgir nos seus espíritos.

É hábito em Portugal acusar toda a crítica de destrutiva, esquecendo-se que épocas há em que, infelizmente, a destruição é a única forma deixada aos homens para construir. Por boa sorte não é este o caso, pois que é possível esboçar em rápidos traços, e ao nível do que se conhece hoje sobre o assunto, uma exposição que dos números racionais conduza aos números reais. Entre várias maneiras de o fazer duas apontarei essencialmente distintas. Uma delas partirá dos pares de secções contíguas: é aquela que, uma vez que se situou aproximadamente dentro do campo das caracterizações ordinais, deveria ter seguido coerentemente o Professor Vicente Gonçalves, autor do «Curso de álgebra superior». A outra, que me parece exercício de maior interesse, do ponto de vista dos métodos do cálculo infinitesimal, dar-me-á a oportunidade de enfrentar directamente a dificuldade que originou a Dedekind as considerações que o levaram a ocupar-se e a resolver este secular problema da matemática; o objectivo imediato è construir um conjunto — um espaço dotado da noção do limite e onde se demonstre que todas as sucessões limitadas e monótonas são convergentes. Este era o caminho que esperávamos ver seguir ao matemático Vicente Gonçalves, de méritos bem justamente firmados no domínio da análise.

Porto, 31 de Dezembro de 1949. *(Continua)*

A lei de Hauber demonstrada pela Álgebra de Boole

por Maria Teodora Alves

A lei de Hauber ou lei dos conjuntos fechados [1] pode considerar-se um teorema sobre teoremas cujo enunciado é o seguinte:

«Se num teorema estabelecermos todas as hipóteses possíveis e elas conduzirem a teses distintas e cada uma excluindo todas as outras, os teoremas recíprocos deduzidos do teorema considerado são todos verdadeiros».

Vamos apresentar uma demonstração da lei de Hauber pela Álgebra de Boole.

[1] *Introduction to Logic*, Tarsky.

Seja dado o conjunto de teoremas

(1) $(H_1 \supset T_1) \cup (H_2 \supset T_2) \cup \cdots (H_n \supset T_n)$

em que se verificam simultâneamente as condições (2) e (3)

(2) $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$

e

$$(3) \quad \begin{cases} T_1 \supset \sim T_2 & \\ \dots & T_2 \supset \sim T_3 \\ \dots & \dots \\ T_1 \supset \sim T_n & T_2 \supset \sim T_n \cdots T_{n-1} \supset \sim T_n \end{cases}$$

De (3), por definição de $\supset$, vem:

$$(4) \quad \begin{cases} \sim T_1 \cup \sim T_2 & \\ \dots & \sim T_2 \cup \sim T_3 \\ \dots & \dots \\ \sim T_1 \cup \sim T_n & \sim T_2 \cup \sim T_n \cdots \sim T_{n-1} \cup \sim T_n \end{cases}$$

Por adição de (2) e (4), obtemos:

(5) $H_1 \cup \cdots \cup H_n \cup \sim T_1 \cup \cdots \cup \sim T_n$;

mas por ser

$$\left.\begin{array}{l} \sim T_1 \cup \sim T_1 \cup \cdots = \sim T_1 \\ \sim T_2 \cup \sim T_2 \cup \cdots = \sim T_2 \\ \dots \end{array}\right\} \text{idempotente}$$

(5) transforma-se em

(6) $H_1 \cup \cdots \cup H_n \cup \sim T_1 \cup \cdots \sim T_n$

onde cada um dos símbolos $\sim T_1, \cdots, \sim T_n$ figura uma só vez.

Por aplicação das propriedades comutativa e associativa, vem:

$$(\sim T_1 \cup H_1) \cup (\sim T_2 \cup H_2) \cup \cdots (\sim T_n \cup H_n)$$

ou, finalmente, por definição de $\supset$

$$(T_1 \supset H_1) \cup (T_2 \supset H_2) \cup \cdots (T_n \supset H_n).$$

Esta lei que acabamos de demonstrar pelo recurso à Álgebra de Boole, foi estabelecida por Hauber (1775-1851) antes da criação da Álgebra de Classes por Boole (*An investigation of the laws of thought* foi editada, pela primeira vez, em 1854).

Desde as ciências matemáticas elementares [1] às ciências matemáticas superiores, a lei de Hauber é da mais larga aplicação.

Os tratadistas dos diversos ramos das ciências matemáticas não têm aproveitado convenientemente as simplificações que a lei de Hauber pode introduzir nessas ciências.

J. Carnoy em *Cours de Géométrie Analytique*, Vol. I (Géométrie plane) Cap. II, números, 21, 22 e 23, estuda o lugar geométrico representado em coordenadas cartesianas pela equação

$$Ax + By + C = 0.$$

Considerando as várias hipóteses acerca dos parâmetros conclui, depois disso, que aquela equação representa, em todos os casos, uma recta.

No número seguinte do mesmo Capítulo demonstra o teorema recíproco pela consideração das diversas posições que uma recta pode tomar relativamente ao sistema de eixos coordenados.

Ora, o conhecimento da lei de Hauber torna inútil esta demonstração do teorema recíproco, o que é de grande economia por quanto na referida demonstração há que considerar as várias posições que uma recta pode tomar relativamente ao sistema de eixos e, para cada uma dessas posições, demonstrar que a recta considerada é representada por uma equação do 1.º grau.

Este mesmo autor no volume II (*Géométrie de l'espace)*, Capítulo III, n.º 41, demonstra que, em coordenadas cartesianas, a equação

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

representa um plano cuja posição relativamente aos eixos coordenados depende dos parâmetros e no número seguinte do mesmo capítulo, demonstra o teorema recíproco considerando as várias posições que um plano pode tomar relativamente aos planos coordenados.

Como já dissemos, o conhecimento da lei de Hauber permite dispensar essa demonstração.

As considerações que acabam de ser feitas podem também ser aplicadas ao *Cours de Mathématiques spéciales*, de H. Commissaire e G. Cagnac, 3.ª edição de 1947, Vol. I, pág. 274 e seguintes, para citar um tratado mais recente do que o de J. Carnoy.

Com outros tratadistas e também com outros ramos das ciências matemáticas este facto poderia ser ilustrado.

O estudo das leis da Lógica Racional pelos processos clássicos é moroso e difícil e os tratadistas das ciências matemáticas para subtrairem os seus leitores às dificuldades e morosidades desse estudo evitam recorrer a essas leis. Mas a Álgebra de Boole permite, com uma das suas numerosas aplicações, fazer o estudo das leis da Lógica Racional com facilidade, economia e elegância, e, portanto, tornar acessível, a quem se dedica ao estudo da Matemática, aquelas leis.

É certo também que só modernamente a Álgebra de Boole tem avultado em importância e começou a ser conhecida.

No notável compêndio de *Aritmética Racional* da autoria dos Srs. Drs. A. Monteiro e J. Paulo são apre-

(1) Veja-se o *Compêndio de Geometria para o 7.º ano* pelos Drs. A. Nicodemos e J. Calado.

sentadas as primeiras noções da Álgebra de Classes e a esse respeito dizem aqueles ilustres autores «... mas poucas pessoas sabem que existe uma Álgebra de Colecções (Álgebra de Boole), que é um instrumento de cálculo muito útil. Não é caso para admirar visto que a sua importância na Matemática só foi posta em evidência muito recentemente».

A Álgebra de Boole é, com efeito, um instrumento da maior utilidade não só no estudo da Lógica Racional como também em todos os ramos da Matemática.

Em *A survey of Modern Algebra*, a página 326, Birkhoff diz: «The most fundamental laws of Boolean Algebra on the reflexive, anti-symmetric, and transitive laws of inclusion. They evidently hold in any sistem for the subsets distinguished by some given property. Thus they hold for the subgroups (or the normal subgroup!) of any group, the subfields of any field, the subspaces of any linear space, and so on — even thought these do not form Boolean algebras».

É dificilmente justificável que os alunos de Matemática no 1.º ano das escolas superiores portuguesas não sejam iniciados no estudo da Álgebra de Classes com aplicação ao estabelecimento das leis gerais da Lógica Racional.

A correlação, entendimento e segurança que os alunos adquiririam no raciocínio, por um lado, e, por outro, a educação do espírito crítico, a economia do pensamento e clareza de ideias, só teriam, com isso, a ganhar.

Sobre arcos duma cónica cujos comprimentos têm um cociente constante

por **Duarte Leite**

É sabido que qualquer arco duma cónica não é rectificável: assim o comprimento dum arco de parábola depende duma função logarítmica, e de transcendentes elípticas o duma cónica centrada. Todavia é susceptível de expressão algébrica a diferença de comprimento de inúmeros arcos de uma cónica, e alem disto há uma infinidade de arcos seus rectificáveis. Indico os principais teoremas conhecidos na matéria.

Dadas duas elipses confocais, se por um ponto T da exterior forem tiradas as tangentes TP e TQ à interior, delimitando o arco PQ, demonstrou o Dr. Graves ser constante a diferença $(TP+TQ)-PQ$. Daqui advém que, tirando doutro ponto T' da elipse exterior as tangentes $T'P'$ e $T'Q'$ à interior, delimitando o arco $P'Q'$, será rectificável a diferença $PQ-P'Q'$, por igualar a diferença $(TP+TQ)-(T'P'+T'Q')$; e portanto também o será a diferença $PP'-QQ'$. Este teorema foi generalizado a duas curvas tais que a tangente em qualquer ponto da exterior faz ângulos iguais com duas tangentes tiradas à outra por esse ponto [1]. Como esta propriedade é comum a duas cónicas centradas confocais, o teorema é extensivo a duas hipérboles ou a uma elipse com uma hipérbole, contanto que satisfaçam a essa condição.

Demonstrou Mac Cullagh que, tirando do ponto T duma hipérbole as tangentes TP e TQ a uma elipse dos mesmos focos que a intersecta no ponto M, a diferença de comprimentos dos arcos PM e QM igualará a das tangentes TP e TQ [1]. Reciprocamente, se dum ponto R duma elipse forem tiradas as tangentes RS e RS' a uma hipérbole confocal, por ela intersectada no ponto M, será a diferença $SM-S'M$ igual a $RS-RS'$.

Dizem-se associados dois pontos P e Q, situados num quadrante de elipse, quando as normais neles à curva equidistam da seu centro. Considerando outro par de pontos associados P' e Q', e designando por D e D' as distâncias do centro às normais em P ou Q, e em P' ou Q', demonstra-se que a diferença dos arcos PQ e $P'Q'$, iguala a diferença das distâncias D e D' [2]. Se P' for um vértice A da elipse, o seu associado Q' será o outro vértice B no quadrante, e a diferença dos arcos AP e BQ igualará a distância comum D do centro às normais em P ou Q. Tal é o teorema de Fagnano.

Combinando-o com o do Dr. Graves deduziu Rodolfo Guimarães que há inúmeros arcos elípticos rectificáveis, para o que basta haver entre as coordenadas rectangulares dos seus extremos certa equação do 5.º grau [3]. Tirem-se efectivamente pelo ponto P e pelo vértice A duma elipse E as tangentes, que se cruzam no ponto T e por este se trace outra elipse

(1) G. Salmon, *Traité de géomètrie analytique* (*Sections coniques*), págs. 526-27 da ed. de 1870.

(1) *Op. cit.*, pág. 527.

(2) M. F. Frenet, *Recueil d'exercices de calcul infinitésimal*, págs. 372-74 da ed. de 1866.

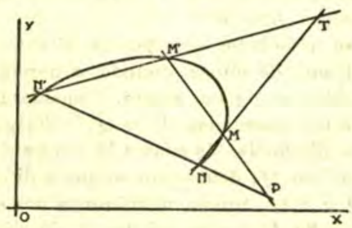
(3) *Jornal de ciências matemáticas e astronómicas*, vol. 7.º e *Semelhança e rectificação de arcos elípticos* (1877).

E' confocal com a primeira. Depois tire-se pelo vértice B do quadrante a tangente a E, que cruzará E' no ponto T', donde se tire a segunda tangente $T'M$ a E. O teorema do Dr. Graves mostra ser rectificável a diferença $AP-BM$, mas se Q for associado a P, o teorema de Fagnano também o mostra ser a diferença $AP-BQ$, e portanto digo o mesmo da diferença $BQ-BM=QM$. Adiante se verá que, alem destes arcos, há inúmeros outros numa elipse rectificáveis, independentes do sistema de pontos associados.

Há numa parábola inúmeros arcos rectificáveis, as coordenadas rectangulares de cujos extremos satisfazem a uma equação de segunda ordem. As tangentes nos extremos de um destes arcos cruzam-se noutra parábola coaxial com a primeira [1].

Deixando de parte as diferenças de arcos duma cónica susceptíveis de expressão algébrica, bem como os elípticos ou parabólicos que gozam desta propriedade, vou-me ocupar de achar numa cónica qualquer, sem recorrer a transcendentes, pares de arcos cujos comprimentos têm um quociente constante. É assunto sobre o qual nada me consta ter vindo a lume.

1. Considerando duas secantes MM' e NN' duma curva S, que se cruzam no ponto P, unam-se os pontos M e N, M' e N' em duas rectas que se cruzam no ponto T. Aplicando a este conjunto de rectas



o teorema de Menelaus, será [2] $M'N'\cdot MT\cdot NP = MN\cdot M'T\cdot N'P$, ou $\dfrac{M'N'}{MN} = \dfrac{M'T}{MT}\cdot\dfrac{M'N'-M'P}{MN-MP}$.

Supondo que as secantes MM' e NN' se aproximam indefinidamente, substituindo às cordas elementares MN e $M'N'$ os arcos ds e ds', e desprezando infinitésimos de segunda ordem, será

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{M'P}{MP}\cdot\frac{M'T}{MT}.$$

Em coordenadas rectangulares de origem O sejam x e y, x' e y', X e Y as de M, N e P; ora como os segmentos MP e $M'P$ se proporcionam às suas projecções nos eixos das coordenadas, serão

$$\frac{M'P}{MP} = \frac{X-x'}{X-x} = \frac{Y-y'}{Y-y}$$

Supondo os arcos s' e s ligados pela relação linear $s'=ks+h$, onde k e h são constantes, será $ds'=k\,ds$, e designando por t e t' as tangentes MT e $M'T$, obtém-se as seguintes igualdades

$$(1) \qquad \frac{X-x'}{X-x} = \frac{Y-y'}{Y-y} = k\frac{t}{t'}.$$

A primeira é a equação da secante MM', na qual os pares de coordenadas dos seus extremos satisfazem à equação da curva S; e em função delas estão expressas as tangentes t e t'. Movendo-se a secante ao longo de S, de modo que os seus extremos descrevam arcos ligados por aquela relação linear, ela envolverá certa curva, percorrida pelo ponto de contacto P. Para deduzir das precedentes igualdades a equação entre X e Y desta envolvida, haverão de se eliminar de (1) as coordenadas de M e de M' mas, para tanto faz-se mistér uma relação entre essas coordenadas, ou escolher arbitràriamente as dum desses pontos. No que segue usarei dos dois processos de eliminação.

Observo que é lícito supor nula a constante h sem prejuizo das conclusões. Se quisermos efectivamente achar dois arcos s' e s tais que $s'=k\cdot s$, basta igualar s à diferença doutros dois u e v, determinar u' e v' tais que $u'=ku+h$, e $v'=kv+h$; e então será $u'-v'=k(u-v)$, e portanto $ks=u'-v'=s'$.

Vou achar a equação dessa envolvida quando a curva S é uma cónica.

2. Se ela for uma parábola, com o vértice na origem das coordenadas e o parâmetro p no eixo das abcissas, serão $y^2=4px$, $y'^2=4px'$

$$\frac{y'-y}{2\sqrt{p}} = \frac{t}{\sqrt{x+p}} = \frac{t'}{\sqrt{x'+p}},$$

e as igualdades (1) tomarão esta forma

$$(2) \qquad \frac{X-x'}{X-x} = \frac{Y-y'}{Y-y} = k\sqrt{\frac{x+p}{x'+p}}.$$

---

[1] Se for $y^2=qx$ a equação da parábola, e forem y e y' as ordenadas dos extremos dum dos seus arcos, ele será rectificável quando satisfizerem a esta condição, onde n é uma constante positiva

$$2ny' = (n^2+1)\,y + (n^2-1)\sqrt{y^2+q^2}$$

As tangentes nos extremos cruzam-se na parábola de equação

$$16n^2y^2 = 8n\,(n+1)^2\,px - p^2\,(n^2-1)^2 = 0$$

[2] Na figura P está fora do segmento MM', mas fàcilmente se vê que no caso contrário subsistem esta e as seguintes igualdades.

Da primeira se deduz $y' = \dfrac{4pX - yY}{Y-y}$, e da segunda, posta na forma

$$(Y-y')^2 (Y'^2+4p^2) = k^2 (Y-y)^2 (y^2+4p^2),$$

sai em seguida a equação da envolvida

$$(3) \qquad (Y^2 - 4pX)^2 [(4pX - yY)^2 + 4p^2 (Y-y)^2] = \\ = k^2 (Y-y)^6 (y^2 + 4p^2)$$

que define uma curva do 6.º grau em Y e do 4.º em X. Tomando na parábola o arco MM', cujos extremos têm por ordenadas quaisquer valores de y e y', e tirando pelos extremos as tangentes a esta curva [1], elas intersectarão na parábola o arco $NN' = k \cdot MM'$. Esta operação apenas exige cálculos algébricos. Caso seja $k=1$, baixa ao 5.º em Y o grau da curva.

Para sumir de (3) a coordenada y oferecem-se dois processos, dos quais consiste um em torná-la nula, o que converte (3) em $(Y^2-4pX)^2 (Y^2+4X^2) = k^2 Y^6$.

Se for $k=1$, e portanto iguais os arcos a comparar, baixa ao 4.º em Y o grau desta equação, como se vê em $(X-2p) Y^4 - 4p (2X-p) XY^2 + 16p^2 X^3 = 0$.

Tirando pelos extremos dum arco PQ as tangentes a esta curva, elas intersectarão na parábola o arco $P'Q' = PQ$.

Outro processo de sumir de (3) a coordenada y consiste em estabelecer uma dependência entre as coordenadas x e x'. Exemplifico supondo

$$(4) \qquad k^2 (x+p) = n^2 (x'+p), \quad \text{ou} \quad n^2 x' = k^2 x + p (k^2 - n^2)$$

Das igualdades (2) se tiram

$$x' = (1-n) X + nx, \; y' = (1-n) Y + ny;$$

da primeira destas e de (4)

$$(5) \qquad (k^2 - n^3) x = n^2 (1-n) X - p(k^2 - n^2);$$

dambas

$$2n yY = (n-1) Y^2 + 4p (X + nx),$$

e daquí a seguinte equação da envolvida, onde por x se deverá pôr a sua expressão em (5)

$$16n^2 px Y^2 = [(n-1) Y^2 + 4p (X + nx)]^2$$

Se n for uma constante, não poderá ser a unidade, aliás do primeiro membro de (2) se concluiria $x' = x$. Com n constante, a precedente equação define uma curva do 4.º grau em Y e do 2.º em X. Duas tangentes a elas tiradas pelos extremos do arco MN cujas abcissas satisfazem à condição (5), intersectarão na parábola o arco $M'N' = k \cdot MN$. Caso seja $n=-1$, a citada condição torna-se em $x' = k^2 x - p (1-k^2)$, e a equação da envolvida em

$$4p^2 (1-k^2)^2 (X+p) = (1+k^2)^2 (4pX - Y^2) Y^2$$

[1] Por um ponto se podem tirar várias tangentes à curva, mas tendo escolhido uma delas a partir de M, a que parte de M' determina-se acompanhando o movimento da secante.

3. Se a curva S for uma elipse, com o centro na origem das coordenadas e os semi-eixos a e b ao longo de abcissas e ordenadas, serão

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 = a^2 y'^2 + b^2 x'^2,$$

$$\frac{a^2 b^2 - a^2 yy' - b^2 xx'}{ab (xy' - x'y)} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}} =$$

$$= \frac{t'}{\sqrt{a^2 - e^2 x'^2}}, \quad a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

de sorte que as igualdades (1) tomam esta forma

$$(6) \qquad \frac{X-x'}{X-x} = \frac{Y-y'}{Y-y} = k \frac{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - e^2 x'^2}}.$$

Delas se elimina y' recorrendo à primeira, entre x' e y', da qual se deduz esta equação

$$x'^2 [a^2 (Y-y)^2 + b^2 (X-x)^2] - 2a^2 (Y-y)(xY - yX) x' + \\ + a^2 (xY - yX)^2 - a^2 b^2 (X-x)^2 = 0.$$

Uma das raízes dela é x e à outra convém dar a forma seguinte

$$(7) \qquad x' = x - 2(X-x) \frac{a^2 y (Y-y) + b^2 x (X-x)}{a^2 (Y-y)^2 + b^2 (X-x)^2}.$$

Substituindo esta expressão de x' no primeiro membro das igualdades (6), obtém-se estoutra

$$(8) \qquad \frac{a^2 b^2 - a^2 Y^2 - b^2 X^2}{a^2 (Y-y)^2 + b^2 (X-x)^2} = k \frac{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}{\sqrt{a^2 - e^2 x'^2}},$$

e fazendo igual operação no segundo membro desta, chegar-se-á à equação da envolvida, que me dispenso de escrever, e define uma curva do 8.º grau em Y ou X, na qual figuram as coordenadas x e y, que haverá de eliminar. Isto feito, tomando na elipse um arco MN, e tirando pelos seus extremos duas tangentes a esta curva, elas irão intersectar na elipse o arco $M'N' = k \cdot MN$. Se for $k=1$, e daí iguais os arcos em comparação, baixará ao 6.º o grau da curva em Y e ao 7.º em X.

Para sumir de (8) as coordenadas x e y' oferecem-se dois processos, dos quais consiste um em supor $x=a$, e $y=0$, o que faz nascer MN do vértice de abcissa positiva, e converte (7) em

$$x' = a \frac{a^2 Y^2 - b^2 (X-a)^2}{a^2 Y^2 + b^2 (X-a)^2}.$$

A equação (8) desenvolve-se então da maneira seguinte

$$(a^2 b^2 - a^2 Y^2 - b^2 X^2)^2 [a^4 Y^4 + b^4 (X-a)^4 + \\ + 2a^2 (2a^2 - b^2) Y^2 (X-a)^2] = k^2 [a^2 Y^2 + b^2 (X-a)^2]^4.$$

Outro processo de sumir de (8) as coordenadas x e y consiste em relacioná-las com x' e y'. Exemplifico supondo

$$(9)\quad k\sqrt{\frac{a^2-e^2x'^2}{a^2-e^2x^2}}=n, \text{ ou } n^2x'^2=k^2x^2+(n^2-k^2)\,\frac{a^2}{e^2}.$$

Das igualdades (6) se tiram $x'=(1-n)\,X+nx$, $y'=(1-n)\,Y+ny$, da primeira destas e de (9)

$$(10)\qquad (n^4-k^2)\,x^2+2n^3\,(1-n)\,Xx+ \\ +n^2\,(1-n)^2\,X^2-\frac{a^2}{e^2}\,(k^2-n^2)=0\,,$$

e de ambas

$$(11)\quad a^2Yy+b^2Xx=\frac{n-1}{2n}\,(a^2Y^2+b^2X^2)+\frac{n+1}{2n}\,a^2b^2.$$

Daqui, fazendo $\frac{n-1}{2n}\,(a^2Y^2+b^2X^2)+\frac{n+1}{2n}\,a^2b^2=Z$ sai a equação $b^2\,(a^2\,Y^2+b^2\,X^2)\,x^2-2b^2\,XZ\,x+ + Z^2-a^4\,b^2\,Y^2=0$ e resultante dela e de (10) será uma equação do 8.º grau em qualquer das variáveis, que define a envolvida e evito desenvolver. Simplifico-a supondo $n^2=k$, o que permite deduzir de (10) a fórmula

$$Xx=\frac{n-1}{2n}\,X^2+\frac{n+1}{2n}\,\frac{a^2}{e^2}$$

e converte (11) em

$$b^2\,Y^2\left[a^2\,X^2-\left(\frac{n-1}{2n}\,X^2+\frac{n+1}{2n}\,\frac{a^2}{e^2}\right)^2\right]= \\ =a^2\,X^2\left[\frac{n-1}{2n}\,Y^2-\frac{n+1}{2n}\,\frac{1-e^2}{e^2}\,b^2\right]^2$$

que define uma curva do 6º e 4º grau, que é a envolvida. Duas tangentes a ela tiradas pelos extremos dum arco MN, cujas abcissas satisfazem à condição $x'^2=kx^2+(1-k)\,\frac{a^2}{e^2}$, intersectarão na elipse o arco $M'\,N'=k\cdot MN$.

4. Se a curva S for uma hipérbole, com o centro na origem das coordenadas e os semi-eixos a e b ao longo de abcissas e ordenadas, serão

$$b^2\,x^2-a^2\,y^2=a^2\,b^2=b^2\,x'^2-a^2\,y'^2,$$

$$\frac{a^2b^2+a^2yy'-b^2xx'}{ab\,(xy'-x'y)}=\frac{t}{\sqrt{e^2x^2-a^2}}= \\ =\frac{t'}{\sqrt{e^2x'^2-a^2}},\quad a^2\,e^2=a^2+b^2,$$

mas sendo a sua equação a mesma da elipse com a simples mudança de b^2 em $-b^2$, mantém-se para a primeira cónica os resultados adquiridos para a segunda, uma vez feita tal mudança. É pois possível numa hipérbole marcar arcos cujos comprimentos tem um cociente constante, e por meio de operações algébricas.

5. Dado numa cónica centrada um arco PQ, tirem-se as tangentes pelos seus extremos até o ponto de cruzamento T, pelo qual se faça passar outra cónica confocal com a primeira: e marque-se nesta um arco $P'\,Q'$ tal que as tangentes pelos seu extremos se cruzem na segunda. Diz o teorema do Dr. Graves que é rectificável a diferença $PQ-P'\,Q'$, mas marcando na cónica um arco $P'\,M=PQ$, essa diferença converte-se em $P'\,M-P'\,Q'=Q'\,M$. Há pois numa cónica centrada uma série infinda de arcos rectificáveis; e na elipse ela é diferente da descoberta por Rodolfo Guimarães.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Axiomática de Peano

Demonstração das propriedades da adição e multiplicação pelo método de indução

por J. da Silva Paulo

0. Introdução

Trata a Aritmética do estudo das propriedades dos números e a sua construção pode fazer-se de vários modos de acordo com a maneira como é introduzido o conceito de número, mas em todos eles ordenando devidamente as proposições que formam o corpo da teoria. Para essa ordenação deve ter-se em conta que no desenvolvimento duma teoria dedutiva, como é a Aritmética, o reconhecimento da verdade duma proposição, isto é a sua demonstração, se obtem como consequência lógica de outras, anteriormente reconhecidas verdadeiras. A demonstração faz-se assim à custa de todas ou parte das proposições que antecedem aquela cuja verdade se quer reconhecer, e, por isso, torna-se evidente que tem de existir uma ou mais proposições iniciais que, por serem as primeiras, não poderão demonstrar-se.

Aceitam-se, então, sem demonstração certas proposições, inicialmente, as quais tomam o nome indiferentemente de *axiomas*, *postulados* ou *proposições primitivas* [1].

É bem claro que tais proposições terão de satisfazer às seguintes condições:

1.º). Serem *independentes*, isto é, nenhuma delas ser consequencia lógica de todas as outras, ou o que é a mesma coisa, não ser demonstravel a partir do conjunto das restantes.

2.º). Não serem *contraditórias*, isto é, delas não se poderem deduzir lógicamente duas proposições, que sejam a negação uma da outra.

3.º). Serem suficientes para a dedução de todas as propriedades, que se deseja estudar.

Procura-se ainda, em geral, que elas sejam as mais simples possível.

A sua introdução, para o desenvolvimento da teoria, ou se faz tomando-as todas em conjunto, de início, ou à medida que se torna necessário para a construção do edifício lógico.

Mas não bastam estas proposições. É necessário ainda a introdução de conceitos que delimitam o campo de aplicação da teoria e se referem aos entes a que ela é aplicável. Esta definição faz-se tambem à custa de conceitos ou ideias anteriormente definidos e teremos, por isso, que partir de certas *ideias primitivas*, que, do mesmo modo, não se definem.

Uma teoria assim construida e desenvolvida é o que se chama uma teoria axiomática.

O conjunto de propriedades que se escolhem como axiomas para uma dada teoria é um tanto arbitrário, e assim se nos apresentam várias axiomáticas para a mesma teoria.

Na teoria dos números, pode assim começar-se por uma teoria dos números *inteiros não negativos*, que depois se ampliará sucessivamente, à dos números inteiros, à dos racionais, à dos reais e finalmente à teoria dos números complexos.

[1] Euclides, ao axiomatizar a Geometria separou as proposições iniciais em dois grupos que denominou de axiomas e postulados. Aqueles não eram senão o conjunto de propriedades próprio para caracterizar as grandesas em geral, e estes, os postulados, as proposições referentes, mais especificamente, aos entes da geometria, se bem que nos *Elementos* nada se diga acerca do que são os axiomas e os postulados. Quiz-se, depois, justificar essa distinção dizendo-se que ela se baseava na maior ou menor evidencia das proposições, o que é de apreciação muito subjectiva e por isso insuficiente. Hoje, não se faz distinção alguma, usando-se, indiferentemente qualquer das designações citadas para aquele conjunto de proposições que se aceitam sem demonstração.

É este o metodo usado por Peano na sua teoria dos números e é êle que vamos seguir para a dedução das propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros não negativos.

1. Axiomática de Peano

As ideias primitivas que se tomam na teoria dos números inteiros não negativos, de Peano, são as de:

$I_p 1$. Número inteiro [1].

$I_p 2$. Sucessor de um inteiro

$I_p 3$. Zero.

O significado destes conceitos será esclarecido com os axiomas da teoria.

Representaremos por N_0 o conjunto dos inteiros não negativos, os quais serão representados por letras minusculas $(a, b, c \cdots)$, e o zero por 0.

O sucessor de um inteiro a será representado por a^+.

O conjunto N_0 dos inteiros, bem como 0 e sucessor são então noções primitivas, que aceitamos sem definição como dados da experiência.

Entre os inteiros de N_0 existe uma relação, a que chamaremos de igualdade, simbólicamente representada por $=$, tal que dados dois inteiros quaisquer a e b duas hipóteses se podem verificar: ou a relação existe entre eles e escreveremos $a = b$ ou a relação não existe e escreveremos $a \neq b$. Esta relação é caracterizada pelas seguintes propriedades (axiomas):

Quaisquer que sejam a, b e c

$I1$. $a = a$

$I2$. Se $a = b$ então $b = a$

$I3$. Se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$.

As *proposições primitivas* da teoria são:

$P_p 1$. Zero é um número inteiro.

$P_p 2$. Todo o número inteiro a tem um único sucessor a^+ que é também um número inteiro.

$P_p 3$. Se a e b são números inteiros e $a^+ = b^+$, então $a = b$.

$P_p 4$. O sucessor de um número inteiro não pode ser zero.

$P_p 5$. (Princípio de indução finita) [2].

Se K é uma classe de inteiros que gosa das seguintes propriedades:

1.º). 0 pertence a K;

2.º). O facto de n pertencer a K implica (determina) que n^+ pertence tambem a K;

então a classe K contem todos os inteiros, isto é, coincide com N_0.

[1] Diremos muitas vezes número, número inteiro, ou inteiro por número inteiro não negativo.

[2] Existe um *principio de indução transfinita*.

O axioma $P_p 1$ diz-nos que o conjunto N_0 dos números inteiros não é vazio, pois contem pelo menos o zero.

O axioma $P_p 2$ afirma que o sucessor de um número é um número bem determinado, visto que ele é único, e podia enunciar-se sob a forma:

$$\text{Se } a=b \text{ então } a^+=b^+.$$

Daqui se conclue que $a \neq a^+$, qualquer que seja a, pois se assim não fosse seria também $a^+=(a^+)^+$ e a não teria um único sucessor.

O axioma $P_p 3$ afirma a unicidade do antecessor de um número dado, se chamarmos antecessor de a^+ ao número a.

$P_p 4$ pode enunciar-se sob outra forma: *Zero não é sucessor de algum número.* Ou então:

Se a é um número e $a=b^+$ então $a \neq 0$.

Veremos mais tarde que zero é o único elemento que não tem antecessor.

O axioma $P_p 5$ vai permitir a demonstração dum muito importante:

Teorema 1. (*Teorema de indução*). Se a uma proposição $P(x)$ se pode fazer corresponder um inteiro x de tal modo que:

1.º). Para $x=0$, $P(0)$ é verdadeira;

2.º). O facto de $P(n)$ ser verdadeira implica que $P(n^+)$ também é verdadeira;

então $P(x)$ é verdadeira para todos os inteiros de N_0.

Dem. Seja K a classe dos inteiros para os quais $P(x)$ é verdadeira. Pela hipótese do teorema tem-se:

1.º). 0 pertence a K, pois $P(0)$ é verdadeira;

2.º). Se n pertence a K então n^+ pertence também a K, pois que se $P(n)$ é verdadeira também $P(n^+)$ o é;

então K, pelo princípio de indução, contém todos os inteiros de N_0, isto é, $P(x)$ é verdadeira para todos os inteiros de N_0, c. q. d.

Este teorema fornece-nos um método de demonstração que sistemáticamente usaremos no que se segue.

A demonstração pelo *método de indução* consta então de duas partes:

1.º). Verifica-se ou demonstra-se que a proposição é verdadeira para o inteiro zero; e

2.º). Demonstra-se que se ela for verdadeira para o inteiro n o é também para o seu sucessor n^+.

Definição 1. Ao sucessor de 0 chamaremos 1 (um), isto é, $0^+=1$.

Poderiamos agora dar uma regra [1] para representação de todos os inteiros, mas para o estudo que faremos essa representação não interessa.

2. Adição

Definição 2. Se a, b e c forem números inteiros quaisquer chamaremos adição $(+)$ à operação que verifica as seguintes condições:

$A1$. $a+0=a$;

$A2$. $a+b^+=(a+b)^+$.

Demonstraremos agora pelo método de indução o seguinte:

Teorema 2. Se a e b são inteiros então $a+b$ é um inteiro.

Dem. A proposição $P(x)$ é o enunciado do teorema, e o inteiro x que vamos fazer corresponder à proposição é o inteiro b.

Então verificaremas que:

1.º). Para $b=0$ a proposição é verdadeira. De facto para $b=0$ vem

$$a+0=a \quad \text{por } A1$$

e como a é um inteiro a proposição é verdadeira.

E demonstraremos que:

2.º). Se a proposição é verdadeira para o inteiro n ela também é verdadeira para o inteiro n^+.

Suponhamos então que

$$a+n \text{ é um inteiro}$$

como $a+n^+=(a+n)^+$ por $A2$ e como o facto de $a+n$ ser inteiro implica que $(a+n)^+$ é um inteiro, por $P_p 2$, segue-se que $a+n^+$ é também um inteiro.

Então verificam-se as condições do teorema de indução, a saber:

À proposição pode fazer-se corresponder um inteiro b, e

1.º). A proposição é verdadeira para $b=0$;

2.º). O facto da proposição ser verdadeira para $b=n$ implica que ela é verdadeira para $b=n^+$; então

[1] A regra poderia ser a seguinte: os sucessores dos números seriam formados do seguinte modo: $0^+=1$, $1^+=2$, $2^+=3$, $3^+=4$, $4^+=5$, $5^+=6$, $6^+=7$, $7^+=8$, $8^+=9$, $9^+=10$, e daqui por diante do seguinte modo: o sucessor de um número em que o último algarismo da direita seja diferente de 9 é o número que se obtem substituindo êsse último algarismo pelo seu sucessor; se o último algarismo da direita for um 9, substitue-se este por 0 e o número, formado pelos restantes algarísmos à esquerda do 9, pelo seu sucessor formado pela regra antecedente.

Algarismo chama-se a qualquer dos números

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.$$

o teorema é verdadeiro qualquer que seja o inteiro b de N_0 que se adicione a outro inteiro a dado[1].

Teorema 3. (*Uniformidade*). Se $a=b$ então

$$a+c=b+c.$$

Dem. Demonstraremos o teorema por indução em c. Então verificaremos que:

1.º). O teorema é verdadeiro para $c=0$. De facto

$$a+0=b+0$$

o que implica, por $A1$, $I2$, $I3$: $a=b$, verdadeira por hipótese.

2.º). Se $a+n=b+n$ for verdadeira será

$$a+n^+=(a+n)^+ \text{ por } A2$$

e

$$b+n^+=(b+n)^+ \text{ por } A2.$$

Ora de $a+n=b+n$ deduz-se por $P_p 2$ que

$$(a+n)^+=(b+n)^+$$

e daqui e das igualdades anteriores, em vista de $I2$ e $I3$, que

$$a+n^+=b+n^+.$$

Finalmente pelo teorema de indução se conclue que o teorema 3 é verdadeiro qualquer que seja c de N_0.

Teorema 4. $0+a=a$.

Dem. Por indução em a.

1.º). Para $a=0$ vem

$$0+0=0 \text{ verdadeiro por } A1.$$

2.º). Se $0+n=n$ for verdadeira será

$$0+n^+=(0+n)^+=n^+$$

e o teorema é verdadeiro qualquer que seja a, de N_0.

Corolário. De $A1$ e Teor. 4 resulta

$$a+0=0+a=a$$

Teorema 5. $a+1=a^+$.

Dem. Como $0^+=1$ (Def. 1) é

$$a+1=a+0^+=(a+0)^+=a^+ \text{ por } A1 \text{ e } P_p 2.$$

[1] De algum modo se pode dizer que o teorema sendo verdadeiro para 0 é verdadeiro para 1, porque sendo verdadeiro para um inteiro é verdadeiro para o seguinte, e sendo verdadeiro para 1 é também verdadeiro para 2 e assim por diante para todos os inteiros. No fundo é este mecanismo que justifica o método.

Teorema 6. $1+a=a^+$.

Dem. Por indução em a.

1.º). Para $a=0$ vem

$$1+0=0^+$$

e de

$$0^+=1$$

resulta

$$1+0=1$$

e o teorema é verdadeiro por $A1$.

2.º). Se for $1+n=n^+$ verdadeiro será

$$1+n^+=(1+n)^+ \text{ por } A2$$

e como de

$$1+n=n^+$$

se deduz que

$$(1+n)^+=(n^+)^+ \text{ por } P_p 2,$$

será

$$1+n^+=(n^+)^+$$

e portanto o teorema é verdadeiro qualquer que seja a de N_0.

Corolário. Dos Teor. 5 e 6 deduz-se

$$a+1=1+a=a^+ \text{[1]}$$

Teorema 7. $a+b^+=a^++b$.

Dem. Por indução em b.

1.º). Para $b=0$ vem

$a+0^+=(a+0)^+=a^+=a^++0$ e o teorema é verdadeiro.

2.º). Se for $a+n^+=a^++n$ verdadeira, será

$$a+(n^+)^+=(a+n^+)^+ \text{ por } A2$$
$$a+(n^+)^+=(a^++n)^+ \text{ por hipótese}$$
$$a+(n^+)^+=a^++n^+ \text{ por } A2$$

o que conclue a demonstração.

Teorema 8. (*Comutatividade*). $a+b=b+a$.

Dem. Por indução em b.

1.º). Para $b=0$ temos

$$a+0=0+a$$

verdadeiro pelo corolário do Teor. 4.

2.º). Se for $a+n=n+a$ será

$$a+n^+=(a+n)^+=(n+a)^+=n+a^+$$

e como pelo teorema 7 é $n+a^+=n^++a$ vem

$$a+n^+=n^++a$$

o que conclui a demonstração.

[1] Os Teor. 5 e 6 justificam a regra que demos em nota para a representação dos inteiros, pondo-a de acordo com os conhecimentos e intuições do aluno.

TEOREMA 9. (*Associatividade*). $(a+b)+c=a+(b+c)$

Dem. Por indução em c.

1.º). Para $c=0$ vem

$$(a+b)+0=a+b$$

e

$$a+(b+0)=a+b$$

donde

$$(a+b)+0=a+(b+0)$$

e o teorema é verdadeiro.

2.º). Se for $(a+b)+n=a+(b+n)$ verdadeira será:

$$(a+b)+n^+=[(a+b)+n]^+=[a+(b+n)]^+=a+(b+n)^+$$

$$(a+b)+n^+=a+(b+n^+) \qquad \text{c. q. d.}$$

TEOREMA 10. (*Lei do Corte ou da Simplificação*). Se $a+c=b+c$ então $a=b$.

Dem. Por indução em c.

1.º). Para $c=0$ vem

$$a+0=b+0 \text{ implica } a=b$$

e o teorema é verdadeiro;

2.º). Se de $a+n=b+n$ se deduz $a=b$, então de

$$a+n^+=b+n^+$$

ou de

$$(a+n)^+=(b+n)^+$$

deduz-se

$$a+n=b+n \text{ por } P_p 3,$$

e daqui pela hipótese

$$a=b. \qquad \text{c. q. d.}$$

COROLÁRIO. Em vista do teorema 8 também

$$c+a=c+b \text{ implica } a=b.$$

TEOREMA 11. O zero é único, isto é, só existe um inteiro para o qual é

$$a+0=a$$

qualquer que seja a.

Dem. Suponhamos que existia outro inteiro u tal que $a+u=a$ qualquer que fosse a. Então seria por $I2$ e $I3$

$$a+u=a+0$$

e pelo teorema 10

$$u=0$$

qualquer que seja a.

TEOREMA 12. Se $a\neq 0$ então existe um inteiro b tal que $a=b^+$.

Dem. Como o zero é único, se a não fosse sucessor de algum inteiro seria, por $P_p 4$, (definição do zero) o próprio zero, o que é contrário à hipótese $a\neq 0$.

TEOREMA 13. Se $a\neq 0$ então $a+b\neq 0$.

Dem. Por indução em b.

1.º). Para $b=0$ vem

$$a+0\neq 0$$

por hipótese e o teorema é verdadeiro.

2.º). Se for $a+n\neq 0$ verdadeiro então $a+n^+=(a+n)^+$ é diferente de 0 porque o sucessor de um inteiro não pode ser zero, isto é,

$$a+n^+\neq 0$$

o que conclui a demonstração.

TEOREMA 14. Se $a+b=0$ então $a=0$ e $b=0$.

Dem. É $a=0$, porque se fosse $a\neq 0$ pelo teorema 13 era $a+b\neq 0$.

Então vem

$$a+b=0+b=0$$

e

$$b=0$$

TEOREMA 15. Se a equação $a+x=b$ tiver uma solução esta é única.

Dem. De facto, se houvesse outra y seria $a+y=b$ e por $I2$ e $I3$

$$a+x=a+y$$

donde

$$x=y.$$

DEFINIÇÃO 3. Se houver um inteiro $x\neq 0$ tal que

$$a+x=b$$

diremos que b é maior que a. Simbòlicamente $b>a$. Com o mesmo significado escreveremos $a<b$ que se lê a menor que b.

TEOREMA 16. $a^+>a$

Dem. Como $a^+=a+1$ e $1\neq 0$, pela Definição 3 vem

$$a^+>a.$$

De $a^+=a+1$ deduz-se ainda se for $a\neq 0$ que $a^+>1$.

TEOREMA 17. Se $a\neq 0$ então $a>0$.

Dem. De facto se $a\neq 0$ como $a=0+a$ pela Def. 3 é

$$a>0.$$

O teorema pode ainda enunciar-se:

Zero é o menor de todos os números inteiros.

Teorema 18. Se $a>b$ e $b>c$ então $a>c$.

Dem. Se $a>b$ e $b>c$ então será

$$a=b+x \text{ e } b=c+y \text{ com } x\neq 0 \text{ e } y\neq 0$$

logo

$$a=b+x=(c+y)+x=c+(y+x)$$

e como $x+y\neq 0$ (Teor. 13) é

$$a>c.$$

Teorema 19. Se $a>b$ então $a^+>b^+$.

Dem. Se $a>b$ então é $a=b+x$ com $x\neq 0$ e portanto $a^+=(b+x)^+$ com $x\neq 0$ ou

$$a^+=b+x^+=b^++x \text{ com } x\neq 0$$

e portanto

$$a^+>b^+.$$

Teorema 20. Se $a^+>b^+$ então $a>b$.

Dem. Se $a^+>b^+$ então é $a^+=b^++x=x+b^+$ com $x\neq 0$ ou $a^+=(x+b)^+$ e portanto

$$a=x+b \text{ com } x\neq 0 \text{ e } a>b.$$

Teorema 21. Se $a>b$ então $a+c>b+c$.

Dem. Por indução em c.

1.º). Para $c=0$ vem

Se $a>b$ então $a+0>b+0$ e o teorema é verificado.

2.º). Se de $a>b$ se conclue que $a+n>b+n$ então de $a>b$ conclue-se que

$$(a+c)^+>(b+c)^+$$

por Teor. 19 ou seja de $a>b$ conclue-se que

$$a+c^+>b+c^+$$

e o teorema é verdadeiro para qualquer c de N_0.

Teorema 22. Se $a+c>b+c$ então $a>b$.

Dem. Por indução em c.

Análoga à anterior.

Definição 4. Se houver um inteiro x qualquer tal que

$$a+x=b$$

diremos que b é *maior ou quando muito igual a* a. Simbólicamente $b\geqslant a$. Com o mesmo significado escreveremos $a\leqslant b$ que se lê *a menor ou quando muito igual a b*.

Observe-se que se $x=0$ então $a=b$ e se $x\neq 0$, pelo Teor. 3, $a>b$. Então $a\leqslant b$ significará também que *ou* $a=b$ *ou* $a<b$.

Teorema 23. Se $a\neq 0$ então $a\geqslant 1$.

Dem. Como $a\neq 0$ então pelo teor. 12 é $a=b^+=$ $=b+1$ e pela def. 4 $a\geqslant 1$.

Teorema 24. Se $a\geqslant b$ e $b\geqslant a$ então $a=b$.

Dem. Se $a\geqslant b$ então $a=b+x$ e se $b\geqslant a$ então $b=a+y$ de modo que é

$$a=(a+y)+x=a+(y+x)$$

ou ainda

$$a+0=a+(y+x)$$

donde se conclue por Teor. 10 ser

$$y+x=0 \text{ e pelo Teor. 14}$$
$$y=x=0.$$

Finalmente obtem-se

$$a=b+0=b$$

Teorema 25. Se $a\geqslant b$ e $b\geqslant c$ então $a\geqslant c$.

Dem. Se $a\geqslant b$ e $b\geqslant c$ é $a=b+x$ e $b=c+y$ donde $a=(c+y)+x=c+(x+y)$ e portanto

$$a\geqslant c.$$

Teorema 26. Se $a=b$ e $b>c$ então $a>c$.

Dem. Se $b>c$ então é $b=c+x$, $x\neq 0$, logo $a=c+x$ e portanto $a>c$.

Teorema 27. Se $a=b$ e $b\geqslant c$ então é $a\geqslant c$.

Dem. Análoga à anterior.

Teorema 28. Dados dois inteiros quaisquer a e b, entre eles existe uma e uma só das seguintes relações

$$a>b$$
$$a=b$$
$$a<b$$

Dem. por indução em b.

1.º). Para $b=0$ vem

se $a=0$ $a=b$

se $a\neq 0$ então $a>b$ pelo teorema 17 e o teorema é verdadeiro.

2.º). Se para $b=n$ uma e uma só das relações

$$a>n$$
$$a=n$$
$$a<n$$

se verifica, então para $b=n^+$ vem

A). Se $a>n$ então $a=n+x$ com $x\neq 0$ ou seja $x\geqslant 1$ (teor. 18) ou ainda $x=1+y$ e daqui resulta

$$a=n+(1+y)=(n+1)+y=n^++y$$

donde

$$a\geqslant n^+$$

quer dizer: se $a>n$ então ou

$$a>n^+ \text{ ou } a=n^+.$$

B). Se $a=n$ então $n^+=n+1=a+1$ e $a<n^+$.

C). Se $a < n$ então $n = a + x$, $x \neq 0$, donde $n^+ = (a+x)^+ = a + x^+$ e portanto

$$a < n^+.$$

E o teorema é verdadeiro qualquer que seja b de N_0.

Definição 5. Diremos que a está entre b e c ($b<c$) quando for $b<a$ e $a<c$, ou abreviadamente $b<a<c$.

Teorema 27*. Entre 0 e 1 não existe qualquer inteiro.

Dem. Se existisse a tal que $0<a<1$ então seria $a \neq 0$ pelo Teor. 28, e pelo Teor. 23 era $a \geqslant 1$ o que é incompatível com a hipótese $a<1$. Logo não pode existir um inteiro a entre 0 e 1.

EXERCÍCIOS:

Demonstrar que:

1). $a \not> a$ (a não é maior que a);

2). $a \geqslant 0$;

3). $a \geqslant a$;

4). Se $a>b$ e $c>d$ então $a+c>b+d$ (sugestão: empregue $a>b$ e $c=c$ e depois $b=b$ e $c>d$);

5). Se $b \geqslant a$ então $b+c \geqslant a+c$;

6). Se $b \geqslant a$ e $d \geqslant c$ então $b+d \geqslant a+c$.

3. Multiplicação

Definição 2'. Se a, b, e c forem números inteiros quaisquer, chamaremos multiplicação ($\times$) à operação que verifica as seguintes condições:

$$M1.\ a \times 0 = 0$$
$$M2.\ a \times b^+ = a \times b + a\ ^{(1)}.$$

Teorema 2'. Se a e b são inteiros então $a \times b$ é um inteiro.

Dem. Por indução em b.

1.º). Para $b=0$ vem

$$a \times 0 = 0 \quad \text{por } M1$$

e o teorema é verificado.

2.º). Se for $a \times n$ um inteiro então

$$a \times n^+ = a \cdot n + a$$

é um inteiro visto $a \cdot n$ e a serem inteiros e em virtude ainda do teor. 2.

O teorema é então verdadeiro pelo teorema de indução.

(1) Em vez do sinal $\times$ usaremos algumas vezes o sinal $\cdot$ ou escreveremos mesmo ab por $a \times b$ ou $a \cdot b$

Observemos desde já que existe um absoluto paralelismo entre as propriedades da adição e as da multiplicação. Esse paralelismo pode ser aproveitado para evitar muitas demonstrações, desde que a axiomática usada para definir as duas operações seja análoga. Ora não é o caso presente como se verifica comparando os axiomas $A1$, $A2$ e $M1$, $M2$. Em alguns casos as demonstrações de propriedades idênticas da adição e da multiplicação são semelhantes, mas é fácil verificar que não o são em absoluto pela causa apontada. E desde que as definições de adição e multiplicação sejam as de Grassman, que adoptamos, e o método de demonstração o de indução, em geral, é impossivel decalcar as demonstrações das propriedades da multiplicação a partir das da adição ou vice-versa, ainda pela razão da falta de simetria entre as fórmulas $A1$, $A2$ e $M1$, $M2$; isto, mesmo que a adição se definisse em N_0 e a multiplicação em N_1 (1).

Teorema 3'. (*Uniformidade*). Se $a=b$ então

$$a \cdot c = b \cdot c$$

Dem. Por indução em c.

1.º). Para $c=0$ vem

$$a \cdot 0 = b \cdot 0$$

e o teorema é verificado em vista de $M1$.

2.º). Se de $a=b$ se puder deduzir $a \times n = b \times n$ então desta última deduz-se

$$a \cdot n + a = b \cdot n + b \qquad \text{pelo Teor. 3}$$

ou

$$an^+ = bn^+$$

portanto

$$\text{se } a=b \text{ então } a \cdot n^+ = b \cdot n^+$$

e o teorema é verdadeiro.

Teorema 28. $0 . a = 0$.

Dem. Por indução em a.

1.º). Para $a=0$ vem

$$0 . 0 = 0 \quad \text{por } M1$$

e o teorema é verificado;

2.º). Se for $0 . n = 0$ então

$$0 . n^+ = 0 . n + 0 = 0 \qquad \text{c. q. d.}$$

Corolário. De $M1$ e Teor. 28 conclue-se que

$$a . 0 = 0 . a = 0.$$

Teorema 29. $a . 1 = a$.

Dem. Como $0^+ = 1$ substituindo em $M2$ vem

$$a . 0^+ = a . 0 + a$$

ou

$$a . 1 = a$$

(1) Costuma representar-se por N o conjunto dos números inteiros positivos.

Teorema 4'. $1 . a = a$.

Dem. Por indução em a.

1.º). Para $a=0$ vem

$$1 . 0 = 0 \text{ verdadeiro por } M1;$$

2.º). Se $1 . n = n$ for verdadeira será

$$1 . n^+ = 1 . n + 1 = n + 1 = n^+$$

e o teorema é verdadeiro.

Corolário. De Teor. 29 e Teor. 5' conclui-se que $a . 1 = 1 . a = a$.

Teorema 30. $b^+ . a = b . a + a$.

Dem. Por indução em a.

1.º). Para $a=0$ vem

$$b^+ . 0 = b . 0 + 0$$
$$0 = 0$$

e o teorema é verificado;

2.º). Se for $b^+ . n = b . n + n$ então

$$b^+ . n^+ = b^+ n + b^+ = (bn + n) + b^+ = bn + (n + b^+) =$$
$$= bn + (n + b)^+ = [bn + (n + b)]^+ = [bn + (b + n)]^+ =$$
$$= [(bn + b) + n]^+ = (bn^+ + n)^+ = bn^+ + n^+$$

isto é

$$b^+ . n^+ = bn^+ + n^+$$

e o teorema é verdadeiro.

Teorema 31. *(Distributividade).* $a . (b+c) = ab + ac$.

Dem. Por indução em c.

1.º). Para $c=0$ vem

$$a . (b + 0) = ab + a . 0$$

ou

$$ab = ab$$

e o teorema é verificado;

2.º). Se for $a . (b+n) = ab + an$ então

$$a . (b + n^+) = a . (b + n)^+ = a . (b + n) + a =$$
$$= (ab + an) + a = ab + (an + a) = ab + an^+$$

isto é

$$a . (b + n^+) = ab + an^+ \qquad \text{c. q. d.}$$

Teorema 8'. *(Comutatividade).* $a . b = b . a$.

Dem. Por indução em b.

1.º). Para $b=0$ vem

$$a . 0 = 0 . a$$

que pelo Corolário do Teor. 28 é verdadeira, e o teorema é verificado;

2.º). Se for $a . n = n . a$ então

$$a . n^+ = an + a \text{ por } M2$$
$$= na + a$$
$$= n^+ . a \text{ pelo Teor. 30.}$$

Teorema 9'. *(Associatividade).* $(a . b) . c = a . (b . c)$.

Dem. Por indução em c.

1.º). Para $c=0$ vem

$$(a . b) . 0 = a . (b . 0)$$
$$0 = a . 0$$

e o teorema é verificado;

2.º). Se for $(a . b) . n = a . (b . n)$ então

$$(a . b) . n^+ = (a . b) . n + ab = a . (b . n) + ab =$$
$$= a . [(b . n) + b] = a . (b . n^+)$$

isto é

$$(a . b) . n^+ = a . (b . n^+)$$

e o teorema é verdadeiro qualquer que seja c de N_0.

Teorema 10'. *(Lei do corte ou da simplificação).* Se $a . b = a . c$ e $a \neq 0$ então $b = c$.

Dem. Como $a \neq 0$ será $a = d^+$ pelo Teor. 12.

O enunciado do teorema é então equivalente ao seguinte: «Se $d^+ . b = d^+ . c$ então $b = c$».

Dem. Por indução em d.

1.º). Para $d=0$ vem

de $0^+ . b = 0^+ . c$ deduz-se $1 . b = 1 . c$ ou $b = c$

e o teorema é verificado;

2.º). Se, de $n^+ . b = n^+ . c$ se deduz que $b = c$, então será: de $(n^+)^+ . b = (n^+)^+ . c$ deduz-se $n^+ . b + b = n^+ . c + c$ pelo Teor. 30 e daqui por ser $n^+ . b = n^+ . c$ que $n^+ . b + b = n^+ . b + c$ e ainda pelo Teor. 10

$$b = c .$$

Quer dizer que de $(n^+)^+ . b = (n^+)^+ . c$ se deduz $b = c$ então o teorema é verdadeiro para qualquer $a \neq 0$.

Corolário. Em vista do Teor. 8' também de $b . a = c . a$ e $a \neq 0$ se deduz $b = c$.

Teorema 32. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $ab \neq 0$.

Dem. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $a = c^+$ e $b = d^+$ e teremos

$$c^+ . d^+ = c^+ . d + c^+$$

e como $c^+ \neq 0$ então, pelo Teor. 13,

$$a . b = c^+ . d + c^+ \neq 0 .$$

Teorema 33. Se $ab = 0$ e $a \neq 0$ então $b = 0$

Dem. Se $a \neq 0$ então $a = c^+$ e portanto

$$ab = c^+ . b = cb + b = 0$$

e pelo Teor. 14 é $cb = 0$ e $b = 0$.

TEOREMA 34. Se $ab=0$ então ou $a=0$ ou $b=0$.

Dem. Se for $a=0$ é $ab=0$ qualquer que seja b, pelo Teor. 28.

Se for $a \neq 0$ então é $b=0$ pelo Teor. 33.

Das duas hipóteses decorre a tese do teorema.

TEOREMA 35. Se $ab \neq 0$ então $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Dem. De facto a e b têm que ser ambos diferentes de zero porque se um qualquer deles fosse igual a zero então por $M\,1$ e Teor. 28 seria $ab=0$.

TEOREMA 14' Se $ab=1$ então $a=1$ e $b=1$.

Dem. Como $ab=1 \neq 0$ será, pelo Teor. 35 $a \neq 0$ e $b \neq 0$; logo é $a=c^+$ e $b=d^+$, e então

$$ab = c^+ d^+ = c^+ d + c^+ = 1$$

ou seja

$$(c^+ d + c)^+ = 1$$

e por ser $0^+=1$, e o sucessor de um número ser único, vem

$$c^+ d + c = 0 ;$$

finalmente pelo Teor. 14

$$c^+ d = 0 \ \text{ e } \ c = 0$$

ou

$$0^+ d = 0 \ \text{ e } \ c = 0$$

$$\mathrm{d} = 0 \ \text{ e } \ c = 0$$

e portanto

$$a = c^+ = 1$$

$$b = d^+ = 1$$

TEOREMA 15'. Se a equação $ax=b$, onde $a \neq 0$, tiver uma solução esta é única.

Dem. Se a equação tivesse outra solução y seria

$$a \cdot y = b$$

e portanto

$$ax = ay$$

donde, por Teor. 10', pois $a \neq 0$

$$x = y$$

TEOREMA 21'. Se $b > c$ e $a \neq 0$ então $ba > ca$.

Dem. Como $a \neq 0$ então é $a=d^+$. Daqui o enunciado equivalente:

«Se $b > c$ e $a = d^+$ então $bd^+ > cd^+$».

Dem. Por indução em d.

1.º). Para $d=0$ vem

de $b > c$ resulta $b \cdot 1 > c \cdot 1$ ou seja $b \cdot 0^+ > c \cdot 0^+$

e o teorema é verificado.

2.º). Se de $b > c$ resulta $b \cdot n^+ > c \cdot n^+$ então de $b > c$ resulta também, Ex. 4, pág. 21,

$$bn^+ + b > cn^+ + c$$

donde

$$b\,(n^+)^+ > c\,(n^+)^+$$

quer dizer de

$$b > c \ \text{ resulta } \ b\,(n^+)^+ > c\,(n^+)^+$$

e o teorema é verdadeiro qualquer que seja $a \neq 0$.

COROLÁRIO. Pelo Teor. 8' é também:

Se $a \neq 0$ e $b > c$ então $ab > ac$.

TEOREMA 22'. Se $a \neq 0$ e $ba > ca$ então $b > c$.

Dem. Como $a \neq 0$ é $a=d^+$, e demonstraremos o teorema por indução em d.

1.º). Para $d=0$ vem

de $b \cdot 0^+ > c \cdot 0^+$ deduz-se $b \cdot 1 > c \cdot 1$ ou $b > c$

e o teorema é verificado;

2.º). Se, de $b \cdot d^+ > c \cdot d^+$ se deduz $b > c$, também de

(A) $bd^+ + b > cd^+ + b$ se deduz $b > c$

porque de

$$bd^+ > cd^+ \ \text{ se deduz } \ bd^+ + b > cd^+ + b .$$

Por outro lado

(B) de $cd^+ + b > cd^+ + c$ deduz-se $b > c$

pelo Teor. 22.

Então de (A) e (B) deduz-se $b > c$.

Quer dizer de

$$ba^+ + b > cd^+ + b \ \text{ e } \ cd^+ + b > cd^+ + c$$

ou seja de

$$bd^+ + b > cd^+ + c \ \text{ deduz-se } \ b > c$$

e finalmente de:

$$b \cdot (d^+)^+ > c \cdot (d^+)^+ \ \text{ deduz-se } \ b > c$$

então o teorema é verdadeiro para qualquer $a \neq 0$.

Esta demonstração podia fazer-se mais simplesmente por processo análogo à do Teor. 21'.

EXERCÍCIOS:

Demonstrar:

1). Se $a \geqslant b$ e $c \geqslant d$ então $ac \geqslant bd$;

2). Se $a > b$ e $c > d$ então $ac > bd$;

3). Se $a=b \neq 0$ e $c > d$ então $ac > bd$;

4). Se $a \neq 0$ e $c \geqslant d$ então $ac \geqslant ad$;

5). Se $ac \geqslant bc$ e $c \neq 0$ então $a \geqslant \mathrm{b}$.

4. Subtracção e Divisão

A partir dos Teors. 15 e 15' é fácil fazer o estudo paralelo das propriedades da Subtracção e da Divisão, se definirmos a Subtracção em N_0 e a Divisão em N_1. Quer dizer, vamos definir a Subtracção para todos os inteiros não negativos e a Divisão para os inteiros positivos, pois a classe N_0 tem todos os elementos de N_1 mais o zero.

Definição 6. Dados a e b de N_0, se existir um número x de N_0 tal que

$$a = b + x$$

diremos que x é *a diferença entre a e b* e escreveremos

$$x = a - b$$

que se lê x igual a a menos b.

Definição 6'. Dados a e b de N_1, se existir um número x de N_1 tal que

$$a = b \, . \, x$$

diremos que x é o cociente de a *por* b e escreveremos

$$x = a : b$$

que se lê x igual a a dividido por b.

Destas definições concluem-se logo algumas propriedades destas operações, assim:

Teorema 36.

$$b + (a - b) = a$$

basta notar que

$$x = a - b \, .$$

Teorema 36'.

$$b \times (a : b) = a$$

basta notar que

$$x = a : b \, .$$

Teorema 37.

$$a - a = 0$$

Dem. Como $a = a + 0$ por $A1$, resulta da Def. 6 a tese.

Teorema 37'.

$$a : a = 1$$

Dem. Como $a = a \, . \, 1$ pelo Teor. 29, resulta da Def. 6' a tese.

Outras propriedades relacionadas com a ordem se podiam deduzir imediatamente, entre as quais, por exemplo, a seguinte:

Se $a < b$ e $a > x$ então $a - x < b - x$.

A condição para que exista x no caso da Subtracção é dada pela Def. 4, isto é, existirá a diferença $a - b$ quando for $a > b$.

Quanto à condição de existência do cociente no caso da Divisão, só se pode considerar depois do estudo da divisibilidade. Note-se porém que a relação $a \prec\!\!\!\cdot\, b$ (leia-se a divide b) define-se paralelamente à relação $a \leqslant b$, sendo a primeira definida em N_1 e a segunda em N_0. As propriedades das duas relações são análogas e o seu estudo pode fazer-se paralelamente.

Cabe aqui para terminar a demonstração dos seguintes teoremas:

Teorema 38. $a^+ - a = 1$.

Dem. Como $a^+ = a + 1$ pela Def. 6 vem a tese.

Teorema 39. Entre a e a^+ não existe qualquer inteiro.

Dem. Suponhamos que existia um inteiro x tal que $a < x < a^+$; daqui se deduz que

$$a - a < x - a < a^+ - a$$

ou

$$0 < x - a < 1$$

e como existe o inteiro $x - a$ por ser $x > a$, conclui-se que, se entre a e a^+ existisse um inteiro, então também entre 0 e 1 existiria um inteiro, o que é impossível pelo Teor. 27*.

Nota

A independência dos axiomas duma teoria pode mostrar-se do seguinte modo: constrói-se um sistema de elementos de natureza qualquer que verifiquem todos os axiomas com excepção de um.

Tal construção prova que aquele axioma, que não é válido para os elementos do sistema, é independente dos restantes axiomas que são verificados por tais elementos.

Mostremos por este processo a independência dos axiomas da igualdade: $I1$, $I2$ e $I3$. Para isso consideremos:

1.º). O sistema N_1 de todos os inteiros positivos e consideremos definida entre eles a relação «divide». Como se sabe diz-se que «a divide b» (simbòlicamente $a \prec\!\!\!\cdot\, b$) quando existe um inteiro x tal que $b = a \, . \, x$. Então para cada par ordenado de inteiros a e b, ou *a divide b* ou *a não divide b*.

Esta relação gosa das seguintes propriedades:

1). $a \prec\!\!\!\cdot\, a$ qualquer que seja a;

2). Se $a \prec\!\!\!\cdot\, b$ e $b \prec\!\!\!\cdot\, c$ então $a \prec\!\!\!\cdot\, c$;

e não gosa da propriedade simétrica, isto é, em geral

«Se a divide b, b não divide a».

Assim, neste sistema, a relação «divide», definida para cada par de elementos de N_1, mostra que $I2$ é independente de $I1$ e $I3$.

2.º). Consideremos ainda o sistema N_1 de todos os inteiros positivos e entre os seus elementos definida a relação seguinte:

«Diremos que dois inteiros a e b estão em relação se e só se $|a - b| \geq 0$ e $|a - b| < 3$ [1].

[1] O símbolo $|a - b|$ tem o significado de módulo do $(a - b)$ isto é, $a - b$ se $a \geq b$ e $b - a$ no caso contrário.

Quando a estiver em relação com b escreveremos $a \mathfrak{R} b$. Também aqui para cada par ordenado de elementos a e b, *ou* a *está em relação com* b, *ou* a *não está em relação com* b.

Esta relação gosa das propriedades:

1). $a \mathfrak{R} a$ pois que $|a-a|=0$;

2). Se $a \mathfrak{R} b$ então $b \mathfrak{R} a$, pois que $|a-b|=|b-a|$;

e não gosa, em geral, da propriedade transitiva, pois que «se $a \mathfrak{R} b$ sendo $|a-b|=2$ e $b \mathfrak{R} c$ sendo $|b-c|=2$ e além disso $a \neq c$ então a não está em relação com c porque $|a-c|=4>3$».

Este exemplo mostra a independência de $I3$.

3.º). Consideremos finalmente o sistema de todos os números primos

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11 \ldots$$

e entre os elementos do sistema definida a seguinte relação:

«Dois números primos a e b estarão em relação e escreveremos $a \mathrm{R} b$, se e só se a e b forem simultâneamente impares».

Assim dado um par ordenado de elementos a e b, ou a *está em relação com* b ou a *não está em relação com* b.

Esta relação gosa das seguintes propriedades:

1). Se $a \mathrm{R} b$ então $b \mathrm{R} a$, pois que se a e b são primos impares b e a são primos impares;

2). Se $a \mathrm{R} b$ e $b \mathrm{R} c$ então $a \mathrm{R} c$, por uma razão análoga à anterior;

e não gosa da propriedade reflexiva em geral, porque

«2 não está em relação com 2».

Fica assim demonstrado que $I1$ é independente de $I2$ e $I3$.

Os três sistemas e as relações aí definidas mostram então que no sistema de axiomas, que tomamos para caracterizar a relação de igualdade, estes são independentes.

Exemplos de sistemas que provam a independência dos Axiomas $P_p 1 - P_p 5$, de Peano, podem ver-se em *Formulário Matemático*, 2.º volume, de Peano.

O método dos coeficientes indeterminados

por ***Laureano Barros***

1. Os actuais programas do Ensino Liceal incluem alguns assuntos que ou não são tratados ou são muito mal tratados nos livros até há pouco adoptados. Pareceu-nos, portanto, que poderia ter interesse a publicação de um estudo correcto de alguns destes assuntos. E assim, julgamos de particular importância a consideração de certos pontos dos programas de Álgebra (6.º e 7.º anos) onde as ampliações a programas anteriores mais se fizeram sentir.

Nesta ordem de ideias, começaremos por fazer uma referência breve ao método dos coeficientes indeterminados, ou, mais particularmente, aos teoremas em que esse método se fundamenta.

A brevidade desta referência justifica-se pelo facto deste mesmo assunto já ter sido tratado nas páginas da *Gazeta de Matemática*: o n.º 22 publica, efectivamente, um artigo do colaborador J. J. Rodrigues dos Santos, intitulado «Estudo de algumas propriedades dos polinómios inteiros», para o qual chamamos a atenção do leitor. Neste artigo, a par daquelas propriedades elementares dos polinómios que, actualmente, também são referidas nos novos programas, trata-se com particular detalhe do método dos coeficientes indeterminados. Como se justifica então esta nossa nota? É que no teorema-base do método há, naquele artigo, um erro grave de demonstração (Nota 1) Por outro lado, o facto mais recente de em alguns cursos liceais ser repetido esse erro e em alguns outros se usar uma forma ainda mais grosseira para tratar a questão, tudo isto decidiu-nos à publicação desta nota.

Aproveitamos a oportunidade para acrescentar aos exercícios propostos por Rodrigues dos Santos, no já referido n.º 22 da *Gazeta*, alguns outros, igualmente simples, mas que poderão ter algum interesse para os estudantes que pretendem submeter-se ao exame do 3.º ciclo.

2. Como é sabido, um *polinómio de grau n em x* é do tipo $f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, onde $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ são os coeficientes. O valor de um polinómio $f_n(x)$ para $x = \alpha$ representa-se por $f_n(\alpha)$. Diz-se que um α é um *zero* ou *raiz* de $f_n(x)$ quando $f_n(\alpha) = 0$.

Um polinómio $f_n(x)$ é *identicamente nulo,* quando é nulo para todos os valores de x; por outras palavras, um polinómio idênticamente nulo é o que admite para zero *qualquer* número real. Escreve-se $f_n(x) \equiv 0$.

Teorema fundamental. *Se $f_n(x)$ é identicamente nulo, são nulos todos os seus coeficientes.*

Demonstração. Procederemos por indução completa, mostrando que o teorema se verifica para $f_1(x)$ e, seguidamente, demonstrando que a verificação para $f_{n-1}(x)$ arrasta a verificação para $f_n(x)$ (Nota 2).

Seja $f_1(x)=a_0x+a$, um polinómio do 1.º grau, identicamente nulo, isto é, nulo para todos os valores de x. Será $f_1(0)=0$, logo $a_1=0$ e portanto $f_1(x)=a_0x$. Se fosse $a_0\neq 0$, $f_1(x)$ só se anularia para $x=0$ mas como, por hipótese, é nulo para todos os valores de x, será necessàriamente $a_0=0$.

Admitamos agora que, se $f_{n-1}(x)$ é identicamente nulo, todos os seus coeficientes são nulos; e demonstraremos, nesta hipótese, que o mesmo acontece a $f_n(x)$.

Seja então

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

um polinómio de grau n identicamente nulo. Será então $f_n(x)=0$ qualquer que seja x e portanto $f_n(2x)=0$ (Nota 3), também para todos os valores de x. As igualdades

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$a_0 2^n x^n + a_1 2^{n-1} x^{n-1} + a_2 2^{n-2} x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1} 2x + a_n = 0$$

verificam-se, assim, para qualquer x o mesmo acontecendo à igualdade

$$a_1 (2^n - 2^{n-1}) x^{n-1} + a_2 (2^n - 2^{n-2}) x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1} (2^n - 2) x + a_n (2^n - 1) = 0$$

que se obtém das anteriores multiplicando ambos os membros da 1.ª por 2^n e subtraindo-lhe ordenadamente a 2.ª

Nestes termos, o polinómio de grau $n-1$

$$f_{n-1}(x) = a_1 (2^n - 2^{n-1}) x^{n-1} + a_2 (2^n - 2^{n-2}) x^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1} (2^n - 2) x + a_n (2^n - 1)$$

é identicamente nulo e, dentro da nossa hipótese, será

$$a_1 (2^n - 2^{n-1}) = 0\,, a_2 (2^n - 2^{n-2}) = 0 \cdots a_{n-1}(2^n - 2) = 0$$
$$a_n (2^n - 1) = 0\,,$$

donde

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\,,$$

visto serem não nulos os factores

$$(2^n - 2^{n-1})\,, (2^n - 2^{n-2}), \cdots (2^n - 1)\,.$$

Então $f_n(x)$ reduz-se a $f_n(x) = a_0 x^n$ e, se fosse $a_0\neq 0$, $f_n(x)$ só se anularia para $x=0$; logo será $a_0=0$.

(A demonstração anterior, bem como alguns dos exercícios a propor, são extraídos do livro *Algèbre et Trigonométrie*, Paris, 1925, por M. Weber).

Em resumo: ficou demonstrado que num polinómio de grau n identicamente nulo são nulos todos os seus coeficientes, admitindo que essa propriedade é verificada para um polinómio de grau $n-1$; como directamente se provou a sua validade para $n=1$, o teorema ficou demonstrado, por indução completa, para todos os valores de n.

Usando o mesmo método seria fácil demonstrar este outro Teorema: *Se um polinómio $f_n(x)$, de grau n. admite mais que n zeros distintos, é identicamente nulo,*

Deixaremos esta demonstração ao cuidado do leitor, o que constituirá um exercício muito simples de aplicação do método de indução completa.

3. Dois polinómios $f_m(x)$ e $f_n(x)$ dizem-se *idênticos* quando têm o mesmo valor para qualquer valor de x. Por outras palavras, dois polinómios são: idênticos quando a sua diferença é um polinómio identicamente nulo. Escreve-se $f_m(x)\equiv f_n(x)$.

Os dois teoremas precedentes permitem agora concluir o seguinte:

Princípio das identidades. *Se $f_m(x)$ e $f_n(x)$ de graus* m *e* n *$(m\geqslant n)$ tomam o mesno valor para mais de m valores distintos atribuídos a x, então os dois polinómios são idênticos e os coeficientes dos respectivos termos semelhantes são iguais.*

Deixaremos a demonstração deste teorema ao cuidado do leitor.

O *método dos coeficientes indeterminados* baseia-se, como é sabido, no princípio das identidades e este princípio no teorema fundamental, cuja demonstração foi o objectivo essencial desta nota. O leitor poderá servir-se do já citado artigo do n.º 22 da *Gazeta de Matemática* para se familiarizar com aplicações simples do método e poderá depois fazer algumas das aplicações igualmente simples que a seguir enunciamos.

Alguns exercícios sobre polinómios

— Determine $f(x)$ tal que

$$f(x) - f'(x) \equiv \frac{x^n}{n!}\,.$$

— Determinar um polinómio do 3.º grau $f(x)$ divisível por $x-a$, e cujo resto por $x-1$, $x-2$ e $x-3$ é sempre a. Decomponha em fracção simples (ver n.º 22) a função racional de a que se obtém achando o valor do polinómio obtido para $x=0$. (O denominador da referida função racional admite o zero 1).

— Determinar um polinómio do 5.º grau $f(x)$ tal que $f(x)+10$ seja divisível por $(x+2)^3$ e $f(x)-10$ por $(x-2)^3$.

— Determinar um polinómio divisível pela sua derivada.

— Se m é múltiplo de n, x^m-1 é divisível por x^n-1.

—Mostre que a equação

$$x^3 - 2x^2 + (1 + m - m^2)\,x + m^2 - m = 0$$

admite uma raiz independente de m. Determine essa raiz.

Notas

1. A demonstração a que aludimos, é do teor seguinte:

Se $f_n(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n \equiv 0$, então $f_n(0) = 0$ e portanto $a_n = 0$. Logo $f_n(x) = x(a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1})$. Ora, sendo $f_n(x)$ nulo qualquer que seja x o mesmo deve suceder ao polinómio que figura entre parentesis no 2.º membro da igualdade anterior. Fazendo nesse polinómio $x=0$ vem $a_{n-1}=0$ e assim sucessivamente.

Há um erro manifesto nesta demonstração: na verdade, o facto de $f_n(x)$ ser nulo para todos os valores de x apenas implica que o polinómio entre parentesis seja nulo para todos os valores de $x \neq 0$, pois para $x=0$, mesmo que fosse diferente de zero o polinómio entre parentesis, vinha sempre $f_n(x)=0$.

2. Sobre o princípio de indução completa pode consultar-se a *Aritmética Racional* de J. Silva Paulo e A. Aniceto Monteiro ou a *Aritmética Racional* de J. Vicente Gonçalves.

3. A demonstração fazia-se do mesmo modo substituindo $f_n(2x)$ por $f_n(kx)$, com $k \neq 0$.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS

Como já noticiamos em *Gazeta de Matemática* n.ºs 37-38, realizar-se-á, de 30 de Agosto a 6 de Setembro deste ano, em Cambridge, Massachussets, U. S. A., um importante congresso de matemáticos. Desde 1936, data do Congresso de Oslo, não tem sido possível efectuar uma grande reunião internacional. A Sociedade Matemática Americana, que projectava já o congresso para 1940, tem desenvolvido grande actividade para garantir o maior êxito possível a esta assembleia internacional.

Além das sete secções a que já anteriormente nos referimos e onde serão apresentados trabalhos pouco extensos com novas contribuições nos vários ramos da Matemática, a Comissão Organizadora decidiu o funcionamento de quatro Colóquios sobre Algebra, Análise, Matemáticas Aplicadas e Topologia. Para melhor dar ideia da natureza e importância destes colóquios transcrevemos, dos prospectos informativos distribuídos pela Sociedade Matemática Americana, os assuntos que particularmente serão aí tratados e discutidos:

Algebra: 1, Groups and universal algebra; 2, Structure theory of rings and algebras; 3, Arithmetic algebra; 4, Algebraic geometry.

Analysis: 1, Algebraic tendencies in analysis; 2, Analysis and geometry in the large; 3, Extremal methods and geometric theory of functions of a complex variable.

Applied Mathematics: 1, Partial differential equations; 2, Statistical mechanics; 3, Random processes in physics and communication.

Topology: 1, Homology and homotopy theory; 2, Fibre bundles and obstructions; 3, Differentiable manifolds; 4, Topological groups.

Estes quatro colóquios serão presididos, respectivamente, pelos Professores A. A. Albert, Marston Morse, John von Neumann e Hassler Whitney.

M. Z.

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE ÁLGEBRA E DE TEORIA DOS NÚMEROS

De 22 de Setembro a 1 de Outubro de 1949 o Centro Nacional de Investigação Científica (C. N. R. S.) organizou em Paris um colóquio internacional dedicado à Álgebra e à Teoria dos Números que reuniu cientistas franceses e estrangeiros especialistas nestas matérias. Para avaliar da importância da reunião apresentamos ao leitor a lista das conferências e os assuntos tratados nos seminários que se realizaram.

Set. 23 — O. Zariski, professor da Universidade de Harvard — Quelques questions concernant la théorie des fonctions holomorphes sur une variété algébrique.

R. Apery, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Rennes — Résultats récents concernant les idéaux de polynômes.

L. Lesieur, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Poitiers — Le transfert de certaines propriétés l'un anneau A à l'anneau des polynômes $A[x]$ et à l'anneau des séries formelles.

A. Chatelet, director da Faculdade de Ciências de Paris — L'utilisation des matrices dans l'algèbre et l'arithmétique des corps de nombres algébriques.

Set. 24 — P. Dubreil, professor da Faculdade de Ciências de Paris — La fonction caractéristique de Hilbert.

B. L. van der Waerden, professor da Universidade de Amsterdam — Les valuations en Géométrie algébrique.

P. Jaffard, «attaché de recherches» (C. N. R. S.) — Les idéaux totalement indépendants.

T. Nagell, professor da Universidade de Uppsala — Sur quelques questions dans la théorie arithmétique des cubiques planes du premier genre.

A. Neron, «attaché de recherches» (C. N. R. S.) — Les propriétés du rang des courbes algébriques dans les corps de degré de transcendance fini.

F. Chatelet, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Lyon — Points rationnels exceptionnels sur les courbes de genre un.

Set. 26 — T. van der Corput, professor da Universidade de Amsterdam — Le théoreme fondamental de l'Algèbre sans axiome de continuité.

E. Artin, professor da Universidade de Princeton — Questions de base minimale dans la théorie des nombres algébriques.

B. Segre, professor da Universidade de Bolonha — Questions arithmétiques sur les variétés algèbriques.

Ch. Pisot, professor da Faculdade de Ciências de Bordeus — Quelques résultats d'approximations diophantiennes.

L. Mordell, professor da Universidade de Cambridge — Equations cubiques à trois variables avec une infinité de solutions entières.

Set. 27 — G. Birkhoff, professor da Universidade de Harvard — Théorèmes de décomposition dans quelques anneaux réticulés.

V. Korinek, professor da Universidade de Praga — Le théorème de Jordan-Hölder dans les treillis.

L. Kaloujnine, «chargé de recherches» (C. N. R. S.) — Le produit complet des groupes et la théorie de l'extension.

G. Julia, da Academia das Ciências, professor da Faculdade de Ciências de Paris — Les racines, carrées et $n^{\text{èmes}}$, d'opérateurs hermitiens dans l'espace hilbertien.

T. Lepage, professor da Universidade de Bruxelas — Sur certains idéaux de l'algèbre extérieure $A(2n, k)$.

Set. 28 — P. Samuel, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Clermont-Ferrand — Multiplicités d'intersection des variétés algébriques.

A. Weil, professor da Universidade de Chicago — Variétés abéliennes.

F. Chatelet, «maître de conférences» da Faculdade de Ciências de Lyon — Représentation des courbes à l'aide de radicaux.

E. Artin, professor da Universidade de Princeton — Remarques concernant la théorie de Galois.

J. Dieudonné, professor da Faculdade de Ciências de Nancy — Progrés et problèmes dans la théorie de Galois.

M. Krasner, «maître de recherches» (C. N. R. S.) — Généralisation abstraite de la théorie de Galois.

Set. 30 — C. Chabauty, professor da Faculdade de Ciências de Strasbourg — Géométrie des Nombres; applications à la théorie des Nombres algébriques.

H. Davenport, professor da Universidade de Londres — L'Algorithme d'Euclide dans les corps quadratiques et cubiques.

Set. 30 — Seminário:

M^elle S. Piccard (Neuchâtel) — Sur les groupes d'ordre fini.

Svend Bundgaard (Copenhague) — Sous-groupes invariants d'index fini dans certains groupes intervenant dans la topologie des surfaces de Nielsen.

K. A. Hirsch (Newcastle) — Infinite groups with maximal condition. Etc.

Out. 1 — A. Chatelet, director da Faculdade de Ciências de Paris — Idéaux principaux dans les corps de la division du cercle.

B. L. van der Waerden, professor da Universidade de Amsterdam — Variétés abéliennes.

M. Krasner, «maître de recherches» (C. N. R. S.) — Quelques nouvelles méthodes dans la théorie des corps valués.

Out. 1 — Seminário:

K. A. Hirsch (Newcastle) — Recent results in the theory of Abelian Group G. Etc.

M. Z.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS

PARIS, 17-22 DE OUTUBRO DE 1949

Demos já no n.º 40 indicações sumárias sobre a organização e principais secções deste congresso. Limitar-nos-emos, por falta de espaço, a indicar os títulos dalgumas das comunicações recebidas.

Lógica:

M. Barzin (Bruxelas) — Réflexions sur le principe du déterminisme (em comum com o Colóquio de Epistemologia).

E. W. Beth (Amsterdam) — L'état actuel du problème logique des antinomies.

H. B. Curry (U. S. A.) — L-Semantics as a formal system.

Mme Destouches-Février (Paris) — Logique quantique.

J Dieudonné (Nancy) — L'axiomatique dans les mathématiques modernes (em comum com o Colóquio de Filosofia Matemática).

R. P. Dubarle (Paris) — Diverses tendances actuelles des logiciens américains.

R. Feys (Louvain) — Nature et possibilités de la logique formalisée.

A. Heyting (Holanda) — La méthode axiomatique en mathématiques intuitionistes (em comum com o Colóquio de Matemáticas).

H. Meyer (Holanda) — La négation et la Logique.

E. Morot-Sir (Bordeaux) — Langage et Métalangage

G. Vaccarino (Messina) — Sulla nozione di verità formale.

D. Van Dantzig (Amsterdam) — Mathématique stable et mathématique affirmative.

Vuyje (Amsterdam) — Psycho-linguistique et logique.

Filosofia Matemática:

R. Apéry (Caen) — Le rôle de l'intuition dans les Mathématiques (em comum com o colóquio de Epistemologia).

É Borel (Paris) — Définition des êtres mathématiques individuels.

A. Denjoy (Paris) — L'idée de récurrence dans les théories mathématiques.

J. Dieudonné (Nancy) — L'Axiomatique dans les mathématiques modernes (em comum com o Colóquio de Lógica).

P. Dubreil (Paris) — Les méthodes modernes en Algèbre.

J. Favard (Paris) — Elaboration des notions de courbe et de surface en Géométrie différentielle.

A. Heyting (Holanda) — L'Axiomatique intuitioniste (em comum com o Colóquio de Lógica).

M. Janet (Paris) — Sur le «Calcul des variations».

J. Pérès (Paris) — Le Calcul analogique (em comum com o Colóquio de Mecanica).

B. Segre (Bolonha) — Géométrie mathématique et Géométrie physique.

G. Valiron (Paris) — Les notions de fonction analytique et de surface de Riemann.

Cálculo das Probabilidades:

G. A. Barnard (Londres) — Une théorie de la Statistique, indépendante du Calcul des Probabilités.

É. Borel (Paris) — Les probabilités universellement négligeables.

G. Darmois (Paris) — Liaison de probabilité, analyse factorielle.

B. de Finetti (Trieste) — Rôle et domaine d'application du théorème de Bayes selon les différents points de vue sur les probabilités.

R. Fortet (Caen) — Faut-il élargir les axiomes du Calcul des probabilités?

P. Lévy (Paris) — Arithmétique et Calcul des probabilités.

J. Neymann (Berkeley) — L'estimation statistique.

P. Nolfi (Zurich) — La connaissance probable.

D. Van Dantzig (Amsterdam) — Sur l'analyse logique des relations entre le Calcul des Probabilités et ses applications.

J. Ville (Paris) — La formation de la connaissance envisagée du point de vue probabiliste.

Mecânica:

R. Dugas (Paris) — Genèse, rôle et interprétation des principes variationnels dans les différentes mécaniques.

J. Kampé de Fériet (Lille) — La mécaniqne statistique des milieux continus.

J. Pérès (Paris) — Le calcul analogique (em comum com o Colóquio de Filosofia Matemática).

Física Teórica e Físico-química:

E. M. Bruins (Amsterdam) — On the odertype of the coordinates in Physics.

J. Clay (Amsterdam) — L'imperfection de notre connaissance.

A. Gião (Portugal) — Sur la théorie des fonctions d'onde en théorie unitaire et en mécanique ondulatoire.

A. Mercier (Berne) — Relativité et statistique.

P. Renaud (Paris) — Généralisation du Principe de Symétrie de P. Curie.

Rosenfeld (Inglaterra) — Complémentarité et Rationalisme moderne.

A. Sesmat (Paris) — Sur le nombre des grandeurs physiques fondamentales.

V. Somenzi (Roma) — Méthodologie et Physique.

J. H. Tummers (Holanda) — Le relativisme dans les sciences physiques.

Epistemologia:

R. P. Abelé (Vals près Le Puy) — Dialectique d'intériorité et d'extériorité dans la mesure du temps.

R. Apéry (Caen) — Le rôle de l'intuition dans les Mathématiques (em comum com o Colóquio de Filosofia Matemática).

M. Barzin (Bruxelas) — Réflexions sur le principe du déterminisme (em comum com o Colóquio de Lógica).

G. Bouligand (Paris) — Connaissance mathématique et idées de construction et d'existence.

L. Delpech (Aix-en-Provence) — Epistémologie et Psychologie différentielle.

P. Ducassé (Besançon) — Réflexions sur la Philosophie des Techniques.

F. Fiala (Neuchâtel) — Dialectique et stabilité du savoir.

Fulchigoni (Rome) — La métode en Psychologie.

Klein et Mayer (Strasbourg) — Les erreurs de méthode en Embryologie.

A. Metz (Paris) — La méthode expérimentale et le libre arbitre.

Spirito (Roma) — I confini della Scienza.

História das Ciências:

I — A Filosofia das Ciências e a História das Ciências

A. Reymond (Lausanne) — L'Histoire des Sciences et la Philosophie des Sciences.

J. Pelseneer et J. Putman (Bruxelas) — L'Histoire des Sciences: son objet et ses méthodes.

Julien Benda (Paris) — Une conception moderne de l'Histoire des Sciences.

E. M. Bruins (Amsterdam) — Sur la méthode de recherche en Histoire des Sciences.

II — Evolução dos métodos nas Ciências

J. Itard (Paris) — Quelques remarques sur les méthodes infinitésimales chez Euclide et Archimède.

P. Humbert (Montpellier) — La méthode au XVII^e siècle dans les Sciences exactes.

A. Koyré (Paris) — Un *experimentum* au XVII^e siècle: la détermination de **g**.

R. Taton (Paris) — Les méthodes en Mathématiques au XVIII^e siècle et dans la première moitié du XIX^e.

W. H. Schopfer (Berne) — L'évolution de la méthode en Biologie, du point de vue de l'Histoire des Sciences.

R. P. H. Bernard Maitre (Paris) — Le paradoxe de la Chine.

III — História das Técnicas e Aplicações

R. J. Forbes (Amsterdam) — Science, Technology and Social Evolution.

J. Belin-Milleron (Paris) — L'histoire des hypothèses de la Fleur et la Philosophie des Sciences.

Não indicamos as comunicações feitas nas secções de Biologia, Ciências da Terra e de Pedagogia das Ciências.

Nas discussões dos Colóquios tomaram parte muitos outros cientistas além dos indicados, quer franceses quer estrangeiros.

M. Z.

NOTICIÁRIO

Doutoramentos na F. C. L.

Na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em Outubro de 1949 prestaram provas para a obtenção do grau de doutor em Ciências Matemáticas (1.° grupo da 1.° secção) os assistentes da referida Faculdade Humberto de Menezes e José Sebastião e Silva, que obtiveram as classificaçõs de 17 e 18 valores respectivamente.

Os pontos afixados foram:

1.° — Existência de raízes imaginárias em polinómios reais. 2.° — Limites de raízes ou seus módulos. 3.° — Separação de raizes reais (polinómios reais). 4.° — Resolução numérica (polinómios reais). 5.° — O problema da intersecção de superfícies em Geometria descritiva. 6.° — Representação das quadricas regradas em Geometria descritiva; seus planos tangentes, contornos aparentes e secções planas. 7.° — Classificação e dedução das propriedades diametrais das quádricas pelos métodos da Geometria projectiva; confronto com os métodos analíticos. 8.° — Elementos imaginários em Geometria projectiva; operações com elementos imaginários. 9.° — Linhas notáveis das superfícies. 10.° — Curvatura e torsão das curvas torsas; evolutas e envolventes. 11.° — Funções harmónicas. 12.° — Equações diferenciais lineares: método de Fuchs.

O júri além dos membros do corpo decente da Faculdade compreendia os Profs. Queirós, do Porto, Pereira Dias e Manuel dos Reis de Coimbra.

Cursos no Collège de France

No ano escolar 1949-1950 realizam-se entre outros os seguintes cursos:

Mathématique et Mécanique — Prof. Szolem Mandelbrojt — *Théorèmes de composition et applications des transformées de Fourier.*

Théorie des équations différentielles et fonctionnelles — Prof. Jean Leray — *Topologie des espaces fibrés.*

Centenário de Laplace

Celebrou-se em Novembro de 1949 a comemoração do segundo centenário do nascimento do grande cientista francês Laplace. A Sociedade Astronómica de

França promoveu no dia 6 de Novembro uma sessão que teve lugar no Grande Anfiteatro do Instituto de Oceanografia da Universidade de Paris, presidida pelo Prof. André Danjon, director do Observatório Astronómico de Paris e presidente da Sociedade. Nessa sessão foram analisadas a notável obra e as variadas contribuições de Laplace para o progresso do conhecimento humano. O Prof. E. Bauer tratou de «Laplace e a Física», o Prof. G. Darmois de «Laplace, probabilista e estatístico» e o Prof. Lemaître, de Louvain, de «Laplace e a Mecânica Celeste».

M. Z.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Algebra Superior — 1.º exame de frequência — 1948-49.

2898 — Calcular o limite da sucessão cujo termo geral é $\sqrt{n(n+a)}-n$.

2899 — Calcular $\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n$ e, de acordo com o resultado, estudar a convergência e calcular a soma da série $\sum_{1}^{\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+(n+1)n}$.

2900 — *a*) Calcular a derivada da função

$$y=\operatorname{arctg}\left[(a \operatorname{sen} x+b\cos x)/(a\operatorname{sen} x-b\cos x)\right]$$

b) Mostrar que a função $y=(a+bx)e^{-x^2}$ verifica a equação $y''+4xy'+(4x^2+2)\,y=0$.

2901 — Determinar os extremos da função

$$y=(1+x-x^2)\,e^x.$$

2902 — Calcular o $\lim\,(\operatorname{tag} x/x)^{1/x^2}$, quando $x \to 0$.

2903 — Provar que se $a_n\,(n=1,2,\cdots)$ são positivos e se para todos os valores de n se verifica $a_{n+1} \leqslant k a_n$ com $0<k<1$, então é $\lim a_n=0\ (n\to\infty)$.

F. C. C. — Algebra Superior — 2.º exame de frequência de 1948-49.

2904 — Primitivar $1/(2^x+2^{-x})+x^2 \operatorname{arc\,sen} x$

2905 — Mostrar que as rectas da equação $(2-3\lambda)x-(3+\lambda)\,y+5+\lambda=0$ (λ arbitrário) passam todas pelo mesmo ponto e determinar as coordenadas desse ponto.

2906 — Qual a condição para que tres rectas não paralelas de equação $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $a''x+b''y+c''=0$ concorram no mesmo ponto? Justificar.

2907 — Calcular o valor do determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

2908 — Quando o afixo de z descrever uma circunferência de centro na origem e raio 2, qual é o lugar geométrico descrito por $z_1=8\,z^{-4}/3$?

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência, 1948-1949.

2909 — Calcule a derivada de $f(x)=\dfrac{a\cdot\operatorname{arc\,tg}\pi^{x^2}}{x+b}$. Determine a e b de modo que a recta $r \equiv y=x+1$ seja tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $P(0,1)$. Determine sobre a recta $x=1$ o centro da circunferência tangente à recta r em ponto cuja distância a P seja $=\sqrt{2}$. R:

$$f'(x)=a\,(x+b)^{-1}\cdot 2x\pi^{x^2}\log\pi\left(1+\pi^{2x^2}\right)^{-1}-$$
$$-\,a\operatorname{arc\,tg}\pi^{x^2}\cdot(x+b)^{-2}.$$

Fazendo $x=0$, $f(0)=1$, *na expressão de* $f(x)$, *vem* $1=a\pi\,(4b)^{-1}$. *Para que* r *seja tangente à curva em* P, *deve ter-se* $f'(0)=1$ *(o coeficiente angular de* r *é* 1) *e portanto, fazendo* $x=0$ *e* $f'(0)=1$, *na expressão de* $f'(x)$, *virá:* $1=-a\pi\,(4b^2)^{-1}$, *donde, atendendo à relação precedente:* $b=-1$, $a=-4/\pi$. *Sobre* r *há dois pontos cuja distância a* P *é* $\sqrt{2}$: *um é o ponto* $(1,2)$, *intersecção de* r *com a recta* $x=1$; *o outro é* $(-1,0)$.

Para ter o centro da circunferência tangente em $(-1,0)$, *basta conduzir por* $(-1,0)$ *uma perpendicular a* r *e determinar a intersecção da recta* $y=-x-1$ *assim obtida com a recta* $x=1$: *o centro será então o ponto* $(1,-2)$.

2910 — Mostre que a função

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{para } x \text{ irracional}\\ (x-1)^2-2 & \text{para } x \text{ racional}\end{cases}$$

é contínua para $x=2$ e discontínua para $x=1$. Ache neste ponto a sua oscilação. Em que se modificariam as conclusões permutando-se as condições definidoras da função? R: *Tem-se* $f(2)=-1$; *por outro lado, o limite de* $f(x)$ *quando* $x\to 2$ *é também* -1, *quando* x *assume só valores racionais ou só valores irracionais, tendo-se portanto* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$ *sobre todo o domínio de* $f(x)$: *a função é pois contínua para* $x=2$. *Por outro lado,* $\overline{f}(1)=0$, $\underline{f}(1)=-2$: *a oscilação de* $f(x)$ *no ponto* $x=1$ *será portanto* $\omega=0-(-2)=2$. *Permutando-se as condições definidoras, em nada se modificariam as conclusões.*

2911 — Defina série convergente e justifique a condição necessária e suficiente de convergência. Considere $\sum u_n$ transformada em $\sum v_n$ pelo facto de cada termo u_n ter sido transferido para lugar de índice $\varphi(n)$ (univalente); supondo limitada a diferença $|\varphi(n)-n|$, prove que as duas séries são da mesma natureza e, se convergentes, de igual soma. Enuncie as regras da convergência e divergência que se aplicam a uma série em que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p_0\,n^h+p_1\,n^{h-1}+\cdots}{q_0\,n^h+q_1\,n^{h-1}+\cdots},\ p_0\,,q_0>0\,.$$

Resolução da 2.ª parte: *Designemos por* ν *um limite excedente de* $|\varphi(n)-n|$ *e ponhamos* $s_n=u_1+\cdots+u_n$, $s'_n=v_1+\cdots+v_n$. *Ter-se-á então* $s'_n=s_n+\sum u_{n+i}-\sum u_{n-i}$, *em que os somatórios se estendem a valores de* i *inferiores a* ν. *Ora, se para* $n\to\infty$ *(com* i *constante), vem* $u_{n+i}\to 0$, $u_{n-i}\to 0$, *será também* $\sum u_{n+i}\to 0$, $\sum u_{n-i}\to 0$, *quando* $n\to\infty$, *visto que cada somatório não tem mais de* ν *termos, qualquer que seja* n. *Logo, se existe* $\lim s_n$, *será por força* $\lim s'_n=\lim s_n$, *e vice-versa, se existe* $\lim s'_n$, *será* $\lim s_n=\lim s'_n$.

2912 — Defina função inversa, e descreva e justifique a relação que liga as respectivas derivadas. Seja $y=f(x)$ invertível em (a,b), $x=\varphi(y)$ a função inversa. Sopondo $f(x)$ contínua e $f(a)<f(b)$, prove que $f(x)$ é crescente e $\varphi(y)$ contínua.

2913 — Supondo que $f(x)$, contínua em (a,b), tem aí uma infinidade de zeros, prove que dois destes compreendem todos os outros. R: *Designe* Z *o conjunto dos zeros de* $f(x)$ *e sejam* Λ,λ *os limites superior e inferior de* Z. *Por ser* $f(x)$ *contínua,* Z *é fechado e portanto* λ,Λ *pertencem necessàriamente a* Z, *isto é, são zeros de* $f(x)$, *entre os quais ficam pois compreendidos todos os outros.*

F. C. L. — Álgebra Superior — **1.º exame de frequência, 1948-49.**

2914 — Calcule a derivada de

$$f(x)=\frac{1}{2n}(x^2-2x+2)^2\log\frac{nx+2}{nx}\quad\text{no ponto } x=1$$

e prove a convergência da série de termo geral $u_n=(-1)^n f'(1)$. Com quantos termos se tem a soma da série a menos de 1/10? R: *Atendendo a que a derivada de* $(x^2-2x+2)^2$ *se anula para* $x=1$, *virá*

$$f'(1)=\left[\frac{1}{2n}(x^2-2x+2)^2\frac{nx}{nx+2}\cdot\frac{-2n}{n^2x^2}\right]_{x=1}=$$
$$=-\frac{1}{n(n+2)}.$$

A série de termo geral $(-1)^n f'(1)$ *é alternada; a sua convergência é pois garantida pelo facto de* $1/[n(n+2)]$ *ser decrescente e tender para zero. O erro cometido será, neste caso, sempre inferior ao módulo do primeiro termo despresado; bastará por isso tomar os dois primeiros termos* $(1/3,-1/8)$, *visto que o terceiro é igual a* $1/5<1/10$.

2915 — Escreva a equação geral das circunferências de centro em $C(-1,0)$ e determine aquela que é tangente à recta $x-y-3=0$. Ache a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta e da circunferência. R: *Equação geral:* $(x+1)^2+y^2=r^2$. *A circunferência de centro* C *e tangente à recta dada tem o raio igual à distância* δ *de* C *a essa recta:* $\delta=|(-1-3)/\sqrt{1+1}|=2\sqrt{2}$; *a equação da circunferência será pois* $(x+1)^2+y^2=8$. *Seja agora* $P(\overline{x},\overline{y})$ *um ponto genérico do lugar geométrico em questão. Distância de* P *à recta:* $|(\overline{x}-\overline{y}-3)/\sqrt{2}|$. *Distância de* P *à circunferência:* $\left|\sqrt{(\overline{x}+1)^2+\overline{y}^2}-\sqrt{8}\right|$. *Equação do lugar:* $\overline{x}-\overline{y}-3=\sqrt{2}\left(\sqrt{(\overline{x}+1)^2+\overline{y}^2}-\sqrt{8}\right)$ *ou* $\overline{x}-\overline{y}-3=\sqrt{2}\left(\sqrt{8}-\sqrt{(\overline{x}+1)^2+\overline{y}^2}\right)$. *No primeiro caso tem-se a equação* $(\overline{x}+\overline{y}+1)^2=0$, *equivalente (àparte a multiplicidade) à equação* $\overline{x}+\overline{y}+1=0$, *representativa duma recta; mas desta apenas pertence ao lugar o segmento compreendido entre* C *e a recta dada. No segundo caso tem-se uma parábola, toda pertencente ao lugar.*

2916 — Prove que a função $f(x)$, contínua em (a,b), assume neste intervalo qualquer valor entre

$f(a)$ e $f(b)$. Examine a marcha da função na hipótese de esta ser univalente e satisfazer à condição $f(a) < f(b)$.

2917 — $g(x)$ é função contínua em (a, b), intervalo onde cada ponto intermédio c é limite inferior dos pontos d que fazem $g(d) > g(c)$. Prove que $g(x)$ é incessantemente crescente. R: *Suponhamos que existem dois pontos interiores* c_1, c_2, *tais que* $c_1 < c_2$, $g(c_1) > g(c_2)$, *e seja* c_3 *o limite superior dos pontos* ξ *de* (c_1, c_2) *que fazem* $g(\xi) > g(c_1)$. *É claro que* $c_3 < c_2$, *de contrário, em cada vizinhança de* c_2, *haveria pontos* ξ *tais que* $g(\xi) - g(c_2) > \delta$, *sendo* $\delta = g(c_1) - g(c_2)$, *o que é contra a hipótese da continuidade. Mas, por outro lado, em virtude da 2.ª parte da hipótese, haveria pelo menos um ponto* d_1 *tal que* $c_3 < d_1 < c_2$, $g(d_1) > g(c_3)$, *o que é contrário ao que supusemos a respeito de* c_3. *Quer isto dizer que, sendo* $c_1 < c_2$, *não pode ser* $g(c_1) > g(c_2)$. *Anàlogamente se conclue que, sendo* $c_1 < c_2$, *não pode ser* $g(c_1) = g(c_2)$. *Segue-se portanto que a desigualdade* $c_1 < c_2$ *implica* $g(c_1) < g(c_2)$, *q. e. d.*

2918 — Aproveitando os coeficientes, forme um limite excedente para o valor absoluto do polinómio $f(x) = 2 - 4x + x^2 + x^4$ no intervalo $(-1, 1)$ e, tendo em vista o teorema dos acréscimos finitos, decomponha esse intervalo em partes $(x_i, x_i + h)$, nas quais a oscilação de $f(x)$ seja sempre inferior a $0{,}1$. R: $|f(x)| \leqslant 2 + 4|x| + |x|^2 + |x|^4 \leqslant 2 + 4 + 1 + 1 = 8$; $f(x_i + h) - f(x_i) = h f'(x_i + \theta h)$; $|f'(x)| \leqslant 4 + 2 + 4 = 10$; $h f'(x_i + \theta h) \leqslant 10h$; *basta pois que se tenha* $10h \leqslant 0{,}1$, *isto é,* $h \leqslant 0{,}01$.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência, 1948-1949.

2919 — Focos, directrizes e excentricidade da elipse de equação $3(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2$.

2920 — Deduza e discuta a condição necessária e suficiente para que a curva $y = f(x)$ seja convexa no ponto de abscissa c. Examine a hipótese de $f'(x)$ ser máxima ou mínima para $x = c$.

2921 — Enuncie e demonstre o teorema de Rolle, para uma função que só admita zeros de multiplicidade inteira. Descreva o uso do teorema na separação das raízes.

2922 — Demonstre que a identidade de Euler é característica das funções homogéneas diferenciáveis.

2923 — $f(x, y)$ é uma função contínua em certa região circular e em nenhum ponto interior $[f(x, y)]^2$ admite valor mínimo. Deduza daí que: $1/f(x, y)$ é contínua e de sinal fixo em todos os pontos interiores. R: *Como* $[f(x, y)]^2$ *é não negativa, não se pode anular em nenhum ponto interior, de contrário admitiria aí um mínimo; o mesmo acontece portanto com* $f(x, y)$; *então* $1/f(x, y)$, *como inversa duma função contínua que não se anula, será também contínua e não pode mudar de sinal na região circular, porque isso obrigaria a um anulamento no interior.*

2924 — Deduza a equação da hipérbole a partir da definição geral de cónica.

Soluções dos n.os 2909-2923 de J. Sebastião e Silva

F. C. P. — Álgebra Superior — 1.º exercício de revisão.

2925 — *Sendo* θ *uma raiz cúbica imaginária de* 1 *verificar que*: $(a + b)(a + b\theta)(a + b\theta^2) = a^3 + b^3$.

R: Visto que $1 + \theta + \theta^2 = \dfrac{1 - \theta^3}{1 - \theta} = \dfrac{0}{1 - \theta} = 0$, $(1 \neq \theta)$, efectuando o cálculo do 1.º membro, imediatamente se obtém o segundo.

2926 — a) *Definir por meio de cisões, os números reais* $\frac{7}{3}, \sqrt[5]{6}, -\sqrt{2}$.

R: Por ex., $\sqrt[5]{6}$ é definido pelo cisão do conjunto dos números racionais em duas classes A e B, sendo A constituída pelos números cuja potência quinta é menor que 6, e B pelos números cuja potência quinta excede 6.

b) *Definindo desigualdade de 2 números reais:* $A = (A'/A'')$ *e* $B = (B'/B'')$, $A > B$, *do modo seguinte:* «A *diz-se maior que* B *quando algum elemento da classe inferior de* A *fôr elemento da classe superior de* B, *mostrar que* $A = B$ *se* $A' \subseteq B'$, *e* $A'' \subseteq B''$».

Nota: *admite-se que o conjunto dos números reais é ordenado.*

R: Suponhamos que $A \neq B$; então, ou $A > B$, ou $B > A$. Se, por ex., fôr $A > B$, algum elemento de A' pertence a B'': isso é absurdo, porque então tal elemento era comum a B' e B''.

2927 — *Quais os valores de* x *que anulam o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ x^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} ?$$

R: Evidentemente, $x = 2, 3, 4$ anulam o determinante; e não há mais valores, visto que $D = 0$ é uma equação do 3.º grau em x, como se vê desenvolvendo D segundo a 1.ª coluna.

2928 — *Verificar se são linearmente independentes as três equações seguintes:*

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

R: Seguindo a definição, consideremos a identidade:

$$k_1(x-y+z)+k_2(x+y-z)+k_3(x-y-z)\equiv 0,$$

isto é, vemos se o sistema:

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ -k_1+k_2-k_3=0 \\ k_1-k_2-k_3=0 \end{cases}$$

tem soluções não nulas.

F. C. L. — Complementos de Algebra — Exame final de 1948, 2.ª época, 2.ª chamada.

2929 — Quando se diz que um polinómio $f(z)$ é irredutível a respeito dum dado corpo que contenha os seus coeficientes? Quando se diz que um corpo é algèbricamente fechado? Demonstre o teorema fundamental da irredutibilidade e indique algumas suas consequências.

2930 — Defina os conceitos de grupo admissível e de grupo de Galois duma equação a respeito dum dado corpo, justificando as afirmações em que tiver de se apoiar.

Determine os grupos de Galois das equações $x^3-x^2-x-2=0$, $x^3-2=0$ a respeito de Ra e de $Ra(\sqrt{3})$.

2931 — Demonstre que a equação ciclotómica de grau $p-1$, com p primo, é cíclica a respeito de Ra.

2932 — Prove que o grupo de Galois da equação geral de grau n a respeito do corpo gerado pelos coeficientes é o grupo simétrico.

2933 — Definição axiomática de corpo. Seja K o conjunto dos números complexos; atribuindo à palavra «soma» o significado usual e convencionando chamar produto de dois números complexos $a+bi$, $c+di$ ao número $ac+bdi$ (com a, b, c, d reais), verifique se o conjunto K forma ou não um corpo a respeito da multiplicação e da adição assim definidas.

Enunciados dos n.os 2929 a 2923 de J. Sebastião e Silva

F. C. L. — Geometria Descritiva — 2.º exame de frequência de 1948-49.

2934 — Indique como se determinam pontos da intersecção de duas superfícies de revolução, e a tangente à intersecção num desses pontos, no caso de os eixos serem concorrentes.

2935 — Em projecções cotadas: Sejam r, s duas rectas oblíquas não complanares, definidas pelas suas projecções graduadas, e designe α o plano que passa por r e é paralelo a s; determine uma escala de declive de α e o ângulo de α com ν_0.

2936 — Um hiperbolóide de revolução $[\rho]$ é definido pelo eixo (vertical) e por uma geratriz rectilínea g. Determine: *a*) a gola e o traço horizontal de $[\rho]$; *b*) o ponto em que é tangente a $[\rho]$ o plano que passa por g e é paralelo a uma recta dada.

2937 — Dados um elipsóide de revolução $[\varepsilon]$ de eixo vertical, um plano oblíquo α e uma vertical v que não corte $[\varepsilon]$, fazer rodar α em torno de v, até ficar tangente a $[\varepsilon]$. R: *Determine-se o ponto* $P\equiv\alpha\cdot v$. *Quando* α *roda em torno de* v, *a linha de maior declive de* α *que passa por* P *gera um cone* $[\gamma]$ *envolvente das posições de* α; *o problema reduz-se pois a determinar um plano* θ *tangente ao mesmo tempo a* $[\varepsilon]$ *e a* $[\gamma]$, *para o que basta circunscrever a* $[\varepsilon]$ *um cone* $[\gamma_1]$ *de eixo vertical e de abertura igual à de* $[\gamma]$: *um plano que passe por* P *e seja tangente a* $[\gamma_1]$ *fornece uma solução para o problema.*

2938 — Dados dois segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ iguais e não complanares, prove que AB e A_1B_1 formam ângulos iguais com qualquer plano paralelo a AA_1 e BB_1. Posto isto, determine o eixo da rotação que permite levar o segmento $\overline{AB}$ a coincidir com o segmento $\overline{A_1B_1}$. R: *Consideremos os planos* α, β *tais que* $\alpha // \beta$, $AA_1 --\alpha$, $BB_1 -- \beta$; *designando por* B', B'_1, *respectivamente, as projecções ortogonais de* B, B_1 *sobre* α, *os triângulos rectângulos* $[ABB']$, $[A_1B_1B'_1]$ *serão iguais, por terem iguais os catetos* $\overline{BB'}, \overline{B_1B'_1}$ *e as hipotenusas* $\overline{AB}, \overline{A_1B_1}$: *logo* $B\hat{A}B'=B_1\hat{A}_1B'_1$, q. e. d. *O eixo pedido será a recta perpendicular a* α *que passa pelo ponto de intersecção das mediatrizes de* $\overline{AA_1}, \overline{B'B'_1}$.

Enunciados e soluções dos n.os 2934 a 2938 de J. Sebastião e Silva

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência de 1948-49.

2939 — Primitivar as funções $1/[x(1+x+x^2+x^3)]$ e $1/(4\,\mathrm{sen}^2 x+9\cos^2 x)$.

2940 — Estabelecer uma fórmula de recorrência para a primitiva da função $y=x^n\cos(ax)$.

2941 — Estudar a série $\sum\left(\frac{1}{x^2+n}-\frac{1}{n}\right)$.

2942 — Achar os extremos locais da função $u = xe^{-(x^2+y^2)}$.

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência de 1948-49.**

2943 — Determinar o integral geral da equação $(x \sin y - 1)\, y' + \cos y = 0$. Dentre as curvas integrais escolher a que passa pelo ponto $(-1, 0)$.

2944 — Determinar o integral geral da equação $y^{\mathrm{IV}} + m^4 y = 0$ e dentre as curvas integrais escolher aquela que satisfaz às condições seguintes:
$y = 0, y' = 0$ para $x = 0$; $y = 0, y'' = 0$ para $x = 1$.

2945 — Calcular o integral duplo $\displaystyle\iint \frac{dx\, dy}{xy}$ estendido à área interior aos quatro círculos $x^2 + y^2 = ax$; $x^2 + y^2 = a' x$; $x^2 + y^2 = by$; $x^2 + y^2 = b' y$.

2946 — Calcular o integral triplo

$$\iiint (x^3 + y^3 + z^3)\, dx\, dy\, dz$$

estendido ao interior da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x + y + z) + 2a^2 = 0 .$$

2947 — Determinar um integral completo da equação às derivadas parciais $pq = (x+1)(y-1)$.

F. C. P. — Cálculo — **Exame final — 1.ª chamada — 1 de Outubro de 1949.**

2948 — Determinar o plano tangente à superfície

$$\operatorname{arc\,sen} \frac{1+e^z}{4+x^y} + \log (x^2 + \sqrt{y}) + y^x - x = \frac{\pi}{6} + 1$$

no ponto $(0, 1, 0)$.

2949 — Calcular $\displaystyle\int_0^a \frac{x^3\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

2950 — Calcular a área da superfície gerada pela rotação da linha $\rho = a(1 + \cos \theta)$ em torno do eixo polar.

2951 — Integrar a equação

$$y'' - 4xy' + 2(2x^2 - 1)\, y = 0$$

sabendo que admite 2 integrais particulares um dos quais é a derivada do outro.

Nota: O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios.

F. C. P. — Cálculo — **Exame final — 2.ª chamada — 3 de Outubro de 1949.**

2952 — Determinar a subtangente e a subnormal de linha $(\cos x)^y + \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{y} - 1) = 1 + x$ no ponto $(0, 1)$.

2953 — Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{2-x}}$.

2954 — Calcular o volume limitado pela superfície

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 10 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$$

2955 — Determinar $\varphi(x)$ de modo que a equação $y'' + \varphi(x)\, y' + 2xy = 0$ admita 2 integrais particulares tais que $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

Nota: O aluno deve resolver pelo menos 2 exercícios.

I. S. T. — Cálculo — **1.º Exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2956 — Sendo n inteiro, qual a relação que deve existir entre A, B e C para que seja algébrico o integral

$$\int \frac{4x^3 + (4n + A)\, x + Bn - C}{x^2 + n}\, dx$$

2957 — Valores próprios de uma matriz. Mostrar que os valores próprios de uma matriz hermítica são os mesmos da sua conjugada.

2958 — Para que funções o problema das primitivas é resolúvel pela integração de Riemann?

I. S. T. — Cálculo — **2.º exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2959 — Transformação conforme dum plano sobre outro plano por meio de uma função analítica.

Seja dada a função $f(z) = 3z + 2$.

Mostrar que: *a*) é analítica; *b*) a transformação de uma recta no plano (x, y) é ainda uma recta no plano (P, Q); *c*) os ângulos de 2 vectores no plano (x, y) são iguais para as transformadas desses vectores no plano (P, Q).

2960 — Para que direcção λ é estacionária a derivada direccional $\dfrac{df}{d\lambda}$ considerada no ponto P.

Aplique os resultados obtidos à função

$$f(x, y, z) = u = xyz \quad \text{no ponto} \quad P(1, 1, 1)$$

2961 — A fórmula de Ostrogradski no cálculo de volumes.

I. S. T. — Cálculo — **3.º exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2962 — Em que caso o simples exame do integral completo de uma equação às derivadas parciais nos esclarece logo da existência de integrais singulares? Haverá algo de semelhante na teoria dos integrais das equações diferenciais totais?

2963 — Enuncie uma condição para que duas curvas de uma mesma superfície, tangentes num ponto, tenham nesse ponto a mesma curvatura.

2964 — Características na integração das equações diferenciais parciais lineares e não lineares.

Aplicação à equação de Jacobi.

F. C. C. — Análise Superior — **2.º Exame de frequência de 1948-49**

2965 — Calcular, recorrendo à teoria dos resíduos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+b^2)\,(x^2+a^2)^2}.$$

2966 — Provar que se tem

$$\int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\,\mathrm{sen}\,(a\,\mathrm{sen}\,bx)\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\,(e^a-1)\quad (a>0\,,b>0).$$

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — **1.º exame final — 17 de Outubro de 1949.**

2967 — *Estática*: Um sistema material é constituido por uma barra rectilínea AB de comprimento l, cujo extremo A é fixo sobre Oy a uma distância b de O e por um disco circular D, de raio r e centro C, o qual, devido a um atrito de escorregamento suficiciente só pode rolar sem resvalamento sobre Ox. A barra encosta-se constantemente ao disco.

O disco é homogéneo de peso total p; a barra tem um peso específico proporcional à distância a A (factor de proporcionalidade k).

a) Determinar o centro de inércia da barra.

b) Calcular a força F que deve actuar horizontalmente em C para manter em equilíbrio a configuração para o qual $\alpha = B\hat{A}O$ é dado.

c) Calcular as reações do disco sobre a base e do piso sobre o disco.

2968 — *Cinemática* — Supondo $r=1m$ e $b=(1+\sqrt{3})\,m$ e que o centro C do disco se desloca no sentido dos xx crescentes com aceleração constante $a=2m/s^2$ (sabe-se que para $t=O$ se encontra sem velocidade sobre Oy).

a) escrever a equação horária do movimento de C e calcular as velocidades angulares do disco e da barra em relação a Oxy no instante para o qual é $B\hat{A}O=60°$ e para a mesma configuração.

b) Calcular as componentes da velocidade de M, ponto do disco em contacto com a barra e deduzir delas o valor da velocidade de M.

c) Calcular a velocidade do escorregamento do disco sobre a barra.

d) Calcular a velocidade angular do disco em relação à barra.

2969 — *Dinâmica:* Um ponto material M de peso p é obrigado à parábola ($x^2=2yOy$ vertical).

a) Achar a expressão da velocidade que M deve possuir no vértice da parábola para atingir sem ultrapassar a cota dada y_0.

b) Deduzir a expressão do período das oscilações que M executa nas cendições impostas na alínea anterior.

c) Deduzir a expressão da reacção da curva em função de x e y para uma posição qualquer do ponto móvel.

d) Achar os componentes da força que deveria actuar sobre M além do peso p para que o ponto material M descrevesse a parábola livremente com a aceleração dirigida constantemente para o seu foco.

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame de frequência ordinário — 1948-49.**

2970 — Mostrar que o conceito de função harmónica definido como valor médio é mais geral que a definição clássica, mantendo-se as propriedades. Verificar que a função $W=x^2-y^2+2$ satisfaz à definição generalizada.

2971 — *a*) Comparar os conceitos de tensor e multivector.

b) Definir produto externo e produto escalar de tensores nos espaços tridimensionais.

c) É possível definir estes conceitos nos espaços pluri-dimensionais?

2972 — *a*) Determinar uma condição suficiente para que o trabalho das forças que actuam num sistema material seja independente do sistema de referência.

b) Se se tratar de um sólido, o que é que se passa?

c) Caracterizar o movimento do ponto representativo do sistema material nesse mesmo caso do sólido, num espaço de configuração cuja métrica é definida por $ds^2 = 2T\,dt^2$, sendo T a energia cinética.

I. S. T. — 2.º exame de frequência extraordinário — 1948-49.

2973 — *a*) Forças conservativas.

b) Domínios em que os potenciais Newtonianos e logarítmicos são funções harmónicas.

c) O potencial de uma força que varia na razão inversa do cubo da distância será harmónico, no plano, ou no espaço tridimensional?

2974 — *a*) Funções do Cálculo Absoluto definidas à custa de tensor ε do espaço tridimensional. Comparação dos resultados com o do Cálculo Vectorial ordinário.

b) Como pode definir-se e utilizar-se um tensor ε num espaço a mais de três dimensões?

2975 — *a*) Utilização da teoria dos momentos na Cimática dos sólidos.

b) Analogias entre os movimentos cicloidais e os movimentos giroscópicos.

I. S. T. — 3.º exame de frequência 1948-49.

2976 — *a*) Comparar os conceitos de mínimo utilizados respectivamente por Gauss e Hertz, na determinação de princípios gerais da dinâmica.

b) Pode-se generalizar o Princípio de Hertz no espaço das fases?

2977 — Verificar que no movimento de um sólido com um ponto fixo, se o momento das forças exteriores em relação ao ponto fixo é constantemente perpendicular ao vector velocidade angular, a força viva é constante.

2978 — *a*) Relacionar a homografia fundamental de equilíbrio de um meio contínuo, com o tensor dos esforços.

b) Conceitos de isotropia e de fluido perfeito.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2979 — Dada uma superfície cónica de revolução e um ponto exterior a ela, e ainda um eixo, fazer rodar a superfície cónica em torno do eixo até levá-la a conter o ponto dado. Número de soluções.

2980 — Dados três pontos, A, B e C, não colineares, fazer passar por eles uma superfície cónica de revolução de abertura dada, nos três casos:

a) Os pontos pertencem a uma directriz circular da superfície.

b) Dois dos pontos pertencem a uma geratriz.

c) Os pontos não têm posição particular.

2981 — Dada uma esfera e uma superfície cónica de revolução, determinar um eixo de rotação tal que nos permita, rodando a esfera em torno dele, levar aquela a ocupar duas posições, distintas, em que ela fica inscrita à superfície cónica. Número de soluções.

2982 — Dados três pontos não colineares, A, B, C, e uma superfície cónica de revolução, determinar um eixo de rotação que nos permita levar A, B e C a pertencerem simultâneamente á superfície cónica, devendo A e B ficar a distâncias dadas do vértice da superfície cónica.

Problemas propostos por Daniel Vera-Cruz, aluno da F. E. P.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

79 — DE BROGLIE, Louis — **La Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules.** (Collection de Physique Mathématique) — Gauthier-Villars, Paris, 1950. — (VI+223 pp.) — 1.650 frs.

Este livro — reimpressão sem modificações da 1.ª edição de 1939 — pertence à série de tratados, admiráveis pela clareza e elegância do estilo, em que Louis de Broglie, desde a sua *Introduction à l'Étude de la Mécanique ondulatoire* (1930) até à recente *Mécanique ondulatoire du Photon et Théorie quantique des Champs* (1949), tem exposto didacticamente os diferentes ramos da mecânica ondulatória e suas aplicações, subordinando tudo a um plano geral onde cabem, alem das suas próprias investigações e maneiras de vêr, as principais correntes da física teórica moderna. É pena que este conjunto de livros — o maior e melhor tratado de Mecânica quântica que conhecemos — não tenha tido, fora de França, o acolhimento que merece. Nos países anglo-saxões principalmente — onde a indiferença pela ciência francesa se tem acentuado muito ultimamente — são raramente citados, sendo-lhes preferidos livros muitas vezes confusos, mais elementares e pouco recomendáveis sob o ponto de vista didáctico.

Na sua *Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules*, o Autor expõe a mecânica ondulatória não relativista dos sistemas de partículas, começando por uma introdução onde a mecânica analítica clássica é resumida admiràvelmente pela maneira mais apropriada para efectuar a transição para a mecânica ondulatória. Esta transição faz o objecto do 2.º capítulo, onde se mostra como a equação de ondas de Schrödinger constitue uma generalização da equação clássica de Jacobi. Depois de expôr os princípios fundamentais da interpretação física das funções e valores próprios dos operadores hermíticos, passa então à mecânica ondulatória propriamente dita dos sistemas, que é introduzida pela análise das propriedades do centro de gravidade sob o ponto de vista ondulatório, pondo em evidência as analogias por vezes profundas entre esta noção e a noção correspondente da Mecânica racional. A segunda parte do livro expõe, com a mesma clareza, as propriedades das funções de onda que descrevem os sistemas de partículas idênticas ou não idênticas, com ou sem spin, assim como as aplicações habituais ao átomo de hélio, à teoria da valência homopolar, ao para e orto-hidrogénio, etc.

É nossa opinião que a necessidade da reimpressão desta obra se fazia sentir muito; mas pena é que o seu preço actual ponha um obstáculo sério à sua expansão.

António Gião

80 — DENJOY, Arnaud — **Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique.** Gauthier-Villars Ed., Paris, 1949, 6500 frs. Quatro partes: 1.ª — *La différentiation seconde mixte et son application aux séries trigonométriques;* 2.ª — *Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions;* 3.ª — *Détermination d'une fonction continue par ses nombres dérivés seconds généralisés extrêmes finis;* 4.ª — *Les totalisations. Solution du problème de Fourier.* Fasc. 1: *Les totalisations;* fasc. 2: *Appendices et Tables générales.*

As séries trigonométricas são um presente dos físicos à Matemática. Os problemas postos por este modo de exprimir funções duma variável real podem parecer muito particulares quando os comparamos com o conjunto dos vastos assuntos de que se ocupa a Análise. Mas esta encontrou, nas questões suscitadas pelo estudo das séries trigonométricas, a origem da maioria das ideias tornadas fundamentais para a matemática moderna: noção geral de função não analítica, integrabilidade das funções descontínuas, distinção entre continuidade e derivabilidade, etc. Não se poderia recusar interesse ao problema primordial posto pelas séries trigonométricas e resolvido por Arnaud Denjoy na sua obra, a saber: determinar o meio de calcular os coeficientes de toda a série trigonométrica convergente de soma dada; e, para tal, definir o processo de integração dando um sentido às fórmulas de Fourier no caso mais geral em que a função desenvolvida não é integrável à Riemam, nem somável à Lebesgue, nem totalizável à maneira dos números derivados de primeira ordem das funções contínuas.

A solução, publicada nas suas grandes linhas pelo autor desde 1921, utiliza os resultados da teoria das funções de variáveis reais, como a fundaram Borel, Lebesgue e sobretudo Baire. Ela é porem infelizmente pouco conhecida. Denjoy tomando por regra retomar desde início todas as doutrinas estranhas ao ensino clássico, fez da sua obra mais um tratado das funções reais, do que uma exposição da solução do problema de Fourier. A segunda parte, dedicada às relações entre os conjuntos perfeitos e as funções do duplo ponto de vista topológico (ou descritivo) e métrico, o 1.º fascículo da parte quarta, dedicado à ideia geral de integral revestindo o carácter duma totalização conjugada com uma medida algébrica dos conjuntos, e os dois Apendices que terminam o 2.º fascículo da parte quarta, estas três secções, perfazendo um total de três quintos do livro, pertencem à teoria geral das funções de variáveis reais. O restante, parte terceira dando o meio de integrar uma derivada segunda generalizada qualquer (é a este problema que, até hoje, se reduz sempre o de Fourier), a parte primeira, estudo elementar da convergência e da integrabilidade termo a termo das séries trigonométricas, e a parte quarta no começo do seu 2.º fascículo, destinado a provar a impossibilidade de diminuir a complexidade das regras da totalização elaboradas na parte terceira, estas três subdivisões, sobretudo as duas ultimas indicadas, são as únicas que correspondem directamente ao título da obra.

Esta oferece ao leitor uma larga iniciação às teorias destinadas a tomar um logar preponderante em todas as questões da Análise onde as singularidades das funções representam um papel importante, quer se trate de funções analíticas quer de integrais reais de equações diferenciais ordinárias ou às derivadas parciais. *(Tradução do prospecto distribuido pelo Editor)*

81 — EINSTEIN, Albert e INFELD, Leopold — **«L'Evoluzione della Fisica»** — Desenvolvimento das ideias desde os conceitos primitivos até à relatividade e aos quantos. — Tradução de Abele Graziadei — Casa editora Einaudi, Turim, 1948.

«A evolução da física» de Albert Einstein e Leopold Infeld é um livro magnífico, na clara e simples exposição dos princípios que estão na base da física moderna, à qual o leitor é guiado através do lento progredir da própria física, considerada como desenvolvimento da mente humana, na afanosa busca da verdade no Universo.

Os autores partem do berço da física, que assume desde Galileu a categoria de ciência, com a descoberta de que não é a velocidade, mas sim a variação de velocidade, que está directamente ligada às forças que actuam sobre um corpo.

Depois a física evolue: procura explicar tudo com simples acções directas e instantâneas entre as partículas materiais que constituem as substâncias; mas depois é constrangida a introduzir um infinito número de novas substâncias para explicar os fenómenos luminosos, até que se descobrem ainda acções transversais, que dão o primeiro golpe na concepção mecanicista do mundo.

Um grande passo em frente deu o pensamento humano com a introdução do conceito de campo, seja eléctrico, magnético ou gravitacional, considerado a princípio como simples comodidade descritiva, depois como entidade real com uma vida própria e acções directas sobre as partículas materiais. Para ter uma visão intuitiva do campo, como realidade autónoma, imaginemos que se dissemina, em toda uma região, em torno duma carga fixa, uma multidão de outras pequenas cargas. Se agora perturbarmos a carga central, as outras serão por sua vez perturbadas, pelo facto de ter variado a força que actua sobre elas; mas enquanto as mais próximas se movem imediatamente, as outras mantêm-se inalteradas tanto mais tempo quanto mais afastadas estiverem: imaginem-se estas cargas em gradual movimento e ter-se-á a impressão como que de um vento que, partindo do centro, as atinja todas sucessivamente. E comparemos ainda as nossas cargas a pequenos seixos ligados por um grande manto que os sustenha: agitando a orla do manto, eles mover-se-ão sucessivamente, de maneira análoga às cargas em questão. Este manto que actua localmente transmitindo a acção longínqua, aquele vento que emana e atinge as diferentes cargas uma após outra, é o campo electromagnético; como o manto da imagem, ele subsiste mesmo se não actua sobre nenhuma carga: permanece no espaço a sua capacidade de acção, que se pode propagar, transportando consigo qualquer coisa que sempre o acompanha: a sua energia.

Com o afirmar-se do conceito de campo, estamos já nos últimos 50 anos de rápidos desenvolvimentos: o físico liberta-se de vínculos onerosos que o forçam a referir os acontecimentos do mundo a esquemas fixos, ao mesmo tempo que se apercebe, pela primeira vez, da inconsistência dos critérios que lhe permitiam afirmar a simultaneidade de dois acontecimentos: até o tempo, que fluía sempre igual a si mesmo, sofre uma revisão inesperada, mudando de aspecto para os vários observadores e amalgamando-se numa só entidade com o espaço, enquanto a matéria e a energia se tornam dois aspectos diversos da mesma coisa, simplificando o problema do desconhecido. Além disso, a identidade entre os dois conceitos de massa dum corpo—como resistência às forças que solicitam o corpo ao movimento ou como capacidade de atraír a si um outro corpo—já não é considerada como mera casualidade; mas recebe um profundo significado conceitual que explica a própria gravidade como propriedade geométrica local do espaço, redutível, na ausência desta, a um movimento acelerado.

Recíprocamente, supondo que se lança um corpo oco fora da atmosfera, de modo que este rode em torno da Terra como um pequeno satélite, dentro dele não se sentiria nenhuma gravidade, sendo esta compensada pela reacção centrífuga. Vem a propósito recordar o erro em que cai Júlio Verne no seu livro «Da Terra à Lua», em que ele, à parte a impossibilidade de fazer partir seres vivos dentro dum projéctil, imagina os seus personagens desprovidos de peso em certo ponto da viagem, naturalmente mais próximo da Lua que da Terra; ele não reflectiu que um objecto que fosse «deixado cair» por um dos seus personagens «não cairia» nunca sobre o pavimento—tendo a mesma aceleração e portanto a mesma velocidade que este—o que sucederia em toda a viagem, mesmo com a ausência da atracção lunar.

É ainda interessante notar que, enquanto a física clássica concebe o universo como um espaço vazio, ocupado aqui e ali por matéria, a teoria da relatividade geral não separa a ideia do espaço físico da matéria que o ocupa: com efeito, por exemplo, um deslocamento de matéria provoca, com o seu campo de gravitação, uma deformação das propriedades geométricas do espaço, assim como uma pequena bola faria sobre uma delgada membrana de cautchu distendida, deslizando sobre esta.

Chegamos finalmente às últimas conquistas conceituais: todos os entes que nós conhecemos têm, a respeito do nosso modo intuitivo de entender o mundo, dois aspectos, um ondulatório e outro corpuscular; e aparece-nos um ou o outro, consoante os fenómenos que se nos deparam.

A teoria ondulatória da luz, que tão bem tinha explicado a difracção e a interferência, cai perante o efeito fotoeléctrico que nos põe em face dos quantos de luz; enquanto, por outro lado, um feixe de electrões apresenta sobre a chapa fotográfica, depois de ter atravessado a fina lâmina de cristal, típicas figuras de difracção, características dos fenómenos ondulatórios.

Mas os dois aspectos derivam do nosso desejo de pôr questões que, a um exame aprofundado, se revelam desprovidas de significado; por exemplo, é óbvio que um dos electrões do feixe agora considerado atinge um ponto da região impressionada da chapa fotográfica, mas é claro que toda a tentativa de conhecer com exactidão o caminho dessa partícula nos obrigaria a interpôr alvos perfurados que alterariam a figura de difracção e, com esta, todo o fenómeno, porquanto o electrão já não cairia no mesmo ponto. Por isso, imaginar a «partícula elementar» como uma pequena bola a que correspondam posição e velocidade bem determinadas, é errado; com a física quântica perde-se pois, completamente, a concepção mecanicista: nós podemos apenas saber quais são as regiões do espaço onde «provàvelmente» a partícula pode encontrar-se num dado instante. Eis portanto o princípio duma possivel solução: a física quântica deve poder-nos dar leis probabilísticas que se tornam depois leis estatísticas quando se trata duma multidão de partículas. Neste sentido ela tem dado brilhantes resultados, enquanto hoje se prepara para enfrentar, depois do problema das partículas, aquele do campo electromagnético.

Antes de encerrar estas minhas palavras desejo notar como, de todo o livro, transparece este facto: não é a inacessível «descoberta da realidade» o que hoje compete ao físico, mas a conexão lógica da multiplicidade de factos observados por meio de instrumentos cada vez mais refinados, com uma visão coerente do mundo, que não é aquela intuitiva e simplicista dos primeiros tempos. Visão à qual o livro de A. Einstein e L. Infeld guia e encaminha com rigor lógico e científico, digno de alta consideração.

Dante Cansolo (Instituto Físico da Universidade de Roma)

Escrito em italiano para a **Gazeta de Matemática** *e traduzido por J. S. S.*

82 — BOULIGAND, Georges — **Les principes de l'Analyse Géométrique.** Tomo I — *Leçons de Géométrie Vectorielle. Préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein* — 3.ª edição revista e aumentada — Livraria Vuibert, Paris, 1949 — 1.200 frs.

Há já um quarto de século, em 1924, apareceu a 1.ª edição das «Lições de Geometria Vectorial». O livro deve ter sido certamente considerado revolucionário relativamente aos métodos então adoptados no ensino em França. Assim o dá a entender o Prof. Goursat na apresentação que fez da obra e o demonstram os cursos publicados nessa época. O cálculo vectorial foi, com efeito, lentamente, talvez mesmo tardiamente, utilizado como instrumento corrente. O mesmo sucedeu com outros ramos da matemática moderna apesar de serem franceses notáveis criadores dalguns destes ramos como E. Cartan, E. Borel, H. Lebesgue, M. Fréchet e outros. Além de outros méritos, não menos importantes, deve-se ao Prof. G. Bouligand o de ser um dos renovadores e um dos maiores propagandistas da modernização dos métodos do ensino da matemática. Atestam-no os seus numerosos livros de que queremos destacar «Primeiras lições da Teoria Geral dos Grupos», «Introdução à Geometria Infinitesimal Directa» e o excelente «Curso de Geometria Analítica» com um interessante e claro prefácio do Prof. E. Cartan. Os seus esforços foram porém finalmente coroados de êxito; assim o provam as modificações introduzidas há já bastante tempo nos programas de ensino.

O cálculo vectorial penetrou mesmo no ensino secundário no estudo da Geometria e dos elementos de mecânica ao lado também de noções de Álgebra Moderna, por exemplo, como a teoria dos grupos, naturalmente introduzida no estudo das transformações geométricas.

Acaba de aparecer agora a 3.ª edição desta obra ampliada sobretudo pela adjunção de notas.

O Prof. Bouligand que rege actualmente na Faculdade de Ciências de Paris a cadeira «Aplicações da Análise à Geometria» resolveu, como o anuncia e justifica na advertência a esta edição, reunir numa só obra, refundindo e dando maior unidade, assuntos publicados sobretudo na «Geometria Infinitesimal Directa» e nas «Primeiras lições da Teoria Geral dos Grupos» atrás citados e há muito esgotados.

Apesar de já desactualizado para o público francês e de muitos outros países o prefácio do Prof. Goursat oferece, infelizmente, para a maioria dos leitores portugueses um interesse grande visto nos encontrarmos, com poucas excepções, em condições de maior atrazo do que o referido há 25 anos em França.

Por isso traduzimos a seguir grande parte deste prefácio que elucida simultâneamente o leitor do conteudo e características da obra.

. . . .

«O Sr. Bouligand dividiu a sua obra em 3 partes, dedicadas respectivamente às operações vectoriais em geometria linear, em geometria métrica e às operações infinitesimais. Esta divisão parece natural, e as ideias encadeiam-se com uma lógica incontestável, sem monotonia alguma. Pode, sem hesitação, recomendar-se a leitura do livro aos jovens professores, que, não tendo já a preocupação de exames a prestar, têm ainda o desejo e o tempo de aperfeiçoar os seus conhecimentos matemáticos. Que leiam a obra sem pressa, meditando com vagar cada capítulo. Farão assim, com o cálculo vectorial por fio condutor, fio um pouco ténue talvez, por vezes, ao que me parece, uma bela viagem matemática. Percorrerão sem dúvida, nesta viagem, regiões novas para eles, mas tornarão a ver também muitas que já atravessaram, ou pelo menos divisaram, no decurso dos seus estudos clássicos e serão surpreendidos por constatar quanto as paisagens, que julgavam conhecer melhor, lhes oferecem aspectos inesperados, quando se examinam sob um novo ponto de vista. E muitas vezes é a partir desse momento que verdadeiramente *compreenderam*, no sentido elevado do termo. Fàcilmente se explica que as propriedades das curvas e das superfícies possam ser ligadas às teorias vectoriais; mas o leitor ficará, sem dúvida, mais admirado ao constatar que noções na aparência puramente abstractas, pelo menos pela maneira por que lhe tinham sido apresentadas, tenham também ligações muito íntimas com esta teoria. Para só citar um exemplo, o Sr. Bouligand mostra desde as primeiras páginas como a noção de volume se introduz muito naturalmente em geometria linear, sem qualquer consideração métrica, pelo estudo dum sistema de três vectores com a mesma origem, não situados num mesmo plano, e o desenvolvimento desta ideia condu-lo por um caminho lógico às propriedades dos determinantes».

«Duma forma geral, a exposição do Sr. Bouligand distingue-se por um caracter nìtidamente filosófico. No início de cada teoria nova, apresenta um pequeno número de novos conceitos, de que admite algumas propriedades fundamentais, para daí deduzir consequências. O leitor acostumado às exposições clássicas terá talvez ao princípio algumas dificuldades para adquirir novos hábitos, mas em breve será recompensado do esforço que teve de fazer. Se este esforço lhe permitisse unicamente tornar a encontrar as noções e os resultados que lhe são familiares, talvez o considerasse supérfluo, o que de resto seria absolutamente injusto. Mas, uma vez adaptado a esta nova disciplina, não terá dificuldade alguma em penetrar nas novas geometrias que tão grande papel representam na ciência de hoje. O Sr. Bouligand mostra ràpidamente como se pode constituir uma Geometria autónoma a duas dimensões, isto é, liberta de qualquer consideração de elementos *exteriores* à multiplicidade de que se trata, fazendo a adjunção à forma quadrática de Riemann de certos outros elementos tirados da própria multiplicidade, forçosamente um pouco arbitrários, mas não implicando contradição alguma. O leitor que tiver reflectido maduramente sobre estes parágrafos sem custo poderá apreender o sentido da Geometria de Weyl, tão estranha ao primeiro contacto».

. . . .

«Ainda que o Sr. Bouligand não fale em momento algum, ao que me parece, de relatividade, creio poder afirmar que ao redigir as notas que terminam o volume e, em particular as duas primeiras, pensou nos estudantes desejosos por se iniciarem nestas novas teorias».

. . . .

As notas e complementos que terminam este **1.º tomo**, abrangendo mais de uma centena de páginas, constituem matéria não menos interessante que a anterior, e intitulam-se: «Sobre os princípios do cálculo tensorial», «Sobre as multiplicidades de Riemann com mais de duas dimensões», «Sobre os princípios da Geometria», «Complementos sobre as superfícies de curvatura total constante, as superfícies convexas, etc.» e «Variantes e extensões dos métodos vectoriais. Aplicações».

M. Zaluar

★

A «GAZETA DE MATEMÁTICA» AGRADECE O ESFÔRÇO DISPENDIDO E ÊXITO ALCANÇADO NA SUA DIFUSÃO AOS ESTUDANTES DAS NOSSAS ESCOLAS SUPERIORES, EM ESPECIAL AOS DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA E DO INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E FINANCEIRAS.

★

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUÊSA

REVISTAS RECEBIDAS POR PERMUTA COM *GAZETA DE MATEMATICA*

Argentina

Boletin Matemático, Buenos Aires.
Mathematicae Notae, Rosário.
Revista de la Unión Matemática Argentina, Buenos Aires.

Brasil

Revista do Instituto de Resseguros do Brasil, Rio de Janeiro
Revista Politécnica, S. Paulo.

Espanha

Euclides, Madrid.
Gaceta Matemática, Madrid.
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Matematica, New York.

França

Bulletin Astronomique, Paris.
Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris.
Annales de l'Institut Fourier, Grenoble.
Annales de l'Université de Lyon.
Intermédiaire des Recherches Mathématiques, Paris.
La Recherche Aéronautique — O. N. E. R. A. — Paris
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées et Bulletin de la Société Philomathique, Paris.

Inglaterra

The Mathematical Gazette, London.
The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford.

Itália

Periodico di Matematiche, Bologna.

Portugal

Agros, Lisboa.
Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses, Lisboa.
Gazeta de Física, Lisboa.
Portugaliae Mathematica, Lisboa.
Portugaliae Physica, Lisboa.
Revista de Economia, Lisboa.
Scientia, Revista dos Estudantes da F. C., Lisboa
Seguros, Lisboa.
Técnica, Lisboa.
Vértice, Coimbra.

Suíça

Elemente der Mathematik, Basel.

Uruguai

Publicaciones del Instituto de Matematica y Estadística, Montevideo.