GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XI | N.° 43 | ABRIL 1950

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N. — Telef. 55 282

ANO XI – N.º 43 **GAZETA DE MATEMÁTICA** ABRIL – 1950

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Sur certaines équations $f(x,y,z,p,q)=0$

par **Georges Bouligand (Paris)**

1. Il s'agira d'équations où f est un polynôme du second degré en p, q. Ce type (T) est souvent pris comme exemple, pour raison de simplicité, quand on s'occupe du *problème de Cauchy*. Il émerge aussi à propos de considérations sur les *systemes triples orthogonaux.* En prenant dans une région de l'espace deux tels systèmes, on obtient en chaque point deux trièdres de directions principales qui, étant trirectangles, sont sur un même cône du second degré. Une équation $f=0$ du type plus restreint obtenu de la sorte se trouve donc admettre pour solutions les surfaces des six familles constituantes; tandis que, dans le type (T) général, une équation $f=0$ est déterminée par cinq familles à un paramètre de surfaces intégrales, sans que cela entraine de droit la connaissance d'autres familles de cette nature.

Ces rapprochements font pressentir le caractère un peu composite de la présente note, caractère renforcé par des soucis concernant *l'épistémologie des problèmes,* dans le sens de certaines de mes publications antérieures (1). Beaucoup de questions seront d'ailleurs posées, sans plus.

2. J'appellerai *probléme* P la recherche d'un élément emprunté à une *catégorie* K nettement délimitée et soumis à des *conditions* assignées. Je supposerai l'invariance de K et des dites conditions par un groupe G de transformations, dont chacune est un automorphisme de K sur elle-même. L'ensemble des solutions de P possède alors la même propriété d'invariance I_G mais celle-ci peut ou non se produire pour une solution prise isolément. L'invariance a lieu par exemple si cette solution convient, cela *à titre unique*, à un problème P_1 déduit de P par adjonction de conditions supplémentaires soumises à la même hypothèse d'invariance I_G que ci-dessus. La conclusion peut encore subsister, même s'il n'y a pas unicité, lorsque certaines modalités topologiques sont remplies: telle, l'absence de solutions arbitrairement voisines de S, au cas où G est un groupe de Lie. Mais, si l'on ne fait aucune hypothèse adéquate, la solution S ne participe pas en général, au caractère d'invariance I_G. Un exemple banal est celui où, K étant le plan euclidien, on donne un champ vectoriel invariant par les rotations autour d'un point fixe O: les courbes tangentes au champ en chaque point ne sont pas en général des cercles de centre O. C'est l'ensemble de ces courbes qui reste invariant par rotation.

Il y a pourtant des cas voisins où cette remarque simple a été méconnue: tels les premiers essais sur les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène on rotation uniforme autour d'un axe, sous influence de l'attraction newtonienne. Certains ont d'abord pensé que chaque figure d'équilibre est de révolution autour de l'axe (1).

3. A la suite de ces généralités, prenons le problème de Cauchy pour une équation

$$f(x,y,z,p,q)=0$$

et pour une courbe donnée C_0 lorsque $f=0$ et C_0 possèdent l'invariance par rapport à un groupe continu G à un paramètre. Tout cela répond bien aux suppositions du n.º 2.

(1) Cf. G. Bouligand — *Les principes de l'Analyse géométrique*, t. II, fasc. A, ch. I, p. 1 et 10; ch. VII, p. 108; ch. IX, p. 143, 169, 170, 181.

(1) Lagrange a été critiqué à cet égard en divers textes (Notice de Lejeune-Dirichlet, t. I, p. 19 des *Gesammelte Werke* de Jacobi; t. II du *Système du Monde*, 2.e éd.n par G. de Pontécoulant p. 438 et 567.) Mais ce n'est pas pour recours à des considerations de symétrie douteuses.

Ayant correctement fait la mise en équations pour le cas des ellipsöides, Lagrange oublie seulement la solution aux trois axes inégaux qu'il était réservé à Jacobi de découvrir.

J'ai déja signalé à cet égard (¹) deux points importants.

a) D'une part, le problème P actuel admet des solutions, engendrées par des courbes C, qui à l'exemple de C_0, sont des trajectoires du groupe G et qu'on trouve en résolvant le problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire du premier ordre, à savoir $f\left(y, z, 0, \frac{dz}{dy}\right) = 0$ si C_0 est $0x$ et G est le groupe des translations parallèles à $0x$ (²). Il arrive même qu'on obtienne ainsi toutes les solutions de P: cela se produit quand, par adjontion à l'énoncé de P d'une condition supplémentaire elle-même invariante par G, on assure l'unicité, pour la solution du nouveau problème P_1 qui se présente alors. En atteignant cette unicité, on assure l'invariance par G de la surface intégrale demandée dans P_1, ou encore, le fait qu'elle se laisse engendrer par des trajectoires de G.

b) D'autre part, un tel mode de génération peut se trouver exclu, faute de pouvoir, dans les conditions indiquées, tabler sur le passage de P à un certain P_1 à solution unique. J'ai déja signalé, sous forme analytique, le cas où P est le problème de Cauchy pour $qy - z = 0$ et l'axe $0x$. L'intégrale générale est alors constituée par les conoïdes d'axe $0x$ et de plan directeur $y0z$, lesquels conduisent bien à l'équation indiquée. Il est clair que l'un deux, pris au hasard, ne se réduit pas à un cylindre de génératrices parallèles à $0x$. Dans ce cas, l'invariance par les translations le long de $0x$ a lieu pour l'équation donnée et pour C_0; elle a lieu aussi pour l'ensemble des solutions, mais elle disparait pour une solution prise au hasard.

Voilà le type de singularité sur lequel j'insiste ici, et qui dans l'exemple cité provient de l'annulation des coefficients sur $0x$, jouant le rôle de ligne C. Cette annulation empêche de pouvoir réaliser les hypothèses qui entraineraient l'unicité de certaines solutions passant par C.

3.bis Tous les exemples qu'on peut tirer du précédent par le jeu d'une transformation ponctuelle s'attachent à des équations qui sont linéaires en p, q. Il n'est pas inutile de donner un exemple de la même nature pour une équation non linéaire. On prendra la suivante

$$\text{(E)} \quad pqz\,(x^2 - y^2) + py\,(z^2 + x^2) - qx\,(z^2 + y^2) = 0$$

laquelle admet le groupe G des homothéties par rapport au point O et ainsi, possède une famille d'intégrales qui sont réduites à des cônes de sommet O. Leurs traces sur le plan $z = 1$ vérifient une équation différentielle ordinaire, obtenue en écrivant que le vecteur $(p, q, -1)$ normal à un de ces cônes est colinéaire au vecteur $(-y'z, z, xy' - y)$ représentant le produit vectoriel de $(1, y', 0)$ et (x, y, z). D'où l'equation cherchée

$$\frac{y'^2}{1+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

On trouve des cônes du second degré

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,mxy - m^2 z^2 = 0$$

Soit maintenant posé le problème de Cauchy pour l'équation (E) et pour une droite issue de O (laquelle est bien invariante par G). Il est facile de voir que si cette droite Δ ne coïncide avec aucun des axes, chacun des deux cônes (toujours réels et distincts) de la famille Γ passant par cette droite jouit de la proprieté d'unicité pour le problème P_1 de Cauchy concernant E, ainsi que Δ, lorsqu'on choisit une des bandes formées, sur l'un de ces cônes, par les élements de contact ayant Δ pour support ponctuel.

Mais tout change quand Δ coïncide, soit avec $0x$, soit avec $0y$. Il suffit pour s'en convaincre de noter que (E) admet, pour toute valeur de la constante λ, la solution $z = \lambda xy$.

Cela donne pour intégrales des paraboloïdes hyperboliques passant par $0x$ et par $0y$. Le problème de Cauchy, posé pour (E) et pour l'une de ces droites, admet donc bien une infinité d'intégrales qui ne sont pas réduites à des cônes de sommet O. Il subsiste d'ailleurs la question de voir s'il n'en existerait pas d'autres encore.

4. Les considérations de l'exemple ci-dessus vont nous servir de transition vers un ensemble de sujets, qui semblent peu étudiés, et dont le thème essentiel est la mise en relations des systèmes triples orthogonaux avec certaines équations $f(x, y, z, p, q) = 0$.

Prenons d'abord pour f um polynôme du second dégré quelconque en p, q: ce qui conduit à une équation $f = 0$ que déterminent 5 familles d'intégrales à un paramètre, pourvu qu'en un point courant M, les 5 normales aux surfaces de ces familles passant en M définissent sans ambiguïté un cône du second ordre. Si 3 de ces familles

$$g_1(x, y, z) = \alpha_1, \quad g_2 = \alpha_2, \quad g_3 = \alpha_3$$

introduisent une transformation localement biunivoque, cela permettra de ramener $f = 0$ à la forme canonique

$$\text{(K)} \qquad pq + A\,(x, y, z)\,q + B\,(x, y, z)\,p = 0$$

(¹) G. Bouligand — *Sur le problème de Cauchy* — Bull. Sc. Math, 2, LX, 1936, p. 206-209.

(²) Au moins localement, on établit que les autres cas de P peuvent se ramener à celui-là par une transformation ponctuelle appropriée.

ou indifféremment

$$1+\frac{A}{p}+\frac{B}{q}=0$$

forme englobant l'équation (E) du n.º 3^{bis}. Chaque plan parallèle à un plan de coordonnées est alors une intégrale et il suffit de 2 nouvelles familles F' e F'' d'intégrales pour fixer l'équation. Le cône des normales en un point M contient alors les parallèles aux axes issus de M, les normales à chacune des surfaces passant par M dans F' et F'': ce qui le détermine en général. Ainsi, dans le cas de (E), la détermination du cône des normales peut s'achever en recourant à la double famille F', F'' constituée par les cônes (Γ). Notons encore, qu'en posant

$$U=z^2+y^2\ ,\quad u=z^2+x^2\ ,$$

(E) a deux familles F'_1, F''_1 d'intégrales obtenues en prenant U fonction de u seul. En effet, cela conduit à prendre

$$pz=\frac{dU}{du}(x+pz)\qquad y+qz=\frac{dU}{du}qz$$

d'où, en portant dans (E) les valeurs de p et de q, exprimées en U' $(=dU/du)$ et simplifiant

$$\frac{(U-u)\,U'}{1-U'}+U'u+U=0$$

ou

$$U-uU'^2=0$$

d'où

$$\sqrt{U}\pm\sqrt{u}=\text{const.}$$

Les familles F'_1, F''_1 sont donc obtenues comme lieux de points dont la somme ou la différence des distances aux axes $0x$, $0y$ sont constantes. Dès lors les intersections des surfaces de ces familles forment, comme il est connu, les trajectoires orthogonales aux paraboloïdes $xy=\alpha z$, surfaces qui parachèvent avec celles de F'_1, F''_1 un système triple, composé de 3 familles d'intégrales de (E).

4^{bis}. Soient maintenant deux systèmes triples orthogonaux quelconques STO_1, STO_2. En chaque point M, interviennent deux trièdres trirectangles dont les arêtes sont les directions principales. Ces deux trièdres son sur un même cône du second degré $\gamma(M)$. L'équation aux dérivées partielles ayant $\gamma(M)$ pour cône des normales sera de la forme

$$(\mathrm{K}_1)\quad A_1(p^2-1)+B_1(q^2-1)+2\,Cpq+2\,Aq+2\,Bp=0$$

En particulier, si STO_2 se réduit aux trois familles de plans parallèles aux plans de coordonnées, familles qui constituent le système noté *sto*, cette équation par annulation de A_1 et de B_1, prendra la forme (K).

A supposer que ces équations puissent être de quelque utilité pratique pour la recherche de systèmes triples orthogonaux, il est indiqué d'étudier d'abord l'équation (K). Il s'agira donc de décider dans quelles conditions il existe pour (K) 3 familles d'intégrales à un paramètre, et qui conduisent à un STO distinct de *sto*. Qu'il s'agisse de (K) ou de (K_1) cela se produit d'ailleurs, avec apparition d'une famille continue à un paramètre de STO, lorsque les fonctions de x, y, z désignées par des grandes lettres et figurant comme coefficients se réduisent à des constantes. Toute génératrice du cône $\gamma(M)$ peut alors jouer le rôle de direction principale pour un de nos STO.

Mais pour une équation du type (K) choisie d'une manière quelconque, on pressent qu'elle ne fournit aucun STO distinct de *sto*. A cet objet, prenons une fonction de point $h(M)$ dont les surfaces de niveau ne forment pas une famille de Lamé. En chaque point M, faisons passer le cône $\gamma(M)$ par les trois parallèles aux axes et par les deux tangentes principales à la surface de niveau de h qui passe en ce point. Nous aurons une équation du type (K) dont le mode d'obtention, sans donner de certitude négative, laisse cependant peu d'espoir d'obtenir un STO.

En effet, à supposer qu'un tel STO existe sa recherche pourrait s'amorcer à partir du principe suivant, applicable indifféremment à la forme (K) ou (K_1) de l'équation $f=0$. Envisageons une surface intégrale s. En un point M, le cône $\gamma(M)$, qui porte la normale à s, coupe le plan tangent suivant deux droites rectangulaires Mu, Mv. Pour que s soit élement d'un STO inclu dans l'ensemble des solutions de $f=0$, il faudrait qu'en chaque point de s ces tangentes Mu, Mv soient principales. Ce sont là des conditions nécessaires, mais en général non suffisantes. Ayant formé l'équation du second ordre à laquelle doit satisfaire s pour que les tangentes rectangulaires Mu, Mv, soient aussi conjugées, il faudra chercher s'il existe des solutions communes à cette équation du second ordre et à la proposée $f=0$. Si l'on a pu déterminer les surfaces s pour lesquelles cette circonstance se produit, et même si l'on en a obtenu une famille à un paramètre, on devra encore s'assurer que, pour leurs lignes de courbure d'un des systèmes, il existe des trajectoires orthogonales, ce qui introduit une condition nouvelle. Or dans le cas envisagé à l'alinéa précédent, la famille d'intégrales à un paramètre dont on est parti pour déterminer l'équation présente bien la coïncidence en chaque point des directions Mu, Mv avec les tangentes principales, et ne satisfait pas aux conditions supplémentaires dont nous venons de parler. Il est à craindre que la même impossibilité se présente pour d'autres familles d'intégrales qui auraient aussi la même propriété de coïncidence.

Les difficultés actuelles n'ont rien qui puissent surprendre en des problèmes où, au lieu de chercher des intégrales d'une équation aux dérivées partielles dont chacune se détermine isolément, nous cherchons par exemple 3 de ces intégrales u, v, w pour l'équation suivante solidaire de (K)

$$\frac{1}{\omega_z} = \frac{A}{\omega_x} + \frac{B}{\omega_y}$$

en les soumettant à des relations mutuelles telles que dans le cas présent:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, w = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, w \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v = 0$$

Il s'agit ici en fait de la compatibilité d'un système de 6 équations du prémier ordre à 3 fonctions inconnues, ce qui ne peut manquer d'amener à des calculs assez complexes. Il y aura donc lieu de commencer, dans le champ défini par les considérations précédentes, par l'examen de problèmes plus simples [1].

5. Tel sera le cas de la question suivante:

On se donne deux équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad g(x, y, z, p, q) = 0$$

qui définissent ou non le même ensemble d'éléments (x, y, z, p, q). *On demande s'il existe deux champs scalaires* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ *tels qu'il y ait orthogonalité entre chaque surface de niveau du premier et chaque surface de niveau du second, le long de leur intersection, tels en outre que les surfaces* $u = C.^{te}$ *soient des intégrales de* $f=0$, *et les surfaces* $v = \text{const.}$ *des intégrales de* $g = 0$?

La question pourrait être étudiée en géométrie riemannienne, mais sera limitée ici *au cas euclidien.* Si l'on écrit sous la forme

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

les équations exprimant que le vecteur (ξ, η, ζ) est normal au point x, y, z à une intégrale soit de $f=0$, soit de $g=0$, on devra prendre

$$f(x, y, z, p, q) = F(x, y, z, p, q, -1)$$
$$g(x, y, z, p, q) = G(x, y, z, p, q, -1)$$

Les champs scalaires u et v demandés seront définis par le système

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} F(x, y, z, u_x, u_y, u_z) = 0 \\ G(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = 0 \\ u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \end{cases}$$

La recherche de solutions de (S) s'amorce en notant que les surfaces $v = c.^{te}$ satisfont à l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

où p, q sont des fonctions de x, y, z, définies par les équations simultanées

$$g(x, y, z, p, q) = 0$$
$$\omega(x, y, z, p, q) = Up + Vq - W = 0 \quad (\text{où } U = u_x, \; V = u_y, \; W = u_z)$$

Comme il est connu, la condition d'intégrabilité s'écrit alors

$$\omega_x g_p + \omega_y g_q + \omega_z (p g_p + q g_q) - \omega_p (g_x + p g_z) - \\ - \omega_q (g_y + q g_z) = 0$$

ce qui, pour un champ vectoriel U, V, W et une g quelconques donne la condition

$$(U_x p + V_x q - W_x) g_p + (U_y p + V_y q - W_y) g_q + \\ + (U_z p + V_z q - W_z)(p g_p + q g_q) - \\ - (U g_x + V g_y + W g_z) = 0$$

p, q représentant l'un des couples de valeurs, fonctions de x, y, z, U, V, W, déterminés par $g = 0$, $\omega = 0$. Lorsqu'on choisit pour (U, V, W) le gradient de u, on est ainsi conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées secondes. En général la première équation $F = 0$ du système (S) n'a en commun avec l'équation ainsi formée d'autre solution que $u = \text{const.}$ Sauf en des cas particuliers, il n'y a donc pas de système doublement orthogonal comprenant une famille à un paramètre d'intégrales de $f = 0$ et une famille anologue pour $g = 0$.

6. C'est ce résultat qu'il s'agit d'appliquer lorsque f et g coïncident avec une expression de la forme

$$f = g = 1 + \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$$

[1] En marge de notre exposé, il est bon d'observer qu'en partant d'un système triple orthogonal donné, on pourra toujours le définir comme le système des intégrales communes aux diverses équations $f(x, y, z, p, q) = 0$ telles que f soit un polynôme du second degré en p, q, le cône $\gamma(M)$ des normales en chaque point M devant passer par les trois arêtes du trièdre qui est principal pour le STO donné en ce point. Cette classe d'équations pourra s'écrire, en appelant U, V, W des polynômes du 1er degré en p, q, à coefficients fonctions de x, y, z, sous la forme

$$\frac{\alpha}{U} + \frac{\beta}{V} + \frac{\gamma}{W} = 0$$

en appelant α, β, γ des *fonctions arbitraires* de x, y, z. Il est entendu que chacune des équations telle que $U=0$ exprime l'orthogonalité du vecteur $p, q, -1$ à un vecteur $\vec{u}$ ou (A_1, B_1, C_1) donnant la diréction d'une arête du trièdre principal en un point courant. En posant

$$U = A_1 p + B_1 q - C_1, \quad V = A_2 p + B_2 q - C_2, \quad W = A_3 p + B_3 q - C_3,$$

on aura donc entre les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les relations qui expriment l'orthogonalité de deux d'entre eux. Ces vecteurs sont d'ailleurs complétement déterminés par le fait qu'on part d'un STO donné.

ce qui conduit à écrire simultanément

$$\frac{1}{u_z} = \frac{A}{u_x} + \frac{B}{u_y}$$

$$(u_{xx}p + u_{xy}q - u_{xz})\frac{A}{p^2} + (u_{xy}p + u_{yy}q - u_{yz})\frac{B}{q^2} +$$
$$+ (u_{zx}p + u_{zy}q - u_{zz})\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) + u_x\left(\frac{A_x}{p} + \frac{B_x}{q}\right) +$$
$$+ u_y\left(\frac{A_y}{p} + \frac{B_y}{q}\right) + u_z\left(\frac{A_z}{p} + \frac{B_z}{q}\right) = 0$$

où l'on prend pour p, q l'un des couples déterminés par

$$f = 0 \qquad u_x p + u_y q - u_z = 0$$

L'équation $f = 0$ équivaut à

$$(p + A)(q + B) = AB$$

ce qui permet de poser

$$p = A(t-1) \qquad q = B\left(\frac{1}{t} - 1\right)$$

où t est l'une des racines de l'équation

$$Au_x(t-1) + Bu_y\left(\frac{1}{t} - 1\right) - u_z = 0$$

On voit que, malgré les précautions prises, l'équation du second ordre qui conditionne la fonction u, cela concurremment à l'équation

$$u_x u_y = u_z(Bu_x + Au_y),$$

est une équation assez peu maniable. En dehors de solutions communes évidentes $\alpha x + \alpha_1$, $\beta y + \beta_1$, $\gamma z + \gamma_1$, il est difficile de prévoir, dans une discussion systématique, ce que sera l'ensemble de toutes les solutions communes.

Il n'en est pas moins important d'avoir signalé cette voie assez incommode, car lorsque A, B sont des fonctions de types particuliers, il n'est pas exclu qu'elle puisse se prêter à des simplifications.

Pour clore ces géneralités, notons qu'à partir du moment où, ce qui s'est présenté par exemple dans (4), deux familles d'un STO sont des intégrales d'une équation du type (K), alors, il en est de même de la troisième. Mais ce cas suppose remplies des conditions vraiment trop favorables pour offfrir beaucoup d'intérêt.

7. Tout un champ de recherches apparait quand on introduit diverses hypothèses annexes : à savoir par exemple, que l'équation de type (K) admette l'invariance, ou bien par les translations parallèles à une direction fixe, ou bien par les homothéties faites d'un point fixe comme centre. Les problèmes concernant les systèmes triples orthogonaux détenant l'un de ces modes d'invariance ont d'ailleurs été sérieusement étudiés indépendamment des considérations actuelles ([1]).

Or ces dernières présentent parfois de l'intérêt. Reprenons par exemple, le système formé des quadriques homofocales définies par l'équation

$$(Q_\lambda) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

et des diverses quadriques homothétiques des (Q_λ) par rapport à l'origine O dans un rapport quelconque. Ce système fournit une intégrale complète d'une équation qui s'obtient en éliminant λ entre les deux suivantes

$$\frac{x}{a^2+\lambda} + \frac{pz}{c^2+\lambda} = 0 \qquad \frac{y}{b^2+\lambda} + \frac{qz}{c^2+\lambda} = 0$$

ce qui donne

$$(b^2 - c^2)\,q\,(x + pz) - (a^2 - c^2)\,p\,(y + qz)\,.$$

L'équation obtennue est du type (K), et jouit de l'invariance I_G par le groupe (G) des homothéties de centre O. Rèciproquement, pour toute valeur constante du rapport α/β, l'équation

$$(H) \qquad \alpha\left(1 + \frac{x}{pz}\right) + \beta\left(1 + \frac{y}{qz}\right) = 0$$

détermine à une homothétie près de centre O un système de quadriques homofocales. L'équation (H) convient aux surfaces dont une normale quelconque MN, coupant en N le plan $x0y$, donne lieu à la propriété suivante : entre la direction ON et celle Ou de la trace sur $x0y$ du plan parallèle à MN mené par $0z$, existe une correspondance homographique de rayons doubles $0x, 0y$. En prenant une droite fixe Δ issue de O, les normales menées aux (Q_λ) en leurs intersections avec Δ sont parallèles aux géneratrices d'un cône du second degré passant par Δ et par les axes de coordonnées. Grâce à quoi, intervient une équation du type (K), ce qui ne se produirait évidemment pas en partant d'un STO quelconque et des ses homothétiques par rapport à O.

Nous venons de constater la présence d'une famille continue à un paramètre de STO satisfaisant à l'équation (H), douée de l'invariance I_G. Cette invariance convient à la famille continue précédente, prise

---

([1]) G. Darboux — *Leçons sur les systèmes triples orthogonaux et les coordonnées curvilignes* 2.e édition, 1910, livre III, ch. VIII.

en bloc, en restant étrangère à un quelconque de ses éléments, ce qui donne un nouvel exemple à l'appui des remarques du n.° 2.

8. Cela suggère d'essayer de caractériser, entre les divers STO, celui des quadriques homofocales centrées en O, par un propriété des normales à ces surfaces en leurs points situés sur quelque droite fixe $O\Delta$, propriété conduisant à une équation du type (K). Par exemple, ont peut songer à remplacer l'équation (H) par l'équation plus générale

$$(\mathrm{H}_1) \qquad A\left(1+\frac{x}{pz}\right)+B\left(1+\frac{y}{qz}\right)=0$$

où le rapport A/B ne dépend que de x/z, y/z, ce qui assure l'invariance I_G. Une telle équation se distingue d'autres plus générales et notamment de

$$C+A\frac{x}{pz}+B\frac{y}{qz}=0$$

par le fait d'avoir pour solutions les sphères $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Or l'adjonction d'une telle hypothèse est assez naturelle, vu la tendance d''ellipsoïdes homofocaux, dont le petit axe croit indéfiniment, à devenir homothétiques à des sphères: cela explique ce fait que le cône du second degré rencontré à la fin du n.° 7, passe par $O\Delta$. On pourrait choisir (H_1) de manière à lui donner pour solutions les cônes d'une famille à un paramètre avec O pour sommet commun, famille prise de manière que par chaque point, il passe un cône et un seul. Dans les solutions de (H_1), serait alors inclu le STO formé par les sphères de centre O, les cônes précédents et ceux qui les coupent orthogonalement. Mais l'interêt se porte ici vers les (H_1) incluant d'autres STO, tous homothétiques par rapport à O de l'un d'entre eux. Il s'agirait de savoir si les conditions assurant l'existence d'une telle famille de STO peuvent être satisfaites en d'autres cas que celui où A/B reste constant [1].

D'après une idée signalée au n.° 4[bis], on aurait des conditions nécessaires en exprimant l'existence de solutions communes à (H_1) et à l'équation du second ordre

$$Ax\,qr+[(A+B)\,z-Axp-Byq]\,s+By\,pt=0$$

formée en écrivant que pour chaque point d'une certaine intégrale de (H_1), les tangentes orthogonales Mu, Mv sont aussi conjuguées. Le calcul peut se faire en prenant $B=1$, mais reste assez pénible, sans toutefois exclure des possibilités de recherche.

9. Le cas des paraboloïdes homofocaux appelle aussi des remarques intéressantes. L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont, avec ces paraboloïdes, leurs translatés parallèlement à leur axe Oz est de la forme

$$(\mathrm{h}) \qquad \frac{x}{p}-\frac{y}{q}=c$$

où c désigne une longueur constante. Or, tandis que dans l'équation (H) du n.° 7, relative à des quadriques homofocales concentriques, se trouvait inclu un STO formé par les sphères de centre O et les cônes asymptotes de ces quadriques, il ne subsiste ici aucun vestige d'une propriété analogue. Le rôle des sphères de centre O passe aux plans $z=$ const. mais dans ces plans, on ne peut définir de courbes qui viendraient supplanter les sections sphériques de nos cônes. En effet, dans équation solidaire de (h), soit

$$u_z\,(xu_y-yu_x)+cu_x\,u_y=0$$

l'annulation de u_z implique celle du produit $u_x\,u_y$, si bien que le seul système triple inclu dans (h) et pouvant apparaître de la sorte est le banal sto du n.° 4[bis]. La caractérisation éventuelle des paraboloïdes homofocaux au sein d'une classe d'équations du type (K), invariantes dans les translations parallèles à Oz, est donc à fonder, semble-t-il, sur des principes assez différents de ceux qui nous ont conduit par exemple à isoler le cas des équations (H_1) [1].

Dans ces recherches, où certains ternes de solutions empruntés à la solidaire d'une équation du type (K) doivent fournir un STO, il serait intéressant, en général, de délimiter les ensembles d'équations de cette nature, où par le jeu des conditions assurant l'existence de tels ternes, il n'émerge qu'un système très restreint d'éléments: sorte de *quantification géométrique*, analogue à celle qui se produit quand, pour chercher une fonction uniforme z de x, y, on est conduit à écrire par exemple

$$dz=dU\,(x\,,y)+f\,(\lambda)\,(xdy-ydx)$$

où U est une fonction uniforme donnée et où λ est une constante indéterminée. En ce cas simple, il n'y a de solutions qu'en égalant le paramètre λ à l'une des racines de $f=0$.

---

(1) Ce cas est insigne à d'autres titres. Par exemple, il émerge par l'invariance que détient (H) relativement aux transformations menant d'une surface à une surface parallèle; ou encore par la propriété pour (H_1) d'admettre une surface intégrale non développable et non sphérique, reduite à une quadrique symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées.

(1) Noter cependant que (h), comme (H), est invariant par parallélisme.

Vers une réhabilitation du déterminisme

par António Gião

La physique théorique a pris à juste titre une position dominante et en quelque sorte régulatrice vis-à-vis des autres sciences et de la philosophie elle-même, du moins de la philosophie que mérite son nom par le souci de l'objectivité et le refus de baser quoi que ce soit sur des mirages psychologiques. Par son but idéal, qui est selon nous la recherche d'un être mathématique dont les propriétés puissent être mises en correspondance avec les propriétés de l'Univers considéré comme autonome, la physique théorique doit tendre nécessairement, si un tel être existe, vers un déterminisme strict. C'est du moins la conclusion qui se dégage de l'analyse dont nous exposons les grandes lignes dans cet article, où nous nous astreindrons à ne pas utiliser explicitement le symbolisme mathématique.

1. Q'est-ce qu'un être mathématique, ou plutôt que sont les êtres mathématiques qui interviennent dans la physique? Ce sont des ensembles d'éléments abstraits irréductibles mais non pas indépendants, c'est-à-dire reliés entre eux par une loi ou propriété leur conférant un caractère synthétique ou d'unité. Exister, pour ces êtres mathématiques, c'est précisément posséder un tel caractère d'unité. L'être mathématique qui doit décrire l'Univers, que la physique théorique recherche inlassablement, dont elle admet l'existence ne serait-ce qu'implicitement ou inconsciemment comme une base inébranlable assurant la possibilité de constructions fragmentaires et provisoires, est donc la réalisation, l'épanouissement mathématique d'une loi, d'une prepriété qui doit se vérifier partout. Considérons alors l'Univers physique. Il se compose visiblement de deux parties: une partie géométrique, l'espace-temps ou contenant, et une partie physique proprement dite, le contenu de l'espace-temps (matière, électricité, rayonnements, etc). Supposons qu'il est possible d'envisager l'Univers comme un être complètement autonome et auto-déterminé, en prenant cette affirmation comme un postulat sans chercher ici à la justifier par des considérations à caractère philosophique et métaphysique. La loi d'un tel être lui est essentiellement intrinsèque et ne peut consister qu'en une relation bilatérale déterminant complètement l'une par l'autre les deux parties qui le composent, c'est-à-dire le contenant et le contenu. Si cette relation est d'essence mathématique, comme il est naturel ou même nécessaire de le penser, alors il existe un être mathématique dont les propriétés peuvent être mises en correspondance avec les propriétés de l'Univers et cet être mathématique mérite vraiment le nom d'être mathématique non-arbitraire, c'est-à-dire complètement auto-déterminé.

Le point important de cette idée est qu'il est possible, comme nous l'avons montré ailleurs (1), de l'exprimer rigoureusement par un système d'équations formant ce qu'on appelle en physique théorique un système d'équations du Champ, car ce sont elles qui décrivent les champs de force essentiels de l'Univers (la gravitation et l'électromagnétisme). Voulant éviter tout développement mathématique dans cette étude, je ne peux évidemment pas expliciter ces équations, mais il est cependant nécessaire de dire qu'elles satisfont à trois conditions essentielles dans toute théorie unitaire:

1.° — leur point de départ n'est pas un choix arbitraire d'une fonction formée ad hoc pour qu'un traitement mathématique approprié conduise aux lois classiques de la physique.

2.° — elles déterminent l'espace-temps considéré en tant qu'être géométrique doué d'une structure interne et d'une forme.

3.° — enfin, elles peuvent êtres reliées à une Mécanique ondulatoire, condition indispensable pour que soit possible la synthèse des phénomènes macrophysiques et microphysiques.

Ajoutons que l'existence même de l'espace-temps, avec le nombre de dimensions et les autres propriétés évidentes qu'on lui connait, n'est pas posée à priori mais au contraire déduite de l'expression mathématique de l'idée d'être mathématique non-arbitraire.

---

(1) Les lecteurs qu'intéresse le développement mathématique de ces idées trouveront ce développement dans les mémoires suivants de l'auteur: *Portugaliae Physica*, vol. 2, 1946, pp. 1-98; *Portugaliae Mathematica*, vol. 5, 1946, pp. 145-192; *Ibid.*, vol. 6, 1947, pp. 67-114; *Ibid.*, vol. 7, 1948, pp. 1-44; *Bol. Soc. Port. Matem.* (A), 1947, pp. 29-40. *Journ. d. Phys. et Rad.*, **10**, 1949, pp. 240-249; *Phys. Rev.*, **76**, 1949, pp. 764-768. On peut aussi consulter plusieurs Notes publiées depuis 1947 aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris.

2. Comment cette idée permet-elle de traiter le problème du déterminisme, qui nous occupe plus spécialement ici? Et tout d'abord que signifie l'affirmation, souvent exprimée par la science depuis une vingtaine d'années, que les phénomènes microphysiques révèlent un indéterminisme essentiel de l'Univers? Elle signifie que les nombres qui interviennent dans la représentation de ces phénomènes sont de nature probabiliste, qu'ils ne peuvent exprimer que les probabilités pour que les événements aient lieu en tel ou tel endroit et à tel ou tel moment. A première vue, la notion d'être mathématique non-arbitraire, à laquelle nous attachons une signification cosmologique fondamentale, semble admettre la possibilité d'un indéterminisme essentiel, semble ne pas permettre de décider entre déterminisme et indéterminisme. On pourrait croire en effet que l'expression mathématique de cette notion peut comporter des éléments de nature probabiliste déterminant seulement les probabilités des événements. Mais remarquons d'abord qu'une distribution de nombres ne peut être considérée comme représentant les probabilités des événements ayant lieu dans un système isolé comme l'Univers que si elle peut être soumise à une opération que l'on appelle la normalisation, et qui traduit simplement le fait que les probabilités considérées dans leur ensemble et non plus localement perdent évidemment leur caractère de probabilités pour devenir simplement la certitude de rencontrer tous les événements dont se compose le système. Remarquons ensuite que dans l'expression de l'idée d'être mathématique non-arbitraire aucun élément ne peut comporter des paramètres arbitraires, ce qui les rend évidemment inaptes à subir l'opération de normalisation et donc à représenter des probabilités. Celles-ci n'apparaissent qu'à partir du moment où, cessant d'étudier l'Univers tel qu'il est véritablement, on crée par la pensée des univers fictifs différant plus ou moins de l'Univers réel par une configuration non réalisée et non réalisable, c'est-à-dire virtuelle, des entités élémentaires qui le composent. L'enchaînement de ces configurations virtuelles et sans réalité physique ne peut satisfaire intrinsèquement à aucune loi; si néanmoins on lui en impose une, ce qu'on gagne ainsi apparemment en ordre dans ces mondes virtuels on le perd en désordre dans la signification des êtres mathématiques qui doivent les représenter et qui deviennent alors des probabilités. C'est ainsi, croyons-nous, qu'opère la microphysique quantique.

Nous sommes donc convaincus que la notion de probabilité n'est pas applicable quand on envisage la physique à un point de vue cosmologique (où il ne peut être question de configurations virtuelles), et qu'elle doit céder la place à une notion déterministe. Quelle est cette notion? Considérons des entités résidant dans l'espace et dans le temps. Abstraction faite de leurs propriétés «superficielles», que reste-t-il? Uniquement leur présence. Il est clair que l'on peut définir une intensité de la présence des entités en chaque point de l'espace-temps et nous avons d'ailleurs montré (1) que toutes les fonctions qui interviennent dans l'expression de l'idée d'être mathématique non-arbitraire peuvent être formées avec l'intensité de présence des entités élémentaires de l'Univers (particules élémentaires). Elles ont donc une nature déterministe.

3. On voit par ce qui précède que s'il existe un être mathématique représentant l'Univers considéré comme autonome, on est conduit à admettre un déterminisme strict. Toute la question déterminisme-indéterminisme, si controversée, est donc à notre avis suspendue à une hypothèse d'existence. La physique théorique admet, croyons-nous, cette existence, mais peut-être est-ce là une illusion; peut-être la physique sera-t-elle condamée pour toujours à ne faire que des constructions sans justification vraiment profonde quel que soit leur degré de complication. Il n'y a en effet rien d'absurde à admettre a priori que le mathématique n'est qu'un aspect de l'Univers, évidemment important, mais qui n'épuise pas sa réalité. Cependant pour toute une grande famille d'esprits dont l'importance est visible à chaque époque de l'histoire de la philosophie, il est impossible de penser que l'Univers ne soit pas autonome. Alors apparaît immédiatement la primauté essentielle du mathématique, puisque la loi d'un être autonome ne peut consister, comme nous l'avons dit, qu'en une relation entre deux parties le composant et que toute relation est, en tant que telle, mathématique. Nous croyons donc qu'il est possible de franchir un nouveau pas dans le problème du déterminisme en affirmant que sa solution dépend uniquement du caractère autonome ou non autonome de l'Univers. Au fond, le problème du déterminisme n'est que le problème de l'immanence ou de la transcendance de la loi de l'Univers. Si la loi de l'Univers lui est immanente, il est un être autonome et d'essence mathématique et il y a déterminisme. Par contre, si la loi de l'Univers lui est transcendante, il peut y avoir déterminisme ou indéterminisme.

4. On peut se demander quelle est la raison principale qui a conduit à l'introduction de l'indéterminisme dans la physique moderne. Il nous semble qu'il faut la chercher dans le fait que la microphysique ne se place jamais au point de vue cosmologique qu'exige l'idée d'être mathématique non-arbitraire. Par une séparation arbitraire et illégitime entre observateur et système observé, entre sujet et objet, la physique moderne considère comme essentiellement indéterminées les réactions entre l'observateur et le système observé, d'où l'apparition d'incertitudes jugées essentiellement conformes à la nature des choses, car dans cette conception l'observation est un acte libre, en quelque sorte miraculeux, ajouté du dehors à l'Univers physique. Par contre, au point de vue cosmologique qui correspond à l'idée d'être mathématique non-arbitraire, aucune séparation entre sujet et objet n'est permise, ces deux termes perdent leur signification et l'observation d'une grandeur devient une propriété du monde comme toutes les autres propriétés, se réalisant chaque fois qu'en un point de l'espace-temps sont satisfaites certaines conditions mathématiques. Ceci revient en somme à réintroduire l'observateur dans l'Univers physique, en lui faisant perdre la situation fausse, surnaturelle pourrait-on dire, où la physique indéterministe le place. Dans une physique véritablement fondamentale il n'y a qu'un seul système: c'est l'Univers physique dans son ensemble, y compris tous ses observateurs. Entre ce qu'on appelle vulgairement le sujet et l'objet il n'y a pour cette physique qu'une différence d'intensité, ou plutôt de fréquence ou de densité des observations de l'ensemble des propriétés physiques. Partout l'Univers s'observe lui-même mais en général seulement en des points rares et clairsemés de l'espace-temps, sauf précisément en quelques domaines où le nuage des points d'observation est tellement dense qu'il en devient une sorte de jet continu. C'est là que l'Univers se percoit et prend conscience de lui-même, d'une manière particulièrement intense, comme chez les animaux supérieurs et chez l'homme à l'état de veille. En somme, pour la physique à caractère cosmologique il n'y a qu'un seul observateur, qui est l'ensemble de l'Univers.

5. Il n'est pas inutile de remarquer que des circonstances étrangères à la science physique semblent avoir créé un climat favorable à l'apparition d'un courant d'idées indéterministes. Depuis l'assaut du pragmatisme contre le déterminisme mécaniciste de la fin du XIX^e siècle, bientôt suivi par l'exaltation romantique de l'acte libre élevée à une hauteur cosmique dans le bergsonisme, depuis enfin les cris nostalgiques de plusieurs écoles «philosophiques» et littéraires vers une soi disant liberté bâtie sur les «lois contingentes» on a vu la Physique oublier progressivement le but idéal que nous avons rappelé au début de cet article: la recherche d'un être mathématique capable de représenter l'Univers physique.

Le désir de sauvegarder une «loi morale» jugée inséparable de l'indéterminisme de l'acte libre, le besoin très général de considérer la destinée humaine comme autonome et la tendance, tout aussi répandue, à n'accorder une «dignité» et un «intérêt» prééminents qu'à une loi de l'Univers qui lui soit transcendante, ont exercé, à chaque époque, une énorme pression sur les esprits. À l'heure actuelle de nombreux physiciens en subissent les effets, et cela se traduit par la conception de l'observateur libre surajouté au monde dont il ne retire que des données probabilistes, ou bien par l'idée que la réalité profonde transcende l'espace-temps.

Cet état de choses ne saurait être changé, comme nous l'avons dit, que par la réintégration entière de l'homme dans l'Univers spatio-temporel, plus exactement par la cessation du désir d'une partie importante de l'humanité pensante de se placer chimériquement hors de l'espace et du temps. Un tel «retour à l'espace», qui s'accompagne nécessairement de la réhabilitation du déterminisme, ne comporte pas, bien au contraire, une perte de «dignité» et d'«intérêt» de l'Univers. Pour nous, qui admettons que l'existence mathématique devient physique quand elle est non-arbitraire, c'est-à-dire auto-déterminée, il est immensément intéressant de constater cette «incarnation» du nombre. Mais il y a plus: la loi de l'Univers considéré comme autonome, tout en lui étant intrinsèque, peut cependant en un certain sens être considérée comme un opérateur agissant sur une «matière première» mathématique amorphe pour construire avec elle l'être mathématique non-arbitraire. Alors, de même que cet être possède à la fois, parce qu'il est le non-arbitraire, l'existence mathématique et l'existence physique, il n'est pas absurde d'admettre parallèlement que l'opérateur d'essence mathématique qui est la loi de l'Univers déterminant complètement l'un par l'autre son contenant et son contenu puisse posséder aussi à la fois l'existence mathématique et une autre existence que nous qualifions de métaphysique, faute de savoir véritablement la qualifier. L'imagination et le coeur humains ont donné à cette existence des noms multiples, mais ne serait-elle pas avant tout cet «éclat superessentiel» dont parle si souvent le grand Denys l'Aréopagite?

Quoi qu'il en soit, et pour conclure, nous pensons que les pages précédentes sont suffisantes pour montrer que l'introduction d'un point de vue véritablement cosmologique dans la science doit conduire à la conception d'un Univers déterministe d'essence mathématique mais cependant parfaitement compatible avec toutes les aspirations de l'esprit humain.

Inégalités

par **Jean Aczél**

V

Solutions des problèmes et des exercices de la partie IV

Problème 35. La concavité de $F(x,y)=\sqrt{xy}$ résulte de $(x_1+x_2)(y_1+y_2)=x_1 y_1+x_1 y_2+x_2 y_1+x_2 y_2 \geqslant x_1 y_1+2\sqrt{x_1 x_2 y_1 y_2}+x_2 y_2=(\sqrt{x_1 y_1}+\sqrt{x_2 y_2})^2$.
La convexité de $F(x,y)={}^a\log(a^x+a^y)$ résulte de

$$2\log\left(a^{\frac{x_1+x_2}{2}}+a^{\frac{y_1+y_2}{2}}\right)=$$
$$=\log(a^{x_1}a^{x_2}+2\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}a^{y_1}a^{y_2}}+a^{y_1}a^{y_2})\leqslant$$
$$\leqslant\log(a^{x_1}a^{x_2}+a^{x_1}a^{y_2}+a^{y_1}a^{x_2}+a^{y_1}a^{y_2})=$$
$$=\log(a^{x_1}+a^{y_1})+\log(a^{x_2}+a^{y_2}).$$

Pour démontrer que $F(x,y)=x^{q_1}y^{q_2}$ est concave, il faut vérifier l'inégalité

$$\frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{2}<\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^{q_2},$$

c'est-à-dire, puisque $q_1+q_2=1$,

(21) $\quad x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}<(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2}.$

Or, en utilisant la seconde inégalité (4), on a

$$\frac{x_1^{q_1}y_1^{q_2}+x_2^{q_1}y_2^{q_2}}{(x_1+x_2)^{q_1}(y_1+y_2)^{q_2}}=\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)^{q_2}+$$
$$+\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^{q_1}\left(\frac{y_2}{y_1+y_2}\right)^{q_2}<q_1\frac{x_1}{x_1+x_2}+q_2\frac{y_1}{y_1+y_2}+$$
$$+q_1\frac{x_2}{x_1+x_2}+q_2\frac{y_2}{y_1+y_2}=q_1+q_2=1.$$

ce qui équivaut à la relation (21). La concavité de $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$ se démontre d'une manière complètement analogue.

Problème 36. En divisant les deux membres de l'inégalité (20) par k, on obtient l'inégalité de Jensen à k termes et à n variables pour la fonction $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$; sa validité résulte de la concavité de cette fonction. Pour démontrer l'inégalité de Hölder posons dans (20) $n=2$, $1/r=q_1$, $1/s=q_2$, $a_1=x_1^{(1)},\cdots,a_k^r=x_1^{(k)}$, $b_1^r=x_2^{(1)},\cdots,b_k^r=x_2^{(k)}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2)^{1/2}\geqslant a_1 b_1+$$
$$+a_2 b_2+\cdots+a_k b_k.$$

Problème 37. En procédant comme nous l'avons indiqué, on a

$$x_1(x_1+x_2)^{r-1}+y_1(y_1+y_2)^{r-1}<$$
$$<(x_1^r+y_1^r)^{1/r}[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{\frac{r-1}{r}};$$
$$x_2(x_1+x_2)^{r-1}+y_2(y_1+y_2)^{r-1}<$$
$$<(x_2^r+y_2^r)^{1/r}[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{\frac{r-1}{r}}$$

et, en ajoutant ces deux inégalités,

$$(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r<\frac{(x_1^r+y_1^r)^{1/r}+(x_2^r+y_2^r)^{1/r}}{[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{\frac{1-r}{r}}},$$

c'est-à-dire

$$[(x_1+x_2)^r+(y_1+y_2)^r]^{1/r}<(x_1^r+y_1^r)^{1/r}+(x_2^r+y_2^r)^{1/r}$$

En divisant les deux membres par $2^{1+1/r}$, on trouve

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^r+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^r}{2}\right]^{1/r}<\frac{\left(\frac{x_1^r+y_1^r}{2}\right)^{1/r}+\left(\frac{x_2^r+y_2^r}{2}\right)^{1/r}}{2}$$

qui est l'inégalité de Jensen demandée. La convexité de $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=[(x_1^r+\cdots+x_n^r)/n]^{1/r}$ se démontre d'une façon analogue.

Problème 38. L'inégalité de Minkowski n'est autre chose que l'inégalité de Jensen à k termes pour la fonction $F(x,y)=[(x^r+y^r)/2]^{1/r}$.

Exercice 19. En posant $a_1=v_1^{(p-1)/p},\cdots,a_k=v_k^{(p-1)/p}$, $b_1=u_1/a_1,\cdots,b_k=u_k/a_k$, $r=p/(p-1)$, $s=p$ dans l'inégalité de Hölder, on a

$$(v_1+\cdots+v_k)^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{u_1^p}{v_1^{p-1}}+\cdots+\frac{u_k^p}{v_k^{p-1}}\right)^{1/p}\geqslant(u_1+\cdots+u_k).$$

Exercice 21. En posant $a_1=a^{x_1},\cdots,a_k=a^{x_k}$, $b_1=a^{y_1},\cdots,b_k=a^{y_k}$ et en tenant compte de la convexité de la fonction ${}^a\log(a^x+a^y)$ (cf. Problème 35) il vient

$$\log\sqrt[k]{(a_1+b_1)\cdots(a_k+b_k)}=$$
$$=\frac{\log(a^{x_1}+a^{y_1})+\cdots+\log(a^{x_k}+a^{y_k})}{k}\geqslant$$
$$\geqslant\log\left(a^{\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}+a^{\frac{y_1+\cdots+y_k}{k}}\right)=\log\left(\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}+\sqrt[k]{b_1\cdots b_k}\right).$$

PEDAGOGIA

O conceito de derivada de uma função na Escola Secundária

por *Maria Teodora Alves*

Nos primeiros anos deste século acentuaram-se as críticas à Metodologia e programas de Matemática na escola secundária.

Klein, Borel, Tannery e Laisant contribuiram poderosamente com a autoridade incontestável da sua crítica para um movimento reformador dos métodos e programas de Matemática da escola secundária que teve reflexos em todos os países civilizados. Nesse movimento renovador era preconizada a introdução, no programa de Matemática da escola secundária, entre outros conceitos, do conceito de derivada de uma função e de função primitiva.

Vou transcrever de «Science et Philosophie» de J. Tannery alguns trechos elucidativos, da opinião deste ilustre matemático e pedagogo, sobre o assunto: «Sans doute les raisonnements qui permettent de passer du prisme droit au prisme oblique, puis d'établir le volume de la pyramide sont extrêmement ingénieux; il convient de les garder dans un musée historique afin de montrer combien nos ancêtres étaient intelligents; leur place n'est pas dans l'enseignement élementaire ...

Je connais deux moyens de les remplacer: ... L'un est médiocre, l'autre est excellent ... Le second procédé, celui qui est excellent, mais qui demande un effort notable, consiste à apprendre d'abord le calcul intégral, avant d'étudier la mesure des volumes dont je parle. — Le calcul intégral! Y pensez-vous? À l'École primaire! A l'école primaire supérieure ou à l'école normale, oui: je ne ris pas du tout, je suis le plus sérieux du monde. L'effort qu'il faut pour apprendre ce que c'est qu'une dérivée, qu'une fonction primitive, et comment l'on s'y prend, à l'aide de ces admirables outils, pour évaluer une surface et un volume est certainement moindre que l'effort qu'on demande à un enfant pour apprendre à établir la mesure du prisme oblique après celle du prisme droit, l'équivalence de deux pyramides (vous savez bien, la figure à escaliers, qui est ennuyeuse à faire), — puis les insupportables volumes tournants».

Como acabamos de ver o conceito de função derivada, e mesmo de função primitiva, no programa da escola secundária tem o apoio de alguns dos nomes mais notáveis na investigação matemática e na pedagogia, mas está condicionada à sua utilização pelos alunos como instrumento para a resolução de questões e problemas determinados.

A derivação de funções, na opinião desses ilustres professores, não deve ser ensinada na escola secundária sòmente para que os alunos calculem derivadas de funções e resolvam os numerosos exercícios que figuram habitualmente nos cadernos de exercícios. É um instrumento de trabalho que deverá ser usado pelos alunos e cuja utilidade deverá ser por eles reconhecida.

Em todos os programas da escola secundária que conheço e em que foi introduzido o conceito de derivada de uma função (França, Inglaterra, Bélgica, Estados Unidos da América) há consequentemente, como uma das suas aplicações, pelo menos, o estudo da variação de certas funções.

O programa actual dos nossos liceus, introduzindo o conceito de derivada de uma função, mas suprimindo as suas aplicações, apresenta, a meu ver, uma deficiência. O conceito de derivada, assim introduzido no programa, equivale, por exemplo, ao estudo das equações do 1.º e 2.º graus sem as aplicar à resolução de problemas que possam ser traduzidos por elas. Mais comezinhamente, equivale à aquisição de um microscópio ou de uma máquina fotográfica sem que se saiba utilizar esses instrumentos nem para que servem.

Mas os programas de Matemática de 6.º e 7.º anos estão sobrecarregados — eu assim o considero — e deverão ainda ser mais sobrecarregados com algumas questões em que se aplique o conceito de derivada? Em face da sobrecarga do programa, a meu ver, só uma de duas atitudes seria razoável: ou se podiam suprimir outras rubricas que nele figuram e substituí-las pelo conceito de derivada e sua aplicação ao estudo de alguns problemas, ou não havia essa possibilidade, e então ... não seria introduzido no programa esse conceito.

A afirmação de que os alunos que se dirigem para as escolas superiores precisam de adquirir na escola secundária, o conceito de derivada de uma função, considero de valor reduzido.

A este respeito estou a lembrar-me da resposta que o ilustre matemático H. Lebesgue deu no inquérito promovido por «L'enseignement scientifique» acerca dos conhecimentos especiais que um aluno devia ter para ingressar nos cursos superiores: «Nenhum conhecimento especial precisa de ter o aluno que deseja ingressar numa Faculdade de Ciências ou Escola de Engenharia. Basta que saiba pensar». Foi esta a resposta do ilustre Lebesgue.

Com efeito, ensinar a pensar claro, deve ser uma das finalidades da escola secundária e a única finalidade dos programas do seu curriculum.

Quanto à localização do conceito de derivada de uma função, no programa vigente, também não me parece que tenha sido muito feliz.

Aquele conceito aparece no 7.º ano entre as seguintes rubricas do programa: «Problemas do 2.º grau, discussão» e Trigonometria: Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos.»

Por outro lado, no programa do 6.º ano, a seguir às rubricas «Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função.» aparece esta rubrica «Propriedades dos polinómios inteiros.»

Estava naturalmente indicado, como sequência das primeiras rubricas transcritas, o conceito de derivada de uma função.

Houve ali uma amputação desse conceito para surgir desgarrado no programa de 7.º ano.

Vou agora considerar, relativamente ao estudo da derivação no programa vigente, um aspecto muito restrito.

Trata-se da derivação da função do seno de um ângulo.

Como fazê-lo?

A derivada da função seno de um ângulo é uma rubrica do programa anterior à da transformação da diferença de senos de dois ângulos em produto, e esta última rubrica, deve ser aplicada no cálculo do limite da razão incremental para estabelecer a derivada do seno.

Mas a ordem das rubricas do programa não pode ser alterada pelo professor. É uma determinação do Estatuto. Como conciliar pois as determinações do Estatuto com a ordenação encadeada das ideias dos alunos?

Consultei algumas dezenas de tratados sobre o assunto, quer nacionais quer estrangeiros, e à excepção de um, todos os outros determinam o limite da razão incremental depois de transformar em produto a diferença dos senos de dois ângulos.

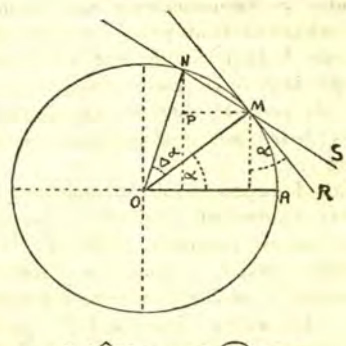
Sòmente em «Notions Elémentaires de Mathématiques pour les Sciences Expérimentales» pour Léon Brillouin, encontrei a demonstração da derivada da função seno de um ângulo sem o recurso à transformação da diferença de senos em produto. Brillouin determina a derivada do seno de um ângulo projectando sobre o eixo das abscissas o acréscimo dado ao arco que mede o ângulo.

A leitura do livro de Billouin sugeriu-me as duas demonstrações que a seguir apresento relativas à derivada da função seno e da função tangente de um ângulo.

Eu ouso agora pedir, ao autor ou autores do programa, a amabilidade de me informarem, por intermédio da «Gazeta de Matemática», ou particularmente, quais os tratadistas que conhecem que estabelecem elementarmente a derivada do seno ou tangente de um ângulo independentemente da transformação em produto da diferença de senos de dois ângulos e conforme a orientação que eu a seguir indico.

Derivada do seno:

Seja $y = \operatorname{sen} \alpha$



$$\text{med } A\hat{O}M \equiv \text{med } \widehat{AM} \equiv \alpha\,,$$
$$\text{med } M\hat{O}N \equiv \text{med } \widehat{MN} \equiv \Delta\alpha\,,$$

MR tangente á circunferênci a no ponto M; $\overline{MP}$ paralela a $\overline{OA}$ e $\Delta y \equiv \overline{PN}$.

De $[NMP]$ deduz-se:

$$(1) \qquad \overline{PN} = \overline{MN} \cos P\hat{N}M$$

Quando $\Delta\alpha$ tende para zero, o ângulo $P\hat{N}M$ tende para α e a corda $\overline{MN}$ tende para o arco $\widehat{MN}$ [1].

[1] Esta afirmação é dada intuitivamente aos alunos, mas podia ser fàcilmente demonstrada recorrendo aos conhecimentos que eles já possuem.

Dividindo (1) por $\Delta\alpha$

$$\frac{\overline{PN}}{\Delta\alpha} = \frac{\overline{MN}}{\Delta\alpha}\cdot\cos P\hat{N}M$$

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\overline{PN}}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\overline{MN}}{\Delta\alpha}\cdot\lim_{\Delta\alpha\to 0}\cos P\hat{N}M\,;$$

mas $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\overline{MN}}{\Delta\alpha} = 1$ [1] e portanto: $y' = \cos\alpha$

Derivada da tangente:

Seja $y = \operatorname{tg}\alpha$.

Do triângulo $[OBC]$ vem:

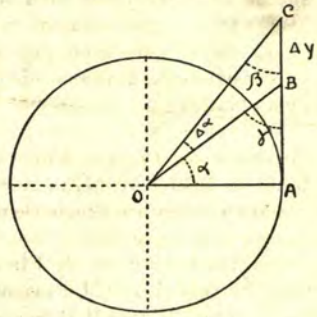
$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\Delta\alpha} = \frac{\overline{OB}}{\operatorname{sen}\beta}$$

então:

$$\overline{BC} = \overline{OB}\cdot\frac{\operatorname{sen}\Delta\alpha}{\operatorname{sen}\beta}, \text{ ou } \Delta y = \sec\alpha\cdot\frac{\operatorname{sen}\Delta\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\,;$$

mas, quando $\Delta\alpha$ tende para zero, $\operatorname{sen}\beta$ tende para $\operatorname{sen}\gamma$. De:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta\alpha} = \sec\alpha\cdot\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta\alpha}{\Delta\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$$



vem: $y' = \sec\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}$ e por ser $\operatorname{sen}\gamma = \cos\alpha$ é

$$y' = \sec\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}, \text{ ou } y' = \sec^2\alpha\,.$$

[1] Como se poderia demonstrar com os conhecimentos que os alunos já possuem.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS

Esta reunião internacional, que deve ser um dos maiores acontecimentos no mundo matemático no presente ano, continua despertando em todos os países um enorme interesse inteiramente justificado. Terão então a ocasião de encontrar-se, expor as suas descobertas, discutir os problemas em estudo e os diversos pontos de vista os matemáticos de vários continentes. A actividade dos centros de estudos, que se nota no após guerra na grande maioria dos países ainda ontem envolvidos no conflito, os nnmerosos congressos nacionais e os colóquios internacionais de matemática constituem, em nossa opinião, um indício do exito científico do próximo congresso de Cambridge. Mass., que uma cuidada preparação garante também,

O Presidente e o Secretário Geral da Comissão Organizadora do Congresso honraram a Sociedade Portuguesa de Matemática e a Junta de Investigação Matemática com o convite formal de participação.

Temos o prazer de noticiar que a nossa representação se encontra já assegurada. Com efeito alguns matemáticos portugueses enviaram já comunicações que foram aceites. De momento temos conhecimento das seguintes: «On lattices of abelian groups with a finite base» de Hugo B. Ribeiro; «On the origin of positive and negative electricity» de António Gião e uma outra de Ruy Luís Gomes.

M. Z.

CENTROS MATEMÁTICOS E COLÓQUIOS

Centros Matemáticos Italianos

A Itália é um país de fortes tradições matemáticas É porém de admirar como, pouco tempo passado sobre uma guerra que tão duramente fez sofrer este povo, se assista a um ressurgimento notável de actividade matemática em tão variadas manifestações: publicações especializadas ou de carácter didático, revistas da especialidade, reuniões frequentes de vários tipos nas cidades italianas, participação em congressos estrangeiros, e ainda o estudo do funcionamento de organizações existentes já, ou a criar, que garantam maior rendimento à produção científica. O *Boletim da União Matemática Italiana* informa-nos destas actividades; do n.º 4 do ano de 1949 extraímos uma notícia sobre os Centros Matemáticos, que estamos certos muito contribuirão para elevar mais ainda, em qualidade e quantidade, a contribuição italiana no domínio da investigação matemática.

Estatuto provisório dos Centros Matemáticos — Em 19 de Novembro de 1949 teve lugar em Bolonha no Instituto Matemático Salvatore Pincherle uma reunião dos representantes dos Institutos e dos Seminários Matemáticos de Trieste (Prof. B. de Finetti), Pádua (Prof. G. Scorza), Ferrara (Prof.ª M. Piazzolla-Beloch), Bolonha (Profs. L. Cesari, D. Graffi, B. Segre, M. Villa), Modena (Prof. A. Pignedoli), Parma (Prof. A. Manbriani), Pisa (Prof. S. Cherubino, Dr. V. Checcucci), Florença (Prof. G. Sansone), para discussão do projecto do estatuto provisório dos centros matemáticos italianos.

O Prof. Sansone leu e comentou as sugestões críticas e pareceres dos vários institutos e seminários interessados. Com esta base e nas consequentes discussões o Prof. Sansone, encarregado da redacção do estatuto provisório, apresentou o que se segue:

Artigo 1.º — Com o fim de criar condições mais favoráveis à vida matemática, no âmbito das Universidades, constituem-se centros (ou grupos) regionais e inter-regionais com os objectivos de:

a) provocar a cooperação dos Institutos e Seminários dos vários centros, particularmente pelo que respeita a cursos de carácter mais elevado;

b) trocar professores para conferências ou ciclos de conferências entre os diversos Institutos e Seminários Matemáticos e promover uma ou mais reuniões anuais para estudar temas determinados;

c) trocar assistentes ou alunos que se dediquem a particulares investigações científicas;

d) facilitar ainda por meios diversos dos referidos em *a*), *b*), *c*) a colaboração de investigadores que habitem meios distantes uns dos outros e que tencionem trabalhar sobre o mesmo assunto.

e) procurar conseguir que alguns estrangeiros — oportunamente qualificados — realizem conferências em vários locais.

Art. 2.º — Cada centro abrangerá três ou mais Institutos ou Seminários Matemáticos. A título de experiência são criados quatro centros que reunem respectivamente os Institutos e Seminários das seguintes Universidades:

1) Trieste, Pádua, Ferrara, Bolonha, Modena, Parma, Florença e Pisa;

2) Turim, Milão, Pavia e Génova;

3) Roma, Nápoles, Cagliari e Bari;

4) Catania, Messina e Palermo.

Art. 3.º — Os centros colaborarão cordialmente com outras instituições que, em ambientes diversos e com outros meios, tenham o propósito comum de manter em nível elevado a tradição matemática italiana, como é o caso da União Matemática Italiana, o Instituto de Alta Matemática, o Instituto Nacional para as Aplicações do Cálculo e a Escola Normal Superior de Pisa.

Art. 4.º — Cada centro matemático, segundo o próprio regulamento, administrará e contribuirá, para cumprir os objectivos do Art. 1.º, com os fundos que recebe do Ministério da Educação Pública, do Conselho Nacional de Investigações, da União Matemática Italiana, dos Governos regionais, dos Conselhos de Administração das Universidades e de outras entidades.

Art. 5.º — Os representantes dos centros e os delegados das entidades a que se refere o Art. 3.º reunir-se-ão uma vez por ano pelo menos num dos Institutos ou Seminários dos centros para discutir e acordar amigàvelmente sobre os problemas comuns aos vários centros. As convocações para as reuniões partirão da U. M. I.

Art. 6.º — Por ocasião dos Congressos Nacionais promovidos pela U. M. I., deverão ter lugar uma, pelo menos, das reuniões anuais organizadas pelos centros no local do Congresso sendo o respectivo programa coordenado com o do Congresso.

Art. 7.º — O *Boletim da U. M. I.* é o órgão comum dos centros. Nele publicar-se-ão: *a*) notícia sobre a actividade dos vários centros e das reuniões de carácter geral; *b*) relatórios de carácter científico das reuniões.

Se for julgado oportuno a U. M. I. publicará também colecções de cadernos contendo notas apresentadas nas reuniões.

M. Z.

Centro Belga de Investigações Matemáticas. Colóquio Internacional de Geometria Algébrica

Em todos os países em que há interesse pelos progressos das Ciências Matemáticas se multiplicam os centros de estudos e seminários e há a preocupação de estudar a sua coordenação para se obter o melhor rendimento. Em reuniões frequentes e recorrendo por vezes mesmo à colaboração internacional são apresentadas as conquistas recentes no campo da investigação e debatidos os problemas entre os especialistas.

O Centro Belga de Investigações Matemáticas, criado em 1948, reune, sob a presidência do Prof. L. Godeaux, todos os professores de matemática das quatro universidades belgas de Bruxelas, Liège, Lovaina e Gand, os da Escola Politécnica de Heinaut em Mons e os da Escola Militar, e tem importante auxílio do Estado que lhe concede os meios financeiros necessários.

Vários colóquios nacionais tiveram lugar em 1948 e 1949, tendo-se ocupado da teoria da correspondência entre curvas algébricas, das equações às derivadas parciais e da teoria quântica dos campos. Todas as despesas de viagem e estadia nos locais onde se realizam as reuniões estão a cargo do Centro. O estudo das máquinas calculadoras electrónicas é um dos que ocupa com maior interesse o Centro.

O primeiro colóquio internacional organizado pelo C. B. R. M. foi consagrado à Geometria Algébrica e realizou-se em Liège em Dezembro de 1949. Nele participaram além de numerosos matemáticos belgas os professores estrangeiros: M.me Dubreil-Jacotin, Severi, Garnier, Dubreil, Segre, Van der Waerden, Châtelet e Samuel. Tratou-se sobretudo de confrontar e discutir os diversos métodos de investigação na Geometria algébrica: os da escola italiana, os baseados na teoria dos aneis, os de André Weil, Van der Waerden, Zariski, etc. As aplicações a outros ramos da Matemática também foram consideradas e apresentados os resultados recentemente obtidos pelos investigadores belgas.

O C. B. R. M. publicou em volume* as conferências feitas de que damos a seguir relação:

F. Severi — La géométrie algébrique italienne, sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes; M. L. Dubreil-Jacotin e P. Dubreil — Divers types d'anneaux intervenant en géométrie algébrique; B. L. van der Waerden — Les variétés de chaînes sur une variété abstraite; P. Samuel — Multiplicités des composantes singulières d'intersection; F. Châtelet — Application des idées de Galois à la géométrie algébrique; R. Garnier — Intégration uniforme de certains systèmes du quatrième ordre, à deux variables indépendantes, attachés à une surface algébrique; B. Segre—Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique; P. Libois — La synthèse de la géométrie et de l'algèbre; F. Bureau — Quelques questions de géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques; L. Godeaux — Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.

M. Z.

O Instituto Matemático do Estado Polaco

Em dezembro de 1948 por decreto da Presidência do Conselho de Ministros foi criado o Instituto Matemático do Estado dependente do Ministério da Instrução Pública. Este instituto constitue uma organização central das investigações científicas no domínio das matemáticas e suas aplicações conforme as recentes necessidades científicas e do Estado.

A Direcção é composta por quatro membros: Prof. K. Kuratowski, Director-chefe; Prof. S. Mazur, vice-Director; Prof. K. Borsuk, Secretário Geral; e Dr. H. Greniewski, vice-Secretário Geral.

O Instituto abrange três secções: Secção Teórica, Secção das Aplicações e Secção das Publicações, as duas primeiras dirigidas pelo Prof. H. Steinhaus e a de publicações pelo Prof. B. Knaster.

A Secção Teórica tem por objectivo principal a organização das investigações no campo das matemáticas puras e compreende os oito grupos seguintes:

1 — *Fundamentos das matemáticas*, director Prof. A. Mostowski; 2 — *Topologia*, director Prof. Borsuk; 3 — *Análise funcional*, director Prof. S. Mazur; 4 — *Funções reais*, director Prof. E. Marczewski; 5 — *Funções analíticas*, director Prof. F. Leja; 6 — *Equações diferenciais*, director Prof. F. Wazewski; 7 — *Geometria diferencial*, director Prof. S. Golab; 8 — *Problemas matemáticos da Física*, directores Profs. W. Pogorzelski e W. Rubinowicz.

A Secção das Aplicações trata da orientação da investigação no domínio das matemáticas aplicadas, e da execução de estudos solicitados e que dizem respeito às aplicações práticas das matemáticas na economia dirigida, estatística, produção industrial e agrícola, seguros sociais e defesa nacional. Esta secção abrange os grupos: 1—*Geral*, director Prof. H. Steinhaus; 2 — *Aplicações técnicas*, Prof. J. Mikusinski; 3—*Aparelhos matemáticos*, director Dr. H. Greniewski; 4—*Actuariado*, director Prof. A. Gruzewski; 5—*Geometria aplicada*, director Prof. E. Otto.

Finalmente a Secção de Publicações ocupa-se da organização racional da actividade publicitária no domínio das matemáticas.

A sede do Instituto é em Varsóvia mas a sua actividade estende-se a todo o território da Polónia. Em Varsóvia encontra-se a Direcção do Instituto e funcionam os grupos dos Fundamentos das matemáticas, de Topologia, de Análise Funcional e dos Problemas matemáticos da física, grupos da Secção Técnica, bem como os dos Aparelhos, Actuarial, e de Geometria aplicada da Secção das Aplicações. Em Cracóvia funcionam os grupos de Funções analíticas, Equações diferenciais e o de Geometria diferencial. Em Wroclaw funciona o grupo das Funções reais da Secção Teórica e o das Aplicações técnicas. Também nesta cidade se encontra totalmente instalada a Secção das Publicações.

O Instituto Matemático compreende 28 membros, 31 assistentes e adjuntos, 7 funcionários científico-técnicos e 5 empregados.

M. Z.

Do *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*. Tome XXII, 1949, Kraków.

* *Colloque de Géométrie Algébrique*, G. Thone, Edit., Liège, ou Masson et Cie., Paris.

Colóquio Matemático Britânico

Em Setembro do ano passado teve logar em Manchester o primeiro Colóquio Matemático Britânico. O segundo realizou-se este ano em Oxford de 12 a 14 de Abril estando marcado o próximo para Setembro de 1951 em Bristol. Fez-se a escolha de Abril para a reunião deste ano para evitar a sobreposição com o Congresso Internacional de Matemáticos na 1.ª semana de Setembro.

É duplo o objectivo destas reuniões: em palestras coordenadas com a duração de uma hora fazem-se exposições sistemáticas sobre os progressos de vários domínios importantes no campo da investigação matemática com a preocupação de os tornar — como de facto se consegue — acessíveis aos não especializados e manter estes informados sobre as mais importantes descobertas; e, numa atmosfera mais íntima dos «grupos de estudo», os matemáticos que trabalham nos mesmos ramos desta ciência expõem os seus resultados levantando e discutindo problemas para futuras investigações. As reuniões do 1.º tipo são mais instrutivas e as do 2.º mais estimulantes.

Uma das surpresas da reunião de Oxford foi o extraordinário interesse que despertou a Algebra Moderna entre os matemáticos ingleses.

Houve iminentes algebristas britânicos no passado século, bastando citar Hamilton, Cayley, Sylvester, Burnside e Young; não formaram porém escola e a álgebra esteve a ponto de cair no esquecimento. Os desenvolvimentos brilhantes desta ciência na Alemanha, sobretudo de 1920 a 1930, que ràpidamente atingiram outros países em especial os Estados Unidos e a União Soviética, foram durante muito ignorados na Inglaterra. Este panorama mudou completamente agora e foi a Algebra Moderna que ocupou em Oxford o 1.º lugar.

Houve conferências sobre: o choque entre os conceitos da algebra moderna e os métodos da análise; a teoria algébrica da «valuation» e as suas múltiplas aplicações que vão desde a teoria dos ideais nos aneis até aos fundamentos da geometria algébrica; a interação da álgebra e da topologia na teoria dos grupos topológicos; e o modo por que a topologia começa a recompensar a álgebra pelos serviços que esta lhe prestou. Houve outros grupos que se ocuparam de: teoria dos números, geometria algébrica, funções aleatórias e equações diferenciais não lineares. Os algebristas foram porém incansáveis prosseguindo as discussões mesmo depois do encerramento oficial da reunião.

Neste colóquio participaram também alguns matemáticos estrangeiros do Egipto, Holanda, India e Itália.

M. Z.

(Adaptação duma notícia de K. A. Hirsch em «Nature» Vol. 165, n.º 4204, 1950 Maio 27).

NOTICIÁRIO

Jubileu Científico do Prof. Severi

O ano de 1949 correspondeu ao centenário da revista italiana «Annali di Matematica» e ao 70º aniversário do Prof. Francesco Severi, director do «Instituto Nazionale di Alta Matematica*» de Roma e durante vários anos redactor principal da revista.

Os colegas do Prof. Severi para celebrar este duplo acontecimento constituiram uma comissão nacional sob a presidência do Prof. G. Castelnuovo. Esta comissão decidiu: dedicar o volume dos «Annali» relativo a 1949-50 em homenagem ao Prof. Severi e convidar a colaborar neste volume matemáticos italianos e estrangeiros; iniciar a publicação de uma «Selecta» com a obra do distinto matemático, e promover uma cerimónia comemorativa no Instituto de Alta Matemática. Mais tarde foi resolvido realizar, além desta cerimónia, um pequeno congresso de matemáticos com participação internacional. Houve porém que adiar esta celebração para 1950, ano em que atingia meio século a actividade científica do ilustre professor.

A cerimónia inaugural teve logar na Aula Magna do Instituto no dia 25 de Abril deste ano tendo pronunciado elogios o Prof. G. Castelnuovo, o Reitor da Universidade de Roma, o Prof. Sansone, de Florença e da direcção dos «Annali», e o Prof. Segre, de Bolonha, um dos mais notáveis alunos do Prof. Severi. O congresso iniciou-se no dia seguinte e durou até 28 de Abril. Vários países da Europa fizeram-se representar. À delegação polaca pertencia o Prof. Sierpinski a quem coube a comunicação inaugural do congresso; o Prof. Alexandroff chefiava a delegação da U. R. S. S., constituída por 4 membros; a delegação britânica era composta pelos Profs. Besicovith, Mordell, Roth, Semple e Synge. Cerca de 20 comunicações foram lidas abrangendo vários assuntos como álgebra, teoria dos conjuntos, teoria dos números, funções de variável real e complexa, geometria algébrica e diferencial, topologia, equações diferenciais, mecânica e electrodinâmica.

A Universidade de Roma tenciona reunir num volume especial dos «Rendiconti» do seu Seminário Matemático todas estas comunicações.

M. Z.

(Notícia extraída de «Nature», 165, n.º 4206, 1950, Junho 10).

* Vide *Gazeta de Matemática*, n.º 12, Outubro 1942.

Jubileu do Prof. W. Sierpinski

Em 1948 em Varsóvia teve lugar a cerimónia comemorativa do 40.º aniversário da actividade científica e universitária do Prof. W. Sierpinski, grande matemático, um dos fundadores e eminente representante da Escola Polaca de Matemática. A comissão encarregada de organizar a celebração e presidida pelo Prof. K. Kuratowski, actual presidente da Sociedade Polaca de Matemática, resolveu efectuar a cerimónia do jubileu científico durante a reunião do 6.º Congresso dos Matemáticos Polacos que teve lugar em Varsóvia de 20 a 23 de Setembro de 1948.

A vasta e importante obra do grande matemático polaco compreende mais de 500 notas e memórias, publicadas em numerosos periódicos matemáticos polacos e estrangeiros. São notáveis sobretudo as suas contribuições na teoria dos conjuntos, topologia geral, hipótese do contínuo, etc. Um dos seus méritos é o de ter sido o fundador e director de *Fundamenta Mathematicae*, um dos mais importantes jornais matemáticos do mundo.

Além dos matemáticos polacos associaram-se à homenagem e enviaram saudações numerosos cientistas estrangeiros, academias e sociedades científicas de muitas das quais é membro.

A revista *Portugaliae Mathematica* tem a honra de contar entre os seus colaboradores o distinto matemático que publicou no vol. 5 um trabalho. M. Z.

Matemáticos portugueses no estrangeiro

No actual ano lectivo encontram-se no estrangeiro exercendo funções docentes e fazendo investigação os matemáticos portugueses: em Berkeley, U. S. A., na Universidade da Califórnia, o Doutor Hugo B. Ribeiro encarregado de cursos e participando na actividade de alguns seminários; na Argentina, o Prof. Doutor António A. Monteiro, convidado para professor da Universidade de S. Juan onde rege a cadeira de Análise; e na França, em Nancy, continuando os seus trabalhos de investigação o Doutor Alfredo Pereira Gomes, bolseiro do C. N. R. S., que faz parte dum grupo de jovens matemáticos sob a direcção dos Profs. Dieudonné e Schwartz. M. Z.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.º Exame de frequência — 1949-50.

1.º Ponto

2983 — Mostrar que a sucessão:

$$\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3+\sqrt{3}}\ ,\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\ , \cdots$$

é convergente e calcular o seu limite.

2984 — Calcular a primitiva da função

$$\frac{2x-1}{\sqrt{5x^2-4x+1}}\ .$$

2985 — Dada a função $f(x)=\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+1}$ *a*) calcular $f(0)$, os pontos que anulam a função e o seu limite quando $x\to\pm\infty$; *b*) calcular os extremos e os intervalos de monotonia; *c*) calcular os pontos de inflexão; *d*) representá-la gràficamente.

2.º Ponto

2986 — Mostrar que a sucessão de termo geral

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

é convergente e calcular o seu limite.

2987 — Dada a função $f(x)=\dfrac{3x-2}{+\sqrt{-2x^2-x+1}}$, calcular: *a*) o seu domínio de existência no campo real; *b*) a sua primitiva.

2988 — Considere a função $f(x)=x+I(x)$. *a*) representá-la gràficamente; *b*) indicar, justificando, se admite no intervalo $0\leqslant x<1$ limites superior e inferior, e máximo e mínimo; *c*) calcular anallticamente as derivadas laterais no ponto $x=n$.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência, 1948-1949.

2989 — Determine o centro, os eixos e as assíntotas da hipérbole $(2x+1)^2-(4y-1)^2=1$. Indique os pontos em que a tangente é paralela à recta $y=2x$.

2990 — Mostre que a curva

$$y=mx+p+\varphi(x)\qquad [\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0]$$

admite uma e uma só assíntota não paralela a OX e prove que a convexidade, quando de sentido invariável, está voltada para essa recta.

2991 — Mostre que a sucessão de Fourier nunca ganha variações quando x cresce. Passando ao caso de $f(x)$ ser polinómio inteiro, enuncie e justifique a regra dos sinais de Descartes (raizes positivas e raizes negativas). Examine a hipótese de se anular um coeficiente com antecedente e consequente do mesmo sinal. Considerando o polinómio $f(x)$ ordenado segundo as potências de $x-a$ generalize a regra dos sinais.

2992 — Supondo $\varphi(u)$ e $\psi(u)$ diferenciáveis em u_0 e $f(x, y)$ diferenciável em $P(a=\varphi(u_0), b=\psi(u_0))$, mostre que $f[\varphi(u), \psi(u)]$ é diferenciável em u_0.

2993 — Escreva as relações que caracterizam $p(x,y)$ e $q(x,y)$ como funções diferenciáveis em $P(a, b)$ e considere a hipótese de $p(x,y)$ e $q(x,y)$ serem as derivadas parciais de $z=f(x,y)$.

F. C. L. — Complementos de Algebra — Questões propostas em exames de frequência.

2994 — Defina o conceito de grupo cociente. Pondo $\sigma=(1\,2\,3\,4\,5\,6)$ e representando por G, H respectivamente o grupo gerado por σ e o grupo gerado por σ^3, construa uma função pertencente a H em G, e determine o grupo cociente G/H. R: *Por exemplo,* $u_1=z_1+z_4$, *como função de* z_1, z_2, z_3, z_4, *pertence ao grupo* H *em* G, *pois que as substituições de* G *que a deixam invariante são* I *e* $\sigma^3=(14)(25)(36)$. *Pondo agora* $u_2=z_2+z_5$, $u_3=z_3+z_6$, *as substituições de* G *efectuadas sobre os* zz *traduzem-se nas substituições* I, (123), (132) *sobre os* uu. *Tem-se pois*

$$G/H = \{ I, (123), (132) \}$$

(é claro que H *é invariante em* G*).*

2995 — Sejam R, H, T respectivamente as famílias das rotações, das homotetias e das translações no espaço. Mostre que: *a)* $H \cup T=HT$; *b)* T é um subgrupo invariante de HT; *c)* HT é um subgrupo invariante de RHT; *d)* o único elemento de T permutável com todos os elementos de RT é a identidade. R: a) *Toda a homotetia* h *e toda a translação* t *figuram em* HT, *sob as formas* $h \cdot I$ *e* $I \cdot t$; *reciprocamente, o produto duma homotetia* h *por uma translação* t *é uma homotetia ou uma translação conforme* $h \neq I$ *ou* $h=I$; *portanto,* HT *contém* $H \cup T$ e $H \cup T$ *contém* HT *ou seja* $H \cup T=HT$; b) *Se for* τ *uma translação definida por um dado vector* $\mathbf{v}$, *a transformada de* τ *por meio de uma qualquer homotetia* φ *é a translação definida pelo vector* $\varphi(\mathbf{v})$; *então, quaisquer que sejam* $h \in H$, $t \in T$, $t' \in T$, *tem-se* $(ht)\, t'\, (ht)^{-1} = h\,(t\,t'\,t^{-1})\,h^{-1} \in T$ *(pois que* $t\,t'\,t^{-1} \in T$*)*; c) *A transformada duma translação* τ *(definida pelo vector* $\mathbf{v}$*), mediante uma rotação* ρ, *é a translação definida pelo vector* $\rho(\mathbf{v})$; *então, quaisquer que sejam* $r \in R$, $h \in H$, $t \in T$, $t' \in T$, *tem-se*

$$(rht)\, t'\, (rht)^{-1} = r\,[\,h\,(t\,t'\,t^{-1})\,h^{-1}\,]\,r^{-1} \in T\,;$$

anàlogamente para as homotetias. d) *Seja ainda* τ *a translação definida por* $\mathbf{v}$; *se* ρ *é uma rotação* $\neq I$, *tem-se* $\rho(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$ *(e portanto* $\rho\tau\rho^{-1} \neq \tau$*), a não ser que* $\tau=I$ *(ou seja* $\mathbf{v}=0$*).*

2996 — Considere a proposição: «Dada uma equação algébrica $f(z)=0$ de coeficientes racionais e uma função racional $\varphi(z)$ de coeficientes também racionais, existe necessàriamente uma outra função racional $\psi(z)$ de coeficientes racionais tal que $\alpha=\psi(\varphi(\alpha))$, sendo α uma raiz qualquer de $f(z)$». Mostre que esta proposição é falsa. Restrinja a hipótese de modo a tornar a proposição verdadeira e faça a respectiva demonstração. R: *Seja* $f(z) \equiv z^2-3$ *e* $\varphi(z) \equiv z^2$; *como* $\varphi(\sqrt{3})=3$, *é claro que não existe nenhuma função racional* ψ, *de coeficientes racionais, tal que*

$$\sqrt{3} = \psi\left(\varphi(\sqrt{3})\right) = \psi(3),$$

pois que $\psi(3)$ *(e portanto* $\sqrt{3}$*) teria então de ser racional. A restrição a impor é esta: «representando por* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ *as raizes de* $f(z)$, *os números* $\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)$ *devem ser todos distintos». Com efeito,* $\varphi(\alpha_1)$ *e* α_1, *como funções de* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, *pertencem ambas a um mesmo grupo; portanto, desde que* $\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)$, *conjugadas da função* $\varphi(\alpha_1)$, *sejam numèricamente distintas, o teorema de Lagrange assegura a existência duma função racional* ψ, de coeficientes racionais, *tal que* $\alpha_i=\psi(\varphi(\alpha_i))$, *para* $i=1, 2, \cdots, n$.

2997 — Defina os conceitos de homomorfismo e de isomorfismo entre grupos. Prove que o grupo das rotações em torno dum dado eixo não é isomorfo ao grupo das homotetias com um mesmo centro. R: *Suponhamos que existe um tal isomorfismo*, Γ, *e seja* ρ *a rotação de* 120° *em torno do eixo dado; como o período de* ρ *é* 3, *também o da homotetia* $\theta=\Gamma(\rho)$ *deverá ser* 3; *então, designando por* r *a razão de* θ, *será* r^3 *a razão de* θ^3, *e portanto* $r^3=1$; *mas daqui vem* $r=1$ *ou seja* $\theta=I$, *e assim o período de* θ *será* 1, *e não* 3, *o que é contraditório.*

2998 — Equivalência a respeito dum grupo. Diga em quais das seguintes geometrias um triângulo rectângulo e um triângulo equilátero são figuras equivalentes: *a)* geometria euclideana; *b)* geometria afim; *c)* geometria projectiva; *d)* geometria analagmática; *e)* topologia. Em quais destas geometrias uma circunferência é equivalente a uma recta? Justifique as respostas. R: *Basta observar que:* a) *Um triângulo equilátero nunca é semelhante a um triângulo rectângulo;* b) *dados dois triângulos, existe sempre uma* *afinidade que transforma um no outro;* c) *toda a afinidade é uma projectividade;* d) *as transformações circulares respeitam os ângulos;* e) *as afinidades são transformações bicontínuas. Uma recta é equivalente a uma circunferência em geometria analagmática, pois é sempre possível passar duma para outra mediante um deslocamento seguido duma inversão (transformações circulares).*

F. C. L. — Complementos de Álgebra — **Exame final, 1948-1949.**

2999 — Conceito de grupo de Galois. Determine o grupo de Galois da equação $z^3-5=0$ a respeito de Ra e indique um corpo a respeito do qual o grupo da mesma equação seja A_3. R: *Representando por* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *as raizes da equação, a função*

$$V = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$$

será igual à raiz quadrada do descriminante, ou seja $V = \sqrt{-27 \cdot 5^2} = 15\sqrt{-3} \notin \mathrm{Ra}$; *por outro lado, as raizes de* $z^3-5=0$ *são irracionais; portanto, nem a função* V *das raizes (pertencente em sentido restrito a* A_3*) nem as funções* $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3$ *(pertencentes aos restantes subgrupos máximos de* S_3*) têm o valor numérico em* Ra; *logo, o grupo de Galois da equação a respeito de* Ra *é* S_3. *A respeito de* $\mathrm{Ra}(\sqrt{3}\cdot i)$, *o grupo de Galois é* A_3 [*é fácil ver que nenhuma das raizes de* $z^3-5=0$ *pertence a* $\mathrm{Ra}(\sqrt{3}\cdot i)$].

3000 — Demonstre que toda a equação cíclica a respeito de Δ é resolúvel por meio de radicais a respeito de Δ. Considere em particular o caso da cúbica cíclica.

3001 — Estudo da redutibilidade duma equação através do seu grupo de Galois.

3002 — Conceito de raiz duma equação de coeficientes variáveis.

3003 — Isomorfismos entre grupos abstractos. Prove que o grupo aditivo dos números pares é isomorfo ao grupo gerado por uma translação ($\neq I$), mas não é isomorfo ao grupo aditivo dos números racionais. R: *Seja* τ *uma translação* $\neq$I; *se a cada número par* 2n *fizermos corresponder a translação* τ^n, *a transformação* Φ *assim definida será um isomorfismo. Tem-se, com efeito:* $\Phi(2m+2n) = \Phi(2(m+n)) = \tau^{m+n} = \tau^m \cdot \tau^n = \Phi(2m)\cdot\Phi(2n)$; *além disso,* Φ *é biunívoca, tendo-se* $\Phi^{-1}(\tau^k) = 2k$. *Suponhamos agora que existe um isomorfismo* Θ *do grupo aditivo dos números racionais sobre o grupo aditivo dos números pares, e ponhamos* $r = \Theta^{-1}(2)$; *virá* $2 = \Theta(r) = \Theta(r/2 + r/2) = \Theta(r/2) + \Theta(r/2)$, *ou seja* $2 = 2\Theta(r/2)$, *e portanto* $\Theta(r/2) = 1$; *ora* $\Theta(r/2)$ *só pode ser um número par.*

Enunciados e soluções dos n.os 2994 a 3003 de J. Sebastião e Silva.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º exame de frequência — 1949-50.**

3004 — Transformação de semelhança em R_3; definição e propriedades.

3005 — Determinar a intersecção dum plano α definido por duas rectas paralelas com um plano β definido por duas concorrentes. (Sem escolher posições especiais que facilitem a resolução).

3006 — Dado um paralelogramo $[ABCD]$ com nenhum dos lados de nível nem de frente, determinar o simétrico de $[ABCD]$ a respeito da recta AB.

3007 — Considere um tronco de pirâmide quadrangular de bases paralelas, do qual se conheçam apenas as projecções horizontais das bases. Supondo dadas as projecções horizontais de três pontos, dois deles situados sobre lados não paralelos das bases e o terceiro sobre uma aresta lateral, determine a projecção horizontal da secção feita no tronco de pirâmide pelo plano definido pelos três pontos (aplicando o conceito de homologia). R: *Sejam* M, N, P *os pontos considerados,* V *o vértice da pirâmide e* [ABCD] *uma das bases do tronco. Da base* [ABCD] *passa-se para a referida secção mediante uma homologia* Θ, *cuja projecção horizontal é uma homologia plana,* Θ', *de centro* V'. *Sobre a linha poligonal* [A' B' C' D'] *e sobre os raios* V' M', V' N', V' P', *encontram-se os pontos* $\overline{M'}$, $\overline{N'}$, $\overline{P'}$, *que são transformados por* Θ' *respectivamente em* M', N', P'. *Assim, a homologia* Θ' *ficará definida pelos dois ternos homólogos* $(\overline{M'}, \overline{N'}, \overline{P'})$, (M', N', P'), *o que permite achar os transformados de* A', B', C', D' *por meio de* Θ' *e portanto a projecção horizontal da secção.*

3008 — Mostre que o produto de duas homologias planas afins com uma mesma direcção d é ainda uma homologia afim de direcção d. R: *Sejam* Φ_1, Φ_2 *duas homologias planas afins de direcção* d *(num mesmo plano). Sendo* Φ_1, Φ_2 *colineações, o produto* $\Phi_1\Phi_2$ *será também uma colineação. Por outro lado, como as rectas* *de direcção* d *são invariantes em* Φ_1 *e em* Φ_2, *também serão invariantes no produto* $\Phi_1\Phi_2$. *A transformação* $\Phi_1\Phi_2$ *é pois uma colineação em que as rectas que unem pontos homólogos passam todas pelo ponto* ∞_d, *o que quer dizer que* $\Phi_1\Phi_2$ *é uma homologia de centro* ∞_d, *q. e. d.*

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de frequência — 1949-50.**

3009 — Defina colineação e homologia entre dois planos. Mostre que uma homologia plana de eixo impróprio é uma homotetia ou uma translação.

3010 — Determine a intersecção duma recta r oblíqua, com um plano α não projectante, definido por uma recta $t//LT$ e por um ponto $P^\bullet/r$.

3011 — Dados A, B, com cotas e afastamentos distintos, situados fora de ν_0 e de φ_0, determine a distância de A ao plano definido por LT e por B.

3012 — Dado um triângulo $[ABC]$, com nenhum dos lados de nível nem de frente, determine os eixos da projecção vertical da circunferência $[c]$ circunscrita a $[ABC]$. Como se chama a colineação Φ que faz passar de $[c'']$ para $[c']$? Em que são transformados por Φ os eixos de $[c'']$?

3013 — Mostre que dois trapézios situados num mesmo plano α são sempre projectivos entre si. R: *Sejam* $[ABCD]$, $[A^*B^*C^*D^*]$ *os dois trapézios, com* $AB//CD$, $A^*B^*//C^*D^*$. *Existirá pelo menos uma transformação de semelhança* Φ *(de* α *sobre* α*) que transforma o segmento* $\overline{CD}$ *no segmento* $\overline{C^*D^*}$. *Designando por* A_1, B_1, C_1, D_1 *os transformados de* A, B, C, D *por meio de* Φ, *e supondo* $A_1 \neq A$, $B_1 \neq B$ *(o que é sempre lícito), é fácil ver que a homologia* Θ *de eixo* C^*D^* *e de centro* $A_1A^* \cdot B_1B^*$, *que transforma* A_1 *em* A^*, *faz passar de* $[A_1B_1C_1D_1]$ *para* $[A^*B^*C^*D^*]$. *Portanto* $\Theta\Phi$ *será uma transformação projectiva que transforma* $[ABCD]$ em $[A^*B^*C^*D^*]$, *o que prova a afirmação.*

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 1948-49.**

3014 — Descreva as diferentes espécies de helicóides regrados que conhece. Em que caso é que as geratrizes dum helicóide são todas cónicas? Que particularidade apresenta a linha de estricção nestas superfícies, sendo o eixo vertical? Justifique a resposta.

3015 — Dado um hiperbolóide duma folha definido por três directrizes, $d_1 \perp \nu_0, d_2//LT, d_3 \perp \varphi_0$, pede-se a determinação duma geratriz genérica da superfície e do plano central desta geratriz. Como determinaria o ponto central?

3016 — Sejam n_1, n_2 duas rectas de nível não complanares e designe $[\sigma]$ a superfície regrada gerada por uma recta que se apoia sobre n_1, n_2 e forma com ν_0 um ângulo dado. Determine uma geratriz genérica de $[\sigma]$ e o respectivo plano assintótico. É $[\sigma]$ uma parabolóide? Justifique a resposta. R: *Seja* P *um ponto qualquer de* n_1; *o lugar geométrico das rectas que passam por* P *e formam com* ν_0 *o ângulo dado é um cone de revolução* $[\gamma]$, *que se pode assumir como cone director de* $[\sigma]$. *As eventuais geratrizes de* $[\sigma]$ *que passam por* P, *obtêm-se achando a intersecção de* n_2 *com* $[\gamma]$ *e unindo com* P *os pontos de intersecção* (2, 1 *ou* 0 *soluções). Supondo que* g *é uma geratriz assim obtida, o plano assintótico de* g *será o plano tangente a* $[\gamma]$ *ao longo de* g. *A superfície* $[\sigma]$ *não será um parabolóide, porque:* a) *no caso de o ângulo dado ser maior que* 0, *as geratrizes que se apoiam sobre* n_1, n_2 *não são todas paralelas a um mesmo plano;* b) *sendo o ângulo dado igual a zero,* $[\tau]$ *degenera em dois planos paralelos.*

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 1948-49.**

3017 — Enuncie e demonstre o teorema de Chasles relativo a superfícies regradas.

3018 — Sejam a, b rectas de perfil não complanas e designe $[\pi]$ a superfície regrada que admite a, b como directrizes e φ_0 como plano director. Dado um plano α oblíquo, determinar as direcções assintóticas da secção feita por α em $[\pi]$. R: *Mediante uma mudança de plano horizontal, é possível tornar as rectas* a, b *de nível; então o parabolóide passará a ter um plano director de nível e outro de frente, e por conseguinte uma geratriz* t *de topo e uma outra* v, *vertical: as projecções verticais de todas as geratrizes da frente passam então por* (t'') *e as projecções horizontais das geratrizes de nível, por* (v'''). *Se for* f *a geratriz de frente tal que* $f''//v_\alpha$ *e* n *a geratriz de nível tal que* $n'''//h_\alpha$, *é claro* $n//\alpha, f//\alpha$ *e portanto tais geratrizes fornecem as direcções assintóticas pedidas.*

3019 — Defina conóide e mostre como se aplica a teoria da concordância à determinação de planos tangentes a uma tal superfície.

Enunciados e soluções dos n.os 3004 a 3019 de J. Sebastião e Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — CÁLCULO INFINITESIMAL — 1.º Exame de frequência — 1949-50.

1.º Ponto

3020 — Primitivar as funções:

$$\frac{x^2+1}{x(3x^2-x-2)} \qquad \frac{1}{3+\cos x} \qquad \frac{x\log x}{(x-4)^5}.$$

2.º Ponto

3021 — Primitivar as funções:

$$\frac{x}{(x^2-2x+2)(x-1)} \qquad \sqrt{x^4+3x^7} \qquad \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}.$$

F. C. P. — CÁLCULO — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 3 de Fevereiro de 1950.

1.º Ponto

3022 — Calcular o verdadeiro valor de

$$y=(\sec x)^{\cot g^2 x} \text{ para } x=O.$$

3023 — Determinar os máximos e mínimos de

$$y^3+y^2+y-8x^3+12x^2-4=0.$$

3024 — Calcular $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x\cdot \operatorname{sen} 2x}$.

3025 — Calcular $\displaystyle\int_0^{5/2}\frac{50}{(4x^2+25)^2}\,dx$.

3026 — Dada a equação $q^2r-2pqs+p^2t=0$ fazer a mudança de variáveis: $x=v$, $y=w$, $z=u$, sendo w a nova variável dependente.

2.º Ponto

3027 — Determinar os máximos e mínimos de $y=\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\cos 2x$, no intervalo $0\leqslant x\leqslant\pi$.

3028 — Sendo $x^3+xy^3+x^2-y^2=0$, calcular y'' no ponto (0,0).

3029 — Calcular $\int \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} 2x\,dx$.

3030 — Calcular $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

3031 — Dada a equação $r-t=0$ mudar as variáveis independentes sendo $x=\rho\operatorname{ch}\theta$, $y=\rho\operatorname{sh}\theta$.

NOTA — O aluno deve resolver um problema do cálculo diferencial e outro do cálculo integral.

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA — 1.º Exame de frequência extraordinário — Fevereiro de 1949.

3032 — Demonstrar a igualdade:

$$\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx=(b-a)^{m+n+1}\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

R: *Faça-se* $x-a=y$ *e integre-se por partes. Vem*

$$\int_0^{b-a} y^m(b-a-y)^n\,dy=\left|\frac{y^{m+1}}{m+1}(b-a-y)^n\right|_0^{b-a}+$$
$$+\frac{n}{m+1}\int_0^{b-a}y^{m+1}(b-a-y)^{n-1}\,dy,$$

ou

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}.$$

$$I_{m,n}=\frac{n}{m+1}\times\frac{n-1}{m+2}\times\frac{n-2}{m+3}\times\cdots I_{m+n,0}=$$
$$=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}=\frac{n!\,m!}{(m+n+1)!}.$$

3033 — Estudar o integral

$$\int_b^\infty\frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

e calculá-lo na hipótese de ser convergente.

R: *Se* $b>-a$ $\lim\limits_{x\to b+0}(x-b)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}=\frac{1}{a+b}>0$ *e o integral é convergente.*

Fazendo $x-b=t^2$

$$\int_b^\infty\frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}=2\int_0^\infty\frac{dt}{a+b+t^2}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[arc\ tg\frac{t}{\sqrt{a+b}}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{a+b}}.$$

3034 — Demonstrar que os planos $x+y+z=2$, $x+2y+3z=4$, e $2x+3y+4z=7$ formam uma superfície prismática. Determinar as direcções das arestas e os ângulos formados pelos planos dois a dois.

R: a) *A característica da matriz dos coeficientes é dois. O sistema é indeterminado de grau* 1 *e incompatível visto os característicos serem diferentes de zero. Os três planos formam pois uma superfície prismática.*

b) *As arestas são as rectas de equações:*

$$\begin{cases}x+y+z=2\\x+2y+3z=4\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y+z=2\\2x+3y+4z=7\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+3y+4z=7.\end{cases}$$

A sua direcção comum pode ser definida por:

$$(I + J + K) \wedge (I + 2J + 3K) = I + 2J + K\,;$$
$$(I + J + K) \wedge (2I + 3J + 4K) = I + 2J + K\,;$$

ou

$$(I + 2J + 3K) \wedge (2I + 3J + 4K) = I + 2J + K\,.$$

c) *Angulos dos planos, dados pelos cosenos:*

$$\cos\Phi_1 = \frac{1+2+3}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{7}\,; \qquad \cos\Phi_2 = \frac{3\sqrt{87}}{29}\,;$$

e

$$\cos\Phi_3 = \frac{10\sqrt{406}}{203}\,.$$

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 2.º exame de frequência 1949, Junho 17.

3035 — Calcular o integral

$$I = \iint \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

estendido ao círculo de centro na origem e raio 1.

R: *Fazendo* $x = \rho\cos\alpha$ *e* $y = \rho \operatorname{sen}\alpha$ *vem*

$$I = \iint_D \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,d\alpha\,d\rho = 2\int_0^{\pi} d\alpha \int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi^2 - 2\pi}{2} \; visto\ que \int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,d\rho =$$

$$= \left[\frac{1+\rho^2}{2}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\right]_0^1 = \frac{\pi-2}{4}\,,$$

valor que pode obter-se fazendo, por exemplo,

$$\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} = t^2\,.$$

3036 — Achar as curvas tais que o comprimento do arco contado a partir da origem é função da ordenada. Analise os casos 1) $s = y^2/2$, e 2) $s = \operatorname{senh} y$.

R: $s = f(y)$. *Logo* $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = f'(y)\,dy$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{[f'(y)]^2 - 1}} \quad e \quad dx = \pm\sqrt{[f'(y)]^2-1}\,dy\,,$$

$$x + c = \pm\int\sqrt{[f'(y)]^2-1}\,dy \quad donde \quad x + c = \pm\varphi(y)\,.$$

1) *Se* $s = f(y) = y^2/2$, $x + c = \pm\int\sqrt{y^2-1}\,dy =$

$$= \pm\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-1} - \operatorname{arcsenh} y\right)$$

2) *Se* $s = f(y) = \operatorname{senh} y$, $x + c = \pm\int\sqrt{\cosh^2 y - 1}\,dy =$

$$= \pm\cosh y \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{arccosh}(x+c)\,.$$

3037 — Determinar sôbre o plano $x+y+z=1$ um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias deste ponto aos pontos $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$ seja mínima. R: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+(x-1)^2+(z-1)^2$

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,y)} = 0 \\ \dfrac{\partial(f,f_1)}{\partial(x,z)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \text{ou } P(1/3, 1/3, 1/3)$$

Soluções dos n.os 3032 a 3037 de M. A. Soares Madureira

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame extraordinário de 1949-50.

3038 — Dadas as matrizes A e B verificar que as matrizes AB e BA têm valores próprios comuns.

3039 — *a*) Números derivados. *b*) Maior e menor função. *c*) Integrais de Denjoy e Perron. *d*) Sob o ponto de vista da primitivação em que termos o integral de Denjoy generaliza o integral de Lebesgue.

3040 — Dada a função

$$f(x,y,z) = \left(\log\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+z^2}$$

a) verificar que é homogénea e aplicar o teorema de Euler. *b*) Verificar que as suas derivadas parciais são homogéneas.

I. S. T. — Cálculo — 1. Exame ordinário de 1949-50.

3041 — Com que amplitude os integrais de Riemann, Lebesgue, Denjoy e Perron resolvem o problema da primitivação?

3042 — *a*) Independência linear. *b*) Independência funcional. *c*) Teorema de Peano.

3043 — Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Verificar que elas têm um valor próprio comum *b*) Calcular a de modo a que tenham mais valores próprios comuns.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. C. — Mecânica Racional — 1.º Exame de frequência — 1949-50 — Ponto n.º 6.

3044 — Determinar em coordenadas polares a trajectória dum ponto P que se move sobre um plano. A grandeza da velocidade radial é constante e igual a 2 e a grandeza da velocidade transversa é também constante mas igual a $1/2$. Uma das posições ocupadas pelo ponto tem as coordenadas $\theta = \pi/2$, $r = 2$.

3045 — Considere o ponto $P_0(+\sqrt{2}, 0)$ situado sobre a curva $y+2=x^2$. Este ponto P_0 é a posição inicial dum ponto móvel P que descreve a curva atrás citada com uma aceleração de que apenas conhecemos a direcção e o sentido; a direcção é a definida pelo eixo dos XX e o sentido é o da parte positiva para a parte negativa do mesmo eixo. Calcular a grandeza do vector aceleração em função do tempo. O sentido do movimento é o sentido retrógrado. Condições iniciais: para $t=0$ é $v=1$.

3046 — Num movimento central existe a relação $v=a/r$ entre a grandeza da velocidade e a grandeza do raio polar r. Determinar a equação polar da trajectória e a expressão de r em função do tempo.

F. C. C. — Mecânica Racional — 1.º Exame de frequência — 1949-50 — Ponto n.º 8.

3047 — Um ponto P move-se sobre um plano de tal maneira que as grandezas das velocidades radial e transversa são constantes e iguais a 1. Determinar em coordenadas polares a trajectória do ponto móvel. O ponto ocupa no seu movimento a posição $\theta=\pi/6$, $r=3$.

3048 — Um ponto móvel descreve a curva $y^2+2=x$ com uma aceleração constante em direcção e sentido; a direcção é a definida pelo eixo dos XX e o sentido é o da parte positiva para a negativa do mesmo eixo. Calcular a grandeza da aceleração em função do tempo. O sentido do movimento é o sentido directo. Condições iniciais: para $t=0$ é $v=2$, $x=4$ e $y=+\sqrt{2}$.

3049 — Num movimento central existe a relação $v=2/r$ entre a grandeza da velocidade e a grandeza do raio polar r. Determinar a equação polar da trajectória e a expressão de r em função do tempo.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência extraordinario — 1950.

3050 — Averiguar se, em relação ao sistema diferencial:

$$\frac{dx_1}{dt}+x_1=0\,;\quad \frac{dx_2}{dt}+x_2=0\,,\cdots,\quad \frac{dx_n}{dt}+x_n=0\,,$$

a função $F=\int_V (x_1 x_2\cdots x_n)\,dV$ é um invariante integral.

3051 — Conceitos de geodésica no cálculo variacional e no cálculo absoluto: sua identificação.

3052 — Conceito de função harmónica. Propriedades.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência ordinário — 1950.

3053 — Um ponto P move-se no plano Oxy com movimento uniformemente acelerado sobre uma paralela ao eixo Ox. O triedro de referência $Oxyz$ está animado duma rotação uniforme em torno de Oz. Determinar a aceleração de transporte do ponto e a sua trajectória.

3054 — Estacionaridade dos integrais duplos.

Relações entre o problema da estacionaridade do integral $\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy$ e do problema de Dirichelet.

3055 — Conceito de medidas em geometria das massas. Medidas negativas e medidas vectoriais.

PROBLEMAS

SOLUÇÃO RECEBIDA

2542 (*Gaz. Mat.* n.º 34) — Mostre que

$$\sum_{p=0}^{m-1}\frac{p\,!}{(n+p)\,!}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{m\,!}{(m+n-1)\,!}\right)$$

R: *Raciocinemos por recorrência. Para* $m=1$, *tem-se*

$$\sum_{p=0}^{0}\frac{p\,!}{(n+p)}=\frac{0\,!}{(n+0)\,!}=\frac{1}{n!}=\frac{(n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)\,!}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{(n-1)\,(n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)\,!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{n\,(n-1)\,!-(n-1)\,!\,1\,!}{n\,!\,(n-1)\,!}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{n\,!-(n-1)\,!\,1\,!}{(n-1)\,!\,n\,!}\right]=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1\,!}{n\,!}\right],$$

quer dizer, a igualdade é válida.

Suponhamos então que ela é ainda válida para $m=k$, *isto é*:

$$\text{(I)}\qquad \sum_{p=0}^{k-1}\frac{p\,!}{(n+p)\,!}=\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{k\,!}{(k+n-1)\,!}\right]$$

e vamos provar que esta hipótese implica que o seja também para $m = k+1$. *Com efeito,*

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{p!}{(n+p)!} = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{p!}{(n+p)!} + \frac{k!}{(k+n)!}$$

e, em virtude de (I), *vem*

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{p!}{(n+p)!} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{k!}{(k+n-1)!}\right] + \frac{k!}{(k+n)!} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{k!}{(k+n-1)!} + \frac{k!\,(n-1)}{(k+n)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{(k+n)! - k!(k+n)(n-1)! + k!\,(n-1)\,(n-1)!}{(n-1)!\,(k+n)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\frac{(k+n)! - (n-1)!\,[k!\,(k+n) - k!\,(n-1)]}{(n-1)!\,(k+n)!}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{(k+n)! - (n-1)!\,(k+1)!}{(n-1)!\,(k+n)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{(k+1)!}{(k+n)!}\right]$$

ficando, portanto, demonstrada a identidade.

Solução de Fernando de Jesus, aluno do I. S. C. E. F.

As resoluções de problemas propostos devem ser enviados para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

RECTIFICAÇÃO

Com data de 20 de Abril de 1949 recebemos do nosso prezado colaborador do Recife, Prof. Dr. Luiz Freire, o pedido da publicação no n.º 39 da nossa revista da rectificação que se segue relativa a um artigo da sua autoria incluído nos n.ºs 37-38 de *Gazeta de Matemática*. Lastimamos só a podermos agora publicar.

«A págs. 12 do artigo *Os potenciais escalar e vectorial e os espaços a conexão simples e múltipla* por um lamentável equívoco de cópia do original, saíu como teorema recíproco, em seu enunciado e demonstração, o próprio teorema directo.

O teorema recíproco é: Se em $\oint u \times d\lambda$, $u = \nabla\varphi$, o integral é nulo.

A demonstração é a que segue:

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 .$$

Portanto

$$\oint u \times d\lambda = \int \nabla\varphi \times d\lambda = \varphi_2 - \varphi_1 = 0, \text{ pois } \varphi_2 = \varphi_1».$$

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUÊSA

REVISTAS RECEBIDAS POR PERMUTA COM *GAZETA DE MATEMATICA*

Argentina

Boletin Matemático, Buenos Aires.
Mathematicae Notae, Rosário.
Revista de la Unión Matemática Argentina, Buenos Aires.

Brasil

Revista do Instituto de Resseguros do Brasil, Rio de Janeiro
Revista Politécnica, S. Paulo.

Espanha

Euclides, Madrid.
Gaceta Matemática, Madrid.
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Matematica, New York.

França

Bulletin Astronomique, Paris.
Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris.
Annales de l'Institut Fourier, Grenoble.
Annales de l'Université de Lyon.
Intermédiaire des Recherches Mathématiques, Paris.
La Recherche Aéronautique — O. N. E. R. A. — Paris
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées et Bulletin de la Société Philomathique, Paris.

Inglaterra

The Mathematical Gazette, London.
The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford.

Itália

Periodico di Matematiche, Bologna.

Portugal

Agros, Lisboa.
Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses, Lisboa.
Gazeta de Física, Lisboa.
Portugaliae Mathematica, Lisboa.
Portugaliae Physica, Lisboa.
Revista de Economia, Lisboa.
Ciencia, Revista dos Estudantes da Faculdade de Ciências, Lisboa.
Seguros, Lisboa.
Técnica, Lisboa.
Vértice, Coimbra.

Suíça

Elemente der Mathematik, Basel.

Uruguai

Publicaciones del Instituto de Matematica y Estadistica, Montevideo.