GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XI N.os 44-45 SETEMBRO 1950

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

REDACÇÃO

Redactores principais: *José Morgado e Manuel Zaluar*

OUTROS COMPONENTES:

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. G. Albuquerque; **Leiria:** J. da Silva Paulo; **Lisboa:** A. Ferreira de Macedo, A. Sá da Costa, F. Carvalho Araújo, Humberto de Menezes, J. Calado, J. J. Rodrigues dos Santos, J. Sebastião e Silva, J. R. Albuquerque, Luís Passos, Manuel Peres J.or, Mário Madureira, Orlando M. Rodrigues, Vasco Osório e V. S. Barroso; **Porto:** Almeida Costa, Andrade Guimarães, António A. Lopes, Delgado de Oliveira, F. Soares David, Laureano Barros, M. G. Miranda, M. G. P. Barros, Ríos de Sousa e Ruy Luís Gomes.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *La Plata:* L. A. Santaló; *San Juan:* António Monteiro; *San Luis:* M. Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Luiz Freire; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, J. Abdellay e Leopoldo Nachbin; *São Paulo:* Omar Catunda; **Espanha** — *Barcelona*: Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios Garcia; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** — *Nancy:* A. Pereira Gomes; *Paris:* Paul Belgodère; **Suissa** — *Zürich:* H. Wermus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Lincoln:* Maria Pilar Ribeiro.

A SAÍR BREVEMENTE:

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA

POR **D. HILBERT**

TRADUÇÃO DA 7.ª EDIÇÃO, POR MARIA PILAR RIBEIRO E J. DA SILVA PAULO

Introdução.
Cap. I — *Os cinco grupos de axiomas.*
Cap. II — *A não contradição e a independência mútua dos axiomas.*
Cap. III — *A teoria das proporções.*
Cap. IV — *A teoria das áreas no plano.*
Cap. V — *O teorema de Desargues.*
Cap. VI — *O teorema de Pascal.*
Cap. VII — *As construções geométricas com base nos axiomas I-IV.*
Conclusão.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XI–N.os 44-45 **GAZETA DE MATEMÁTICA** SETEMBRO – 1950

REDACTORES PRINCIPAIS: *J. Morgado* E *M. Zaluar*

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

HOMENAGEM A DESCARTES

Associando-se às homenagens prestadas ao grande pensador em todo o mundo civilizado por ocasião do tricentenário da sua morte, a Gazeta de Matemática *julgou oportuno consagrar-lhe uma parte do presente número publicando um artigo original da autoria do seu colaborador António Gião e uma pequena antologia.*

Rationalisme cartésien et positivisme expérimental dans la science moderne

par ***António Gião***

Si le rôle fondamental que Descartes a joué – à côté de Galilée, Newton, Faraday, Maxwell, Einstein, . . . — dans l'élaboration de la Physique n'est pas très évident de prime abord, cela tient surtout au fait que sa contribution essentielle a consisté beaucoup moins en méthodes et résultats théoriques et expérimentaux qu'en une affirmation véhémente et fière de l'autonomie et de l'unicité de la raison considérée comme moyen de connaissance. Pour la première fois dans l'histoire de la pensée, l'activité de la raison a été envisagée systématiquement, non seulement comme l'unique moyen efficace de déduction — ce que la plupart des systèmes constructifs avaient fait précédemment —, mais encore et surtout comme possédant intrinsèquement un critérium permettant de juger en dernière instance de l'admissibilité des postulats. Ce critérium cartésien du vrai n'est que l'évidence immédiate d'un concept sous la lumière de la raison, c'est-à-dire la propriété qu'a un concept vrai d'être tel que son contraire puisse être jugé sans hésitation comme inadmissible. Aucune imposition de l'autorité extérieure (à laquelle s'est soumise et se soumet encore toute raison scolastique), aucun élément neutre ou inassimilable ne vient s'introduire dans l'activité de la raison cartésienne: elle est donc à la fois tautologique et créatrice et ses créations sont faites de la même «étoffe» qu'elle même. C'est précisément la découverte de l'autonomie créatrice de la raison qui constitue à notre avis l'apport historique impérissable de Descartes; et le rationalisme moderne, dont il est incontestablement l'initiateur, se distingue facilement de tant de pseudo-rationalismes parce qu'il admet essentiellement que la raison est une activité dynamique, créatrice, autonome. De plus, l'opération intrinsèque de la raison cartésienne par laquelle elle décide de l'admissibilité d'un postulat n'est pas une opération idéale ou fictive, soustraite au temps. En effet, comme tout autre phénomène, la raison évolue et son fonctionnement devient plus souple à la suite de son effort progressif d'adaptation à un «réel» plus profondément et plus minutieusement exploré par l'observation et par l'expérience. La reconnaissance de ce fait est l'autre apport fondamental du cartésianisme.

Il est extrêmement intéressant de constater le peu d'importance et d'efficacité — à quelques exceptions près — des résultats obtenus par Descartes en Physique (et généralement dans les Sciences Naturelles)

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
Contribuinte Nº 501 065 792

par application de sa méthode théorique en partant de postulats soumis à l'épreuve de l'évidence cartésienne. Cela tient sans doute partiellement à l'état peu avancé de la science expérimentale de son temps, dont les résultats n'avaient pas la finesse et la généralité requises pour suggérer des principes à la raison, déclencher son activité créatrice et la guider dans le choix de postulats réellement constructifs. Mais la cause principale de cet échec nous semble être un fait fondamental dont Descartes ne paraît pas avoir été pleinement conscient: nous voulons parler du fait que les postulats de la Science — et de la Philosophie de la Nature — ne sont véritablement constructifs et efficacement explicatifs que s'ils sont quantitatifs, plus exactement, susceptibles d'être exprimés mathématiquement. La raison essentielle de ce fait, qui n'est qu'un aspect du problème central de l'adaptation biunivoque du mathématique au réel, n'a pas besoin d'être élucidée dans cet article (1). Bornons-nous ici à ne pas l'oublier et à en tirer la conséquence évidente que l'idéal cartésien ne peut être atteint par une théorie physique qu'à l'aide d'une technique mathématique suffisamment évoluée et d'autant plus souple que les postulats initiaux visent à plus de généralité. La mathématique de Descartes et de ses contemporains était simplement «statique», ne possédant aucune des notions (celles de fonction en général, de dérivée, d'équation différentielle) nécessaires pour représenter le mouvement. Aucune Mécanique ne pouvait donc se développer avant la création ou adaptation par Newton — héritier des lois expérimentales de Galilée—de l'outillage mathématique indispensable. Bien que les lois principales de la dynamique galiléenne expérimentale ne puissent évidemment être traitées comme des principes cartésiens, la dynamique de Newton est néanmoins une construction théorique cartésienne, car elle peut être considérée comme un développement rationnel à partir d'un petit nombre de postulats (dont celui de la conservation de l'énergie de tout système mécanique isolé) pouvant subir avec succès l'épreuve de l'évidence cartésienne à la lumière de la raison envisagée, cela va sans dire, dans son développement historique.

Il en est de même de l'électromagnétisme de Maxwell qui, fondé sur la découverte expérimentale du champ et de ses lois par Faraday, et utilisant la notion de système d'équations aux dérivées partielles, appropriée à la description du changement — comme la dynamique newtonienne avait utilisé la notion de système d'équations différentielles ordinaires, suffisante pour traduire le cas particulier du changement qu'est le mouvement proprement dit —, n'est, en réalité, que le développement mathématique des conséquences des postulats d'esprit cartésien d'action de contact et de conservation de l'énergie appliqués au champ électromagnétique.

Examinons maintenant la Relativité. Dans son développement historique elle ne semble pas cartésienne. Le postulat de l'invariance et de l'isotropie de la vitesse des actions électromagnétiques dans le vide (pour ne parler que des principes de base de la Relativité restreinte) ne possède évidemment pas l'évidence cartésienne, surtout quand on l'envisage, comme cela doit être, à la lumière de la raison telle qu'elle fonctionnait au début du siècle. Mais le développement logique de la Relativité ne coïncide pas du tout avec son développement historique et expérimental. La Relativité généralisée est la partie essentielle, fondamentale de l'ensemble, dont la Relativité restreinte n'est qu'un cas particulier. Or, la Relativité générale peut être considérée comme un développement logique à partir du postulat — évidemment cartésien si l'on admet l'autonomie et l'autodétermination complètes de l'Univers (1) — d'après lequel les propriétés du contenant (espace-temps) de l'Univers et de ses contenus (matière, électricité) se déterminent complètement et mutuellement. Ce postulat, qui requiert, pour être exprimé, la technique mathématique de la théorie des hypersurfaces, n'a jamais été rendu explicite d'une manière formelle par Einstein et probablement n'a même pas été présent à sa conscience de façon nette et systématique — de même que le principe de conservation de l'énergie n'a pas été aperçu par Newton—; c'est cependant lui qui nous semble exprimer l'essentiel de la Relativité. Il en découle non seulement que le contenant de l'Univers est un espace de Riemann à quatre dimensions et à métrique hyperbolique normale, mais encore la possibilité d'une théorie unitaire relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme.

On voit donc qu'il existe, depuis Galilée et Newton, un vaste courant d'esprit cartésien qui doit tendre vers une théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme, réalisant précisément l'idéal rêvé confusément par Descartes mais qu'il n'a pu et ne pouvait réaliser, car la technique mathématique d'alors lui permettait à peine de dépasser le stade des balbutiements qualitatifs et des pseudo démonstrations verbales.

A côté de ce courant, nous voyons apparaître dans la Physique, depuis l'introduction de l'interprétation probabiliste des résultats de la Mécanique quantique,

(1) Nous avons effleuré ce problème dans une précédente étude intitulée «*Vers une réhabilitation du déterminisme*» (*Gazeta de Matem.*, *43*, 1950).

un courant nettement positiviste expérimental. En effet, partant des restrictions inhérentes à toute mesure «simultanée» des variables caractéristiques des états d'un système, du fait des interactions inévitables entre observateurs et appareils de mesure d'une part, et système observé d'autre part, les adeptes du courant d'idées positivistes en physique élèvent ces restrictions au rang de propriétés absolument fondamentales de l'Univers. Ils en déduisent tout naturellement, par la généralisation du raisonnement bien connu qui conduit aux relations d'incertitude $\Delta p.\Delta q \lessapprox h/2\pi$, un principe nettement formulé pour la première fois par Bohr, appelé par lui «principe de complémentarité», selon lequel il serait de l'essence même des choses que l'observation de plus en plus précise de certaines propriétés de la Nature entraîne l'inobservabilité d'autant plus accusée de propriétés complémentaires, c'est-à-dire leur rejet progressif dans la non existence, en attachant au mot existence sa signification positiviste. Seul l'ensemble des variables complémentaires constitue l'observable (qu'il ne faut pas confondre avec le simultanément observable), toute autre grandeur ne pouvant être qu'un intermédiaire de calcul inobservable et donc sans existence physique. D'accord cependant avec les exigences positivistes, ces inobservables doivent en réalité être éliminés de l'expression des lois dans une Mécanique quantique parfaitement positiviste et conforme à l'esprit du principe de complémentarité. Il est clair, dans ces conditions, que toute loi sur l'évolution d'un système ne peut être que de nature probabiliste, puisque le principe de complémentarité nous oblige à considérer l'état initial qui déterminerait les états futurs comme non parfaitement défini, ou plutôt comme non entièrement réalisé. C'est ainsi, par exemple, que d'après cette position positiviste extrême en physique théoririque (qui est cependant celle qui semble prévaloir dans beaucoup de cercles), un électron dont la position a été déterminée avec précision par une expérience ne possède pas de quantité de mouvement bien définie ; il est impossible de dire que la notion de vitesse lui soit alors applicable. Inversement, si une expérience a déterminé, ou plutôt fixé, la quantité de mouvement de l'électron, sa position est complètement indéterminée, autrement dit il est alors une entité non localisable dans l'espace (et dans le temps), transcendant en quelque sorte la description spatio-temporelle. Le principe de complémentarité nous obligerait donc à admettre que les entités élémentaires qui constituent l'Univers ne résident pas dans l'espace et dans le temps, ou plutôt que le cadre spatio-temporel ne serait qu'un effet macroscopique dans lequel il serait impossible d'inclure les entités élémentaires d'une manière tout-à-fait adéquate. La complémentarité des propriétés proviendrait justement de notre effort pour introduire les entités élémentaires dans un cadre qui ne leur convient pas. On voit que ce prétendu positivisme expérimental quantique mène tout droit à la conception d'un monde nouménal inconnaissable et transcendant dont le monde spatio-temporel ne serait qu'un effet statistique. Cette conclusion est étrange pour un système qui se prétend strictement positiviste et cela seul devrait nous mettre en garde contre ce courant d'idées, d'autant plus qu'il est nettement anti cartésien. La règle de l'élimination de toute grandeur inobservable des équations d'une théorie provient en réalité d'une interprétation injustifiée des exigences de la méthode expérimentale et hypertrophie le rôle que doit jouer l'expérience dans l'élaboration de la Physique théorique. Une construction abstraite doit être évidemment confirmée *a posteriori* par l'expérience, mais ses postulats de base, bien que naturellement suggérés par toute l'ambiance créée par la science expérimentale d'une époque donnée, sont formés au sein de la raison (elle-même historiquement informée par les résultats empiriques), et il est parfaitement légitime de les considérer comme des principes *a priori*, parfois aussi éloignés de l'expérience que les postulats de la Géométrie moderne. L'adoption des points de vue et des conclusions du «positivisme quantique» équivaut donc pour nous à un manque de confiance en la raison, à un abandon désséchant des postulats les plus généraux et les plus constructifs, pour se limiter à des principes selon lesquels l'Univers spatio-temporel aurait uniquement des propriétés quantifiées.

Cette sorte d'ascèse positiviste est non seulement anticartésienne et inutilement restrictive mais encore anti relativiste. En effet, l'expression la plus générale du principe de relativité conduit avant tout à un système d'équations du champ faisant intervenir des fonctions de nature à la fois géométrique et physique, essentiellement non quantifiées, et l'on ne peut nier à ces fonctions l'existence physique qu'en niant simultanément la validité du principe général de relativité. Certaines fonctions qui apparaissent dans les équations du champ (tenseurs de densité d'énergie-quantité de mouvement) peuvent néanmoins être exprimées à l'aide d'un ensemble dénombrable de fonctions d'onde de base dont les développements spectraux suivant les opérateurs linéaires et hermitiens correspondent précisément à la quantification générale des propriétés. Ainsi, l'élargissement de la Relativité en vue de la transformer en une théorie unitaire au moyen du principe qui, selon nous, en exprime l'essence et selon lequel il y a une détermination complète et réciproque du contenant et des contenus de l'Univers, conduit, comme nous l'avons montré ailleurs en détail [2], à la conception de deux modes d'existence physique, l'un non quantifié, l'autre quantifié, également réels et macroscopiquement équivalents. Il est essentiel d'ajouter que la justification de la quantification est indépendante de l'interprétation probabiliste de la Mécanique quantique. En réalité, la quantification véritablement relativiste exclut une telle interprétation, puisqu'il est facile de montrer [3] que la notion de densité spatiale de probabilité d'un événement, qui est à la base de l'interprétation probabiliste, n'est plus applicable lorsque les propriétés géométriques du domaine spatial occupé par le système étudié ne peuvent pas être considérées comme euclidiennes. C'est ce qui a lieu dans tout système soumis à un champ de gravitation ou à un champ électromagnétique. D'une manière générale, il est nécessaire de remplacer les notions probabilistes par des notions déterministes (en particulier la notion de densité de probabilité de présence par celle de densité d'intensité de présence).

L'interprétation probabiliste des fonctions d'onde Ψ des équations de la Mécanique ondulatoire quantique n'est possible qu'en admettant que ces Ψ ne décrivent en réalité que des états virtuels, imposés arbitrairement à un système en considérant des déplacements virtuels compatibles avec les conditions aux limites. Un tel Ψ virtuel n'est évidemment pas soumis aux restrictions qui proviennent du caractère non euclidien de la géométrie de l'Univers et il est possible de l'assujettir aux conditions requises pour former avec lui une densité de probabilité de présence. On ne peut cependant pas déduire de ces Ψ virtuels que le comportement réel des entités élémentaires soit de nature probabiliste [4].

Ces considérations, dont nous n'avons donné ici qu'un résumé schématique, nous semblent permettre de conclure à la fragilité de la base du «positivisme quantique expérimental». Pour nous faire abandonner à contre coeur le grand courant cartésien qui nous semble être en quelque sorte le «fleuve de vie» de la science moderne, ce positivisme, nettement anti relativiste sous les apparences, devrait s'étayer sur des arguments plus solides. Malgré la «séduction» facile de quelques unes de ses conséquences, que l'on n'a évidemment pas manqué de mettre en épingle comme des preuves «décisives» en faveur de la vague d'assaut de l'irrationalisme contemporain (déguisé souvent en rationalisme), continuons donc fermement attachés à l'esprit de la Méthode que Descartes nous a léguée. Pardonnons lui d'avoir souvent donné à sa pensée une forme édulcorée: l'essentiel de ce qu'il avait à nous communiquer était à son époque suffisamment «suspect» pour qu'il se crût obligé de le faire accepter en l'enrobant d'un certain conformisme scolastique. Mais il faut savoir lire entre les lignes en lisant Descartes.

---

(2) Cf. *loc. cit.* pour les références bibliographiques.

(3) Cf. notre étude «Intensité et probabilité dans les systèmes spatio-temporels» (*Bol. Soc. Port. Mat.* (A), I, 1947, pags. 29-40).

(4) Cf. notre mémoire «Sur la signification des fonctions d'onde en théorie unitaire et en mécanique ondulatoire» (*Comptes rendus du Congrès international de Philosophie des Sciences* d'Octobre 1499, Paris, Hermann, sous presse).

Os determinantes Wronskianos

por ***J. Ribeiro de Albuquerque***

Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$, n funções de uma variável x, definidas num mesmo intervalo (a, b) e admitindo em (a, b) derivadas sucessivas até à ordem $n-1$, inclusivè.

Suponhamos que estas n funções são linearmente dependentes, isto é, suponhamos que existe, definida em cada ponto de (a, b), uma relação

$$(1) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0,$$

para valores não todos nulos das constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Derivemos a relação (1), $n-1$ vezes, até formar o sistema

$$\sum_k c_k y_k^{[J]} = 0 \quad \begin{cases} k = 1, 2, \cdots, n \\ J = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

A condição necessária para este sistema, linear e homogéneo nas constantes, ter uma solução não nula, é que seja nulo em cada ponto de (a, b) o determinante do sistema, isto é, seja identicamente nulo em (a, b) o determinante

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = |y_k^{[J]}| \quad \begin{cases} k = 1, 2, \cdots, n \\ J = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

A este determinante dá-se o nome de *Wronskiano das funções* y_k.

Do que se disse resulta uma propriedade importante dos determinantes Wronskianos que pode ser assim enunciada:

PROPRIEDADE 1. *A condição necessária para* n *funções* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *serem linearmente dependentes em* (a, b), *é que seja identicamente nulo em* (a, b) *o seu Wronskiano* $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$.

Estudemos de perto este notável tipo de determinantes.

Chamaremos determinante funcional a todo o determinante cujos elementos são funções.

Entre os determinantes funcionais vamos considerar uma categoria muito geral, constituída pelos determinantes Δ_n, n qualquer finito, assim definidos:

DEFINIÇÃO 1. Chamaremos Δ_n a um determinante de ordem n, $|f_{ik}|$, cujos elementos são funções de uma variável x, definidas, contínuas e admitindo derivada nos pontos de um mesmo intervalo (a, b).

Os determinantes Wronskianos pertencem à categoria considerada e propomo-nos resolver o problema da sua caracterização naquela categoria.

Consideremos, para isso, a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO P_n. *Se num determinante* Δ_n, *a derivada de um qualquer menor de ordem* p, Δ_p, *contido em* p *linhas consecutivas de* Δ_n, *é o determinante que se obtem derivando os elementos da última linha de* Δ_p, *então* Δ_n *é o Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha.*

A proposição P_n é verdadeira para $n=2$. Com efeito, tem-se por hipótese:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{vmatrix}$$

e portanto: $f'_{11} f_{22} = f'_{12} f_{21}$, ou ainda: $\dfrac{f_{21}}{f'_{11}} = \dfrac{f_{22}}{f'_{12}} = k$, o que dá para Δ_2, a forma:

$$\Delta_2 = k \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{11} & f'_{12} \end{vmatrix};$$

mas derivando e comparando o resultado com o valor da derivada admitido por hipótese, vem $k=1$, o que prova a proposição P_2.

Vamos em seguida supor a proposição P_n verdadeira, e concluir que P_{n+1} será também verdadeira.

Consideremos um determinante Δ_{n+1}, onde as derivadas Δ'_p de qualquer menor Δ_p contido em p linhas consecutivas, se obtem derivando a última linha de Δ_p.

Em tal hipótese os complementos algébricos dos elementos da primeira linha de Δ_{n+1} são determinantes de ordem n, tais que a derivada Δ'_p de um qualquer seu menor Δ_p contido em p linhas consecutivas é o determinante que se obtem derivando a última linha de Δ_p.

Esses complementos algébricos estão nas condições exigidas na proposição P_n, que vamos supor verdadeira.

Tais complementos algébricos serão então Wronskianos das funções elementos da respectiva primeira linha.

Mas os menores de segunda ordem contidos nas duas primeiras linhas de Δ_{n+1}, são, em virtude da proposição P_2, Wronskianos das funções elementos da respectiva primeira linha, e isso leva a concluir que Δ_{n+1}, é ele também, um Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha.

Demonstrou-se assim por indução matemática que a proposição P_n é verdadeira qualquer que seja n finito.

Consideremos agora a proposição seguinte, recíproca da anterior:

PROPOSIÇÃO π_n. *Se* Δ_n *é Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha, então a derivada de um qualquer seu menor* Δ_p, *de ordem* p *contido em* p *linhas consecutivas, é o determinante que se obtem derivando a última linha de* Δ_p.

A Proposição π_n é verdadeira para $n=2$. Com efeito, temos nesse caso:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f'_{11} & f'_{12} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{11} & f'_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f''_{11} & f''_{12} \end{vmatrix} = $$
$$= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f''_{11} & f''_{12} \end{vmatrix}.$$

Suponhamos a proposição π_n verdadeira e tomemos um Wronskiano de $n+1$ funções cujo desenvolvimento segundo os elementos da última linha, será

$$\Delta_{n+1} = \sum_k f_k^{(n)} \Delta_{nk};$$

derivando, vem

$$(2) \qquad \Delta'_{n+1} = \sum_k f_k^{(n+1)} \Delta_{nk} + \sum_k f_k^{(n)} \Delta'_{nk}.$$

Seja Δ_p um menor de ordem $p \leqslant n$ do determinante Δ_{n+1}; dois casos se podem dar: ou as p linhas consecutivas de Δ_p são as últimas p linhas de Δ_{n+1}, ou não o são. Não o sendo, o menor Δ_p é também menor de certo A_{nk} que é um Wronskiano verificando a proposição π_n. Se Δ_p está contido nas p últimas linhas de Δ_{n+1}, vem para ele um desenvolvimento análogo ao já obtido para Δ_{n+1}.

$$\Delta_p = \sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n)} \Delta_{n\alpha_k}$$

cuja derivada é

$$\Delta'_p = \sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n+1)} \Delta_{n\alpha_k} + \sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n)} \Delta'_{n\alpha_k}.$$

Mas os determinantes $\Delta_{n\alpha_k}$ são menores de ordem $p-1$ de certos $A_{n\alpha_k}$ e portanto $\sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n)} \Delta'_{n\alpha_k}=0$. Então, vem $\Delta'_p=\sum_{\alpha_k} f_{\alpha_k}^{(n+1)} \Delta_{n\alpha_k}$ o que permite afirmar que também estes menores Δ_p verificam a proposição π_n. Resta provar que a derivada do próprio Δ_{n+1} se obtem com a mesma lei; mas isso resulta de (2) visto que é também

$$\sum_k f_k^{(n)} \Delta'_{nk} = 0 .$$

A proposição π_n é verdadeira qualquer que seja n finito. Podemos portanto enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1. *A condição necessária e suficiente para um determinante Δ_n ser um Wronskiano das funções elementos da sua primeira linha, é que a derivada Δ'_p de um qualquer seu menor Δ_p contido em* p *linhas consecutivas, seja o determinante que se obtem derivando os elementos da última linha de Δ_p.*

Para o caso de ser $p=n$, resulta do teorema a propriedade dos Wronskianos, conhecida com o seguinte enunciado.

Propriedade 2. *A derivada de um determinante Wronskiano obtem-se derivando a sua última linha.*

Como é fácil de ver o teorema 1 resulta por sua vez da propriedade 2. O teorema e a propriedade são lògicamente equivalentes. Pode pois dizer-se que a propriedade 2 é uma propriedade *característica* dos Wronskianos.

Consideremos um determinante Δ_n, não necessàriamente um Wronskiano, e suponhamos que num ponto x_0 do intervalo (a,b) onde as funções elementos de Δ_n são definidas, contínuas e admitem derivada, se tem

$$\Delta_n(x_0)=0\,,\quad A_{lm}(x_0)\neq 0$$

representando como é costume fazer-se, por A_{lm} o complemento algébrico do elemento bem determinado $f_{lm}(x)$. Consideremos os sistemas

$$\sum_k A_{ik} f_{jk} = \delta_{ij}\Delta_n - A_{im} f_{jm}$$

$$\begin{cases} j\neq l & j=1,2,\cdots,n \\ k\neq m & k=1,2,\cdots,n \\ i\neq l & i=1,2,\cdots,n \end{cases}\quad,\quad \delta_{ij}\begin{cases} =0 & i\neq j \\ =1 & i=j \end{cases}$$

Todos estes sistemas têm como determinante principal, quando considerados A_{ik} como incógnitas, o determinante A_{lm}. No ponto x_0 aqueles sistemas reduzem-se aos sistemas de Cramer

$$\sum_k A_{ik} f_{jk} = - A_{im} f_{jm}\quad \begin{cases} j\neq l & j=1,2,\cdots,n \\ k\neq m & k=1,2,\cdots,n \\ i\neq l & i=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Resolvendo tais sistemas, obtem-se:

$$A_{ik} = -\frac{A_{im}}{A_{lm}}D$$

onde por D se representa o determinante que se obtem de A_{lm} pondo na coluna k os elementos da coluna m de Δ_n.

Mudando com $m-k-1$ inversões a posição destes elementos, obtem-se:

$$A_{ik} = (-1)^{m-k}\frac{A_{im}}{A_{lm}}A_{lk}$$

ou, o que é equivalente

$$(3)\qquad (-1)^k\frac{A_{ik}}{A_{lk}} = (-1)^m\frac{A_{im}}{A_{lm}}.$$

Esta relação verifica-se sempre mesmo até para os valores $k=m$ e $i=l$, como facilmente se vê. São pois relações absolutamente gerais para todos os valores de

$$i=1,2,\cdots,n$$
$$k=1,2,\cdots,n$$

combinados como se desejar.

Façamos pois o seguinte enunciado:

Se num ponto x_0 *do intervalo* (a,b) *se tem* $\Delta_n(x_0)=0$ *e* $A_{lm}(x_0)\neq 0$ *então, é constante a relação* $(-1)^k\frac{A_{ik}}{A_{lk}}$, *isto é, tem-se sempre:*

$$(-1)^k\frac{A_{ik}}{A_{lk}} = \rho \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

Façamos nas fórmulas (3): $i=s$ e $i=t$, $s\neq t$ e dividamos ordenadamente as expressões que assim se obtêm; virá:

$$\frac{A_{sk}}{A_{tk}} = \frac{A_{sm}}{A_{tm}} = \rho .$$

Estas últimas expressões verificam-se para todos os valores de

$$\begin{cases} s=1,2,\cdots,n \\ t=1,2,\cdots,n \\ k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

apenas submetidos à condição de ser: $s\neq t$. A constante ρ é arbitrária mas *sempre finita*. Com efeito, tem-se para $t=l$:

$$\frac{A_{sm}}{A_{lm}} = \rho \neq \infty$$

visto que por hipótese se tem $A_{lm}(x_0)\neq 0$.

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2. *É condição necessária e suficiente, para ser nulo num ponto de* (a,b) *o determinante* Δ_n, *sem* *que o seja nesse ponto um dos seus menores de orden* $n-1$, *que se tenha*

$$\frac{A_{sk}}{A_{tk}} = \rho$$

sendo ρ *sempre uma constante finita, e quaisquer que sejam os valores de* s, t, k $(s \neq t)$.

Viu-se que a condição era necessária. Suponhamos que num ponto x_0 do intervalo se tem

$$A_{sk} = \rho\, A_{tk}$$

então também

$$\sum_k f_{sk}\, A_{sk} = \rho \sum_k f_{sk}\, A_{tk}$$

mas sendo $s \neq t$ o segundo membro desta relação é nulo devido a um teorema conhecido sobre os determinantes. Tem-se pois $\Delta_n(x_0) = 0$.

Porém para ρ ser sempre finito será necessàriamente um $A_{ik}(x_0) \neq 0$.

Suponhamos que no intervalo (a, b) se tem identicamente $W[y_1, y_2, \cdots, y_n] = 0$ e que em cada ponto de (a, b) se não anula um dos menores $A_{ik}(x)$ $k = 1, 2, \cdots, n$.

Tomemos um ponto x_0 do intervalo (a, b) e suponhamos para fixar ideias que é $A_{nn}(x_0) \neq 0$.

Pelo teorema 2, será, para todo o k: $\dfrac{A_{sk}}{A_{tk}} = \rho$ e pondo nestas expressões $s = n$, $t = n-1$, virão

$$A_{n-1,k} = \rho\, A_{nk} \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

Pelo teorema 1, ou mais directamente pela propriedade 2 dos determinantes Wronskianos, temos: $\dfrac{dA_{nk}}{dx} = A_{n-1,k}$, e portanto, seguem-se as expressões:

$$\frac{dA_{n1}}{dx} = \rho\, A_{n1}, \frac{dA_{n2}}{dx} = \rho\, A_{n2}, \cdots, \frac{dA_{nn}}{dx} = \rho\, A_{nn}.$$

Sendo por hipótese $A_{nn}(x_0) \neq 0$ e $A_{nn}(x)$ contínua no ponto x_0, existe uma vizinhança V_{x_0} do ponto x_0, tal que para $x \in V_{x_0}$ é $A_{nn}(x) \neq 0$.

Das relações anteriores resultará

$$A_{nn}\frac{dA_{nk}}{dx} - A_{nk}\frac{dA_{nn}}{dx} = 0 \quad k = 1, \cdots, n-1$$

e em todo o ponto x interior a V_{x_0} se terá

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A_{nk}}{A_{nn}}\right) = 0$$

e portanto existem constantes não todas nulas, dadas por

$$\frac{A_{nk}}{A_{nn}} = C_k.$$

A_{nk} são os complementos algébricos dos elementos da última linha de W, logo será nula a expressão

$$\sum_k A_{nk}\, y_k = 0$$

e portanto nos pontos interiores a V_{x_0} subsiste a relação de dependência linear entre as funções y_k

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{A_{nn}} y_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k\, y_k + y_n = 0.$$

Conclui-se que nos pontos interiores a V_{x_0} é válida a relação

$$(4) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1} + y_n = 0$$

Procuremos um ponto de acumulação de V_{x_0} onde A_{nn} se anule; se não existisse um tal ponto poderíamos tomar uma vizinhança de x_0 contendo V_{x_0} onde fosse ainda válida a relação (4).

Seja x_1 esse ponto e suponhamos $A_{nn-1}(x_1) \neq 0$; por um raciocínio análogo teríamos numa vizinhança V_{x_1} de x_1 uma relação

$$(5) \quad k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_{n-2} y_{n-2} + y_{n-1} + k_n y_n = 0.$$

Eliminando entre (4) e (5) y_n virá

$$(k_1 - c_1 k_n)\, y_1 + (k_2 - c_2 k_n)\, y_2 + \cdots +$$
$$+ (k_{n-2} - c_{n-2} k_n)\, y_{n-2} + (1 - c_{n-1} k_n)\, y_{n-1} = 0$$

e esta relação é verificada nos pontos de intersecção das vizinhanças V_{x_0} e V_{x_1} pontos esses onde é $A_{nn} = W[y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}] \neq 0$.

Então tem-se necessàriamente

$$k_1 - c_1 k_n = 0,\ k_2 - c_2 k_n = 0, \cdots, k_{n-2} - c_{n-2} k_n = 0,$$
$$1 - c_{n-1} k_n = 0$$

e as constantes k_n e c_n são proporcionais. Resulta pois que no conjunto $V_{x_0} + V_{x_1}$ coincidem os desenvolvimentos (4) e (5).

O intervalo (a, b) é limitado, poderemos cobri-lo por um número finito de vizinhanças de seus pontos (Teorema de Heine-Borel) e então a relação (4) subsiste no intervalo (a, b).

Poderemos enunciar finalmente esta outra propriedade dos Wronskianos:

Propriedade 3. *Se num intervalo* (a, b) *é identicamente nulo o Wronskiano* $W[y_1, y_2, \cdots, y_n]$ *e em cada ponto de* (a, b) *não é nulo um dos complementos algébricos dos elementos da última linha de* W, *então as funções* y_k *são linearmente dependentes em* (a, b).

Problèmes de dépouillements

I — Problèmes intéressant deux candidats

par Pierre Dufresne

Les premiers problèmes de probabilités peuvent être ramenés, pour la plupart, à des calculs de probabilités de résultats finaux d'une suite de tirages.

Une collection étant donnée comprenant des nombres connus d'objets appartenant à des familles déterminées on recherche, par exemple, la probabilité pour que, sur μ tirages effectués il y en ait eu exactement α qui aient fait sortir un objet de la famille A, β qui aient fait sortir un objet de la famille B, γ un objet de la famille C... etc.

Les conditions des tirages sont fixées à l'avance et on convient généralement qu'ils sont effectués dans une même collection mais tantôt on spécifie qu'un objet sorti à un tirage doit être remis avant le tirage suivant (nous dirons qu'il s'agit d'une suite de tirages identiques) et tantôt que les objets extraits ne sont jamais réintégrés (suite de tirages éliminatifs).

On cherchera, ainsi à déterminer la probabilité pour que, si l'on tire douze cartes d'un jeu de trente deux on sorte six cartes rouges et six cartes noires, ou pour que si on lance six fois un dé il tombe les six fois sur une face différente. C'est dans ce cas le résultat global qui importe: tant de cartes rouges sorties et tant de cartes noires ou tant de tirages ayant fait sortir le chiffre six et tant le chiffre cinq... etc. et non pas l'ordre de chacun des résultats élémentaires. Nous étudierons ici une autre catégorie de problèmes où ce n'est pas le résultat global qui compte, résultat généralement donné d'avance mais la manière dont il pourra être obtenu. Nous les appellerons des problèmes de dépouillements car ils reviennent à calculer, en fonction du nombre total de dépouillements possibles la proportion de ceux qui vérifient une ou plusieurs conditions posées.

Lorsqu'on «dépouille» totalement un jeu de trente deux cartes le résultat final ne fait pas de doute, si on distingue les cartes seulement par leur couleur (rouge ou noir) on sait qu'on sortira du jeu seize cartes rouges et seize cartes noires. Un problème de dépouillement consistera à rechercher la probabilité pour que le nombre des cartes rouges sorties ne soit jamais inférieur, durant tout le dépouillement, au nombre des cartes noires sorties au même moment.

Le principal problème de dépouillement actuellemente traité est connu sous le nom de problème du scrutin.

Le problème du scrutin. Il peut s'énoncer de la manière suivante: *Sachant qu'au cours d'un scrutin un candidat* A *a obtenu un nombre* a *de suffrages et un autre candidat* B *un nombre plus petit* b *on demande de calculer la probabilité pour qu'au cours du dépouillement le nombre des bulletins sortis portant le nom de* A *soit toujours supérieur à celui des bulletins sortis portant le nom de* B». Denis André a donné une solution très ingénieuse de ce problème. Nous en donnerons une autre solution fort différente mais, avant de commencer les calculs quelques remarques préliminaires s'imposent: nous voulons mettre en garde le lecteur sur l'interprétation malheureuse qui peut être faite des résultats. Tout problème mathémathique sous-entend des hypothèses qui ne sont que rarement mises en évidence. Dans le cas qui nous occupe l'hypothèse sous-entendue est que tous les dépouillements possibles sont considérés, à priori, comme également probables. En réalité, après une scrutin, les bulletins ne sont généralement pas suffisemment mêlés pour qu'il en soit ainsi. C'est d'autant plus grave que les bulletins ne sont pas déposés dans un ordre quelconque; certaines catégories d'électeurs ont coutume de voter le matin, l'autre l'après-midi, il y a des groupes d'amis ou de sympathisants qui votent ensemble... etc.

Je désignerai par:

θ le nombre total des bulletins déposés au nom de A ou au nom de B. Donc $\theta=a+b$.

$N_{(a,b)}$ le nombre de tous les dépouillements différents possibles de ces θ bulletins

$$N_{(a,b)}=\frac{\theta!}{a!\,b!}$$

$N_{(a,b)[A>B]}$ le nombre de ces déppouillements dans lesquels, à tout moment le nombre des bulletins dépouillés au nom de A est supérieur à celui des bulletins dépouillés au nom de B.

$P_{(a,b)[A>B]}$ la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins sortis portant le nom du candidat A soit supérieur à celui des bulletins sortis portant le nom du candidat B.

$$P_{(a,b)[A>B]}=\frac{N_{(a,b)[A>B]}}{N_{(a,b)}}$$

LEMME. *Si* $a+b>1$ *et* $a>b$

$$N_{(a,b)[A>B]}=N_{(a-1,b)[A>B]}+N_{(a,b-1)[A>B]}$$

J'appelle dépouillements favorables ceux dans lesquels A a constamment la majorité sur B. Je désigne par groupe I l'ensemble de tous les dépouillements favorables dans le cas où A a obtenu un nombre a de suffrages et B un nombre b.

Je désigne par groupe II l'ensemble de tous les dépouillements favorables dans l'un ou l'autre des deux cas suivants:

1.º) A a obtenu un nombre $(a-1)$ de suffrages et B un nombre b.

2.º) A a obtenu un nombre a de suffrages et B un nombre $(b-1)$.

Si je supprime de tous les dépouillements du groupe I le dernier bulletin sorti j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe II. Les dépouillements du groupe II sont donc au moins aussi nombreux que ceux du groupe I.

D'autre part si j'ajoute à la fin de tous les dépouillements du groupe II soit un bulletin A si le nombre des bulletins A était $(a-1)$ soit un bulletin B si le nombre des bulletins B était $(b-1)$ j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe I. Les dépouillements du groupe I sont donc au moins aussi nombreux que ceux du groupe II.

D'où il résulte que les nombres de dépouillements des deux groupes sont égaux.

THÉORÈME. *Si* $a\geqslant b$

$$N_{(a,b)[A>B]}=\frac{a-b}{a+b}\,\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

Si $a<b$ il est clair que $N_{(a,b)[A>B]}=0$; la formule donnerait un résultat négatif donc absurde.

Si $a=b$ il est encore immédiat que

$$N_{(a,b)[A>B]}=0$$

la formule donne bien un résultat nul et s'applique à ce cas particulier.

Je suppose $a>b$.

La formule est exacte pour $\theta=1$ c'est à dire en tenant compte de la condition $a>b$ pour $a=1$ et $b=0$.

Je démontrerai que si la formule est exacte pour $\theta=\theta_1-1$ et pour les couples de valeurs de a et de b répondant à la condition $a\geqslant b$, elle est encore exacte lorsque $\theta=\theta_1$ et pour n'importe quelles valeurs de a et de b telles que $a>b$.

En vertu du lemme j'ai le droit d'écrire

$$N_{(a,b)[A>B]}=N_{(a-1,b)[A>B]}+N_{(a,b-1)[A>B]}$$

et en supposant la formule exacte pour $\theta=\theta_1-1$ et $a\geqslant b$

$$N_{(a-1,b)[A>B]}=\frac{a-b-1}{a+b-1}\,\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!}$$

$$N_{(a,b-1)[A>B]}=\frac{a-b+1}{a+b-1}\,\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}$$

mais

$$\frac{a-b-1}{a+b-1}=\frac{a-b}{a+b}\left(1-\frac{2b}{(a+b-1)\,(a-b)}\right)$$

et

$$\frac{a-b+1}{a+b-1}=\frac{a-b}{a+b}\left(1+\frac{2a}{(a+b-1)\,(a-b)}\right)$$

donc

$$N_{(a,b)[A>B]}=\left[\left(a-\frac{2ab}{(a+b-1)\,(a-b)}\right)\right]+$$

$$+\left[b+\frac{2ab}{(a+b-1)\,(a-b)}\right]\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{(a+b-1)!}{a!\,b!}=$$

$$=\frac{a-b}{a+b}\,\frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

THÉORÈME. *Si* $a\geqslant b$

$$P_{(a,b)[A>B]}=\frac{a-b}{a+b}$$

En effet

$$P_{(a,b)[A>B]}=\frac{N_{(a.b)[A>B]}}{N_{(a,b)}}=\frac{\dfrac{a-b}{a+b}\,\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}}{\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}}=\frac{a-b}{a+b}$$

On peut imaginer bien d'autres problèmes de scrutin que celui qui vient d'être traité, par exemple celui ci: *calculer la probabilité pour que le candidat* A *acquière dès le début du dépouillement — c'est à dire avant qu'aucun bulletin au nom de* B *n'ait été sorti — une avance de* $(m+1)$ *suffrages sur le candidat* B *et qu'il conserve cette avance jusqu'à la fin du dépouillement.*

Nous garderons les mêmes notations a, b, θ, $N_{(a,b)}$ que précédement. Nous désignerons en outre par: $N_{(a,b)[A>B+m]}$ le nombre des dépouillements dans lesquels la condition posée est realisée et par $P_{(a,b)[A>B+m]}$ la probabilité pour que cette condition soit realiséé.

$$P_{(a,b)[A>B+m]}=\frac{N_{(a,b)[A>B+m]}}{N_{(a,b)}}.$$

THÉORÈME. *Si* $a\geqslant b+m$ *et* $m\geqslant 0$

$$P_{(a,b)[A>B+m]}=\frac{a-b-m}{a+b-m}\,\frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!}\,\frac{a!\,b!}{(a+b)!}.$$

Si $a < b + m$ la formule est inapplicable puisqu'elle conduit à des résultats négatifs donc absurdes; ou b n'est pas nul et il est clair qu'il ne peut y avoir de dépouillement favorable, ou b est nul et le seul dépouillement possible n'est composé que de bulletins A en nombre insuffisant d'ailleurs pour permettre à A même à la fin du dépouillement de devancer B de plus de m suffrages.

Nous supposerons $a \geqslant b+m$ et nous imaginerons que le dépouillement se passe en deux temps: premier temps: dépouillement de m bulletins; deuxième temps: dépouillement des bulletins restants.

La probabilité cherchée est égale au produit:

— de la probabilité P_1 pour que durant le premier temps du dépouillement ce soient toujours des bulletins A qui soient sortis;

— par la probablilité P_2 pour que durant le second temps du dépouillement en supposant la condition précédente réalisée et en ne considerant que les bulletins sortis lors de ce second temps, A ait constamment la majorité sur B.

Or

$$P_1 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdots \frac{a+1-m}{a+b+1-m} =$$

$$= \frac{a!}{(a-m)!} \frac{(a+b-m)!}{(a+b)!} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{a-m-b}{a-m+b}$$

donc

$$P_{(a,b)[A>B+m]} = \frac{a-m-b}{a-m+b} \cdot \frac{a!}{(a-m)!} \cdot \frac{(a+b-m)!}{(a+b)!} =$$

$$= \frac{a-m-b}{a-m+b} \cdot \frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!} \cdot \frac{a!\,b!}{(a+b)!}.$$

Théorème. *Si* $a \geqslant b+m$ *et* $m \geqslant 0$

$$N_{(a,b)[A>B+m]} = \frac{a-m-b}{a-m+b} \frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!}.$$

$$N_{(a,b)[A>B+m]} = P_{(a,b)[A>B+m]} \cdot N_{(a,b)} =$$

$$= \frac{a-m-b}{a-m+b} \frac{(a+b-m)!}{(a-m)!\,b!}.$$

Et maintenant nous chercherons la solution du problème que nous appellerons improprement d'ailleurs le problème réciproque du précédent: *calculer la probabilité pour que le candidat* A *ne soit jamais devancé de plus de* $(m-1)$ *suffrages par le candidat* B.

Nous conserverons les mêmes notations a, b, θ, $N_{(a,b)}$ qui conserveront le même sens que précédement.

Je désignerai par $N_{(a,b)[A>B-m]}$ le nombre des dépouillements dans lesquels le candidat A n'est jamais distancé de plus de $(m-1)$ suffrages par le candidat B, et par $P_{(a,b)[A>B-m]}$ la probabilité pour que durant tout le dépouillment le candidat A ne soit jamais distancé de plus de $(m-1)$ suffrages par le candidat B.

Conséquence immédiate des définitions

$$P_{(a,b)[A>B-m]} = \frac{N_{(a,b)[A>B-m]}}{N_{(a,b)}}$$

Lemme. *Si* $a+b>1$ et $a>b-m$

$$N_{(a,b)[A>B-m]} = N_{(a-1,b)[A>B-m]} + N_{(a,b-1)[A>B-m]}.$$

Démonstration identique à celle du lemme précédent (page 9).

Théorème. *Si* $b \geqslant m \geqslant 1$ *et* $a \geqslant b-m$

$$N_{(a,b)[A>B-m]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}.$$

Si $m=0$, la formule donnerait $N_{(a,b)[A>B]} = 0$ ce qui est en contradiction avec ce qui a été établi précédemment (problème du scrutin).

Si $m>b$ la formule est inapplicable car elle contiendrait la factorielle d'un nombre négatif. Il est clair que dans le cas considéré tous les dépouillements sont favorables.

Si $a<b-m$ la formule conduirait à un résultat généralement négatif et en tout cas absurde. Il ne peut y avoir de dépouillements favorables.

Au contraire le théorème s'applique bien:

Si $m=b$ (et quelle que soit la valeur de a); en effet la formule donne

$$N_{(a,b)[A>B-m]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - 1$$

et l'on vérifie immédiatement que tous les dépouillements sont favorables sauf celui où tous les bulletins B sortent d'abord et tous les bulletins A sortent ensuite.

Si $a=b-m$ (en supposant $b \geqslant m$) en effet la formule donne

$$N_{(b-m,b)[A>B-m]} = 0$$

ce qui est exact car aucun dépouillement ne peut satisfaire la condition exigée.

Je supposerai désormais $a>b-m$ et $1 \leqslant m \leqslant b$.

La formule est exacte pour $\theta = m+1$, c'est-à-dire pour $a=1$ et $b=m$. En effet en appliquant la formule on trouve m dépouillements favorables sur $m+1$ dépouillements possibles. On vérifie sans peine que le seul dépouillement qui n'est pas favorable est celui qui se termine par un bulletin A.

Utilisant le mode de raisonnement par récurrence je démontrerai que, si la formule est exacte pour $\theta = \theta_1 - 1$ et pour tous les couples de valeurs de a et de b vérifiant les conditions $b>m$ et $a \geqslant b-m$ elle est encore exacte pour $\theta=\theta_1$ et pour tous les couples de valeurs répondant aux conditions $b>m$ et $a>b-m$.

Soient a_1 et b_1 un couple de valeurs de a et de b satisfaisant aux conditions $b_1>m\geqslant 1$, $a_1>b_1-m$; je pose $a_1+b_1=\theta$.

En vertu du lemme je puis écrire:

$$N_{(a_1,\,b_1)\,[A>B-m]}=N_{(a_1-1,\,b_1)\,[A>B-m]}+$$
$$+\,N_{(a_1,\,b_1-1)\,[A>B-m]}$$

et en supposant le théorème exact pour $\theta=\theta_1-1$

$$N_{(a_1-1,\,b_1)\,[A>B-m]}=\frac{(a+b-1)\,!}{(a-1)\,!\,b\,!}-\frac{(a+b-1)\,!}{(a+m-1)!(b-m)!}$$

et
$$N_{(a,\,b-1)\,[A>B-m]}=\frac{(a+b-1)\,!}{a\,!\,(b-1)\,!}-$$
$$-\frac{(a+b-1)\,!}{(a+m)\,!\,(b-m-1)\,!}.$$

Donc

$$N_{a,\,b)\,[A>B-m]}=\left[\frac{(a+b-1)\,!}{(a-1)\,!\,b\,!}+\frac{(a+b-1)\,!}{a\,!\,(b-1)\,!}\right]-$$
$$-\left[\frac{(a+b-1)\,!}{(a+m-1)\,!\,(b-m)\,!}+\frac{(a+b-1)\,!}{(a+m)\,!\,(b-m-1)\,!}\right]=$$
$$=\frac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!}-\frac{(a+b)\,!}{(a+m)\,!\,(b-m)\,!}.$$

Théorème. *Si* $b\geqslant m\geqslant 1$ *et* $a>b-m$

$$P_{(a,\,b)\,[A>B-m]}=1-\frac{a\,!\,b\,!}{(a+m)\,!\,(b-m)\,!}.$$

$$P_{(a,\,b)\,[A>B-m]}=\frac{N_{(a,\,b)\,[A>B-m]}}{N_{(a,\,b)}}=$$
$$=\frac{\dfrac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!}-\dfrac{(a+b)\,!}{(a+m)\,!\,(b-m)\,!}}{\dfrac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!}}=1-\frac{a\,!\,b\,!}{(a+m)\,!\,(b-m)\,!}.$$

Nous allons passer à un autre problème plus délicat: il s'agira de *calculer la probabilité pour que le candidat* A *ne soit jamais distancé de plus de* $(m-1)$ *suffrages par le candidat* B, *le candidat* B *n'étant jamais lui même distancé de plus de* $(r-1)$ *suffrages par le candidat* A.

Nous garderons les notations précédentes a,b, $N_{(a,\,b)}$ qui conserveront les mêmes significations que précédement.

Je désignerai par $N_{(a,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.$ le nombre des dépouillements dans lesquels la double condition ci-dessus énoncée sera réalisée, et par $P_{(a,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.$ la probabilité pour qu'au cours du dépouillement la double condition soit réalisée.

$$P_{(a,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{N_{(a,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.}{N_{(a,\,b)}}.$$

Lemme. *Si* $a>b-m$, $b>a-r$ et $a+b>1$

$$N_{(a,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=N_{\,a-1,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.+$$
$$+\,N_{(a,\,b-1)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right..$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme de la page 9.

Théorème. *Si* $a\geqslant b-m,\, b\geqslant a-r,\, m\geqslant 1$ *et* $r\geqslant 1$

$$N_{(a,\,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)\,!}{a\,!\,\,b\,!}-S_{(a,\,b)}+$$
$$+\,T_{(a,\,b)}-U_{(a,\,b)}+V_{(a,\,b)}$$

avec:

$$S_{(a,\,b)}=\frac{(a+b)\,!}{(a+m)\,!\,(b-m)\,!}+\frac{(a+b)\,!}{(a+2m+r)!\,(b-2m-r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)\,!}{(a+km+[k-1]\,r)\,!\,(b-km-[k-1]\,r)\,!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)\,!}{(a+sm+[s-1]\,r)\,!\,(b-sm-[s-1]\,r)\,!}.$$

s étant le plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $b-sm-[s-1]\,r$.

$$T_{(a,\,b)}=\frac{(a+b)\,!}{(a+m+r)\,!\,(b-m-r)\,!}+$$
$$+\frac{(a+b)\,!}{(a+2m+2r)\,!\,(b-2m-2r)\,!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)\,!}{(a+km+kr)\,!\,(b-km-kr)\,!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)\,!}{(a+tm+tr)\,!\,(b-tm-tr)\,!}$$

t étant le plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $b-tm-tr$.

$$U_{(a,\,b)}=\frac{(a+b)\,!}{(a-r)\,!\,(b+r)!}+\frac{(a+b)\,!}{(a-2r-m)\,!\,(b+2r+m)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)\,!}{(a-kr-[k-1]\,m)\,!\,(b+kr+[k-1]\,m)\,!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)\,!}{(a-ur-[u-1]\,m)\,!\,(b+ur+[u-1]\,m)\,!}$$

u étant les plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $a-ur-[u-1]\,m$.

$$V_{(a,\,b)}=\frac{(a+b)\,!}{(a-r-m)\,!\,(b+r+m)\,!}+$$

$$+\frac{(a+b)!}{(a-2r-2m)!\,(b+2r+2m)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a-kr-km)!\,(b+kr+km)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(a+b)!}{(a-vr-vm)!\,(b+vr+vm)!}$$

v étant le plus grand nombre entier ne rendant pas négative la différence $a-vr-vm$.

Si $a<b-m$ ou si $b<a-r$ la formule donnerait des résultats pouvant être négatifs et en tout cas absurdes. En fait il ne peut y avoir de dépouillement favorable. Si $m=0$ ou si $r=0$ la formule ainsi qu'on peut le vérifier facilement donnerait comme résultat: $N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=0$ alors qu'il peut exister des dépouillements favorables.

Nous supposerons désormais $a\geqslant b-m$, $b\geqslant a-r$, $m\geqslant 1$ et $r\geqslant 1$. Si à la fois $b<m$ et $a<r$ la formule se réduit à

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

et en effet tous les dépouillements, dans ce cas particulier, sont favorables.

Si à la fois $b\geqslant m$ et $a<r$ (comme $a\geqslant b-m$ et $a<r$ il en résulte $b<m+r$) la formule se réduit à:

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}$$

le résultat est exact: B ne pouvant être distancé par A de r suffrages puisque A en a obtenu un nombre inférieur à r, les seuls dépouillements qui ne sont pas favorables sont ceux où A est distancé par B de plus de $(m-1)$ bulletins.

Si à la fois $a\geqslant r$ et $b<m$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}.$$

Si à la fois $m+r>b\geqslant m$ et $m+r>a\geqslant r$ la formule se réduit à:

$$N_{(a,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}-$$
$$-\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}-\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}.$$

En fait nous savons que le nombre des dépouillements dans lesquels A se trouve distancé par B d'au moins m suffrages est $\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!}$ et que le nombre de ceux dans lesquels B se trouve distancé par A d'au moins r suffrages est $\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}$. Il ne peut y avoir de dépouillement dans lequel à un moment donné A distance B d'au moins m suffrages et à un autre moment B distance A d'au moins r suffrages car, pour passer d'une situation à l'autre il faudrait dépouiller, dans un cas, au moins $(m+r)$ bulletins B, dans l'autre cas au moins $(m+r)$ bulletins A et que nous avons supposé que les bulletins B et que les bulletins A étaient les uns et les autres en nombre inférieur à $(m+r)$. Le résultat trouvé est donc exact.

Si $a=b-m$

$$S_{(b-m,b)}=\frac{(2b-m)!}{b!\,(b-m)!}+\frac{(2b-m)!}{(b+m+r)!\,(b-2m-r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b+[k-1]m+[k-1]r)!\,(b-[k-1]r-km)!}+\cdots$$

$$T_{(b-m,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b+r)!\,(b-m-r)!}+$$
$$+\frac{(2b-m)!}{(b+m+2r)!\,(b-2m-2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b+[k-1]\,m+kr)!\,(b-km-kr)!}+\cdots$$

$$U_{(b-m,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b-m-r)!\,(b+r)!}+$$
$$+\frac{(2b-m)!}{(b-2m-2r)!\,(b+m+2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b-km-kr)!\,(b+kr+[k-1]\,m)!}+\cdots$$

$$V_{(b-m,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b+m+r)!\,(b-2m-r)!}+$$
$$+\frac{(2b-m)!}{(b+2m+2r)!\,(b-3m-2r)!}+$$
$$+\cdots+\frac{(2b-m)!}{(b+km+kr)!\,(a-kr-[k+1]\,m)!}+\cdots$$

$$T_{(b-m,b)}=U_{(b-m,b)}$$

$$S_{(b-m,b)}=\frac{(2b-m)!}{(b-m)!\,b!}+V_{(b-m,b)}.$$

La formule donnerait donc

$$N_{(b-m,b)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=0.$$

Ce résultat est exact car effectivement il ne peut y avoir de dépouillement favorable.

Si $b=a-r$ la formule donnerait de même

$$N_{(a,a-r)}\left|\begin{matrix}A>B-m\\B>A-r\end{matrix}\right.=0.$$

Résultat encore exact car il ne peut y avoir de dépouillement favorable.

Ces cas particuliers étant examinés nous passons à la démonstration générale. Cette démonstration est faite pour des valeurs quelconques de m et de r satisfaisant les conditions imposées ($m \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$).

Nous emploierons la méthode de récurrence; nous constatons d'abord que la formule est exacte pour $\theta = m + r$ et pour tous les couples de valeurs possibles de a et de b satisfaisant aux conditions imposées (voir cas particuliers). Je démontrerai que si la formule est exacte pour une valeur quelconque de θ soit $\theta = \theta_1 - 1$ et pour tous les couples de valeurs satisfaisant aux conditions imposées ($a \geqslant b - m$, $b \geqslant a - r$) elle est encore exacte pour $\theta = \theta_1$ et pour tous les couples de valeurs de a et de b satisfaisant les inégalités $a > b - m$ et $b > a - r$.

Soit donc à calculer $N_{(a,b)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right.$, a et b formant un couple de valeurs satisfaisant les inégalités $a > b - m$ et $b > a - r$.

En vertu du lemme j'ai le droit d'écrire:

$$N_{(a,b)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right. = N_{(a-1,b)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right. + N_{(a,b-1)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right.$$

et en supposant la formule exacte pour $\theta = \theta_1 - 1$

$$N_{(a-1,b)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right. = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} - S_{(a-1,b)} + T_{(a-1,b)} - U_{(a-1,b)} + V_{(a-1,b)}.$$

(Les conditions $a - 1 \geqslant b - m$ et $b \geqslant a - r$ sont satisfaites puisque nous avons supposé $a > b - m$ et $b > a - r$).

$$N_{(a,b-1)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right. = \frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} - S_{(a,b-1)} + T_{(a,b-1)} - U_{(a,b-1)} + V_{(a,b-1)}.$$

(Les conditions $a \geqslant b - m$ et $b - 1 \geqslant a - r$ sont satisfaites puisque nous avons supposé $a > b - m$ et $b > a - r$).

Remarquons tout d'abord que:

$$\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} + \frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

Constatons par ailleurs qu'un terme de rang quelconque de la suite $S_{(a,b)}$ est égal à la somme des deux termes de même rang appartenant respectivement aux suites $S_{(a-1,b)}$ et $S_{(a,b-1)}$. En effet k^{me} terme de

$$S_{(a-1,b)} = \frac{(a+b-1)!}{(a-1+km+[k-1]\,r)!\,(b-km-[k-1]\,r)!}$$

k^{me} terme de

$$S_{(a,b-1)} = \frac{(a+b-1)!}{(a+km+[k-1]\,r)!\,(b-1-km-[k-1]\,r)!}$$

Somme de ces deux termes

$$= \frac{(a+b)!}{(a+km+[k-1]\,r)!\,(b-km-[k-1]\,r)!}$$

les suites $S_{(a,b)}$, $S_{(a-1,b)}$ et $S_{(a,b-1)}$ ont toujours exactement le même nombre de termes sauf si: $b = sm + (s-1)\,r$ auquel cas la suite $S_{(a,b-1)}$ compte un terme de moins. Mais alors le dernier terme de la suite $S_{(a-1,b)}$: $\frac{(a-1+sm+[s-1]\,r)!}{(a-1+sm+[s-1]\,r)!}$ est égal à l'unité, et le dernier terme de la suite $S_{(a,b)}$: $\frac{(a+sm+[s-1]\,r)!}{(a+sm+[s-1]\,r)!}$ est aussi égal à l'unité.

Donc $S_{(a-1,b)} + S_{(b-1,a)} = S_{(a,b)}$. On démontrerait de même que

$$T_{(a-1,b)} + T_{(b-1,a)} = T_{(a,b)}$$
$$U_{(a-1,b)} + U_{(b-1,a)} = U_{(a,b)}$$
$$V_{(a-1,b)} + V_{(b-1,a)} = V_{(a,b)}$$

D'où

$$N_{(a,b)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right. = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - S_{(a,b)} + T_{(a,b)} - U_{(a,b)} + V_{(a,b)}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Calcul approché de $\mathrm{N}_{(a,b)} \left| \begin{array}{l} \mathrm{A} > \mathrm{B} - \mathrm{m} \\ \mathrm{B} > \mathrm{A} - \mathrm{r} \end{array} \right.$.

On peut considérer $N_{(a,b)} \left| \begin{array}{l} A > B - m \\ B > A - r \end{array} \right.$ comme étant la somme de $\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$, de la suite $-S_{(a,b)} + T_{(a,b)}$ et de la suite $-U_{(a,b)} + V_{(a,b)}$.

Or nous pouvons exprimer ces deux suites de la manière suivante:

$$-S_{(a,b)} + T_{(a,b)} = -\frac{(a+b)!}{(a+m)!\,(b-m)!} + \frac{(a+b)!}{(a+m+r)!\,(b-m-r)!} - \frac{(a+b)!}{(a+2m+r)!\,(b-2m-r)!} + \frac{(a+b)!}{(a+2m+2r)!\,(b-2m-2r)!} -$$

$$-\frac{(a+b)!}{(a+3m+2r)!\,(b-3m-2r)!}+$$

$$+\frac{(a+b)!}{(a+3m+3r)!\,(b-3m-3r)!}-\cdots$$

$$-U_{(a,b)}+V_{(a,b)}=-\frac{(a+b)!}{(a-r)!\,(b+r)!}+$$

$$+\frac{(a+b)!}{(a-m-r)!(b+r+m)!}-\frac{(a+b)!}{(a-2r-m)!\,(b+2r+m)!}+$$

$$+\frac{(a+b)!}{(a-2r-2m)!\,(b+2r+2m)!}-$$

$$-\frac{(a+b)!}{(a-3r-2m)!\,(b+3r+2m)!}+$$

$$+\frac{(a+b)!}{(a-3r-3m)!\,(b+3r+3m)!}-\cdots$$

Les deux suites $(-S_{(a,b)}+T_{(a,b)})$ et $(-U_{(a,b)}+ + V_{(a,b)})$ sont composées de termes alternativement positifs et négatifs. Dès qu'un terme d'une de ces suites est inférieur en valeur absolue à celui qui le précède tous les termes suivants sont, en valeur absolue, de plus en plus faibles. Il en résulte qui, si en faisant le calcul de la valeur d'une de ces suites, on néglige la totalité des termes à partir d'un terme «décroissant» on commet une erreur dont le signe est le même que celui du premier terme négligé et dont la valeur absolue est inférieure à la valeur absolue de ce terme.

Calcul de la probabilité, pour que, durant tout un dépouillement le candidat A *devance constamment d'au moins* (m+1) *suffrages un autre candidat* B *sans que cet autre candidat* B *ne soit jamais distancé de plus de* (r—1) *suffrages par le candidat. A*.

Il est bien évident que le candidat A ne peut devancer le candidat B de $(m+1)$ suffrages tant que $(m+1)$ bulletins n'ont pas été dépouillés. La condition «le candidat A devance constamment d'au moins $(m+1)$ suffrages un autre candidat B» doit s'entendre de la manière suivante: le candidat A acquière au début du dépouillement une avance de $(m+1)$ suffrages avant qu'aucun bulletin au nom de B n'ait été compté et il conserve ensuite cette avance jusqu'à la fin du dépouillement.

Nous conserverons les mêmes notations a, b, θ, $N_{(a,b)}$ que précédemment. Nous désignerons en outre par

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+m\\B>A-r\end{array}\right.$$

le nombre des dépouilements différents possibles dans lesquels la double condition posée est réalisée et par

$$P_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+m\\B>A-r\end{array}\right.$$

la probablilté pour que cette double condition soit réalisée

$$P_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+m\\B>A-r\end{array}\right.=\frac{N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+m\\B>A-r\end{array}\right.}{N_{(a,b)}}$$

Théorème.

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+m\\B>A-r\end{array}\right.=N_{(a-[m+1],b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-(r-[m+1])\end{array}\right.$$

Je désigne par groupe I l'ensemble de tous les dépouillements possibles de $a+b$ bulletins dont a au nom de A et b au nom de B dans lesquels le candidat A devance constamment d'au moins $(m+1)$ suffrages le candidat B sans que cet autre candidat B ne soit jamais distancé de plus de $(r-1)$ suffrages par le candidat A. Par définition ce nombre de dépouillements est

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+m\\B>A-r\end{array}\right..$$

Je désigne par groupe II l'ensemble de tous les dépouillements différents possibles de $\theta-(m+1)$ bulletins dont $a-(m+1)$ au nom de A et b au nom de B dans lesquels le nombre des bulletins A sortis est toujours au moins égal à celui des bulletins B sortis sans que ce candidat B ne soit jamais distancé de plus de $r-(m+2)$ bulletins par le candidat A. Par définition ce nombre des dépouillements est

$$N_{(a-[m+1],b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-[r-(m+1)]\end{array}\right..$$

Si je supprime de tous les dépouillements du groupe I les $(m+1)$ premiers bulletins sortis qui sont obligatoirement des bulletins A j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe II. Les dépouillements du groupe II sont donc, au moins aussi nombreux que ceux du groupe I.

D'autre part si j'ajoute au commencement de tous les dépouillements du groupe II $(m+1)$ bulletins A, j'obtiens autant de dépouillements différents appartenant au groupe I. Les dépouillements du groupe I sont donc au moins aussi nombreux que ceux du groupe II.

D'où il résulte que les nombres de dépouillements des deux groupes sont égaux.

On demontrerait de même que:

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\B>A-r\end{array}\right.=N_{(a-1,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\B>A-(r-1)\end{array}\right.$$

et

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\B>A-r\end{array}\right.=N_{(a-2,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-2\\B>A-(r-2).\end{array}\right.$$

O teorema dos resíduos e o cálculo da soma de uma série

por João Farinha

1. São conhecidos os inestimáveis serviços que a teoria das funções de variável complexa presta no domínio real. Um exemplo típico e elementar é o da determinação do intervalo de convergência da série de Taylor de uma função $f(x)$; como se sabe, só o recurso à variável complexa permite, em certos casos, determiná-lo.

Vamos nesta nota mostrar como o teorema dos resíduos permite calcular fàcilmente a soma de uma série $\sum f(n)$, quando a função $f(z)$ satisfaz a certas condições; seguiremos nas suas linhas gerais, a via indicada por E. Phillips em *Functions of complex variable*.

2. Seja $f(z)$ uma função tendo os polos simples $a_1, a_2, \cdots a_k$ como únicas singularidades e $\varphi(z)$ uma função uniforme com os polos simples $z=m$ (m inteiro) e com os resíduos respectivos iguais à unidade positiva ou negativa. Admita-se ainda que $f(z)$ e $\varphi(z)$ não têm mais do que um número finito de singularidades comuns.

Consideremos um contorno simples C que contenha no seu interior todas ou algumas das singularidades de $f(z)$ e $\varphi(z)$. Supondo $f(z)\cdot\varphi(z)$ contínua sobre C é, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = 2\pi i \sum R\,.$$

Ora se forem $c_1, c_2, \cdots, c_k$ os resíduos de $f(z)$ em $a_1, a_2, \cdots, a_k$, os de $f(z)\cdot\varphi(z)$ são

$$c_1\,\varphi(a_1)\,,\ c_2\,\varphi(a_2)\,,\ \cdots,\ c_k\,\varphi(a_k)\,;$$

em $z=m$ o resíduo é $f(m)$ e vem, portanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = \sum c_j\,\varphi(a_j) + \sum f(n)$$

igualdade que nos permite determinar $\sum f(n)$ uma vez conhecido o integral; a soma da série obter-se-à depois por uma passagem ao limite.

O problema simplifica-se extraordinàriamente se C é uma circunferência de centro na origem e

$$|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)| \to 0 \quad \text{quando} \quad |z|\to\infty\,;$$

nestas condições o primeiro membro tende para zero e a soma da série é $-\sum c_j\,\varphi(a_j)$.

Como função $\varphi(z)$ podemos tomar qualquer das seguintes:

$$\frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}\,,\quad \pi\cot\pi z\,,\quad \pi\operatorname{cosec}\pi z \quad \text{e} \quad \frac{2\pi i\cos\pi z}{e^{2\pi i z}-1}$$

permitindo estas duas últimas o cálculo da soma de séries alternadas.

3. Como primeiro exemplo, calculemos $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2+a^2}$.

A função $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ é contínua sobre uma circunferência de centro na origem e raio $r=n+1/2$ (com $n>a$) e tem como polos simples $z=\pm ai$. Tomando $\varphi(z)=\dfrac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}$, cujos polos são os números inteiros positivos e negativos, tem-se para resíduos em ai e $-ai$ os valores

$$\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2\pi a}}{1-e^{2\pi a}} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{a}\,\frac{1}{1-e^{2\pi a}} \quad \text{e em} \quad z=m\,,\ \frac{1}{m^2+a^2}.$$

Como $|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)|\to 0$ com $\dfrac{1}{|z|}$, ou quando $n\to\infty$, o integral tende para zero e vem:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{1}{m^2+a^2} = -\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2\pi a}+1}{1-e^{2\pi a}} = \frac{\pi}{a}\coth\pi a$$

e visto ser

$$\sum_{-n}^{n}\frac{1}{m^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_1^n\frac{1}{m^2+a^2}$$

tem-se finalmente

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth\pi a - \frac{1}{2a^2}\,.$$

Se tomassemos como contorno de integração o rectângulo de lados sobre as rectas $x=1/2$, $x=n+1/2$ e $y=\pm 1$, obtinha-se, depois de calcular os integrais curvilíneos ao longo dos lados

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Consideremos agora a série alternada

$$\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1}{(4n)^2-1}\,.$$

Ponha-se $f(z)=\dfrac{1}{16z^2-1}$ e $\varphi(z)=\pi\operatorname{cosec}\pi z$ e integre-se $f(z)\cdot\varphi(z)$ ao longo da circunferência $|z|=n+1/2$. Como $|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)|\to 0$ quando $|z|\to\infty$, vem no limite

$$\int_C f(z)\cdot\varphi(z)\,dz=2\pi i\sum R=0\,.$$

Os resíduos de $f(z)\cdot\varphi(z)$ em $z=\pm 1/4$ têm o valor $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$ e em $z=m$, $\dfrac{(-1)^m}{(4m)^2-1}$. Será portanto

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n)^2-1}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\quad\text{e}\quad\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n)^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,.$$

ANTOLOGIA

PEQUENA ANTOLOGIA CARTESIANA

... toutes les erreurs dans lesquelles peuvent tomber les hommes ne naissent jamais d'une mauvaise induction, mais de ce qu'on pose en principe certaines expériences peu comprises ...

(Règles pour la direction de l'esprit, II*)*

... ceux qui cherchent le droit chemin de la vérité ne doivent s'occuper d'aucun objet dont ils ne puissent avoir une certitude égale aux démonstrations de l'arithmétique et de la géométrie.

(ibid., II*)*

... j'entends par intuition... la conception ferme qui naît dans un esprit sain et attentif aux seules lumières de la raison, et qui, plus simple, est conséquemment plus sûre que la déduction ellemême, ...

(ibid., III*)*

D'où il résulte qu'on peut dire que les propositions qui sont la conséquence immédiate d'un premier principe peuvent être connues tantôt par la déduction, suivant la manière de les considérer, tandis que les principes le sont seulement par l'intuition, et que les conséquences éloignées ne peuvent l'être que par la déduction.

Voilá les deux voies les plus sûres pour arriver à la science; l'esprit ne doit pas en admettre davantage; toutes les autres, au contraire doivent être rejetées comme suspectes et sujettes à l'erreur; ...

(ibid., III*)*

Il vaut mieux ne jamais songer à chercher la vérité sur aucune chose que de le faire sans méthode; car il est très-certain que des études sans ordre et des méditations obscures troublent les lumières naturelles et aveuglent l'esprit, ...

(ibid., IV*)*

Or, tout le secret de la méthode consiste à chercher en tout avec soin ce qu'il y a de plus absolu; ...

(ibid., VI*)*

... et dès lors j'ai bien jugé qu'il me falloit entreprendre sérieusement une fois en ma vie de me défaire de toutes les opinions que j'avois reçues auparavant en ma créance, et commencer tout de nouveau dès les fondements, si je voulois établir quelque chose de ferme et de constant dans les sciences.

(Méditations métaphysiques, I*)*

... il me semble que déjà je puis établir pour règle générale que toutes les choses que nous concevons fort clairement et fort distinctement sont toutes vraies.

(ibid., III*)*

La seule résolution de se défaire de toutes les opinions qu'on a reçues auparavant en sa créance n'est pas un exemple que chacun doive suivre.

(Discours de la Méthode, II*)*

... la pluralité des voix n'est pas une preuve qui vaille rien pour les vérités un peu malaisées à découvrir, à cause qu'il est bien plns vraisemblable qu'un homme seul les ait rencontrées que tout un peuple ...

(ibid., II*)*

... considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est à dire quelques raisons certaines et évidentes, ...

(ibid., II*)*

... j'eusse pensé commettre une grande faute contre le bon sens, si pour ce que je j'aprouvois allors quelque chose, je me fusse obligé de la prendre pour bonne encore après, lorsqu'elle auroit peut-être cessé de l'être, ou que j'aurois cessé de l'estimer telle.

(ibid., III)

... soit que nous veillions, soit que nous dormions, nous ne nous devons jamais laisser persuader qu'à l'évidence de notre raison. Et il est à remarquer que je dis de notre raison, non point de notre imagination ni de nos sens ...

(ibid., IV)

... la raison ne nous dicte point que ce que nous voyons ou imaginons ainsi soit véritable, mais elle nous dicte bien que toutes nos idées ou notions doivent avoir quelque fondement de vérité ; ...

(ibid., IV)

... ils me semble pareils à un aveugle qui, pour se battre sans désavantage contre un qui voit, l'auroit fait venir dans le fond de quelque cave fort obscure: et je puis dire que ceux-ci ont interêt que je m'abstienne de publier les principes de la philosophie dont je me sers ; car, étant très-simples et très évidents, comme ils sont, je ferois quasi le même en les publiant que si j'ouvrois quelques fenêtres et faisois entrer du jour dans cette cave où ils sont descendus pour se battre.

(ibid., VI)

Je n'ai jamais écrit ni jugé que l'esprit ait besoin d'idées qui soient quelque chose de différent de la faculté qu'il a de penser.

(Lettres, tom. II)

... je n'ai jamais écrit ni pensé que de telles idées [*innées*] fussent actuelles, ou qu'elles fussent je ne sais quelles espèces distinctes de la faculté même que nous avons de penser; et même je dirai plus, qu'il n'y a personne qui soit plus éloigné que moi de tout ce fatras d'entités scolastiques.

(ibid.)

... comme si le principe d'un système pouvoit être un principe logique, et comme si la connoissance des principes en général étoit du ressort de la dialectique ...

(ibid.)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO LUSO ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

LISBOA — OUTUBRO DE 1950

Reunirá em Lisboa, em local oportunamente a indicar, de 23 a 29 de Outubro próximo, o Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências.

Transcrevemos a seguir, na íntegra, o

Regulamento do Congresso Luso-Espanhol de Lisboa — 1950

Artigo 1.º — O Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências reunirá em Lisboa, de 23 a 29 de Outubro de 1950.

Art. 2.º — O Congresso terá as nove secções previstas nos Estatutos das Associações Portuguesa e Espanhola para o Progresso das Ciências.

§ único — Os presidentes das secções poderão subdividir estas em sub-secções de determinados ramos científicos.

Art. 3.º — Poderão tomar parte no Congresso, além dos sócios das duas Associações, os membros das Ordens e Sindicatos Nacionais de profissões liberais para cujo exercício seja necessário diploma de estudos superiores.

Art 4.º — A admissão e publicação dos trabalhos são da competência das mesas das secções.

Art. 5.º — A discussão nas secções far-se-á sobre os resumos publicados, podendo, porém, antes de aberta a discussão, os autores desses trabalhos usar da palavra sobre o assunto durante o período máximo de quinze minutos.

§ 1.º — Cada congressista não poderá intervir na discussão de cada trabalho por mais duma vez e durante mais de cinco minutos.

§ 2.º — No final da discussão, o autor do trabalho poderá responder por um período de tempo não superior a dez minutos.

§ 3.º — As mesas das secções poderão organizar conferências a horas determinadas sobre assuntos de especial interesse, tendo o conferente o direito a usar da palavra para exposição do tema escolhido por período superior ao estabelecido no corpo deste artigo e não havendo discussão sobre a matéria exposta.

Art. 6.º — A organização geral do Congresso e em especial a das sessões inaugural e de encerramento são das atribuições da Comissão Executiva, que resolverá sobre quaisquer dúvidas ou omissões deste regulamento.

Art. 7.º — A Secretaria Geral do Congresso é o órgão executor da Comissão Executiva.

O Congresso divide-se em nove secções: 1.ª) Ciências Matemáticas; 2.ª) Astronomia, Geodesia, Geofísica e Geografia; 3.ª) Física e Química; 4.ª) Ciências Naturais; 5.ª) Ciências Sociais; 6.ª) Ciências Filosóficas e Teológicas; 7.ª) Ciências Históricas e Filológicas; 8.ª) Ciências Médicas e Biológicas e 9.ª) Engenharia, Arquitectura e outras ciências aplicadas.

A 1.ª secção — Ciências Matemáticas — será presidida pelo Doutor José Vicente Gonçalves, professor da Faculdade de Ciências de Lisboa. O vice-presidente será o Doutor Almeida Costa, professor da Faculdade de Ciências do Porto e secretário o assistente da Faculdade de Ciências de Lisboa, Dr. David Lopes Gagean.

Enviaram comunicações para o Congresso alguns dos sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática.

M. Z.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS

De 30 de Agosto a 6 de Setembro teve lugar em Cambridge, Massachussetts, U. S. A., o Congresso Internacional de Matemáticos a que vimos há já muito fazendo referência pela importância que merece uma tal reunião. O único Português que participou no Congresso foi o professor da Universidade de Nebraska Dr. Hugo Ribeiro que apresentou uma comunicação (secção I). Além desta e da do Dr. António Gião (secção V) a que já nos referimos, enviaram também comunicações o Prof. Dr. Ruy Luís Gomes (L'intégrale $\int_X f(x)\,dx$ comme transformation continue par rapport à X et à $f(x)$ — secção III) e o Prof. Dr. António A. R. Monteiro, da Universidade de San Juan, Argentina (Note on uniform continuity — secção II — em colaboração com o Professor Brasileiro Dr. M. Matos Peixoto).

Não podemos fornecer ao leitor pormenores sobre o Congresso mas do programa transcrevemos — apesar da sua extensão — a lista das comunicações, conferências e discussões.

É esta, sem dúvida, uma informação preciosa e talvez a mais característica manisfestação da importância do Congresso.

M. Z.

Do Programa do C. I. M.

Agosto, 30.

Alocuções

A. Beurling, Univ. de Uppsala.
On null-sets in harmonic analysis and function theory.

H. Hopf, Escola Politécnica Federal, Zurich.
Die n-dimensionalem Sphären und projektiven Räume in der Topologie.

H. Cartan, Univ. de Paris.
Sur les fonctions analytiques de variables complexes.

R. L. Wilder, Univ. de Michigan.
The cultural basis of mathematics.

A. Mostowski, Univ. de Varsóvia.
On the applications of logic to mathematics and of mathematics to logic.

Agosto, 31.

S. Bochner, Univ. de Princeton.
Laplace operator on manifolds.

K. Gödel, Institute for Advanced Study.
Rotating universes in general relativity theory.

Conferência sobre Álgebra Geometria Algébrica

O. Zariski, Univ. de Harvard.
The fundamental ideas of abstract algebraic geometry.

A. Weil, Univ. de Chicago.
Number-theory and algebraic geometry.

(As alocuções anteriores foram feitas por convite da Comissão Organizadora).

Secção II — Análise

H. A. Rademacher, Univ. de Pennsylvania.
Remarks on the theory of partitions.

A. Dinghas, Univ. de Berlim.
Über eine Intergralgleichung für die Polynomen der Potential-theorie.

B. Kjellberg, Univ. de Uppsala.
On the growth of minimal positive harmonic functions in a plane region.

F. Leja, Univ. de Cracóvia.
Une méthode élémentaire de résolution du problème de Dirichlet dans le plan.

E. P. Miles, Jr., Instituto Politécnico de Alabama.
A minimal problem for harmonic functions in space.

G. Choquet, Univ. de Paris.
Fonctions croissantes d'ensembles et capacités.

S. Agmon, Rice Institute.
On the existence of summation functions for a class of Dirichlet series.

H. Delange, Univ. de Clermont-Ferrand.
Sur les théorèmes taubériens pour les séries de Dirichlet.

E. G. Straus, Univ. da Califórnia — Los Angeles.
On a class of integral valued Dirichlet series.

K. Chandrasekharan, Tata Institute of Fundamental Research, Bombaim.
On the summation of multiple Fourier series.

R. J. Duffin e A. C. Schaeffer, Carnegie Institute of Technology e Univ. de Wisconsin.
A class of non-harmonic Fourier series.

J. Karamata, Univ. de Belgrado.
Sur une notion de continuité régulière avec application aux séries de Fourier.

O. Szász, National Bureau of Standards.
Tauberian theorems for summability (R_1).

Secção III — Geometria e Topologia

L. A. Santalo, Univ. de Rosario.
Integral geometry in general spaces.

H. W. Alexander, Adrian College.
The edge of regression of pseudo-spherical surfaces.

J. de Cicco, Univ. De Paul.
Polygenic functions of several complex variables.

P. C. Hammer, Laboratório Científico de Los Alamos.
Convex bodies associated with a convex body.

A. Kroch, Instituto de Tecnologia, Haifa.
Solids filling space.

J. Kronsbein, Evansville College.
A method of visualizing four dimensional rotations.

L. A. MacColl, Bell Telephone Laboratories.
Geometrical properties of two-dimensional wave motion.

R. Rado, King's College, London.
Covering theorems for systems of similar sets of points.

H. Steinhaus, Univ. de Wroclaw.
The amount of change of an arc.

M. Villa, Univ. de Bolonha.
Richerche recenti sulle transformationi puntuali.

Secção IV — Probabilidades e Estatística, Ciência Actuarial, Economia

E. Lukacs e O. Szász, National Bureau of Standards e Univ. de Cincinnati.
Some non-negative trigonometric polynomials connected with a problem in probability.
Agosto, 31.

W. D. Baten, Michigan State College.
A history of probability in the United States of America to 1926.

N. Norris, Hunter College.
Proofs of the monotonic increasing character of general means.

E. Michalup, Univ. de Caracas.
New developments in interpolation formulae.

H. E. Stelson, Michigan State College.
The accuracy of linear interpolation

S. H. Khamis, Statistical Office, United Nations.
A note on the general Chebycheff inequality.

Conferência sobre Álgebra Grupos e Álgebra Universal

G. Birkhoff, Univ. de Harvard.
Problems in lattice theory.

H. Zassenhaus, Univ. de McGill.
Modern developments in the theory of finite simple groups.

S. MacLane, Univ. de Chicago.
Cohomology theory of abelian groups.

R. Baer, Univ. de Illinois.
Cohomology theory of a pair of groups.

C. Chevalley, Univ. de Columbia.
Determination of the Betti numbers of the exceptional Lie groups.

Conferência sobre Análise Análise Global

L. Bers, Univ. de Syracuse.
Singularities of minimal surfaces.

S. Bergman, Univ. de Harvard.
Geometric methods in the theory of functions of several complex variables.

L. Cesari e *T. Radó*, Univ. de Bolonha e Univ. do Estado de Ohio.
Applications of area theory in analysis.

C. B. Morrey, Univ. de Califórnia.
Problem of Plateau on a Riemannian manifold.

Secção III — Geometria e Topologia

E. M. Bruins, Univ. de Amsterdam.
The symbolical method in algebraic geometry.

P. Du Val, Univ. de Georgia.
Regular surfaces of genus 2.

L. Godeaux, Univ. de Liège.
Singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples.

T. R. Hollcroft, Wells College.
Systems of singular primals in S_r.

C. C. Hsiung, Univ. de Northwestern.
A general theory of conjugate nets in projective hyperspace.

D. Pedoe, Univ. de Londres.
The intersection of algebraic varieties.

T. G. Room, Univ. de Sydney.
Quadrices associated with the Clifford matrices.

C. R. Wylie, Univ. de Utah.
Linear line involutions without a complex of invariant lines.

Secção IV — Probabilidades e Estatística, etc.

M. Fréchet, Univ. de Paris.
Sur diverses définitions de la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque.

R. Fortet, Univ. de Caen.
Eléments aléatoires de nature quelconque.

M. Castellani, Univ. de Kansas City.
Random functions on Divisia ensemble.

E. S. Cansado, Conselho Superior de Estatística, Madrid.
On the logarithmico-Pearson distributions.

F. I. Toranzos, Univ. Nacional de Cuyo, Argentina.
A frequency system that generalizes the Pearson system.

H. v. Schelling, Laboratório Médico Naval de Pesquisas.
Distribution for the ordinal number of simultaneous events which last during a finite time.

G. Tintner, Iowa State College.
Some formal relations in multivariate analysis.

Secção V — Física Matemática e Matemáticas Aplicadas

A. Charnes e *E. Saibel*, Instituto Carnegie de Tecnologia.
On some cavitational flows in lubrication.

T. M. Cherry, Univ. de Melbourne.
Exact solutions for flow of a perfect gas in a two-dimensional Laval nozzle.

J. C. Cooke, Univ. de Malaya.
Pohlhausen's method for three-dimensional boundary layers.

A. G. Hansen e *M. H. Martin*, Univ. de Maryland.
Some geometrical properties of plane flows.

M. Z. E. Krzywoblocki, Univ. de Illinois.
On the theories of isotropic turbulence as applied to compressible fluids.

C. K. Thornhill, Armament Research Establishment, Fort Halstead, Inglaterra.
The dispersion, under gravity, of a column of fluid supported on a rigid horizontal plane.

C. Truesdell, Univ. de Maryland e Laboratório Naval de Pesquizas.
A new vorticity theorem.

C. T. Wang, Univ. de Nova York.
The application of variational methods to the compressible flow problems.

E. H. Zarantonello, Univ. de Harvard.
A constructive theory for the equations of flows with free boundaries.

C. G. Darwin, Cambridge, Inglaterra.
The refractive index of an ionized gas.

P. C. Bergmann, Univ. de Syracuse.
Covariant quantization of non-linear field theories.

A. J. Coleman, Univ. de Toronto.
Gravitational shift in the solar spectrum.

P. Drumaux, Univ. de Genebre.
La récession de nébuleuses extra-galactiques.

A. Gião, Reguengos, Alentejo, Portugal.
On the origin of positive and negative electricity.

O. E. Glenn, Lansdowne, Pennsylvania.
The mathematical nature of Lamarck's hypothesis that a biological species tends to increase in size.

K Sarginson, Somerville College, Oxford, Inglaterra.
An expansion of a four-dimensional plane wave in terms of eigenfunctions.

E. J. Schremp, Naval Research Laboratory.
On the interpretation of the parameters of the proper Lorentz group.

A. H. Taub, Univ. de Illinois.
Empty space times admiting three parameter groups of motion.

E. E. Witmer, Univ. de Pennsylvania.
Integral relationships between nuclear quantities.

Setembro, 1.

Alocuções

M. Morse, Institute for Advanced Study.
Recent advances in variational theory in the large.

A. Rome, Univ. de Louvain.
The calculation of an eclipse of the sun according to Theon of Alexandria.
(Alocuções a convite da Comissão Organizadora).

Secção I — Álgebra e Teoria dos Números

A. H. Clifford, Univ. de John Hopkins.
A class of partially ordered abelian groups related to Ky Fan's characterizing subgroups.

D. Ellis, Univ. de Florida.
On distance sets and distanciallity in naturally metrized groups.

F. Loonstra, Technische Hogeschool, Delft.
The classes of ordered groups

H. Ribeiro, Univ. de California.
On lattices of abelian groups with a finite basis.

R. M. Thrall, Univ. de Michigan.
On a Galois connection between algebras of linear transformations and lattices of subspaces of a vector space.

B. H. Arnold, Oregon State College.
Distributive lattices with a third operation defined.

D. Tamari, Instituto Henri Poincaré, Paris.
Generalized Malcev chains and conditions.

A. L. Foster, Univ. da Califórnia.
Boolean-Partition-Vector extensions and (sub) direct-powers of rings and general operational algebras.

F. Haimo, Univ. de Washington.
Some limits of Boolean algebras.

F. Harary, Univ. de Michigan.
On complete atomic proper relation algebras.

Secção II — Análise

A. Erdélyi, Instituto de Tecnologia da Califórnia.
The general form of hypergeometric series of two variables.

R. S. J. Llosá, Madrid, Espanha.
Les fondements d'une théorie générale de séries divergentes.

G. G. Lorentz, Univ. de Toronto.
Direct theorems on methods of summability.

J. C. P. Miller, National Bureau of Standards.
The determination of converging factors for the asymptotic expansions for the Weber parabolic cylinder functions.

C. N. Moore, Univ. de Cincinnati.
Convergence factor theorems for summable series whose partial sums form unbounded sequences.

W. Rudin, Univ. de Duke.
Uniqueness theory for Hermite series.

R. E. Graves, Univ. de Minnesota
A closure criterion for orthogonal functions.

E. F. Beckenbach e *L. K. Jackson*, Univ. da Califórnia em Los Angeles.
Subfunctions and elliptic partial differential equations.

P. P. Gillis, Univ. de Bruxelas.
Equations de Monge-Ampère, du type élliptique, et problèmes réguliers du calcul des variations.

F. John, Univ. de New York.
On the fundamental solution of linear elliptic partial differential equations with analytic coefficients.

M. H. Protter, Univ. de Syracusa.
Boundary value problems for a partial differential equation of mixed type.

C. B. Morrey, Jr,. Univ. da Califórnia.
Differentiability properties of the solutions of variational problems for multiple integrals.

M. Shiffman, Univ. de Stanford.
On variational analysis in the large.

L. C. Young, Univ. de Wisconsin.
Generalized parametric surfaces.

Secção III — Geometria e Topologia

A. Barnhart, Univ. de Oklahoma.
Irreducible rings in minimal five color maps.

A. Errera, Univ. de Bruxelas.
Sur les conséquences, pour le problème de quatre couleurs, d'un théorème de M. Whitney.

B. Gelbaum, *G. Kalisch* e *J. M. H. Olmsted*, Univ. de Minnesota.
On the embedding of topological semigroups and integral domains.

R. Inzinger, Technische Hochschule, Viena.
A realization of the geometry of the Hilbert space in the plane.

M. Jerison, Univ. de Illinois.
Characterizations of certains spaces of continuous functions.

N. J. Fine e *G. E. Schweigert*, Univ. da Pennsylvania.
On the structure of the group of homeomorphisms of an arc.

C. N. Reynolds, Univ. de West Virginia.
Applications of a calculus of finite differences to the 4-color problem.

H. C. Wang, Univ. do Estado de Louisiana.
Metric space and its group of isometries.

Secção VI — Lógica e Filosofia

T. Skolem, Instituto Matemático, Oslo.
Remarks of the foundation of set theory.

H. Blumberg, Univ. do Estado de Ohio.
On a procedure for proving many theorems and obtaining new ones through transfinite induction.

M. Dolcher, Univ. de Trieste.
On displacements of systems of data and structures.

J. B. Rosser, Institute of Numerical Analysis, National Bureau of Standards.
Transfinite cardinal arithmetic in Quine's New Foundations.

R. M. Robinson, Univ. da Califórnia.
An essentially undecidable axiom system.

W. Szmielew e *A. Tarski*, Univ. da Califórnia.
Mutual interpretability of some essentially undecidable theories.

A. Robinson, College of Aeronautics, Cranfield, U. K.
On the application of symbolic logic to algebra.

Secção VII – História e Educação

G. L. Coolidge, Univ. de Harvard.
The origin of polar coordinates.

C. B. Boyer, Colégio de Brooklyn.
The foremost textbook of modern times.

H. W. Turnbull, Univ. de St. Andrews, Escócia.
The Scottish contribution to the early history of the calculus.

E. Neustein, Viena, Austria.
Fernwirkungen der arabischen und indischen Geometrie auf die abendländische Mathematik und Astrophysik.

P. S. Jones, Univ. de Michigan.
Brook Taylor and the mathematical theory of linear perspective, his contributions and influence.

M. Richardson, Colégio de Brooklyn.
Fundamentals in the teaching of undergraduate mathematics.

L. E. Boyer, Millersville State Teachers College.
A note on the theaching of general mathematics.

R. L. Swain, Univ. do Estado de Ohio.
Condensed graphs.

W. Betz, Public School System of Rochester.
Mathematics for the millions, or for the few ?

B. H. Gundlach, Univ. de Arkansas.
Gestalt theory in the teaching of mathematics.

Conferência sobre Análise – Métodos extremais e Teoria geométrica das funções de variável complexa

L. V. Ahlfors, Univ. de Harvard.
Introduction.

A. C. Schaeffer e *D. C. Spencer*, Univ. de Wisconsin e Univ. de Stanford.
Coefficient regions for schlicht functions.

M. M. Schiffer, Univ. Hebraica, Jerusalem.
Variational methods in the theory of conformal mapping.

H. Grunsky, Univ. de Tübingen.
Über Tchebycheffche Probleme.

R. Nevanlinna, Univ. de Zurique.
Surfaces de Riemann.

G. Szegö, Univ. de Stanford.
On certain set-functions in the theory of functions and in mathematical physics defined by extremum properties.

Conferência sobre Topologia – Teoria da homologia e homotopia

W. Hurewicz, Instituto de Tecnologia de Massachussetts.
Homology and homotopy.
(Alocução a convite da Comissão Organizadora).

S. Eilenberg, Univ. de Columbia.
Homotopy groups and algebraic homology theories.

J. H. C. Whitehead, Univ. de Oxford.
Algebraic homotopy theory.

G. W. Whitehead, Instituto de Tecnologia de Massachussets.
Homotopy groups of spheres.

Secção I – Álgebra e Teoria dos Números

G. Y. Rainich, Univ. de Michigan.
Invariants of vectors with non-commutative components, and application to geometry.

G. L. A. Papy, Univ. de Bruxelas.
Un théorème d'arithmétique en algèbre de Grassmann.

T. Evans, Univ. de Manchester.
The word problem for abstract algebras.

T. Schneider, Univ. de Göttingen.
Über die Charakterisierung der algebraischen und der rationalen funktionen durch deren funkionswerte.

A. T. Brauer, Univ. de Carolina do Norte.
On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle.

D. P. Vythoulkas, Univ. Nacional de Engenharia, Atenas.
On the minimum modulus of a root of a polynomial.

W. Jacobs, Univ. George Washington.
The effect on the inverse of a change in a matrix.

W. D. Krentel, *J. C. C. McKinsey* e *W. V. Quine*, Oklahoma Agricultural and Merchanical College e Univ. de Harvard.
Information patterns for games in extensive form.

O. Helmer, The Rand Corporation.
Generalized non-zero-sum games.

M. Dresher, The Rand Corporation.
Solution of polynomial-like games.

J. Popken, Univ. de Utrecht.
Two arithmetical theorems concerning linear differential-difference equations.

Secção IV — Probabilidades e Estatística, etc.

R. C. Bose, Univ. de Carolina do Norte.
Mathematical theory of factorial designs.

B. de Finetti, Univ. de Trieste.
La nozione di «beni indipendenti» in base ai nuovi concetti per la misura della «utilità».

A. Wald e *J. Wolfowitz*, Univ. de Columbia.
Two methods of randomization in statistics and the theory of games.

H. Robbins, Univ. da Carolina do Norte.
Asymptotically sub-minimax solutions of statistical decision problems.

C. N. Mooers, Zator Company, Boston.
Information retrieval viewed as temporal signalling.

L. S. Shapley, The Rand Corporation.
Information and the formal solution of many-moved games.

J. W. Tukey, Univ. de Princeton.
Estimation in the alternative family of distributions.

Secção V — Física Matemática, etc.

F. Rellich, Univ. de Göttingen.
Störungstheorie der Spektralzerlegung.

R. V. Churchill, Univ. de Michigan.
A modified equation of diffusion.

S. Goldstein, Univ. de Manchester.
On diffusion by discontinuous movements, and on the telegraph equation.

M. S. Klamkin, Instituto Politécnico Brooklyn.
A moving boundary filtration problem or «The Cigarette Problem».

A. J. Mc Connell, Trinity College, Dublin.
The hypercircle method of approximation to the solution of a general class of boundary-value problems.

H. Poritsky e *H. Weil*, General Electric Company.
Electromagnetic measurements of the flow velocity of a fluid in a pipe of elliptical cross section.

H. Ruderfer, Laboratório de Artilharia Naval.
The solution of Laplace's equation for regular polygonal regions with a given boundary condition.

S A Schelkunoff, Bell Telephone Laboratory.
Biconical antennas of arbitrary angle.

W. C. Taylor, Univ. de Cincinnati e Aberdeen Proving Grounds.
Formal solutions of an integro-differential equation for multiply scattered radiation.

Conferência sobre Análise — Análise e Geometria Globais

J. Leray, Colégio de França.
La théorie des points fixes et ses applications en Analyse.

G. de Rham, Univ. de Gnebre e Univ. de Lausana.
Harmonic integrals and the theory of intersections.

A Lichnerowicz, Univ. de Paris.
Curvature and Betti numbers.

Setembro, 2.

Conferência sobre Topologia — Feixes fibrosos e obstrucções

P. Olum, Institute for Advanced Study.
Theory of obstructions.

W. S. Massey, Univ. de Princeton.
Homotopy groups of triads.

G. Hirsch, Univ. de Bruxelas.
Homology invariants and fiber spaces.

Secção I — Álgebra e Teoria dos Números

K. Mahler, Univ. de Manchester.
Farey sections in the fields of Gauss and Eisenstein.

K. Iwasawa, Univ. de Tokyo.
A note on L-functions.

O. T. Todd, National Bureau of Standards.
Classes of matrices and quadratic fields.

M. Ward, California Institute of Technology.
Arithmetical properties of lemniscate polynomials.

M. Gut, Univ. de Zurique.
Die bedeutung der Euler'schen Zahlen für den grossen Fermat'schen Satz und für die Klassenanzahl des Körpers der 41-ten Einheitswurzeln.

H. Heilbronn, Univ. de Bristol.
On the divisibility by three of the class-number of quadratic fields.

S. Chowla e *A. B. Showalter*, Univ. de Kansas.
On the solutions of $h(d)=1$.

H. Davenport, University College, Londres.
Binary cubic forms.

H. S. M. Coxeter, Univ. de Toronto.
Extreme forms.

L. Tornheim, Univ. de Michigan.
The extreme smoothed octagon.

H. Cohn, Wayne University.
A periodic algorithm for cubic forms.

Secção II — Análise

M. Brelot, Univ. de Grenoble.
Sur l'évolution du problème de Dirichlet.

A. Edrei, Univ. de Saskatchewan.
On mappings of a uniform space onto itself.

J. M. G. Fell e *J. L. Kelley*, Univ. de Califórnia.
On commutative self-adjoint operator algebras.

C. Goffman, Univ. de Oklahoma.
Lusin's theorem for one to one measurable transformations.

J. P. La Salle, Univ. de Notre Dame.
Successive upper and lower approximations.

E. R. Lorch, Univ. de Columbia.
Differentiable inequalities, convexity and mixed volumes.

J. L. Massera, Univ. de Montevideu.
Conditional stability of a homeomorphism in the neighborhood of a fixed point.

L. Nachbin, Univ. de Chicago.
On the continuity of positive linear transformations.

M. H. Stone, Univ. de Chicago.
The spectrum and the operational calculus for a family of operators.

J. L. Kelley e *R. L. Vaught*, Univ. de Califórnia.
A note on Banach algebras.

J. W. T. Youngs, Indiana University and the Rand Corporation.
Surface area and homotopy.

A. Douglis, California Institute of Technology.
An extremum principle for solutions of a class of elliptic systems of differential equations with continuous coefficients.

L. Van Hove, Institute for Advanced Study.
A set of unitary representations of the group of contact transformations.

H. Wielandt, Univ. de Mainz.
Über die Eigenwertaufgaben mit reellen diskreten Eigenwerten.

A. Wilansky, Lehigh University.
Summability matrices coincident with regular matrices, Banach space methods.

F. Wolf, Univ. de Califórnia.
Perturbation of analytic operators.

R. H. Cameron e *R. E. Graves*, Univ. de Minnesota.
Additive functionals on a space of continuous functions.

S. P. Diliberto e *E. G. Straus*, Univ. de Califórnia e Univ. de Califórnia em Los Angeles.
On approximating to functions of several variables by functions of fewer variables.

R. B. Leipnik, Institute for Advanced Study.
Axiomatic Perron inversion.

A. Papoulis, Univ. de Pensilvânia.
On the strong differentiation of the indefinite integral.

A. Denjoy, Univ. de Paris.
Les permutations clivées.

D. B. Goodner, Univ. do Estado da Flórida.
A note on separable normed linear spaces.

G. Kurepa, Univ. de Zagreb.
Sur les ensembles partiellement ordonnés.

W. D. Berg e *O. M. Nikodym*, Kenyon College.
On convex sets in linear spaces.

Secção IV — Probabilidades e Estatística, etc.

P. Lévy, Escola Politécnica de Paris.
Processus laplaciens et équations différentielles stochastiques.

K. L. Chung, Univ. Cornell.
An ergodic theorem for stationary Markov chains with a countable number of states.

K. Yosida, Univ. de Nagoya.
Stochastic processes built from flows.

M. Rosenblatt, Univ. Cornell.
On a class of two-dimensional Markov processes.

H. Bergstrom, Chalmers University of Technology, Gothenburg.
On asymptotical expansions of probability functions.

W. R. Wasow, National Bureau of Standards.
On the mean duration or random walks in n dimensions.

B. O. Koopman, Univ. de Columbia.
Improbable events in general stationary-transition Markoff chains.

Secção V — Física Matemática, etc.

D. C. Drucker e *W. Prager*, Univ. Brown, e *H. J. Greenberg*, Carnegie Institute of Technology.
On the pressing of a rigid stamp into an elastic-plastic body in plane strain.

D. Graffi, Univ. de Bolonha.
Su alcuni questioni di elasticità ereditaria.

G. H. Handelman e *A. E. Heins*, Carnegie Institute of Technology.
Remarks on the direct integration of the equations of elasticity.

P. G. Hodge, Jr., Univ. da Califórnia em Los Angeles.
The method of characteristics applied to problems of steady motion in plane plastic stress.

W. S. Jardetsky, Colégio Manhattan.
The problem of Atlantis.

E. H. Lee, Univ. Brown
The analysis of plastic flow in plane strain with large strains.

W. W. Leutert, Univ. de Maryland.
The heavy sphere supported by a concentrated force.

S. Moriguti, Univ. de Tóquio.
Some remarks on the method of solving two--dimensional elastic problems.

A. W. Saenz, Naval Research Laboratory, and *P. F. Neményi*, Univ. de Maryland.
On the geometry of two-dimensional elastic stress systems.

A. Signorini, Univ. de Roma.
A simple case of «incompatibility» between linear elasticity and the theory of finite deformations.

C. P. Wells, Colégio Estado Michigam, e *R. A. Beth*, Western Reserve University.
A new approach to cantilever-strut problems.

Conferência sobre Algebra — Teoria das Estruturas dos Anéis e Algebras

A. A. Albert, Univ. de Chicago.
Power-associative algebras. (Alocução a convite da Comissão Organizadora).

R. Brauer, Univ. de Michigan.
On the representations of groups of finite order.

N. Jacobson, Univ. Yale.
Representation theory of Jordan Rings.

J. Dieudonné, Univ. de Nancy.
Minimal ideals.

T. Nakayama, Univ. Nagoya
Two topics in the structural theory of rings.

Conferência sobre Matemáticas Aplicadas — Processos aleatórios em Física e Comunicações

C. E. Shannon, Bell Telephone Laboratories.
Some topics in information teory.

S. M. Ulam, Laboratório Científico de Los Alamos.
Random transformations and processes.

Secção II — Análise

H. Bohr, Univ. de Copenhague.
A survey of the different proofs of the main theorems in the theory of almost periodic functions.

E. Lahaye, Univ. de Bruxelas.
Sur le principe des itérations intégrales convergentes.

W. Magnus, Instituto de Tecnologia de California.
On a class of bounded matrices.

M. Owchar, Univ. of Minnesota.
Wiener integrals of multiple variations.

J. Chazy, Univ. de Paris.
La solution du problème des trois corps par Sundman, et ses conséquences.

G. Fichera, Univ. de Roma.
Methods for solving linear functional equations, developed by the Italian Institut for the Applications of Calculus.

R. N. Haskell, Univ. de Texas.
Sub-biharmonic functions.

E. Hopf, Univ. de Indiana.
On the initial value problem for the Navier--Stokes equations.

M. Janet, Univ. de Paris.
Equations semi-canoniques.

V. Wolontis, Univ. de Kansas.
The change of resistance under circular symmetrization.

J. Elliott, Univ. Cornell
Some singular integral equations of the Cauchy type.

S. Mandelbrojt, Rice Institute e Collège de France.
Théorèmes d'unicité de la théorie des fonctions.

M. L. Cartwright e *E. F. Collingwood*, Univ. Cambridge e Alnwick, Inglaterra.
Boundary theorems for functions meromorphic in the unit circle.

H. Milloux, Faculdade de Ciências, Bordeus.
Fonctions méromorphes et dérivées.

G. Valiron, Univ. de Paris.
Fonctions méromorphes d'ordre nul.

B. Epstein e *J. Lehner*, Univ. de Pennsylvania.
On Ritt's representation of analytic functions as infinite products.

F. Herzog e *G. Piranian*, Colégio Estado Michigan e Univ. de Michigan.
Schlict gap series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute.

A. W. Goodman e *M. S. Robertson*, Univ. de Kentucky e Univ. Rutgers.
A class of multivalent functions.

O. Lehto, Univ. de Helsínquia.
On the boundary behavior of analytic functions.

G. R. Maclane, Rice Institute.
Riemann surfaces and asymptotic values associated with certain real entire functions.

Z. Nehari, Washington University.
Some extremal problems involving single-valued analytic functions.

J L Walsh, Harvard University.
On Rouché's theorem and the integral-square measure of approximation.

Secção III — Geometria e Topologia

P. O. Bell, Univ. de Kansas.
A new approach to the study of the projective differential geometry of surfaces.

A. Fialkow, Instituto Politécnico Brooklyn.
A correspondence principle in conformal geometry.

P. Hartman, Univ. John Hopkins.
On the uniqueness of geodesics.

V. Hlavaty, Indiana University.
Spinor space and line geometry.

S. B. Jackson, Univ. de Maryland.
Angular measure and the Gauss-Bonnet formula.

A Kawaguchi, Hokkaido University.
Theory of connection in an areal space.

C. C. MacDuffee, Univ. de Wisconsin.
Curves in Minkowski space.

S. B. Myers, Univ. de Michigan.
Curvature of closed hypersurfaces.

N. Sakellariou, Univ. de Atenas.
Über Strahlensysteme deren abwickelbaren Flächen eine Fläche unter geodätischen Linien und ihren geodätischen Parallelen schneiden.

J. L. Vanderslice, Univ. de Maryland.
Non-linear displacements in affine-connected space.

P. Vincensini, Univ. de Marselha.
Sur certains réseaux tracés sur une surface et leur rôle en géométrie différentielle.

M. C. Wicht, Louisiana State University.
A foundation for Riemannian geometry.

K. Yano, Univ. de Tóquio.
Affine and projective geometries of systems of hypersurfaces.

Secção VII — História e Educação

G. Polya, Stanford University.
On plausible reasoning.

H. Eves, Oregon State College.
A problem set for a course in «History of Elementary Mathematics».

E. Rossing, Tonder Statsskole, Tonder, Dinamarca.
The teaching of mathematics in Denmark.

K. May e *K. Mc Voy*, Carleton College.
Simplification of rigorous limit proofs.

O. E. Overn, State Teachers College, Milwaukee.
Current trends in the teaching of plane trigonometry.

H. P. Fawcett, Ohio State University.
Unifying concepts in mathematics.

M. S. Kramer, New Mexico State College.
The introduction of applied problems for the enrichment of classroom instruction in the schools and colleges.

F. Denk, Erlangen, Alemanha.
Über die Lehrbarkeit des Erfindens in der Mathematik.

F. L. Griffin, Reed College.
Further experience with undergraduate mathematical research.

Setembro, 4.

Secção I — Algebra e Teoria dos Números

A. Selberg, Institute for Advanced Study.
The general sieve method and its place in prime-number theory.

D. H. Lehmer, Univ. de Califórnia.
Problems concerning Ramanujan's function.

G. Pall, Illinois Institute of Technology.
A «reciprocity law» for quaternions.

D. Shanks, Naval Ordnance Laboratory.
On the density of reducible integers and some sequences associated with them.

I. Niven, Univ. de Oregon.
Sets of integers of density zero.

M. Hall, Jr., e *H. J. Ryser*, Ohio State University.
Cyclic incidence matrices.

S. Chowla e *A. L. Whiteman*, Univ. de Kansas e Univ. da Carolina do Sul.
On exponential and character sums.

A. A. K. Ayyangar, Andhra University, Waltair, India.
On positive integers admitting a particular type of partition into unequal parts.

W. Ljunggren, Univ. de Bergen.
On the integral solutions of the diophantine system $ax^2-by^2=c$, $a_1 z^2-b_1 y^2=c_1$.

L. V. Toralballa, Marquette University.
A generalization of finite integration.

N. C. Scholomiti, Univ. de Illinois.
Expansion of discontinuous functions. Applications to the theory of numbers.

A. A. Trypanis, Univ. Técnica Nacional, Atenas.
On Fermat's last theorem.

Secção II — Análise

L. Carleson, Univ. de Upsala.
On a class of meromorphic functions.

G. Springer, Massachusetts Institute of Technology.
The coefficient problem for Schlicht mappings of the exterior of the unit circle.

N. Terzioglu, Univ. de Estambul.
Über der Verzerrungssatz von Koebe.

L. R. Ford, Illinois Institute of Technology.
Fundamental regions for discontinuous groups of linear transformations.

E. Jabotinsky, Jerusalém, Israel.
Representation of functions by matrices and by integral transforms.

B. Lepson, Institute for Advanced Study.
On irregular points of normal convergence and M-convergence for series of analytic functions.

S. Rosen, Drexel Institute of Technology.
Modular transformation of certain series.

L. Sario, Harvard University.
On open Riemann surfaces.

O. Szasz e *N. Yeardley*, Univ. de Cincinnati e Purdue University.
Representation of an analytic function by general Laguerre series.

F. G. Tricomi, Univ. de Turim.
On the incomplete gamma function.

S. E. Warschawsky, Univ. de Minnesota.
On the effective determination of the mapping function in conformal mapping.

E. Hewitt e *H. S. Zuckermann*, Univ. de Washington.
On convolution algebras.

G. Racah, Univ. Hebraica, Jerusalém.
On the characterization of the rows and columns of the representations of the semi-simple Lie groups.

R. K. Ritt, Univ. de Michigan.
Algebraic functions in an abelian normed ring.

I. J. Schoenberg, Univ. de Pensylvania.
On the number of variations of signs in a sequence of linear forms.

S. Sherman, Institute for Advanced study.
The second adjoint of a C* algebra.

O. M. Nikodym, Kenton College.
On extension of measure.

J. Kampé de Fériet, Univ. de Lille.
Sur l'analyse harmonique des fonctions à carré moyen fini.

N. J. Fine, Univ. de Pennsylvania.
On the asymptotic distribution of certain sums.

E. Hille, Univ. de Yale.
«Explosive» solutions of Fokker-Planck's equation.

S. Kakutani, Univ. de Yale.
Brownian motion and duality of locally compact abelian groups.

H. Rubin, Univ. de Stanford.
An elementary treatment of uniqueness for the Hamburger moment problem.

A. Sard, Queens College.
Least square error and variance.

Secção III — Geometria e Topologia

A. L. Blakers, Lehigh University.
A generalization of the Hurewicz isomorphism theorem.

R. E. Chamberlin, Univ. de Utah.
On the mappings of a 4-complex into certain simply connected spaces.

B. Eckmann, Escola Politécnica Federal, Zürich.
Räume mit Mittelabbildungen.

S. T. Hu, Tulane University.
The equivalence of fibre bundles.

J. Leray, Colégio de França.
L'emploi, en topologie algébrique, du formalisme du calcul différentiel extérieur.

E. Pitcher, Lehigh University e Institute for Advanced Study.
Homotopy groups of the space of curves with application to spheres.

S. S. Chern e *E. H. Spanier*, Univ. de Chicago.
Transgression and the homology structure of fiber bundles.

N. E. Steenrod, Univ. de Princeton
Reduced powers of a cocycle.

R. L. Wilder, Univ. de Michigan.
A generalization of a theorem of Pontrjagin.

Secção IV — Probabilidades e Estatística, etc.

S. N. Roy, Univ. da Carolina do Norte.
On some aspects of statistical inference.

S. G. Ghurye, Institute of Statistics, Chapel Hill.
Maximum-likelihood estimation in linear stochastic difference equations.

A. C. Cohen, Jr., Univ. de Georgia.
Estimating parameters of logorithmic-normal distributions by the method of maximum likelihood

Z. W. Birnbaum, Univ. de Washington.
Sampling from populations with overlapping strata.

P. R. Rider, Washington University.
The distribution of ranges in samples from a discrete rectangular population.

A. W. Marshall e *J. E. Walsh*, The Rand Corporation.
Some tests for comparing percentage points of two arbitrary continuous populations.

Secção V — Física Matemática, etc.

G. Borg, Instituto de Matemática, Uppsala.
An inversion formula.

P. Brock, Reeves Instrument Corporation, New York.
The nature of solutions of a Rayleigh type forced vibration equation with large coefficient of damping.

F. H. Brownell, Univ. de Washington.
Asymptotically ergodic output under ergodic input of delay differential machines.

R. M. Foster, Instituto Politécnico de Brooklyn.
The number of series-parallel networks.

M. Goldberg, Bureau of Ordnance, Navy Department.
Rotors in spherical polygons.

R. Kahal, Instituto Politécnico de Brooklyn.
The realization of the transfer fonction of the finite, fourterminal network.

E. Leimanis, Univ. da Columbia Britânica.
Some new cases of integration of differential equations of exterior ballistics by quadratures.

A. Rapoport e *R. Solomonoff*, Univ. de Chicago.
Structure of random nets.

R. M. Rosenberg, Univ. de Washington.
A note on the response of systems with or without non-linear elements.

A. W. Saenz, Washington, D. C.
On integrals of motion of the Runge type in classical and quantum mechanics.

J. J. Smith e *P. L. Alger*, General Electric Company.
The use of the null-unit function in generalized integration.

Secção IV — Lógica e Filosofia

A. Tarski, Univ. de California.
Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics.

A. Robinson, Colégio de Aeronautica, Cranfield, U. K.
Applied symbolic logic.

J. Robinson, Berkeley, California.
Existential definability in arithmetic.

J. Rosenbaum, Univ. de Miami.
A logistic proof of a theorem related to Landau's Theorem 4.

E. R. Stabler, Hofstra College.
Applied logic and modern problems.

A. C. Sugar, University of Southern California.
Axioms for the kinematics of a particle in absolute space and time.

Conferência sôbre Análise — Tendências algébricas em Análise

Debate sobre representações de grupos

Participantes:

H. Cartan, da Sorbonne.
A. M. Gleason, Univ. Harvard.
R. Godement, Univ. de Nancy.
G. W. Mackey, Univ. de Harvard.
F. I. Mautner, Instituto de Tecnologia de Massachusetts.
L. Schwartz, Univ. de Nancy.

Orador:

R. Godement

Debate sobre Algebra Topológica

Participantes:

J. Dieudonné, Univ. de Nancy.
I. Kaplansky, Univ. de Chicago.
I. E. Segal, Univ. de Chicago.

Orador:

I. Kaplansky

Debate sobre Teoria da Medida

Participantes:

J. Dieudonné, Univ. de Nancy.
P. R. Almos, Univ. de Chicago.
J. C. Oxtoby, Bryn Mawr College.
D. M. Stone, Univ. de Manchester.
S. M. Ulam, Los Alamos Scientific Laboratory.

Orador:

P. R. Halmos

Conferência sobre Matemáticas Aplicadas. Equações às derivadas parciais

J. v. Neumann, Institute for Advanced Study.
Shock interaction and its mathematical aspects. (Alocução a convite da Comissão Organisadora).

R. Courant, New York University.
Boundary value problems in modern fluid dynamics.

S. Goldstein, Univ. de Manchester.
Selected problems from gas dynamics.

W. Heisenberg, Max Planck Institute of Phisics, Göttingem.
Die Stabilitätsfragen der Flüssigkeitsdynamik im Zusammenhang mit der statistischen Turbulenztheorie.

W .Prager, Brown University.
Mathematical theory of water waves.
J. J. Stoker, New York University
Mattematical theory of water waves.

Secção I – Álgebra e Teoria dos Números

W.Givens, Univ. de Tennessee.
Some properties of the Dieudonné determinant.
R. D. Schafer, Univ. de Pennsylvania.
A theorem on the desivations of Jordan algebras.
A. J.Penico, Tufts College.
On the structure of standard algebras.
T. Nakayama, Nagoya University.
On the theory of Galois algebras.
Th. H. Le Page, Univ. de Bruxelas.
Ideaux homogènes de l'algèbre extérieure.
J. Levitzki, The Hebrew Uuiversity, Jerusalém.
On the algebraic elements of a ring with operators.
R. H. Bruck, Univ. de Wisconsin.
On the associativity theorems for alternative rings and Moufang loops.
M. F. Smiley, State University of Iowa.
Topological alternative rings.
S. Bourne, Institute for Advanced Study.
Th Jacobson radical of a semiring.
P. Abellanas, Univ. de Madrid.
Variété fondamentale par rapport d'une correspondance algébrique.

Secção II — Análise

A. Gelbart, Syracuse University.
An extension of the Riemann mapping theorem associeted with minimal surfaces.
E. Ullrich, Univ. de Giessen.
Zum Krümmungsverhalten der Betragflächen analytischer Funktionen.
I. A. Barnett, Univ. de Cincinnati.
Functional invariants of integro-differential equations.
E. Pinney, Univ. de Califórnia.
A system of functional equations.
M. G. Arsove. Brown University.
Functions representable as differences of subharmonic functions.
M. Fekete, Universidade Hebraica, Jerusalém.
On transfinite radius.
H Schmidt, Technische Hochschule, Braunschwieig.
Über Nullgebilde analytischer, Funktionen zweier Veränderlicher, die in singulären Punkten münden.

Secção III – Geometria e Topologia

B. Segre, Univ. de Bolonha.
Arithmetical properties of algebraic varieties.
A. Andreotti, Univ. de Roma.
Sopra alcune superficie algebriche.
I. Barsotti, Univ. de Pittsburgh.
Algebraic theory of intersections for cycles of an algebraic variety.
F. Gaeta, Instituto de Alta Matemática, Roma.
Sull'ideale omogeneo appartenente ad un gruppo di N punti generici del piano.
W. R. Hutcherson, Univ. de Florida.
Imperfect point on invariant space curves.
E. Kasner, Univ. de Columbia.
The converse of the theorem of Mehmke-Segre.
T. H. Motzkin, Universidade Hebraica, Jerusalém.
Duality and neighbor points.
J. F. Nasch, Jr., Univ. de Princeton.
Algebraic approximations to manifolds.
E. J. Purcell, Univ. de Arizona.
A series of non-involutorial Cremona transformations in [n].
A. M. Terracini, Univ. de Turim.
Direttrici congiunte e bicongiunte di una rigata.

Setembro, 5

Alocuções

A. Wald, Univ. de Columbia.
Basic ideas of a general theory of statistical decision rules.
H. Whitney, Univ. de Havard.
r-dimensional integration in n-space.
H. V. D. Hodge, Univ. de Cambridge.
Topological invariants of algebraic varieties.
J. F. Ritt, Univ. de Columbia.
Differential groups.
H. Davenport, University College, Londres.
Recent work in the geometry of numbers.
L. Schwartz, Univ. de Nancy.
Distributions and principal aplications.
(Alocuções a convite da Comissão Organizadora)

Conferência sobre Álgebra – Álgebra Aritmética

E. Artin, Univ. de Princeton.
Modern development of algebraic number theory and class field theory.
W. Krull, Univ. de Bonn.
Jacobsonches radikal, Hilbertscher nulletellensatz, dimensions theorie.
M. Deuring, Univ. de Göttingen.
Singularities of commutative rings.

M. Krasner, Centre National de le Recherche Sientifique, Paris.
Essai d'une théorie-non abelienne des corps de classes.

Conferência sobre Análise — Tendências algébricas em Análise

Debate sobre teoria espectral

Participantes:

W. Ambrose, Massachusetts Institute of Technology.
J. Dixmier, Faculdade de Ciências, Dijon.
N. Dunford, Yale University.
F. J. Murray, Columbia University.
J. v. Neumann, Institute for Advanced Study.
F. Rellich, Univ. de Göttingen.
B. de Sz. Nagy, Univ. de Szeged.
K. Yosida, Nagoya University.

Orador:

N. Dunford

Debate sobre análise funcional aplicada

Participantes:

N. Aronzajn, Oklahoma Agricultural andM echanical College.
S. Bergman, Harvard University.
J. W. Calkin, Rice Institute.
K. Friedaichs, New York University.
K. Kodaira, Univ. de Tóquio.
A Weinstein, University of Maryland.

Orador:

N. Aronszajn

Debate sobre teoria ergódica

Participantes:

N. Dunford, Yale University.
W. Eberlein, Univ. de Wisconsin.
G. *A. Hedlund*, Yale University.
E. Hille, Yale University.
S. Kakutani, Yale University.
J. C. Oxtoby, Bryin Mawr College.

Orador:

S. Kakutany
Ergodic Theory.
(Alocução a convite da Comissão Organisadora).

Conferência sobre Topologia — Variedades diferenciáveis

S. S. Chern, Univ. de Chicago.
Differentiable geometry of fiber bundles.
(Alocução a convite da Comissão Organisadora).

E. Ehresmann, Univ. de Strasbourg.
Almost complex manifolds.

B. Eckmann, Escola Politécnica Federal, Zürich.
Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten.

C. B. Allendoerfer, Haverford College.
Cohomology on real differentiable manifolds.

Secção V — Física Matemática, etc.

R. H. Battin, Massachusetts Instiute of Technology.
On the stability of the boundary layer over a body of revolution.

R. Berker, Univ. Técnica de Istambul.
Sur l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un obstacle.

A. Ghaffari, Univ. de Teerão.
Simple waves in two-dimensional compressible flow.

C. C. Lin, Instituto de Tecnologia de Massachusetts.
On the stability of zonal winds over a rotating spherical earth.

L. Millsaps, Instituto Politécnico de Alabama e *K. Pohlhausen*, Office of Air Research, Dayton, Ohio.
The kinetic structure of plane shock waves.

H. Poritsky, General Electric Company.
The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluid.

R. Sauer, Technische Hochschule München.
Linearisierte Überschallströmung um langsam schwingende Drehkörper.

B. R. Seth, Iowa State College e Hindu College, Delhi, India.
Synthetic method for non-linear problems.

S. S. Shü, Instituto de Tecnologia de Illinois.
On the solution in the large of a Cauchy problem (with special-references to the compressible flow after a stationary shock).

K. M. Siegel, Univ. de Michigan.
An exact solution to the non-linear differential equation discribing the passage of plane waves of sound through air.

F. L. Alt, National Bureau of Standards.
Almost-triangular matrices.

G. R. Boulanger, Faculdade Politécnica de Mons e Univ. de Bruxelas.
New advance in the structural study of multiplane nomograms.

H. Bückner, Minden, Alemanha.
Remarks on an algebraic method for numerically solving the Fredholm integral equation $y-\lambda k\gamma=f$.

S. H. Grandall, Instituto de Tecnologia, Massachusetts.
On a relaxation method for eigenvalue problems.

W. Feller, Cornell University, e *G. E. Forsythe*, National Bureau of Standards.
New matrix transformations for obtaining characteristic vectors.

L. Fox, National Physical Laboratory, Teddington, Inglaterra.
The numerical solution of ordinary differential equations.

F. N. Frenkiel e *H. Polachek*, Laboratório de Artilharia Naval·
An algorithm for the construction of a polynomial representing a given tabular function.

M. R. Hestenes, Univ. da Califórnia em Los Angeles e National Bureau of Standards.
Iterative methods of obtaining solutions of boundary value problems.

M. R. Hestenes, Univ. da California em Los Angeles e National Bureau of Standards, *W. Karush*, Univ. de Chicago e National Bureau of Standards.
A method of gradients for the calculation of the characteristic roots and vectors of a real symmetric matrix.

R. F. Shaw, Eckert-Mauchly Computer Corporation, Filadélfia.
Determination of instruction codes for automatic computers.

H. Wallman, Instituto de Tecnologia de Massachusetts e Instituto Chalmers de Tecnologia, Gothenburg.
Solution of partial differential equations by means of continuous-variable mathematical machines.

P. W. Zettler-Seidel, Laboratório de Artilharia Naval.
Improved Adams method of numerical integration of ordinary differential equations.

Setembro, 6

Conferência sobre Topologia. Grupos Topológicos

P. A. Smith, Univ. Columbia.
Some topological notions connected with a set of generators.

D. Montgomery, Institute for Advanced Study.
Properties of finite dimensional groups.

K. Iwasawa, Univ. de Tóquio.
Locally compact groups.

A. Gleason, Univ. de Harvard.
One parameter subgroups and Hilbert's fifth problem.

R. H. Fox, Univ. de Princeton.
Recent development of knot theory at Princeton.

Secção I — Álgebra e Teoria dos Números

H. D. Kloosterman, Univ. de Leiden.
The characters of binary modulary congruence groups.

K. A. Hirsch, Univ. de Durham.
A characteristic property of nilpotent groups.

K.-C. Chen, Univ. de Columbia.
Some commutator subgroups of a linkage group.

H. W. Kuhn, Univ. de Princeton.
Subgroup theorems for groups presented by generators and relations.

J. C. Abbott e *T. J. Benac*, Academia Naval dos Estados Unidos.
Similarity and Isotopy.

R. R. Stoll, Univ. Lehigh.
Matroid semigroups.

M. Krasner, Centro Nacional de Pesquizas Científicas, Paris.
Généralisation abstraite de la théorie de Galois.

L. R. Wilcox, Instituto de Tecnologia de Illinois.
On the generation of transitive relations.

P. Dubreil, Univ. de Paris
Sur une classe de relations d'équivalence.

L. C. Hutchinson, Instituto Politécnico de Brooklyn.
Incidence relations and canonical forms for alternating tensors.

P. Scherk, Univ. de Saskatchewan.
On a theorem by Cartan.

E. Grosswald, Univ. de Saskactchewan.
On the genus of the fundamental region of some subgroups of the modular group.

Secção II — Análise

T. Bang, Univ. de Copenhague.
Metric spaces of infinitely differentiable functions

D. G. Bourgin, Univ. de Illinois.
Approximately multiplicative operators.

A. Dvoretzky, National Bureau of Standards.
On Hausdorff measures.

F. A. Ficken, Univ. Nova Iorque e Univ. de Tennessee.
The continuation method for functional equations.

L. Gårding, Univ. de Lund.
The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of a general vibration problem.

H. L. Hamburger, Univ. de Ankara.
On the redution of a completely continuous linear transformation in Hilbert space.

R. C. James, Univ. de California.
Projections and bases in Banach spaces.

G. Köthe, Univ. de Mainz.
Eine einfache klasse lokalkonvexer linearer Räume.

A. A. Monteiro e *M. M. Peixoto*, Univ. de Chicago.
Note on uniform continuity.

A. C. Offord, Univ. de Londres.
Spaces of integral functions.

R. S. Phillips, Univ. de Southern California.
A general spectral theory.

P. C. Rosenbloom, Univ. Syracuse
The Cauchy-Kowalevski existence theorem.

C. Blanc, Univ. de Lausanne.
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients variables.

A. Bobonis, City College, Hato Rey, Puerto Rico.
H_m-definitely self-adjoint boundary value problems.

M. L. Cartwright e *J. E. Littlewood*, Cambridge University.
Some topological problems connected with forced oscillations.

S. Karlin, California Institute of Techonology.
Moment theory and orthogonal polynomials.

K. S. Miller e *M. M. Schiffer* Univ. de New York e Univ. de Princeton.
On the Green's functions of ordinary differential systems.

G. Prodi, Univ. de Milão.
Sulle proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

W. C. Sangren, Univ. de Miami.
Generalized Fourier integrals.

G. Sansone, Univ. de Florença.
Su una classe di equazioni di Liénard aventi una sola soluzione periodica.

F. Simonart, Univ. de Louvain.
Equation différentielle des systèmes isothermes.

H Poritsky e *J. J. Slade*, General Electric Company e Rutgers University.
On the solution of certain linear differential equations.

I. Vidav, Univ. de Ljubljana.
Sur les théorèmes de Klein dans les équations différentielles linéaires.

S. B. Sarantopoulos, Univ. de Atenas.
Some nuclei of contour integrals which satisfy linear differential equations.

Secção V — Física Matemática, etc.

H. Lewy, Univ. da Califórnia em Los Angeles.
Developments a the confluence of analytic boundary conditions.

O Bijörgum, Instituto Geofísico, Bergen.
Some teorems on potential and Beltrami vector fields.

F. Bureau, Univ de Liège.
Le problème de Cauchy pour certains systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles totallement hyperboliques.

Y. W. Chen, Institute for Advanced Study.
On a quasi-linear system of hyperbolic differential equations with a parameter and a singularity.

J. B. Diaz, Univ. de Maryland.
Concerning scalar products and certain minimum and maximum principles of mathematical physics.

B. Friedman, Univ. de New York.
Multiple representations for Green's functions of second order partial differential equations.

R D. Gordon, Univ. de Buffalo.
The general integration of a quasi-linear partial differential equation of second order composed of symmetric cartesian invariants.

M. Herzberger, Kodak Research Laboratory, Rochester, New York.
An optical model of physics.

C. L. Pekeris, Weizmann, Institute Rehovoth, Israel.
The correlation tensor of the electromagnetic field in cavity radiation.

D. E. Spencer, Brown University.
Coordinate systems permitting separation of the Laplace and Helmholtz equations.

Conferência sobre Matemáticas Aplicadas. Mecânica Estatística

N. Wiener, Massachusetts Institute of Technology.
The statistical mechanics in communication.
(Alocução a convite da Comissão Organizadora).

W. Feller, Cornell University.
Mathematical thery of diffusion processes.

Secção II — Análise

E. Baiada, Univ. de Pisa.
The uniqueness for the equations $p=f(x,y,z,q)$ with the Cauchy data.

L. M. Court, Rutgers University.
A theorem on conditional extremes with an application to total diferentials.

H. F. Mac-Neish, Univ. de Miami.
A uniform method for integrating $(a)\ \dfrac{dx}{Q_1\sqrt{Q_2}}$ and $(b)\ \dfrac{dx}{\sqrt{Q_1\,Q_2}}$ were Q_1 and Q_2 are distinct quadratic functions of x.

L. B. Robinson, Baltimore, Maryland.
A complete system of tensors.
A. M. Whitney, Univ. de Pennsylvania.
A criterion for total positivity of matrices.
A. P. Calderón e *A. Zigmund*, Univ. de Chicago.
On singular integrals in the theory of the potential.
M. Aissen, *I. J. Schoenberg* e *A. Whitney*, Univ. de Pennsylvania.
Generating functions for totally positive sequences. Preliminary report.
V. F. Cowling, Univ. de Kentucky.
On the partial sums of a Taylor series.
J. L. Ullman, Univ. de Michigan.
Hankel determinants of sections of a Taylor's series.
S. Chowla, Univ. de Kansas.
The asymptotic behaviour of solutions of difference equations.
H. P. Thielman, Iowa State College.
Note on a functional equation.
M. O. González, Univ. de Havana.
An alternative approach to the theory of elliptic functions.
H. Helson, Univ. de Harvard.
Spectral synthesis of bounded functions.

Secção III — Geometria e Topologia

R. D. Anderson, Univ. de Pennsylvania
Continuous collections of continua.
R. Arens, Univ da Califórnia em Los Angeles.
Operations induced in conjugate spaces.
R. H. Bing, Univ. de Wisconsin
Higher dimensional hereditarily indecomposable continua.
R. L. Gomes, Porto, Portugal.
L'intégrale $\int_x f(x)\,dx$ comme transformation continue par rapport à X et $f(x)$.
O. H. Hamilton, Oklahoma Agriculture and Mechanical College.
Fixed point theorems for pseudo-arcs and certain other metric continua.
A. Heller, National Research Fellow.
On equivariant maps of spaces with operators.
V. L. Klee, Jr., Univ. de Virginia.
A proof that Hilbert spaces is homeomorphic with its solid sphere.
K. Menger, Illinois Institute of Technology.
Non-definite vector spaces, triangular topologies, generalized linearity.
M. J. Norris, College of St. Thomas.
Topological spaces having the same regular open sets.
R. Remage, Jr., Univ. de Delaware.
Invariance and periodicity properties of non-alternating in the large transformations.
A. D. Wallace, Univ. de Tulane.
Extension and reduction theorems.
C. W. Williams, Washington and Lee University.
Incompressibility and periodicity.
K. Zarankiewicz, Instituto de Tecnologia, Varsóvia.
A theorem of four regions.

Secção IV — Lógica e Filosofia

S. C. Kleene, Univ. de Wisconsin.
Recursive functions and intuitionistic mathematics.
W. Craig, Univ. de Princeton.
Incompletability, with respect to validity, in every finite non-empty domain, of first order functional calculus.
H. B. Curry, Colégio do Estado de Pennsylvania.
The inferential theory of negation.
M. Davis, Univ. de Illinois.
Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy.
J. K. Feibleman, Univ. de Tulane.
Ontological positivism.
F. Fiala, Univ. de Neuchatel.
Sur les bases philosophiques de la formalisation.
P. Lorenzen, Univ de Bonn.
Konstruktive Begründung der klassischen Mathematik
Z. Suetuna, Univ. de Tóquio.
On the mathematical existence.
G. C. Vedova, Colégio de Engenharia de Newark.
An inquiry into the nature of knowledge.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de Curso Complementar de Ciências (antigo regime) nos Liceus de Lisboa no ano de 1950 — 1.ª Chamada.

ÁLGEBRA

3056 — Determine os valores inteiros e positivos de a e de b que tornam impossível a equação

$$2a(2x-1) = 40x - b(3x+1).$$

R: *A equação proposta é equivalente a* $x=(2a-b):(4a+3b-40)$. *As condições a que devem satisfazer os coeficientes para que a equação seja impossível são então:* $2a-b\neq 0$ *e* $4a+3b-40=0$. *Esta última equação tem, como é facil ver, as soluções inteiras e* positivas *que são os pares:* $a_1=1, b_1=12$; $a_2=4, b_2=8$; $a_3=7, b_3=4$. *O par* a_2, b_2 *por não verificar a 1.ª condição* $2a-b\neq 0$, *não serve, e os outros constituem as soluções do problema.*

3057 — Determine m de forma que o trinómio

$$(2m^2+m-6)\,x^2-2mx+1$$

seja sempre positivo, qualquer que seja o valor real atribuído a x. R: *As condições a que devem satisfazer os coeficientes são:*

$(2m^2+m-6)>0$ *e* $\Delta=4m^2-4(2m^2+m-6)<0$. *A primeira desigualdade é verificada para os valores de* m *tais que ou* $m>3/2$ *ou* $m<-2$; *a segunda para* $m>2$ *ou* $m<-3$. *Daqui se conclui que os valores que satisfazem ao problema são os que verificam ou* $m>2$ *ou* $m<-3$.

3058 — Calcule o termo independente de x do desenvolvimento de: $\left(\frac{1}{x^2}-\sqrt[4]{x}\right)^{18}$. R: *O termo geral do desenvolvimento é da forma* ${}^{18}C_n\cdot(1/x^2)^{18-n}\cdot\left(-\sqrt[4]{x}\right)^n$, *e nele o expoente de* x *é* $2n-36+n/4$, *que deve ser nulo para que o termo seja independente de* x; *para isso deve ser* $n=16$. *Então o termo independente de* x *é* ${}^{18}C_{16}={}^{18}C_2=153$.

ARITMÉTICA

3059 — Determine dois números a e b, sabendo que: m.d.c. $(a,b)=4$ e m.m.c. $(a,b)=360$. Apresente todas as soluções do problema. R: *Os números pedidos serão da forma:* $a=4\cdot p$ *e* $b=4\cdot q$, *sendo* p *e* q *primos entre si, e tais que* $ab=4\times360$. *Daqui se conclui que* $p\cdot q=90$. *Esta equação admite como soluções inteiras os números primos entre si* $p_1=1$, $q_1=90$; $p_2=2$, $q_2=45$; $p_3=5$, $q_3=18$ e $p_4=9$, $q_4=10$. *Então os pares de valores que servem ao problema são:* $a_1=4$, $b_1=360$; $a_2=8$, $b_2=180$; $a_3=20$, $b_3=72$ *e* $a_4=36$, $b_4=40$.

3060 — Demonstre que: «se dois números são primos entre si, a sua soma e o seu produto são também primos entre si». R: *Pela hipótese do teorema é m.d.c.* $(a,b)=1$. *Seja* d *o m. d. c. de* $(a+b)$ *e* ab. *Como* d *divide* ab *e* a *e* b *são primos entre si então* d *ou divide* a *ou divide* b. *Se divide* a, *como divide* $a+b$ *tem de dividir* b. *Então pela hipótese do teorema* $d=1$, *e o teorema fica demonstrado. Se* d *divide* b *conclui-se anàlogamente ser* $d=1$.

Soluções dos n.os 3056 a 3060 de José da Silva Paulo.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1950 — Ponto n.º 1.

3061 — Demonstre que, se p não é um número primo, é verdadeira a igualdade $(p-1)!=\dot{p}$. R: *A proposição a demonstrar só é verdadeira para* $p>4$, *circunstância esta que deveria ter sido assinalada no seu enunciado.*

Com efeito, sendo p *não primo, ter-se-à: ou* (I) $p=a^\alpha$ (a *primo e* $\alpha\geqslant2$), *ou* (II) $p=a^\alpha\cdot b^\beta\cdots c^\gamma$ (a, b, ⋯ c *primos*). *Se* (I) $p=a^\alpha$ *tem-se* $p-1=a^\alpha-1>a^\alpha-a^{\alpha-1}=a^{\alpha-1}(a-1)>a^{\alpha-1}$ (*com* $a>2$). *Portanto, na sucessão,* $1,2,3,\cdots p-1$ *encontram-se os divisores* $a,a^2,\cdots a^{\alpha-1}$ *e, consequentemente,* $(p-1)!=1\cdot2\cdot3\cdots(p-1)$ *admite o divisor* a^m *com* $m\geqslant1+2+\cdots+(\alpha-1)\geqslant\alpha$ (*se for* $\alpha>2$). *Logo,* $(p-1)!=\dot{p}$, *c. q. d. com* $p=a^\alpha$ (*apenas quando* $\alpha>2$ *e* $a>2$). *Para* $a=\alpha=2$, $p=2^2=4$, *tem-se* $3!=6\neq\dot{4}$. *Se* (II) $p=a^\alpha\cdot b^\beta\cdots c^\gamma$ (a, b, ⋯ c *primos*), p *pode escrever-se sob qualquer das formas* $p=a^\alpha\cdot r$, $p=b^\beta\cdot s$, $\cdots p=c^\gamma\cdot t$. *A demonstração feita em* (I) *para* $p=a^\alpha$ *vale,* a fortiori, *quando* p *é da forma* $p=a^\alpha\cdot k$. *Portanto sendo* $(p-1)!$ *divisivel por* $a^\alpha, b^\beta, \cdots c^\gamma$, *divisores primos entre si, será divisivel pelo seu produto, c. q. d.* (*Vide* J. Fitz-Patrick: Exercices d'Arithmétique, 3ème ed. — Paris, 1914).

3062 — A soma de dois números inteiros é 224 e o número dos seus divisores comuns é 6. Calcular os números. R: *O m. d. c.* $(a,b)=D$ *deverá ser um divisor de* $224=2^5\cdot7$ *com* 6 *divisores e, portanto, da forma* $D=2^\alpha\cdot7^\beta$ *com* $(\alpha+1)\cdot(\beta+1)=6$ (α *e* β *inteiros não negativos*). *Das soluções desta equação apenas conduzem a números* D *divisores de* 224, *as soluções* $\alpha=2$, $\beta=1$ *e* $\alpha=5$, $\beta=0$ *às quais correspondem* $D=28$ *e* $D=32$. *Tendo em atenção que* $a/D=q$ e $b/D=q'$, *com* q *e* q' *primos entre si, tem-se* $224/D=q+q'$ *e, portanto:* a) *para* $D=28$, $q+q'=8$, *donde, respectivamente,* $q=1,3$; $q'=7,5$; $a=28,84$; $b=196,140$; b) *para* $D=32$, $q+q'=7$, *donde, respectivamente,* $q=1,2,3$; $q'=6,5,4$; $a=32,64,96$; $b=192,160,128$.

3063 — Utilizando a análise combinatória, deduza o número de diagonais dum polígono convexo de n lados. R: *Dados* n *pontos no plano, não colineares* 3 *a* 3, *o número máximo de segmentos distintos* ($\overline{AB}$ *e* $\overline{BA}$ *são considerados como um mesmo segmento*) *determinados por cada par de pontos é dado por* $\binom{n}{2}$. *Destes segmentos,* n *são lados do polígono convexo cujos vértices são os* n *pontos dados. Logo é* $\binom{n}{2}-n=n(n-3)/2$ *o numero das diagonais pedido.*

Não recorrendo à análise combinatória, poderia seguir-se este raciocínio: de cada um dos n *vértices partem* $n-3$ *diagonais. Serão, portanto,* $n(n-3)$ *quando se contar* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BA}$. *Como porém, estes dois segmentos não são distintos, teremos que dividir* $n(n-3)$ *por* 2 *para obter o número pedido.*

3064 — Dada a equação

$$(2a-1)\,x^2-(2a+1)\,x+a+1=0$$

determine a de modo que as raízes x_1 e x_2 satisfaçam à igualdade $5x_1x_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)$. R: *Por ser* $x_1 + x_2 = (2a+1)/(2a-1)$, $x_1 \cdot x_2 = (a+1)/(2a-1)$ *e* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$, *a igualdade proposta é equivalente a* $10a^2 + a - 11 = 0$, *donde*, $a = 1$ *e* $a = -11/10$.

3065 — Demonstre que

$$\text{arc sen} \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

qualquer que seja o ângulo x, do 1.º quadrante. R: *Fazendo arc sen* $\sqrt{x/(x+a)} = \alpha$, *tem-se*

$$sen^2 \alpha = x/(x+a), \; cos^2 \alpha = a/(x+a), \; tg\, \alpha = \sqrt{x/a}$$

e, portanto, $\alpha = arc\, tg \sqrt{x/a}$, *c. q. d., considerando as determinações no 1.º quadrante, o que, certamente, o enunciado do problema deveria pretender indicar em vez da afirmação incompreensível relativamente a* x, *que é uma variável real e não um ângulo. Note-se que a igualdade só tem sentido quando os radicandos forem positivos ou nulos, o que se dá quando* $ax \geqslant 0$.

3066 — Determine a expressão geral dos ângulos x que satisfazem a igualdade $\text{tg}\, x = -\text{cotg}\,(3x)$. R: *De* $tg\, x = -cotg\,(3x) = cotg\,(-3x) = tg\,(\pi/2 + 3x)$ *resulta* $x = k\pi + \pi/2 + 3x$ (k *inteiro*) *ou* $x = -(2k+1)\,\pi/4$.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico — Ano de 1949 — Ponto n.º 1.

3067 — Achar dois números primos entre si cuja média geométrica seja 660. Determinar o número de soluções. R: *Trata-se de determinar 2 números* A *e* B, *primos entre si, cujo produto seja* $660^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$. *Por ex.* $A = 1$, $B = 660^2 = 435.600$; $A = 2^4 = 16$, $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 27.225$.

O número de solução determina-se tendo em conta que, por serem A *e* B *primos entre si, os factores primos da decomposição de* 660^2 *que figurarem em* A *não figurarão em* B *e reciprocamente. Isto significa que* A *e* B *deverão ser da forma: 1.º)* $A = 1$, $B = 660^2$; *2.º)* $A = a^{\alpha}$, $B = b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot d^{\delta}$ *sendo* a^{α} *cada um dos factores da decomposição de* 660^2 *(em número de* C_1^4*) e* $b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \cdot d^{\delta}$ *o produto dos restantes três. O número de pares* A, B *nestas condições será, portanto, de* C_1^4 *ou* C_3^4; *3.º)* $A = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$, $B = c^{\gamma} \cdot d^{\delta}$ *com* $a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$ *todos os possíveis produtos distintos dos 4 factores da decomposição de* 660^2 *tomados dois a dois (logo, em número de* C_2^4*) e* $c^{\gamma} \cdot d^{\delta}$ *o produto dos restantes dois.*

(Note-se que os pares A, B *tendo* A *três factores da decomposição de* 660^2 *e* B *apenas um, não são distintos dos considerados no 2.º caso). O número total de soluções será pois de* $C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 = 11$.

3068 — Demonstrar que o produto de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo dos n primeiros números inteiros. R: *Pretende-se mostrar que é inteiro o cociente*

$$E = (m+1) \cdot (m+2) \cdots (m+n)/1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+n)/1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Para isso, bastará mostrar que um número primo k, *divisor do denominador e, portanto, também divisor do numerador, figura neste com um expoente, pelo menos igual àquele com que figura no denominador. Qual a maior potência dum número primo* k *que divide o produto dos* r *primeiros números? A determinação desta maior potência faz-se pela regra seguinte: divide-se* r *por* k *bem como os sucessivos cocientes da divisão por* k *até se obter um cociente menor que o divisor; a potência de base* k *cujo expoente seja a soma daqueles cocientes sucessivos obtidos é a potência procurada. Determinemos, portanto, as mais elevadas potências de* k *que dividem os produtos* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+n)$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$ *e* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. *Sejam respectivamente* $q_1, q_2, \cdots q_s$; $q'_1, q'_2, \cdots, q'_s$ *e* $q''_1, q''_2, \cdots q''_s$ *os cocientes sucessivos da divisão por* k *daqueles produtos. Como se sabe, a parte inteira do cociente de* $m+n$ *por* k *é, pelo menos igual à soma das partes inteiras dos cocientes, por* k, *de* m *e de* n; *logo,* $q_1 \geqslant q'_1 + q''_2$; $q_2 \geqslant q'_2 + q''_2$; $\cdots q_s \geqslant q'_s + q''_s$. *Adicionando, membro a membro, estas desigualdades, teremos:* $q_1 + q_2 + \cdots + q_s \geqslant q'_1 + q'_2 + \cdots + q'_s) + (q''_1 + q''_2 + \cdots + q''_s)$. *Ora, o 1.º membro desta última desigualdade representa o expoente da mais elevada potência de* k *figurando no numerador e o 2.º membro o expoente da mais elevada potência de* k *figurando no denominador. Tal desigualdade permite a prova que pretendíamos (vidé, tanto o problema proposto como a regra enunciada, em:* Exercices d'Arithmétique, *n.º 261, F. G. M., respectivamente, exerc. n.ºs 236 e 237 e* Gazeta de Matemática, n.º 28, págs. 20-21, Um teorema de Aritmética *por* J. da Silva Paulo).

3069 — Mostrar que, sendo $a > b$, é sempre

$$a^n - b^n > (a-b)^n$$

para qualquer valor inteiro de n superior à unidade. R: *Demonstremos por indução. Para* $n = 2$, *a desigualdade* $a^2 - b^2 > (a-b)^2$ *fica provada, por multiplicação ordenada das expressões* $a - b = a - b$ *e* $a + b > a - b$. *Admitindo que a desigualdade proposta se verifica para* $n = m$, *isto é, que* $a^m - b^m > (a-b)^m$ *mostremos que ela é verdadeira para* $n = m+1$. *Com efeito, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por* $a + b - 2b = a - b$ $(a > b)$ *obteremos:* $a^{m+1} - b^{m+1} + 2b^{m+1} - ab^m - a^m b > (a-b)^{m+1}$. *Para mostrar que* $a^{m+1} - b^{m+1} > (a-b)^{m+1}$ *bastará provar que* $E = 2b^{m+1} - ab^m - a^m b \leqslant 0$. *Vejamos que esta expressão é, efectivamente,* *negativa. Ora, sendo* $a > b > 0$ *tem-se* $a^m > b^m$ *e, substituindo em* E, a^m *por* b^m, *tem-se:* $E < 2b^{m+1} - ab^m - b^{m+1} = b^m(b-a) < 0$, *c. q. p.*

3070 — Dada a equação $x^2 - 2ax + b = 0$, determinar a e b de modo que uma das raízes seja dupla da outra e que a soma dos seus quadrados seja igual a 125. R: *Eliminando* x_1 *e* x_2 *em* $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1 \cdot x_2 = b$ *e* $x_1 = 2x_2$ *obtem-se* $8a^2 - 9b = 0$. *Por outro lado,* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 2b = 125$. *Resolvendo o sistema formado pelas duas equações em* a *e* b, *obtem-se* $a = 15/2$ *e* $b = 50$.

3071 — Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a duas rectas do mesmo plano estão numa razão constante, é uma recta. R: *Sejam* r_1 *e* r_2 *duas rectas concorrentes em* O. *O lugar geométrico dos pontos* P *pedido é a recta* r, *sobre a qual assentam as hipotenusas de todos os triângulos rectângulos cujos vértices são* P, O *e os pés* P_1 *e* P_2 *respectivamente sobre* r_1 *e* r_2, *das perpendiculares baixadas de* P *sobre estas duas rectas. Com efeito, os triângulos rectângulos* $[P' P_1' O]$, $[P'' P_1'' O]$, $\cdots$ *são semelhantes entre si e, portanto,* $\overline{P'O} / \overline{P'P_1'} = \overline{P''O} / \overline{P''P_1''} = \cdots = k_1$. *Para os triângulos* $[P' P_2' O]$, $[P'' P_2'' O]$, $\cdots$ *rectângulos e também semelhantes entre si, ter-se-á:* $\overline{P'O} / \overline{P'P_2'} = \overline{P''O} / \overline{P''P_2''} = \cdots = k_2$. *Logo, por divisão ordenada:* $\overline{P'P_2'} / \overline{P'P_1'} = \overline{P''P_2''} / \overline{P''P_1''} = \cdots = k_2/k_1 = const.$, *que prova estarem entre si numa razão constante as distâncias dos pontos* P $(P', P'', \cdots)$ *às rectas* r_1 *e* r_2.

Sendo $r_1 // r_2$, *a recta* r *é a paralela a* r_1 *e* r_2 *conduzida por um ponto* P *satisfazendo às condições do problema.*

3072 — Dados três pontos não colineares, sobre o plano, traçar uma recta que diste de um dos pontos um comprimento dado e que diste igualmente dos outros dois. R: *Sejam* A, B *e* C *três pontos, dum plano* π, *não colineares e* d *o comprimento dado. As rectas de* π *distando* d *dum daqueles três pontos,* A, *por exemplo, constituem a família de tangentes à circunferência de centro* A *e raio* d. *São soluções do problema proposto, os elementos desta família que equidistem de* B *e de* C*: as duas rectas* r_1 *e* r_2 *tangentes à circunferência, centrada em* A *e de raio* d, *paralelas a* $\overline{BC}$ *e as duas tangentes,* r_3 *e* r_4 *a esta mesma circunferência, concorrentes em* M, *ponto médio de* $\overline{BC}$, *quando existirem.* (*Note-se que as rectas* r_3 *e* r_4 *determinam em geral com* M, B *e* C *e os pés das perpendiculares baixadas sobre elas de* B *e* C, *dois triângulos rectângulos iguais*). *Designando por* d_1 *a distância do ponto* A *a* $\overline{BC}$ *concluiremos os seguintes resultados:*

1.º). *Sendo* $d < \overline{AM}$: a) *com* $d \neq d_1$, *existem as quatro soluções distintas,* r_1, r_2, r_3 *e* r_4; b) *com* $d = d_1$, *existem três soluções distintas, pois que uma das soluções* r_1 *ou* r_2 *coincide com* r_3 *ou* r_4;

2.º). *Sendo* $d = \overline{AM}$ (*o que exclue a possibilidade de ser* $d < d_1$)*:* a) *com* $d > d_1$, *existem três soluções distintas,* r_1, r_2 e $r_3 = r_4$; b) *com* $d = d_1$, *existem duas soluções distintas* r_1 (*ou* r_2) $= r_3 = r_4$ *e* r_2 (*ou* r_1)*;*

3.º). *Sendo* $d > \overline{AM}$ (*o que torna impossivel ser* $d_1 \geqslant d$) *existem apenas as duas soluções distintas* r_1 *e* r_2.

Soluções dos n.os 3061 a 3072 de Orlando Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Algebra Superior — **Exame final** — **1948-49**

3073 — Descreva e justifique a determinação da característica dum sistema de m equações lineares a n incógnitas.

3074 — Escreva a condição de ortogonalidade das arestas dos diedros $\triangle$ definido por

$$\left\{\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right.$$

e ∇ definido por

$$\left\{\begin{array}{l} Hx + Ky + Lz + M = 0 \\ H'x + K'y + L'z + M' = 0 \end{array}\right. .$$

Relacione esta condição com a matriz

$$\begin{bmatrix} A & A' \\ B & B' \\ C & C' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H & K & L \\ H' & K' & L' \end{bmatrix} .$$

3075 — Sendo $r_1, r_2, \cdots r_n$ as raizes de $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$, quais são as de $F(x) = (-1)^n f(x) f(-x)$? Mostre que $F(x) = 0$ se reduz ao grau subduplo. Designando por $G(x) = 0$ a equação reduzida, determine os coeficientes de $g(x) = (-1)^n G(x)$. Na hipótese de $f(x)$ ser real e $g(x)$ apresentar v variações, quantas raízes reais pode ter $f(x)$?

3076 — Por ordem crescente de valores, sejam $x_1, x_2, \cdots, x_m$ as raízes reais do polinómio real $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ os respectivos graus de multiplicidade $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \mu \leqslant n)$. Qual o número mínimo de raízes de $f'(x)$ não inferiores a x_1 nem superiores a x_m? Prove que $f(x)$ admite raízes imaginárias $(\mu < n)$ sempre que $f'(x)$ se anule: α) antes de x_1 ou depois de x_m; β) mais de uma vez entre x_i e x_{i+1}. Prove ainda que $f(x) = 0$ admite (pelo menos) um par de raízes imaginárias por cada mínimo positivo ou máximo negativo da função $f(x)$.

3077 — Deduza um limite excedente para os módulos das raízes do polinómio $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$.

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º exame de frequência, 25 de Abril de 1950, 1.ª chamada.**

3078 — Mostre que $f(x, y)$ diferenciável é função contínua. Indique (e justifique) alguma condição de diferenciabilidade de $f(x, y)$ em $P(a, b)$.

3079 — Prove que não se anulando $f(x)$ em (a, b) é par (possivelmente zero) o número de variações perdidas pela sucessão de Fourier de $f(x)$ à passagem de $x = a$ a $x = b$. Quantas variações pode perder a sucessão de Fourier de
$f(x) = (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)^3 (x^2 + 1)$ de $x = a$ a $x = b$, $a < x_1, x_2 < b$. Estabeleça alguma das condições de Fourier e dê a sua interpretação geométrica.

3080 — Estude a marcha da função $f(x)$ no ponto $x = a$ na hipótese em que $f(x) - f(a)$ tem aí um zero duplo. Figure a imagem de uma função $f(x)$ nas condições referidas, dê a equação da tangente no ponto $M(a, f(a))$ e descreva o comportamento da função $f(x) - f(a)$. Extremos e assíntotas da imagem de $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$. Mostre (por um pequeno esboço) a situação da curva a respeito das suas assíntotas, e justifique convenientemente o traçado.

3081 — Em que condições se garante para a equação $f(x, y) = 0$ uma raiz $y = \varphi(x)$, tomando no ponto $x = a$ o valor de função contínua nesse ponto? São tais condições suficientes para que $\varphi(x)$ saia diferenciável no ponto a? Em caso negativo que mais se há-de exigir da função $f(x, y)$ para tal efeito. Verifique se a equação:

$$f(x, y) \equiv (x+1) y^3 + 9y^2 + [(x+2)^2 + 3)] y - 23x = 0$$

define implicitamente alguma função $y = \varphi(x)$ uma imagem corrente pelo ponto $P(1, 1)$. Em que direcção? Concavidade dessa imagem nas vizinhanças desse ponto. Enuncie algum conjunto de condições suficientes para que exista $\varphi''(a)$, valor finito.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência, 1950.**

3082 — a) Escrever uma equação cartesiana com um só parâmetro que represente todas as rectas que passam por $(1, 0)$ excepto $x = 1$. b) Para cada recta r deste feixe considerar a recta r' do mesmo feixe que faz com ela um ângulo de 45° contado de r para r' no sentido directo e o ponto P de intersecção de r' com $0y$. Escrever uma equação cartesiana a que satisfaçam os pontos das rectas r (se os houver) que distem 1 dos correspondentes pontos P. c) Para que valores do parâmetro se obtêm realmente pontos do lugar geométrico.

3083 — a) Que pontos de $x - y + 1 = 0$ distam 2,8 de $3x + 4y + 3 = 0$? b) Que figura é representada pela equação $xy + 2x = 0$?

3084 — Calcular sob a forma $x + iy$ o número $[\sqrt[9]{2}\,(\cos \pi/12 + i \operatorname{sen} \pi/12)]^{45}$.

I. S. A — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência, 1950.**

3085 — Para que valores de x é convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+3)}$?

3086 — Sabendo que $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, calcular $1/\sqrt[10]{e}$ sob a forma decimal com um erro inferior a 0,00001.

3087 — Calcular a área S do triângulo de vértices $(0,0)$, $(x, 0)$ e $\left(x, \sqrt{2} - \sqrt{2 - x^2}\right)$ e a parte principal do infinitésimo S em relação a x.

3088 — Seja $y = f(x)$ uma função de variável real definida no intervalo $[-1, 1]$. Sabendo que: a) O conjunto dos valores de $f(x)$ neste intervalo é a união do intervalo definido por $2 \leqslant y \leqslant 3$ com o conjunto constituído pelo único ponto $y = 5$; b) $f(x)$ é contínua em $]-1, 1[$; c) $f(1) = 3 = \lim_{h \to +0} f(1-h)$, calcular o valor de $f(-1)$.

3089 — Estudar a derivabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se existe algum número natural } n \text{ tal que} \\ \qquad \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n-1} \\ x^3 \text{ para os restantes valores de } x. \end{cases}$$

3090 — Derivar

$$\cos\frac{x}{2}\log.\ (1+x^{-1,7})+\frac{2^x}{\operatorname{tg} x}-[\operatorname{arc\,cosec}\,(3x-1)]^{\frac{1}{x}}.$$

3091 — Escrever a equação geral das tangentes à curva definida por $y=\frac{1}{x}$ e as das tangentes comuns a esta curva e à parábola $y=x^2$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência — 1950, Março, 27.**

3092 — Quando se diz que certo conjunto (x) é limitado à direita? Como se define o respectivo limite L de Weierstrass? Caracterize esse limite pelas suas relações com os elementos do conjunto. Prove a existência de L na hipótese considerada.

Indique os pontos de acumulação e limites de Weierstrass L e l de (u_n) onde $u_n=1+2(-1)^{n-1}-(-1)^{\frac{n}{2}}/n$. Tem a sucessão u_n limite? Justifique. R: *O conjunto* (u_n) *é a soma de dois conjuntos* (u_{2k}) *e* (u_{2k+1}) *cada um com seu ponto de acumulação; estes são* -1 *e* 3. *Os limites de Weierstrass são rsp.:* $L=4$, $l=-3/2$. *A sucessão não tem evidentemente limite, pois é decomponível em* u_{2k} *com limite* -1, *e* u_{2k+1} *com limite* 3.

3093 — Quando é que a série de termo geral u_n se diz convergente? Enuncie e demonstre o primeiro teorema de Cauchy para as séries de termos positivos. Enuncie seus corolários. Defina intervalo de convergência da série $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ e descreva as suas propriedades. Relacione os intervalos de convergência das séries $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ e $\varphi(x)=\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$. R: *Calculem-se os intervalos de convergência das séries com o segundo critério de Cauchy*:

$$\lim\frac{(n+1)\,|a_{n+1}|}{n\,|a_n|}\cdot|x|<1 \quad e \quad \lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot|x|<1.$$

Portanto intervalos iguais

$$\left(-1/\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ 1/\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

3094 — Caracterize por meio de desigualdades que a função $f(x)$ é contínua no ponto a. Mostre que $f(x)$ se anula em (a,b), pelo menos uma vez, se for contínua nêsse intervalo e se $f(a+0)\cdot f(b-0)<0$. Estude a continuidade e derivabilidade da função $f(x)$ assim definida:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{para } x \text{ não inteiro}\\ x+1 & \text{para } x \text{ inteiro}\end{cases}$$

R: *Seja* a *real não inteiro ou quando inteiro igual* a -1 *ou* $+2$; *para* $x=a$ *a função* $f(x)$ *é contínua visto que* $\lim_{x=a} f(x)=a^2-1=f(a)$ *e nestes mesmos pontos* $f'(a)=2a$. *Para* x *inteiro diferente de* -1 *e* $+2$ *a função tem descontinuidade de primeira espécie com saltos medidos por* $|x^2-x-2|$.

3095 — Defina função crescente num ponto. Figure uma função $g(x)$ crescente em a (pròpriamente crescente) mas com derivada nula nesse ponto e exprima por um cociente que ela é crescente em a. Prove que se $g(x)$ tem derivada em a e é crescente nesse ponto, $g'(a)$ é positiva ou nula. Se $f'(x)$ está nas condições da função $g(x)$ anteriormente figurada qual o sentido da concavidade de $f(x)$ na vizinhança de a? Prove a afirmação que fizer. Determine a tangente à curva $y=x/(x-1)^2$ no ponto de de abcissa $x=2$ e diga se na vizinhança desse ponto a curva fica para cima ou para baixo da tangente. R: *A equação da tangente é* $y-2=-3(x-2)$; *nas vizinhanças do ponto de contacto* $(2,2)$ *a derivada é negativa, curva decrescendo, e* $f''(x)$ *positiva, concavidade para cima. Curva acima da tangente.*

3096 — $f'(x)$ admite a como zero de multiplicidade α. Qual a expressão de $f(x)-f(a)$ em torno desse ponto? Exprima que $f'(x)$ admite a como zero de multiplicidade α, aplique a $f(x)-f(a)$ o teorema dos acréscimos finitos e deduza daí uma nova expressão de $f(x)$ em torno de a. Designando por $a+\theta(x-a)$ o ponto intermédio introduzido pelo teorema dos acréscimos finitos prove que θ tende para certo limite significativo quando x tende para a. Calcule esse limite na hipótese de $\alpha=2$. R: *Por ser* $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{\alpha}(a)=0$ *e* $f^{\alpha+1}(a)\neq 0$ *a fórmula de Taylor dá* $f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}\cdot f^{\alpha+1}(x_1)$ *e derivando esta expressão vem* $f'(x)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha!}f^{\alpha+1}(x_1)$ *de modo que o teorema de Lagrange dá*

$$f(x)-f(a)=(x-a)\frac{\theta^{\alpha}(x-a)^{\alpha}}{\alpha!}f^{\alpha+1}(x_1)\cdot$$

As duas expressões arrastam a igualdade

$$\frac{\theta^{\alpha}}{\alpha!}=\frac{1}{(\alpha+1)!}\quad ou\quad \theta=\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha+1}}.\ Se\ \alpha=2,\ \theta=\sqrt{3}/2.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **2.º Exame de frequência, 1950, Junho, 29.**

3097 — Calcule a primitiva da função

$$f(x)=x\operatorname{arc\,sen} x^2-\frac{1}{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}.$$

Descreva e justifique o método de primitivação por partes. R: $P x \text{ arc sen } x^2 - P\dfrac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x} =$

$$= \frac{x^2}{2}\text{ arc sen } x^2 - P\,\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{1}{2}\,P\,2 \text{ sen } x \cos x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{ arc sen } x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4}\cos 2x + C\,.$$

3098 — Indique sob que condições a equação $f(x\,,y) = k$ (k constante) define implícitamente uma função unívoca $y = \varphi(x)$ na vizinhança do ponto $P(a\,,b)$. Pode a equação definir mais do que uma função unívoca? Justifique. Supondo $f(x\,,y)$ diferenciável em $P(a\,,b)$ prove que $y = \varphi(x)$ é diferenciável no mesmo ponto. Deduza daí a expressão de $\dfrac{dy}{dx}$.

3099 — Dado o sistema de n equações a n incógnitas $a_i^h\, x_h = b_i$ (h índice mudo, $i = 1, 2, \cdots, n$) escreva a sua equação matricial indicando os elementos das respectiva matrizes. Supondo $|A| = |a_i^h| \neq 0$, deduza da equação anterior a regra de Cramer.

3100 — Seja $P(x)$ um polinómio inteiro em x de grau n e de coeficientes racionais Mostre que se $P(x) = 0$ admite a raiz racional $\alpha + \sqrt{\beta}$ admite também a raiz $\alpha - \sqrt{\beta}$. Como se acham as raizes duplas dum polinómio? Determine a condição para que a equação $x^3 + px + q = 0$ tenha uma raiz dupla. Ache por meio da sucessão de Sturm a condição para que o polinómio $P(x) = x^3 + px + q$ tenha três raízes reais e distintas. R: *Para que exista raiz dupla* P (x) *e sua derivada não podem ser primos entre si. Achando o m. d. c. pelas divisões sucessivas obtemos*

$$\begin{array}{lcl}
\underline{1 \quad 0 \quad p \quad q} & \qquad & f_0 = x^3 + px + q \\
\underline{3 \quad 0 \quad p} & & f_1 = 3x^2 + p \\
0 \; \underline{-2p \; -3q} & & f_2 = -2px - 3q \\
\quad -9q + 2p^2 & & \\
\quad \underline{-4p^3 - 27q^2} & & f_3 = -4p^3 - 27q^2
\end{array}$$

A sucessão de Sturm será:

$$f_0 = x^3 + px + q\,,\; f_1 = 3x^2 + p\,,\; f_2 = -2px - 3q\,,$$
$$f_3 = -4p^3 - 27q^2\,.$$

Para f_0 *ter raizes múltiplas deverá ser* $f_3 = 0$, *porque então o m. d. c.* $(f_0\,, f_1)$ f_2 *e o zero duplo é o zero de* f_2.

Para que f_0 *tenha as três raizes reais deverá ser (e é suficiente)* $f_3 > 0$ *porque então é necessáriamente* $p < 0$ *e para* $-\infty$ *a sucessão de Sturm dá* 3 *variações e para* $+\infty$ *dá* 0 *variações. Se* $p \geqslant 0$ *já* $f_3 \geqslant 0$ *e sendo* $f_1 > 0$ *vem* f_0 *crescente e portanto com uma única raiz real.*

Soluções dos n.os 3092 a 3100 de J. Ribeiro de Albuquerque.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência extraordinário — 16 de Março de 1950.

3101 — *a*) Verificar a seguinte identidade:

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = \cos\frac{n\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{n\pi}{2}\,.$$

b) Interpretar geomètricamente a identidade para $n = 2$ e justificar todas as operações, analíticas e geométricas, efectuadas nas alíneas *a*) e *b*). R: *Os complexos conjugados* 1+i *e* 1—i *têm o mesmo módulo e argumentos, por ex.* $\pi/4$ *e* $-\pi/4$ *respectivamente. Logo, o seu cociente terá por módulo* 1 *e argumento* $\pi/2$. *A fórmula de Moivre para o expoente* n *inteiro permite concluir a identidade proposta.*

3102 — *a*) Calcular o verdadeiro valor da expressão: $\left(\dfrac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x$ para $x = \infty$. *b*) Enunciar e justificar as regras seguidas no cálculo da alínea anterior.

3103 — *a*) Dada a equação $f(x\,,y) = 0$, onde o primeiro membro é uma função homogénea, calcular as duas primeiras derivadas da função $y(x)$ definida implìcitamente. Explicitar a função, partindo do conhecimento das suas derivadas. *b*) Justificar as regras de derivação utilizadas, assim como uma propriedade importante das funções homogéneas a que necessàriamente recorreu. R: *Supondo* f (x , y) *uma função homogénea diferenciável, de grau de homogeneidade* α *tem-se* $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y = \alpha \cdot f(x\,,y)$ (*identidade de Euler*). *Como é* $f(x\,,y) = 0$ *tem-se* $f'_x = -(y/x)\cdot f'_y$. *Substituindo este valor em* $y'(x) = -f'_x/f'_y$ *obtem-se* $y' = y/x$ *donde* $y'' = (y' \cdot x - y)/x^2 = 0$. *De* $y'' = 0$ *resulta* $y' = c$ *e* $y - cx = d$ (c *e* d *constantes arbitrárias*). *Porém, a homogeneidade de* f (x,y) *implica que seja* $d = 0$ *e, portanto* $f(x\,,y) = y - cx$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência ordinário — 1 de Julho de 1950.

1.ª Parte

3104 — Dada a curva de equação $y = e^{-x^2}$, calcular as ordenadas dos pontos de inflexão com um erro inferior a 10^{-2}. Utilizar para esse fim o desenvolvimento em série inteira da função exponencial neperiana. R: *As abcissas dos pontos de inflexão da curva de equação* $y = e^{-x^2}$ *são as raizes de* $y'' = 2\,e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$ *ou sejam* $x = \pm\sqrt{1/2}$ *por ser* $y'''(\pm\sqrt{1/2}) \neq 0$. *As ordenadas pedidas obtêm-se calculando, a menos de* 10^{-2}, *a soma da série numérica que se obtem, fazendo* $x = \pm\sqrt{1/2}$ *no desenvolvimento de* Mac-Laurin

$$y=e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\ .$$

Tomando apenas os 4 primeiros termos da série, o que garante um êrro sistemático inferior, em valor absoluto, a $1/381<1/200$, *tem-se*, $y\simeq 1-1/2+1/8-1/48=$ $=29/48\simeq 0{,}60$ *com um êrro de cálculo, também inferior, em valor absoluto, a* $1/200$. *Desta forma*, $y=0{,}60$ *é o valor comum, com a aproximação pedida, das ordenadas dos dois pontos de inflexão da curva dada.*

3105 — Resolver a equação $3x^3+11x^2+17x+$ $+24=0$. R: $-8/3$ *e* $(-1\pm\sqrt{11}\,i)/2$.

3106 — Dada a recta $\begin{cases} x+2y+a=0 \\ z+1=0 \end{cases}$, determinar o valor de a de modo que por ela passe um plano perpendicular a $r\equiv\begin{cases} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$. Escrever a equação desse plano. R: *A família de rectas dada permite determinar uma família de feixes de planos de equação* $x+2y+\alpha z+a+\alpha=0$ (α *e* a *reais*). *Em cada feixe desta família é possível determinar um plano perpendicular a* r *pois, com efeito, terão que ser paralelos, o vector normal do plano* $\vec{n}\,(1,2,\alpha)$ *e o vector* $\vec{u}\,(1,2,3)$ *da recta* r *para o que basta ser* $\alpha=3$. *O problema admite, portanto, uma infinidade de soluções; todos os planos da família, a uma só parâmetro, de equação* $x+2y+3z+a+3=0$.

2.ª Parte

3107 — Estabeleça o desenvolvimento da função exponencial neperiana, em série inteira, pela aplicação, depois de demonstrar, do teorema respeitante à série de Mac-Laurin. Em relação ainda com o problema n.º 3104, enuncie as propriedades das séries numéricas utilizadas na resolução daquele.

3108 — Justifique os métodos empregados na resolução da equação do problema n.º 3105, de acordo com a natureza das raizes encontradas.

3109 — Feixe de planos: deduza a sua equação. Perpendicularidade entre rectas e planos: enuncie as condições, provando-as. Estude o caso particular dum dos planos bissectores do ângulo formado pelos planos dos xz e dos xy, estabelecendo as condições para que uma recta no espaço lhe seja perpendicular.

Soluções dos n.os 3101 a 3106 de Orlando Morbey Rodrigues

CÁLCULO INFINITESIMAL

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **Alguns problemas dos 1.os exames de frequência — 1949-50.**

3110 — Calcular $\displaystyle\int_0^a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ R: $a(\pi/2+1)$.

3111 — Calcular $\displaystyle I=\int\frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}$

R: $$I=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{3}\log\frac{(x^2+x+1)^{1/2}}{x-1}+$$ $$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

3112 — Sendo $f(x,y)$ uma função homogénea de grau α, contìnuamente derivável até à 2.ª ordem, provar que é:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\alpha(\alpha-1)f(x,y)\,.$$

R: *Aplicando o teorema de Euler às derivadas parciais* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *que são funções homogéneas de grau* $\alpha-1$, *vem:*

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=(\alpha-1)\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(\alpha-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}.$$

Multiplicando por x *a primeira destas igualdades, por* y *a segunda e somando-as vem, notando que, por hipótese, é* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$$
$$(\alpha-1)\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right]=(\alpha-1)\,\alpha f(x,y)\,.$$

3113 — Sendo $z=v^2+u^w-\frac{v}{w}$; $u=x^2-y^2$, $v=xy$ e $w=y+1$, determinar $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ no ponto $(x,0)$.

R: *Tem-se*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=wu^{w-1}2x+\left(2v-\frac{1}{w}\right)y$$

donde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \left(2x + \frac{1}{w^2}\right) y + \left(2v - \frac{1}{w}\right) +$$
$$+ 2xu^{w-2}\,[u + wu \log u - 2yw\,(w-1)]$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{(x\,,\,0)} = 2x\,(1 + \log x^2) - 1\,.$$

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **Alguns problemas dos 2.os exames de frequência — 1949-50.**

3114 — Calcular $F'(y)$ sendo

$$F(y) = \int_0^1 \log\,(x^2 + y^2)\,dx\,.$$

R: $2\,arc\,tg\,\frac{1}{y}$.

3115 — Resolver o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z - t - 2 = 0 \\ 2x + t + 1 = 0 \\ 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

R: *Sistema compatível e indeterminado*

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = (\lambda - 3)/2 \\ z = \lambda \\ t = 1/3 \end{cases}.$$

3116 — Sem resolver o seguinte sistema, determinar θ de modo que ele seja compatível:

$$\begin{cases} 2x + \theta y - z + 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - y + 3z - 5 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

R: *Formada a matriz dos coeficientes das incógnitas* $\left\|\begin{matrix} 2 & \theta & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|$ *verifica-se que é possível extrair dela um determinante de 3.ª ordem não nulo* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$, *que poderemos tomar para determinante principal. Havendo apenas uma equação não principal existe um único determinante característico que terá de ser nulo para que o sistema seja compatível, isto é:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & \theta & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \textit{donde} \quad \theta = 1/5\,.$$

3117 — O sistema

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ y_2 = x_1 + 5x_3 \\ y_3 = x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

define ou não uma transformação linear? Porquê? R: *Não, porque o módulo da substituição,*

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \textit{é nulo.}$$

3118 — Sendo

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4 \\ y_2 = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_2 x_3 + x_4 \\ y_3 = x_1^2 + x_2\,(3x_1 + 6x_3 - 2x_2) + 3x_1 x_3 + 2x_4 \\ y_4 = 3x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + x_4 + x_2 x_3 \end{cases}$$

quantos yy há funcionalmente independentes? R: *A matriz das derivadas parciais tem característica* 3, *pois* $\frac{\partial\,(y_1\,,y_2\,,y_3\,,y_4)}{\partial\,(x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4)} = 0$ *e existem jacobianos de 3.ª ordem, por exemplo* $\frac{\partial\,(y_1\,,y_2\,,y_4)}{\partial\,(x_1\,,x_3\,,x_4)}$ *não identicamente nulos. Logo há* 3 *funções independentes.*

3119 — Sabendo que a função característica da distribuição binomial é $f(t) = (pe^t + q)^N$ achar a função característica da distribuição de Poisson. R: *A função característica da distribuição binomial,* f(t), *pode tomar a forma:*

$$f(t) = (pe^t + q)^N = (pe^t + 1 - p)^N = [1 + p\,(e^t - 1)]^N.$$

Quando uma distribuição tende para outra o mesmo sucede às funções características; ora a distribuição binomial tende para a de Poisson quando $\begin{cases} p \to 0 \\ N \to \infty \end{cases}$, *sendo* $\lim\limits_{\substack{p \to 0 \\ N \to \infty}} pN = m$. *Próximo do limite pode-se substituir* p *por* m/N *e assim a função característica da distribuição de Poisson será:*

$$F(t) = \lim_{N \to \infty} \left[1 + \frac{m}{N}\,(e^t - 1)\right]^N = e^{m\,(e^t - 1)}\,.$$

3120 — Sejam $y_j\,(j = 1\,,2\,,\cdots,N)$ N variáveis casuais estocàsticamente independentes e todas elas com a seguinte distribuição:

y_j	$p\,(y_j)$
0	q
1	p

Notar que $x = \sum_{j=1}^{N} y_j$ tem parâmetros p e N.

A partir deste facto:

1). Sendo x uma variável casual com a distribuição de Bernoulli, obter $E(x)$ e $V(x)$ mediante as suas relações com $E(y_j)$ e $V(y_j)$;

2). Achar a função característica da distribuição binomial e deduzir dela $E(x)$ e $V(x)$. R:

$$E(y_j)=E(y_j^2)=p\,;\quad V(y_j)=E(y_j^2)-E^2(y_j)=pq$$

então

1). $$E(x)=E\left(\sum_{j=1}^{N} y_j\right)=\sum_{j=1}^{N} E(y_j)=pN$$

$$V(x)=V\left(\sum_{j=1}^{N} y_j\right)=\sum_{j=1}^{N} V(y_j)=Npq.$$

2). *A função característica da distribuição de* y_j *é:*

$$f_j(t)=E(e^{ty_j})=pe^t+q\,.$$

A função característica da distribuição de x *é:*

$$F(t)=\prod_{j=1}^{N} f_j(t)=(pe^t+q)^N.$$

Donde:

$$E(x)=F'(0)=pN$$
$$V(x)=F''(0)-[F'(0)]^2=pqN.$$

Soluções dos n.os 3110 a 3120 de Zózimo Pimenta de Castro do Rego.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — Exame final — Outubro de 1949.

3121 — Escrever até aos termos do 2.º grau inclusivé o desenvolvimente tayloriano da função

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

segundo as potências de $(x-1)$, $(y-1)$ e $(z-1)$. R:

$$f(x,y,z)=f(1,1,1)+\sum_{i=1}^{i=2}\frac{1}{i!}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{1,1,1}(x-1)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{1,1,1}(y-1)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{1,1,1}(z-1)\right]^{(i)}+R_3=$$
$$=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}[(x-1)+(y-1)+(z-1)]+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-$$
$$-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+R_3\,.$$

3122 — Sendo A e B dois pontos fixos e P um ponto variável e sendo θ um ângulo $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})$, mostrar que a direcção do vector *grad* θ é normal em P à circunferência que passa por A, B e P.

3123 — Dada a equação

$$(x^2y+y^3-xy)\,dx+x^2\,dy=0$$

determinar um factor integrante da forma $\varphi(z)/x^3$, sendo $z=y/x$. R: *De* $y=xz$ *vem* $dy=xdz+zdx$ *e a equação toma a forma* $(x^3z+x^3z^3)\,dx+x^3\,dz=0$. *Multiplicando por* $\varphi(z)/x^3$ *tem-se* $\varphi(z)\cdot(z+z^3)\,dx+$ $+\varphi(z)\,dz=0$, *e como o 1.º membro é diferencial exacta:*

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z)(z+z^3)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi(z)=0\quad ou\quad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=-\frac{3z^2+1}{z^3+z}$$

donde $\varphi(z)=\dfrac{1}{c(z^3+z)}=\dfrac{x^3}{c(x^2y+y^3)}$, *e, finalmente*

$$\frac{\varphi(z)}{x^3}=\frac{1}{c(x^2y+y^3)}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — Exame final, época milicianos — Dezembro, 1949.

3124 — Seja $A(x,0)$ o pé da ordenada dum ponto P da curva C. A distância do ponto A à tangente em P é $\overline{AM}=a$. Supondo a constante achar a equação da curva.

R: $$y=a\sqrt{1+p^2}\quad \text{com}\quad p=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dp}=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\rightarrow\frac{dx}{dp}=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$$
$$x+C_1=\textit{arc senh}\,p\rightarrow p=\textit{senh}\,(x+C_1)$$
$$\frac{dy}{dx}=\textit{senh}\,(x+C_1)\rightarrow y=\cosh(x+C_1)+C_2\,.$$

3125 — A curva $a^2x^2=y^2(x-\alpha)$ tem um ponto de inflexão. Achar a área limitada pela curva, pela ordenada desse ponto de inflexão, e pela ordenada do ponto $x=2\alpha$. R:

$$y''=-a(x-\alpha)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}ax(x-\alpha)^{-\frac{5}{2}},\quad y''=0\rightarrow x=4\alpha$$

e $$A=2a\int_{2\alpha}^{4\alpha}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-\alpha}}=2I\,.$$

Fazendo $x-\alpha=t^2$, *tem-se:*

$$I=\int_{2\alpha}^{4\alpha}\frac{ax\,dx}{\sqrt{x-\alpha}}=2\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{3\alpha}}(a\alpha+at^2)\,dt=$$
$$=\frac{12\sqrt{3}-8}{3}\cdot a\alpha\sqrt{\alpha}$$

e portanto: $A=2\left(12\sqrt{3}-8\right)a\alpha\sqrt{\alpha}/3\,.$

3126 — Achar os máximos e mínimos da função:

$$z=(x+2)(y+3)\,xy\,.$$

R:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2xy+2y)(y+3)=0\rightarrow y=0\quad x=-1\quad y=-3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x(x+2)(2y+3)=0\rightarrow x=0\quad x=-2\quad y=-\frac{3}{2}$$

Os pontos a analisar são:

$$(-1,-3/2),(0,0),(-1,0),(0,-3) \ e \ (-2,-3).$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y(y+3)\,,\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(2x+2)(2y+3)\,,$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x(x+2)\,.$$

r *e* t *devem ser de sinais contrários para haver máximos e mínimos. A única solução que serve é* $(-1,-3/2)$ *pois que neste ponto* r, t *e* s *tomam respectivamente os valores* $-9/2,-1$ *e* 0 *e* s^2-rt *o valor* $-9/2<0$. *Logo há um mínimo para* $x=-1$ e $y=-3/2$ *que é* $z=9/4$.

Soluções dos n.os 3121 a 3126 de Mário S. Madureira

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de frequência — 1949-50.

3127 — Sendo x, y, z as coordenadas de P em relação ao triedro $0\,\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}$, provar que é plano o campo vectorial definido pela função:

$$\mathbf{v}(P)=z\mathbf{i}-3z\mathbf{j}+(3y-x)\mathbf{k}\,.$$

R: *Sejam* $\mathbf{v}(A)$ *e* $\mathbf{v}(B)$ *dois quaisquer vectores do campo. Por exemplo se*

$$\begin{cases} A(1,0,0) \\ B(0,0,1)\end{cases} \quad \textit{teremos} \quad \begin{cases}\mathbf{v}(A)=-\mathbf{k} \\ \mathbf{v}(B)=\mathbf{i}-3\mathbf{j}\end{cases}.$$

Se considerarmos o plano $P=0+\lambda(\mathbf{i}+3\mathbf{j})-\mu\mathbf{k}$ (λ,μ — *parametros*) *verifica-se que todos os vectores do campo lhe são paralelos pois, quaisquer que sejam* x, y *e* z, *é sempre possivel encontrar valores de* λ *e* μ *tais que* $\frac{\lambda}{z}=\frac{\mu}{x-3y}$. *Sendo os vectores normais a este plano da forma* $\mathbf{a}=k(3\mathbf{i}+\mathbf{j})$, *com* k *qualquer, é fácil de ver que a derivada dos vectores do campo segundo esta direcção é nula. Logo, o campo é plano.*

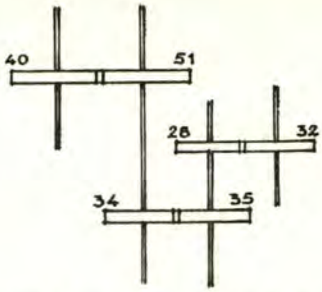
3128 — Em relação ao triedro $0\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}$ com $P(x,y,z)$ o campo vectorial ($\mathbf{v}$) é definido pela função

$$\mathbf{v}(P)=x\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}-y\mathbf{k}\,.$$

Calcular o fluxo divergente de uma esfera de raio r, imersa no campo. R: *Aplicando o teorema de Ostogradski e notando que* $\operatorname{div}\mathbf{v}(P)=1$, *resulta imediatamente que o fluxo divergente pedido vale* $4\pi r^3/3$.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.º exame de frequência — 1950-49.

3129 — A figura representa um trem de engrenagens, cuja roda condutora é a primeira da esquerda. Junto de cada roda está indicado o seu número de dentes. Poderá sem alteração da razão de transmissão, substituir-se este trem por uma única engrenagem



com a mesma roda condutora? Sendo a resposta afirmativa quantos dentes deverá ter a roda conduzida? R: *Sim. 60 dentes.*

3130 — O ponto material P está animado de movimento circular uniforme em relação ao triedro $0\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}$; o vector deslizante velocidade angular é:

$$C\vec{\Omega}=(2,0,0)\,(4\mathbf{i}+3\mathbf{j})\,.$$

A partir do instante $t=5$s no qual ocupa a posição $A(2,0,-3)$, P fica submetido apenas à acção de uma força $\mathbf{F}$, com a direcção e o sentido de $\vec{\Omega}$ e de intensidade igual a 20 kg. Sabendo que a velocidade de P no instante $t=10$s vale $\mathbf{v}(10)=7\mathbf{i}+24\mathbf{j}$, calcular a sua energia cinética neste instante. R: *A velocidade no instante* $t=5$s *é*

$$\mathbf{v}(5)=\vec{\Omega}\wedge(A-C)=-9\mathbf{i}+12\mathbf{j}\,.$$

Aplicando o teorema da impulsão temos:

$$m(7\mathbf{i}+24\mathbf{j})-m(-9\mathbf{i}+12\mathbf{j})=\int_5^{10} 20\ \mathrm{vers}\,\vec{\Omega}\,dt$$

donde, supondo o metro a unidade de comprimento, $m=5$ *u. m. m. Então a energia cinética pedida será:*

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(49+576)=1562{,}5\ \text{kgm}.$$

3131 — Sabendo que o momento de inércia em relação a um plano de simetria da esfera homogénea de raio R e densidade ρ vale $I=4\pi\rho R^5/15$, calcular os comprimentos dos eixos do elipsoide de inércia relativo a um ponto da superfície limitante. R: *As faces dum triedro triortogonal de vértice* P — *ponto qualquer da superfície da esfera — e em que um dos eixos coincide com o eixo diametral que passa por* P *são planos principais de inércia. Referida a este triedro a equação do elipsoide de inércia em relação a* P *será:*

$$\frac{x^2}{\frac{15}{8\pi\rho R^5}}+\frac{y^2}{\frac{15}{28\pi\rho R^5}}+\frac{z^2}{\frac{15}{28\pi\rho R^5}}=1\,.$$

Donde vem para comprimentos dos eixos do elipsoide:

$$a=\frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{15}{2\pi\rho R}}\,,\quad b=c=\frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{15}{7\pi\rho R}}\,.$$

Soluções dos n.os 3127 e 3131 de Zózimo Pimenta de Castro do Rego.

CRÍTICA DE LIVROS

A PROPOS D'UN OUVRAGE SUR LA RELATIVITÉ

La Théorie de la Relativité restreinte par **O. Costa de Beauregard,** préface de L. de Broglie, Collection d'ouvrages de Mathématiques à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois, Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1949.

La Théorie de la Relativité, dont l'idéal est la réduction de la Physique à la Géométrie et qui marque l'entrée de la Science dans une ère véritablement explicative, a donné lieu à la publication de livres nombreux destinés aux spécialistes, pour ne pas parler de la multitude des essais de vulgarisation de ce qui n'est pas vulgarisable. Néanmoins, aussi étrange que cela puisse paraître, il n'existe à notre connaissance aucun exposé d'ensemble auquel on ne puisse adresser de très graves reproches. La plupart des auteurs, obsédés par le développement historique de la Relativité, qui ne coïncide pas du tout avec son développement logique, donnent une importance exagérée à l'expérience de Michelson et aux autres expériences optiques sur la propagation de la lumière et encombrent leurs exposés d'un certain nombre d'axiomes de nature physique dont la formulation et la portée ne sont pas toujours très nettes, sans s'apercevoir que ces axiomes sont absolument inutiles et plutôt nuisibles au développement rationnel de la théorie, car ils ne sont en réalité que des conséquences de ce développement parmi beaucoup d'autres conséquences. D'autre part, ces auteurs, le plus souvent peu familiarisés, malgré certaines apparences, avec le calcul tensoriel général et la Géométrie différentielle des variétés multidimensionnelles, répugnent à un traitement véritablement quadridimensionnel (leur emploi craintif et soupçonneux des coordonnées minkowskiennes est très significatif à cet égard), et persistent à vouloir exposer d'abord et avant tout la Relativité restreinte, alors que cette théorie ne prend sa véritable signification et ne peut être vraîment comprise qu'en la considérant telle qu'elle est réellement, c'est-à-dire comme un cas particulier de la Relativité générale. On ne comprendra jamais rien à la Relativité si l'on ne se pénètre pas de la vérité fondamentale que cette grande théorie est en réalité et malgré ce qu'on a pu dire une théorie à priori, dont la validité montre qu'il est possible de construire une Physique a priori, sans tenir compte des «décrets» arbitraires et injustifiés par lesqueles on a voulu interdire une telle construction au nom des exigences mal interprétées de la méthode expérimentale.

La Relativité, dans son ensemble, n'est qu'un développement purement déductif à partir du seul postulat suivant: *Le contenant de l'Univers est un espace de Riemann à quatre dimensions et à métrique hyperbolique normale.* Ce postulat unique montre que la Relativité doit être considérée comme une branche de la géométrie différentielle; il en résulte d'ailleurs, d'une part la nécessité logique de donner la priorité à la Relativité générale et d'autre part le fait que la Relativité restreinte n'est qu'un cas particulier de la Relativité générale, puisque toute variété riemannienne à métrique hyperbolique normale est localement pseudo-euclidienne. C'est ainsi, par exemple, que la rotation du quadripode géodésique local orthogonal que l'on peut attacher à chaque point de l'espace-temps riemannien n'est autre que la transformation de Lorentz la plus génerale; et que l'opérateur laplacien de cet espace-temps riemannien (opérateur qui figure nécessairement dans toute équation de propagation du second ordre et qui est ici un dalembertien par suite du caractère hyperbolique de la métrique) possède comme bicaractéristiques, c'est-à-dire comme rayons de la propagation, les géodésiques de longueur nulle. De là découle immédiatement l'invariance et l'isotropie de la vitesse de la lumière dans le «vide», c'est-à-dire dans un domaine de l'espace-temps où la métrique (interne) peut être considérée comme pseudo-euclidienne. De plus, dans les équations du champ, qui expriment simplement la détermination complète de la métrique par les contenus de l'Univers [par l'intermédiaire des propriétés intrinsèques de la métrique (théorème de Cartan)], figure nécessairement un tenseur dont les propriétés générales (trace non identiquement nulle et conservation essentielle) sont nécessaires et suffisantes pour l'assimiler à un tenseur de densité d'energie-impulsion d'un fluide répandu dans l'espace-temps. Toute la dynamique peut être déduite de cette propriété de conservation qui fait nécessairement jouer aux géodésiques non singulières un rôle capital dans les équations du mouvement. Le passage des équations densitaires du mouvement aux équations pour des particules finies fait d'ailleurs apparaître, en plus des forces habituelles, celles qui dépendent du spin et de la non-homogénéité du champ.

Il est bien connu que l'électromagnétisme peut être juxtaposé — d'une manière assez arbitraire d'ailleurs — à la relativité einsteinienne, mais non pas effectivement incorporé à la théorie. Sans qu'il soit nécessaire d'abandonner le niveau riemannien, il est cependant possible de construire une Relativité unitaire en prenant comme point de départ un postulat unique beaucoup plus général que le postulat énoncé ci-dessus et donc celui-ci devient une conséquence. De ce nouveau postulat, selon lequel il faut considérer l'Univers en tant qu'hypersurface déterminée complètement, dans son espace auxilaire ambiant, par ses contenus, on déduit non seulement la gravitation, l'électromagnétisme et la Relativité restreinte, mais encore une Mécanique ondulatoire permettant d'incorporer la microphysique quantique à la théorie ([1]).

Nous avons tenu à dire ce qui précède pour bien faire voir qu'à notre avis la Relativité est une théorie dont la structure logique impose, à tout auteur qui veut l'exposer rationnellement, le devoir de la considérer comme un bloc où toute séparation est arbitraire et injustifiée et fait perdre vie et signification à la partie séparée.

Examinons maintenant, à la lumière des considérations précédentes, le livre récent de O. Costa de Beauregard. Il s'agit d'un travail s'occupant uniquement de la Relativité restreinte et notre opinion générale est qu'il est presque aussi bon que peut l'être un ouvrage détachant du bloc indivisible de la Relativité l'une de ses parties pour la traiter d'une manière autonome; et l'on peut dire que presque tous les défauts que nous croyons trouver dans ce livre proviennent du fait essentiel que la séparation de la Relativité restreinte de l'ensemble de la théorie générale est une opération arbitraire, logiquement et didactiquement injustifiée. Dès l'Introduction sur l'historique et l'épistémologie du principe de relativité (où cependant l'auteur a très bien vu que le postulat de la constance de c équivaut en réalité à une définition de la vitesse de la lumière), on peut apercevoir les défauts intrinsèques à un traitement autonome de la Relativité restreinte. Si, en effet, on considère que toute variété riemannienne à métrique hyperbolique normale est localement pseudo-euclidienne, et si l'on prend en un point des axes geodésiques locaux orthogonaux, alors, en ce point, les g_{ik} étant égaux à δ_{ik} il s'ensuit qu'en écrivant la loi $ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k=0$ des lignes géodésiques de longueur nulle, rayons de la propagation de tout phénomène ondulatoire solution de $\Box\,\psi=\varphi\,(x^i)$, on ne peut faire apparaître une vitesse c dans cette loi qu'en transformant arbitrairement le dx^4 en dt par un choix arbitraire des unités de longueur et de temps. Ainsi envisagée, la constante c est, par définition, une constante.

Nous remarquons aussi dans l'Introduction du livre une hypertrophie du rôle de l'expérience de Michelson dans la Théorie de la Relativité. L'existence ou la non existence du «vent d'éther», sujet tant discuté, ne prouve en réalité rien sur la validité ou la non validité de la Relativité. Si l'on venait à déceler, par des mesures beaucoup plus minutieuses, qu'il existe réellement un petit vent d'éther, cela ne voudrait absolument pas dire que la théorie de l'espace-temps relativiste serait fausse, car cette théorie repose en réalité sur un principe qu'aucune expérience ne peut atteindre (cf. plus haut), tant l'évidence de ce principe sous la lumière de raison est immédiate. Un tel résultat expérimental signifierait simplement que, contrairement à l'hypothèse einsteinienne sur la propagation de la lumière (hypothèse qui, malgré ce qu'on en a dit, n'appartient pas du tout au corps des axiomes fondamentaux de la Relativité), la loi de cette propagation n'est pas $ds^2=0$ mais une autre loi dont $ds^2=0$ n'est qu'une très bonne approximation. C'est ainsi que dans notre théorie unitaire $ds^2=0$ ne régit que la propagation des phenomènes gravifiques purs, tandis que la propagation d'un phénomène électromagnétique, comme la lumière, s'écrit $d\Omega^2\equiv\equiv\omega_{ik}\,dx^i\,dx^k=0$, où ω_{ik} désigne le tenseur métrique externe de l'espace-temps, considéré, d'après notre théorie, comme une hypersurface de classe 1. Les lignes asymptotiques d'équation $d\Omega^2=0$ de l'espace-temps diffèrent en général très peu des géodésiques de longueur nulle d'équation $ds^2=0$, mais cette différence peut néanmois devenir sensible dans le cas de la propagation de la lumière dans un champ électromagnétique statique suffisamment puissant: il doit alors y avoir, selon notre théorie, un tout petit vent d'éther (sur cet effet, voir *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 226, 1948, p. 2051). Il faut ajouter que la déviation einsteinienne des rayons lumineux dans le voisinage des grandes masses, comme le soleil, n'est pas une preuve de la Relativité générale, car d'une part la propagation de lumière satisfait à $d\Omega^2=0$ et non à $ds^2=0$, et d'autre part, par suite de la symétrie sphérique des champs, les lignes données par $d\Omega^2=0$ coïncident, dans le voisinage de l'astre, avec celles dont la loi est $ds^2=0$.

La deuxième partie de l'Introduction s'occupe de la théorie des tenseurs cartésiens, nécessaire et suffisante pour exprimer mathématiquement la Relativité restreinte. Ici aussi les désavantages de l'étude indépendante de la Relativité restreinte sont évidents.

([1]) Cf. les mémoires de l'auteur de ces lignes sur la théorie unitaire.

En se bornant à des systèmes de coordonnées pour lesquels les g_{ik} sont constants, on n'arrive pas à saisir dans sa profondeur la notion générale de tenseur et l'exposé prend je ne sais quelle sécheresse, que l'on rencontre d'ailleurs chez la plupart des auteurs français, jusqu'ici assez imperméables à l'influence des écoles italienne et américaine de Géométrie Différentielle. Le Calcul Tensoriel ne dévoile sa véritable signification, et ne devient l'instrument mathématique par excellence de la Théorie de la Relativité, qu'en le traitant suivant les méthodes de son fondateur Ricci, qui font jouer aux formes quadratiques différentielles et à la recherche de leurs invariants le rôle essentiel.

Dans le premier Chapitre, l'auteur traite la Cinématique relativiste, préparant ainsi le lecteur à l'exposé de la Dynamique, qui est la partie la plus développée de l'ouvrage. La cinématique relativiste repose sur les propriétés du groupe de transformations de Lorentz, sous groupe du groupe des rotations des quadripodes géodésiques locaux orthogonaux que l'on peut attacher en chaque point d'une variété de Riemann quadridimensionnelle et à métrique hyperbolique normale. Du fait qu'il s'agit ici de propriétés essentiellement locales, donc pseudo-euclidiennes, il n'y a pas d'inconvénient à traiter cette partie de la Relativité sans sortir du cadre de la théorie restreinte, mais ces circonstances sont exceptionnelles. C'est surtout en Dynamique que les difficultés provenant du désir de ne pas dépasser la théorie restreinte s'avèrent redoutables. Un fait fondamental devrait inciter les auteurs à ne pas essayer d'exposer la Dynamique relativiste sans prendre pour base la théorie générale. Il s'agit du fait que la loi fondamentale de la Dynamique n'est que la propriété essentielle de conservation du tenseur T_{ik} de densité d'énergie-impulsion qui figure dans les équations du champ de la Relativité générale, conservation qui n'est elle-même que la conséquence immédiate des propriétés fondamentales du tenseur purement géométrique $R_{ik}-\frac{1}{2}(R+\lambda_g)\,g_{ik}$ de ces équations. Ainsi, en Relativité, la Dynamique ne doit pas être considérée comme une théorie autonome ayant ses postulats propres, mais au contraire comme une conséquence des postulats infiniment plus généraux qui constituent l'essentiel de la Théorie générale et qui sont exprimés par les équations du champ. Quand on oublie ce fait fondamental, on est obligé de déduire la Dynamique relativiste au moyen de certaines généralisations, assez arbitraires et sans justification vraiment profonde, de la Dynamique newtonienne. Ce faisant, on suit probablement le chemin du développement historique de la Relativité, mais on ne suit certainement pas le chemin logique, et par ailleurs on ne respecte pas la hiérarchie des postulats. Plus encore, on confond principes et conséquences.

Les équations du champ de la Relativité générale expriment la détermination de la métrique interne g_{ik} de l'espace-temps par les contenus «matériels» T_{ik} de l'Univers (et inversement). Cette détermination s'opère par l'intermédiaire des propriétés intrinsèques de la métrique construites avec les g_{ik} par un théorème fondamental de Cartan. Toute autre fonction des g_{ik} que la fonction $R_{ik}-\frac{1}{2}(R+\lambda_g)\,g_{ik}$ qui résulte du théorème de Cartan introduit nécessairement des éléménts arbitraires dans les équations du champ, et est à rejeter par une théorie qui doit, selon nous, exprimer que l'Univers est représenté par un être mathématique complètement autodéterminé. En conséquence, tant que l'on fait jouer au théorème de Cartan un rôle central et tant que l'on part d'espaces riemanniens où les g_{ik} sont nécessairement symétriques, les postulats de base de la théorie de la Relativité conduisent nécessairement à un tenseur de densité d'énergie-impulsion essentiellement symétrique. Or, nous pensons que l'introduction d'espaces non-riemanniens en Théorie Unitaire est inutile et injustifiée, non seulement parce qu'on est loin d'avoir utilisé toutes les ressources de la Géométrie riemannienne, mais encore et surtout parce qu'en mettant à la base de la Théorie Unitaire la notion d'être mathématique complètement autodéterminé, on peut montrer (*vid. supra*, note 1) que la structure du contenant de l'Univers doit être une *structure d'hypersurface* riemannienne. On comprend dès lors que nous ne soyions pas convaincus par les raisonnements de l'auteur de l'ouvrage ici analysé qui tendent à montrer que le tenseur microphysique de densité d'énergie-impulsion n'est pas symétrique. L'auteur arrive à cette conclusion en analysant les conséquences de l'existence du spin ou moment cinétique propre. Pour lui, l'influence du spin se manifeste déjà explicitement dans les équations densitaires du mouvement, tandis que pour nous cette influence n'est qu'implicite dans les équations densitaires, et n'apparait explicitement qu'en opérant la transition des équations densitaires du mouvemnnt vers les équations du mouvement de particules finies.

Pour les raisons indiquées au début de cette analyse nous avons uniquement insisté sur ce que nous croyons être des défauts de l'ouvrage, sans parler de ses mérites. Ces mérites sont d'ailleurs évidents: il suffit de feuilleter le livre et de le comparer à tant d'autres exposés pour qu'ils apparaissent immédiatement.

António Gião

PROBLEMAS

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2397 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Se os números complexos z_1, z_2, z_3, e z_4 são tais que

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_4|=|z_4-z_1|,$$

então $z_1+z_3=z_2+z_4$ e $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$ é um imaginário puro.

R: *Como o módulo da diferença de dois complexos mede o comprimento do segmento de recta que tem para extremos as suas imagens no plano de Argand, o quadrilátero que tem para vértices as imagens de z_1, z_2, z_3, e z_4 é um losango, em que z_1 e z_3 correspondem a vértices opostos, o mesmo sucedendo a z_2 e z_4. Então z_1+z_3 tem por imagem o simétrico da origem em relação ao ponto de cruzamento das diagonais do losango, z_2+z_4 tem por imagem o mesmo ponto, sendo, por isso, $z_1+z_3=z_2+z_4$. Em virtude das diagonais do losango serem ortogonais, o argumento principal de $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$, (diferença dos argumentos de z_1-z_3 e z_2-z_4) é igual a $\pm\dfrac{\pi}{2}$, o que significa que aquele cociente é um imaginário puro, c. q. d.*

2398 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Mostre que é igual a 1 o determinante $|a_j^i|$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$, assim definido: $a_1^i=a_j^1=1\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ e

$$a_j^{i-1}+a_{j-1}^i=a_j^i\,(i,j=2,3,\cdots,n).$$

R: *Vamos proceder por indução. Para* $n=2$, $|a_j^i|=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$. *Admitamos que para* $n=p$ *se tem ainda* $|a_j^i|=1$ *e vamos mostrar que, nesta hipótese, se tem também* $|a_j^i|=1$. *Com efeito, conservando* a_1^i *e substituindo* a_j^i *por* $a_j^i-a_{j-1}^i$ $(j>1)$, *obtém-se um determinante* $|b_j^i|=|a_j^i|$, *em que* $b_1^i=1\,(i=1,2,\cdots,p+1)$, $b_j^1=0\,(j=2,3,\cdots,p+1)$ *e* $b_j^i=a_j^{i-1}\,(i,j=2,3,\cdots,p+1)$, *em virtude de ser* $a_j^{i-1}+a_{j-1}^i=a_j^i$. *Baixando de ordem, encontra-se o determinante* $|c_j^i|=|b_j^i|$ *em que*

$$c_j^1=1\,(j=1,2,\cdots,p)\ e$$
$$c_j^i=b_{j+1}^{i+1}\,(i=2,3,\cdots,p;\ j=1,2,\cdots,p).$$

Substituindo neste determinante c_j^i *por* $c_j^i-c_j^{i-1}$, *obtém-se finalmente o determinante* $|d_j^i|=|c_j^i|$ *em que*

$$d_1^i=d_j^1=1\quad e\quad d_j^i=a_j^i\,(i,j,=2,3,\cdots,p),$$

quer dizer, obtém-se o determinante $|a_j^i|$ *para* $n=p$, *que, por hipótese é igual a* 1, *o que prova a veracidade do enunciado.*

Soluções dos n.os 2397 e 2398 de José C. Morgado

As resoluções de problemas propostos devem ser enviados para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

83 — CASTELNUOVO, EMA — **Geometria Intuitiva per le Scuole medie inferiori, com 414 disegni e 19 riproduzioni artistiche e oltre 750 esercizi e complementi** — Casa Editrice R. Carabba S. A. Lanciano—Roma. Preço 500 liras.

Desde há muito que os metodólogos, e até mesmo os que o não são, procuram que a matemática, por sua natureza árida quando apresentada sem ligação com os factos da vida corrente, seja ensinada aos que principiam, duma forma atraente, enquadrando-a nos centros de interesse do aluno, levando-o à compreensão do facto matemático como representação adequada dos fenómenos de observação comum, e mostrando a sua necessidade e vantagem para a solução de tantos problemas que diáriamente a vida nos põe. Um ensino que não tem em conta esses casos da vida diária, aparece ao aluno sem interesse e destituído de utilidade. Em geral a reacção de quem contacta pela primeira vez com um facto novo, na matemática, o qual lhe é apresentado sob uma forma puramente abstrata, é perguntar para que é que *aquilo* serve.

O critério de utilidade que domina a aquisição de conhecimentos novos, tão vivo por toda a parte, tem que ser aproveitado para facilitar o ensino, em particular das partes mais abstractas das matemáticas. Por isso o seu ensino, pelo menos nos primeiros *passos* da iniciação deve ser feito o mais possível, com vista à aplicação imediata, e começar mesmo pela apresentação e resolução de problemas que o aluno conheça ou que sejam de fácil apreensão.

A escolha criteriosa dos exemplos que hão-de servir de base à exposição do assunto, criando o interesse pela *coisa*, é tarefa bem difícil que só aquele que muito contacta com o ensino vivo da matemática, pode avaliar.

Mais difícil ainda é encaminhar o aluno para a participação no trabalho criador levando-o progressivamente, a sentir a necessidade de um raciocínio puramente lógico. Partir do objecto concreto, interessando-o pelo trabalho, de modo a que o aluno tenha a impressão que é em boa parte devido a esforço próprio que é conduzido à descoberta das verdades matemáticas, e levá-lo por fim ao campo da justificação lógica dessas verdades.

Foi este o espírito e os fins que a autora se propôs, no livro que relatamos, e consegue-os em absoluto, estamos disso convencidos. É a sua autora, professora de matemática das escolas italianas, filha do matemático, professor Castelnuovo, e alia a um conhecimento seguro da matéria que trata, necessário a quem escreve em especial um livro didático, o conhecimento do material humano com que o professor tem de trabalhar, pela sua longa prática de ensino, e estudo das questões de pedagogia da matemática a que se dedica.

Na exposicão dos assuntos, o método seguido opõe-se decididamente à rotina da maioria dos livros em uso, por quási toda a parte e a autora não se julga diminuída por fazer apelo à intuição, que sem comprometer o rigor da exposição, facilita o estudo das questões a tratar O próprio título do livro nos indica o uso e aplicação que a autora faz da intuição, para o que a geometria tanto se presta.

É um livro claro, cheio de boas gravuras e de muitos exercícios.

Eis portanto um livro cuja leitura é de aconselhar aos nossos professores, tanto mais que para o ensino da geometria no 1.º ciclo dos nossos liceus, se determina o uso, pelos programas actuais, de método análogo ao seguido neste livro. Se bem que ele seja dirigido a alunos, cremos que ali, o nosso professor, encontrará muitas sugestões para o seu ensino.

José da Silva Paulo.

84 — ADAM, Pedro Puig — **Curso de Geometria Métrica** — Tomo II — Complementos — Madrid — 1948. Preço 80 pts.

Vem esta notícia um pouco atrazada em relação à data da publicação do livro, mas não porque não tenha sido grande a satisfação com que lemos este 2.º e último volume da obra do sr. Adam.

O primeiro tinha-nos feito desejar o breve aparecimento do segundo, o qual foi lido de um fôlego, logo que nos chegou às mãos, e só questões de ordem particular impediram que imediatamente déssemos notícia dele.

Não desmerece este volume do anterior e é um digno complemento dele. Escrito da mesma forma clara e atraente sem perder nada do rigor que caracteriza toda a obra, trata este volume de trigonometria rectilínea e esférica, noções de geometria projectiva e cónicas.

Em apêndices são postas as questões da irresolubilidade de alguns problemas (problemas clássicos, irresolubilidade por radicais, transcendência de e e π), e indemonstrabilidade do postulado de Euclides.

Como o primeiro volume é este um excelente livro que dá termo a muitas questões enunciadas ou apontadas naquele, e está cheio de exercícios e notas que põe o leitor em contacto não só com todos os problemas clássicos, os mais variados mas também com os problemas actuais da geometria.

Aconselhamos vivamente a sua leitura a quem deseje ter uma ideia panorâmica segura do estado actual da geometria elementar.

É claro que, pelo seu formato, o livro não trata todas as questões de modo exaustivo, mas é verdade que fornece bibliografia que permite ao interessado aprofundar as questões de que o livro trata e dá, em geral, uma ideia suficientemente clara.

O livro que se destina a alunos que se preparam para admissão a Escolas Superiores espanholas, não deixa de ser útil aos professores.

José da Silva Paulo.

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUÊSA

REVISTAS RECEBIDAS POR PERMUTA COM GAZETA DE MATEMATICA

Argentina

Boletin Matemático, Buenos Aires.
Mathematicae Notae, Rosário.
Revista de la Unión Matemática Argentina, Buenos Aires.

Brasil

Revista do Instituto de Resseguros do Brasil, Rio de Janeiro
Revista Politécnica, S. Paulo.

Espanha

Euclides, Madrid.
Gaceta Matemática, Madrid.
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Matematica, New York.

França

Bulletin Astronomique, Paris.
Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris.
Annales de l'Institut Fourier, Grenoble.
Annales de l'Université de Lyon.
Intermédiaire des Recherches Mathématiques, Paris.
La Recherche Aéronautique — O. N. E. R. A. — Paris
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées et Bulletin de la Société Philomathique, Paris.

Inglaterra

The Mathematical Gazette, London.
The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford.

Itália

Periodico di Matematiche, Bologna.

Portugal

Agros, Lisboa.
Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses, Lisboa.
Ciencia, Revista dos Estudantes da Faculdade de Ciências, Lisboa.
Estudos Italianos em Portugal
Gazeta de Física, Lisboa.
Portugaliae Mathematica, Lisboa.
Portugaliae Physica, Lisboa.
Revista de Economia, Lisboa.
Seguros, Lisboa.
Técnica, Lisboa.
Vértice, Coimbra.

Suíça

Elemente der Mathematik, Basel.

Uruguai

Publicaciones del Instituto de Matematica y Estadistica, Montevideo.

PUBLICAÇÃO DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

INTEGRAL DE RIEMANN por RUY LUÍS GOMES — 120 Esc.

Preço para os assinantes de *Gazeta de Matemática* ou *Portugaliae Mathematica*: **100 Escudos**

PUBLICAÇÃO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA MODERNA por L. VAN DER WAERDEN

Tradução da 2.ª edição alemã por *Hugo B. Ribeiro* — Vol. I, fasc. 1 — 75 Escudos

Preço para os assinantes de *Gazeta de Matemática* ou *Portugaliae Mathematica*: 60 Escudos

OS ANÚNCIOS DESTE NÚMERO NÃO SÃO PAGOS

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará quatro números por ano

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano I da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática.* Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 45, cada número	12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 25$00

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N