GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XI **N.º 46** DEZEMBRO 1950

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XI – N.º 46 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO – 1950

REDACTORES PRINCIPAIS: *J. Morgado* E *M. Zaluar*

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

A função de Dirac — Sua interpretação matemática

por ***Ruy Luís Gomes***

Segundo a Mecânica Quântica quando um sistema físico de n graus de liberdade se encontra no estado (físico) representado pela função normada

$$\varphi(x_1 \cdots x_n), \int |\varphi|^2 dx_1 \cdots dx_n = 1,$$

a densidade de probabilidade correspondente à posição $x_1 \cdots x_n$ no espaço R^n das configurações possíveis, é $|\varphi(x_1 \cdots x_n)|^2$. Por outro lado, na estruturação geral (da Mecânica quântica) essa densidade de probabilidade aparece sob a forma

$$\left| \int \varphi(y_1 \cdots y_n)\, \delta_x(y_1 \cdots y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \right|^2,$$

em que x representa o conjunto ordenado $x_1 \cdots x_n$ e $\delta_x(y_1 \cdots y_n)$ a função própria da grandeza-posição em R^n referente ao valor $x_1 \cdots x_n$.

Concretamente $\delta_x(y_1 \cdots y_n)$ tem de satisfazer[1] a

$$(1) \qquad \begin{aligned} y_1\, \delta_x(y_1 \cdots y_n) &= x_1\, \delta_x(y_1 \cdots y_n) \\ &\cdots \\ y_n\, \delta_x(y_1 \cdots y_n) &= x_n\, \delta_x(y_1 \cdots y_n), \end{aligned}$$

juntamente com uma condição de normalização.

Ora, para satisfazer a (1) terá de ser

$$(2) \qquad \delta_x(y_1 \cdots y_n) = 0 \quad \text{para} \quad y_i \neq x_i,\ i = 1 \cdots n;$$

no ponto $x_1 \cdots x_n$, $\delta_x(y_1 \cdots y_n)$ fica indeterminada.

Uma função nestas condições é, porém, incompatível com uma relação de normalização

$$(3) \qquad \int_{R^n} \delta_x(y_1 \cdots y_n)\, dy_1 \cdots dy_n = 1.$$

No entanto, se tomarmos (2) e (3) como equações definidoras de um novo tipo de função, à qual ainda sejam aplicáveis as regras ordinárias do cálculo com funções, deduz-se, de (2),

$$(4) \qquad \int_{R^n} (\psi(x) - \psi(y))\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n = 0,$$

donde

$$\int_{R^n} \psi(x)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n = \int_{R^n} \psi(y)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n$$

ou finalmente

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{R^n} \psi(y)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n,$$

por força de (3).

E esta expressão de $\psi(x)$ identifica os dois valores

$$|\psi(x)|^2 \quad \text{e} \quad \left| \int_{R^n} \psi(y)\, \delta_x(y)\, dy_1 \cdots dy_n \right|^2$$

da densidade de probabilidade, de acordo com os princípios gerais da Mecânica Quântica.

Ora, se é certo que nenhum matemático legitimará a dedução de (5), pois nenhuma *verdadeira função* satisfaz a (2) e (3), de todos é sabido que a pseudo função $\delta_x(y)$, introduzida por Dirac, presta grandes serviços em diferentes domínios da Física Matemática.

Este facto, ao lado de muitos outros no campo do cálculo operacional[2], abre uma nova crise no conceito de função e, assim, surge a questão de saber como vencer essa crise.

Antes de responder a essa interrogação, vamos, porém, considerar, à parte, a igualdade

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{R^n} \delta_x(y)\, \psi(y)\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n,$$

para demonstrar que não existe função alguma que lhe satisfaça.

Para isso é necessário começar por definir a família Ψ das funções ψ que figuram em (5). Ora, como do ponto de vista da Física, nos interessam apenas

(1) Consultar qualquer obra de Mecânica Quântica.

(2) Consultar L. Schwartz — *Théorie des Distributions*, págs. 5-6, Tome I, Act. Sc. Ind., Hermann — Paris, 1950.

aquelas que têm norma, $\int_{R^n} |\psi|^2 dy_1 \cdots dy_n$, finita, vamos obrigá-las às duas condições: 1) serem contínuas sobre todo o espaço R^n; 2) serem nulas no exterior de um conjunto compacto.

O teorema que pretendemos demonstrar, formula-se, pois, nestes termos: *não existe função*, $\delta_x(y)$, *que verifique* (5) *sendo* $\psi \in \Psi$.

Se exigirmos que $\delta_x(y)$ seja contínua sobre todo R^n, a demonstração pode fazer-se do seguinte modo [3].

Raciocinando, por comodidade de notação, em R^1, admitamos, por absurdo, que existe uma tal função $f(y)$. De duas uma: ou $f(y) \equiv 0$ ou há, pelo menos, um ponto $y_0 \neq x$ no qual $f(y_0) \neq 0$. Na primeira hipótese temos

$$\int_{R^1} f(y)\,\psi(y)\,dy = 0 \quad \text{para } \psi \text{ qualquer,}$$

enquanto que nós podemos arranjar uma função ψ, tal que $\psi(x) \neq 0$. Numa palavra — é impossível satisfazer a (5).

Na segunda hipótese, construamos um intervalo $[a, b]$ de modo que $c \in [a, b]$, $x \notin [a, b]$, e $f(y)$ tenha em $[a, b]$ ímfimo e supremo do mesmo sinal.

Tomando $\psi(y)$, assim definida

$$\begin{aligned} &\psi(y) = 0 && y \leqslant a \\ &\psi(y) = (y-a)^2(y-b)^2 && a \leqslant y \leqslant b \\ &\psi(y) = 0 && b \leqslant y \end{aligned}$$

vem

$$0 = \psi(x) \neq \int_{R^1} \psi(y)\,f(y)\,dy = \int_a^b (y-a^2)(y-b)^2 f(y)\,dy,$$

donde a impossibilidade de (5).

Repare-se, de resto, em que o fulcro da dedução anterior está no seguinte: se $f(y)$ é contínua num ponto $y_0 \in \mathrm{R}^n$ relativamente a R^n, e se $f(y_0) \neq 0$, existe um intervalo de R^n contendo y_0 tal que nele $f(y)$ tem um ínfimo e um supremo do mesmo sinal.

Esta demonstração é, pois, aplicável todas as vezes que os pontos de continuidade de $f(y)$ com relação a R^n formam um conjunto tal que o seu complementar tem medida-L nula, como acontece quando $f(y)$ é integrável-Riemann em todo intervalo de R^n.

Demonstra-se ainda fàcilmente a impossibilidade de (5), quando exigimos [4] de $f(y)$ a condição: $f(y)$ *e* $f^2(y)$, *são somáveis* [1] *em todo conjunto compacto de* R^n.

Imaginemos, por exemplo, que $n=1$ e tomemos as funções

$$\psi_m(y) = \operatorname{sen}(2m+1)\,y \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$$
$$\psi_m(y) = 0 \quad , \quad y \leqslant 0 \quad \text{e} \quad 2\pi \leqslant y.$$

Supondo que $x = \pi/2$, terá de ser

$$\psi_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{R^1} \psi_m(y)\,f(y)\,dy$$

ou seja

$$(-1)^m = \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(2m+1)\,y]\,f(y)\,dy, \quad m = 0, 1, \cdots$$

Ora, como

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2p+1)\,y \cdot \operatorname{sen}(2q+1)\,y \cdot dy = 0, \quad p \neq p,$$

temos [5]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(2m+1)\,y \cdot f(y)\,dy\right]^2}{\pi^2} \leqslant \int_0^{2\pi} f^2(y)\,dy$$

ou

$$\int_0^{2\pi} f^2(y)\,dy \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2},$$

o que é absurdo.

Posto isto, vamos dar uma demonstração *absolutamente geral da impossibilidade de*

$$(5) \qquad \psi(x) = \int_{R^n} \psi(y)\,f(y)\,dy,$$

quando ψ *é qualquer função de* Ψ *e* $f(y)$ *uma função determinada, somável em todo compacto* [6] *de* R^n.

Começamos por recordar o

Teorema de Urysohn [2]. *Dado um conjunto fechado* F *de* R^n *contido num conjunto aberto* G, *é sempre possível construir uma função contínua sobre todo* R^n *tal que*

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = 1 && , \ x \in F \\ &\varphi(x) = 0 && , \ x \in R^n - G \\ &0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 && , \ x \in G - F. \end{aligned}$$

---

(3) E. Goursat — *Cours d'Analyse Mathématique*, Tome III, 1923, págs. 545-546.

(4) Digo exigimos porque a somabilidade de f num compacto, K, não implica necessàriamente a somabilidade de f^2. Basta considerar a função $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ no compacto $[0, 1]$. Na verdade $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}$ é finito, ao contrário de $\int_0^1 \frac{dy}{y}$.

(5) É a desigualdade de Bessel, que se obtém desenvolvendo

$$\int_0^{2\pi} [f(y) - \Sigma\, a_m \operatorname{sen}(2m+1)\,y]^2\,dy \geqq 0,$$

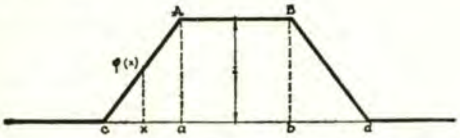
com

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \operatorname{sen}(2m+1\ y\,dy.$$

(6) Por outras palavras, vamos demonstrar que o *operador* ou *tranformação linear* $A(\psi) = \psi(x)$, *x fixo*, $\psi \in \Psi$, *não é redutível ao integral* $\int_{R^n} \psi(y)\,f(y)\,dy$, no qual f representa um função somável em todo compacto de R^n.

Vamos fazer a demonstração na hipótese particular de se tratar de R^1, mas devemos desde já acentuar que o teorema, válido em R^n, se estende a espaços muito mais gerais.

Suponhamos, então, para facilidade de representação geométrica, que F é o intervalo fechado $[a, b]$ e G o intervalo aberto (c, d), de tal modo que $c < a < b < d$.



Como mostra a figura, o traço indefinido a cheio corresponde a uma solução do problema.

Ora, dos triângulos semelhantes caA e $cx\varphi(x)$, tira-se

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{1} = \frac{\overline{cx}}{\overline{ca}} = \frac{\rho(x, R^1 - (c, d))}{\rho(x, R^1 - (c, d)) + \rho(x, [a, b])},$$

designando por $\rho(x, M)$ a distância[7] do ponto x ao conjunto M.

No caso de F e G, $F \subset G$, serem conjuntos de R^n,

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, R^n - G)}{\rho(x, R^n - G) + \rho(x, F)},$$

como se verifica imediatamente.

Passemos agora à demonstração da impossibilidade de (5). Tomemos um intervalo fechado K e escrevamos o seu interior como soma de uma infinidade numerável de intervalos fechados sem pontos interiores comuns:

$$i(K) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j \cdot$$

Como $I_n = \sum_{j=1}^{n} K_j$, que é um conjunto fechado, está contido em $i(K)$, que é um conjunto aberto, podemos aplicar o teorema de Urysohn, construindo uma função $\psi_n \in \Psi$, tal que

$$\begin{array}{ll} \psi_n(x) = 1 & x \in I_n \\ \psi_n(x) = 0 & x \in R^n - i(K) \\ 0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant 1 & x \in i(K) - I_n \end{array}$$

Ora, introduzindo ψ_n em (5), vem

$$\psi_n(0) = \int_{i(K)} f(x)\, \psi_n(x)\, dx$$

$$= \int_{I_n} f(x)\, dx + \int_{i(K)-I_n} \psi_n(x) f(x)\, dx$$

visto $f(x)\, \psi_n(x)$ ser somável em $i(K)$ e coincidir com $f(x)$ em I_n.

Mas, como a medida-L de $i(K) - I_n$ tende para zero com[8] $\frac{1}{n}$, tem-se

$$\lim_n \psi_n(0) = \int_{i(K)} f(x)\, dx .$$

Agora, dois casos se podem apresentar: a origem, 0, pertence a $i(K)$; a origem, 0, é exterior a $i(K)$.

No primeiro caso, também pertence a I_n para n suficientemente grande e daí resulta que

$$1 = \int_{i(K)} f(x)\, dx,$$

pois $\psi_n = 1$ para $x \in I_n$.

No segundo $0 \in R_n - i(K)$ e, portanto, $\psi_n(0) = 0$, donde

$$0 = \int_{i(K)} f(x)\, dx .$$

Obtidos estes resultados, tomemos um intervalo K que contenha a origem no interior e escolhamos depois os K_j de maneira que $0 \notin i(K_j)$, j qualquer, como é sempre possível.

Teremos, então,

$$1 = \int_{i(K)} (fx)\, dx = \sum_j \int_{K_j} f(x)\, dx =$$

$$= \sum_j \int_{i(K_j)} f(x)\, dx = 0,$$

e este absurdo mostra que não pode existir função $f(x)$ nas condições enunciadas[3].

(Continua)

NOTAS

[1] Função somável num conjunto é aquela, que tem integral-L finito nesse conjunto.

[2] O teorema de Urysohn é válido em espaços muito mais gerais (consultar, por exemplo P. Alexandroff und H. Hopf — *Topologie*, erster Band, pp. 73-78, Berlin, 1935).

[3] Dada uma forma linear contínua como é, por por exemplo, $A(\psi) = \psi(x)$, em que ψ é uma função contínua dum intervalo fixo $[a, b]$, e x um ponto determinado de $[a, b]$, Hadamard demonstrou que se pode sempre escrever $A(\psi) = \lim_n \int_a^b K_n(y)\, \psi(y)\, dy$, sendo $K_n(y)$ uma função contínua (consultar *C. R. Acad. Sc.* Paris, 9 de Fev.º 1903). Mais tarde F. Riesz, demonstrou que $A(\psi) = \int_a^b K(y)\, d\alpha(y)$, sendo $\alpha(y)$ uma função de variação total limitada (consultar *C. R. Acad. Sc.*, Paris, **149**, p. 974).

---

[7] O ínfimo das distâncias de x aos pontos de M.

[8] ψ_n é não-negativa e não excede 1, portanto de valor inferior a um número independente de n.

Filósofos e Matemáticos

por ***José Sebastião e Silva***

Vem já de longe o desentendimento entre matemáticos e filósofos. É certo que, em certos momentos da história, a matemática e a filosofia se têm dado as mãos amigàvelmente, em perfeita colaboração: basta lembrar aquele dístico afixado à porta da academia de Platão: «*Não entre ninguém que não saiba geometria*».

Descartes e Leibniz, os dois grandes expoentes do racionalismo científico, foram ao mesmo tempo matemáticos e filósofos. «*Les mathématiciens ont autant besoin d'être philosophes que les philosophes ont besoin d'être mathématiciens*» — afirma Leibniz, numa carta a Malebranche.

Mas estes casos são apenas excepções.

Já Galileu se insurgia contra os filósofos adversários da ciência, interpelando-os em termos de fina ironia: «*di grazia cessino di essere così aspri nimici della geometria... credevo che non si potesse essere tanto nimico di persona non conosciuta*» («por favor, deixem de ser tão ásperos inimigos da geometria... eu não supunha que se pudesse ser tão inimigo de pessoa não conhecida»).

De vez em quando, há uma esperança de reconciliação. No prefácio à obra de Lusin sobre conjuntos analíticos, observa Lebesgue:

«*Après les premiers grands progrès de la théorie des ensembles, Philosophes et Mathématiciens crurent le moment venu de se tendre la main au dessus du large fossé qui les sépare. La conversation qui s'engagea ressembla, dès l'abord, au jeu des propos interrompus; ce n'était que l'affaire d'un moment, croyait-on, un effort encore et l'on allait se comprendre. Mais Zénon d'Élée et le sorite du menteur furent invoqués*». E logo a seguir: «*Quand j'étais étudiant, le café servi nous abordions volontiers les idées générales: la discussion s'échauffait et semblait devoir être sans fin, lorsque l'un de nous s'écriait: «D'abord, toi, est-ce que tu existes? Je dis toi pour la commodité, mais moi seul existe... Alors nous comprenions qu'il fallait aller travailler et nous nous séparions jusqu'au lendemain*».

O dissídio pode dizer-se que se tornou grave a partir de Hegel, com todos os metafísicos nebulosos que seguiram o mesmo rumo: os idealistas românticos, poetas da Ideia Confusa. A pouca simpatia de Hegel pela matemática (que faz pensar num complexo de inferioridade) corresponde nele a uma hipertrofia de certas tendências do espírito em prejuizo de outras. Génio impetuoso e desigual, que não sofria um só instante a disciplina clarificadora do silogismo, Hegel está bem longe do ideal cartesiano das ideias claras e distintas («*Quand il s'agit de questions transcendentes, soyez transcendentalement clair*»). Depois, entre os epígones, esta aversão à matemática torna-se uma regra de bom-tom, que já não convence pela sinceridade. É o que se observa, por exemplo, em Benedetto Croce, o famoso filósofo italiano que tão profunda influência tem exercido dentro e fora da Itália. Vale a pena folhear a «Lógica» de Croce, não só para constatar a sua dificuldade em discorrer com lógica, mas ainda para ver como são ali tratadas as ciências exactas: para ele a matemática, a física, etc., seriam apenas um jogo mecânico de fórmulas e de regras, certamente útil, mas que nada teria que ver com a actividade criadora do espírito. Segundo Croce (e nisto ele está em oposição a Hegel) os conceitos empíricos e os conceitos abstractos da matemática seriam apenas «pseudoconceitos», inteiramente distintos dos «conceitos puros» ou verdadeiros conceitos. Em vão Federigo Enriques, o conhecido geómetra e pensador, lhe pediu exemplos de conceitos puros; Croce limita-se a três ou quatro exemplos vagos, sempre os mesmos, que nos deixam perplexos a olhar para as nuvens: o conceito de qualidade, o conceito de beleza, o conceito de finalidade, o Conceito de conceito (precisamente os mais abstractos entre todos os conceitos abstractos...). A polémica entre Enriques e Croce (aí por volta de 1911) dá-nos bem a medida da divergência entre os dois tipos de mentalidade.

O que acontece geralmente nestes divérbios é que o cientista parece mais próximo do senso-comum: a sua reacção perante as excentricidades de certos filósofos é tanto ou mais vincada do que a do homem da rua.

O mais curioso ainda é que, quando o leigo se põe a fazer ciência por conta própria, tende quási sempre a cair no poço da filosofia (e digo «poço», porque, geralmente, é difícil de lá sair). Como exemplo, vem a propósito referir o caso de um general que conheci em Roma, pessoa culta, de convívio agradável, a quem o não ter nada que fazer conduzira às lucubrações matemáticas. Sua ocupação favorita era expurgar a matemática de círculos viciosos. «Na definição — preceituava ele — nunca deve entrar o definido». E até aqui era difícil não lhe dar razão. Porém, uma das definições que tiveram a pouca sorte de cair sob a sua análise foi a de um número primo. Definição impecável à primeira vista: «Diz-se que um número diferente de um é primo, quando só é divisível por si mesmo e pela unidade». Mas observava o general: «Este *si mesmo* o que é senão o número primo — o definido a intervir na definição? Eis aqui um círculo vicioso!» Em seu entender, este e outros erros provinham de uma deficiente fundamentação filosófica da aritmética e, como remédio, propunha uma sua teoria um tanto complicada, em que se fala da tendência que tem o nosso espírito a «granulizar o real». Depois de ter ido bater à porta de vários matemáticos, tornou a casa de mau humor e acabou por publicar as suas reflexões numa revista filosófica, com um preâmbulo conceituoso que era uma tunda mestra nos matemáticos em geral. Creio que a partir de então se consagrou inteiramente à filosofia.

De modo nenhum eu pretendo insinuar que a obra dos metafísicos românticos tenha sido inútil: a reacção ao matematismo — ao racionalismo científico na sua forma extrema — tornou-se inevitável, e salutar para a própria ciência, principalmente depois do novo rumo que tomou a física. Num momento de exaltação poética, Laplace teve esta frase que havia de ficar célebre: «Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si, d'ailleurs, elle était assez vaste pour soumettre ces donnés à l'analyse, elle embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux». Mas hoje sabemos quanto há de exagerado nesta concepção mecanicista. De resto, já nos meios cartesianos a ideia de conseguir uma descrição do mecanismo do mundo era tida por simples miragem; dizia Pascal: «Il faut dire en gros cela se fait par figure et mouvements, car cela est vrai; mais dire quels et composer la machine, cela est ridicule...»

Temos aqui de concordar com os intuicionistas: o universo não é apenas máquina — é também vida, é também evolução; não é apenas causalidade, é também finalidade. Ao estudar o mundo empírico, o homem esqueceu-se dum pormenor essencial, irredutível a formas matemáticas — que é *ele mesmo, homem*, com tudo o que nele se contém de infinito. Não se mecaniza a vida, não se logifica o sentimento, não se automatiza o espírito livre e criador. Não se resolvem problemas sentimentais por meio de equações, e ainda bem que tal não é possível.

Mas é preciso também não cair no extremo oposto: o anti-intelectualismo, o irracionalismo cego e desenfreado!

Através dos séculos se vem observando esta oscilação entre os dois polos — *racionalismo* e *intuicionismo (ou empirismo)*. Já nos bons tempos helénicos encontramos, de um lado, Heraclito (o Confuso) e os sofistas; do outro lado, os pitagóricos, os eleatas, Demócrito, Platão. Dizem os empiristas: o mundo que nós vemos é sempre diverso, sempre em movimento, sempre em evolução; enquanto a ciência pretende dar-nos dele uma imagem permanente e estável. Respondem os eleatas: mudança, movimento, o nascer e o morrer — tudo aparência, tudo ilusão; só o que é estável existe, e, se os seres particulares se transformam, o universo, como um todo, é imóvel, regido por leis eternas e imutáveis. A frase tantas vezes citada de Heraclito «Não nos banhamos duas vezes no mesmo rio» tornou-se como que uma divisa do empirismo militante. E é delicioso ouvir Platão queixar-se dos sofistas pela boca de um dos seus personagens: «E com efeito, ó Sócrates, discorrer destas doutrinas heracliteanas... é coisa mais difícil do que discorrer com pessoas que tenham sido mordidas pela tarântula. Realmente estes homens, segundo os seus escritos, estão em contínuo movimento; e parar num assunto e numa pergunta, e quietamente perguntar e responder cada um por sua vez, não lhes é possível de nenhum modo... Ora pois, se tu a algum deles perguntas alguma coisa, ei-lo que tira como que duma aljava certas suas palavrinhas enigmáticas e tas dispara como flechas; e se procuras que te dê conta do que disse, já és atingido com um outro e novo jogo de palavras, e assim não chegas a nenhuma conclusão com nenhum deles. E nem sequer eles concluem nada entre si; porque a coisa de que se ocupam com mais cuidado é não deixar que nada nos seus discursos e nos seus ânimos seja sólido e seguro, considerando, eu creio, que isso mesmo que é seguro é estável; e a esta estabilidade eles fazem guerra de todos os modos, e de todos os lugares a escorraçam como podem». Este diálogo entre Teodoro e Sócrates (no Teetéto) conserva uma actualidade impressionante.

Na Idade Média a luta reacende-se vivacíssima entre nominalistas e realistas (os empiristas e racionalistas de então), terminando com o triunfo do racionalismo metafísico da escolástica, o qual por sua vez irá confluir no racionalismo cartesiano.

Na Idade Moderna, vamos encontrar o racionalismo de Descartes, Leibniz e Spinoza, frente a frente com o empirismo de Bacon, Locke, Berkeley, Hume. (O cartesianismo do espírito francês e o empirismo anglo-saxónico são dois traços dominantes da cultura ocidental). Um supremo esforço de conciliação é realizado no criticismo de Kant, ao qual porém se segue a onda avassaladora do idealismo germânico (o chamado «racionalismo hegeliano» é apenas um exemplo do abuso que se pode fazer de certos termos...).

Afinal, trata-se de duas tendências *complementares* da nossa mente, com supremacia duma ou de outra, conforme os indivíduos e conforme as circunstâncias. Do equilíbrio de ambas, da sua acção alternada e recíproca, resultará a fecundidade do pensamento.

Hoje, neste mundo atormentado em que tudo parece oscilar, assistimos à erupção do intuicionismo sob as mais variadas vestes: empirismo, pragmatismo, contingentismo, evolucionismo, historicismo, esteticismo, voluntarismo, surrealismo, existencialismo, etc., etc. (porque, neste campo, os «ismos» dividem-se e sub-dividem-se de maneira alucinante, repelindo-se mùtuamente). Até no âmbito de matemática — a cidadela da *razão racionante* — vemos introduzir-se o intuicionismo, com grande alarido, determinando a divisão entre matemáticos platónicos e matemáticos empiristas.

Mas entretanto, por obra de matemáticos — longe do bulício do mundo, serenamente, sem altas pretenções — tem-se vindo a desenvolver uma actividade filosófica que se liga directamente à tradição de Leibniz. Refiro-me à lógica matemática ou logística, cujos iniciadores principais foram Booie, Frege, Peano e que atinge a sua maioridade no obra monumental de Whitehead e Russell, «Principia Mathematica». A lógica matemática é, até certo ponto, a lógica formal de Aristóteles rejuvenescida e reabilitada; mas é muito mais do que isso, porque enriquecida com alguns séculos de experiência de análise algébrica e infinitesimal, que a tornam o mais poderoso instrumento até hoje conhecido para a análise do pensamento abstracto. Quando se instituiu o simbolismo algébrico, que põe a nu toda a mecânica dum certo tipo de raciocínio, surgiu a ideia de o generalizar, criando uma linguagem simbólica para o uso de toda a ciência. A ideia já se tinha de certo modo apresentado a Ramón Lull, místico catalão do século XIII, que a expôs na sua «Ars compendiosa inveniendi veritatem»; mais tarde, a mesma ideia tornou-se um dos motivos predilectos das meditações de Leibniz; mas os seus resultados não foram apreciáveis: estava-se ainda nos primórdios da álgebra. O sonho duma língua científica universal não se realizou como o concebera Leibniz – foi mesmo reconhecido impossível; mas que imensos, insuspeitados horizontes se nos abriram com a nova lógica! A princípio. os logísticos foram alvo de críticas sarcásticas, principalmente por parte de H. Poincaré. Houve, sem dúvida, exageros e ingenuidades que justificaram a troça; mas não esqueçamos, por outro lado, que Poincaré recebeu muito a influência de seu cunhado, Emílio Boutroux, o filósofo contigentista que precedeu imediatamente Bergson na estrada do intuicionismo. Hoje a lógica simbólica ri-se do anátema lançado pelo grande matemático e pensador, que já nas «Dernières Pensées» parece inclinado a abrandar a ironia. Certamente, a nova lógica tem um seu domínio limitado, e pretender sair dele será sempre pouco sensato. Mas, pelo menos no que se refere à matemática, a sua utilidade está hoje fora de dúvida: a sua intervenção em análise funcional, álgebra abstracta, etc. tornou-se fundamental. Um dos seus principais cultores, David Hilbert, foi um dos maiores matemáticos dos últimos tempos. A nova lógica oferece ao matemático uma férrea disciplina mental que o impede de cair em divagações como aquela do general atrás mencionado.

Mas nunca é demais repetir: a matemática não é tudo, está muito longe de ser tudo. O matemático deve sempre evitar o perigo da deformação profissional, que pode ser nociva para a própria actividade científica e já fazia dizer aos antigos: «mathematicus purus, purus asinus». Nas horas vagas, o seu espírito deve orientar-se para outros domínios: procurar na arte, na literatura, na filosofia, um equilíbrio que foi perturbado (sem cair num diletantismo dispersivo, outro perigo a evitar!). E ter presente o conselho de David Hume no seu ensaio sobre o intelecto humano:

«Sê um filósofo, mas, no meio de toda a tua filosofia, sê ainda e sempre um homem».

N. R. — Artigo publicado em *Ciência*, Revista dos Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa, Ano III — N.º 3, Janeiro-Março de 1950.

Problèmes de dépouillements — II

Problèmes intéressant un nombre non limité de candidats

par Pierre Dufresne

Jusqu'ici nous n'avons étudié que des problèmes de dépouillements intéressant deux candidats. Nous passons maintenant à l'étude de deux problèmes concernant un nombre non limité de candidats.

Grâce à l'appui qui m'avait été donné par Mr Darmois et par M.r Dugué j'avais pu faire paraître l'énoncé du premier problème et une démonstration partielle dans le *Bulletin Mathématique des Facultés des Sciences et des Grandes Écoles* de Septembre-Octobre, 1938. La même revue publiait en Février 1939 sous la signature de M.r R. Lagrange une démonstration générale de la formule. C'est une nouvelle démonstration très différente que je donnerai ici. Le second problème est inédit.

Pour la résolution de ces problèmes j'utilise des relations mathématiques.

Relations Mathématiques

Première relation

Soit une droite et sur cette droite un certain nombre de points que nous désignerons par les lettres de

$$\overline{\quad A \qquad B \qquad C \qquad D \qquad E \qquad F \qquad G \quad}$$

l'alphabet A, B, C, etc., le point le plus à gauche étant le point A, le point suivant le point B, etc.

Les segments $AB, AC, AD, BC, BD, CD \cdots$ etc. représentent des nombres entre lesquels existent des relations: $AC = AB + BC$, $AD = AB + BC + CD$, $BD = BC + CD \cdots$ etc.

Ces nombres sont supposés positifs et nous les désignerons indifféremment par AB ou par BA, par BC ou par $CB \cdots$ etc.

Nous aurons à considérer les produits des nombres désignés par des segments ayant une extrémité commune par exemple le produit $AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE \cdot AF$. Dans un but de simplification nous désignerons simplement par $AB \cdots AF$ le produit que nous venons d'écrire et d'une manière analogue les autres produits.

$KA \cdots KN$ désignera ainsi le produit $KA \cdot KB \cdot KC \cdots KN$ de tous les nombres représentés par des segments limités par le point K d'une part et d'autre part par un des points $A, B, C \cdots N$ (le point K étant exclu).

Nous désignerons par $a, b, c, d \cdots$ etc. les rangs respectifs des points $A, B, C, D \cdots$ etc. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, etc.

Nous nous proposons de démontrer que:

$$\frac{1}{AB \cdots AN} - \frac{1}{BA \cdots BN} + \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

N désignant une lettre d'un rang quelconque.

Nous emploierons uns méthode de récurrence. La relation est exacte dans le cas de deux nombres. En effet elle s'écrit alors $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BA} = 0$ ou $AB = BA$.

Elle est encore exacte dans le cas de trois nombres. Elle s'écrit alors

$$\frac{1}{AB \cdot AC} - \frac{1}{BA \cdot BC} + \frac{1}{CA \cdot CB} = 0$$

$$\text{ou } AC = AB + BC$$

Nous disons qu'elle est exacte dans le cas de n nombres si elle est exacte dans le cas de m nombres ($n = m + 1$).

Remarquons tout d'abord que

$$\frac{1}{AB \cdots AN} = \frac{1}{AN} \cdot \frac{1}{AB \cdots AM}$$

$$\frac{1}{BA \cdots BN} = \frac{1}{AN}\left[\frac{AB}{BA \cdots BN} + \frac{BN}{BA \cdots BN}\right] = \frac{1}{AN}\left[\frac{1}{BC \cdots BN} + \frac{1}{BA \cdots BM}\right]$$

$$\frac{1}{CA \cdots CN} = \frac{1}{AN}\left[\frac{AC}{CA \cdots CN} + \frac{CN}{CA \cdots CN}\right] = \frac{1}{AN}\left[\frac{1}{CB \cdots CN} + \frac{1}{CA \cdots CM}\right]$$

$$\frac{1}{KA \cdots KN} = \frac{1}{AN}\left[\frac{AK}{KA \cdots KN} + \frac{KN}{KA \cdots KN}\right] = \frac{1}{AN}\left[\frac{1}{KB \cdots KN} + \frac{1}{KA \cdots KM}\right]$$

$$\frac{1}{NA \cdots NM} = \frac{1}{AN} \, \frac{1}{NB \cdots NM}$$

D'où il résulte que:

$$\frac{1}{AB \cdots AN} - \frac{1}{BA \cdots BN} + \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NA \cdots NM} =$$

$$= \frac{1}{AN}\left[\frac{1}{AB \cdots AM} - \frac{1}{BA \cdots BM} + \frac{1}{CA \cdots CM} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KM} + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{1}{MA \cdots ML}\right] + \frac{1}{AN}\left[-\frac{1}{BC \cdots BN} + \frac{1}{CB \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KB \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NB \cdots NM}\right]$$

et si les deux suites entre parenthèses sont nulles la première l'est également, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I

L'égalité
$$\frac{1}{AB \cdots AN} - \frac{1}{BA \cdots BN} + \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

obtenue en supposant que AB, AC, $BA \cdots$ etc. sont des nombres arithmétiques s'écrirait en les considérant comme des nombres algébriques, c'est à dire en posant $BA = -AB$, etc.

$$\frac{1}{AB \cdots AN} + \frac{1}{BA \cdots BN} + \cdots + \frac{1}{KA \cdots KN} + \\ + \cdots + \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

En effet le dénominateur du k.$^{\text{ème}}$ terme: $KA \cdot KB \cdot \ldots KN$ est le produit de $(k-1)$ nombres négatifs à savoir KA, $KB \cdots KJ$ et de $(n-k)$ nombres positifs $KL, \cdots KN$.

Remarque II

L'égalité $$\frac{1}{AB \cdot AC \cdot AD} - \frac{1}{BA \cdot BC \cdot BD} + \\ + \frac{1}{CA \cdot CB \cdot CD} - \frac{1}{DA \cdot DB \cdot DC} = 0$$

peut s'écrire:

$$AB \cdot AC \cdot BC - AB \cdot AD \cdot BD + AC \cdot AD \cdot CD - \\ - BC \cdot BD \cdot CD = 0$$

$AB \cdot AC \cdot BC =$ Produit de tous les arrangements possibles de trois lettres A, B, C prises 2 à 2

$AB \cdot AD \cdot BD =$ idem A, B, D » » » »

$AC \cdot AD \cdot CD =$ idem A, C, D » » » »

$BC, BD, CD =$ idem B, C, D » » » »

on établira de même que:

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD - \\ - AB \cdot AC \cdot AE \cdot BC \cdot BE \cdot CE + \\ + AB \cdot AD \cdot AE \cdot BD \cdot BE \cdot CE - \\ - AC \cdot AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE \cdot DE + \\ + BC \cdot BD \cdot BE \cdot CD \cdot CE \cdot DE = 0$$

$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD$ étant le produit de tous les arrangements possibles des quatre lettres A, B, C, D prises 2 à 2

$AB \cdot AC \cdot AE \cdot BC \cdot BE \cdot CE$, idem, idem, A, B, C, E prises 2 à 2

$AB \cdot AD \cdot AE \cdot BD \cdot BE \cdot DE$, idem, idem, A, B, D, E prises 2 à 2

$AC \cdot AD \cdot AE \cdot CD \cdot CE \cdot DE$, idem, idem, A, C, D, E prises 2 à 2

$BC \cdot BD \cdot BE \cdot CD \cdot CE \cdot DE$, idem, idem, A, B, C, D prises 2 à 2

Deuxième relation

ψ étant un point situé au delà de N je me propose de démontrer que

$$\frac{A\psi}{AB \cdots AN} - \frac{B\psi}{BA \cdots BN} + \frac{C\psi}{CA \cdots CN} - \cdots + \\ + (-1)^{k+1} \frac{K\psi}{KA \ldots KN} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{N\psi}{NA \ldots NM} = 0$$

Remarquons que l'égalité

$$\frac{1}{AB \cdots AM} - \frac{1}{BA \cdots BM} + \frac{1}{CA \cdots CM} - \cdots + \\ + (-1)^{k+1} \frac{1}{KA \cdots KM} + \cdots + (-1)^{m+1} \frac{1}{MA \cdots ML} = 0$$

peut s'écrire de la façon suivante:

$$(1) \qquad AN \frac{1}{AB \cdots AN} - BN \frac{1}{BA \cdots BN} + \\ + CN \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} KN \frac{1}{KA \cdots KN} + \\ + \cdots + (-1)^{m+1} MN \frac{1}{MA \cdots MN} = 0$$

d'autre part

$$(2) \qquad N\psi \frac{1}{AB \cdots AN} - N\psi \frac{1}{BA \cdots BN} + \\ + N\psi \frac{1}{CA \cdots CN} - \cdots + (-1)^{k+1} N\psi \frac{1}{KA \cdots KN} + \\ + \cdots + (-1)^{m+1} N\psi \frac{1}{MA \cdots MN} + \\ + (-1)^{n+1} N\psi \frac{1}{NA \cdots NM} = 0$$

et en additionnant membre à membre ces deux égalités (1) et (2) on obtient l'égalité cherchée.

Si l'on pose $A\psi = \alpha$, $B\psi = \beta$, $C\psi = \gamma, \cdots$ $N\psi = \nu$ c'est à dire $AB = BA = (\alpha - \beta)$ $AC = CA = (\alpha - \gamma)$ $AD = DA = (\alpha - \delta) \cdots$ etc, l'égalité s'écrit

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta) \cdots (\alpha-\nu)} - \frac{\beta}{(\beta-\alpha) \cdots (\beta-\nu)} + \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha) \cdots (\gamma-\nu)} + \\ + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{k}{(k-\alpha) \cdots (k-\nu)} + \\ + \cdots (-1)^{n+1} \frac{\nu}{(\nu-\alpha) \cdots (\nu-\mu)} = 0$$

À noter que cette équation par ailleurs absolument générale est inexacte lorsque le premier membre se réduit à deux termes; la différence $\frac{A\psi}{AB} - \frac{B\psi}{BA}$ qui s'écrit aussi $\frac{\alpha}{AB} - \frac{\beta}{BA}$ n'est nulle que dans le cas limite où les deux points A et B sont confondus.

Remarque I.

Considérons maintenant $AB, AC, BA, \cdots$ etc. comme des nombres algébriques et appelons ψ un point situé n'importe où sur la droite c'est à dire aussi bien à gauche du point A qu'entre le point A et le point N ou au delà du point N.

Je me propose de démontrer que:

$$\frac{A\psi}{AB\cdots AN}+\frac{B\psi}{BA\cdots BN}+\frac{C\psi}{CA\cdots CN}+\cdots+$$
$$+\frac{K\psi}{KA\cdots KN}+\cdots+\frac{N\psi}{NA\cdots NM}=0$$

Remarquons que l'égalité

$$\frac{1}{AB\cdots AM}+\frac{1}{BA\cdots BM}+\frac{1}{CA\cdots CM}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{KA\cdots KM}+\cdots+\frac{1}{MA\cdots ML}=0$$

peut s'écrire de la façon suivante:

$$AN\frac{1}{AB\cdots AN}+BN\frac{1}{BA\cdots BN}CN\frac{1}{CA\cdots CN}+$$
$$+\cdots+KN\frac{1}{KA\cdots KN}+\cdots+MN\frac{1}{MA\cdots MN}=0$$

d'autre part

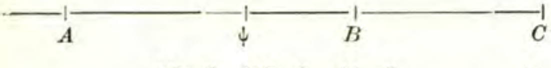
$$N\psi\frac{1}{AB\cdots AN}+N\psi\frac{1}{BA\cdots BN}+N\psi\frac{1}{CA\cdots CN}+$$
$$+\cdots+N\psi\frac{1}{KA\cdots KN}+\cdots+N\psi\frac{1}{MA\cdots MN}+$$
$$+N\psi\frac{1}{NA\cdots NM}=0$$

et en additionnant membre à membre ces deux égalités on obtient l'égalité cherchée.

Si l'on pose $A\psi=\alpha$, $B\psi=\beta$, $C\psi=\gamma\cdots N\psi=\nu$ c'est à dire $AB=\alpha-\beta$, $AC=\alpha-\gamma$, $BA=\beta-\alpha$, $CA=\gamma-\alpha\cdots$ etc. l'équation devient:

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)\cdots(\alpha-\nu)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)\cdots(\beta-\nu)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)\cdots(\gamma-\nu)}+$$
$$+\cdots+\frac{k}{(k-\alpha)\cdots(k-\nu)}+\cdots+\frac{\nu}{(\nu-\alpha)\cdots(\nu-\mu)}=0$$

Exemple



$AB=3\quad BC=2\quad A\psi=2$ ou

$\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=-3$, $(\alpha-\beta)=3$, $(\alpha-\gamma)=5$, $(\beta-\gamma)=2$

l'équation

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0$$

devient: $$\frac{2}{15}+\frac{1}{6}-\frac{3}{10}=0$$

Premier Problème.

On supose qu'au cours d'une élection des candidats $A, B, C, D\cdots M, N$ aient obtenu des nombres respectifs de suffrages $a, b, c, d, \cdots m, n$.

Je désignerai par:

$\theta=a+b+c+d+\cdots+m+n$ le nombre total des bullettins déposés au nom de l'un quelconque des candidats $A, B, C, D\ldots M, N$, et par

$N_{(a,b,c,d\ldots m,n)}$ le nombre de tous les dépouillements différents possibles de ces θ bulletins.

$$N_{(a,b,c,d\ldots m,n)}=\frac{\theta!}{a!\,b!\,c!\,d!\cdots m!\,n!}$$

Il s'agit de calculer *la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins comptés portant le nom de* A *soit constamment supérieur à celui des bulletins dépouillés portant le nom de* B, *le nombre des bulletins portant le nom de* B *constamment supérieur à celui des bulletins portant le nom de* C ⋯ *le nombre des buletins dépouillés portant le nom de M constamment supérieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* N.

Il est clair que le premier bulletin sorti devra être un bulletin A, à ce moment le nombre des bulletins déposés au nom de B, sera obligatoirement nul et ne pourra donc être supérieur au nombre des bulletins portant le nom de C qui lui même ⋯ quand nous disons que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins sortis portant le nom de B devra être supérieur au nombre des bulletins sortis portant le nom de C nos voulons exprimer d'abord qu'aucun bulletin au nom de C ne devra être dépouillé avant qu'un bulletin au nom de B ne l'ait été, ensuite qu'à partir du moment ou un bulletin au nom de B aura été effectivement dépouillé le nombre des bulletins qui seront comptés au nom de ce candidat sera toujours supérieur au nombre de ceux qui seront comptés au nom du candidat C.

Je désignerai par:

$$P_{(a,b,c,d\ldots m,n)[A>B>C>D>\ldots>M>N]}$$

la probabilité cherchée, et par

$$N_{(a,b,c,d\ldots m,n)[A>B>C>D\ldots>M>N]}$$

le nombre des dépouillements différents possibles des θ bulletins, qui vérifient les conditions énoncées.

Donc:

$$P_{(a,b,c,d\ldots m,n)[A>B>C>D\ldots>M>N]}=$$
$$=\frac{N_{(a,b,c,d\ldots m,n)[A>B>C>D\ldots>M>N]}}{N_{(a,b,c,d\ldots m,n)}}.$$

LEMME. *Si* $a > b > c > \cdots > m > n$

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] =$$
$$= N_{(a-1,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] +$$
$$+ N_{(a,b-1,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] +$$
$$+ N_{(a,b,c-1,\ldots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] +$$
$$+ \cdots$$
$$+ N_{(a,b,c,\cdots(m-1),n)}[A>B>C\cdots>M>N] +$$
$$+ N_{(a,b,c,\cdots m,n-1)}[A>B>C\cdots>M>N] \cdot$$

Démonstration analogue à celle du lemme page 3 (*Gaz. Mat.* n.os 44-45).

THÉORÈME. *Si* $a \geqslant b \geqslant c \geqslant \cdots \geqslant m \geqslant n$ *et* $m \geqslant 1$

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] =$$
$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-m}{a+m}\cdot\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{b-d}{b+d}\cdots$$
$$\cdots\frac{b-m}{b+m}\cdot\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}\cdot$$
$$\cdot\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}\cdot$$

Si $a<b$, ou $b<c$, ou $c<d\cdots$ ou $m<n$ il est clair que $N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N]=0$. La formule conduirait à des résultats pouvant être négatifs et toujours absurdes.

Si $a=b$, ou $b=c$, ou $c=d,\cdots$ ou $m=n$, il est encore clair que $N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N]=0$ mais la formule donne effectivement un résultat nul.

Je passe maintenant à la démonstration générale. J'utiliserai une méthode de récurrence. Je constate que la formule est exacte pour les plus petites valeurs de θ: par exemple pour $\theta=3$ c'est à dire pour $a=3$ et $b=0$ d'une part et d'autre part pour $a=2$, $b=1$, $c=0$. Je me propose de prouver que la formule est encore exacte pour une valeur quelconque θ_1 de θ et pour tous les ensembles possibles de valeurs de $a,b,c,\cdots m,n$ répondant aux conditions $a>b>c\cdots>m>n$ si elle est exacte pour $\theta=\theta_1-1$ et pour tous les ensembles possibles de valeurs de a, b, $c,\cdots m,n$ répondant aux conditions $a\geqslant b\geqslant c\geqslant\cdots\geqslant m\geqslant n$.

En vertu du lemme j'ai le droit d'écrire

$$N_{(a,b,c\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] =$$
$$= N_{(a-1),b,c,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] +$$
$$+ N_{(a,b-1,c,\ldots m,n)}[A>B>C\ldots>M>N] +$$
$$+ N_{(a,b,c-1,\cdots m,n)}[A>B>C>\cdots>M>N] +$$
$$+ \cdots$$
$$+ N_{(a,b,c,\cdots m-1,n)}[A>B>C\cdots>M>N] +$$
$$+ N_{(a,b,c,\cdots m,n-1)}[A>B>C>\cdots>M>N]\cdot$$

Et en supposant le théorème exact pour $\theta=\theta_1-1$

$$N_{(a,b,c\ldots m,n)}[A>B>C>\ldots>M>N] =$$
$$\left[\frac{a-b-1}{a+b-1}\cdot\frac{a-c-1}{a+c-1}\cdots\frac{a-n-1}{a+n-1}\cdot\frac{b-c}{b+c}\,\frac{b-d}{b+d}\cdots\right.$$
$$\cdots\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots$$
$$\left.\cdots\frac{m-n}{m+u}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{(a-1)!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}+$$
$$+\left[\frac{a-b+1}{a+b-1}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdots\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c-1}{b+c-1}\cdot\frac{b-d-1}{b+d-1}\cdots\right.$$
$$\cdots\frac{b-n-1}{b+n-1}\,\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots$$
$$\left.\cdots\frac{m-n}{m+n}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{a!\,(b-1)!\,c!\cdots m!\,n!}+$$
$$+\left[\frac{a-b}{a+b}\,\frac{a-c+1}{a+c-1}\cdots\frac{a-n}{a+n}\,\frac{b-c+1}{b+c-1}\,\frac{b-d}{b+d}\cdots\right.$$
$$\cdots\frac{b-n}{b+n}\,\frac{c-d-1}{c+d-1}\cdots\frac{c-n-1}{c+n}\cdots$$
$$\left.\cdots\frac{m-n}{m+n}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{a!\,b!\,(c-1)!\cdots m!\,n!}+$$
$$+\cdots$$
$$+\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdots\frac{a-m+1}{a+m-1}\cdot\frac{a-n}{a+n}\,\frac{b-c}{b+c}\cdots\right.$$
$$\cdots\frac{b-m+1}{b+m-1}\,\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-m+1}{c+m-1}\,\frac{c-n}{c+n}\cdots$$
$$\left.\cdots\frac{m-n-1}{m+n-1}\right]\frac{(a+b+c+\cdots+n-1)!}{a!\,b!\,c!\cdots(m-1)!\,n!}+$$
$$+\left[\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdots\frac{a-n+1}{a+n-1}\,\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{b-d}{b+d}\cdots\right.$$
$$\cdots\frac{b-n+1}{b+n-1}\,\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n+1}{c+n}\cdots$$
$$\left.\cdots\frac{m-n+1}{m+n-1}\right]\frac{(a+b+c\quad\cdots+n-1)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,(n-1)!}$$

Nous allons chercher à simplifier cette somme. Nous constatons d'abord que:

$$\frac{a-b-1}{a+b-1}=\frac{a-b}{a+b}\left(1-\frac{2b}{(a-b)(a+b-1)}\right)$$

et de même que

$$\frac{a-c-1}{a+c-1}=\frac{a-c}{a+c}\left(1-\frac{2c}{(a-c)(a+c-1)}\right)\qquad\text{etc.}$$

Nous constatons également que

$$\frac{a-b+1}{a+b-1}=\frac{a-b}{a+b}\left(1+\frac{2a}{(a-b)(a+b-1)}\right)$$

et de même que

$$\frac{a-c+1}{a+c-1}=\frac{a-c}{a+c}\left(1+\frac{2a}{(a-c)\,(a+c-1)}\right)\qquad \text{etc.}$$

D'autre part nous posons:

$$\begin{aligned}(a-b)\,(a+b-1)&=AB\\(a-c)\,(a+c-1)&=AC\\(b-c)\,(b+c-1)&=BC\\(a-d)\,(a+d-1)&=AD\\(b-d)\,(b+d-1)&=BD\\&\cdots\text{ etc.}\end{aligned}$$

enfin nous apellons Φ le produit

$$\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-m}{a+m}\cdot\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{b-d}{b+d}\cdots$$
$$\cdots\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}\cdot$$
$$\cdot\frac{(a+b+c+\cdots+m+n-1)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}\,.$$

Finalement nous obtenons:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c\,,\,\cdots\,m\,,\,n)\,[A>B>C\cdots>M>N]}$$
$$=\Bigg[\left(1-\frac{2b}{AB}\right)\left(1-\frac{2c}{AC}\right)\left(1-\frac{2d}{AD}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{2m}{AM}\right)\left(1-\frac{2n}{AN}\right)a+$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AB}\right)\left(1-\frac{2c}{BC}\right)\left(1-\frac{2d}{BD}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{2m}{BM}\right)\left(1-\frac{2n}{BN}\right)b+$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AC}\right)\left(1+\frac{2b}{BC}\right)\left(1-\frac{2d}{CD}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{2m}{CM}\right)\left(1-\frac{2n}{CN}\right)c+$$
$$+\cdots$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AM}\right)\left(1+\frac{2b}{BM}\right)\left(1+\frac{2c}{CM}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1+\frac{2l}{LM}\right)\left(1-\frac{2n}{MN}\right)m+$$
$$+\left(1+\frac{2a}{AN}\right)\left(1+\frac{2b}{BN}\right)\left(1+\frac{2c}{CN}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1+\frac{2l}{LN}\right)\left(1+\frac{2m}{MN}\right)n\Bigg]\Phi\,.$$

Il est facile de démontrer qu'il existe entre les quantités AB, AC, BC, BD, CD, $AD\cdots$ etc. les relations $AC=AB+BC$, $AD=BC+CD$, $AD=AB+$ $+BC+CD\cdots$ etc. il suffit pour cela de vérifier la première relation dont l'exactitude prouve l'exactitude de toutes les autres.

Or l'équation $AC=AB+BC$ exprime que:

$$(a+c-1)\,(a-c)=(b-c)\,(b+c-1)+(a-b)\,(a+b-1)$$

ou que

$$[(a-b)+(b-c)](a+c-1)=(b-c)\,(b+c-1)+$$
$$+(a-b)(a+b-1)$$

ou que

$$(b-c)(a+c-1-b-c+1)=(a-b)\,(a+b-1-a-c+1)$$

ou que

$$(b-c)(a-b)=(a-b)(b-c)\,.$$

Cette remarque étant faite nous constatons que nous pouvons écrire encore:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c\,,\,\cdots\,m\,,\,n)\,[A>B>C>\cdots>M>N]}$$
$$=\Bigg[(a+b+c+\cdots+m+n)+2\,ab\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{AB}\right)+$$
$$+2\,ac\left(\frac{1}{AC}-\frac{1}{AC}\right)+\cdots+2\,an\left(\frac{1}{AN}-\frac{1}{AN}\right)+$$
$$+2\,bc\left(\frac{1}{BC}-\frac{1}{BC}\right)+\cdots+2\,bn\left(\frac{1}{BN}-\frac{1}{BN}\right)+$$
$$+2\,cd\left(\frac{1}{CD}-\frac{1}{CD}\right)+\cdots+2\,cn\left(\frac{1}{CN}-\frac{1}{CN}\right)+$$
$$+\cdots+2\,mn\left(\frac{1}{MN}-\frac{1}{MN}\right)+$$
$$+4\,a\,bc\left(\frac{1}{AB\cdot AC}-\frac{1}{AB\cdot BC}+\frac{1}{AC\cdot BC}\right)+$$
$$+4ab\,d\left(\frac{1}{AB\cdot AD}-\frac{1}{AB\cdot BD}+\frac{1}{AD\cdot DB}\right)+\cdots+$$
$$+4ab\,n\left(\frac{1}{AB\cdot AN}-\frac{1}{AB\cdot BN}+\frac{1}{AN\cdot NB}\right)+\cdots+$$
$$+4\,lm\,n\left(\frac{1}{LM\cdot LN}-\frac{1}{LM\cdot MN}+\frac{1}{LN\cdot NM}\right)+$$
$$+8ab\,cd\left(-\frac{1}{AB\cdot AC\cdot AD}+\frac{1}{AB\cdot BC\cdot BD}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{AC\cdot BC\cdot CD}+\frac{1}{AD\cdot BD\cdot CD}\right)+\cdots+$$
$$+8kl\,mn\left(-\frac{1}{KL\cdot KM\cdot KN}+\frac{1}{KL\cdot LM\cdot LN}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{KM\cdot LM\cdot MN}+\frac{1}{KN\cdot LN\cdot MN}\right)+\cdots+$$
$$+(-1)^n\,2^n\,ab\,c\cdots mn\left(\frac{1}{AB\cdot AC\cdots AN}-\right.$$
$$-\frac{1}{AB\cdot BC\cdots BN}+\frac{1}{AC\cdot BC\cdots CN}-\cdots$$
$$\left.+(-1)^n_1\frac{1}{AN\cdot BN\cdots CN}\right)\Bigg]\Phi$$

et comme toutes les quantités entre parenthèses s'annulent sauf la première

$$N_{(a,\,b,\,c'\,\cdots\,m,\,n)\,[A>B>C\cdots>M>N]}=$$
$$=(a+b+c+\cdots+m+n)\,\Phi=$$
$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdots\frac{b-n}{b+n}\cdot\frac{c-d}{c+d}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdot\frac{d-c}{d+c}\cdot\ \frac{d-n}{d+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}\right)\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME. *Si* $a \geqslant b \geqslant c \cdots \geqslant m \geqslant n$

$$P_{(a,\,b,\,c,\,\cdots\,m,\,n)\,[A>B>C>\cdots>M>N]}=\frac{a-b}{a+b}\cdot$$
$$\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a-d}{a+d}\cdots\frac{a-m}{a+m}\cdot\frac{a-n}{a+n}\cdot\frac{b-c}{b+c}\,\frac{b-d}{b+d}\cdots$$
$$\cdots\frac{b-m}{b+m}\,\frac{b-n}{b+n}\,\frac{c-d}{c+d}\cdots\frac{c-n}{c+n}\cdots\frac{m-n}{m+n}.$$

(continua)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE A TEORIA DAS FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIAVEIS COMPLEXAS

Em 7 de Setembro do corrente teve lugar este colóquio na Universidade de Harvard em Cambridge, Mass, U. S. A.. Foram as seguintes as comunicações apresentadas:

A. Zygmund, Univ. de Chicago — *On the existence of boundary values of functions of several complex variables.*

H. Behnke, Univ. de Münster — *Der Rungesche Satz in der Funktionentheorie einer und mehrerer Veränderlichen.*

S. Bergman, Univ. de Harvard, e M Schiffer, Univ. Hebraica, Jerusalem — *The method of class extension in the theory of functions of several complex variables.*

H. Hopf, Escola Politécnica Federal Suiça, Zürich — *Some remarks on abstract and concrete 4-dimensional Riemann surfaces.*

M. P. Lelong, Univ. de Paris e de Lille — *On the complex singularities of harmonic functions.*

K. Kodaira, Institute for Advanced Study, Princeton. — *On a method of construction of meromorphic functions on compact analytic manifolds.*

G. Springer, Instituto de Tecnologia de Massachussets — *On orthogonalization over the distinguished boundary surface and the corresponding kernel function.*

R. Godement, Univ. de Nancy — *Two problems in group representations connected with complex variables.*

P. R. Garabedian, Univ. de Stanford — *Generalized Laplace equations associated with the kernel function.*

K. Stein, Univ. de Münster — *Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen meherer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellen.*

G. Julia, Univ. de Paris — *Sur les familles de fonctions de plusieurs variables.*

F. Severi, Univ. de Roma — *Un théorème d'unicité, sur la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables qui attend le théorème d'existence associé.*

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

As reuniões do congresso tiveram lugar em Lisboa de 23 a 29 de Outubro, no Instituto Superior Técnico. Ao que já dissemos nos n.os anteriores da nossa revista, relativamente à 1.a secção — Ciências Matemáticas, devemos acrescentar que o discurso inaugural da secção deveria ser pronunciado pelo Prof. Julio Rey Pastor de Buenos Aires que era o Vice-Presidente espanhol da secção. Devido à sua não comparência no Congresso o discurso foi lido pelo Prof. Júlio Palácios, professor da Faculdade de Ciências de Lisboa e director do Centro de Estudos de Física do Instituto para a Alta Cultura.

A Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências publicou um volume de 248 páginas com os resumos das comunicações apresentadas e que foi distribuido aos congressistas. Destas comunicações transcrevemos textualmente os títulos das comunicações enviadas:

1. Victor das Neves — *Solução dos problemas: Trisecção do ângulo. Rectificação da circuuferência. Quadratura do circulo.*

2. Manuel dos Reis — *Sobre fórmulas assintóticas conjecturais relativas a números primos.*

3. António Almeida Costa — *Sobre os nilideais e os ideais quase regulares.*

4. M. T. Antunes — *Os sismógrafos electromagnéticos e o registo conforme dos movimentos do solo.*

5. José Sebastião e Silva — *Sobre a topologia dos espaços funcionais analíticos.*

6. José Ribeiro de Albuquerque — *O teorema de «Baire» sobre os conjuntos.*

7. José Ribeiro de Albuquerque — *A função «aderência» e seus invariantes.*

8. Gustavo de Castro — *Sobre a comparação das variâncias de dois universos normais.*

9. Gustavo de Castro — *Sobre um problema de Fisher.*

10. L. A. Santaló — *Observaciones sobre superficies y poliedrales inscritas.*

11. Arechaga e L. de Letona — *Dos teoremas sobre determinación del número de cifras de un producto ō cociente.*

12. Mischa Cotlar e R. A. Ricabarra — *Sobre la teoria de la integración.*

13. Mariano Fernández Bollo — *La transparência elastica de algunas rocas de la Península Ibérica.*

14. Y. Frenkel e M. Cotlar — *Mayorantes de Perrón — Denjoy no aditivos.*

15. E. Pajares — *Sobre una curva transcendente deducida de un problema de física.*

16. P. Pi Calleja — *Sobre determinación de singularidades de la série Taylor mediante el argumento de sus coeficientes.*

17. Julio Rey Pastor — *La matemática abstracta del siglo XX.*

18. Clements Saénz Garcia — *Notas geométricas acerca de númeios pitagóricos.*

19. Ramón Vital de Artaza — *Crítica de los actuales métodos de cálculo de las bóvedas cilindricas delgadas.*

20. Renato Pereira Coelho — *Um critério de continuidade.*

As comunicações n.os 4, 13 e 19 devem ter sido incluidas nesta secção certamente por engano dos organizadores do volume com os resumos das comunicações, visto os títulos corresponderem a matéria de outras secções do congresso. Não foram por isso discutidas na Secção de Matemática. A Mesa desta Secção também retirou a comunicação n.º 1, que de resto não tinha sido transmitida ao Congresso por intermédio da Sociedade Portuguesa de Matemática.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Ensino liceal — Exames do 3.º ciclo — 1950.

3132 — Decomponha em factores o polinómio $3x^3+8x^2+3x-2$, sabendo que -1 é um zero desse polinómio. R: *Como* -1 *é um zero do polinómio este é divizível por* $x+1$ *e será* $3x^3+8x^2+3x-2=(x+1)\times(3x^2+5x-2)$ *como facilmente se reconhece. Os zeros de* $3x^2+5x-2$ *são* $x_1=-2$ *e* $x_2=1/3$. *Então é:* $3x^3+8x^2+3x-2=3\cdot(x+1)\,(x+2)\,(x-1/3)$.

3133 — Derive em ordem a x a função

$$y=\operatorname{sen}\,[(x^2+1)/(x^2-1)]\,.$$

R: $y'=[-4x\,/\,(x^2-1)^2]\,x\cos\,[x^2+1)/(x^2-1)]$.

3134 — Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta $3y-x=1$ com a circunferência de centro $C(1,-1)$ e raio igual a $\sqrt{5}$. R: *A equação da circunferência referida é* $(x-1)^2+(y+1)^2=5$ *e as coordenadas dos pontos pedidos são as soluções do sistema formado pela equação da recta e da circunferência. Então como* $x=3y-1$ *vem* $(3y-2)^2+(y+1)^2=5$ *ou* $10y^2-10y=0$ *donde* $y_1=0$ *e* $y_2=1$, *valores que substituidos na equação da recta dão* $x_1=-1$ *e* $x_2=2$. *Logo os pontos pedidos são:* $(-1,0)$ *e* $(2,1)$.

3135 — Empregando uma fórmula de transformação logarítmica, determine o valor de $f(15^0)$, dado por:

$$f(x)=\operatorname{sen}\,(90^0-x)+\operatorname{sen}\,x$$

R: *Teremos de calcular então* $\operatorname{sen}75^0+\operatorname{sen}15^0$ *e como* $\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}(A+B)/2\cdot\cos(A-B)/2$ *será* $f(15^0)=2\cdot\operatorname{sen}(75^0+15^0)/2\cdot\cos(75^0-15^0)/2=2\operatorname{sen}45^0\times\cos30^0=2\cdot\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2=\sqrt{6}/2$.

3136 — Os ponteiros do relógio duma torre medem, respectivamente 85 cm e 1,25 m. Calcule a distancia entre os extremos dos ponteiros desse relógio às 4 horas. (Empregue logaritmos). R: *Se for* $a=125$ *e* $b=85$ *o comprimento dos ponteiros, que às 4 horas formam entre si um ângulo de* 120^0, *as fórmulas que resolvem o problema são:* $\operatorname{tg}(A-B)/2=[(a-b):(a+b)]\cdot\operatorname{cotg}60^0$ *e a distância entre as extremidades dos ponteiros* $c=[(a+b)\operatorname{sen}60^0]:\cos(A-B)/2$. *Daqui resulta* $\log\operatorname{tg}(A-B)/2=\log4+\log\operatorname{cotg}60^0+\operatorname{colg}21=0{,}60206+\bar{2}{,}67778+\bar{1}{,}76144=\bar{1}{,}04128$ *donde* $(A-B)/2=6^0\,16'\,33'$.

Finalmente $\log c=\log(a+b)+\log\operatorname{sen}60^0+\operatorname{colg}\cos(A-B)/2=2{,}32222+\bar{1}{,}93753+0{,}00261=2{,}26236$ *e daqui* $c=183$ cm.

3137 — Um número de 3 algarismos significativos diminue de 72 unidades se trocar entre si os algarismos das dezenas e das unidades. Se trocar os algarismos das centenas e das dezenas, o número aumenta de 270 unidades. Determine esse número. R: *Seja* $a\cdot10^2+b\cdot10+c$ *o número. Então pelo enunciado é*

$a\cdot10^2+b\cdot10+c=72+a\cdot10^2+c\cdot10+b$ *e* $a\cdot10^2+b\cdot10+c+270=b\cdot10^2+a\cdot10+c$. *Da primeira tira-se* $9b-9c=72$ *ou* $b-c=8$ *e da segunda* $b-a=3$. *Os valores possíveis de* b *são então* 9 *e* 8. *No primeiro caso* $c=1$ *e* $a=6$ *e o número é* 691. *No segundo caso* $c=0$ $a=5$ *e o número é* 580.

Soluções dos n.os 3132 a 3137 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1950 — Ponto n.º 3.

3138 — Demonstrar que quaisquer que sejam os inteiros a e b, $(a+b)^7-(a^7+b^7)$ é sempre divisível por 7. R: $(a+b)^7-(a^7+b^7)=7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6=\dot{7}$, *visto,* 21 *e* 35 *serem múltiplos de* 7 *e* a *e* b *inteiros.*

3139 — Demonstrar que n^5-n, onde n é inteiro qualquer, é sempre divisível por 30. R: *Note-se que* $n^5-n=(n-1)\,n\,(n+1)\,(n^2+1)$ *e* $30=2\cdot3\cdot5$. *Como* $n-1$, n *e* $n+1$ *são três inteiros consecutivos um deles é múltiplo de* 3 *e pelo menos um é par. Um dos* 4 *factores em que* n^5-n *se decompõe é também múltiplo de* 5. *Com efeito: ou* $n=\dot{5}$; *ou* $n=\dot{5}+1$ *e* $n-1=\dot{5}$; *ou* $n=\dot{5}+2$ *e* $n^2+1=\dot{5}$; *ou* $n=\dot{5}+3$ *e* $n^2+1=\dot{5}$; *ou* $n=\dot{5}+4$ *e* $n+1=\dot{5}$.

3140 — Demonstrar que $3^{2n+2}-8n-9$, onde n é qualquer inteiro positivo, é sempre divisível por 64. [*N. B.*—Escrevendo $f(n)=3^{2n+2}-8n-9$ calcular $f(1)$, formar a diferença $f(n+1)-9f(n)$ e proceder por indução completa]. R: $f(1)=3^4-8-9=64$

$$f(n+1)-9f(n)=$$
$$3^{2n+4}-8n-17-3^{2n+4}+72n++81=64n+64=\dot{64}.$$

Tem-se pois $f(n+1)=9f(n)+64$ *e a hipótese* $f(n)=\dot{64}$ *arrasta* $f(n+1)=\dot{64}$, *c. q. p.*

3141 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\dfrac{7843}{37\times59}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 37 e 59 respectivamente. R: *Há que determinar* x *e* y *inteiros e positivos tais que*

$$\frac{7843}{37\cdot59}=\frac{x}{37}+\frac{7}{59}\quad ou\quad 59x+37y=7843.$$

As soluções inteiras e positivas desta equação de Diofanto são: $x_1=5$, $y_1=204$; $x_2=42$, $y_2=145$; $x_3=79$, $y_3=86$; *e* $x_4=116$, $y_4=27$.

3142 — Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento de $(1+x^2/5)^7\,(1+2x/5)^n$ (n inteiro positivo) segundo potências crescentes de x, mostrar que há dois valores de n para os quais os coeficientes daqueles três termos estão em progressão aritmética e calcular esses dois valores. R:

$$\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^7\cdot\left(1+\frac{2x}{5}\right)^n=\left(1+\frac{7}{5}x^2+\frac{21}{25}x^4+\cdots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{2n}{5}x+\frac{4n(n-1)}{25\cdot2}x^2+\cdots\right)=$$
$$=1+\frac{2n}{5}x+\left(\frac{7}{5}+\frac{2n(n-1)}{25}\right)x^2+\cdots$$

Se os coeficientes destes 3 *termos estiverem em progressão aritmética ter-se-à:*

$$\frac{2n}{5}-1=\frac{7}{5}+\frac{2n(n-1)}{25}-\frac{2n}{5}\quad ou$$
$$n^2-11n+30=0.$$

Esta equação admite as raízes 5 *e* 6, *inteiros e positivos, c. q. p.*

3143 — Para que valores de m tem a equação $x^2-x-5=m(4x-5m)$ raízes reais e desiguais? R: *A equação dada é equivalente a*

$$x^2-(1+4m)x+5(m^2-1)=0.$$

Os valores de m *a que correspondem raízes reais e desiguais são os que verificam:*

$$(1+4m)^2-20(m^2-1)>0\quad ou\quad 4m^2-8m-21<0.$$

Notando que os zeros do 1.º membro são $7/2$ *e* $-3/2$ *os valores de* m *pedidos são:* $-3/2<m<7/2$.

Soluções dos n.os 3138 a 3143 de Manuel Zaluar.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1949 — Ponto n.º 1.

3144 — Dois números a e b, não divisíveis por 5, têm por soma 1620. Calcular a e b sabendo que o seu máximo divisor comum admite 12 divisores. R: *O m. d. c.* $(a,b)=D$ *é divisor de* $a+b=1620=2^2\cdot3^4\cdot5$. *Por serem* $a\neq\dot{5}$ *e* $b\neq\dot{5}$, D *só poderá ser da forma* $D=2^\alpha\cdot3^\beta$ *com* α *e* β *inteiros positivos e tais que* $(\alpha+1)\cdot(\beta+1)=12$. *Das raízes desta equação apenas interessam as que conduzirem a um valor para* D, *divisor de* 1620. *Assim, tem-se:* $\alpha=2$, $\beta=3$ *e* $D=108$. *Por ser* $a=Dq$ *e* $b=Dq'$, *com* q *e* q' *primos entre si, ter-se-à,* $q+q'=(a+b)/D=15$ *e, portanto, correspondentemente,* $q=1,2,4,7$, $q'=14,13,11,8$, $a=108,216,432,756$ *e* $b=1512,1404,1188,864$.

3145 — Demonstre que qualquer que seja o inteiro n a fracção $\dfrac{2n+1}{5n+2}$ é uma fracção irreductível. R: *Utilizando o algoritmo de Euclides para a determi-*

nação do m. d. c. (método das divisões sucessivas), tem-se: m. d. c. $(5n+2, 2n+1)$ = *m. d. c.* $(2n+1, n)$ = = *m. d. c.* $(n, 1)=1$ *qualquer que seja* n *inteiro, c. q. d.*

3146 — Dado o trinómio $f(x)=(k-1)\,x^2+kx+k-2$ de raízes x_1 e x_2 determine k de modo que as raízes satisfaçam às relações $x_1<1<x_2<3$. R: *O enunciado deve pretender a determinação dos valores reais de* k. *Para que o valor* 1 *esteja compreendido entre as raízes* x_1 *e* x_2, *reais e diferentes, de* f(x), *terá que ser:*

$$(k-1)\cdot f(1)=3\,(k-1)^2<0\,,$$

desigualdade impossível qualquer que seja k *real.*

3147 — A partir do desenvolvimento de $(x+a)^m$, deduza que $\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+\binom{m}{6}+\cdots+\binom{m}{m}=2^{m-1}-1$, se m é par. R: *Desenvolva-se o binómio*

$$(x+a)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}a^k.$$

1.º) — *Faça-se* $x=a=1$ *e obter-se-á,*

$$\text{(I)}\quad 2^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}.$$

2.º) — *Faça-se* $x=1$ *e* $a=-1$, *obtendo-se,*

$$\text{(II)}\quad 0=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}.$$

3.º) — *Some-se ordenadamente* (I) *com* (II). *Anular-se-ão, no 2.º membro, os termos da forma* $\binom{m}{2k+1}$, *resultando*: $2^m=2\cdot\sum_{k=0}^{m/2}\binom{m}{2k}$ *se for* m *par. Daqui,*

$$2^{m-1}-1=\sum_{k=1}^{m/2}\binom{m}{2k}\qquad c.\ q.\ p.$$

3148 — Uma esfera de raio R e um cone de revolução cuja base tem de raio R e cuja altura é $2R$ estão assentes num plano π. Seccionaram-se os dois sólidos por um plano α paralelo ao plano π. Calcular a distância x dos dois planos α e π de modo que sejam iguais as áreas das secções produzidas na esfera e no cone pelo plano α. R: *Sejam respectivamente* r_1 *e* r_2 *os raios das circunferências, secções determinadas na esfera e no cone pelo plano* α. *Seja* β *um plano perpendicular a* π *contendo o centro da esfera e o eixo do cone. Considere-se* a) *na secção diametral da esfera, produzida por* β: *o triângulo rectângulo de hipotenusa* R *e catetos* r_1 *e* $R-x$ *de que são vértices o centro da esfera, o centro da circunferência, secção por* α, *e um dos* 2 *pontos comuns à secção da esfera, por* α, *e à secção da esfera, por* β. *Donde,* $r_1=\sqrt{R^2-(R-x)^2}$; b) *na secção que contem o eixo do cone: o triânguto rectângulo de catetos* r_2 *e* $2R-x$, *semelhante ao triângulo rectângulo de catetos* R *e* 2R *(raio da base do cone e eixo do cone). Consequentemente, da semelhança destes triângulos, resultará* $r_2=(2R-x)/2$. *Como tem que ser* $\pi r_1^2=\pi r_2^2$, *obtem-se, substituindo valores e desprezando a solução* $x=2R$, *sem interesse,* $x=2R/5$.

3149 — Construa um triângulo conhecendo um lado, o ângulo oposto e a mediana relativa ao lado dado (utilize *o método dos lugares geométricos*). R: *Do conhecimento dum lado* $\overline{AB}$ *e da mediana referente a este lado, conclue-se que os possíveis vértices* C *dos triângulos procurados pertencem a uma circunferência de centro no ponto médio* M *de* $\overline{AB}$ *e raio igual ao comprimento da mediana. O conhecimento do ângulo* α *oposto a* $\overline{AB}$ *permite concluir que os vértices* C *dos triângulos a construir são pontos dos quais o segmento* $\overline{AB}$ *é observado sob um dado ângulo* α; *pertencem, portanto, aos arcos capazes do ângulo* α *em relação a* $\overline{AB}$. *(Vd. construção deste lugar geométrico, p. e. em* Elementos de Geometria — 3.º ciclo — Nicodemos e Calado*). As intersecções daquela circunferência com estes dois arcos da circunferência tendo* $\overline{AB}$ *como corda comum, são os vértices dos quatro triângulos cuja construção é possível, únicas soluções do problema.*

Soluções dos n.ºs 3144 a 3149 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — 1949-50.**

3150 — *a*) Enuncie e demonstre uma condição necessária e suficiente para a existência de raízes iguais num polinómio $f(z)$. Como se comporta o cociente $f(z)/f'(z)$ relativamente aos zeros de $f(z)$?

b) Estabeleça as relações a que devem satisfazer os coeficientes do polinómio x^4+px^2+qx+r para que admita uma raiz tripla. Que se pode afirmar neste caso da natureza das raízes suposto $f(z)$ real? E se os coeficientes forem racionais?

3151 — Resolva algèbricamente a equação $z^{12}-1=0$. Refira-se a um método de abaixamento que também possa ser usado no cálculo das suas raízes.

3152 — Enuncie e demonstre o teorema de Laplace relativo ao desenvolvimento dum determinante segundo os menores de ordem m contidos em m filas paralelas da sua matriz. A que se reduz esse desenvolvimento na hipótese de existir apenas um menor significativo de ordem m nessas m filas?

3153 — Em que condições se multiplicam matrizes? Como se calcula o determinante da matriz $P=A.B$, supondo $A\ (m\times n)$ e $B\ (n\times m)$. Prove que é $|P|=0$ sempre que $n<m$. Supondo $n=m$, de quantos modos se pode fazer o produto $|A|\times|B|$? Justifique.

3154 — Enuncie e demonstre a regra de derivação dum determinante. Calcule a derivada de

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) & \pi(x) \\ \varphi(a) & \psi(a) & \pi(a) \\ \varphi(b) & \psi(b) & \pi(b) \end{vmatrix}$$

e prove que para algum c exterior ao intervalo (a,b) se tem

$$\begin{vmatrix} \varphi'(c) & \psi'(c) & \pi'(c) \\ \varphi(a) & \psi(a) & \pi(a) \\ \varphi(b) & \psi(b) & \pi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Supõe-se que as funções φ, ψ, π são regulares e com derivadas não conjuntamente infinitas em nenhum ponto interior de (a,b).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência — 29 de Março de 1950.**

3155 — Defina vizinhança de um ponto, e ponto de acumulação de um conjunto (x). Enuncie e demonstre o teorema de Bolzano-Weierstrass. Diga o que é necessário e suficiente para que u seja limite da sucessão u_n sem que seja ponto de acumulação do conjunto (u_n). Que é o ponto u no conjunto (u_n)? Prove que uma sucessão não tem dois limites finitos distintos. Qual é o limite máximo da sucessão $w_n=u_n+v_n$ se forem u e v os limites máximos das sucessões u_n e v_n? Justifique.

3156 — Se a soma dos n primeiros termos de uma série for $S_n=A-1/n$, diga se a série é convergente e, em caso afirmativo, qual é a soma? Qual é o limite do termo geral u_n daquela série? Justifique. Sejam u_n e v_n os termos gerais de séries de termos positivos; se para $n\geqslant m$ é $u_{n+1}/u_n\ v_{n+1}/v_n \leqslant$ o que pode afirmar sobre o caracter das séries? Enuncie e demonstre o segundo teorema de Cauchy.

Determine o menor inteiro α por forma que as séries $u_n=\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ e $v_n=\frac{1}{n^\alpha}$ sejam da mesma natureza. R: *Se* $\lim\limits_{n=\infty} u_n/v_n=1$ *as 2 séries serão da mesma natureza, e como se tem* $u_n/v_n=n^{\alpha-2}\cdot\log(1+1/n)^n$ *e portanto* $1=\lim\limits_{n=\infty} n^{\alpha-2}\times\lim\limits_{n=\infty}\log(1+1/n)^n=\lim\limits_{n=\infty} n^{\alpha-2}$, *deverá ser* $\alpha=2$. *A série* u_n *é convergente e as séries* v_n *são convergentes para* $\alpha\geqslant 2$.

3157 — Enuncie e demonstre o teorema de Cauchy e mostre que êle contém como caso particular o teorema de Lagrange. Calcule $\lim\limits_{x=\pi/2-0}(\operatorname{tg} x)^{x-\pi/2}$.

R: $\lim\limits_{x=\pi/2-0}(\operatorname{tgx})^{x-\pi/2}=e^{\lim\limits_{x=\pi/2-0}(x-\pi/2)\log\operatorname{tg}x}$ *e calculando agora o verdadeiro valor do expoente vem:*

$$\lim_{x=\pi/2}(x-\pi/2)\log\operatorname{tg}x=\lim_{x=\pi/2}\frac{\log\operatorname{tg}x}{\frac{1}{x-\pi/2}}=$$

$$=\lim_{x=\pi/2}\frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x}}{-\frac{1}{(x-\pi/2)^2}}=\lim_{x=\pi/2}\frac{-(x-\pi/2)^2}{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x}=$$

$$=\lim_{x=\pi/2}\frac{-2(x-\pi/2)}{\cos 2x}$$

donde

$$\lim_{x=\pi/2-0}(\operatorname{tg}x)^{x-\pi/2}=e^0=1.$$

3158 — Seja γ a imagem da função $y=f(x)$. Figure $M(x,y)$ sobre γ e tome o ponto médio $Q(X,Y)$ do segmento $\overline{OQ}$. Deduza a equação $Y=g(X)$ da curva descrita por Q quando M percorre γ. Supondo que esta última curva tem uma assíntota oblíqua $y=mx+p$, prove que também a primeira admite assíntota oblíqua e ache a sua equação. Compare as direcções das duas curvas nos pontos correspondentes M e Q. R: *As coordenadas de* Q *são* $X=x/2$, $Y=y/2$; *portanto a equação da curva* γ *será* $2Y=f(2X)$ *ou* $Y=\frac{1}{2}f(2X)$.

Como se tem

$$m=\lim_{x=\infty}y/x=\lim_{X=\infty}Y/X \quad e \quad p=\lim_{x=\infty}(y-mx)=$$
$$=\lim_{X=\infty}(2Y-m\,2X)=2\lim_{X=0}(Y-mX)$$

a equação da assíntota à curva γ *será* $Y=mX+p/2$.

De $$\frac{dY}{dX}=\frac{1}{2}\frac{d\,f(2X)}{d\,2X}\cdot\frac{d\,2X}{dX}=\frac{1}{2}f'(x)\cdot 2=\frac{dy}{dx}$$

as tangentes em pontos correspondentes das duas curvas têm coeficientes angulares iguais; as duas curvas têm tangentes paralelas.

3159 — Seja c um zero triplo da função $f(x)$ no intervalo (a, b). Prove que a sucessão $F(x)$ de Fourier perde na sua primeira parte três variações seguidas quando x passa por c.

Deduza a partir da sucessão de Fourier a regra dos sinais de Descartes.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 1.ª época — 1950, Julho, 20.

3160 — Determine o valor do parâmetro p que torne compatíveis as equações:

$$\begin{cases} x - 2y - t + 2u = 4 \\ 2x - y - 2t + u = -1 \\ y + 2u = 3 \\ 3x - 2t + u = -1 \\ x + 4y + t + pu = -10. \end{cases}$$

Ache a solução do sistema.

R: *Condense-se a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & p & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 6 & 2 & (p-2) & -14 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 2 & (p-14) & -32 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & (p+20) & 30 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & (p+20-15) & 0 \end{bmatrix}$$

a última equação será compatível com as restantes para o valor de $p = -5$. *O sistema proposto será então equivalente ao seguinte:*

$$\begin{aligned} x - 2x - t + 2u &= 4 \quad \textit{com a solução} \quad & x &= 1 \\ y + 2u &= 3 & y &= -1 \\ t - 17u &= -31 & t &= 3 \\ -9u &= -18 & u &= 2 \end{aligned}$$

3161 — Escreva o desenvolvimento em série inteira de x de $f'(x)$ e de $f(x) = \log|2 + x|$. Em que hipótese é que o desenvolvimento de $f(x)$ se pode obter do de $f'(x)$? R: *Temos*

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\left[1\Big/\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{2^n} + \cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^n}{2^n} \ (\textit{para } |x| < 2)$$

e primitivando termo a termo vem:

$$U(x) = \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} + C$$

absolutamente convergente para $|x| < 2$. $U(x)$ *será a primitiva de* $f'(x)$ *onde for uniformemente convergente, portanto em qualquer intervalo interior ao seu intervalo de convergência, e se* $U(x)$ *é convergente num extremo do seu intervalo de convergência absoluta então nesse mesmo intervalo é uniformemente convergente. Em conclusão:*

$$\log|2 + x| = C + \frac{1}{2}\sum_0 (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,2^n} \ (\textit{para } |x| < 2)$$

e tem de ser necessáriamente $C = \log 2$.

3162 — Faça a contagem e separação das raizes da equação $4x^3 - 5x^2 - 14x - 6 = 0$ e calcule em primeira aproximação a maior das raizes reais. R: *Os limites das raizes são* $l = -1$ *e* $L = 3$. *A sucessão de Sturm achada pelo algoritmo das divisões sucessivas e* $f_0 = 4x^3 - 5x^2 - 14x - 6$, $f_0'/2 = f_1 = 6x^2 - 5x - 7$, $f_2 = 193x + 143$ e $f_4 = 54$.

x	−1	−3/4	−1/2	0	2	3
f_0	−	0	−	−	−	+15
f_1	+		−	−	+	+32
f_2	−		+	+	+	+
f_4	+		+	+	+	+
var.	3		1	1	1	0

Há três raizes reais uma das quais, a maior, entre 2 e 3, *as outras duas entre* -1 *e* 0. *Fraccionando o intervalo* $(-1, 0)$ *as raizes ficam na primeira metade* $(-1, -1/2)$ *e partindo de novo encontra-se uma raiz* $-3/4$; *baixando de grau encontram-se as outras duas* $1 \pm \sqrt{3}$. *Querendo calcular a maior pelo método de Newton, o extremo favorável é* 3 *e vem* $3 - 15/64 = 2{,}76$.

3163 — Defina função contínua num ponto e limites $f(a-0)$ e $f(a+0)$. Estude a continuidade da função $y = 1/(1 + a^{1/x})$ $(a > 0)$ no ponto de abcissa $x = 0$. R:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{h}}} = 0$$

$(a > 1)$ h *positivo; o mesmo limite* $= 1$ $(a < 1)$.

$$\lim_{h=0} \frac{1}{1 + a^{-\frac{1}{h}}} = 1 \ (a > 1) \ \textit{o mesmo limite} = 0 \ (a < 1).$$

Os limites laterais são diferentes; tudo depende do valor da função para $x = 0$.

Soluções dos n.os 3156 a 3163 de J. Ribeiro de Albuquerque

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 1.º exame de frequência de 1949-50 — Ponto n.º 1.

3164 — Seja x', y', z' a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 7x - y - z = 0 \\ -3x + y - 7z = 70 \\ 10x - y - 9z - 40 = 0 \end{cases}$$

e sejam x'', y'', z'' os denominadores respectivamente da 1.ª, da 3.ª e da 5.ª reduzidas da fracção contínua $[5,3,5,1,5]$. Ache a equação cartesiana do plano, que passa pela origem dos eixos coordenados e é paralelo às rectas, que suportam os vectores

$$\mathbf{u}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}'' = x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3.$$

R: *Obtidos pela regra de Cramer, a solução do sistema proposto* $x'=16$, $y'=111$, $z'=1$ *e pela lei de formação dos denominadores das reduzidas duma fracção contínua,* $x''=1$, $y''=16$, $z''=111$, *serão*

$$\mathbf{u}' = 16\,\mathbf{e}_1 + 111\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad e \quad \mathbf{u}'' = \mathbf{e}_1 + 16\,\mathbf{e}_2 + 111\,\mathbf{e}_3.$$

A equação pedida será

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 16 & 111 & 1 \\ 1 & 16 & 111 \end{vmatrix} = 0 \quad ou \quad 2461x - 355y + 29z = 0.$$

3165 — Determine λ por forma que as equações $x^4 - x^2 - 2 = 0$ e $x^3 + x^2 + \lambda x + \lambda = 0$ tenham raízes comuns. Em seguida ache os valores dessas raízes.

R: *O resto da divisão de* $P(x) = x^4 - x^2 - 2$ *por* $Q(x) = x^3 + x^2 + \lambda x + \lambda$ *é* $R_1(x) = -\lambda x^2 + \lambda - 2$, *que nunca pode ser identicamente nulo e o da divisão de* $Q(x)$ *por* $R_1(x)$ *é* $R_2(x) = \dfrac{\lambda^2 + \lambda - 2}{\lambda}(x+1)$ *que se anula identicamente para* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -2$; *a estes valores correspondem respectivamente, como raízes comuns das equações propostas,* $\pm i$ *e* $\pm\sqrt{2}$.

3166 — É dada a equação

$$u^2 + 2(2x^2 + 4y^2 + z^2)\,u + \lambda^2 = 0$$

onde λ representa um parâmetro real diferente de zero. *a*) Indique quantas funções reais de variável real $u_k(x, y, z)$ pode a equação definir nas vizinhanças do ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ da quádrica $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 2 = 0$; *b*) Atribua a λ um valor conveniente e determine seguidamente du_k no ponto genérico da quádrica. R: a) *Sendo em* $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} u^2 + 4u + \lambda^2 = 0 \\ 4 - \lambda^2 \geqslant 0 \\ 2u + 4 \neq 0 \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \quad e\ portanto \begin{cases} 0 < \lambda^2 < 4 \\ u = -2 \pm \sqrt{4 - \lambda^2} \end{cases}$$

a equação define duas funções reais de variável real nas vizinhanças desse ponto. b) *Atribuindo a* λ *o valor* $\sqrt{3}$ *vem*

$$u_1(x_0, y_0, z_0) = -1, \quad u_2(x_0, y_0, z_0) = -3 \quad e$$
$$du_1 = 4x_0\,dx + 8y_0\,dy + 2z_0\,dz,$$
$$du_2 = -12x_0\,dx - 24y_0\,dy - 6z_0\,dz.$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência 1949-50 — Ponto n.º 2.

3167 — Sejam x', y', z' respectivamente o 1.º, o 3.º e o 5.º cocientes incompletos do desenvolvimento em fracção contínua do número $\dfrac{400}{301}$ e seja x'', y'', z'' a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 8x + y - z = 1 \\ -3x - y + z = 14 \\ 2x + 6y - z + 12 = 0 \end{cases}$$

Ache um ângulo formado pelas rectas que suportam os vectores $\mathbf{u}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{u}'' = x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3$. (Eixos ortogonais). R: *Determinados* $x'=1$, $y'=24$, $z'=3$ *e* $x''=3$, $y''=1$, $z''=24$ *como*

$$\cos\varphi = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \frac{99}{586}$$

será solução do problema

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,cos}\frac{99}{586} \quad 0 < \varphi_1 < \pi/2.$$

3168 — Ache a equação reduzida ou canónica da quádrica da equação $x^2 - y^2 + z^2 - xz + y = 0$. Classifique a superfície. R: *A quádrica é um hiperbolóide de duas folhas, cuja equação reduzida é* $4x^2 - 6y^2 - 2z^2 = 1$.

3169 — É dado o sistema $\begin{cases} (x-\lambda)^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + 2y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ onde λ representa um parâmetro real.

a) Para que valores de λ define o sistema, nas visinhanças do ponto $x = 1$, quatro funções reais de variável real $\begin{cases} y_h(x) \\ h = 1, 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} z_h(x) \\ h = 1, 2 \end{cases}$?

b) Atribua a λ um valor nas condições da alínea anterior e calcule seguidamente $\left(\dfrac{dy_h}{dx}\right)_{x=1}$ e $\left(\dfrac{dz_h}{dx}\right)_{x=1}$.

R: a) *Sendo, para* $x=1$

$$\begin{cases} (1-\lambda)^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y + z = 4 \\ \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases} \quad e,\ dai \quad \begin{cases} y = 2 \mp \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\lambda - \lambda^2} \\ z = 2 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\lambda - \lambda^2} \\ 2\lambda - \lambda^2 \neq 0 \end{cases}$$

e verificando-se a condição $2\lambda - \lambda^2 >$ *ou seja* $0 < \lambda < 2$, *o sistema dado define* 4 *funções reais de variável real, nas vizinhanças de* $x=1$.

b) *Fazendo* $\lambda=1$, *vem*

$$y_1=2-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y_2=2+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad z_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4},\quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4},$$

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_{x=1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\quad e\quad \left(\frac{dz_2}{dx}\right)_{x=1}=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}.$$

Soluções dos n.os 3164 a 3169 de Otília C. da Cunha Teles

NOTAS DE MATEMÁTICA

Sobre a aproximação fornecida pelos desenvolvimentos em fracção contínua

Quando do número A se conhece apenas que os primeiros $n+1$ cocientes incompletos do seu desenvolvimento em fracção contínua são $a_0, a_1, \cdots, a_n$, costuma calcular-se pela fórmula $\left|A-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_n^2}$ um limite superior do erro que se comete em tomando por A a sua reduzida de ordem n, $\frac{P_n}{Q_n}$. Mas pode deduzir-se uma fórmula um pouco melhor do facto de estar o cociente completo de ordem n, isto é, o número cujo desenvolvimento em fracção contínua seria $a_n, a_{n+1}, \cdots$, certamente comprendido entre a_n e a_n+1. A está portanto compreendido entre

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_n P_{n-1}+P_{n-2}}{a_n Q_{n-1}+Q_{n-2}}\quad \text{e}\quad \frac{(a_n+1)\,P_{n-1}+P_{n-2}}{(a_n+1)\,Q_{n-1}+Q_{n-2}}$$

expressões cuja diferença é, em módulo, inferior a

$$\frac{1}{Q_n\,(Q_n+Q_{n-1})}.$$

Se é inédita, deve-se a ideia que conduz a esta fórmula ao meu antigo aluno Jorge Manuel Pinheiro Guerra que, ignorando a fórmula usual, resolveu assim um problema de uma aula prática e que se não tem disposto a redigir esta nota embora lho tenha pedido várias vezes.

Renato Pereira Coelho

CRÍTICA DE LIVROS

Compêndio de Álgebra — 3.º ciclo, por *António Augusto Lopes*

(Aprovado oficialmente como livro único — *Diário do Governo*, II série, 24 de Junho de 1950)

1. São numerosos os livros publicados no nosso país para o ensino da Matemática nos Liceus. Pode afirmar-se, porém, sem perigo de exagero, que são raríssimos os que, pelo seu nível científico, se podem considerar recomendáveis. Acresce a circunstância infeliz de serem quase normalmente postos de lado os livros que, pela sua seriedade e pelo cunho renovador que apresentam, deviam merecer da parte dos professores e das entidades oficiais um carinho e uma protecção dignos deles. É, por exemplo, o caso da *Aritmética Racional* de A. Aniceto Monteiro e J. Silva Paulo que constitui, sem dúvida, uma tentativa maravilhosa de racionalização do nosso ensino de Aritmética Racional.

O novo Estatuto do Ensino Liceal, criando o sistema do livro único, vai dar uma maior possibilidade de esquecimento dessas poucas obras que deveriam ir entrando na ferramenta de trabalho de estudantes e professores. Não é nosso objectivo discutir aqui o problema do livro único. Embora em desacordo com o sistema criado, aceitamo-lo, neste momento, como coisa assente ao destacar a alta responsabilidade dos autores desses livros únicos e das Comissões de Apreciação dos mesmos, nomeadas pelo Ministério da Educação Nacional, uma vez que o ensino de cada disciplina fica sujeito, pràticamente, durante um período mínimo de cinco anos, à orientação dum *único guia*. Da seriedade e do valor formativo desse ensino, onde a acção do professor ficou limitada, é índice o livro que for adoptado.

O trabalho que vamos apreciar foi aprovado como livro único de ensino de Álgebra (3.º ciclo). O seu Autor é professor efectivo dos liceus e tem publicado ùltimamente *vários* livros de exercícios ou de texto. Nenhum, porém, lhe poderia criar a responsabilidade deste pelas razões seguintes:

a) apresentou-o a concurso para ser aprovado como livro único;

b) destina-se aos estudantes do 3.º ciclo dos liceus, onde o ensino pode e deve revestir um carácter de rigor maior que nos dois ciclos anteriores;

c) algumas das matérias nele versadas, talvez as de tratamento mais delicado, exigem um grande cuidado na exposição, dada a sua importância em estudos subsequentes.

É tendo em vista os três aspectos agora citados que vamos criticar este Compêndio de Álgebra.

2. Numa primeira leitura deste livro colhe-se a impressão de que se trata duma obra em que o Autor se preocupou em corrigir a forma de tratamento de certos assuntos, incorrectamente estudados em muitos dos livros portugueses anteriores. Essa preocupação revela-se, nomeadamente, na forma como são apresentados os elementos sobre funções de variável real, onde transparecem certas intenções louváveis como, por ex., a de distinguir funções e expressões analíticas; certos aspectos do estudo dos polinómios; o problema das indeterminações; a discussão das equações do primeiro e segundo graus nos casos em que o coeficiente da mais alta potência da incógnita tende para zero; a forma de introdução no cálculo algébrico dos números complexos a duas unidades.

Este seria, sem dúvida, um aspecto positivo a salientar, se uma observação mais atenta não descobrisse a falta de cuidado na apresentação da maior parte desses mesmos assuntos. Nota-se afinal que o Autor não pensou, suficientemente, sobre os elementos de estudo de que se serviu ou então abastardou a forma expositiva, de modo a destruir, parcialmente nuns casos, noutros totalmente, a utilidade que resultaria da correcção de erros que há muito fazem escola no nosso ensino liceal. Muitas vezes seria preferível deixar as coisas como até aqui.

Há, porém, um capítulo, que desde já destacamos, onde mesmo uma leitura descuidada encontra reais deficiências e erros notáveis: é o cap. II, subordinado ao título geral *Limites*. Não desconhecemos as dificuldades de apresentação deste assunto a estudantes dos liceus, mas não podemos esquecer a importância capital dos diferentes pontos abordados nesse capítulo; basta que nos lembremos de que a noção de limite é base de toda a Análise. Dar ideias erradas ou estabelecer confusões neste domínio é prestar um péssimo serviço ao Ensino da Matemática e aos estudantes. Ora, o que o prof. A. A. Lopes apresenta é uma exposição confusíssima e, pior do que isso, com erros e imprecisões, que de forma alguma deveria servir (e está decretado que vai servir!) como modelo de ensino. Repetimos: consideramos difícil a apresentação correcta e clara deste assunto a estudantes dos liceus, mas, em virtude da indubitável importância do mesmo, entendemos que não se pode descurar a sua forma de tratamento. E julgamos que um estudo mais atento do que aquele que possìvelmente fez o prof. A. A. Lopes, uma atitude crítica mais vigilante (em todo o livro se nota ausência de senso crítico) ou até a utilização de mais elementos de consulta, poderiam ter evitado bastantes dos aspectos negativos que estamos a referir. Parece-nos, por exemplo, que as *Lições de Álgebra e Análise* do prof. Bento Caraça (que o Autor não cita na bibliografia) podiam fornecer quase todo o material para uma exposição elementar, correcta e acessível, da teoria dos limites. Também, o *Curso de Álgebra Superior* do prof. Vicente Gonçalves, que o Autor de certo consultou, visto estar inserto nas indicações bibliográficas, estudado com o cuidado que exige, evitaria tantos erros e imprecisões.

Antes de entrarmos na concretização de alguns pontos anteriormente focados, queremos dizer que, àparte um ou outro pormenor, a exposição de alguns assuntos é correcta e clara. Citamos como exemplos; Cap. V (Equações e princípios de equivalência) e Cap. VII (Sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas) no 6.º ano; Cap. V (Equações irracionais redutíveis ao 2.º grau) e Cap. VI (Trinómio de 2.º grau) no 7.º ano. Note-se, porém, que mesmo aqui não houve sensível progresso, visto quase todos estes assuntos serem já tratados de forma aceitável em livros anteriores, o que não é de estranhar atendendo à sua natureza.

3 — Como dissemos, este livro apresenta algumas tentativas de correcção a livros anteriores, também destinados ao Ensino Liceal. Infelizmente, esse intuito não resultou, como vamos provar com *alguns* exemplos.

Assim, no Cap. I (Funções duma variável real), onde nos parece ter havido a preocupação a que aludimos, além de várias imprecisões que nos abstemos de citar, destacam-se os erros seguintes. Depois de definidas as funções algébricas e transcendentes (definições rigorosas sem dúvida), o Autor ao exemplificar a 2.ª categoria diz: «Por exemplo, são transcendentes as funções definidas pela igualdade

$$y = x^{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots .$$

A primeira porque a variável independente figura com expoente irracional e a segunda porque são em número infinito as operações que incidem sobre a variável independente, embora todas sejam racionais» Pergunta-se então: A função

$$y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots , \ |x| < 1 ,$$

é transcendente? Não há funções algébricas que se podem desenvolver em série? O que o Autor poderia dizer é que a representação explícita duma função transcendente, com o recurso exclusivo às operações racionais, exige *sempre* uma infinidade de operações. De resto, dada a maneira por que foram definidas as funções algébricas (e, portanto, as transcendentes), o Autor nunca poderia invocar qualquer justificação lógica — isto é, baseando-se exclusivamente nas definições dadas — para a transcendência das funções que indicou como exemplos. Ainda sobre a classificação de funções, esta outra observação: Uma vez que o Autor considerou irracionais *todas* as funções algébricas não racionais impunha-se que dissesse que existem funções irracionais (no sentido definido no livro), que não são do mesmo tipo de $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{5x-1}}$, citado como exemplo, em virtude das *equações gerais* de grau superior ao quarto não serem algèbricamente resolúveis (as suas raízes não podem, em geral, exprimir-se em função dos coeficientes, utilizando um número finito de operações racionais e extração de raizes). No mesmo capítulo, ao definir funções monótonas, diz: «uma função $y(x)$ diz-se crescente para o valor x_0 da variável independente, se a desigualdade $x>x_0$ implica $f(x)>f(x_0)$». Esta definição está completamente errada e o Autor teve, talvez, essa impressão pois, logo no período seguinte, embora em termos vagos que não convêm em Matemática, fala na vizinhança do ponto (mantendo no entanto $x>x_0$).

No capítulo III (Propriedades dos polinómios inteiros) encontramos deficiências da mesma ordem. Por exemplo, na definição de adição algébrica de dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$, chamando $S(x)$ à soma diz que « $S(x)$ é uma expressão analítica cujo valor numérico, para cada valor da variável, é igual à soma dos valores numéricos dos polinómios parcelas». É uma maneira de definir $S(x)$, mas o que não pode concluir-se lògicamente da definição, como faz o Autor, é que $S(x)$ é outro polinómio. Onde reconhece o Autor a *evidência* desta conclusão? Idêntica observação se poderia fazer para o produto. Havia uma forma de evitar estas dificuldades, dando definições *formais* das operações. Assim, para a soma dir-se-ia: sendo $P(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ e $Q(x)\equiv b_0x^n+ +b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$, chamar-se-ia soma $S(x)$ ao polinómio $S(x)\equiv(a_0+b_0)x^n+\cdots+(a_n+b_n)$. No caso de serem diferentes os graus dos dois polinómios, a redução ao caso anterior seria imediata, acrescentando termos de coeficiente zero ao polinómio de menor grau. No mesmo capítulo, na demonstração de que todo o polinómio inteiro equivalente a zero é identicamente nulo, há uma referência ao *método de indução completa* (que o Autor afinal não utiliza), referência que pode induzir em erro. O Autor, em lugar de fazer a indução e esclarecer o método, faz a verificação da propriedade enunciada para polinómios do 1.º e 2.º graus e depois diz: «Procedendo por indução, *podemos* (o grifado é nosso) demonstrar que se o teorema é verdadeiro para um polinómio de grau $n-1$, também o é para um polinómio de grau n». Ora, para proceder por indução, não havia necessidade da verificação da propriedade para polinómios do 2.º grau; havia, sim, necessidade de provar que a verificação para polinómios de grau $n-1$ implica a sua verificação para polinómios de grau n. Só assim se teria feito uma autêntica demonstração. Aquele «*podemos*», que grifamos, sugere que a verificação de que $P(n-1)$ implica $P(n)$ é uma coisa estranha à indução e já consequência dela.

O Capítulo IV (Fracções algébricas racionais) revela a mesma ausência de senso crítico. Por exemplo, demonstra-se, a pág. 110, que multiplicando ou dividindo ambos os termos duma fracção algébrica por uma expressão analítica, não identicamente nula, se obtem uma fracção equivalente à dada. Antes de mais, note-se que o Autor fala em fracções equivalentes (e lida com este conceito), sem prèviamente definir a equivalência de fracções. Não é, porém, este ponto que queremos frizar; o que pretendemos é denunciar a falência total daquela demonstração (e doutras semelhantes) visto que, no seu decurso, se utilizam propriedades não demonstradas. Assim de $\frac{P}{Q}\cdot Q=P$ tira $\left(\frac{P}{Q}\cdot Q\right)\cdot E=P\cdot E$ e depois $\frac{P}{Q}\cdot(Q\cdot E)=P\cdot E$ «*pelas propriedades da multiplicação*» (o grifado é nosso). Estas propriedades — aqui a propriedade associativa — mesmo que demonstradas para polinómios, podiam ser aplicáveis neste caso? Não! É tão necessário mostrar que

$$\frac{P}{Q}\cdot(Q\cdot E)=\left(\frac{P}{Q}\cdot Q\right)\cdot E$$

como mostrar que $\frac{PE}{QE}=\frac{P}{Q}$. Ainda no Capítulo IV, relativamente ao § II — Símbolos de impossibilidade — e § III — Símbolos de indeterminação — queremos fazer as seguintes observações:

a) o Autor não pôs em relevo a *unidade essencial* dos dois parágrafos. Afinal, num e noutro ponto, trata-se de casos, onde são inaplicáveis certos teoremas de limites, relativos ao produto e ao quociente.

b) Uma vez que resolveu falar em *símbolos de impossibilidade* (e talvez tivesse de o fazer em virtude de se tratar de um tópico do programa) o que se impunha era a explicação do termo empregado. Que faz o Autor, nesse sentido? Depois de algumas considerações a propósito do símbolo $\frac{k}{0}$ conclue: «quer dizer, quando x tende para a, a fracção proposta é um infinitamente grande; é este o significado algébrico da fracção $\frac{k}{0}$ que, por este motivo, é um símbolo de impossibilidade». Esta explicação satisfaz? Parece-nos que não. O que se deveria apontar é a impossibilidade de solução da equação $0 \cdot x = k (k \neq 0)$. De resto, tendo dito no Cap II que um infinitamente grande é uma *variável*, com que direito dá aquele nome ao símbolo $\frac{k}{0}$? Quanto ao símbolos $\frac{\infty}{k}$ e $\frac{k}{\infty}$, entendemos que não deviam aparecer como símbolos de impossibilidade. Caso se quisesse referir a estes símbolos, havia um lugar indicado para isso no Cap. II.

c) Como explica o Autor a designação de símbolos de indeterminação? Quanto ao símbolo $\frac{0}{0}$ diz: «a fracção $\frac{0}{0}$ não tem significado e pode representar qualquer número, porque pondo $\frac{0}{0} = k$, vem $0 \cdot k = 0$ para todos os valores de k». Isto está precisamente às avessas; o que havia a assinalar é a indeterminação da equação $0 \cdot x = 0$, e, porque $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ admite a solução $\frac{b}{a}$, torna-se natural considerar $\frac{0}{0}$ como símbolo de indeterminação. Quanto ao símbolo $\frac{\infty}{\infty}$, só em termos de limites seria possível tratá-lo. Assim: sendo $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to a} F(x) = k$ $(k \neq 0)$ é óbvio que $\lim_{x \to a} f(x) \, F(x) = \infty$, qualquer que seja k. Daqui o escrever-se a *igualdade simbólica* $k \cdot \infty = \infty$ e considerar-se *depois* o símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ como símbolo de indeterminação, em virtude de k ser um número qualquer. Ainda aqui o Autor pôs as coisas às avessas e, além disso, não sentiu necessidade de recurso a termos de limites. Análoga observação se poderia fazer para o símbolo $0 \cdot \infty$.

d) No parágrafo relativo a indeterminações, ora se fala em fracções algébricas racionais, ora se fala em fracções algébricas. O Autor esqueceu que nesta última categoria, segundo a sua «definição», cabem fracções como, por ex., $\frac{\operatorname{cotg} x}{\log x}$. Desse esquecimento resultou poder afirmar que as indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se reduzem às do tipo $\frac{0}{0}$ *estudado* e, por outro lado, só ter estudado as indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ no caso das fracções algébricas racionais. Como faz então essa redução com o exemplo $\frac{\operatorname{cotg} x}{\log x}$ $(x = 0)$?

O capítulo relativo a números complexos a duas unidades, onde houve a nítida preocupação de saír dos moldes anteriormente usados nos livros do Ensino Liceal (e, até aqui, achamos muito bem) não reveste o possível caracter de rigor e, sobretudo, é um mau capítulo do ponto de vista didáctico. O Autor, em lugar de manter até á altura conveniente a notação (a, b), para designar os pares ordenados, preferiu a utilização de $a + bi$, que emprega desde o início da exposição, embora faça certas observações correctas quanto ao sinal $+$ e ao símbolo i. Aparecem, como consequência, confusões entre o sinal $+$, no sentido inicial, e o sinal $+$, símbolo operatório de adição, confusões que o Autor não conseguiu desvanecer, embora o tenha tentado (não devemos esquecer a categoria dos estudantes a quem se destina a exposição). Ora, parece possível esclarecer tudo isto. Assim, [1] definindo no conjunto dos pares (a, b) a igualdade e a adição — definições habituais — segue-se imediatamente que todo o complexo se pode considerar como soma de dois outros: $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$. Tendo-se definido também produto de um complexo por um número real, mediante a igualdade $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$, é legítimo escrever

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ são sinais de operações. Os complexos $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ (que fàcilmente se reconhece serem irredútiveis um ao outro pela operação de produto de um deles por um número real — operação já definida) constituem *as duas unidades do campo complexo*. Observe-se, de passagem, que o Autor não se refere na sua exposição às unidades do campo, desligando-se assim, por completo, do título do capítulo. Qualquer complexo (a, b) pode obter-se da *base* (conjunto das duas unidades) por meio dos números reais a e b. Definindo seguidamente o produto de complexos pela igualdade

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

ou $(a e_1 + b e_2) \cdot (c e_1 + d e_2) = (ac - bd)\, e_1 + (ad + bc)\, e_2$

é fácil estabelecer que $e_1^2 = e_1 \cdot e_1 = e_1$ e que $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2$; $e_2^2 = -e_1$, $e_1 \cdot (a, b) = (a, b) = (a, b) \cdot e_1$ o que mostra que a unidade e_1 desempenha no campo complexo o mesmo papel que 1 no campo real. Por outro lado, é fácil mostrar que entre os números complexos da forma $k \cdot e_1$ (k real) e os números reais k se pode estabelecer uma correspondência *isomorfa*,

[1] «Lições de Algebra e Análise», Bento Caraça.

podendo portanto convencionar-se escrever k em lugar de $k\cdot e_1$, o que corresponde a assimilar os números $k\cdot e_1$ aos números reais k (como $1\cdot e_1=e_1$, escrever-se-à 1 em lugar de e_1). Nestes termos é $(a,b)=a+b\cdot e_2$, $e_2^2=-1$. Usando a letra i, em vez de e_2, aparece então a forma $a+bi$ para o par (a,b).

4 — Os exemplos podiam multiplicar-se. Particularmente, o livro é fertilíssimo na apresentação de formas imprecisas de expor, contradições e inferências ilegítimas. Porém, limitamos por aqui as citações. Antes de passarmos ao capítulo II — Teoria de Limites — apontemos outro facto, que se nos mostra absolutamente incompreensível. No estudo da equação de Diofante $ax+by=c$, ao demonstrar que $D(a,b)=1$ implica a existência de soluções inteiras, o Autor serve-se de uma equação auxiliar $au-bv=1$ e prova para esta equação a existência de soluções inteiras. Que necessidade, melhor, que vantagem oferece a equação auxiliar na forma utilizada pelo professor A. A. Lopes? O que o Autor diz para a equação auxiliar poderia dizê-lo, ipsis verbis, para a equação sem mais nem menos rigor. O que poderia ter feito era associar à equação $ax+by=c$ a equação auxiliar $Au-Bv=1$, onde A e B são os módulos de a e b. Conseguiria assim manter-se no quadro da Aritmética dos números positivos, a que estão limitados os alunos. É o que faz, por exemplo, o Prof. Vicente Gonçalves no seu Compêndio de Álgebra para o 7.º ano. O que não se compreende, de modo algum, é a substituição de $ax+by=c$ por $au-bv=1$.

5 — Deixamos para lugar à parte o capítulo II sobre Limites. Quer pela forma infeliz por que é tratado este assunto, quer pela sua importância, entendemos que lhe devia ser dado um especial relevo. Mas, porque esta crítica já vai longa e ainda porque julgamos que pode ser útil aos leitores da «Gazeta de Matemática» de qualquer modo ligados ao Ensino Liceal a publicação dum pequeno estudo sobre limites, que abranja os diferentes tópicos do programa, deixaremos, para um próximo número, parte do que queríamos dizer à volta deste assunto. Por agora, vamo-nos limitar a apontar algumas das deficiências de que enferma a exposição desta matéria no livro do professor A. A. Lopes.

As noções de «infinitamente grande» e «infinitamente pequeno» são apresentadas sob forma confusíssima. O Autor, depois de abordar (e bem) o caso de sucessões de termos positivos, parece pretender generalizar ao caso de funções de variável contínua. No entanto, tudo fica tão pouco claro que nós próprios (e não podemos neste momento deixar de recordar os estudantes do 6.º ano) não sabemos se o Autor se refere a funções de variável contínua ou a sucessões, ao concluir, a pág. 45 e 46, com as definições respectivamente, de infinitamente grande e de infinitamente pequeno. No caso de se tratar de funções de variável contínua, as definições não servem; no 2.º caso (hipótese que consideramos pouco provável) tudo ficou restrito a sucessões, tornando-se portanto deslocados os exemplos que apresenta e, pior do que isso, ficando sem base tudo quanto é exposto a seguir.

A noção dada de «infinitésimos simultâneos» (expressão infelicíssima, mas oficialmente consagrada...) *não tem qualquer conteúdo*[1]. Em face dessa definição, pág. 47, *todos os infinitésimos são simultâneos.* O Autor em período seguinte — numa semi-correcção — fala na possível dependência entre ε e δ, *achando que essa dependência está implícita na definição dada* (!!), mas mesmo esta referência é infeliz e inconsequente, como o revela o exemplo que deu a seguir, exemplo que completa a péssima (e errada) exposição deste número do § I. Os n.ºs 4 e 5 do mesmo § I, respeitantes a leis operatórias e outros teoremas sobre infinitésimos, apresentam várias deficiências, embora de menos gravidade; é por ex., lamentável o enunciado seguinte: «Se a e b são duas quantidades finitas e fixas e se a diferente de $a-b$ é um infinitésimo, essas duas quantidades são iguais».

O § II — limites de variáveis e de funções — mantém o nivel do parágrafo anterior. De resto, alguns dos seus erros não são mais que a repetição dos que aparecem no § I. Começa o Autor por definír, neste § II, «limite de uma variável independente» (terá sentido falar-se em limite de uma variável independente?) dando uma «definição» inteiramente destituída de sentido, que não traduz possívelmente o que estava no seu espírito. Na definição de limite de uma função, pag. 56, o Autor, à maneira de síntese, diz: «Esta definição traduz-se analíticamente pelas desigualdades 7) $|x-a|<\varepsilon$; $|y-b|<\delta$ e significa: — *aos valores de* x *que verificam a primeira correspondem valores de* y *que verificam a segunda,* quando ε e δ são positivos e arbitrários. Nos termos da parte final do n.º 3 — A, da pág. 48, δ depende, em geral, de ε». Notam-se aqui erros e contradições; assim, por um lado ε e δ são positivos e arbitrários (*erro grave*) e, por outro lado, δ depende em geral de ε, isto é $\delta=f(\varepsilon)$, o que contradizendo a primeira afirmação, mantém contudo o erro, visto que seria essencial frizar o carácter de independência de δ e não de ε, como o Autor sugere escrevendo

[1] O próprio Autor usa o termo em sentidos diferentes; ora considerando *infinitésimos ligados* como sinónimo de infinitésimos simultâneos, ora considerando dois infinitésimos quaisquer como simultâneos.

$\delta = f(\varepsilon)$. O n.º relativo a limites à direita e limites à esquerda mantém estes erros.

Quanto ao § IV, relativo à continuidade, tudo se passa afinal no mesmo plano do § II. Destacamos no entanto: o título do n.º 17 — *definição intuitiva de continuidade* — e respectivas considerações; as observações que seguem a definição analítica de continuidade, pag. 72; tudo quanto diz sobre continuidade à esquerda e à direita.

6 — Em conclusão, parece-nos que a obra, objecto desta crítica, não satisfaz para ser utilizada como livro único de ensino. Não podemos deixar de repetir neste momento algumas das afirmações feitas de início. Recai, não só sobre o Autor, mas também sobre a Comissão que apreciou os livros em concurso, a alta responsabilidade de terem fornecido a professores e estudantes um mau instrumento de trabalho que não preenche devidamente as condições exigíveis em livros desta índole. Admira-nos sobretudo que nenhum dos professores da Comissão de Apreciação tivesse sentido a gravidade dos erros e defeitos que apontamos (ou outros que não referimos). E não há dúvida de que pelo menos a Comissão, colectivamente, não a sentiu, pois de contrário seria obrigada como está expresso em disposições legais, a propor ao Autor as modificações convenientes.

Que essas modificações apareçam brevemente, ou pelo menos na próxima edição deste trabalho, para bem do Ensino da Matemática no nosso país.

LAUREANO BARROS

PROBLEMAS

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2399 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Mostre que (¹)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n^{p-1}} (n!)^{(p-1)/n} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 .$$

R: *Pretende-se calcular a soma da série cujo termo geral é* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p}{n^{p-1}} (n!)^{(p-1)/n}$. *Ponhamos*

$$\varphi(n) = \left(\frac{p}{n^{p-1}}\right)^n (n!)^{p-1} .$$

Sabe-se que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varphi(n)}$ *e estes limites são iguais.*

Ora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} \left[p \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(p-1)} \right] = p \left(\frac{1}{e}\right)^{p-1} .$$

Para determinar a soma da série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p \left(\dfrac{1}{e}\right)^{p-1}$, *notemos que a série geométrica* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x^p$, *convergente no intervalo aberto* $(-1, 1)$, *tem por soma* $\dfrac{x}{1-x}$ *e a série* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p x^{p-1}$, *obtida da anterior por derivação termo a termo, é uniformemente convergente em* $(-1, 1)$ *e, por isso, a sua soma pode calcular-se derivando* $\dfrac{x}{1-x}$. *Como a derivada de* $\dfrac{x}{1-x}$ *no ponto* $\dfrac{1}{e}$ *é precisamente* $\left(\dfrac{e}{e-1}\right)^2$, *fica provado o que se pretendia.*

(¹) É este o enunciado correcto do problema e não o publicado, por engano, no n.º 31 da revista.

2543 (*Gaz.. Mat.* nº 34) — Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} (p!)^{r/p} \Big/ \sum_{p=1}^{n} p^r \right) = e^{-r} .$$

R: *Seja* $f(n) = \varphi(n)/\psi(n)$; *Sabe-se que, se existe* $\lim\limits_{n\to\infty} [(\varphi(n) - \varphi(n-1))/(\psi(n) - \psi(n-1))]$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ *e estes limites são iguais. Fazendo então* $\varphi(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} (p!)^{r/p}$ *e* $\psi(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} p_n^r$, *vem*

$$\frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{\psi(n) - \psi(n-1)} = \left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)^r .$$

Sabe-se ainda que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\theta(n+1)}{\theta(n)}$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\theta(n)}$ *e estes limites são iguais (caso seja* $\theta(n) \geqslant 0$*).* *Pondo* $\theta(n) = n!/n^n$, *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n+1)}{\theta(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} ,$$

donde se conclui que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = e^{-r}$, *c. q. d.*

Solução dos 2 problemas anteriores de José C. Morgado J.or

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publica quatro números por ano

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 46, cada número	12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 12$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282