GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XII — N.° 47 — MARÇO 1951

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XII–N.º 47 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO – 1951

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

El método de laboratorio en la enseñanza de la Matemática

por *Matilde O. de Macagno* (*)

Introducción

El objeto de este trabajo es el de informar acerca del método de laboratorio, llamado también experimental, para la enseñanza de la Matemática en el ciclo medio, particularmente para el caso de las escuelas técnicas industriales y comerciales.

El estudio de este método y su aplicación son dignos de encararse, pues la experiencia demuestra que los institutos que han utilizado este método han logrado despertar un gran interés del alumnado por el aprendizaje de la Matemática.

Es un hecho bien conocido que se considera a la Matemática como una matéria difícil, por la gran parte de los alumnos.

La mayoria de los alumnos experimenta ciertas dificultades para asimilar la Matemática. Esos alumnos pueden clasificarse em varios grupos:

1—Alumnos sin interés por la materia; la encuentran árida, sin objetivo, preguntan: para qué sirve? Puede observarse que entre estos alumnos los hay de cierto talento.

2—Alumnos que tienen voluntad de aprender pero que no pueden asimilar completamente, no captan bien, no llegan al fondo del asunto, generalmente memorizan y a veces disfrazan hábilmente su conocimiento superficial. Sin embargo, el profesor puede ponerlos fácilmente en descubierto planteándoles problemas nuevos o diferentes de los del texto.

3—Alumnos de capacidad mediana y aún buena, con buena voluntad pero que tienen lagunas en su preparación y no pueden, por ello, seguir la materia· Com frecuencia lo reconecen ellos mismos al decir: «Me falta base». El profesor sabe que este es un estribillo al que apelan también los alumnos a los que no sólo les falta base, sino también deseos y voluntad para estudiar.

4—Alumnos sin interés, sin capacidad, sin preparación previa adecuada, que suelen unir todo eso a una conducta poco satisfactoria. Estes son los alumnos que en la calificación de conceptos de las juntas de profesores quedan eliminados o son tolerados porque hay alguna esperanza de que mejoren.

Qué puede hacer el profesor teniendo en cuenta que debe manejar grupos de unos 30 alumnos? El profesor tiene recursos para despertar el interés, puede enseñar a aprender, puede rellenar pequeñas lagunas; es decir, que puede hacer un trabajo eficaz, con los tres primeros grupos. Este puedo hacerlo porque va incluyendo todo eso en el desarrollo de la materia, que re realiza de um modo colectivo y no individual. El profesor debe dirigir su enseñanza convenientemente, porque, como dice Klein [1]: «la enseñanza no puede depender sólo de la materia objeto de la enseñanza, sino, sobre todo, del sujeto a quien se enseña».

El profesor no puede manejar al cuarto grupo de alumnos, pues deberia en tal caso adoptar um modo individual de enseñanza, que por sí solo no puede atender. Debiera dedicar mucho tiempo y atención a ese grupo, en detrimento de la mayoría.

El problema que plantea el cuarto grupo es digno de ser considerado por parte de los institutos de enseñanza. Seria muy interesante estudiar la posibilidad de seguir, con dicho grupo, un tratamiento más racional y más humano que el de la simple eliminación o el de la tolerancia. La eliminación salva a la Escuela, pero no al individuo. La tolerancia perjudica a ambos, a la Escuela porque ésta mantiene en su

(*) Profesora en la Escuela Industrial «Domingo F. Sarmiento» de la Universidad de Cuyo, Argentina.

seno elementos disolventes y perjudiciales, y al individuo, porque nada gana com su permanencia en un medio superior a sus cualidades.

Para el cuarto grupo, la Universidad quizás podría crear el organismo capacitado para «curar» es os casos difíciles, en vez de apelar a un tratamiento «quirúrgico» o de «paliativos». La recuperación de una parte de esos alumnos, cuya educación e instrucción se completarían por personal y métodos especializados, compensaria ciertamente los esfuerzos que se hicieran en ese sentido.

Este trabajo, dentro del extenso panorama de los métodos de educacción e instrucción, abarca sólo una pequeña región: se limita a uno de los métodos que el profesor puede seguir para despertar el interés del alumno y hacerle a la vez más fácil el camino de acceso al conocimiento de los conceptos matemáticos rigurosos.

2 — Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas-Opiniones

Es muy común encontrarse en cursos de la escuela secundária, con el problema que crean los alumnos que no aprenden bien la Matemática. Este problema ha llamado la atención de muchos profesores y aún de matemáticos eminentes.

Puede pensarse en varias causas, de las cuales las más importantes son: 1—falta de interés en la materia, por prejuicios propios del alumno o por el método o el no-método del profesor. 2—falta natural de capacidad. 3—fallas en la preparación previa.

Henri Poincaré [2] se pregunta «Cómo es que hay gentes que no comprenden las Matemáticas?» Señala lo sorprendente que parece que haya tantas personas refractarias a ellas, siendo que no invocan más que las leyes de la lógica y que están basadas en principios que todos reconocem. Destaca que parece imposible que haya tantos que no pueden seguir un razonamiento matemático y que es notable que se cometan fácilmente errores en dichos razonamientos. Poincaré busca la explicación, en la falta de memoria, para tener presentes todas las condiciones y reglas y sus alcances y sentidos. Compara esto con la capacidad de un jugador para recordar las jugadas hechas y para prever las posibles futuras. Hace falta tener, según Poincaré, un sentido del orden de los silogismos, del orden en que deben colocarse. Se ocupa, como se ve, de los casos en que hay falta natural de capacidad.

La falta natural de capacidad es uno de los defectos de tratamiento más difícil, pero siempre se puede hacer algo y el profesor debe estudiar a sus alumnos a fin de conocer sus aptitudes y sus fallas para aprovechar aquéllas y corregir éstas en lo posible.

Todo eso da matices a la enseñanza. La cuestión no es nueva por cierto, y más adelante se dá una información sumaria sobre modos y métodos de la enseñanza de la Matemática.

Por su relación com las ideias de Poincaré, se cita el siguiente párrafo de Schiller [3]: «Se ha discutido mucho el problema de si cierta dosis de la Matemática puede ser comprendida por todos los alumnos, y teóricamente es fácil responder que la Matemática es una ciencia de puro raciocinio y que cualquier persona que más omenos pueda pensar, debe ser capaz de aprender la Matemática en la extensión en que se da en la escuela. Pero los hechos no corroboran esta teoria La Matemática no es simplemente un asunto de raciocinio, sino que requiere imaginación especial y comprensión de cosas abstractas, y un tipo especial de memoria que no todos pueden tener en el mismo grado».

Si bien dedicado a una cuestión de mucho más vuelo que la enseñanza secundaria, Hadamard [4] ha escrito un libro en el cual señala los diferentes tipos de mentes y como unas se adaptan a ciertas partes o formas de estudio y creación matemática y a otras no. Señala como ejemplo sus propias dificultades en el manejo de la teoría de los grupos.

Como se ha hecho notar al comienzo, no se trata siempre de falta de capacidad en mayor o menor grado, muchas veces el alumno adolece de falta de interés o tiene fallas en la preparación anterior. A este respecto es interesante anotar la opinión de Mc Lellan y Dewey [5]: «No es demasiado decir que nueve por cada diez de aquellos a quienes no les gusta la Aritmética, o que, por lo menos creen que no tienen aptitud para la Matemática, deben su desgracia a una mala enseñanza inicial, a un método que frustra realmente la natural inquietud de la mente, y sustituye su actividade espontánea y libre, por una acción forzada y mecánica que no va acompañada de ningún interés vital y que no lleva ni a adquirir conocimiento ni a desarrolar la capacidad intelectual».

Salvo casos especiales, la falta de capacidad no es tan seria como para impedir al alumno el seguir su carrera, sobre todo en las escuelas técnicas o de especialización, secundarias. La ayuda del profesor y el esfuerzo del alumno pueden remediar ese defecto. La falta de preparación previa también puede resolverse, si el alumno la reconoce y toma las medidas necesarias para estudiar en horas extra, hasta alcanzar el nivel correspondiente. Queda el elemento más sutil, el interés, el entusiasmo. Es muy importante despertar el interés, comunicar entusiasmo al alumno. Para ello hay que tener interés y entusiasmo por la materia que se enseña, pero además hay que recurrir a una enseñanza objectiva, con aplicaciones prácticas y experimentales, con problemas bien presentados, con un contenido y una forma de ejecución, que satisfagan los deseos de casi todos los alumnos com vocación técnica.

La Matemática de las escuelas secundarias técnicas no es tan difícil de comprender y aprender, a veces se la hace difícil. Según la forma enque se la enseñe, puede llegar a ser una matéria atrayente o una materia desagradable y pesada. Un punto importante, para el interés del alumno, es el de darle la sensación de que está haciendo un trabajo original. Parece que esto no es posible porque se le enseñan cosas ya conocidas y completamente elaboradas, pero hay que tener en cuenta que para él son nuevas. Como dice el Prof. Young [6] : «Cuando un alumno saca conclusiónes por si mismo y hace su propio trabajo, está haciendo trabajo original, así haya sido el asunto formalmente establecido antes o no. Sin trabajos de ese carácter, el estudio matemático es casi inútil para la cultura». Y más adelante agrega: «si en cambio se habitúa a un alumno a memorizar un teorema, evitando comprender la demostración, el concepto que él encierra, no hay materia, así estudiada, que se vuelva más arida que la Geometría».

La Matemática es una de las materias que puede dar al alumno grandes satisfacciones en cuanto a los resultados de la iniciativa y el esfuerzo personal, de la aplicación inteligente de conocimientos básicos a la obtención de nuevas conclusiones. Pero para ello es necesario fomentar su capacidad creadora y no solamente su capacidad receptora. Volvemos a citar a Young [6] : «Diez páginas de Matemáticas entendidas son mejores que cien memorizadas y no comprendidas. Y una página realmente producida con independencia vale lo que diez entendidas claramente, pero de un modo pasivo... El objeto es el dominio, la conquista del espiritu del tema, no la ejercitación de la memoria ni la introducción en la mente de una enorme masa de hechos y fórmulas pertenecientes a la Matemática».

3 — Métodos de enseñanza de la Matemática

Son conocidas las divisiones de la Matemática en diferentes secciones: Aritmética, Geometría, Algebra, etc. Algunos autores han propugnado por la unificación o fusión de las diversas ramas en un tronco único. Además se sabe que las cuestiones matemáticas pueden plantearse de diferentes maneras y que las demostraciones pueden llevarse a cabo de acuerdo a procesos diversos: analítico, deductivo, inductivo, etc. Nos referiremos aquí a las diversas formas de enseñar, aplicables, en general, a otras disciplinas también. Las formas o métodos de enseñanza deben aplicarse claro está, en relación con lo que se enseña; en Matemáticas, en relación con la Geometría, con el Algebra, etc. y con el método elegido o necesario para la demostración.

Siguiendo al Profesor Young, aunque no estrictamente, se hace a continuación un resumen de los diversos métodos de enseñanza. Creemos innecesario para el objeto que perseguimos, de dar una idea descriptiva del asunto, el hacer una distinción entre modos y métodos, como hace el mencionado profesor.

1 — Método socrático. — En este método el profesor y el alumno mantienen un diálogo. Una cadena de preguntas de respuestas fáciles va llevando al alumno a la conclusión deseada.

2 — Método heurístico. — Tiene analogía con el socrático, pero es menos dirigido. En vez de una cadena de estímulos, el alumno va recibiendo impulsos aislados. El profesor va planteando cuestiones y problemas al alumno, dándole los conocimientos básicos para resolverlos, así como oportunas indicaciones. Dada la importancia de este método, se le dedica un parágrafo más adelante.

3 — Método examinativo y recitativo. — El profesor señala lecciones y las toma a los alumnos que las estudian en un texto y las recitan. Este método es el paraíso de los memoristas. Sin embargo, el método examinativo, cuando se emplea para repasos y recapitulaciones, es muy útil, lo mismo que el recitativo, quando el alumno expone con una cierta originalidad cuestiones que ha resuelto él o que ha estudiado especialmente.

4 — Método de conferencias. — El profesor expone en forma de conferencias, los alumnos toman notas que luego completan y estudian, o que les sirven de guia para consultar textos.

5 — Método experimental o de laboratorio. — El alumno trabaja en el aula, donde dispone de elementos para medir, calcular, dibujar, etc. Hace modelos, aparatos sencillos, realiza algunas experiencias, etc., para objectivar hechos y relaciones matemáticas. El profesor dirige el trabajo como se hace en un laboratório de física o de química. Los alumnos trabajam en pequeños grupos o individualmente.

4 — Método heurístico

Este método tiene grandes afinidades con el de laboratorio. Es además uno de los mejores para despertar el interés del alumno. Por estas circunstancias diremos algo más sobre este método, antes de pasar al de laboratório.

El método heurístico tiene por finalidad enseñar al alumno a ver las cosas por sí mismo, en lugar de explicarle paso a paso la materia y que él reciba en forma pasiva los conocimientos.

El profesor y el texto sirven aquí de guías. Se proponen al alumno cuestiones y problemas que él debe tratar de resolver, sin darle la solución. El profesor le ayuda con sugerencias e indicaciones, criticando en forma sana lo que el alumno va haciendo. El profesor encamina al alumno, lo trata a la manera de un maestro que enseña un oficio a un aprendiz. El alumno, con todos los elementos que el profesor le va dando, hace su trabajo, y cuando llega al resultado tiene la satisfacción de haberlo hallado él mismo.

El profesor que utiliza este método debe obtener del alumno que resuelva los problemas propuestos, que formule definiciones, que demuestre teoremas, que desarrolle un sentido autocrítico para analizar sus razonamientos y creaciones.

El método se ha empleado mucho en Geometría, pero es igualmente aplicable a la Arimética y al Algebra, así como a otras materias distintas de la Matemática.

El método heurístico se puede aplicar en forma individual o colectiva. En este último caso toda la clase trabaja en forma activa, descubriendo los teoremas, discutiendo el trabajo realizado, proponiendo nuevas ideias y esbozando la labor a realizar. Naturalmente, el profesor debe presidir con habilidad, dando lugar oportunamente a cada alumno, evitando divagaciones y haciendo oportunos comentarios y correcciones.

La objeción de que los alumnos pueden simular originalidad estudiando previamente las cuestiones a tratar se salva si el profesor no sigue un libro determinado, sino que él mismo inventa o prepara los trabajos o los elige de muchas fuentes. Cuando se trata de teoremas ya establecidos por el programa, queda el recurso de darle al alumno que viene «preparado», una dirección momentánea de la classe. Si persiste en la inadaptación al método, habrá que reducirlo a silencio, para que la clase pueda trabajar. En general, de acuerdo con la experiencia, el alumnado sigue las directivas del profesor y se adapta con gusto al método heurístico.

En este método no hay, por otra parte, inconveniente en que el alumno consulte libros apropiados para ayudarse o para comparar su demostración con la publicada. Lo que hay que evitar principalmente, es que el alumno absorba pasivamente la demostración, sin ningún esfuerzo para encontrarla.

5 — Método de Laboratorio — Historia

Por la influencia de educadores y filósofos de la época se produjo en el siglo pasado la introducción del método científico experimental, en el ciclo secundario de enseñanza. Pero en la Matemática, se conservó el antiguo método examinativo y recitativo, así como los programas clásicos de la materia. Claro está que esto en líneas generales, pues en algunos países la reforma se inició mucho antes.

La enseñanza de la Geometría ofrece para el estudioso un desarrollo histórico muy rico en matices diversos. Los Elementos de Euclides fueron adoptados durante muchos siglos como texto y tenían una fuerza tradicional enorme. En Francia, se inició hacia mediados del siglo XVI el movimento de liberación del rígido método de Euclides. Petrus Ramus, maestro eminente de la época, escribió un libro en el que abandonaba, tanto en la forma como en el fondo, dicho método. Considera la Geometría como el arte de medir bien, da indicaciones sobre aparatos de medición y numerosas y claras figuras. No deja de lado las consideraciones lógicas, si bien no las considera como objectivo sino como instrumento. En 1741 aparece «Eléments de Géometrie» del gran matemático Clairaut, quien sigue un plan semejante al del Ramus, comenzando con problemas prácticos que despiertan el interés más que un sistema de axiomas, según explica el mismo Clairaut; luego, paso a paso, evoluciona hacia ideas más generales. Otra gran figura francesa, Monge, tuvo gran influencia en los métodos de enseñanza. Introdujo la novedad de hacer ejecutar trabajos prácticos a los alumnos, en la Escuela. En la misma época, aparecieron los «Eléments de Géometrie» de Legendre que tuvieron gran influjo y que constituyeron com respecto a Clairaut y Petrus un «gran retroceso hacia los métodos de Euclides», según expresión de F. Klein [1]. A principios de siglo, se opera en Francia la reforma exigida por el extraordinario crecimiento de la industria y el comercio. En la Matemática, se trata de simplificar y hacer más intuitiva la enseñanza.

Italia e Inglaterra adhirieron fuertemente a la tradición Euclidea, si bien en diferente manera. Inglaterra adoptó algunas versiones de los libros de Euclides, sin procurar adaptarlos o elaborarlos para facilitar la comprensión, mientras que en Italia se adoptó el el espíritu de la obra. Cremona trabajó en este sentido y creó una corriente que ha producido obras de gran valor, que satisfacen en alto grado las exigencias lógicas, si bien pedagógicamente son pobres. El movimiento de reforma llegó también a estos dos países. En Italia la tendencia ha sido la de reducir la lógica abstracta y acentuar el aspecto intuitivo. En Inglaterra se formó un movimiento que tratamos en el párrafo siguiente.

El movimiento inglés comenzó hacia 1870, pero quien tuvo una influencia decisiva fué John Perry, ingeniero y profesor de una escuela técnica de Londres. En sus publicaciones y conferencias, Perry propugnó por el llamado método de laboratorio, en el cual las cosas se aprenden por medio de sus aplicaciones prácticas. En este método, se evitan en lo posible las deducciones y demostraciones lógicas, dedicándose exclusivamente a los conocimientos prácticos.

En Estados Unidos, contemporáneamente con Perry, dió impulso al método de Laboratorio, el presidente de la American Mathematical Society, Mr. Moore, en la reunión de 1902. En este país el método de laboratório ha tomado gran desarrollo, como lo muestran las publicaciones del National Council of Teachers of Mathematics, en especial el anuario N.º 18, 1945. [7]

En los países de habla germánica según señala F. Klein, el incremento de las necesidades de cultura, que en todas las clases sociales se ha notado desde 1870, ha exigido una transformación en el sentido de popularizarla lo más posible. Se ha concedido gran importancia a la intuición imediata, orientando los métodos hacia el estudio de objetos reales y bien conocidos por los alumnos.

Según el Profesor Emanuel S. Cabrera, en nuestro país el método de laboratório se designa como método Experimental, nomenclatura introducida en el curso de Metodología de la Enseñanza del Instituto Nacional del Profesorado Secundario y mantenida luego por el ministerio de Instrucción Pública.

6 — Método de Laboratorio — Consideraciones generales

De las dos designaciones: método de laboratorio y método experimental, preferimos ciertamente la primera, pues la Matemática no es una ciencia experimental. Como dice Toranzos [8]: «La Matemática es una libre creación de la mente humana y es en ella donde tienen existencia los objetos matemáticos; con lo empírico sólo están ligados por un remoto origen psicológico e histórico». Preferimos usar la palabra Laboratorio, pues se acomoda a la idea de una forma de enseñar y aprender con recursos materiales, de aprender haciendo, ayudándose con modelos, aparatos y experiencias, pero sin atribuir carácter experimental a la materia.

Un punto que debe quedar perfectamente aclarado es que: el método de laboratorio debe desarrollarse para despertar el interés, para enseñar a aplicar la Matemática, para plantear cuestiones matemáticas que surgen de cuestiones empíricas, etc. pero nunca para sustituir demostraciones. Debe respetarse el principio: «Lo inadmisible de todo punto, es dar como satisfactoria una demostración no rigurosa, una demostración a medias, «à peu près», que exigiendo un complemento de fe en el alumno, ahoga su naciente sentido crítico, inutilizándolo para toda ulterior labor original (Rey Pastor [9]).

El profesor, para mantener este princípio, se verá obligado a enunciar muchos de los teoremas, a explicar sus alcances y a dar sus aplicaciones, sin poder dar su demostración. Podrá hacer algún llamado a la intuición, al significado físico, etc., pero deberá evitar que eso se interprete como demostración. El profesor deberá hacer una selección de los teoremas más importantes que demostrará con todo el rigor posible. El alumno, a través de estas demostraciones, realizadas con todo cuidado, irá captando la verdadera esencia de la Matemática. Si es necesario hacer esto en los cursos para Ingenieros (véase Rey Pastor, «Cálculo Infinitesimal»), se comprende que esté plenamente justificado hacerlo en las escuelas técnicas secundarias.

Volviendo a la aplicación del método de laboratorio, se trata de que el alumno tenga interés en su trabajo, presentándole la tarea en forma tal que le resulte atractiva. Se comprende que, en las escuelas técnicas, esto se consigue dedicando una parte del curso a la observación de relaciones matemáticas, que surgen de hechos experimentales o prácticos. Estos pueden referir se a la Física, la Química, la Economía y aún de la Biología.

La matemática es la primera materia en que el alumno se ve seriamente obligado a hacer sus propias observaciones y descubrimientos, porque no le basta con recibir la información correspondiente, como ocurre con otras materias. El hacer observaciones y descubrimientos es relativamente fácil en el terreno experimental, pero es más difícil, en el terreno de las cosas abstractas. Como la Matemática se aplica en las ciencias físicas, en la agrimensura, en la técnica en general, etc., no está fuera de lugar llevar al alumno a problemas sencillos de ese tipo y enseñarle a pasar del fenómeno natural a una representación matemática. Como ejemplo simple podemos citar el siguiente: el alumno construye un cierto número de triángulos, mide sus ángulos, se le indica que busque alguna lei y él encuentra que su suma es una constante experimental (dentro de cierta precisión). A los triángulos que él ha dibujado, corresponden entes geométricos que ya conoce; se le propone entonces que formule para el triángulo geométrico un teorema, que corresponda al resultado obtenido experimentalmente. Luego, se le pide que, apoyándose en axiomas y teoremas ya establecidos, demuestre que la suma de los tres ángulos es una constante y que halle su valor.

Essas mediciones y experiencias que el alumno realiza, no son Matemática, pero lo llevan a la Matemática. Le muestran los alcances prácticos de la Matemática. Sigue el camino que siguió la Humanidad desde sus orígenes y en su mente se va reproduciendo el proceso que ocupó milenios, hasta llegar a los conocimientos actuales. El alumno que tenga condiciones y vocación podrá llegar con el tiempo a las altas cumbres de la matemática moderna, pero no se puede pedir, al que es casi un niño, y que se ha inscripto en una carrera técnica, que razone como un Weierstrass, por ejemplo, de quien dice Poincaré: «Se pueden hogear todos sus libros sin encontrar una sola figura». (En realidad, según informa Hadamard [4], se ha logrado saber que *una vez* Weiers-hizo *una figura*, al explicar una demostración). El alumno de la escuela técnica, no sólo debe hacer figuras, sino también modelos, aparatos, etc.

Debe tenerse en cuenta además, que, en las escuelas técnicas, la matemática se estudia para ser aplicada, para ser utilizada en problemas concretos o económicos. En estos cursos, no sólo se trata de que por medio de la Matemática el alumno aprenda a razonar y a desenvolverse en el terreno teórico, sino de que aprenda a resolver problemas de índole técnica.

La finalidad de la Escuela en que está ubicado el profesor de Matemáticas, debe ser tenida muy en cuenta por éste y debe primar por sobre sus aficiones y aún por sobre la esencia de la materia, considerada como ciencia pura El Profesor cuidará de que la adaptación a fines específicos se haga, manteniendo toda la altura que sea compatible con la capacidad de asimilación del alumnado. Tan perjudicial resulta un nivel muy alto como uno muy bajo.

F. Klein opina a este respecto: «Es suficiente hacer notar la conveniencia de que la enseñanza se adapte a la orientación especial de la cultura de cada época. No creemos pecar de utilitarios diciendo que, el objectivo de la escuela moderna debe ser capacitar a gran número de individuos para la colaboración en los fines de la cultura humana, cuya tendencia esencial es hoy día la actuación práctica. De aquí se deduce la necesidad de conceder cada día más atención a las ciencias naturales y a la técnica, en el estudio de la matemática».

Como se ve, estas ideas de Klein si se aplican a las escuelas técnicas, en vez de a la escuela en general, coinciden con lo que sostenemos más arriba.

Para terminar con estas consideraciones generales se da a continuación un resumen del prefacio de una obra de F. M. Saxelby, sobre Matemática Práctica [10]. El autor analiza el problema de la enseñanza matemática y su relación con la experiencia:

«Se objetan a menudo los métodos de la matemática práctica, sobre la base de que la matemática no es una ciencia experimental. Esto es cierto; pero la matemática (intercalamos: por lo menos la de la escuela secundaria técnica) se construye sobre un sistema de convenciones que no son arbitrarias sino elegidas de acuerdo con la experiencia. Es pues lógica y educacionalmente necesario que el que se inicia en cualquier rama de las matemáticas, tenga claramente definida y realizada la correspondiente parte de su experiencia».

«Esto ha sido reconocido en el criterio ahora generalmente aceptado, de que el estudio de la geometría deberia comenzarse con un curso de medidas experimentales».

El plan del Saxelby es el no dar en su libro un sólo resultado sin su correspondiente prueba, cosa que en un curso no es factible. Pero esas pruebas van siempre acompañadas por verificaciones gráficas o numéricas, para que el alumno realice su propia experiencia del espacio. El método intuitivo no sustituye al estudio riguroso, sino que prepara el camino para llegar a él. El autor sostiene que el método natural de avance es el de una serie de sucesivas aproximaciones hasta llegar al rigor lógico.

Esta última observación es interesante pues el aceso a muchas cuestiones de la Matemática por vía rigurosa sería de todo punto imposible en la escuela secundária. Para varias cuestiones habría que apelar a la teoría de conjuntos, por ejemplo, que evidentemente no encaja en la escuela secundaria y que habría que discutir si es aceptable en escuelas universitarias tecnicas. Por ejemplo, para estudiar con rigor los Métodos de la Matemática Estadística (materia eminentemente aplicada), si tomamos la obra de Krámer, debemos iniciarnos con teoría de conjuntos, teoría de la medida y de la integración y otras varias cuestiones superiores.

No se trata pues de hacer concesiones gratuitas, se trata de colocarse en la realidad de las cosas, manteniendo todo el rigor posible, no demostrando lo que no se puede demostrar antes de dar demostraciones ilusorias o falsas, pero usando todos los recursos lícitos para que el alumno aprenda y sea un elemento útil, sin una mente cargada de conceptos superiores que no comprende y no sabe manejar.

7 — Método de laboratorio — Su realización

Qué és o en qué consiste un Laboratório de Matemáticas?

El Laboratorio de Matemáticas es un aula dotada de elementos que el alumno utiliza para el aprendizaje práctico de la materia, de acuerdo con las ideas expuestas en los parágrafos anteriores. El Laboratorio tiene algo de parecido con otros laboratorios o gabinetes de artes y ciencias, pero es de estructura mucho más simple.

Qué debe contener el Laboratorio de Matemáticas?

1.° — *Moblaje* — Mesas de tablero horizontal, con espacio individual algo menor que en un aula de dibujo.

Un gran pizarrón que ocupe toda la pared del frente, con una parte lisa, y otra, de más o menos 1/3 del total, cuadriculada con líneas de tono claro, destacando las líneas cada 5 y 10 unidades. Sobre esta parte o en las paredes laterales se colocarán pizarrones móviles de madera terciada gruesa o de tela especial, que lleven reticulado logarítmico, semilogarítmico, etc.

Un armario destinado a láminas, dibujos, gráficos, que irán realizando los alumnos y que se irán incorporando como material didáctico. En el mismo armario habrá una sección para libros y un cajón para fichas.

Un armario-vitrina para los modelos, instrumental, aparatos.

Un avisador o dos, de pared, para boletines de noticias, temas de trabajos, instrucciones e informaciones útiles.

2.° — *Material bibliográfico.* — Se tendrá una pequeña biblioteca formada por: una enciclopedia de Matemáticas o conjunto de obras que le sea equivalente, tablas de funciones, cuadrados, cubos, raíces, etc., funciones trigonométricas, logarítmos, etc. tablas financieras, manuales.

3.° — *Instrumental* — Utiles de dibujo para pizarrón y para papel: Compases, reglas, escuadras, compás de proporciones, transportadores, etc.

Instrumentos de medida: reglas centimetradas y milimetradas, cintas métricas, calibres, transportadores, cronómetros, termómetros, balanzas.

Instrumentos de cálculo: reglas de cálculo de diversos tipos, incluyendo de tamaño grande (más de 1 metro) para enseñanza colectiva.

Máquinas de calcular.

Planímetros, intégrafos.

Aparatos simples para medidas angulares, por ejemplo: una escuadra e pínula rudimentaria, etc.

4.° — *Láminas* — Conjunto de láminas con: Desarrolos de cuerpos geométricos — Reproducción de páginas de tablas numéricas — Representación de funciones — Nomogramas de diversos tipos — Figuras complejas necesarias para las demostraciones, como algunas de geometría del espacio.

5.° — *Aparatos* — Dispositivos y mecanismos que permitan el trazado mecánico de curvas: elipses, parábolas, hipérbolas, cicloides, etc.

Aparatos para realizar algunas experiencias simples que muestren al alumno la formulación matemáticas de leyes físicas.

6.° — *Modelos* — Modelos de figuras geométricas y de cuerpos geométricos.

Ángulos formados por barras articuladas, triángulos, polígonos de barras articuladas.

Poliedros regulares e irregulares. Poliedros semirregulares o de Arquimedes. Estos poliedros serán macizos y algunos de alambre.

Conos, cilindros, esferas. Sólidos de revolución. Superficies regladas.

Cuerpos geométricos seccionados por planos.

Recipientes de igual altura y capacidad, con secciones equivalentes (principio de equivalencia).

Modelos que representen las figuras de los teoremas de la geometría del espacio.

Modelos de triángulos esféricos y pizarrón esférico.

Recipiente semiesférico y cilindro-cónico de volúmenes iguales (equivalencia).

7.° — *Materiales* — El Laboratorio tendrá un pequeño acopio de materiales para los trabajos que se realicen así como algunas herramientas. Como ilustración mencionamos: cartulina, cartón, madera terciada, hilo, alambre, goma, cinta adhesiva, cemento, chapa fina... Tijeras, corta-papeles, pinzas, sierra...

Cómo se trabaja en el laboratorio?

La forma de trabajar guarda similitud con las de otros laboratorios. El Profesor planea los trabajos, los asigna a cada alumno o grupo de alumnos especificando el objeto, indicando los elementos materiales necesarios y dando las instrucciones necesarias.

Afin de dar una idea concreta de la forma de trabajar se agregan a continuación dos trabajos tipo. Uno se refiere a un problema de geometría del espacio, con la construcción del modelo correspondiente. El otro se refiere al teorema de Pitágoras: el alumno estudia varios casos realizando medidas y se le pide que trate de hallar la relación, se prevé que fracase en este método empírico, y se le dan instrucciones para tomar una vía racional apoyándose en conocimientos previos, se le dan indicaciones para guiarlo en ese sentido. Luego se le ilustra para la comprobación geométrica y también para la numérica.

Clase de Laboratorio de Matemáticas

1.er Ejemplo

Objeto: Construcción de un poliedro semiregular.

Definición: Se llama poliedro semi-regular o de Arquímedes a un sólido cuyos ángulos poliedros son iguales y cuyas caras están formadas por dos o más clases diferentes de polígonos regulares Ejemplo: un prisma cuyas bases son triángulos equiláteros e cuyas caras son cuadrados.

Preparación :

Defina los polígonos regulares, dibuje algunos.

— Cuántas caras de esa clase pueden concurrir a formar los ángulos poliedros ?

— De cuántas clases pueden ser las caras ?. Por ejemplo : dos exágonos y un cuadrado pueden reunirse ?

— Cómo serán las aristas ? iguales o no ?

Elementos :

Cartulina
Cinta adhesiva
Compás
Regla o escuadra
Tijera

Plan de trabajo :

Construir un poliedro semi-regular, con cuatro caras exagonales y cuatro caras triángulares.

1 — Corte en cartulina los 4 exágonos y los cuatro triángulos y arme el sólido.

2 — Desarme el sólido y obtenga su desarrollo en el plano.

3 — Dibuje el desarrollo con las indicaciones para el armado.

4 — Anote el número de caras, vértices y aristas y verifique el teorema de Euler.

5 — Qué relación hay entre este poliedro y el tetraedro regular ?

6 — Calcule la superficie y el volumnén del sólido en estudio.

7 — Proyecte los cortes sobre un prisma de madera para obtener este poliedro.

2.º Ejemplo

Objeto : Teorema de Pitágoras.

Elementos :

Escuadras
Regla milimetrada
Tablas numérieas

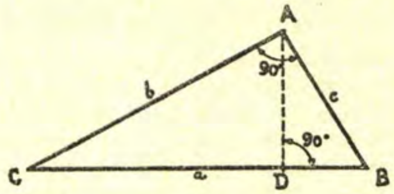
Plan de trabajo :

1 — Dibuje varios (no menos de 5) triángulos rectángulos de hipotenusa igual a 10 cm. Y otros tantos, semejantes, de hipotenusa igual a 5 cm.

2 -- Anote en un cuadro los valores de los lados de los triángulos, medidos en el papel.

3 — Trate de hallar entre esos valores, una relación de igualdad que vincule los tres lados de los triángulos.

4 — Si la halla, enúnciela con carácter general y busque su demostración. — Si no, siga las



instrucciones suguientes, que le ayudarán a encontrarla.

5 — Observe los triángulos que existen en la figura y busque la relación que hay entre ellos.

6 — Enuncie las relaciones métricas que se cumplen respecto a los lados a , b y c .

7 — Obtenida la relación, si no lo hizo en 4 — hágalo ahora y complete el cuadro de valores, mostrando cómo se cumple, para los casos que allí figuran.

8 — Trate de demostrar el teorema, por equivalencia de figuras. Para ello dibuje un triángulo rectángulo y construya un cuadrado sobre cada lado. Trace la altura correspondiente a la hipotenusa y prolónguela, dividiendo al cuadrado correspondiente en dos rectángulos. A partir de aquí, debe tratar de seguir por sus propios medios. Si le es necesario, consulte al profesor.

NOTA : — Lea atentamente estas instrucciones. Anote lo que no le resulte claro y pida aclaración al profesor. Esfuércese por interpretar las instrucciones verbales o escritas, como la 8— sobre construcción de figuras.

BIBLIOGRAFIA

Se da a continuación la bibliografía consultada para la preparación de este trabajo.

[1] — KLEIN F. — *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* 2 tomos — Madrid 1927-1931. Esta obra es una de las más interesantes sobre el problema de la enseñanza secundaria, el cual analiza profunda y sistematicamente.

[2] — POINCARÉ H. — *Ciencia y Método* — Espasa Calpe — 1944.

[3] — SCHILLER — *Handbuch der praktische Pedagogik* — (Cit. por [6]).

[4] — HADAMARD J. — *The psicology of invention in the mathematical field* — Princeton University Press — 1945. No es una obra sobre métodos de ense-

ñanza, pero su análisis de la psicología del inventor y del creador abarca aspectos de interés para el tema de este trabajo. Especialmente interesante es el capítulo VII — «Different kinds of mathematical minds».

[5] — Mclellan-dewey — *Psichology of number*—(Cit. por [6]).

(6) — Young J. W. A. — *Fines, valor y método de la Enseñanza Matemática*. Ed. Losada-1947 — Selección de la obra *The teaching of Mathematics in the elementary School.*

[7] — National Council of Teachers of Mathematics — *Multisensory aids in the teaching of Mathematics* — 18 Yearbook-1945. Este anuario de la Asosiación de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos reune numerosos trabajos sobre la enseñanza de la Matemática por el método de Laboratorio, abarcando sus diversos aspectos incluso el histórico y el material.

[8] — Toranzos F.—*Introducción a la epistemología y fundamentación de la Matemática* — Espasa-Calpe —1948. Este libro da una clara idea de lo que es la Matemática en el estado actual de los conocimientos humanos. Su conocimiento es importante para que el Profesor de enseñanza técnica aplique métodos prácticos sin perder de vista la esencia matemática.

[9] — Rey Pastor — *Elementos de Análisis Algebraico* — Madrid 1930. Hemos consultado la introducción de esta obra por sus elevadas ideas sobre la enseñanza de la Matemática.

[10] — Saxelby F. — *A course in Practical Mathematics* — Longmans, Green & C.°. Londres-1944.

San Juan, 1949.

Sull'approssimata rappresentazione di alcune serie con polinomi semplici costruibili elementarmente

Nota di ***Vincenzo G. Cavallaro***

SUNTO. Alcune serie notevoli, non costruibili elementarmente, vengono rappresentate, in un cerchio di raggio unitario, da polinomi semplici molto approssimati alla somma delle serie e costruibili elementarmente.

1. — Preliminari. Nelle formule che seguono, L_x indica il lato del poligono regolare di x lati inscritto in un circolo di raggio unitario e $\equiv$ un signo d'uguaglianza approssimata.

Per la dimostrazione delle stesse formule ocorrono i valori dei seni degli *angoli multipli di* 3 *gradi* e tali valori son dati, con 10 cifre decimali, in certe tavole numeriche come, ad esempio, nel diffusissimo Formulario del prof. G. Lazzeri (Casa editrice Giusti, Livorno). Si sa che detti seni, come i lati dei poligoni regolari euclidei, si possono costruire con molta rapidità e precisione, specialmente se nel processo costruttivo intervengono i noti metodi del Mascheroni col solo compasso (Vedi appunto una mia Nota nel *Bollet. della Unione Matematica Italiana* XI, N. 3, 1932, Bologna).

Conviene qui riportare i seguenti valori corrispondenti al *logaritmo neperiano* di 2, al quadrato e al biquadrato di π rapporto d'una circonferenza al suo diametro:

$$\log 2 = 0{,}69314\ 71805\ 59945 \cdots \text{(1)}$$

$$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358 \cdots \text{(2)}$$

$$\pi^4 = 97{,}40909\ 10340\ 02437\ 23264 \cdots \text{(2)}$$

2. — Proposizione. *La serie*

$$P_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

ha per somma il logaritmo neperiano di 2 *e vien rappresentada approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal trinomio*

$$P_1 \equiv 5 \operatorname{sen} 87^\circ + \frac{7}{10} - 5 \equiv 0{,}69314\ 76740$$

con errore ε *minore di* $\dfrac{1}{2\,024200}$ *del raggio stesso.*

3. — Proposizione. *La serie*

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$

ha per somma (3) $\dfrac{\pi^2}{12} = 0{,}82246\ 70334\ 2411 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio*

(1) G. Bertrand—*Traité d'Algèbre*, Parte II, p. 142, Paris, 1878.

(2) G. Peano—*Tavole numeriche* Soc. Tipogr. Editrice Torinese

(3) E. Cesaro—*Analisi Algebrica*, p. 176, Torino, 1894.

unitario dai seguenti polinomi:

$$P_2 \equiv \frac{1}{2}(L_3 + L_{20}) - \frac{1}{5} \equiv 0{,}82245\ 98688\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{139\,000}$$

$$P_2 \equiv (L_5 + L_{10} + L_{12}) + \frac{1}{4}(L_3 + L_{20}) - 2 \equiv$$

$$\equiv 0{,}82247\ 2517\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{180\,000}$$

$$P_2 \equiv \frac{1}{3}(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \text{sen}\ 75^\circ + \text{sen}\ 36^\circ) \equiv$$

$$\equiv 0{,}82247\ 05273\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{285\,710}$$

$$P_2 \equiv \text{sen}\ 69^\circ - \frac{1}{9} \equiv 0{,}82246\ 93154\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{436\,600}$$

$$P_2 \equiv \frac{2}{3}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\right) \equiv$$

$$\equiv 0{,}82246\ 70023\ 30\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{32\,154\,340}.$$

4. — Proposizione. *La serie.*

$$P_4 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \cdots$$

ha per somma(4) $\frac{7\pi^4}{720} = 0{,}94703\ 28294\ 97245$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dai seguenti polinomi*:

$$P_4 \equiv \frac{1}{2}\left(5\,L_{12} + \frac{3}{5}\right) \equiv 0{,}94704\ 76127\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{67\,500}$$

$$P_4 \equiv \text{sen}\ 21^\circ + \text{sen}\ 57^\circ - \frac{1}{4} \equiv 0{,}94703\ 85175\,,$$

$$\varepsilon < \frac{1}{175\,700}$$

$$P_4 \equiv 4\,\text{sen}\ 75^\circ - \frac{11}{3} + \frac{3}{4} \equiv 0{,}94703\ 66385\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{262\,400}$$

5. — Proposizione. *La serie*

$$K_2 = \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} + \frac{5}{6^2} - \cdots$$

ha per somma (5) $\frac{\pi^2}{12} - \log 2 = 0{,}12931\ 98528\ 6416 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal binomio*

$$K_2 \equiv \text{sen}\ 39^\circ - \frac{1}{2} \equiv 0{,}12932\ 03911\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{1\,855\,200}.$$

(4) E. Cesaro — loc. citato, p. 176.

(5) E. Cesaro — loc. citoto, p. 179.

6. — Proposizione. *La serie*

$$V = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - $$
$$- \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots$$

ha per somma (6) $\frac{3}{2}\log 2 = 1{,}03972\ 07708\ 39 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dai seguenti trinomi*:

$$V \equiv \frac{1}{3}\left(L_3 - L_{20} + \frac{17}{10}\right) \equiv 1{,}03972\ 72925\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{153\,600}$$

$$V \equiv \frac{3}{2}\left(5\,\text{sen}\ 87^\circ + \frac{7}{10} - 5\right) \equiv$$

$$\equiv 1{,}03972\ 15110\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{1\,349\,500}.$$

7. — Proposizione. *La serie*

$$H_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

ha per somma (7) $\frac{\pi^2}{8} = 1{,}23370\ 05501\ 3616 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dai seguenti polinomi*:

$$H_2 \equiv \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{3} + \text{sen}\ 36^\circ + \text{sen}\ 75^\circ) \equiv$$

$$\equiv 1{,}23370\ 57910\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{190\,470}$$

$$H_2 \equiv \frac{3}{4}\left(L_3 + L_{20} - \frac{2}{5}\right) \equiv 1{,}23368\ 9803\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{92\,500}$$

$$H_2 \equiv \sqrt{7} - \sqrt{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} \equiv$$

$$\equiv 1{,}23370\ 05034\ 957\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{21\,400\,000}.$$

8. — Proposizione. *La serie*

$$\Delta = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots$$

ha per somma (8) $\Delta = 1{,}39320\ 3929 \cdots$ *e vien rappresentata approssimativamente nel cerchio di raggio unitario dal polinomio*

$$\Delta \equiv 2\left(5\,\text{sen}\ 39^\circ - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - 4 \equiv$$

$$\equiv 1{,}39320\ 39110\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{52\,631\,000}.$$

(6) E. Cesaro — loc. citato, p. 149.

(7) U. Dini — *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche.* Vol. 1, p. 155, Pisa, 1880.

(8) G. Novi — *Algebra Superiore,* Vol. I, p. 307, Firenze, 1863.

9. — Proposizione. *La serie*

$$\Psi_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

ha per somma $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\,81633\,9744 \cdots$ *e vien rappresentata aprossimativamente nel cerchio di raggio unitario del trinomio*

$$\Psi_1 \equiv \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 18^\circ + \sqrt{21} - \frac{7}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv 0{,}78539\,81723\,32\,, \quad \varepsilon < \frac{1}{111\,111\,000}\,.$$

10. — Osservazione. Tutti i denominatori delle frazioni esprimenti il grado di approssimazione conseguito sono stati *arrontati*, ma in realtà sono lievemente maggiori di quelli signati per cui *è ancora minore l'errore commesso.*

Nota Bibliografica. Per altri lavori sulle serie, congeneri all'attuale, vedi Note di V. G. Cavallaro in *Tohoku Mathem. Journal* Vol. 42, 1936, Sendai; *Anais da Faculdade de Ciencias da Univ. do Porto*, 1937; *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timisoara*, XI, 1943, N. 1–2; *Bolletino di Matematica*, 1941, N. 4, Genova.

Cefalu (Sicilia).

A função de Dirac — Sua interpretação matemática — II

por **Ruy Luís Gomes**

Ficou demonstrado no artigo anterior [1] que, dado um ponto fixo $x \in R^n$, não existe nenhuma função, $f(y)$, somável em todo conjunto compacto [2] de R^n, tal que

$$(6) \qquad \psi(x) = \int_{R_n} f(y)\,\psi(y)\,dy,$$

para toda função $\psi \in \Psi$, designando por Ψ a família das funções contínuas sobre R^n, cada uma delas igual a zero no exterior de um conjunto compacto [3].

No entanto, se partimos de uma função localmente, somável, [2] $f(y)$, o integral que figura em (6) define uma funcional linear $A(\Psi)$.

Na verdade, Ψ é um espaço vectorial linear [4] e

$$(7) \qquad A(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1 A(\Psi_1) + c_2 A\,\psi_2\,.$$

Por outras palavras: cada função localmente somável, $f(y)$, gera a funcional linear

$$(8) \qquad A(\psi) = \int_{R^n} f(y)\,\psi(y)\,dy\,, \quad \psi \in \Psi\,.$$

Ora é possível demonstrar o seguinte *Teorema. Se $f_1(y)$ e $f_2(y)$, ambas localmente somáveis, geram a mesma funcional, só podem diferir num conjunto de medida nula.*

Suponhamos, com efeito, que

$$(9) \quad \int_{R^n} f_1(y)\,\psi(y)\,dy = \int_{R^n} f_2(y)\,\psi(y)\,dy\,, \quad \psi \in \Psi$$

Considerando um conjunto aberto limitado G, designemos por g a sua função característica.

Utilizando a decomposição $G = \Sigma I_n$ e aplicando o teorema de Urysohn [5], vem

$$g(y) = \lim_n \psi_n(y)\,,\ y \in R^n$$

e, portanto,

$$f_1(y)\,g(y) = \lim_n f_1(y)\,\psi_n(y)$$

$$f_2(y)\,g(y) = \lim_n f_1(y)\,\psi_n(y).$$

Ora, como $f_1(y)\,\psi_n(y)$ é uma função somável em R^n e

$$|f_1(y)\,\psi_n(y)| \leqslant |f_1(y)|\,g(y)\,,\ |f_2(y)\,\psi_n(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_2(y)|\,g(y)\,,$$

sendo $|f_1(y)|\,g(y)\,,\ |f_2(y)|\,g(y)$ funções somáveis, resulta que [6]

$$(10) \quad \int_{R^n} f_1(y)\,g(y)\,dy = \lim_n \int_{R^n} f_1(y)\,\psi_n(y)\,dy$$

---

(1) N.º 46 desta revista.

(2) Podemos chamar a $f(y)$, função *localmente somável*. Na verdade, se $f(y)$ é somável em todo conjunto compacto de R^n, cada ponto de R^n admite uma vizinhança — esfera ou intervalo — onde $f(y)$ é somável. Inversamente, verificada esta última hipótese, basta recorrer ao teorema de cobertura de Borel – Lebesgue para concluir que $f(y)$ é somável em todo conjunto compacto de R^n.

(3) Chamando *suporte* de ψ ao fecho do conjunto dos pontos $y \in R^n$ tais que $\psi(y) \neq 0$, Ψ é a família das funções contínuas de *suporte compacto*. Exemplo: qualquer curva em forma de sino: o *suporte* é a base de apoio sobre o espaço R^n.

(4) Se ψ_1, ψ_2 pertencem a Ψ, o mesmo acontece a $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, quaisquer que sejam os números reais c_1, c_2.

(5) Ver artigo anterior, pág. 3.

(6) O teorema de Lebesgue-Fatou diz-nos que: se $\{f_n\}$ é uma sucessão convergente de funções somáveis num conjunto mensurável E e se $|f_n| \leq h$, sendo h somável em E, então,

$$\int_{R^n} f_2(y)\, g(y)\, dy = \lim_n \int_{R^n} f_2(y)\, \psi_n(y)\, dy\,.$$

Atendendo a (9), (10) e a que $g(y) = 0$ para $y \in R^n - G$ e $g(y) = 1$ para $y \in G$, vem

$$\int_G f_1(y)\, dy = \int_G f_2(y)\, dy\,,$$

donde

(11) $$\int_G (f_1 - f_2)\, dy = 0\,.$$

Como G é qualquer conjunto aberto limitado de R^n, resulta ainda

(11') $$\int_E (f_1 - f_2)\, dy = 0\,,$$

para todo conjunto E mensurável e limitado de R^n.

Representemos, então, por E_n o conjunto dos pontos de R^n onde $f_1 - f_2 \geqslant \frac{1}{n}$ e decomponhamo-lo numa infinidade numerável de conjuntos limitados e mensuráveis E_n^m. Como, em virtude de (11'),

$$\int_{E_n^m} (f_1 - f_2)\, dy = 0$$

e, por outro lado,

$$\frac{1}{n} \mid E_n^m \mid \leqslant \int_{E_n^m} (f_1 - f_2)\, dy\,,$$

vem $|E_n^m| = 0$ e, portanto, $|E_n| = 0$. O conjunto dos pontos onde $f_1 - f_2 > 0$ tem medida nula e o mesmo se diz do conjunto dos pontos onde $f_1 - f_2 < 0$. Em resumo, $f_1 = f_2$, a menos de um conjunto de medida nula.

Identificando, então, as funções localmente somáveis que só diferem num conjunto da medida nula, chegamos ao seguinte resultado, *é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre as funções localmente somáveis $f(y)$ e um certo sub-conjunto das funcionais lineares definidas no espaço vectorial Ψ*.

Trata-se das funcionais lineares

$$A(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy\,,$$

e essa correspondência é um verdadeiro isomorfismo, pois, de

$$A_1(\psi) = \int_{R^n} f_1(y)\, \psi(y)\, dy$$

$$A_2(\psi) = \int_{R^n} f_2(y)\, \psi(y)\, dy\,,$$

tira-se

$$A_1(\psi) + A_2(\psi) = \int_{R^n} (f_1(y) + f_2(y))\, \psi(y)\, dy\,.$$

Ora, este isomorfismo abre o caminho para um novo conceito de função [7]: *identificamos uma função localmente somável*, f (y), *(e todas que lhe são equivalentes) à funcional linear*

(12) $$f(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy\,, \quad \psi \in \Psi$$

Vejamos agora como interpretar a *pseudo-função* de Dirac $\delta_x(y)$, $y \in R^n$. Por um lado, esta «função» aparece na Teoria de Dirac como um símbolo, prático[8], da funcional linear

(13) $$A(\psi) = \psi(x)\,, \quad \psi \in \Psi\,,$$

x fixo.

Por outro lado, $\delta_x(y)$ não é uma função no sentido há pouco definido, em virtude do que ficou demonstrado no nosso primeiro artigo.

Quer dizer, $\delta_x(y)$ é uma funcional linear $A(\psi), \psi \in \Psi$, mas não daquele tipo, (12), característico das funções.

Mas é possível marcar de uma maneira mais sugestiva a diferença entre uma *função* $f(y)$ e a *pseudo-função* $\delta_x(y)$ de Dirac. Efectivamente, como ψ é de suporte compacto, $\int_E \psi(y)\, dy$, define para cada conjunto mensurável e limitado, E, uma função finita de conjunto, $\mu(E)$, com a seguinte propriedade: se: $E = \Sigma_n E_n$, $E_n E_m = 0$, E_n mensurável,

$$\mu(E) = \Sigma\, \mu(E_n)$$

e esta série é absolutamente convergente[9], quere dizer, $\mu(E)$ é uma *medida*.

Em consequência,[10]

(13') $$f(\psi) = \int_{R^n} f(y)\, \psi(y)\, dy = \int_{R^n} \psi(y)\, d\mu\,,$$

ficando assim a funcional $f(\psi)$ expressa pelo integral

$f = \lim\limits_n f_n$ é somável em E e, além disso, $\int_E f\, dy = \lim\limits_n \int_E f_n(y)\, dy$. O caso do texto corresponde a $E = R^n$, $f_n(y) = f_1(y)\, \psi_n(y)$ ou $f_n = f_2(y)\, \psi_n(y)$, $h = |f_1(y)|\, g(y)$ ou $h = |f_2(y)|\, g(y)$. Note-se ainda que $|f_1|$, $|f_2|$ são localmente somáveis ao mesmo tempo que f_1, f_2 e g é somável em R_n e nula no exterior de G. Como G é limitado, pode encerrar-se num compacto e daí resulta que $|f_1|\, g$ e $|f_2|\, g$ são somáveis em R^n. (Ver S. Saks adeante citado).

[7] Ver L. Schwartz — *Théorie des Distributions*, Tome I — Paris, 1950 — Págs. 17, 18, 19.

[8] Ver artigo anterior.

[9] Basta recordar que $|\mu(E_n)| \leq \int_{E_n} |\psi|\, dy$, juntamente com a circunstância de $|\psi|$ ser somável em E, donde

$$\Sigma\, |\mu(E_n)| \leq \Sigma \int_{E_n} |\psi|\, dy = \int_E |\psi|\, dy < \infty\,.$$

[10] Para deduzir esta fórmula é conveniente começar por uma função tendo apenas um número de valores distintos $\neq 0$, cada um deles num conjunto mensurável limitado, e depois efectuar uma passagem ao limite de maneira a obter no final uma função localmente somável arbitrária (Ver S. Saks, adeante citado).

de $\psi(y)$ em ordem à medida $\mu(E)=\int_E f(y)\,dy$, e não em termos de um integral de Lebesgue.

Trata-se de uma medida *absolutamente*[11] *contínua* e demonstra-se[12] que, inversamente, se μ é absolutamente contínua, então,

$$(14)\qquad \int_{R^n}\psi(y)\,d\mu=\int_{R^n}f(y)\,\psi(y)\,dy\,,$$

sendo $f(y)$ a *densidade* de μ isto é, a função *localmente somável* tal que

$$(15)\qquad \mu(E)=\int_E f(y)\,dy\,.$$

As medidas absolutamente contínuas, estão, pois, em correspondência biunívoca com as funções — *podem identificar-se com elas*[13].

Voltando agora à pseudo-função de Dirac, símbolo de funcional

$$A(\psi)=\psi(x)\,,\quad x \text{ fixo},\quad \psi\in\Psi,$$

basta introduzir a *medida, não absolutamente contínua*, assim definida

$$\mu(x)=1\quad(\text{massa } +1 \text{ no ponto } x)$$
$$\mu(E)=0,\quad \text{quando } x\notin E\,,$$

para se poder escrever

$$A(\psi)=\delta_x(\psi)=\int_{R^n}\psi(y)\,d\mu\,.$$

Quere dizer: *a pseudo-função de Dirac é uma medida mas não uma função*[14].

Deixamos para um terceiro artigo a definição da *derivada* de uma função e, de um modo geral, de uma *distribuição*. Só então se atingirá o verdadeiro alcance da Teoria das Distribuições, concebida pelo matemático francês L. Schwartz, um dos mais activos colaboradores do grupo Bourbaki, que tão profunda influência tem tido no desenvolvimento e consolidação da matemática moderna.

(Continua)

[11] Isto significa que $\mu(E)$ tende para zero com a medida-L de E.

[12] Consultar S. Saks — *Theory of the integral*, Varsóvia, 1937.

[13] Ver L. Schwartz, loc. cit., pág. 18.

[14] L. Schwartz, loc. cit., pág. 19.

Problèmes de dépouillements — III

Problèmes intéressant un nombre non limité de candidats

par Pierre Dufresne

Deuxième problème.

Comme dans le problème précédent on suppose que des candidats $A, B, C, D\cdots M, N$ aient obtenu des nombres respetifs de suffrages $a, b, c, d\cdots m, n$.

Nous désignerons comme précédemment par θ le nombre total des bulletins déposés au nom de l'un quelconque de ces candidats et par $N_{(a,b,c,d,\cdots m,n)}$ le nombre de tous les dépouillements possibles de ces θ bulletins.

Il s'agit de calculer *la probabilité pour que durant tout le dépouillement le nombre des bulletins comptés portant le nom de* A *ne soit jamais inférieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* B, *ce dernier nombre jamais inférieur à celui des bulletins portant le nom de* C ··· *le nombre des bulletins comptés portant le nom de* M *jamais inférieur à celui des bulletins comptés portant le nom de* N.

Je designerai par:

$$P_{(a,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]$$

la probabilité cherchée et par:

$$N_{(a,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\ldots\geq M\geq N]$$

le nombre des dépouillements différents possibles des θ bulletins qui vérifient la condition posée.

Donc:

$$P_{(a,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=\frac{N_{(a,b,c\ldots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]}{N_{(a,b,c\cdots m,n)}}$$

Les conditions imposent un ordre déterminé dans le classement respectif constant des candidats (A toujours au moins autant de suffrages dépouillés que B, B toujours au moins autant de suffrages dépouillés que $C,\cdots$). Nous désignerons par $a_1, b_1, c_1,\cdots m_1, n_1$, les rangs respectifs imposés aux candidats $A, B, C,\cdots M, N$ c'est à dire que $a_1=1$, $b_1=2$, $c_1=3\cdots$ etc.

Enfins nous poserons:

$$\alpha=a+(n_1-1),\ \beta=b+(n_1-2),\ \gamma=c+(n_1-3)\cdots$$
$$K=k+(n_1-k_1)\cdots\ \mu=m+(n_1-m_1)=m+1\,,$$
$$\nu=n+(n_1-n_1)=n\,.$$

Lemme. *Si* $a\geqslant b\geqslant c\geqslant\cdots\geqslant n$

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=$$

$$=N_{(a-1,b,c\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]+$$
$$+N_{(a,b-1,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]+$$
$$+N_{(a,b,c-1,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]+$$
$$+\cdots$$
$$+N_{(a,b,c,\ldots(m-1)n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]+$$
$$+N_{(a,b,c,\cdots m,n-1)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]\cdot$$

La démonstration est analogue à celle du lemme page 9. *Gaz. Mat.*, n.$^{\text{os}}$ 44-45.

Théorème. *Si* $a\geqslant b-1\geqslant c-2\geqslant\cdots\geqslant m+1-m_1\geqslant n+1-n_1$

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=$$
$$=\left(\frac{a+1-b}{a+1}\right)\left(\frac{a+2-c}{a+2}\right)\cdots\left(\frac{a+(n_1-1)-n}{a+(n_1-1)}\right)$$
$$\left(\frac{b+1-c}{b+1}\right)\left(\frac{b+2-d}{b+2}\right)\cdots\left(\frac{b+(n_1-2)-n}{b+(n_1-2)}\right)$$
$$\left(\frac{c+1-d}{c+1}\right)\left(\frac{c+2-e}{c+2}\right)\cdots\left(\frac{c+(n_1-c_1)-n}{c+(n_1-c_1)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{m+1-n}{m+1}\right)\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}\cdot$$

Si $a<b-1$ ou $b<c-1$ ou $c<d-1\cdots$ etc. il est clair qu'il n'y a pas de dépouillement favorable, la formule conduirait à des résultats pouvant être négatifs donc absurdes.

Si $a=b-1$ ou $b=c-1$ ou $c=d-1\cdots$ il est encore immédiat qu'il ne peut y avoir de dépouillement favorable mais la formule qui conduit effectivement à un résultat nul s'applique bien.

Je passe à la démonstration générale: je constate facilement que la formule est exacte pour les plus faibles valeurs de θ et pour les valeurs de $a,b,c\cdots$ répondant aux conditions $a\geqslant b\geqslant c\cdots$ etc. Ainsi pour pour $\theta=1$ il y a deux ensembles de valeurs de a et de b répondant aux conditions posées: $a=1$ et $b=0$ d'une part et $a=0$ et $b=1$ d'autre part. Dans la première hypothèse la formule donne un dépouillement favorable ce qui est exact, dans la seconde (voir cas particulier examiné plus haut $a=b-1$) la formule donne zéro dépouillement favorable ce qui est encore exact.

Nous nous proposons de démontrer que la formule est exacte pour une valeur θ_1 de θ et pour tous les ensembles de valeurs de $a,b,c\cdots m,n$ répondant aux conditions $a\geqslant b\geqslant c\cdots\geqslant m\geqslant n$ si elle est exacte pour $\theta=\theta$, et pour tous les ensembles de valeurs de $a,b,c,\cdots m,n$ répondant aux conditions

$$a\geqslant b-1\geqslant c-2\geqslant\cdots\geqslant m-(m_1-1)\geqslant n-(n_1-1)\,.$$

En utilisant les notations précédemment définies $\alpha,b,\gamma\cdots$ etc. la formule à demontrer peut s'écrire:

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}=[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots$$
$$\cdots(\alpha-\nu)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots(\beta-\nu)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\cdots$$
$$\cdots(\gamma-\nu)\cdots(\mu-\nu)]\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\mu!\,\nu!}\cdot$$

ou encore

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=$$
$$=(a+b+c+\cdots+m+n)\,\Phi$$

si l'on pose

$$\Phi=[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots(\alpha-\nu)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots$$
$$\cdots(\beta-\nu)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\cdots(\gamma-\nu)\cdots$$
$$\cdots(\mu-\nu)]\frac{(a+b+c+\cdots+m+n-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\mu!\,\nu!}\cdot$$

En vertu du lemme et en supposant la formule à démontrer exacte pour $\theta=\theta_1-1$ on obtient

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=$$
$$=\left[\left(\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha-\gamma-1}{\alpha-\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-\delta-1}{\alpha-\delta}\right)\cdots\right.$$
$$\cdots\left(\frac{\alpha-\nu-1}{\alpha-\nu}\right)\alpha+\left(\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}\right)\left(\frac{\beta-\delta-1}{\beta-\delta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{\beta-\nu-1}{\beta-\nu}\right)\beta+\left(\frac{\alpha-\gamma+1}{\alpha-\gamma}\right)\left(\frac{\beta-\gamma+1}{\beta-\gamma}\right)\left(\frac{\gamma-\delta-1}{\gamma-\delta}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\frac{\gamma-\nu-1}{\gamma-\nu}\right)\gamma+\cdots+\left(\frac{\alpha-\mu+1}{\alpha+\mu}\right)\left(\frac{\beta-\mu+1}{\beta-\mu}\right)$$
$$\left(\frac{\gamma-\mu+1}{\gamma-\mu}\right)\cdots\left(\frac{\mu-\nu-1}{\mu-\nu}\right)\mu+\left(\frac{\alpha-\nu+1}{\alpha-\nu}\right)\left(\frac{\beta-\nu+1}{\beta-\nu}\right)$$
$$\left.\left(\frac{\gamma-\mu+1}{\gamma-\nu}\right)\cdots\left(\frac{\mu-\nu+1}{\mu-\nu}\right)\nu\right]\Phi$$

ou encore

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)}[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]=$$
$$=\left[\left(1-\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha-\gamma}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha-\delta}\right)\cdots\right.$$
$$\cdots\left(1-\frac{1}{\alpha-\nu}\right)\alpha+\left(1+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\beta-\gamma}\right)$$
$$\left(1-\frac{1}{\beta-\delta}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\beta-\nu}\right)\beta+\left(1+\frac{1}{\alpha-\gamma}\right)$$
$$\left(1+\frac{1}{\beta-\gamma}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma-\delta}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\gamma-\nu}\right)\gamma$$
$$+\cdots$$
$$+\left(1+\frac{1}{\alpha-\mu}\right)\left(1+\frac{1}{\beta-\mu}\right)\left(1+\frac{1}{\gamma-\mu}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{1}{\mu-\nu}\right)\mu+\left(1+\frac{1}{\alpha-\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\beta-\nu}\right)$$
$$\left.\left(1+\frac{1}{\gamma-\nu}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\mu-\nu}\right)\nu\right]\Phi$$

ou encore

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N)}$$

$$=\Big[(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu+\nu)+\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\gamma}\right)+$$

$$+\left(\frac{\delta-\alpha}{\alpha-\delta}\right)+\cdots+\left(\frac{\nu-\alpha}{\alpha-\nu}\right)+\left(\frac{\gamma-\beta}{\beta-\gamma}\right)+\left(\frac{\delta-\beta}{\beta-\delta}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{\nu-\beta}{\beta-\nu}\right)+\left(\frac{\delta-\gamma}{\gamma-\delta}\right)+\left(\frac{\varepsilon-\gamma}{\gamma-\varepsilon}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{\nu-\gamma}{\gamma-\nu}\right)+\cdots+\left(\frac{\nu-\mu}{\mu-\nu}\right)+$$

$$+\left(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\right)+$$

$$+\left(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}+\frac{\delta}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}\right)+$$

$$+\left(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\varepsilon)}-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}-\frac{\mu}{(\lambda-\mu)(\mu-\nu)}+\frac{\nu}{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\right)+$$

$$+\Big(-\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}-$$

$$-\frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)}+\frac{\delta}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\Big)$$

$$+\cdots$$

$$+\left(-1\right)^{n_1-1}\Big(\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots(\alpha-\nu)}-$$

$$-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\cdots(\beta-\nu)}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n_1-1}\frac{\nu}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)\cdots(\mu-\nu)}\Big)\Big]\Phi$$

ou après simplifications

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]}=$$

$$=\Big[(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu+\nu)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\gamma}+\frac{\delta-\alpha}{\alpha-\delta}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\nu-\alpha}{\alpha-\nu}+\frac{\gamma-\beta}{\beta-\gamma}+\frac{\delta-\beta}{\beta-\delta}+\cdots+\frac{\nu-\beta}{\beta-\nu}+\frac{\delta-\gamma}{\gamma-\delta}+$$

$$+\frac{\varepsilon-\gamma}{\gamma-\varepsilon}+\cdots+\frac{\nu-\gamma}{\gamma-\nu}+\cdots+\frac{\nu-\mu}{\mu-\nu}\Big]\Phi$$

Mais

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu+\nu=(a+b+c+\cdots+m+n)+$$
$$(+a_1+b_1+c_1+\cdots+m_1+n_1)$$

et d'autre part

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{\gamma-\alpha}{\alpha-\gamma}+\frac{\delta-\alpha}{\alpha-\delta}+\cdots+\frac{\nu-\alpha}{\alpha-\nu}+\frac{\gamma-\beta}{\beta-\gamma}+\frac{\delta-\beta}{\beta-\delta}+\cdots$$

$$+\frac{\nu-\beta}{\beta-\nu}+\frac{\delta-\gamma}{\gamma-\delta}+\frac{\varepsilon-\delta}{\delta-\varepsilon}+\cdots+\frac{\nu-\gamma}{\gamma-\nu}+\cdots+$$

$$+\frac{\nu-\mu}{\mu-\nu}=-(a_1+b_1+c_1+\cdots+m_1+n_1)$$

et finalement

$$N_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N)}=(a+b+c+$$
$$+\cdots+m+n)\,\Phi$$

$$=[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\cdots(\alpha-\nu)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots$$

$$\cdots(\beta-\nu)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)\cdots(\gamma-\nu)\cdots$$

$$\cdots(\mu-\nu)]\,\frac{(a+b+c+\cdots m+n)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\mu!\,\nu!}$$

$$=\left(\frac{a+1-b}{a+1}\right)\left(\frac{a+2-c}{a+2}\right)\cdots\left(\frac{a+(n_1-1)-n}{a+(n_1-1)}\right)$$

$$\left(\frac{b+1-c}{b+1}\right)\left(\frac{b+2-d}{b+2}\right)\cdots\left(\frac{b+(n_1-2)-n}{b+(n_1-2)}\right)\left(\frac{c+1-d}{c+1}\right)$$

$$\left(\frac{c+2-d}{c+2}\right)\cdots\left(\frac{c+(n_1-c_1)-n}{c+(n_1-c_1)}\right)\cdots\left(\frac{m+1-n}{m+1}\right)$$

$$\frac{(a+b+c+\cdots+m+n)!}{a!\,b!\,c!\cdots m!\,n!}.$$

THÉORÈME. *Si* $a\geqslant b-1\geqslant c-2\geqslant\cdots\geqslant m-m_1\geqslant n-n_1$

$$P_{(a,b,c,\cdots m,n)\,[A\geq B\geq C\geq\cdots\geq M\geq N]}=$$

$$=\frac{a+1-b}{a+1}\cdot\frac{a+2-c}{a+2}\cdot\cdots\frac{a+(n_1-1)-n}{a+(n_1-1)}\cdot\frac{b+1-c}{b+1}$$

$$\frac{b+2-d}{b+2}\cdot\cdots\frac{b+(n_1-2)-n}{b+(n_1-2)}\cdot\frac{c+1-d}{c+1}\,\frac{c+2-e}{c+2}\cdots$$

$$\frac{c+(n_1-c_1)-n}{c+(n_1-c_1)}\cdots\frac{m+1-n}{m+1}.$$

(Continua)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CENTENÁRIO DE GOMES TEIXEIRA

Em sessão de 20 de Maio de 1948 o Senado Universitário do Porto, partilhando a iniciativa do Conselho da Faculdade de Ciências, resolveu promover, em Maio de 1951, a comemoração do 1.º centenário do nascimento do Prof. Dr. Gomes Teixeira, que foi o 1.º Reitor e Reitor honorário da Universidade do Porto.

Em sessão solene serão evocadas, pelo Prof. R. Sarmento de Beires, a vida e a obra do grande Matemático, procedendo-se em seguida ao descerramento do seu retrato, pintado por Abel de Moura, na Galeria dos Reitores, e do busto de mármore, por Teixeira Lopes, na sala do Conselho da Faculdade de Ciências.

Serão também proferidas lições àcerca dos seus trabalhos científicos pelo Prof. A. Cipião Gomes de Carvalho, e tratar-se-á da colocação de uma lápide na casa do Porto onde viveu e faleceu o insigne mestre.

Também o Senado Universitário de Coimbra decidiu comemorar o centenário, publicando o catálogo das separatas oferecidas pelo Prof. Gomes Teixeira à Biblioteca de Matemática da Faculdade de Ciências, assim como o índice das cartas entregues ao Arquivo daquela Universidade, fazendo-se ainda uma edição acompanhada de notas históricas e críticas, das que apresentem interêsse científico.

A. A. G.

A *Gazeta de Matemática* não podia deixar de prestar também homenagem á memória do notável matemático português.

Pareceu à Redacção da revista que a melhor contribuição consistiria em dedicar um dos números deste ano inteira e exclusivamente ao ilustre investigador, número contendo trabalhos inéditos de matemáticos portugueses e estrangeiros escritos para este fim. E neste sentido dirige a *Gazeta de Matemática* um apelo a todos os seus colaboradores.

Registamos já neste momento, com grande satisfação, o bom acolhimento à nossa iniciativa tendo-se recebido já para o número comemorativo colaboração valiosa dos Profs. Sir E. Whittaker e J. Hadamard e a promessa de outras contribuições.

A *Junta de Investigação Matemática* além de outras participações nesta comemoração resolveu conceder um subsídio à *Gazeta de Matemática* para auxiliar a publicação do número especial.

M. Z.

PROF. DR. JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Nos dias 20 e 22 de Janeiro tiveram lugar no Instituto Superior de Agronomia as provas para professor catedrático do 3.º grupo (Matemática e Cálculo). Foi único concorrente o Doutor José Sebastião e Silva, 1.º assistente da Faculdade de Ciências de Lisboa. A lição proferida, sobre ponto tirado à sorte, intitulava-se «Eliminação. Teorema de Bezout para duas equações algébricas a duas incógnitas» e foi apreciada pelo Prof. Dr. Manuel Esparteiro. Da tese apresentada «Integração e derivação em espaços de Banach» foi arguente o Prof. Dr. Luís de Beda Neto, membro do júri, presidido pelo Reitor da Universidade Técnica, Prof. M. Amzalak, e constituido também pelos Profs. Drs. Vítor Hugo de Lemos, J. Ramos e Costa, José Vicente Gonçalves, A. de Mira Fernandes, Aníbal Scipião de Carvalho, Abílio Aires, Manuel Marques Esparteiro e Diogo Pacheco de Amorim. O candidato foi aprovado por unanimidade. A «Gazeta de Matemática» felicita vivamente o novo professor e seu querido colaborador.

M. Z.

PRÉMIO EINSTEIN

Registámos já no n.º 40 da nossa revista a fundação deste prémio de 15.000 dólares a atribuir todos os triénios ao cientista cujos trabalhos fossem considerados como importante contribuição no domínio das ciências matemáticas e físicas. Acaba de ser concedido, pela primeira vez, ao matemático K. Gödel, professor na Universidade de Princeton e ao físico J. Schwinger, da Universidade de Harvard.

No próximo número da «Gazeta» publicaremos um artigo sobre a obra de Kurt Gödel da autoria do nosso colabordor Luís das Neves Real.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1950 — Julho — Ponto n.º 1.

3170 — Demonstrar que, se se dividem dois inteiros positivos pela sua diferença, os restos são iguais e os quocientes diferem de uma unidade. R: *Como* $a=(a-b)+b$ *e* $a-b=\dot{\overline{(a-b)}}$, *resulta, pelo teorema fundamental da divisibilidadde, que* a *e* b *dão, na divisão por* $a-b$, *restos iguais. Sendo, então,*

$$a=(a-b)\,q+r \quad e \quad b=(a-b)\,q'+r \;(r<a-b),$$

virá $a-b=(a-b)\,q-(a-b)\,q'$, *logo* $a-b=(a-b)(q-q')$, *donde resulta* $q-q'=1$.

3171 — Verificar que 8128 é um número perfeito, isto é: igual à soma dos seus divisores incluindo a unidade e excluindo o próprio número. R: $8128=2^6\cdot 127$; *os divisores de* 8128 *são* 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 127; 254; 508; 1016; 2032; 4064; 8128. *A soma* $1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064$ *é, efectivamente,* 8128:

3172 — Demonstrar que a^2+b^2 só é divisível por 7 se a e b são ambos divisíveis por 7. R: *Será* $a=\dot{7}\pm r\;(r=0,1,2,3)$ $\;b=\dot{7}\pm r'\;(r'=0,1,2,3)$; *logo*

$a^2 = \dot{7} + r_1$ $(r_1 = 0, 1, 4, 2)$ $b^2 = \dot{7} + r'_1$ $(r'_1 = 0, 1, 4, 2)$ *respectivamente. Se for* $a = \dot{7}$ *e* $b = \dot{7}$, *será então* $a^2 + b^2 = \dot{7}$; *se* a *e* b *não forem conjuntamente* $\dot{7}$ *é fácil verificar, combinando todos os outros casos, que* $a^2 + b^2 \neq \dot{7}$.

3173 — Decompor de todos os modos possíveis 1348 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas de 17 e de 31 respectivamente. R: *Teremos de resolver em números inteiros positivos a equação* $17x + 31y = 1348$; *as parcelas serão* $17x$ *e* $31y$ *sendo* (x, y) *uma solução inteira positiva da equação. As soluções* (x, y) *são* $(10, 38)$ *e* $(41, 21)$.

3174 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^4 - (4m-3)x^2 + 3m^2 - 5m + 2 = 0$, sejam: 1.° — quatro números reais em progressão aritmética; 2.° — quatro imaginários puros também em progressão aritmética. Verificar as soluções do problema. R:

1.° — *Supondo* y' *e* y'' *as duas raízes da resolvente e admitindo que* $y' \geqslant y''$ *e* $y'' > 0$, *as raízes da equação biquadrada serão, por ordem crescente,* $-\sqrt{y'}$, $-\sqrt{y''}$, $+\sqrt{y''}$, $+\sqrt{y'}$. *Impondo a condição de estes quatro números reais estarem em progressão aritmética virá* $y' = 9y''$. *Portanto, se for* $y' = 9y''$ *e* $y' > 0$ *as raízes da equação dada estarão em progressão aritmética e serão reais.*

2.° — *Atendendo às observações anteriores é fácil concluir que, se for* $y' = 9y''$ *e* $y'' < 0$, *as raízes da equação dada serão imaginários puros em progressão aritmética.*

No 1.° caso será $m = 7/6$; *no 2.°* $m = 17/26$.

3175 — Sendo n inteiro positivo e $x > 0$ demonstrar que, se o termo médio do desenvolvimento de $(1+x)^{2n}$ é maior que todos os outros, x está compreendido entre $\dfrac{n}{n+1}$ e $\dfrac{n+1}{n}$. N. B. — Comparar o termo médio com os dois que lhe são contíguos. R: *O termo médio é* $\binom{2n}{n} x^n$; *o que o antecede é* $\binom{2n}{n-1} x^{n-1}$ *e o que o segue é* $\binom{2n}{n+1} x^{n+1}$. *Pondo* $\binom{2n}{n} x^n > \binom{2n}{n-1} x^{n-1}$ *e* $\binom{2n}{n} x^n > \binom{2n}{n+1} x^{n+1}$ *vem, respectivamente,* $x > \dfrac{n}{n+1}$ *e* $x < \dfrac{n+1}{n}$.

Soluções dos n.os 3170 a 3175 de Laureano Barros

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1950 — Ponto n.° 3.

3176 — Designando por M o menor múltiplo comum dos números A e B e atendendo a que se dois números são primos entre si, também a sua soma e o seu produto são primos entre si, demonstre que m.d.c. $(A, B) =$ m.d.c. $(A + B, M)$. R: *Designando por* D *o m. d. c.* (A, B) *e tendo em atenção que* $M \cdot D = A \cdot B$, $A = D \cdot Q$ *e* $B = D \cdot Q'$, *com* Q *e* Q' *primos entre si, a igualdade a demonstrar é equivalente a* $D =$ m. d. c. $[D \cdot (Q + Q'), D \cdot Q \cdot Q']$ *ou* m. d. c. $(Q + Q', Q \cdot Q') = 1$, *por uma propriedade do* m. d. c. *Esta última resulta de serem* $Q + Q'$ *e* $Q \cdot Q'$ *primos entre si.*

3177 — Calcule o resto da divisão por 7 do número $x = 18^{1000} \cdot 23 + 44$. R: *Analisando as potências sucessivas, de expoente inteiro e positivo, de* 18, *em relação ao divisor* 7 *conclue-se que*

$18^{3K} \equiv 1 \pmod 7$, $18^{3K+1} \equiv 4 \pmod 7$ e $18^{3k+2} \equiv 2 \pmod 7$.

Assim, tem-se $18^{1000} \equiv 4 \pmod 7$. *E, por ser* $23 \equiv 2 \pmod 7$ *e* $44 \equiv 2 \pmod 7$ *segue-se que é* $x \equiv 3 \pmod 7$.

3178 — Prove que a equação $x^2 - (a+b)x + ab - a^2 = 0$ tem sempre raízes reais, quaisquer que sejam os números reais a e b. R: *Com efeito*

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab + 4a^2 = (a-b)^2 + 4a^2$$

anula-se quando $a = b = 0$ *e é positivo em todos os outros casos com* a *e* b *reais.*

3179 — Dado o polinómio $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 6$, substitua x por $X + h$ e determine h de modo que o polinómio em X seja desprovido do termo do 3.° grau. R: *O termo em* X^3 *do polinómio* $P(X+h)$ *tem por coeficiente* $4(h+1)$. *Logo,* $h = -1$ *é o valor procurado.*

3180 — Determinar os valores de x que verificam simultâneamente as igualdades: $\cot a = \sqrt{1-x^2}$ e $\operatorname{cosec} a = \sqrt{x-4}$. R: *Os valores de* x *para os quais é possível a 2.ª igualdade,* $x \geqslant 5$, *tornam ilegítima a 1.ª, por tornar imaginário o seu 2.° membro. Sendo incompatíveis as duas igualdades, não há valor algum de* x *nas condições do enunciado*

3181 — Determine os ângulos x inferiores a 180° e tais que tornam positiva a fracção

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x - 1}.$$

R: *Fazendo* $\operatorname{sen} x = z$, *há que determinar os valores reais de* z *do intervalo* $(0,1)$ *tais que* $(2z^2 + z - 1) \cdot (z-1) > 0$. *Das soluções,* $-1 < z < 1/2$ *e* $z > 1$, *desta desigualdade, apenas interessam, portanto, os valores* $0 < z < 1/2$ *ou* $0° < x < 30°$ *e* $150° < x < 180°$.

Soluções dos n.os 3176 a 3181 de O. Morboy Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência 1949-50.

3182 — *a*) Demonstre que toda a sucessão monótona tem limite.

Seja

$$u_n = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n - \frac{2n-1}{n}\right] - \right.$$
$$\left. -(-1)^n\left[\frac{2n-1}{n} + \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right]\right\} \quad (a<0)$$

b) Mostre que u_{2K} e u_{2K-1} são sucessões monótonas. *c*) É a sucessão u_n convergente? No caso negativo indique os seus limites máximo e mínimo. *d*) Com que valor de a pode convergir a sucessão de termo geral u_n^2 (responda à pergunta sem calcular o valor de $(u_n)^2$).

3183 — *a*) Defina uma série absolutamente convergente e mostre que a soma duma série absolutamente convergente é independente da ordem dos seus termos. *b*) Como se comportam a esse respeito as séries simplesmente convergentes? Em que fundamenta a resposta? *c*) u_n/a_n tem limite finito com u_n qualquer e $a_n > 0$. Sendo Σa_n uma série convergente prove que Σu_n é uma série absolutamente convergente. Na hipótese de Σa_n ser divergente em que condições pode ainda Σu_n convergir absolutamente? E convergir simplesmente? *d*) Verifique pelas conclusões anteriores a convergencia absoluta da série de termo geral $\log(1+2/n^2)$.

3184 — Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo aberto (a,b) com limites laterais $f(a+0)$ e $f(b-0)$ de sinais contrários. Mostre que $f(x)$ se anula em algum ponto interior a (a,b).

3185 — *a*) Mostre que uma função com derivada finita num ponto é nesse ponto contínua. *b*) Determine a derivada na origem de $g(x)=xf(x)$ em que $f(x)$ é uma função contínua nesse ponto. *c*) Pode para esse efeito ser $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$?

3186 — *a*) Seja $y=f(x)$ uma função limitada num conjunto (x) com pontos em qualquer parte (α,β) do eixo real. Verifique que a função $\omega(x)$ está definida para qualquer valor finito de x ($\omega(x)$ é a oscilação de y no ponto de abcissa x). *b*) Considerando a hipótese de $f(x)$ estar definida para qualquer valor de x e só admitir pontos isolados de descontinuidade, prove que o mesmo acontece com $\omega(x)$.

F. C. P. — Álgebra Superior — 1.º exercício de revisão — Dezembro de 1950.

3187 — Seja (A/B) uma cisão definida no conjunto dos números racionais positivos. Provar que $\left(\frac{1}{B}\Big/\frac{1}{A}\right)$ é também uma cisão, sendo $1/B$ e $1/A$, respectivamente, os conjuntos dos inversos dos elementos de B e de A. R: a) *Todo o núumero da classe* $1/B$ *é menor que qualquer número da classe* $1/A$; b) *como qualquer número racional pertence a* A *ou* B, *sendo* x *um número racional, o seu inverso* $1/x$ *(também racional) pertence a* A *ou* B; *portanto* x *pertence a* $1/A$ *ou* $1/B$.

3188 — Provar que a relação $z'=\frac{1+iz}{1-iz}$ transforma o segmento do eixo dos xx compreendido entre os pontos $z=1$ e $z=-1$, numa semi-circunferência de centro na origem, que passa pelos pontos $z'=1$ e $z'=-1$. R: *Consideram-se os valores reais de* z, *tais que* $|z|\leqslant 1$. *Para esses valores, é claro que, sendo*

$$z' = \frac{(1+iz)^2}{(1-iz)(1+iz)} = \frac{1-z^2+2iz}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2} + i\frac{2z}{1+z^2},$$

o módulo de z' *é igual a* 1, *e o seu argumento* θ *varia entre* $-\pi/2$ *e* $\pi/2\cdot[\cos\theta \geqslant 0]$. *Para* $z=1$, *vem* $z'=1$, *e para* $z=-1$, $z'=-1$.

3189 — *a*) Se $x \neq y \neq z$, e se $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, provar que $1+xyz=0$. R: *Note-se que*

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

b) Calcular, a partir da definição, o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

3190 — Resolver discutindo-o, o sistema linear

$$x + y + z + t = 1$$
$$ax + by + cz + dt = k$$
$$a^2 x + b^2 y + c^2 z + d^2 t = k^2$$
$$a^3 x + b^3 y + c^3 z + d^3 t = k^3 .$$

3191 — Sendo α e β dois números reais definidos por pares de sucessões convergentes,

$$\alpha \begin{cases} a_1 , a_2 , \cdots , a_n , \cdots \\ b_1 , b_2 , \cdots , b_n , \cdots \end{cases}$$
$$\beta \begin{cases} a'_1 , a'_2 , \cdots , a'_n , \cdots \\ b'_1 , b'_2 , \cdots , b'_n , \cdots \end{cases}$$

provar que o par de sucessões

$$\begin{cases} (a_1+a'_1)/2 , (a_2+a'_2)/2 , \cdots , (a_n+a'_n)/2 , \cdots \\ (b_1+b'_1)/2 , (b_2+b'_2)/2 , \cdots , (b_n + b'_n)/2 , \cdots \end{cases}$$

define um número real e que esse número é precisamente $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

3192 — Sendo t uma variável real de quadrado menor que 1, provar que o afixo dum número complexo $z=t^2-1+\sqrt{t^4-t^2}$ pertence sempre à circunferência de centro no afixo do número $-1/2$ e raio $1/2$.

3193 — Resolver, gràficamente, o sistema de equações

$$\begin{cases} |z-i|=2 \\ |z-(1+i)|=|z+(1+i)| \end{cases}$$

3194 — Se $X=a+ib$ e $X'=a-ib$, provar que os números $X^n - X'^n$ (n, inteiro e positivo) e $\dfrac{X^n+X'^n}{X^n-X'^n}$ são imaginários puros. *Nota* — Recorrer à representação trigonométrica.

3195 — Partindo da identidade

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$$

justificar o seguinte teorema de de Euler: «o produto de dois números, cada um dos quais é a soma de quatro quadrados, é ainda a soma de quatro quadrados».

3196 — Se x , y , z não são todos nulos e se

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ bx + cy + az = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

provar que, ou $a+b+c=0$ ou $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$.

Soluções dos n.os 3187 a 3189 de A. Andrade Guimarães

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência — 30 de Junho de 1950.

3197 — Defina função homogénea e demonstre que a derivada parcial de uma tal função é também homogénea. Verifique a homogeneidade da função $g(y/x)$ e calcule o seu grau. Supondo a função $g(u)$ diferenciável mostre que a função $g(y/x)$ verifica a identidade de Euler. R: *Como* $g(yt/xt) = t^0 g(y/x)$ *para* $x \neq 0$ *e* $t > 0$, *então* $g(y/x)$ *é homogénea de grau zero. Posto isto vem:* $x \cdot g'_{\frac{y}{x}}(y/x) \cdot (-y/x^2) + y \cdot g'_{\frac{y}{x}}(y/x) \cdot \dfrac{1}{x} = 0 \cdot g(y/x)$ *e a função verifica a identidade.*

3198 — Defina integral no sentido de Riemann de uma função $f(x)$ limitada no intervalo (a , b). Defina primitiva da mesma função no mesmo intervalo. Se $f(x)$ é integrável e primitivável em (a , b), como se calcula o seu integral naquele intervalo? Justifique. Descreva e justifique o método de primitivação por decomposição e calcule a primitiva de $\dfrac{3x-2}{x^2-2x} - x^2 \cdot \operatorname{sen} x$.

$$R: P\frac{3x-2}{x^2-2x} - Px^2 \cdot \operatorname{sen} x = P\frac{2x-2}{x^2-2x} + P\frac{x}{x(x-2)} -$$
$$- Px^2 \cdot \operatorname{sen} x = \log C(x^2-2x)(x-2) +$$
$$+ x^2 \cos x - 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) .$$

3199 — Prove que efectuando a operação de Jacobi sobre um determinante o valor deste não vem alterado. Descreva o cálculo abreviado de um determinante ($n>3$). Enuncie o primeiro teorema de Laplace e aplique-o à segunda coluna do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} .$$

(Defina prèviamente os termos com que enunciar o teorema de Laplace). R: *O teorema de Laplace a que se refere a questão é o seguinte: um determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos complementos*

$$\Delta = -3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} .$$

3200 — Trate o problema da determinação das raizes inteiras e fraccionárias de uma equação algébrica de coeficientes inteiros e deduza condições necessárias de existencia dessas raizes. Prove que a equação $f(x)=0$ de coeficientes inteiros não admite raizes ímpares se um, pelo menos, dos números $f(-1)$, $f(+1)$ for ímpar.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência — 2.ª chamada, 1950, Julho, 15.

3201 — Calcule a primitiva de $f(x) = \frac{2}{x(x-1)} + {}$ $+ \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$. Descreva e justifique o método de primitivação por substituição. R:

$$P \frac{2}{x(x-1)} + P \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = \frac{1}{3} P\, 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x + {}$$
$$+ P\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\right) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \log C \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 .$$

3202 — Dada a função $z = f(x, y)$ quando é ela diferenciável no ponto $P(a, b)$? Supondo $f(x, y)$ diferenciável em $P(a, b)$, seja $M(x, y)$ um ponto vizinho de P e calcule o limite da função quando o ponto M se desloque para P. Justifique. Sendo $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ e as funções φ e ψ diferenciáveis no ponto t_0 que faz $\varphi(t_0) = a$ $\psi(t_0) = b$ indique o valor da derivada $\frac{dz}{dt}$ no ponto t_0. Para $z = (x+y)^2 + xy$ e com $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$ calcule $\frac{dz}{dt}$ no ponto $t = \pi/4$. R:

$$\left[\frac{dz}{dt}\right]_{\pi/4} = \left[\frac{dz}{dx}\right]_{\substack{x=\operatorname{sen}\pi/4 \\ y=\cos\pi/4}} \cdot \left[\frac{dx}{dt}\right]_{\pi/4} + \left[\frac{dz}{dy}\right]_{\substack{x=\operatorname{sen}\pi/4 \\ y=\cos\pi/4}} \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{dy}{dt}\right]_{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 .$$

3203 — Enuncie o teorema de d'Alembert e deduza a decomposição em factores primos de um polinómio de grau n. Determine um polinómio de grau mínimo e de coeficientes racionais que admita a raiz $\sqrt{2}$, a raiz dupla $2-i$ e que assuma o valor 4 para $x=2$. R: $a_0 (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2 + i)^2 (x - 2 - i)^2 =$ $= a_0 (x^2 - 2)[(x-2)^2 + 1]^2$ *e para* $x = 2$ *vem* $2a_0 = 4$ *portanto* $2(x^2 - 2)[(x-2)^2 + 1]^2$ *é o polinómio pedido.*

3204 — Enuncie o 1.º teorema de Laplace e o seu consequente. Justifique este último. Verifique que é nulo o determinante Δ e determine uma composição linear das linhas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

R: *Pelo primeiro teorema de Laplace aplicado à primeira coluna:*

$$2(50) + 2(-25) + 1(-50) - 1(0) = 0$$

e aplicando o consequente às outras colunas veem as relações:

$$-1(50) + 4(-25) - 3(-50) + 0(0) = 0$$
$$2(50) + 0(-25) + 2(-50) + 3(0) = 0$$
$$-1(50) + 2(-25) + 0(-50) + 4(0) = 0$$

que somadas e representando por L_1 L_2 L_3 L_4 *as matrizes linhas e por* **0** *a matriz nula de tipo* (1×4):
$(50) L_1 + (-25) L_2 + (-50) L_3 + (0) L_4 = \mathbf{0}$.

Soluções dos n.os 3197 a 3204 de J. Ribeiro de Albuquerque.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — 2.º exame de frequência, 1950 — Ponto n.º 1.

3205 — Conduzir por um ponto do 1.º bissector uma recta que faça ângulos de 50º com uma recta vertical de afastamento 4 cm. e com a L. T. R: *A recta pedida é a 3.ª aresta dum triedro cujas faces medem* 50º, 50º e 90º. *As outras duas arestas são paralelas a* L. T. *e à recta vertical respectivamente.*

3206 — É dado um plano cujos traços formam ângulos de 45º com L. T. Por um ponto qualquer do plano conduzir as rectas deste que formam ângulos de 60º com uma recta vertical de afastamento nulo. R: *Considere a superfície cónica de revolução de eixo vertical, vértice no ponto de intersecção da* L. T. *com o plano dado e tendo por meridiana principal duas rectas que fazem ângulos de* 60º *com o eixo. Determine a secção feita nesta superfície pelo plano dado. As rectas pedidas são as paralelas conduzidas pelo ponto às duas rectas que formam a secção.*

3207 — Por um ponto de cota 3 cm. e afastamento 4 cm. conduzir os planos que distam 2 cm. da *L. T.* R: *Planos tangentes conduzidos pelo ponto a uma superfície cilíndrica de revolução tendo a* L. T. *por eixo e cujas geratrizes distam 2 cm. deste.*

Ponto n.º 2

3208 — É dado um plano vertical inclinado 60º sobre o plano vertical de projecção. Conduzir por um ponto do 2.º bissector uma recta que forme ângulos de 55º com esse plano e com a *L. T.* R: *Considere com vértice no ponto dado um triedro em que uma das faces é limitada por uma paralela a* L. T. *e por uma recta normal ao plano dado. A recta pedida é a 3.ª aresta deste triedro cujas faces medem respectivamente* 55º, 35º. *e* 30º

3209 — Determinar os pontos dum plano horizontal de cota 3 cm. que distam 5 cm. duma recta do plano horizontal de projecção que faz com a *L. T.* um ângulo de 40.º R: *O lugar dos pontos é constituído* *pelas duas rectas da secção do plano dado, na superfície cilíndrica de revolução cujo eixo é a recta do plano horizontal de projecção e cujas geratrizes distam 5 cm. daquele eixo.*

3210 — Por uma recta do 1.º bissector, cujas projecções fazem com a *L. T.* ângulos de 60.º, conduzir os planos que fazem ângulos de 40º com L. T. R: *Planos tangentes conduzidos pela recta dada a uma superfície cónica de revolução tendo por vértice o ponto comum à recta do 1.º bissector e à* L. T, *esta por eixo e de ângulo no vértice igual a* 80º.

Soluções dos n.os 3205 a 3210 de João Farinha

ANÁLISE INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — **1.º exame de frequência ordinário — Fevereiro 1949.**

3211 — Estudar o integral $\int_0^{\infty} \frac{3x^4}{(x^3+1)^3} dx$ e, em caso de convergência, calculá-lo. R: *O integral é convergente porque*

$$\lim_{x\to\infty} x^s \cdot \frac{3x^4}{(x^3+1)^3} = 1 \ (s = 5 > 1).$$

Integrando por partes tem-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{3x^4}{(1+x^3)^3} dx = \left[-\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^3+1)^2} = $$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = -\frac{1}{9}\left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^{\infty} -$$

$$-\frac{1}{9}\left[\log(x+1)\right]_0^{\infty} + \frac{1}{18}\int_0^{\infty} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx +$$

$$+\frac{1}{9}\int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(x^2-x+1)^2} = -\frac{1}{9} +$$

$$+\frac{2}{9}\left[\frac{3\pi}{\sqrt{27}} + \frac{1}{3} - \frac{6}{\sqrt{27}} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{9}\left(1+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

3212 — Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-a\cos x}{1-a\cos x + a^2} dx$.

R:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1/2 - a^2/2}{1-2a\cos x + a^2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + $$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+a^2)(\cos^2 x/2 + \operatorname{sen}^2 x/2) - 2a(\cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2)} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-a)^2\cos^2 x/2 + (1+a^2)\operatorname{sen}^2 x/2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x/2\,dx/2}{(1-a)^2 + [(1+a)\operatorname{tg} x/2]^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + (1-a^2)\frac{1}{(1+a)(1-a)}\left[\operatorname{arctg}\frac{(1+a)\operatorname{tg} x/2}{1-a}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1+a}{1-a}.$$

3213 — Dá-se um tetraedro $ABCD$; sejam S_A, S_B, S_C, S_D quatro escalares iguais às áreas das faces do tetraedro. Considerem-se quatro vectores normais às faces, dirigidos do interior para o exterior do tetraedro e de módulos iguais a KS_A, KS_B, KS_C e KS_D, sendo K um número positivo; demonstrar que a soma destes 4 vectores é nula. R:

$$S = \frac{K}{2}\left[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CB}\right]$$

mas

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})\wedge(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Logo:

$$S = \frac{K}{2}\left[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right] = 0$$

q. e. d.

Note-se que os vectores nas circunstâncias do problema são o produto de $\frac{K}{2}$ *pelo produto externo dos vectores arestas do tetraedro.*

Soluções dos n. 3211 a 3213 de M. Soares Madureira

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — **Outubro de 1950 — 1.ª chamada.**

3214 — Um referencial rigido $Axyz$ cujo eixo Az coincide constantemente com Oz está animado de um movimento helicoidal relativamente a $Oxyz$. *a*) Fixar as leis temporais de variação de z (cota de A) e de Φ (ângulo de Ax com Ox) para que o movimento seja de passo p e ainda de modo que um ponto M à distância a do eixo Az (ponto que pode ser escolhido sobre Ax) possua um movimento de aceleração tangencial constante e igual a b. *b*) O movimento obtido na alínea precedente pode, em projecção sobre Oxy, obedecer à lei das áreas relativamente a O? Justificar a resposta e, não sendo afirmativa, dizer qual deveria ser a lei do movimento helicoidal para aquela condição ser satisfeita.

3215 — Um ponto material M de peso mg e massa m é obrigado a mover-se sobre a parábola perfeitamente polida $y^2=2ax$ cujo eixo Ox é vertical. Além do peso actua sobre o ponto uma força constante mF paralela a Oy. *a*) Escrever as equações do movimento de M sob a forma de Mac-Laurin. *b*) Escrever o integral da força viva expresso nas coordenadas do ponto e das suas primeiras derivadas. *c*) Sabendo que o ponto no instante $t=0$ se encontra na posição de ordenada $y=a$, calcular a velocidade que deve ser-lhe comunicada nesse instante para que atinja o vértice da parábola com velocidade nula.

3216 — Um disco circular vertical de centro C e raio b pode rolar sem escorregamento sobre um eixo horizontal AB. Um fio inextensível $ESDM$ está fixo em E à periferia do disco, aplica-se sobre ele, abandona-o horizontalmente em S e depois de passar através de um anel D perfeitamente polído cai verticalmente sustentando na extremidade um peso p. *a*) Sabendo que em C actua uma força horizontal F, calcular o seu valor de modo que o disco e o ponto estejam em equilíbrio (aplicar o teorema dos trabalhos ou das velocidades virtuais). *b*) Calcular as componentes da reacção que se desenvolve no ponto de contacto do disco com a horizontal AB.

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final — Outubro de 1950.

3217 — É dado um sólido S cujo elipsoide de inércia, em relação ao ponto fixo O do sólido, é de revolução. O sólido está animado dum movimento de Poinsot em relação ao ponto O. Escrever as equações de Euler e integrá-las, determinando as equações do movimento. R: *Seja* $Ax^2+Ay^2+Cz^2=1$ *a equação do elipsoide em relação ao ponto* O. *As equações de Euler serão:*

$$\frac{dp}{dt}+kqr=0,\ \frac{dq}{dt}-kpr=0,\ \frac{dr}{dt}=0,\left(k=\frac{C}{A}-1\right),$$

que, integradas, dão

$$p=c_2\operatorname{sen}\mu t+c_3\cos\mu t$$
$$q=c_3\operatorname{sen}\mu t-c_2\cos\mu t \qquad \mu=kc_1$$
$$r=c_1.$$

O sólido tem pois um movimento de rotação em torno do ponto O, *definido pelo vector* $\vec{\omega}=p\mathbf{I}+q\mathbf{J}+r\mathbf{K}$.

3218 — Um ponto P, de massa m, move-se sem atrito, sobre uma recta OP que, por sua vez, está animada duma rotação uniforme, num plano fixo (Oxy), em torno da origem O. Não há forças activas. Achar a força viva, escrever as equações de Lagrange e as equações canónicas de Hamilton. R: *Em coordenadas semi-polares* $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{K})$ *será*

$$P-O=re^{i\omega t} \qquad \omega \to \text{rotação}$$

e a força viva toma a forma $2T=m(r'^2+r^2\omega^2)$

As equações do movimento serão então

$$F_R=m(r''-r\omega^2) \qquad rF_S=\frac{d}{dt}mr^2\omega^2.$$

3219 — Verificar que o ponto P definido pela equação

$$b_1(P-B_1)+b_2(P-B_2)+\cdots+b_n(P-B_n)=0$$

é o centro de gravidade dum sistema de massas $b_1, b_2\cdots b_n$ colocadas respectivamente nos pontos $B_1, B_2\cdots B_n$. R: *Da expressão corrente que define o centro de gravidade* $M(G-O)=\Sigma_i m_i(P_i-O)$ *resulta imediatamente* $\Sigma_i m_i(G-P_i)=0$, *igualdade equivalente à equação proposta.*

Soluções dos n.os 3217 a 3219 de J. Gaspar Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

85 — SEMPLE, J. G., and ROTH, L. — **Introduction to Algebraic Geometry.** Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+446 pp. Price 30 s. net.

A nuestro juicio, el mérito principal de la obra que vamos a presentar reside en el hecho de contener un vasto y bien elegido material experimental de geometria algebraica. En tal sentido, lo consideramos de inestimable valor para el especialista de aquella disciplina. Dicho material encuentra su lugar, no solo en la parte expositiva del texto, sino también y especialmente en las numerosas notas y en los ejemplos y ejercicios, puestos al final de cada párrafo y de cada capítulo, seleccionados con el fino espíritu geométrico que poseen los autores, ambos distinguidos investigadores en el campo de la geometria algebraica.

En cambio, la exposición teórica aparece en forma que, tanto en la ordenación como en la fundamentación, no está a cubierto de los reproches que pudiera dirigirle un crítico no muy exigente; como consecuencia, creemos que un principiante, que no posea mas conocimientos previos que los elementales de geometria proyectiva y álgebra que los autores suponen en el Prefacio, ha de tropezar con grandes dificultades para la buena comprensión de muchas de las cuestiones tratadas en el libro. Por todo ello, mas que una Introducción a la Geometria algebraica (en el sentido, p. ej., de *Einführung in die algebraische Geometrie* de van der Waerden, o de la obra de Hodge-Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*, cuyo único tomo aparecido hasta ahora fué reseñado en el n.º 37 de esta Revista), el libro ha de considerarse como una visión panorámica de la misma, desde un punto de vista principalmente intuitivo.

El método seguido es el llamado algébrico-geométrico de la geometria algebraica clásica; los aspectos transcendente y topológico quedan fuera del objecto de la obra. El rigor no parece haber sido la preocupación fundamental de los autores; estos admitem explicítamente en el Prefacio que, en lo relativo al lenguaje, han procedido con «a certain degree of informality», principio liberal que han extendido generosamente, y no siempre de modo explícito, a la demostración de una gran parte de los teoremas.

Por encima de las observaciones precedentes, queda, sin embargo, el substancioso contenido intuitivo y la cuidadosa y detallada información que contiene el libro, destinado a prestar grandes servicios aún a aquellos, y nos sentimos inclinados a escribir «especialmente aquellos», que se ocupan de geometria algebraica desde el punto de vista abstracto al que se debe¡ conviene no olvidarlo! el renacer del interés universal por esta interesante y siempre viva rama de la matemática.

Damos a continuación un detalle de las principales cuestiones tratadas en los distintos capítulos. El Cap. I es de introducción y en el se da, de una parte, la estructura del espacio proyectivo S_n junto con las principales propiedades de sus transformaciones proyectivas y de las figuras elementales ligadas a ellas; por outra parte, se establecen los conceptos de variedad algebraica irreducibles, correspondencias algebraicas y variedades racionales. En el Cap. II se estudian las propiedades proyectivas de las curvas planas algébricas: polaridad, elementos singulares, subadjuntas, género aparente, ... ; y se consideran las curvas racionales y elípticas, dándose algunas nociones sobre las curvas de géneros 2, 3 4. Las transformaciones cuadráticas planas constituyen el objeto del Cap. III, se utilizan luego para la resolución de las singularidades y para la definición de los puntos infinitamente próximos. También se definen en él, el género de una curva y se da la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto múltiple. El Cap. IV, titulado Correspondencias racionales, contiene las correspondencias (m, n) en las variedades racionales de dimensión 1, correspondencias entre planos y variedades de dos dimensiones, la regla de Zeuthen y sus aplicaciones, fórmulas de Plücker y Cayley, asi como la determinación de los caracteres principales de las curvas definidas como intersección de superficies. El theorema $Af+B\varphi$ de Noether y sus aplicaciones es el tema del Cap. V. En los Cap. VI, VII, VIII se estudian los sistemas lineales de curvas planas y de superficies en S_3 y su interpretación como representaciones planas de las superficies racionales y como representaciones en S_3 de las variedades racionales de tres dimensiones.

De modo natural aparecen entonces las transformaciones cremonianas generales del plano y algunas particulares del espacio S_3. De dichas transformaciones se hace aplicación a la resolución de singularidades puntuales y lineales de las superficies. El contenido de estos capítulos es de fundamental importancia en geometria algebraica. El Cap. IX está dedicado a los caracteres proyectivos de las curvas y superficies de S_n; se estudian especialmente las superficies regladas y las racionales, al mismo tiempo se dan algunos invariantes numéricos de las superficies tales como: el género aritmético, el invariante de Zeuthen-Segre y el de Castelnuovo-Enriques. La geometria de los espacios reglados de S_3 y S_4 y sus diversas representaciones puntuales en espacios proyectivos de mas dimensiones, constituyen el objecto del Cap. X.

En el Cap. XI se expone brevemente la Geometria numerativa. Se establecen las fórmulas fundamentales del cálculo de Schubert y se estudian problemas numerativos referentes a cónicas y cuádricas. Se enuncia el principio de la conservación del número y se establecen las condiciones para su validez siguiendo el análisis del principio debido a Severi.

Los dos últimos capítulos, XII y XIII, están dedicados a la geometria algebraica propiamente dicha de las curvas y superficies, es decir a la geometria birracional sobre una curva y sobre una superficie. En el XII se estudia la geometria sobre una curva; se definen, para los grupos de puntos, la equivalencia y las series lineales. La serie canónica se define, siguiendo a Enriques, mediante la serie jacobiana. Se hacen aplicaciones al estudio de las correspondencias con valencia y a la determinación de la fórmula de Cayley-Brill para el número de coincidencias en una correspondencia.

El teorema de Riemann-Roch se deduce a partir del teorema de reducción de Noether y se aplica luego para establecer el teorema de Clifford y, en el estudio de las curvas en S_n, para dar las fórmulas de postulación de una curva. En el Cap. XIII se hace un estudio muy somero de la geometria sobre una superficie, las cuestiones tratadas tales como: sistemas lineales de curvas, curvas excepcionales, caracteres virtuales de las curvas, sistemas jacobiano y canónico, curvas adjuntas, teorema de Riemann-Roch, ... aparecen solo iniciadas y gran parte de los resultados enunciados se basan sobre otros cuya demostración, por la dificultad intrínseca de la cuestión, excede los límites que los autores se han señalado para la presente obra y, en consecuencia, se ha de en buscar las memorias originales o tratados que se indican.

G. Ancochea (Madrid)

86 — COXETER, H. S. M.—**Regular Polytopes** — Methuen & C.º Ltd. — London — 1948. Preço 50 s. net.

O livro em referência é um livro atraente para todo aquele a quem a geometria, e em especial o estudo dos poliedros, seja motivo de agrado.

O título no entanto precisa desde já ser esclarecido. O que é um *politopo*? Um *politopo* é uma figura geométrica formada por porções de recta, de planos ou de hiperplanos. Assim no espaço a duas dimensões toma os nomes particulares de poligono, rede, árvore etc.; no espaço a três dimensões o de poliedro etc. Shläfi que escreveu uma grande monografia sobre o assunto chamava-lhes polyschema.

Diz o autor que o seu livro se pode considerar uma continuação dos «Elementos de Euclides», porquanto os fundamentos dos assuntos tratados se encontram na literatura grega de há cerca de 2.000 anos. No entanto deve notar-se que o estudo de assuntos como os do Cap. V, o Kaleidoscópio, só teve início no século passado. Apesar disso a afirmação é verdadeira pois parece que os «Elementos» tiveram como fim principal o estudo dos poliedros regulares aos quais era atribuido significado esotérico.

Recentemente a revivescência destes estudos é em grande parte devida aos aprofundados trabalhos da cristalografia que chegou a descobrir que muitos poliedros aparecem na natureza como cristais. O trabalho de F. Klein «Vorlesunger über Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen füften Grades»[1] veio tambem por em evidência a necessidade e vantagem de tais estudos embora sob aspecto diverso.

O desenvolvimento da Topologia Combinatória é também causa de tal aprofundamento. A «Analise Situs» cujas primeiras manifestações nos aparecem com problemas curiosos como o problema das pontes de Königsberg, da coloração dos mapas, do problema das gares, etc, e para cujo estudo tantos matemáticos notáveis como Poincaré concorreram, é ainda uma das causas deste florescimento dos estudos que o livro encerra.

Tem o livro, a grande qualidade, para os que se iniciam nestes trabalhos, de pôr e tratar as questões desde o início, dando todas as noções necessárias à boa compreensão do assunto, ainda que elas sejam muito elementares. É um livro que o aluno do primeiro ano das nossas escolas superiores, pode começar a ler com a certeza de o entender e com ele ir até à fronteira do conhecimento actual do assunto. É muito claro e as demonstrações, se nem sempre são dum rigor lógico extremo, tem no entanto a vantagem de serem bastante simples e compreensíveis à primeira leitura. A maior dificuldade que o leitor encontrará, julgo, que será a da nomenclatura e a das notações que apresentam no entanto nítidas vantagens sobre as anteriores.

O trabalho é resumo da actividade do autor desde 1923, em que publicou a sua «Dimensional Analogy» e de que este, é o desenvolvimento.

Aos que se interessam por tais estudos aconselhamos vivamente a leitura deste livro.

Para se ter ideia resumida dos assuntos tratados se dão a seguir os títulos dos capítulos:

I — Polígonos e poliedros, II — Sólidos regulares e quase-regulares, III — Grupo das rotações, IV — «Tesselations» e «Honeycombs», V — O Caleidoscópio, VI — Poliedros estrelados, VII — Politopos ordinários em espaços a mais de três dimensões, VIII — Trùncaturas, IX — A demonstração de Poincaré da Fórmula de Euler, X — Formas, vectores, e coordenadas, XI — Polígonos de Petrie generalizados, XII — Secções e projecções, XIV — Politopos estrelados.

No fim de cada capítulo dá-nos sempre o autor um desenvolvimento histórico do assunto, o qual estabelece as ligações com os trabalhos anteriores; e no final do livro apresenta bibliografia abundante que permite desenvolver aquelas partes da matéria que mais possam interessar cada qual.

Está ainda o livro cheio de belíssimas gravuras que muito esclarecem e elucidam o leitor facilitando o trabalho.

É um livro que, segundo cremos, será acessível até ao leigo com curiosidade das coisas da matemática em geral e daqueles capítulos da geometria, em particular, desde que tenha um mínimo de preparação.

Um só senão a apontar, o preço, que se justifica, ainda assim, dada a qualidade do trabalho tipográfico e das gravuras.

J. da Silva Paulo

[1] Existe uma tradução inglesa intitulada: *Lectures on the Icosahedron*. London 1917 — tradução de G. G. Morris.

REVISTAS RECEBIDAS POR PERMUTA COM GAZETA DE MATEMATICA

Argentina

Boletin Matemático, Buenos Aires.
Mathematicae Notae, Rosário.
Revista de la Unión Matemática Argentina, Buenos Aires.

Brasil

Matemática, Tecnica e Ciência, Rio de Janeiro.
Revista do Instituto de Resseguros do Brasil, Rio de Janeiro.
Revista Politécnica, S. Paulo.
Summa Brasiliensis Mathematicae, Rio de Janeiro.

Espanha

Euclides, Madrid.
Gaceta Matemática, Madrid.
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Matematica, New York.

França

Bulletin Astronomique, Paris.
Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris.
Annales de l'Institut Fourier, Grenoble.
Annales de l'Université de Lyon.
Intermédiaire des Recherches Mathématiques, Paris.
La Recherche Aéronautique — O. N. E. R. A. — Paris.
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées et Bulletin de la Société Philomathique Paris
Revue de Mathématiques Spéciales, Vuibert, Paris.

Inglaterra

The Mathematical Gazette, London.

Itália

Periodico di Matematiche, Bologna.

Portugal

Agros, Lisboa.
Análise, Instituto Francês em Portugal, Lisboa.
Anais Portugueses de Psiquiatria, Lisboa.
Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses, Lisboa.
Boletim da Sociedade de Estudos da Colónia de Moçambique, Lourenço Marques.
Ciencia, Revista dos Estudantes da Faculdade de Ciências, Lisboa.
Estudos Italianos em Portugal, Lisboa.
Gazeta de Fisica, Lisboa.
Portugaliae Mathematica, Lisboa.
Portugaliae Physica, Lisboa.
Revista de Economia, Lisboa.
Seguros, Lisboa.
Técnica, Lisboa.
Vértice, Coimbra.

Suíça

Elemente der Mathematik, Basel.

Uruguai

Publicaciones del Instituto de Matematica y Estadistica, Montevideo.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publica quatro números por ano

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 47, cada número	12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA
A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 12$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282