GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XII — N.° 48 — JUNHO 1951

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XII – N.º 48 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JUNHO – 1951

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Kurt Gödel e os problemas dos fundamentos da Matemática e a teoria dos conjuntos

por **Luís Neves Real**

A recente comemoração, a 4 de Março passado, do 72.º aniversário de ALBERT EINSTEIN assinalada pela entrega de prémios com o seu nome a dois professores de Universidades norteamericanas, KURT GÖDEL, de Princeton e JULIAN SCHINGER, de Harvard, fez convergir naturalmente sobre ambos a curiosidade do mundo inteiro, espicaçada pelos telegramas admirativos das agências noticiosas. Entre aqueles que se interessam pela Matemática e dentro dela tem seguido, ou procurado seguir, a evolução do estudo dos fundamentos desta ciência, a distinção conferida agora ao lógico-matemático austríaco KURT GÖDEL tem um profundo significado. Ela representa a consagração mundial duma disciplina olhada por muito tempo com desconfiança pelas matemáticas oficiais: têm pouco mais de cincoenta anos as atitudes de certas revistas científicas recusando-se a prosseguir em debates sobre o axioma de ZERMELO, ou precedendo a publicação de artigos tratando da problemática da teoria dos conjuntos, de cuidadosas prevenções sobre a natureza de têmas que não eram tidos ainda com direito de admissão na Matemática. Ainda hoje em centros de estudos da Europa, são estes trabalhos sobre os Fundamentos de certo modo desdenhados; em Portugal, segundo creio, os nossos cursos oficiais de Matemáticas Superiores desconhecem-nos; e só com um esforço autodidacta imperfeito e dificílimo alguns portugueses têm procurado aproximar-se de tão inacessíveis como fascinantes têmas de estudo.

*

O interesse pelo estudo dos Fundamentos da Matemática surgiu com a crise suscitada na teoria dos conjuntos pela descoberta no final do século passado das antinomias de BERTRAND RUSSEL e BURALLI-FORTI, revelando ambos os perigos que se escondem sob o uso desacautelado dos quantificadores lógicos «todo» ($\forall$) e «existe um ···» ($\exists$).

Tal descoberta não sòmente vinha pôr em causa a estruturação lógica da Matemática coroada pela demonstração dada em 1887 por DEDEKIND (no seu ensaio *Was sind und was sollen die Zahlen?*) do princípio de indução finita, fundamentando-o nos quantificadores $\forall$ e $\exists$ e na noção de *cadeia*. Mas o próprio edifício clássico da Análise matemática aparecia ameaçado. De facto se repararmos, por exemplo, no enunciado base de todo estudo da variável real, — o enunciado da condição necessária e suficiente dada por CAUCHY para a convergência das sucessões de números reais — que se traduz, graças ao simbolismo lógico, por

$$\forall \delta \{ \delta > 0 \rightarrow \exists N [\forall n \forall p ((n > N \text{ e } p > 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow | u_{n+p} - u_n | < \delta)] \}$$

o seu caracter transfinito, pela consideração das *totalidades* dos números naturais e reais, é bem aparente.

Não podia tal situação de desconfiança relativamente à solidez das bases da mais exacta das ciências deixar de impressionar os melhores espíritos da Filosofia e da Matemática e interessá-los na tentativa da reconstrução dos Fundamentos da Matemática. Três sentidos foram apontados e têm sido seguidos nessa tentativa de reconstrução: o logístico de BERTRAND RUSSELL, o intuicionistata de BROWER e o formalista de DAVID HILBERT. Precisamente KURT GÖDEL adquire notoriedade internacional pelo significado dos resultados que obteve em 1930 e 1931, pondo em causa a possibilidade de serem atingidos os objectivos do programa formalista preconizado por Hilbert.

Propunha-se a escola hilbertiana, em primeiro lugar, a axiomatização das diversas disciplinas matemáticas; em seguida, e mercê de apropriado simbolismo, a formalização dessa axiomática; e, finalmente, através dum estudo crítico dessas disciplinas, conduzido num plano metamatemático, fazer a demonstração da compatibilidade dos axiomas adoptados, da sua não contradição, provando que é impossível, partindo dos axiomas e subordinando-se às regras de transformação dos enunciados permitidas pela axiomática, deduzir simultâneamente um enunciado e o seu contrário. Pela redução das diversas disciplinas matemáticas à Aritmética, o problema fundamental da *teoria da demonstração* (designação por que é conhecida a disciplina matemática que teve origem no programa formalista de Hilbert) é a demonstração da não contradição da Aritmética com um formalismo, que utiliza os símbolos:

Não, e, ou, $\forall$, $\exists$, $0 \rightarrow$ (Se $\cdots$ então $\cdots$), $'x$ (sucessor de x) $\mathfrak{N}(x)$ (x é um número), $\mathfrak{A}(x)$ (x tem a propriedade $\mathfrak{A}$), etc $\cdots$

e se subordina aos axiomas:

I — da lógica, como

$$x \rightarrow (y \rightarrow x)\,;\ (x \rightarrow y) \rightarrow [(z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)]\,;\ [x \rightarrow \text{não } x] \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{não } x\,;\ [x \rightarrow y] \rightarrow [\text{ não } y \rightarrow \text{não } x]\,;\ \mathfrak{A}(b) \rightarrow \exists x\, \mathfrak{A}(x)\,;$$
$$\forall x\, \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(b)$$

II — da igualdade

$$x = x\,;\ y = z \rightarrow (\mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{A}(z))$$

III — da aritmética finita:

$$\mathfrak{N}0\,;\ \mathfrak{N}\,b \rightarrow \mathfrak{N}('b)\,;\ ('x = 'y) \rightarrow (x = y)\ ;\ \text{não } ('x = 0)\,.$$

É a este formalismo assim constituido que designaremos por $\mathcal{F}$.

O resultado surpreendente obtido por Gödel pode enunciar-se com relativo rigor nos termos seguintes: «É impossível dentro do formalismo $\mathcal{F}$ demonstrar a compatibilidade de $\mathcal{F}$».

E o próprio caminho seguido para chegar a este enunciado está recheado de conclusões imprevistas e interessantíssimas [1].

Para apreendermos duas delas, façamos uma numeração dos símbolos usados no formalismo, pondo em correspondência os números da forma $5n+1$ (a partir de $n=0$) respectivamente com os símbolos 0, *não*, $\rightarrow$, *e*, *ou*, etc.; os números da forma $5n+2$ (desde $n=0$) com as variáveis $x, y, z, u, \cdots$; os números da forma $5n+3$ (desde $n=0$) para as quantificações: $\exists x$, $\exists y, \cdots$; os números da forma $5n+4$ (desde $n=0$) para $\forall x, \forall y, \cdots$; etc.

O objectivo desta numeração é fazer corresponder a cada enunciado de $\mathcal{F}$ um número natural. Para o conseguir porém não basta a numeração feita; é preciso ainda qualificar o papel que os diferentes símbolos desempenham na constituição dum enunciado. Com esse fim daremos ao enunciado uma escrita *arboriforme*, tendo como raíz o símbolo ou operador lógico fundamental no enunciado de que se trate. Tome-se como exemplo o axioma:

$$x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

Escrevamo-lo da maneira seguinte

$$\begin{array}{ccc} & y \quad x & \\ & \diagdown\diagup & \\ x & \rightarrow & \\ \diagdown & \diagup & \\ & \rightarrow & \end{array}$$

Atribuamos à *raiz* o número 1; numeremos os dois ramos que dela saem com 10 o da esquerda e 11 o da direita; e o mesmo façamos a partir daquele que por sua vez dá origem a novos ramos.

Assim se chega a um esquema onde os números ficarão indicando a ordem que no enunciado corresponde aos símbolos que nele ocupam a posição desses números:

$$\begin{array}{ccc} & 110 \quad 111 & \\ & \diagdown\diagup & \\ 10 & 11 & \\ \diagdown & \diagup & \\ & 1 & \end{array}$$

Compreende-se que este procedimento é absolutamente geral pois os operadores lógicos só operam sobre uma ou quando muito duas variáveis (ou enunciados já formados à custa das variáveis e dos operadores *não*, *e*, *ou*, etc..., que as ligam).

Vendo agora nos números intercalados nos diversos ramos da árvore anterior, a escrita na *base dois* de números naturais, passaremos para uma árvore equivalente onde porém os números de ordem dos símbolos do enunciado estão escritos já na base 10:

$$\begin{array}{ccc} & 6 \quad 7 & \\ & \diagdown\diagup & \\ 2 & 3 & \\ \diagdown & \diagup & \\ & 1 & \end{array}$$

Estabelecendo como regra que aos números de ordem dos símbolos se fazem corresponder sucessivamente os números primos, ordenados pela sua grandeza relativa, a partir de dois, no enunciado ante-

---

(1) Hermann Weyl — *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949, Apendix A, p. 219.

Barkley Rosser — *An informal exposition of proops of Gödel's theorems and Church theorem*, The Journal of Symbolic Logic, 1939, p. 53.

rior, aos seus números de ordem, correspondem os números primos: primeiro, segundo, terceiro, sexto e sétimo, isto é:

$$2\,,\,3\,,\,5\,,\,13 \text{ e } 17\,.$$

Posto isto e finalmente o número de Gödel do enunciado $x \to (y \to z)$ será, por definição, o número dado pelo produto $2^{11} \times 3^2 \times 5^{11} \times 13^7 \times 17^2$, resultado da multiplicação de cinco factores (tantos quantos, com repetição, os símbolos que no enunciado entram) cada um deles uma potência, cuja base é o número primo que simboliza a ordem, que no enunciado cabe ao respectivo símbolo, e cujo expoente é o número adoptado para esse mesmo símbolo.

Assim se vê que cada enunciado de $\mathcal{S}$ corresponde a um número. Inversamente, se pretende verificar-se que um dado número corresponde a um enunciado de $\mathcal{S}$ proceder-se-á da maneira seguinte. Seja por exemplo o número 460800; faça-se a sua decomposição em factores primos:

$$2^{11} \times 3^2 \times 5^2$$

que mostra ser o enunciado constituido pelos símbolos de números 11, 2 e 2, isto é respectivamente $\to$, x e x, colocados respectivamente nas *casas* de ordem 1, 2 e 3. O enunciado há-de ser da forma

$$\begin{array}{ccc} x & & x \\ & \searrow\;\swarrow & \\ & \to & \end{array}$$

ou seja finalmente $x \to x$.

Por outro lado também às demonstrações se podem fazer corresponder números; de facto sendo elas um encadeamento arboriforme de silogismos: «Se «*b*» e «*se* «*b*» *então* «*c*» então «*c*» »:

$$\begin{array}{ccc} b & & b \to c \\ & \searrow\;\swarrow & \\ & c & \end{array}$$

e, uma vez que já sabemos como calcular os números relativos aos enunciados «*a*», «*b*» e «*c*», etc..., uma técnica semelhante à anteriormente usada permite determinar igualmente números correspondentes às demonstrações de $\mathcal{S}$. Compreende-se que o conjunto dos números que podem ser *imagens* de enunciados de $\mathcal{S}$ não compreende números que sejam imagens das demonstrações de $\mathcal{S}$. Todo o simbolismo $\mathcal{S}$ aparece como uma imagem duma parte da aritmética: os símbolos, os enunciados que os combinam, os axiomas e as demonstrações da matemática—instrumento para análise crítica da Metamatemática — têm como imagens determinados números com determinadas propriedades; e às propriedades dos símbolos ou dos enunciados metamatemáticos correspondem propriedades aritméticas: a metamatemática, na concepção de Hilbert, disciplina segura para o estudo crítico da matemática é abraçada afinal por um domínio particular da matemática: a Aritmética. *Assim, por um lado, o pensamento que deve fundamentar as matemáticas é ele mesmo matemático; e, por outro, se tem de dominar teorias infinitas, terá que ultrapassar essa infinidade.* (1).

Um outro aspecto chocante desses trabalhos de Gödel é a distinção que obriga a fazer entre *enunciados verdadeiros* e *enunciados demonstráveis* (entendendo-se por *demonstrável* o deduzível dos axiomas pelo *jôgo* imposto pelos próprios axiomas).

Simbolize-se, por «não-Dem. (x)» que «o enunciado de número x não é demonstrável (em $\mathcal{S}$)» (e por «Dem. (x)» que «o enunciado de número x é demonstrável)». Demonstra-se que «não-Dem. (x)» é formalizável em $\mathcal{S}$; e que se «Dem. (x)» é um enunciado verdadeiro, a sua formalização em $\mathcal{S}$ é deduzível. Gödel mostra então como se pode determinar um enunciado ε de $\mathcal{S}$ com o número e e exprimindo que «o enunciado de número e não é demonstrável», ou com os símbolos escolhidos: «não-Dem. (e)». Prova seguidamente o chamado *Primeiro Teorema* de Gödel: «ε não é demonstrável», por outras palavras: «*não é demonstrável que o enunciado de número* e *não é demonstrável*». Se isto fosse falso, era verdadeiro «*é demonstrável que*» o enunciado de número e não é demonstrável»; mas como por hipótese é também e o número do enunciado «*o enunciado de número* e *não é demonstrável*», posso dizer antes: «*é verdadeiro o enunciado* «Dem (e)». Mas se é verdadeiro tem que ser demonstrável. E como «Dem (e)» corresponde à negação de ε, concluo que a hipótese de ser verdadeiro que «ε *é demonstràvel*» implica que também é verdadeira a sua negação: «ε *não é demonstrável*». Sendo $\mathcal{S}$ não contraditório, é isto absurdo.

Este teorema exprime afinal que «Se $\mathcal{S}$ *é não contraditório*», então «ε *não é demonstrável*». Gödel mostrando que se pode formalizar o enunciado «$\mathcal{S}$ *não é contraditório*», conclui que se fosse demonstrável em $\mathcal{S}$ o enunciado «$\mathcal{S}$ *não é contraditório*», a transitividade de «ser demonstrável» e o seu *Primeiro Teorema* obrigavam a dizer: «é demonstrável» que «ε *não é demonstrável*» o que é equivalente pela formação do próprio ε a dizer «ε *é demonstrável*». Mas pelo teorema isto só é possível se $\mathcal{S}$ for contraditório: a possibilidade de demonstrar a compatibilidade da teoria $\mathcal{S}$ implicava a sua incompatibilidade (2).

*

É o próprio Herman Weyl quem tira destes resultados a conclusão seguinte: *Desde que* Gödel *nos*

(1) Jean Cavaillès — *Transfini et Continu*, Paris, 1947, Hermann et Cie.

(2) Barkley Rosser, loc. cit.

deixou com muito pouca esperança de que qualquer formalismo, suficientemente vasto para abarcar as matemáticas clássicas, pudesse fundamentar-se numa prova de não contradição, ganharam um interesse renovado os sistemas axiomáticos desenvolvidos sem sonhos ambiciosos, anteriormente a HILBERT. E também neste domínio das axiomáticas da teoria dos conjuntos KURT GÖDEL enriqueceu a Matemática com um resultado que em certo sentido se pode considerar como fecho dum vivíssimo debate que desde o princípio do século se estabeleceu a propósito do axioma da escolha, enunciado por ZERMELO em 1904.

É sabido que, a partir de 1873, CANTOR, nas suas tentativas de *numeração* dos conjuntos infinitos, estabeleceu a noção de potência ou número cardinal $\overline{\overline{A}}$ dum conjunto A por abstração, da ordem e natureza dos elementos desse conjunto, e com base na *equivalência* de conjuntos (dois conjuntos dizendo-se *equivalentes*, se entre os seus elementos se puder estabelecer uma correspondência biunívoca). Foram as potências do numerável e do contínuo, respectivamente números cardinais do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números reais, as primeiras a serem *exploradas* por CANTOR, que desde logo demonstrou a sua *desigualdade*, entendendo-se, por tal a impossibilidade de escrever todos os números reais numa sucessão infinita, prova deduzida com base na densidade e compacidade dos números reais.

O estabelecimento da ordem de grandeza entre os números cardinais é feito através das convenções seguintes:

a) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ significa que A é equivalente a um sub-conjunto de B;

b) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ significa que é $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ e que não é $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ (A e B, não têm a mesma potência);

e do chamado teorema de BERNSTEIN:

«Se $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, então $A = B$.»

Postas estas noções e designando, como é habitual por 2^A o conjunto de todos os sub-conjuntos do conjunto A, e por $(\overline{\overline{2^A}})$ o seu número cardinal, resulta que para qualquer conjunto A se tem sempre $\overline{\overline{A}} < (\overline{\overline{2^A}})$.

Assim a *exponenciação* dos conjuntos (entendendo-se por tal a passagem dum dado conjunto A ao conjunto 2^A de todos os seus sub-conjuntos) fornece-nos a possibilidade de construir uma escala crescente e sem fim de números cardinais infinitos, partindo do numerável; designando por $\aleph_0$ e C respectivamente o numerável e o contínuo, teremos

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathsf{C} < 2^{\mathsf{C}} = \mathsf{C}_1 < 2^{\mathsf{C}_1} = \mathsf{C}_2 < 2^{\mathsf{C}_2} \cdots$$

Este critério de ordenação faz surgir naturalmente, na teoria dos conjuntos, o problema, denominado da tricotomia e que consiste em saber se, dados dois conjuntos A e B, de números cardinais respectivamente $\overline{\overline{A}}$ e $\overline{\overline{B}}$, será necessàriamente verdadeira uma e só uma das três proposições seguintes: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$; $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$. CANTOR sem o demonstrar optou pela afirmativa que veio a ser provada mais tarde, em 1904, indirectamente, a partir da teoria dos números ordinais.

Considera-se ordenado todo conjunto entre cujos elementos está definida uma relação de ordem ou de precedência, simbolizada por $\prec$, possuindo as propriedades de ser completa, antisimétrica e transitiva. Consideram-se como *semelhantes* dois conjuntos ordedados entre cujos elementos é possível estabelecer uma correspondência biunívoca, respeitando as relações de ordem estabelecidas em cada um dos conjuntos. Da mesma forma que a equivalência foi a base do processo de abstração que conduziu à definição de número cardinal, também a semelhança levou CANTOR a uma nova abstração: a de *tipo de ordem*; de dois conjuntos semelhantes diz-se que têm o *mesmo tipo de ordem* É evidente que dois conjuntos com o mesmo tipo de ordem têm o mesmo número cardinal; não é porém verdadeiro o recíproco. Mostra-o o exemplo do conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \cdots$ que pode ordenar-se ou pela relação *menor que*, como pela relação *maior que*; pondo respectivamente $1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \cdots \prec n \prec \cdots$ e $\cdots \prec n \prec \cdots \prec 3 \prec 2 \prec 1$, constituem-se dois conjuntos ordenados com o mesmo número cardinal, mas não semelhantes.

Observemos no tipo de ordem, que será designado por ω_0, do conjunto ordenado

$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec n \prec \cdots$$

uma propriedade de grande importância na estruturação da teoria dos números ordinais: tem o conjunto *um primeiro elemento* (isto é um elemento que precede todos os demais) e todos os seus subconjuntos têm igualmente um primeiro elemento. É esta propriedade que se toma como definição de *conjunto bem ordenado*, e reserva-se a designação de *números ordinais* para os tipos de ordem dos conjuntos bem ordenados. Todo conjunto finito com n elementos é equivalente ao conjunto dos n primeiros números naturais e pode ordenar-se semelhantemente a este mesmo conjunto, que é bem ordenado, se tomarmos como relação ordenadora a grandeza relativa dos números. Adjectivando de *finitos* os números cardinais e ordinais dos conjuntos finitos a observação anterior mostra que entre os números cardinais e ordinais finitos há uma estreita relação, de tal modo que a cada conjunto finito corresponde um número cardinal e um único número ordinal, fundindo-se assim, por natural convenção, com o número n dos seus elementos tanto o número cardinal como o número ordinal desse conjunto. Já não sucede o mesmo com os conjuntos infinitos.

Vimos acima como do conjunto dos números naturais se podiam formar dois conjuntos ordenados de tipos de ordem diferentes enquanto o de tipo ω_0 é um número ordinal, o segundo já o não é.

*

É possível ordenar os números ordinais, uns em relação aos outros, com a definição de «menor que», baseada no teorema seguinte:

«Se A e B, são dois conjuntos, que, ordenados por uma certa relação $\prec$ resultam bem ordenados, é sempre verdadeira uma e só uma das três proposições seguintes:

a) A é semelhante a B; b) Existe $b \in B$ tal que A é semelhante ao sub-conjunto de B, contituído por todos os seus elementos que precedem b; c) existe $a \in A$ tal que B é semelhante ao sub-conjunto de A constiuído pelos seus elementos que precedem a.

Designando por $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os números ordinais respectivamente de A e B, o teorema anterior sugere que por definição se diga na hipótese b) que o número ordinal de A é menor que o número ordinal de B, e que se escreva $\overline{A} < \overline{B}$, e que na hipótese c) se diga $\overline{B} < \overline{A}$.

Desta definição resulta serem todos os números ordinais finitos menores que ω_0, que, por sua vez, é o menor dos números ordinais transfinitos.

Esta comparabilidade universal dos números ordinais pela relação *menor que*, assim transposta para os números ordinais transfinitos, induz uma *bôa ordenação* no conjunto Θ dos números ordinais. Duas propriedades essenciais se demonstram para este conjunto:

1) Todo número ordinal θ tem um sucessor imediato, que se representa por $\theta+1$ — proposição que significa que não há número ordinal algum θ' que satisfaça a $\theta < \theta' < \theta + 1$;

2) Todo conjunto Θ' de números ordinais é imediatamente seguido por um número ordinal θ', querendo dizer-se com isto que: i) para todo $\theta \in \Theta'$ é $\theta < \theta'$; e ii) não há qualquer número ordinal θ'' tal que seja possível encontrar um elemento θ de Θ' de modo a serem satisfeitas simultâneamente as relações $\theta \prec \theta''$ e $\theta'' \prec \theta'$.

Estas propriedades justificam dois *princípios de geração* dos números ordinais, princípios que se enunciam da seguinte forma: $G.$ 1 «Todo número ordinal gera um novo número que se lhe segue imediatamente» (do qual ele é o predecessor *imediato*); $G.$ 2 «Todo conjunto de números ordinais gera um novo número que segue imediatamente esse conjunto». Desta forma o ordinal 0, — número ordinal correspondente ao conjunto vazio — dá lugar, pela aplicação de $G.$ 1, ao número ordinal 1; este ao 2; etc. $\cdots$ e o conjunto de todos os números ordinais que se obtêm a partir de 0, graças a $G.$ 1, cria por força de $G.$ 2, um novo número ordinal, precisamente o número ordinal ω_0, acima definido. Por sua vez a aplicação de $G.1$, a partir de ω_0 leva à geração duma nova sucessão de números que simbolizaremos com ω_0+n, onde n representa um ordinal finito.

Desta sucessão e por intermédio de $G.$ 2 se chega a um outro número ordinal que será representado por $\omega_0+\omega_0$ ou $\omega_0 \cdot 2$. De $\omega_0\, 2$ pode partir-se, em forma análoga para obter novos números ...

Considere-se seguidamente o conjunto de todos os números ordinais que se obtêm de ω_0: a) ou pela aplicação de $G.1$; b) ou pela aplicação de $G.2$ a conjuntos numeráveis de números ordinais formados por (a); c) ou pela aplicação de $G.1$ e $G.2$ aos números já obtidos por (a) e (b). A este conjunto de números ordinais chama-se usualmente a *classe II* dos números ordinais reservando a denominação de *classe I* para o conjunto dos números ordinais finitos.

Tomando agora a classe II, o princípio $G.$ 2 a ela aplicado gera um novo número ordinal, representado por ω_1. Note-se que, contràriamente ao que sucede com os ordinais finitos, que correspondem estreitamente (e com eles se identificando) aos cardinais finitos, todos os números da classe II correspondem a um mesmo cardinal: o númerável $\aleph_0$. Mas exactamente como a classe I tem um número cardinal *maior* que cada número cardinal finito, também o conjunto de todos os números ordinais da classe I e da classe II (isto é todos os números ordinais inferiores a ω_1) possui um número cardinal maior que todos os finitos e que o númerável. Representa-se este novo número cardinal transfinito por $\aleph_1$.

Com base agora em ω_1 e utilizando alternada e sucessivamente ora o primeiro princípio de geração ora o segundo, aplicado a conjuntos de números ordinais de potência $\aleph_0$ ou $\aleph_1$ gera-se uma *III classe* de números ordinais, que será anàlogamente superada por um novo número, inicial da *classe IV*, representado por ω_2 e a que corresponde um novo número cardinal $\aleph_2$, podendo dispor-se os números ordinais e cardinais assim obtidos em sucessão crescente (transfinita):

$$1<2<\cdots<n<\cdots\omega_0<\cdots<\omega_1<\cdots<\omega_2$$

$$\text{e} \quad 1<2<\cdots<n<\ldots\aleph_0< \quad \aleph_1 \quad <\aleph_2 .$$

Por seu turno os números ω_2 e $\aleph_2$ nos levariam a novos números ω_3 e $\aleph_3$; e o processo poderia repetir-se indefinidamente [1].

*

O *problema do contínuo* consiste em encontrar na escala crescente dos alephs, isto é $\aleph_1, \aleph_2, \cdots$, o lugar ocupado pelo número cardinal $2^{\aleph_0}$, potência do contínuo, isto é número cardinal do conjunto dos números reais. CANTOR supunha que ele deveria ser o primeiro aleph não numerável, isto é $\aleph_1$. Daí o designar-se a igualdade $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ por *hipótese do contínuo.* Embora esta igualdade, em cincoenta anos de pesquisas, nunca tivesse sido demonstrada, baldados foram igualmente todos os esforços feitos para dela deduzir qualquer enunciado matemático contraditório.

O destino desta hipótese tem corrido paralelamente ao do chamado *axioma da escolha*, que desempenha, um papel imprescindível na teoria dos conjuntos, onde enunciados há que se não podem demonstrar sem a utilização de certos conjuntos, cuja existência resulta da aplicação desse axioma: a demonstração de que: «de dois números cardinais transfinitos diversos, um é necessàriamente menor que o outro» assenta na tese «todo conjunto pode ser bem ordenado» cuja prova foi dada em 1904 com base na hipótese que ficou conhecida na literatura matemática como *axioma de* ZERMELO ou *da escolha*: *Para todo conjunto M, cujos elementos são conjuntos P não vozios e sem elementos comuns dois a dois, existe pelo menos um conjunto N, que contém um elemento e um só de cada conjunto P de M*».

Com base neste axioma podemos afirmar que na sucessão crescente dos alephs $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$ estão todos os números cardinais possíveis e portanto o número cardinal do contínuo, e todos os que a partir deste se podem atingir pela aplicação repetida do processo de exponenciação. Mas «Qual dos alephs é o número cardinal do contínuo?» é problema que permanece sem resposta, ainda que se utilize o axioma da escolha.

Este axioma originou logo que foi utilizado, uma polémica, feita em termos frequentemente vivíssimos, recusando-se muitos matemáticos a trabalhar com as *puras virtualidades* afirmadas pelo seu enunciado; tais reservas suscitaram um movimento de crítica aos fundamentos da matemática, que, na variedade de caminhos em que veio a subdividir-se, abriu novas perspectivas à investigação matemática.

Neste debate universal estabelecido á volta da teoria dos conjuntos, há que destacar a posição, estritamente científica, assumida pelo matemático polaco WACLAW SIERPINSKI — «l'homme qui a le plus et le mieux su utiliser l'axiome du choix», no justo dizer de LEBESGUE — frente ao axioma de ZERMELO e à hipótese de CANTOR, atitude de persistente e minucioso exame crítico e cuja soma de resultados se encontra no trabalho apresentado em 1918 à Academia de Ciências de Cracóvia, subordinado ao título «*L'axiome de* MR. ZERMELO *et son rôle dans la théorie des Ensembles et l'Analyse*» e na monogratia «*Hypothèse du Continu*», Warsaw, 1934. Pacientemente SIERPINSKI dedicou-se por um lado ao trabalho de assinalar as demonstrações fundamentais da teoria dos conjuntos e da análise real que utilizam *escolhas*, e por outro, a deduzir proposições variadas tanto do axioma de ZERMELO como da hipótese de CANTOR. Entre os enunciados equivalentes às duas tão discutidas proposições destaquem-se [1]:

a) para o axioma da escolha: a equivalência à proposição: «dados dois conjuntos quaisquer, um deles tem um subconjunto com o mesmo número cardinal do outro»; o que revela bem quam intimamente está ligado o axioma ao problema da tricotomia nos números cardinais.

b) para a hipótese do contínuo, a equivalência à afirmação conjunta dos dois seguintes enunciados:

L) existe um conjunto linear com a potência do contínuo que não possui qualquer subconjunto infinito não numerável e não denso; S) existe um conjunto linear com a potência do contínuo e que não possui qualquer sub-conjunto infinito não numerável e de medida nula. Proposições que reflectem uma espécie de dualidade, que a hipótese do contínuo implica na recta real, entre conjuntos de primeira categoria e conjunto de medida L nula.

A hipótese do contínuo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, é um caso particular da chamada hipótese generalizada de CANTOR, segundo a qual todo número cardinal infinito m *é imediatamente* seguido pelo número cardinal 2^m. A esta hipótese pode dar-se, com o auxílio do axioma da escolha, a forma equivalente: «para todo ordinal θ, $\aleph_{\theta+1} = 2^{\aleph_\theta}$.

*

Quase simultaneamente com as objecções feitas ao axioma da escolha, indispensável para certos desenvolvimentos das teorias ordinal e cardinal, a criação de CANTOR viu-se ameaçada por paradoxos, que nada dentro dela impedia que se formassem. A exposição sumária que acima fizemos das propriedades essenciais dos conjuntos bem ordenados e dos números

(1) HANS HAHN — *Reelle Functionen*, 1932; BEPPO LEVI, *Mathematicae Notae*, F. 1-2; VIII, 1948.

(1) *Les Entretiens de Zurich*, Zurich, 1941.

ordinais, permite apercebermo-nos fàcilmente da mais antiga dessas antinomias — a de Burali-Forti, enunciada em 1897 e que Cantor parece ter entrevisto já em 1895. Consiste ela na consideração do conjunto $\mathcal{O}$ de todos os números ordinais, que, por ser bem ordenado, gera um novo número ordinal, que sendo *novo* se não encontra ainda em $\mathcal{O}$ — o que contradita a hipótese de ser $\mathcal{O}$ o conjunto de *todos* os números ordinais.

Esta situação gerada na utilização descuidada da noção *ingénua* de *conjunto* forçou à passagem a uma nova fase da teoria dos conjuntos: a fase axiomática, caracterizada por deixar a noção de *conjunto* de ser o que a intuição nos sugere para passar a ser um termo primitivo num quadro de axiomas, escolhidos de forma a permitir obter toda teoria abstracta dos conjuntos, mas exorcizando as antinomias conhecidas

Pertence a Zermelo (1) e é de 1908 a primeira axiomática da teoria dos conjuntos. Os axiomas adoptados regulam as propriedades da relação $x \varepsilon X$ (o elemento x pertence ao conjunto X):

Ze. 1 São iguais dois conjuntos com os mesmos elementos.

Ze. 2 São conjuntos: o conjunto vazio, o conjunto $\{x\}$ cujo único elemento é x, o conjunto $\{x, y\}$ cujos únicos elementos são x e y.

Ze. 3 Sendo $P(x)$ uma proposição construida segundo as leis da Lógica e dependente da variável x (símbolo dum elemento dum conjunto X) existe um conjunto constituído por todos aqueles elementos de X que tornam verdadeira a proposição $P(x)$ (Axioma da formação dos subconjuntos dum conjunto).

Ze. 4 Existe um conjunto infinito, isto é: existe um conjunto, que contém o conjunto vazio, como um dos seus elementos, e que, com cada elemento a, contém igualmente como elemento o conjunto $\{a\}$ cujo único elemento é a.

Ze. 5 Para cada conjunto, existe um conjunto (conjunto potência) cujos elementos são os subconjuntos daquele.

Ze. 6 Para cada conjunto, existe um conjunto (conjunto reunião) cujos elementos são os elementos dos elementos do conjunto dado.

Ze. 7 O axioma da escolha.

O axioma Ze. 3, com o critério de definição dum sub-conjunto dum conjunto dado, por meio duma proposição, que deveria subordinar-se às leis da Lógica, — aquela Lógica clássica posta em cheque, simultâneamente com a teoria dos conjuntos, pela antinomia de Burali-Forti, como pelas que se lhe seguiram — impeliu naturalmente à formulação de novas axiomatizações, menos contestáveis. Fraenkel (*Einleitung in die Mengenlhere*, Berlin, 1928), Von Neumann (*Die Axiomatisierung der Mengenlhere*, Math. Zeit. 1928) e Bernays (*A system of axiomatic set theory*, Journal of Symbolic Logic, 1937, 1941, 1943) estabeleceram quadros de axiomas, dentro dos quais, como no sistema de Zermelo, o axioma da escolha ocupa um lugar especial.

A maneira de remediar nessas axiomáticas a forma discutível como Zermelo caracteriza uma legítima formulação da propriedade $P(x)$, que permite *separar* num conjunto X um seu sub-conjunto P, tem um caracter finitista e inductivo. Só podem ser *predicados*: 1.º aquelas proposições da forma $x \varepsilon A$; 2.º aquelas que se obtêm de predicados já formados pelas operações lógicas: negação, e conjunção; 3.º as que resultam de predicados já formados pela quantificação: «para todo ...».

Assim a ciência matemática possui hoje em dia *uma fundamentação satisfatória da Teoria dos Conjuntos de* Cantor, *em toda a integridade da sua creação original* (1).

Precisamente uma segunda contribuição sensacional de Gödel para a história da Matemática situa-se no domínio da teoria dos conjuntos, não na forma ingénua de Cantor, mas na sua estruturação axiomática. A revelação deste resultado teve qualquer coisa de espectacular. Em Zurich, no mês de Dezembro de 1938 reuniram-se algumas das primeiras figuras europeias da Lógica e da Matemática, entre os quais Skolem, Fréchet, Lukasiewikz, Lebesgue, Sierpinski, Bernays e Finsler, para o confronto das suas opiniões divergentes relativamente aos *Fundamentos e Método das Ciências Matemáticas*. Foi após a intervenção de Sierpinski, que se ocupara do axioma da escolha e da hipótese do contínuo, e imediatamente antes da discussão que a propósito se estabeleceu, que Gonseth, o presidente dos debates, comunicou o trecho seguinte duma carta que lhe fôra enviada por Kurt Gödel: *Num curso professado em Viena durante o verão de 1937 fiz a demonstração da não contradição do axioma da escolha. A seguir e pelo mesmo método, consegui provar igualmente a não contradição da hipótese generalizada do contínuo.*

No ano seguinte, Gödel, já então no *Institute for Advanced Study* de Princeton, renovou essa demonstração, realizando um curso, depois publicado nos *Annals of Mathematics Studies* (N.º 3, Princenton University Press, 1940), com o título *The consistency of the axiom*

(1) Jean Cavailles — *Dedekind, les Axiomatisations*, Paris, 1938.

(1) Kurt Gödel: *What is Cantor's Continuum problem?* in «The American Mathematical Monthly», Nov. 1947.

of choice and of the generalised continuum-hypothesis with the axioms of the set-theory.

Se nos recordarmos que a grande objecção contra o axioma da escolha, por parte dos matemáticos que se recusavam a utilizá-lo, era a desconfiança de que ele poderia conduzí-los a antinomias, concluiremos após este resultado de GÖDEL, que não há motivo para considerar o axioma da escolha com um receio que se não tem em relação aos restantes axiomas da teoria. Como o próprio GÖDEL diz: *pode agora afirmar-se que, no estado presente dos nossos conhecimentos, o axioma da escolha está tão bem fundamentado como todos os outros.*

Junta de Investigação Matemática — Porto, 1951, Abril.

A função de Dirac — Sua interpretação matemática — III

por **Ruy Luís Gomes**

Derivada de uma distribuição

Para maior facilidade de dedução suponhamos que se trata de uma função com derivada no sentido ordinário:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ora, como cada função $f(x)$ é identificada com a respectiva distribuição $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$, somos levados a considerar a nova razão incremental

$$(1) \qquad \frac{\int f(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int f(x)\,\varphi(x)\,dx}{h},$$

a que ainda se pode dar a forma

$$(1') \qquad \int f(y)\,\frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{h}\,dy,$$

mediante a substituição $x = y - h$.

Como a razão incremental afecta agora a função φ e não f, bastará sujeitar φ a uma hipótese suplementar para ficar assegurado o limite de (1) para $h=0$.

Concretamente, se φ admitir derivada, contínua, sobre todo R^1, tem-se

$$(2) \qquad \lim_{h=0} \frac{\int f(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int f(x)\,\varphi(x)\,dx}{h} =$$

$$= -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Na verdade com a hipótese formulada, (1') transforma-se em

$$-\int f(y)\,\varphi'(y)\,dy - \int f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy$$

ou efectivamente em

$$-\int f(y)\,\varphi'(y)\,dy - \int_K f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy,$$

sendo K o suporte compacto de φ.

Ora, como, por hipótese, φ' é contínua sobre R^1, resulta uniformemente contínua sobre K donde

$$\left| \int_K f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy \right|$$

$$\leqslant \delta \int_K |f(y)|\,dy \quad , \quad |h| < \varepsilon(\delta).$$

Finalmente, atendendo a que $f(y)$ e portanto $|f(y)|$ têm integral finito em qualquer compacto, vem

$$\left| \int f(y)\,[\varphi'(y+\theta h) - \varphi'(y)]\,dy \right| < \delta \quad |h| < \varepsilon(\delta),$$

donde (2). Em resumo

$$\int f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

conforme a regra de integração por partes.

No caso de uma função $f(x)$, localmente somável, evidentemente, mas sobre a qual nada acrescentamos a respeito da existência de derivada ordinária, tomamos $-\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx$ para sua distribuição derivada, baseados nos desenvolvimentos (1), (1'), (2).

Numa palavra: $f'(\varphi) = -f(\varphi')$.

Ampliando a hipótese suplementar sobre φ de maneira a assegurar a existência de derivada contínua $\varphi^n(x)$, para n qualquer, escreveremos

$$f^{(n)}(\varphi) = (-1)^n f(\varphi^n),$$

o que nos permite afirmar — *uma função localmente somável admite derivadas de todas as ordens, que coincidem com as derivadas ordinárias quando estas tiverem efectivamente sentido.*

De um modo ainda mais geral, se designarmos por $\tau(\varphi)$ toda a funcional linear contínua no espaço (D) das funções contínuas, de suporte compacto, com derivadas contínuas de todas as ordens, temos

$$\tau^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\,\tau(\varphi^{(n)}).$$

A continuidade de τ deverá entender-se nestes termos: se as funções $\varphi_j \in (D)$ têm os seus suportes contidos num compacto fixo de R^1 e se convergem uniformemente para 0 assim como todas as suas derivadas, então o número $\tau(\varphi_j)$ converge para 0. Esta definição é sugerida pelo caso de $\tau(\varphi)=f(x)$, pois as funções $\varphi_j=\dfrac{\varphi(x-h_j)-\varphi(x)}{h_j}$ ou, de um modo geral, $\varphi_h=\dfrac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}$ verificam todas as condições acima enumeradas, podendo tomar-se para compacto fixo o da própria função φ.

Para acabar de legitimar a noção de derivada duma distribuição, é conveniente mostrar ainda que as funções de (D) não são tão raras como pode parecer à primeira vista.

Ora, se como exemplo típico de função $\varphi \in (C)$ podemos tomar qualquer função nula nos extremos a, b de um intervalo onde é contínua (e igualmente nula no complementar de $[a, b]$), para ser também $\varphi \in (D)$ é necessário que as suas derivadas se anulem todas em a, b — fronteira de $[a, b]$.

Geomètricamente, a tangente em a e em b deve ser paralela ao eixo das y.

No entanto demonstra-se[1] que (D) é denso em (C).

Derivadas parciais

Se partirmos de uma função de várias variáveis teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi)=-f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi)=-T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right),$$

para uma distribuição qualquer.

Exemplos:

(1) *Derivada da função de* Heaviside

No estudo dos circuitos eléctricos ou, de um modo geral, de um sistema linear, de qualquer natureza, surge constantemente o problema dos *regimes transitórios*, quere dizer, da determinação da «resposta» — corrente — a uma «acção» — força electro-motriz — que começa bruscamente no instante $t=0$.

Ora, se nós introduzirmos a função de Heaviside $r(t)$ — igual a zero para $t<0$ e à unidade para $t>0$ — a «acção» mais geral que podemos imaginar ficará com a forma

$$h(t)\, r(t),$$

e nela se resumem as duas características: 1) actuar bruscamente no instante $t=0$; 2) coincidir com uma função qualquer para $t>0$.

Em consequência, para o cálculo da «resposta» a uma «acção» qualquer, começa-se pelo cálculo da «resposta» à «acção» elementar $r(t)$. Compreende-se, portanto, a importância prática desta função.

Por outro lado, como se trata de uma função, localmente somável, é certo, mas descontínua para $t=0$, não se pode derivar $r(t)$ assim à vontade.

No entanto, fazendo intervir a teoria das distribuições, concilia-se sem dificuldade o ponto de vista prático do engenheiro com as exigências de rigor do matemático.

Efectivamente, de acordo com a definição de derivada de uma distribuição, tem-se

$$r'(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty} r(t)\,\varphi'(t)\,dt=-\int_0^{\infty}\varphi'(t)\,dt$$

$$r'(\varphi)=\varphi(0).$$

Mas

$$\delta(\varphi)=\varphi(0),$$

logo

$$r'=\delta:$$

a derivada da função de Heaviside coincide com a função de Dirac.

E de um modo geral

$$r^{(n)}(\varphi)=\delta^{(n-1)}(\varphi)=(-1)^{(n-1)}\varphi^{(n-1)}(0).$$

Para esclarecer agora melhor o papel das descontinuidades de uma função f na expressão da sua derivada, suponhamos que f tem p descontinuidades de 1.ª espécie $x_1<x_2<\cdots<x_p$, admitindo derivada ordinária em cada um dos intervalos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\cdots (x_{p-1}, x_p)$, (x_{p}, ∞).

Teremos

$$f'(\varphi)=-f(\varphi')=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx=$$

$$=-\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx-\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\varphi'(x)\,dx+\cdots$$

$$-\int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)\,\varphi'(x)\,dx-\int_{x_p}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Mas

$$\int_{-\infty}^{x_1} f\varphi'\,dx=\Big[f\varphi'\Big]_{-\infty}^{x_1-0}-\int_{-\infty}^{x_1} f'\varphi\,dx.$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\varphi'\,dx=\Big[f\varphi'\Big]_{x_{i-1}+0}^{x_i-0}-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'\varphi\,dx,$$

$$\int_{x_p}^{\infty} f\varphi'\,dx=\Big[f\varphi'\Big]_{x_p+0}^{\infty}-\int_{x_p}^{\infty} f'\varphi\,dx$$

(1) Schwartz — *Théorie des distributions*, p. 21, 22.

com

$$\Big[f\varphi'\Big]_{-\infty}^{x_1-0} = f(x_1-0)\,\varphi'(x_1)$$

$$\Big[f\varphi'\Big]_{x_p+0}^{\infty} = -f(x_p+0)\,\varphi'(x_p) = 0\,.$$

Logo,

$$f'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'\,\varphi\,dx + \sum_{i=1}^{p}\Big[f(x_i+0) - f(x_i+0)\Big]\varphi(x_i)$$

ou ainda

$$f'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\varphi)\,dx + \omega_i\,\delta_{x_i}(\varphi)\,,$$

quere dizer — a derivada de f *é igual á distribuição — derivada* f' *acrescentada da massa* ω_i *por cada ponto de descontinuidade de* f.

A derivada segunda terá a forma

$$f''(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(\varphi)\,dx + \omega'_i\,\delta_{x_i}(\varphi) + \omega_i\,\delta'_{x_i}(\varphi)\,,$$

com

$$\omega'_i = f'(x_i+0) - f'(x_i-0)\,,$$

e assim por deante.

Laplaciano da função $\dfrac{1}{r}$.

Como $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ é uma função localmente somável[1] em R^3, temos

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi) = \iiint \frac{1}{r}\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz\,.$$

Mas

$$\iiint \frac{1}{r}\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geq\varepsilon} \frac{1}{r}\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geq\varepsilon}\left[\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\varphi - \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]dx\,dy\,dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{r\geq\varepsilon}\left[\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial x}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\varphi\right)\right]dx\,dy\,dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{r\geq\varepsilon}\sum\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\cos\alpha\,\varphi\,ds\,,$$

designando por α, β, γ os ângulos da normal exterior à esfera $r=\varepsilon$ com os eixos coordenados.

Consequentemente,

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{r=\varepsilon}\varphi\,ds\right]$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi) = -4\pi\,\varphi(0) = -4\pi\,\delta(\varphi)$$

ou, numa forma abreviada,

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta\,.$$

Apliquemos agora este resultado à dedução da equação de Poisson.

O integral definido do potencial

$$U(x_1\,,x_2\,x_3) = \iiint_v \frac{\rho(a,b,c)}{r}\,da\,db\,dc$$

$$r = \sqrt{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+(x_3-c)^2}\,,$$

pode considerar-se como uma extensão a R^3 de

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt\,,$$

em que g se anule no exterior de um compacto, equivalente ao volume potenciante em .

Ora, passando às distribuições, temos

$$h(x) = \int\varphi(x)\,h(x)\,dx = \int\varphi(x)\,dx\int f(x-b)\,g(t)\,db =$$

$$= \iint\varphi(u+v)\,f(u)\,g(v)\,du\,dv\,,$$

mediante $\qquad x = u+v\ ,\ \ t = v\,.$

Ainda se pode escrever

$$h(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\int\varphi(x+y)\,g(y)\,dy$$

ou, em termos de distribuições,

$$h(\varphi) = f_x\left\{g_y\big(\varphi(x+y)\big)\right\},$$

sendo g_y e f_x as distribuições geradas pelas funções

$$g_y = g(y) \ \text{ e } \ f_x = f(x)\,.$$

No caso de potencial temos

$$U(\varphi) = \rho_x\left\{\frac{1}{r_y}\,\varphi(x+y)\right\},\quad \frac{1}{r_y} = \frac{1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\,,$$

$$\rho_x = \rho(x_1\,,x_2\,,x_3)\,.$$

---

(1) Fora da origem, 0, é evidente. Para o verificar na origem, 0, basta passar às coordenadas polares de polo em 0.

$$\Delta U = \rho_x \left\{ \frac{1}{r_y} \left(\Delta_x \varphi (x+y) \right) \right\} = \rho_y \left\{ \frac{1}{r_y} \left(\Delta_y \varphi (x+y) \right) \right\}$$

pois tanto vale derivar $\varphi(x+y)$ em ordem a y como em ordem a x.

Mas

$$\frac{1}{r_y} [\Delta_y \varphi (x+y)] = \Delta_y = \Delta_y \left(\frac{1}{r_y} \right) \left(\varphi (x+y) \right) =$$

$$= - 4\pi \, \delta \, \varphi (x+y) = - 4\pi \, \varphi (x) ,$$

em virtude do resultado anterior relativo precisamente ao Laplaciano de $\frac{1}{r}$.

Logo,

$$\Delta U (\varphi) = - 4\pi \rho (\varphi) ,$$

que é a equação de Poisson.

Bibliografia Fundamental. — Além da obra de Schwartz já indicada, ver especialmente o artigo do mesmo autor na *Revista de Telecomunicações*, Tomo 3, N.º 4, Avril, 1948. Pelo que respeita á introdução da função de Heaviside no estudo dos regimes transitórios dos circuitos eléctricos, consultar A. Angot — *Compléments de Mathématiques*, Coll. Technique du C. N. E. T., Paris, 1949 — págs. 450-459.

PEDAGOGIA

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

I

por ***Maria Teodora Alves***

Não se pode apreciar o programa de uma disciplina do ensino liceal, sem considerar o conjunto das outras disciplinas e os respectivos programas.

No estudo crítico que farei aos programas de Matemática, atenderei a esse facto, tanto mais que algumas disciplinas que constituíam o antigo 2.º ciclo liceal, foram desdobradas, pela actual reforma.

No 2.º ciclo liceal, além da Matemática, há as seguintes disciplinas: Português, Francês, Inglês, História, Geografia, Ciências Naturais, Ciências Físico-Químicas e Desenho. A estas actividades há ainda que acrescentar: Canto Coral, Educação Física, Religião e Moral e Mocidade Portuguesa.

Com verdade, não se poderá dizer que os alunos do 2.º ciclo liceal (13 a 15 anos) na época crítica do seu desenvolvimento, estejam aliviados de trabalho intelectual e físico.

Ao desdobramento de disciplinas corresponde sempre uma maior extensão de programas, maior exigência dos professores e dos pontos de exame.

Aquele programa de História do 2.º ciclo, no género, pode considerar-se um modelo perfeito de exagero e e de minúcia. Na edição «Programas das disciplinas do ensino Liceal» começa na página 99 e termina na pág. 110.

É um saber estupendo e aflitivamente instrutivo, para rapazes e raparigas dos 13 aos 15 anos.

Com razão, afirma o Dr. Decroly, o eminente pedagogo belga: «Les programmes ont été inspirés par des hommes très savants dans leur specialité, mais trop peu préoccupés de la psychologie, pour eux l'enfant est accessoire».

O período de desenvolvimento das crianças até aos 15 anos exige da parte da escola (professores e legisladores) os maiores cuidados e a maior prudência.

Com efeito, o crescimento mental atinge o máximo desenvolvimento à volta dos 16 anos (experiências de Terman) mas há outros psicólogos e experimentadores, tão categorizados como Terman, que reduzem o período de crescimento mental à volta dos 15 anos e, mesmo alguns deles, à volta dos 14 anos.

Ora a inteligência significa antes aptidão para adquirir conhecimentos do que os próprios conhecimentos já adquiridos.

Longe de mim a ideia de que seja possível desenvolver a inteligência sem comunicar informações e sem transmitir conhecimentos. Mais longe também a ideia de que o único propósito da educação é o desenvolvimento da inteligência.

Mas devo considerar que é esse um dos grandes propósitos da educação e aquele que mais de perto se liga aos programas e às disciplinas que constituem o curriculum. Analisarei os programas de Matemática, nos três ciclos liceais, tendo em atenção estas considerações.

O n.º 39 da «Gazeta de Matemática» insere um artigo de crítica aos programas de Matemática da actual reforma de ensino liceal, da autoria dos

Senhores Drs. L. Barros e F. David. Essa crítica põe em evidência faltas de rigor, incorrecções e impropriedades de linguagem e desconexões no encadeamento dos assuntos versados no programa. Embora eu divirja, num ou outro pormenor, da crítica feita, devo dizer que concordo com a sua linha geral.

O objectivo desta minha crítica será, em cada ciclo, a didáctica da Matemática imposta pelo respectivo programa, a concatenação dos tópicos e a coordenação do programa com o das outras disciplinas.

Programa de Matemática do 1.º ciclo

O programa apresenta neste ciclo, em cada um dos anos que o constituem, características muito diferentes.

No 1.º ano não há separação entre a Aritmética e a Geometria — o que acho muito bem.

No 2.º ano já está estabelecida essa separação, com a obrigatoriedade do estudo começar pela Geometria — o que acho muito mal.

O pedagogista inglês W. Sumner, em «The teaching of Aritmetic and Elementary Mathematics», diz: «In secondary modern schools there should be no artificial separation of mathematical subjects».

Os metodologistas da Matemática, Breslich, Nunn, Inglis e Judd e muitos outros, são da mesma opinião.

Os programas de Matemática dos dois anos deste ciclo, são tão divergentes, quanto à sua metodologia, que parecem ter sido delineados por duas pessoas diferentes que, a tal respeito, não trocassem impressões.

Por outro lado, os programas do 1.º e 2.º anos estão descompensados, quanto à distribuição das matérias versadas.

Em primeiro lugar, houve um acrescentamento de matéria ao programa da reforma anterior. Só pode afirmar que a actual reforma de ensino trouxe redução no programa de Matemática do 1.º ciclo, quem não tenha feito a leitura comparativa dos programas de Matemática, neste ciclo, das duas reformas.

Eu vou citar as rúbricas do actual programa, de que o programa da reforma anterior foi acrescido:

«Gráficos: gráficos de barras, gráficos cartesianos. Regra de companhia. Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação á resolução de problemas simples».

Como se vê, não houve redução; pelo contrário, houve substancial acréscimo.

Vejamos, agora, como se dá a descompensação das matérias no programa do 1.º ano e no do 2.º ano.

Se é certo que as rúbricas relativas ao sistema métrico décimal, números complexos e raiz quadrada de números inteiros transitaram do antigo programa do 2.º ano para o do 1.º ano, o programa do 2.º ano foi acrescido da maior e mais difícil parte da Aritmética do 1.º ano da antiga reforma (critérios de divisibilidade, m. d. c. e m. m. c. de vários números, decomposição em factores primos e operações com números fraccionários).

Consideremos mais particularmente o programa do 1.º ano.

É uma lista de assuntos a versar e o professor é legalmente obrigado a «não alterar a ordem por que as matérias se encontram distribuídas no programa». Qual é o elo de ligação entre todas aquelas rúbricas? É evidente que a resposta a esta pergunta não pode ser dada pelo recitativo das próprias rúbricas; mas as instruções que acompanham o programa, conservam-se a esse respeito silenciosas.

O programa do 1.º ano apresenta-se por esse motivo desconexo. As desconexões vincam-se mais nitidamente quando pretendemos estabelecer ligação com o programa do 2.º ano.

A meu ver, uma simples frase, nas instruções ao programa, como mostrarei dentro em pouco, bastaria para lhe dar unidade em cada um dos anos do ciclo, estabelecendo entre eles a necessária ligação. Mas essa frase não aparece nas instruções ao programa, nem se suspeita que possa existir.

Quanto ao programa do 2.º é imposto que o seu estudo comece pela Geometria.

O primeiro período lectivo, no 2.º ano, será ocupado pelo estudo da Geometria, desligado da Aritmética.

Restam dois períodos lectivos para o estudo da aritmética do 2.º ano, que é *sòmente* isto:

«Noções de múltiplo e submúltiplo de um número; restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números.

Prova dos nove das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números: determinação do menor múltiplo comum de dois números partindo do máximo divisor comum.

Noção de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções.

Fracções generalizadas; valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas; propriedades fundamentais. Aplicações da proporcionalidade a regras de três simples e composta, percentagens, regras de companhia e juros simples.

Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples.»

Em dois períodos lectivos o aluno (12 anos) terá que adquirir os conceitos e a técnica de cálculo que corresponde a todas estas rúbricas.

Este saber, assim acumulado é um monte intransponível e indesbastável!

No ensino da Matemática há dois aspectos distintos a considerar:

Os conceitos e a sua ordenação lógica;

A técnica de cálculo e as suas aplicações.

Se a função formativa da Matemática é dada principalmente pelos conceitos e pela ordenação lógica, a técnica de cálculo — que não pode ser menosprezada — é obtida quase que exclusivamente, pelos exercícios de aplicação.

Todos os psicopedagogistas que conheço afirmam que a técnica de cálculo, para ter segurança e não ser automática — o automatismmo no ensino é considerado por todos eles como o maior dos males — tem que ser obtida com repetidos exercícios, em intervalos espaçados, mas sucessivos.

É uma consequência das leis da aprendizagem (Thorndike, Piaget, Watson, Hyde, etc.).

Mas há outra grande dificuldade a remover: A técnica de cálculo em Aritmética, não dá «transfert» para o raciocínio aritmético. — «Practice in arithmetical computation did not transfer to arithmetical reasoning». — (Experiências de Winch).

Mas no último período lectivo do 2.º ano os alunos são ainda sobrecarregados com trabalhos de revisão em todas as disciplinas. (Aproxima-se o Fantasma do exame...) Quer dizer, o aluno é obrigado a pensar à pressa e, por grosso, sobre o programa da Aritmética do 2.º ano. Adquirirá necessàriamente um saber que se escoa como água absorvida pela areia.

A leitura do programa de Aritmética do 2.º ano, atrás transcrito, mostra que nenhuma referência há ao importantíssimo conceito de razão de duas grandezas e razão de dois números e que o conceito de proporcionalidade precede o de proporção.

É certo que se pode definir a proporcionalidade independentemente do conceito de razão. Do ponto de vista lógico não há reparos a fazer, mas do ponto de vista pedagógico é erro tão grosseiro que, suponho, ninguém defenderá.

Exposta a minha opinião sobre as deficiências do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma resta-me indicar as alterações a introduzir, sujeitando-as à crítica de quem se interesse pelo assunto.

Antes porém de apresentar essas alterações ao programa do 1.º ciclo, permito-me fazer algumas considerações sobre o ensino da Matemática, neste ciclo.

Constitue já um lugar comum a afirmação de que o ensino da Matemática, nos primeiros anos da escola secundária deve ser intuitivo e experimental, Está confirmado pelos trabalhos de Nunn, Thorndike. Piaegt, Judd e outros nomes de categoria internacional e ninguém ousa afirmar o contrário.

O professor do Teacher's College da Universidade de Colúmbia, W. Reeve, que é também um notável metodologista da Matemática, sintetiza nesta frase, essa orientação: «He (o aluno) must handle, measure, cut, count, draw, make models, draw graphs, in order to learn.»

H. Simon, outro ilustre metodologista da Matemática, em «Preface to teaching», a propósito do ensino da Aritmética, dirige-se aos professores de Matemática, dizendo-lhes: «Your teaching of arithmetic ... may merely train your class in a number of process wich will let them pass an examination at the end of the term.»

That is «useful». It may also help them manage their savings accounts better or get a job on graduation. That is usefull too-and this time without quotation marks. But if you can develop in them an understanding of number relations, if you can teach them to visualize distances and quantities.... then you are training them culturally: They will for, ever after be more sentive more apreciative, more understanding even though they may do not better on a formal examination».

Esta orientação, peconizada por estes ilustres metodologistas da Matemática, não se compraz com turmas de 40 alunos, sentados em bom alinhamento, em carteiras vulgares e dispondo apenas de lápis, papel e do quadro preto.

E' um ensino activo, dinâmico em que o aluno observa, experimenta, regista e redige as conclusões das experiências que realizou. Todos os sentidos do aluno devem intervir.

O professor não ministra conhecimentos, orienta as expeiiências do aluno de modo a conduzi-lo às necessárias conclusões.

Em sucessivas alíneas, indicarei agora as alterações a fazer ao programa de Matemática do 1.º ciclo (à parte o número de alunos por turmas e as condições da sala de aula), para que se torne eficiente, quanto ao desenvolvimento e formação mental dos alunos.

a) Deslocar a divisibilidade e as operações com os números fraccionários do 2.º ano para o 1.º ano. (m. d. c., m. m. c. e a decomposição em factores primos, conservar-se-iam no 2.º ano).

Deste modo os dois programas ficariam mais compensados.

b) Centrar o programa do 1.º ano no problema de mudança de unidade, constituindo um todo com a divisão de números inteiros, números decimais e com o número fraccionário.

Problema de mudança de unidade é a frase que falta nas instruções ao programa de Matemática do 1.º ciclo e que lhe daria unidade e que estabeleceria o elo de ligação entre o programa do 1.º ano e do 2.º ano. Mas as instruções ao programa não deixam transparecer a mais leve suspeita da existência desse problema.

Esta frase seria, para o programa de Matemática do 1.º ciclo, com a palavra *Sésamo* do «Abre-te Sésamo» da história para crianças da Caverna de Ali-Bábá.

O problema de mudança de unidade, quer em ciência, quer na vida diária, é de uso corrente e, por isso, de alta importância.

A resolução de problemas de mudança de unidade sòmente com as unidades do sistema métrico decimal conduz o aluno a essa *triste regra* que eles inconscientemente recitam assim:

«Para multiplicar um n.º por 10 *anda-se* com a vírgula uma casa para a direita e para dividir *anda-se* para a esquerda».

O aluno, para adquirir o domínio do problema de mudança de unidade, deve medir comprimentos, tomando por unidade, os mais variados comprimentos, o palmo, o pé, etc. e converter as medidas obtidas uma nas outras pelas relações que haja entre elas. O mesmo procedimento na medição de áreas e de volumes.

Iniciados, deste modo, os alunos do 1.º ciclo no problema de mudança de unidade, talvez que os professores de Ciências Físico-Químicas não tivessem ocasião de encontrar alunos para os quais os problemas de mudança de unidade, respeitantes às grandezas físicas, são problemas transcendentes, mesmo no 7.º ano.

A interdependência do problema de mudança de unidade e da divisão de números inteiros e de números decimais e do conceito de número fraccionário, constitue um todo (a unit) a que o metodologista da Matemática WHEAT chama «The three kinds of problems»:

1) Calcular um número considerando-o como parte de um todo.

2) Dados dois números, calcular um deles que parte é do outro.

3) Calcular um número conhecendo uma parte determinada dele.

O elo de ligação entre o programa do 1.º ano e o do 2.º ano, seria feito por intermédio do número fraccionário, os problemas com fracções de denominador 100 permitiriam estabelecer o conceito de percentagem, do programa do 2.º ano. Os problemas de percentagem podem reduzir-se a problemas de fracções com denominador 100. Do conceito de percentagem, assim estabelecido, resultaria o conceito de razão de duas grandezas e razão de dois números.

Com a operação divisão de dois números inteiros e decimais, conceito de número fraccionário e razão de dois números, ficaria estudado o problema de mudança de unidade completamente e em relação com «The three kinds of problems», de WHEAT.

Quanto à metodologia, a meu ver, é das deficiências mais graves do programa do 1.º ciclo, ignorar o problema de mudança de unidade, que é basilar em Ciência, na vida diária e também na didáctica da Matemática.

c) Centrar o programa de Matemática do 2.º ano no conceito de proporcionalidade de grandezas.

d) Manter no 2.º ano a orientação do 1.º ano, isto é, não separar a Geometria da Aritmética e também não impor ao professor a obrigação de respeitar a a ordem das rúbricas do programa.

Desde que todas as rúbricas do programa fossem cumpridas, a ordem das rúbricas surgiria conforme as necessidades dos problemas a resolver.

e) Substituír a determinação de que «as demonstrações lógicas são totalmente banidas e substituídas por verificações experimentais» de modo que fosse permitido inferir das propriedades verificadas experimentalmente as consequências lógicas convenientes.

Com efeito, geometria intuitiva e experimental, por exemplo, não exclue a demonstração lógica; pelo contrário, associa a intuição, a experiência e a dedução sempre que seja possível.

Julgo que o programa de Matemática do 1.º ciclo, depois destas correcções, teria maior eficiência e seria superior aos programas das anteriores reformas.

(Continua)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE TOPOLOGIA DAS VARIEDADES FIBRADAS

Bruxelas — Junho de 1950

O Centro Belga de Investigações Matemáticas, a que já nos referimos anteriormente (*Gazeta de Matemática*, **43**, 1950), promoveu em Junho de 1950 uma reunião dalguns dos mais notáveis matemáticos que se dedicam a este ramo da Topologia, disciplina que dia a dia, toma maior importância e que é hoje reconhecido desempenhar um papel básico em quase todos os ramos da Matemática.

O Colóquio iniciou-se com as duas conferências: *Introdução à teoria dos espaços fibrados* por H. Hopf e *Noções de Álgebra Diferencial; aplicação aos grupos de Lie e às variedades onde opera um grupo de Lie* por Henri Cartan.

Seguiram-se as exposições sobre assuntos mais restrictos:

As conexões infinitesimais num espaço fibrado diferenciável por C. Ehresmann.

A transgressão num grupo de Lie e num espaço fibrado principal por H. Cartan.

Sobre um tipo de algebras diferenciais em relação com a transgressão por J. L. Koszul.

Espaços fibrados e homotopia por B. Eckmann.

Sobre a homologia dos grupos de Lie, dos espaços homogéneos e dos espaços fibrados principais por J. Leray.

Sobre uma fórmula da teoria dos espaços fibrados por H. Hopf.

Algumas relações entre a homologia nos espaços fibrados e as classes características relativas a um grupo de estrutura por G. Hirsch.

O Centro encarregou o matemático belga G. Hirsch da organização do Colóquio e publicou [1] as comunicações apresentadas, como já o fizera com o Colóquio de Geometria Algébrica.

No fim da reunião foi enviada ao notável matemático francês Elie Cartan, cujo falecimento recente é sentido por todo o mundo matemático, a seguinte missiva: «A l'issue du Colloque de Topologie, tenu à Bruxelles du 5 au 8 juin 1950, les participants expriment leur profonde admiration à M. Elie Cartan, dont les travaux ont ouvert la voie à la plupart des recherches exposées au cours de cette réunion».

M. Z.

[1] *Colloque de Topologie (Espaces Fibrés)*—C. B. R. M. Georges Thone, Liège—Masson & Cie, Paris—1951.

CENTENÁRIO DE GOMES TEIXEIRA

Como noticiámos a *Gazeta de Matemática* dedicará um dos números deste ano, o n.º 50, em homenagem ao matemático português Gomes Teixeira.

A Redacção recebeu já os seguintes trabalhos inéditos:

1—*On the reversion of series*, Prof. Sir E. Whittaker; 2—*Equações de derivadas parciais e funções de variáveis reais*, Prof Hadamard; 3 — *Caracterisations fonctionnelles des transformations de Laplace*, Prof. R. San Juan; 4—*Sobre pares de figuras conveхas*, Prof. Luís A. Santaló; 5 — *On a certain arithmetical identity related to the doubly periodic function of the second and third kinds*, Prof. M. A. Basoco; 6—*Sobre la inversion en las elasticidades parciales*, Eng. Dr. Gallego Diaz; 7—*Sobre aneis de endomorfismos*, Prof. A. Almeida Costa; 8—*Über ein Kennzeichnung von Bogen minimalen Ordnungswertes*, Prof. Otto Haupt; 9—*Un critère de continuité*, Dr. Renato Pereira Coelho.

Os trabalhos n.ºs 1 e 5 têm o interesse particular de se relacionarem com resultados originais obtidos pelo Prof. F. Gomes Teixeira.

Prometeram colaboração para este número comemorativo, além de alguns estrangeiros, entre outros os seguintes matemáticos portugueses: Prof. Manuel dos Reis, Prof. Mira Fernandes, Prof. Vicente Gonçalves, Prof. J. Sebastião e Silva, Prof. Ruy Luís Gomes, Prof. António Monteiro, Prof. Hugo Ribeiro, Dr. J. Ribeiro de Albuquerque, Dr. Luís Neves Real, Dr. Atónio Gião, Dr. Fernando Soares David e Dr. Alfredo Pereira Gomes.

M. Z.

SEMINÁRIO BOURBAKI

Em Março passado realizou-se no Instituto Henri Poincaré a 2.ª sessão deste Seminário, onde foram feitas e comentadas as conferências seguintes: 1) *Groupes d'homotopie*—por J. P. Serre; 2) *Nombre de solutions des èquations polynomiales sur un corps fini*—por J. Delsartre; 3) *Théorie des caractères dans les groupes unimodulaires*—por R. Godement; 4) *Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables*—por L. Schwartz; 5) *Anneaux d'opérateurs et représentatians des groupes*—por Dixmier; e 6) *Théorie du corps de classes local selon G. P. Holschild*—por P. Samuel.

A. P. G.

DOUTORAMENTO NA F. C. L.

Na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa realizaram-se, nos dias 5 e 7 de Maio deste ano, as provas para a obtenção do grau de doutor em Ciências Matemáticas do assistente Peter Bruno Theodor Braumann.

Os interrogatórios incidiram sobre os pontos: «Integrais curvilíneos» e «Separação de valores reais em polinómios reais». A tese intitulava-se «As partições em diversos ramos da Matemática». Os interrogatórios e discussão da tese foram feitos pelos professores da Faculdade Doutores J. Ramos e Costa e J. Vicente Gonçalves.

«A Gazeta de Matemática» felicita vivamente o novo doutor.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS E INTEIRAS POSITIVAS DA EQUAÇÃO DE DIOFANTO(¹)

por **Heliodoro Augusto Lopes** e **António Francisco Pires**

Consideremos a equação de DIOFANTO $ax+by=c$ em que:

a) os números a, b, e c são inteiros e positivos *nenhum deles nulo ou negativo*;

b) os coeficientes a e b são primos entre si, o que garante a irredutibilidade da equação e a existência de uma infinidade de soluções inteiras dadas, a partir de uma delas x_0; y_0, por

$$x=x_0+b\cdot u \quad ; \quad y=y_0-a\cdot u$$

com u inteiro qualquer.

I — Resolução da equação em números inteiros não negativos

O parâmetro u deve satisfazer simultâneamente às duas condições:

$$x_0+b\cdot u \geqslant 0 \quad ; \quad y_0-a\cdot u\geqslant 0$$

donde se deduz

$$-\frac{x_0}{b}\leqslant u\leqslant\frac{y_0}{a}$$

dupla condição que mostra ser *limitado o número de soluções em números inteiros não negativos.*

Como x_0 e y_0 não podem ser conjuntamente *números negativos*, dois casos se apresentam:

$A \rightarrow x_0$; y_0 *é uma solução em números positivos*

Designando h e k os maiores inteiros contidos em $\frac{y_0}{a}$ e $\frac{x_0}{b}$, respectivamente, a sucessão

$$\text{S)} \quad -k-1\,;\,-\frac{x_0}{b}\,;\,-k\,;\,\cdots\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,h\,;\frac{y_0}{a}\,;\,h+1$$

mostra que u assume os $h+k+1$ valores inteiros

$$-k\,;\,\cdots\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,h$$

a que correspondem *outras tantas soluções em números não negativos.*

Ora, de

$$y_0=a\cdot h+r\,;\quad 0\leqslant r<a \quad \text{e} \quad x_0=b\cdot k+R\,;\quad 0\leqslant R<b$$

deduz-se

$$\frac{y_0}{a}=h+\frac{r}{a} \quad \text{e} \quad \frac{x_0}{b}=k+\frac{R}{b}.$$

Adicionando membro a membro as igualdades anteriores, resulta

$$\text{1)} \quad \boxed{\frac{c}{ab}=h+k+\frac{br+aR}{ab}}$$

atendendo a que x_0; y_0 é uma solução da equação proposta.

A fracção $\frac{br+aR}{ab}$ obedece à dupla condição $0\leqslant\frac{br+aR}{ab}<2$, porque de $0\leqslant r<a$ e $0\leqslant R<b$ se obtém $0\leqslant br+aR<2\cdot ab$; além disso, a referida fracção é diferente de 1, o que se reconhece com auxílio dos teoremas seguintes: «*Se um número divide uma das duas parcelas de uma soma, esta e a outra parcela, divididas por esse número dão restos iguais*» e «*Se um número divide um produto e é primo com um dos factores, divide o outro factor*».

Nestas condições, temos:

$$\text{a)} \quad 0\leqslant\frac{br+aR}{ab}<1$$

A igualdade 1) toma a forma $\frac{c}{ab}=h+k+\begin{cases}0\\ 0,m\end{cases}$ da qual se conclui que $h+k$ é o *maior inteiro* contido em c/ab.

PORTANTO: «*O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em c/ab aumentado de uma unidade*».

$$\text{b)} \quad 1<\frac{br+aR}{ab}<2$$

A referida igualdade 1) escreve-se com a forma

$$\frac{c}{ab}=h+k+1+0,n$$

que mostra ser $h+k+1$ o *maior inteiro* contido em c/ab.

(¹) Recebido em 1951, Fevereiro, 12.

Portanto: «*O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em* c/ab.

$B \to x_0 ; y_0$ *é uma solução em que* x_0 *é negativo e* y_0 *positivo*

Pondo $x'_0 = -x_0$ e designando h e k os maiores inteiros contidos em $\frac{y_0}{a}$ e $\frac{x'_0}{b}$, respectivamente, a sucessão

$$\text{S}_1) \qquad 1\,;2\,;\cdots;k\,;\frac{x'_0}{b};k+1\,;\cdots;h-1\,;h\,;\frac{y_0}{a};h+1$$

mostra que u assume os $h-k$ valores inteiros

$$k+1\,;k+2\,;\cdots;h-1\,;h$$

a que correspondem *outras tantas soluções em números não negativos.*

Procedendo como anteriormente, de

$$\frac{y_0}{a}=h+\frac{r}{a}\,;0\leqslant r<a \quad \text{e} \quad \frac{x'_0}{b}=k+1-\frac{R'}{b}$$

com $\qquad R'=b-R$ e $0\leqslant R<b$

conclui-se

$$2) \qquad \boxed{\frac{c}{ab}=h-k-1+\frac{br+aR'}{ab}\,.}$$

atendendo a que $x_0;y_0$ é uma solução da equação proposta.

Como R' obedece à dupla condição $0<R'\leqslant b$, reconhece-se que a fracção $\frac{br+aR'}{ab}$ satisfaz a $0<\frac{br+aR'}{ab}<2$; além disso, é igual a 1 se $b=R'$ e $r=0$, e diferente de 1 nos outros casos.

Nestas condições, temos

$$\text{a)} \qquad 0<\frac{br+aR'}{ab}<1$$

A igualdade 2) toma a forma

$$\frac{c}{ab}=h-k-1+0,m$$

da qual se conclui que $h-k-1$ é o *maior inteiro* contido em c/ab.

Portanto: «*O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *aumentado de uma unidade*».

$$\text{b)} \qquad 1\leqslant\frac{br+aR'}{ab}<2$$

A referida igualdade 2) escreve-se com a forma

$$\frac{c}{ab}=h-k-1+\begin{cases}1\\1,n\end{cases}$$

que mostra ser $h-k$ o *maior inteiro* contido em c/ab.

Portanto: *O número de soluções em inteiros não negativos é igual ao maior inteiro contido em* c/ab ».

As considerações feitas em $A\to$ e $B\to$ permitem escrever a proposição P.: — «*O número de soluções em números inteiros não negativos da equação* $ax+by=c$, *nas condições indicadas, é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *ou ao inteiro seguinte*», visto que o raciocínio e a conclusão em $B\to$ se mantêm quando y_0 é negativo e x_0 positivo, como fàcilmente se reconhece.

Obs. — No caso limite $c=0$, a proposição anterior ainda é aplicável. Na realidade, a equação $ax+by=0$ admite a única solução não negativa $x=0;y=0$.

II — Resolução da equação em números inteiros e positivos

Neste caso, os números $-\frac{x_0}{b}$ e $\frac{y_0}{a}$, que limitam a variação do parâmetro u, mesmo que inteiros, *não são* valores de u, quer dizer, u obedece à dupla condição

$$-\frac{x_0}{b}<u<\frac{y_0}{a}$$

Como em I — temos a considerar dois casos:

$A\to x_0;y_0$ *é uma solução em números positivos*

A sucessão S) e a correspondente igualdade 1) permitem construir o quadro seguinte:

Valores de $-\frac{x_0}{b}$ e $\frac{y_0}{a}$	Número de soluções	Maior inteiro contido em c/ab
Não inteiros	$h+k+1$	$h+k$ ou $h+k+1$
Ambos inteiros	$h+k-1$	$h+k$
Um deles inteiro	$h+k$	$h+k$

$B\to x_0;y_0$ *é uma solução em que* x_0 *é negativo e* y_0 *positivo*

A sucessão S_1) e a correspondente igualdade 2) permitem construir o quadro seguinte:

Valores de $-\frac{x_0}{b}$ e $\frac{y_0}{a}$	Número de soluções	Maior inteiro contido em c/ab
Não inteiros	$h-k$	$h-k$ ou $h-k-1$
Ambos inteiros	$h-k-1$	$h-k$
É inteiro $-\frac{x_0}{b}$	$h-k$	$h-k$
ou $\frac{y_0}{a}$	$h-k-1$	$h-k-1$

Da observação dos quadros precedentes, concluimos a proposição seguinte, vulgarmente conhecida pelo nome de Teorema de Catalan:

«*O número de soluções em números inteiros e positivos da equação* $ax+by=c$, *nas condições indicadas, é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *ou esse inteiro aumentado ou diminuído de uma unidade*», visto que o raciocínio e a conclusão em $B\rightarrow$ se mantêm quando y_0 é negativo e x_0 positivo, como fàcilmente se reconhece.

Obs$_1$: — Esta proposição pode aplicar-se à determinação do número de soluções em inteiros não negativos, porque contém a correspondente proposição P. referida em I $\rightarrow$.

Obs$_2$: — As considerações anteriores levam-nos às seguintes conclusões, úteis na *prática* da determinação das soluções em números inteiros e positivos:

a) *Se* c/ab *é inteiro, o número de soluções é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *diminuido de uma unidade;*

b) *Se a parte própria de* c/ab, *tornada irredutível, tem por denominador um dos coeficientes* a *ou* b, *o número de soluções é igual ao maior inteiro contido em* c/ab;

c) *Nos outros casos, o número de soluções é igual ao maior inteiro contido em* c/ab *ou esse inteiro aumentado de uma unidade.*

Alguns exemplos:

Equações	Número de soluções	
	Aplic.º os teor.	Resolv.º a eq.
$7x+5y=140$	n. neg. 4 ou 5	5
	posit. 3	3
$5x+3y=87$	n. neg. 5 ou 6	6
	posit. 5	5
$3x+5y=53$	n. neg. 3 ou 4	4
	posit. 3 ou 4	4

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Ensino Liceal — Exames do 3.º ciclo — 1950.

I

3220 — Determine os números a e b inteiros e positivos tais que o polinómio $x^3-6x^2+2ax+b$ seja divisível por $x-1$. R: *Representando por* $P(x)$ *o polinómio, tem-se* $P(1)=0$ *ou* $2a+b=5$, *equação de* Diofanto *que admite 2 soluções em números inteiros e positivos:* $a_1=1$, $b_1=3$ *e* $a_2=2$, $b_2=1$. *Há pois dois polinómios,* $P_1(x)=x^3-6x^2+2x+3$ *e* $P_2(x)=x^3-6x^2+4x+1$, *nas condições do enunciado.*

3221 — É dada a equação $x^2+4ax+a=0$ em que $a>0$. 1) Determine a equação cujas raízes sejam respectivamente a média aritmética e a média geométrica das raízes da equação dada. 2) Calcule a de modo que a soma das raízes da equação obtida seja igual a -6. R: 1) *Sejam* x_1 *e* x_2 *as raizes da equação dada e* y_1 *e* y_2 *as da eq. a determinar. Então:* $y_1=(x_1+x_2)/2=-2a$, $y_2=\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{a}$, $y_1+y_2=\sqrt{a}-2a$ *e* $y_1y_2=-2a\sqrt{a}$; *a eq. do 2.º grau pedida é* $y^2+(2a-\sqrt{a})y-2a\sqrt{a}=0$. 2) $\sqrt{a}-2a=-6$, $\sqrt{a}=2a-6$. *Racionalizando:* $4a^2-25a+36=0$ *eq. que admite as 2 raízes* 4 *e* 9/4, *esta última solução extranha à eq.* $\sqrt{a}=2a-6$. *Tem-se pois* $a=4$.

II

3222 — Os pontos $A(-2,-3)$ e $B(0,1)$ são os extremos do diâmetro duma circunferência. a) Calcule o raio da circunferência. b) Calcule as coordenadas do centro. c) Escreva a equação da circunferência. d) Sendo S o ponto de intersecção da circunferência com o semi-eixo positivo das abcissas, determine o ângulo que a recta AS forma com esse eixo. R: a) $R=\overline{AB}/2=\sqrt{20}/2=\sqrt{5}$; b) $C(-1,-1)$; c) $(x+1)^2+(y+1)^2=5$ ou $x^2+y^2+2x+2y-3=0$; d) *os 2 pontos de intersecção do eixo das abcissas com a circunferência são as soluções do sistema:* $x^2+y^2+2x+2y-3=0$, $y=0$, *sistema equivalente a* x^2+2x-

$-3=0$, $y=0$, *donde* $(1,0)$ *e* $(-3,0)$. *O 1.º ponto é o que pertence ao semi-eixo positivo e portanto* $S(1,0)$. *A eq. de* AS *é* $y=x-1$ *cujo coeficiente angular permite determinar imediatamente o ângulo* α *pedido:* $\operatorname{tg}\alpha=1$ ou $\alpha=\pi/4$ rad.

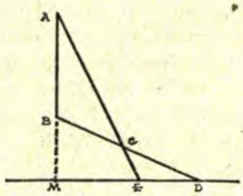
III

3223 — Sendo $A=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\sec^2\alpha}$, $\cos\alpha=+\dfrac{3}{4}$ e α do 4.º quadrante, calcule A.

R: $$A=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\sec^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\operatorname{cotg}\alpha.$$

Se $3\pi/2<\alpha<2\pi$ *e* $\cos\alpha=3/4$, *vem* $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-9/16}=-\sqrt{7}/4$ *donde* $\operatorname{cotg}\alpha=-3/\sqrt{7}=-3\sqrt{7}/7$ *e, portanto,* $A=3\sqrt{7}/7$.

3224 — Na encosta dum monte está espetado verticalmente um poste telegráfico $\overline{AB}$ que projecta na direcção BD uma sombra $\overline{BC}=8{,}5$ m, quando a altura do Sol (dada pelo ângulo $A\hat{E}M$) for $65°\,30'$.



O ângulo $\hat{D}$ é $33°\,20'\,5''$. a) Calcule o ângulo $A\hat{C}B$. b) Calcule $B\hat{A}C$. c) Determine a altura $\overline{BA}$. R: a) $A\hat{C}B=A\hat{E}M-B\hat{D}M=65°\,30'-33°\,20'\,5''=32°\,9'\,55''$. b) $B\hat{A}C=90°-A\hat{E}M=24°\,30'$. c) *Considerando o triângulo* [ABC], *tem-se* $\dfrac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}32°\,9'\,55''}=\dfrac{8{,}5}{\operatorname{sen}24°\,30'}$,

$$\log\overline{AB}=8{,}5+\log\operatorname{sen}32°\,9'\,55''+\log\operatorname{sen}24°\,30'=$$
$$=0{,}92942+\bar{1}{,}72620+0{,}38227=1{,}03789,$$
ou $\overline{AB}=10{,}91$ m.

IV

3225 — O número N divide o produto 6×5 e é primo com 5. a) Que valores pode tomar N? b) Enuncie e demonstre o teorema que justifica a resposta à alínea anterior. R: a) $N=2,3,6$.

3226 — Determine os três menores números pares consecutivos, tais que o primeiro seja múltiplo de 3, o segundo múltiplo de 5 e o terceiro múltiplo de 7.

Soluções dos n.os 3220 a 3225 de M. Zaluar

Solução do n.º 3226 Vidé: A. A. Lopes, *Compêndio de Aritmética Racional*, 3.º ciclo dos Liceus, Porto, 1951, pág. 153.

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia e Instituto Superior Técnico — 1950, Outubro — Ponto n.º 3.

3227 — Demonstre que o número que precede ou o que segue um número primo superior a 3 é um múltiplo de 6. R: *Bastará provar que qualquer número primo superior a* 3 *é da forma* $\dot{6}\pm1$, *o que é imediato em virtude de qualquer número ser* $\dot{6}$, $\dot{6}\pm1$, $\dot{6}\pm2$ *ou* $\dot{6}\pm3$ *e de serem compostos todos os números da forma* $\dot{6}$, $\dot{6}\pm2$ *e* $\dot{6}\pm3$, *pondo de lado os números* 2 *e* 3.

3228 — Determine quantos números inteiros existem, menores que 2000, que sejam múltiplos comuns de dois ou três dos números 2, 3 e 5. R: *Os números são:* $6k\ (k\neq\dot{5})$, $10k'\ (k'\neq\dot{3})$ $15k''\ (k''\neq\dot{2})$ *e* $30k'''$ *todos inferiores a* 2000. *Os números* $6k$ *inferiores a* 2000 *são em número de* 333, *isto é,* k *pode tomar todos os valores desde* 1 *a* 333; *teremos de excluir nos valores de* k *os múltiplos de* 5, *menores que* 333, *que são* 66. *Portanto há* $333-66=267$ *n.os inferiores a* 2000 *que são múltiplos de* 2 *e* 3 *e não de* 5. *Procedendo igualmente para os outros números, obtinha-se o número global* 534 (*incluindo, naturalmente,* 0).

3229 — Determine m e n de modo a terem as mesmas raízes as equações:
$$(m-1)\,x^2+(2m+1)\,x+4=0$$
$$(2n+1)\,x^2-(n-3)\,x-1=0.$$
R: *Deverá ser* $\dfrac{m-1}{2n+1}=\dfrac{2m+1}{-(n-3)}=\dfrac{4}{-1}$, *sistema cuja solução é* $n=7/20$, $m=-29/5$

3230 — Resolva a inequação $\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2-3x}<0$.

R: *O numerador da fracção é sempre positivo para valores reais de* x (*os seus zeros são números imaginários*); *o denominador deverá ser portanto negativo. Vem* $0<x<3/2$.

3231 — Faça o desenvolvimento do binómio $(x-x^{-2})^5$ e simplifique os seus termos. R:
$$x^5-5x^2+10x^{-1}-10x^{-4}+5x^{-7}-x^{-10}.$$

3232 — Determine com o auxílio de umas tábuas, dando os logaritmos dos números e das funções goniométricas com cinco algarismos decimais, os valores de α que satisfazem à equação
$$\operatorname{tag}\alpha=\sqrt{1-\cos 327°\,12'}\cdot$$
R: *Em virtude de ser* $\cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2x$ *a relação dada é equivalente a* $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2\operatorname{sen}^2 163°\,36'}$, *ou* $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}\operatorname{sen}163°\,36'=\sqrt{2}\operatorname{sen}16°\,24'$.

Aplicando logaritmos, vem $\log\operatorname{tg}\alpha=1/2\log 2+\log\operatorname{sen}16°\,24'$, $\log\operatorname{tg}\alpha=\bar{1}{,}60128\ (5)$, $\alpha=k\cdot180°+21°\,45'\,57''$.

Soluções dos n.os 3227 a 3232 de Laureano Barros

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final, 1949-50.

3233 — Primitivar a função:

$$f(x) = (2x-3)/\sqrt{2x^2-2x+1}\,.$$

3234 — Aplicar o método de Sturm à separação das raízes do polinómio x^3+x^2-3x-1 e calcular a maior delas em 1.ª aproximação pelo método de Newton.

3235 — Mostrar que a família de quádricas

$$2x^2+2y^2+\lambda^2 z^2+(\lambda^2-2)\,xz+4(x+y+z)+4-\lambda=0$$

contém duas esferas concêntricas. Determinar a superfície que corta o eixo Oz no ponto $z=-1$ e a recta $x=1$, $z=-5$ no ponto $y=0$. Reduzir a equação obtida à forma canónica. Classificar a superfície.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 4/10/1950.

3236 — Estude a função $y=1-e^{-x^2}$. R: Domínio: $(-\infty,\infty)$; $\lim_{x=-\infty} y=1-0$, $\lim_{x=\infty} y=1-0$. Continuidade: *contínua em todos os pontos do domínio.* Simetria: *relativamente a* yy'. Traços nos eixos: $(0,0)$. Crescimento: *decrescente em* $(-\infty,0)$; *crescente em* $(0,+\infty)$. Máx. e mín.: *mínimo na origem, igual a zero.* Concavidade: *negativa em* $(-\infty,-1/\sqrt{2})$; *positiva em* $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$; *negativa em* $(1/\sqrt{2},+\infty)$. Inflexões: *nos pontos de abcissa* $x_1=-1/\sqrt{2}\approx-0{,}7$ *e* $x_2=1/\sqrt{2}\approx0{,}7$ *com ordenadas* $y=1-e^{-1/2}\approx0{,}4$. Assíntotas: *de equação* $y=1$. *A curva para baixo da assintota.*

3237 — Seja $P(x,y)$ um polinómio cujos termos são todos de grau superior à unidade. *a*) Mostre que a equação $f(x,y)\equiv P(x,y)+x^2-y=0$ define implicitamente uma função $y(x)$ na vizinhança do ponto $M(0,0)$. *b*) Supondo $P(x,y)=(x^2-1)\,y^2$ escreva a equação da tangente à curva de equação $f(x,y)=0$, na origem dos eixos coordenados. *c*) Demonstre o teorema em que baseou a resposta à alínea *a*). R: *Como o polinómio se anula evidentemente no ponto* $M(0,0)$, *tem-se:* $f(0,0)=0$ *e como* $f(x,y)$ *é contínua relativamente a* x *e contínua e* monótona *relativamente a* y, *pelo teorema de existência, tem-se* uma $y(x)$ *em certo rectângulo centrado em* $M(0,0)$. *A derivada de* $f(x,y)$ *em ordem a* y *é igual a* -1 *no ponto* $M(0,0)$, *e por isso* $f(x,y)$ *é* decrescente *relativamente a* y *dentro do tal rectângulo conveniente. Como* $f(x,y)$ *é diferenciável de diferencial identicamente nula, vem*

$$df=f'_x\,dx+f'_y\,dy=0 \quad \textit{ou} \quad f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}=0,\ \textit{e é pois}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2+2x}{2(x^2-1)\,y-1}$$ *que para* $x=0$ *é nula. A tangente é o eixo dos* XX.

3238 — Defina sucessão de Sturm de $f(x)$ no intervalo (a,b), e mostre como ela reflete a passagem de x por um zero simples de $f(x)$ interior ao intervalo.

Utilize a sucessão na contagem e separação dos zeros do polinómio $P(x)=x^4-2x^3-2x-1$ e calcule-os em primeira aproximação. R: *São limites dos zeros* $l=-1/2$ *e* $L=3$.

x	$-1/2$	0	1	2	3
x^4-2x^3-2x-1	$+5/12$	-1	-4	-5	$+20$
$2x^3-3x^2-1$	-2	-1	-2	$+3$	$+21$
$3x^2+6x+5$	$+11/4$	$+5$	$+14$	$+29$	$+50$
$-x-1$	$-1/2$	-1	-2	-3	-4
-2	-2	-2	-2	-2	-2
N.º de variações	3	3	2	2	1

Há uma raiz real em $(-1/2,0)$. *Para ela o extremo favorável ao cálculo é* $-1/2$; *tem-se:*

$$r_1=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{-15}{16}}{4}=0{,}422\ (\textit{por defeito}).$$

Há uma raiz real em $(2,3)$. *Para ela o extremo favorável é* 3; *tem-se:* $r_2=3-\frac{20}{42}=2{,}524$ (*por excesso*).

3239 — Faça a contagem e separação das raizes da equação $4x^3-5x^2-14x-6=0$, e calcule em 1.ª aproximação a maior das raizes reais. R: *Os limites* *das raizes são* l $=-1$ *e* L $=3$. *Com a sucessão de Fourier temos o seguinte quadro*:

x	-1	0	1	2	3
$4x^3-5x^2-14x-6$	-1	-6	-21	-12	$+15$
$12x^2-10x-14$	$+4$	-7	-6	$+7$	$+32$
$24x-10$	-17	-5	7	$+19$	$+31$
24	$+24$	$+24$	$+24$	$+24$	$+24$
N.º de variações	3	1	1	1	0

f (x) *tem um máximo em* $(-1,0)$; *se este máximo é positivo há dois zeros reais distintos no intervalo; se o máximo é nulo há um só zero no intervalo (zero duplo); se o máximo é negativo não haverá zeros reais no intervalo* $(-1,0)$.

As equações das tangentes em $(-1,-1)$ *e em* $(0,-6)$ *são respectivamente*: $y+1=4(x+1)$ *e* $y+6=-7x$, *e cortam, respectivamente,* OX *em pontos de abcissas* $-3/4>-6/7$. *As duas tangentes cruzam-se abaixo de* OX *e a concavidade é negativa no intervalo: não há raizes reais em* $(-1,0)$. *Para calcular a única raiz real o extremo favorável é* 3; *a equação da tangente no ponto* $(3,15)$ *é*: $y-15=32(x-3)$ *e ela corta* OX *em*: $r=-15/32+3=81/32\approx 2{,}532$, *aproximação por excesso.*

3240 — Defina função contínua num ponto e limites $f(a-0)$ e $f(a+0)$. Estude a continuidade da função $y=\dfrac{1}{1+a^{1/x}}$ $(a>0)$ no ponto de abcissa $x=0$. (Sugestão: Faça o estudo nas duas hipóteses $a<1$ e $a>1$). R: *Se* $a>1$ *o valor da função é* 0 *e os limites esquerdo e direito são, respectivamente,* 1 *e* 0. *Se* $a<1$ *o valor da função é* 1 *e os limites esquerdo e direito são, respectivamente,* 0 e 1. *A função não é contínua no ponto* $x=0$ *mas é contínua à direita.*

3241 — Determine o polinómio de grau mínimo tal que $f(-4)=391$, $f(-2)=35$, $f(0)=-1$, $f(2)=-5$, $f(4)=119$.

R: *A tábua das diferenças é*

-4	391				
		-356			
-2	35		320		
		-36		-288	
0	-1		32		384
		-4		96	
2	-5		128		
		124			
4	119				

portanto o polinómio é:

$$f(x)=391-173(x+4)+40(x+4)(x+2)-$$
$$-6(x+4)(x+2)x+(x+4)(x+2)x(x-2).$$

Soluções dos n.os 3236 a 3241 J. R. de Albuquerque

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Outubro de 1950.**

I — Parte Prática

3242 — Determinar em que condições haverá imaginários puros z satisfazendo à relação $z^p=(1+i)^p$ onde p é um número inteiro e positivo.

3243 — Dada a função $f(x)=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$, verificar que ela é limitada inferiormente no intervalo $(-\infty,+\infty)$. Mostrar que o seu extremo inferior é ao mesmo tempo um mínimo absoluto e relativo. Fazer a representação gráfica e aproximada da função.

3244 — Verificar que a série $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{(n!)^3}$ é absoluta e uniformemente convergente para todos os valores reais de x. Calcular o valor da sua derivada, para $x=2$, com um erro inferior a 0,001.

3245 — Discutir a posição relativa dos três planos

$$\begin{cases} ax+y+z+1=0\\ x+ay+z+1=0\\ x+y+az+1=0\end{cases}$$

para os diferentes valores de a.

Escrever a equação normal de um dos planos.

II — Parte Teórica

3246 — Discuta, analítica e gràficamente, o problema da existência de raízes reais na radiciação de números complexos.

3247 — Faça um estudo sumário da função logarítmica de variável complexa. Determine, em particular, os seus pontos de analiticidade e estabeleça para eles a expressão da sua derivada.

3248 — Diga em que diferem os conceitos de convergência uniforme e de convergência ordinária duma série funcional.

3249 — Defina degenerescência duma cónica e indique os vários casos que se podem apresentar.

Demonstre que a condição de degenerescência da cónica $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+G=0$ é dada por

$$\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & G\end{vmatrix}=0$$

Enunciados de J. H. Arandes

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exercício de revisão — 1950-51.**

3250 — Calcular a derivada de $y = sh\,x^2$ a partir da definição. R:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{sh\,(x+h)^2 - sh\,x^2}{h} =$$

$$= \lim \frac{2\,sh\,\frac{(x+h)^2-x^2}{2}\,ch\,\frac{(x+h)^2+x^2}{2}}{h} =$$

$$= \lim \frac{2\,sh\,(hx+h^2/2)\,ch\,(x^2+hx+h^2/2)}{h} = 2x\,ch\,x^2,$$

visto

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{sh\,\alpha}{\alpha} = \lim \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{e^{2\alpha}-1}{2\alpha\,e^{\alpha}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \log(1+1/n)} = 1 \quad \textit{sendo} \quad \frac{1}{n} = e^{2\alpha} - 1.$$

3251 — Determinar o verdadeiro valor de

$$y = \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{sh\,x}-1}\right] \quad \text{para } x=0. \text{ R:}$$

$$y_{(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{sh\,x}-x-1}{x\,(e^{sh\,x}-1)} =$$

$$= \lim \frac{1+sh\,x+\frac{sh^2 x}{2!}+\cdots-x-1}{x\left(sh\,x+\frac{sh^2 x}{2!}+\cdots\right)} =$$

$$= \lim \frac{x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{sh^2 x}{2!}-x}{x\,sh\,x} =$$

$$= \lim \frac{\frac{sh^2 x}{2!}}{x\,sh\,x} = \frac{1}{2}.$$

Nota: Poderia também ter-se aplicado a regra de L'Hospital.

3252 — Apoiado no teorema «uma série, cociente de duas outras, é convergente na parte comum aos intervalos de convergência das séries dividendo e divisor, salvo nos pontos onde esta se anula» efectuar o desenvolvimento em série de potências de x da função $y = \frac{sen\,x}{\log(1+x)}$ escrevendo os quatro primeiros termos. Determinar o raio de convergência da série e a partir desta o verdadeiro valor da função para $x=0$. R: $sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + R_n$.

A série $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$ *é convergente em todo o intervalo finito.*

$R_n = \frac{x^n}{n!}(-1)^{n+1}\,sen\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right)$ *(resto de Lagrange)*

$|R_n| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| \to 0$ *com* $n\to\infty$ *para os valores de* x *considerados.*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots + R'_n$$

$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m}$ *é convergente no intervalo,* $-1 < x \leq 1$

$$R'_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$0 < \theta < 1$ (R'_n *resto de Cauchy*).

$|R'_n| = \left|\frac{x^n}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right| \to 0$ *com* $n\to\infty$ *para os valores de* x *considerados. Então*

$$y = \frac{sen\,x}{\log(1+x)} =$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{13}{24}x^3 + \cdots,$$

série esta que representa a função para $-1 < x < 0$ *e* $0 < x \leq 1$.

Embora a série seja convergente para $x=0$ *ela não representa a função nesse ponto visto esta, atravez da sua expressão analítica, não estar definida no referido ponto.*

No entanto, fazendo $y_{(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{\log(1+x)}$ *(se existir) a série passa a definir a função no intervalo* $-1 < x \leq 1$ *sendo*

$$y_0 = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \cdots\right) = 1.$$

3253 — Determinar os máximos e mínimos de

$$y = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)^2}.$$

R: *Derivando vem* $y' = \dfrac{x(x^2-3x-2)}{(x-1)^3}$. *Zeros da primeira derivada:* $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ *e* $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Pontos de descontinuidade da primeira derivada $x_4 = 1$. *Valor da segunda derivada nos pontos onde a primeira se anula:*

$$y'' = \frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^3}$$

$y_1'' > 0 \quad x_1 = 0$ *mínimo*

$y_2'' > 0 \quad x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ *mínimo*

$y_3'' < 0 \quad x_3 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ *máximo.*

Sinal da primeira derivada à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade

$$\left.\begin{array}{ll} y'(1-h) = \dfrac{-4-5h+h^3}{-h^3} > 0 & \textit{crescente} \\ y'(1+h) = \dfrac{-4+\cdots h+\cdots}{h^3} < 0 & \textit{decrescente} \end{array}\right\} \textit{máximo.}$$

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exercício de revisão — 1950-51.**

3254 — Calcular $I = \displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x}\,dx$. R:

$$I = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\,dx = 2\,\mathrm{sen}\,x - \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\,x - \log \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

3255 — Calcular $\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx$. R:

$$\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx = x\log\sqrt{1+x^2} - \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x\log\sqrt{1+x^2} - x + \mathrm{arc\,tg}\,x + C.$$

3256 — Sendo $\begin{cases} x^y + x^z + u^x = 2 + \dfrac{\pi}{4} \\ \cos\dfrac{yz}{x} + \log \mathrm{tg}\, uz = 1 \end{cases}$

calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ no ponto $x=1$, $y=0$, $z=1$, $u=\dfrac{\pi}{4}$.

R:

$$\begin{cases} y\,x^{y-1} + zx^{z-1} + u^x \log u + x^z \log x \dfrac{\partial z}{\partial x} + xu^{x-1}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \left(\mathrm{sen}\dfrac{yz}{x}\right)\cdot\dfrac{yz}{x^2} + \left[-\left(\mathrm{sen}\dfrac{yz}{x}\right)\dfrac{y}{x} + \right. \\ \left. + \dfrac{1+\mathrm{tg}^2(uz)}{\mathrm{tg}(uz)}\,u\right]\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1+\mathrm{tg}^2(uz)}{\mathrm{tg}(uz)}\,z\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\left(1 + \dfrac{\pi}{4}\log\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4}{\pi} + \log\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3257 — Determinar os máximos e mínimos de y definido por

(1) $\qquad 2y^3 + x^2(1+2y) = 0.$

R: *Derivando vem:*

(2) $\qquad 2x(1+2y) + (6y^2+2x^2)\,y' = 0.$

$\begin{cases} 2y^3 + x^2(1+2y) = 0 \\ 2x(1+2y) = 0 \end{cases}$, *satisfeito para os valores finitos* $x=0$, $y=0$ *mas que anulam o coeficiente de* y'. *Logo, ponto singular.*

Derivando novamente:

$$2(1+2y) + 4xy' + [6y^2+2x^2]\,y'' + [4x + 12yy']\,y' = 0$$

que para $x=0$, $y=0$ *dá* $y' = \infty$ *(raiz dupla).*

Logo, ponto de descontinuidade de y', *com tangente dupla. A eq.* (1) *define* x, *no campo real para* $0 \leqslant y \leqslant -1/2$.

Nestas condições, a equação (2) *mostra que para*

$x < 0$ *é* $y' > 0$ *e para* $x > 0$ *é* $y' < 0$.

Se a função passa de crescente a decrescente no ponto $x = 0$, *a função é* máxima *nesse ponto.*

Soluções dos n.os 3250 a 3257 de Rogério Nunes

I. S. T.—Cálculo—**1.º exame de frequência, 1950-51.**

3258 — Dada a matriz $A = (a_{ik})$, sendo

$$\begin{cases} a_{ik} = -a_{ik} \quad (\text{para } i \gtrless k) \\ a_{ii} = a \quad (\text{qualquer que seja } i) \end{cases}$$

mostrar que a transposta de A é permutável com A.

R: *Se* B *é uma matriz tal que* $a_{ik} = -a_{ik}$ *(para* $i \gtrless k$), e $a_{ii} = 0$, *será* $A = aE + B$ *e* $\check{A} = aE - B$. *Efectuando* $A\check{A} = a^2E^2 - aEB + BaE - B^2$ *ou, por* E *ser permutável com qualquer matriz,* $A\check{A} = a^2E - B^2$. *Efectuando* $\check{A}A = (aE - B)(aE + B) = a^2E^2 - B^2 = a^2E - B^2$, *donde se conclue* $\check{A}A = A\check{A}$.

3259 — Utilizando o teorema da derivação dum integral definido em relação a um parâmetro, mostrar que o integral

$$I=\int_0^{\infty} e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx$$

é da forma $I=Ce^{-2a}$, sendo C uma constante. R: $\frac{dI}{da}=\int_0^{\infty}-\frac{2a}{x^2}e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx$. *Efectuando agora a substituição* $\frac{a}{x}=t$, *tem-se* $\frac{dI}{da}=2\int_{\infty}^{0}e^{-\frac{a^2}{t^2}-t^2}dt=$ $=-2\int_0^{\infty}e^{-\frac{a^2}{t^2}-t^2}dt=-2I$, *donde* $\frac{dI}{I}=-2\,da$. *Integrando:* $\log I=\log C-2a$ *ou* $I=Ce^{-2a}$. *Fazendo* $a=0$ *tem-se* $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=C$ *e, como* $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=$ $=\sqrt{\pi}$, $I=\sqrt{\pi}\,e^{-2a}$.

3260 — Funções de variação limitada e absolutamente contínuas — Conceitos de integral de Perron e Denjoy.

3261 — Diferenciais de ordem superior à primeira das funções de uma e mais duma variável.

Soluções dos n.os 3258 e 3259 de J. Quadros e Costa.

CRÍTICA DE LIVROS

Espaços Vetoriais Topológicos por ***Leopoldo Nachbin***, *Notas de Matemática N.º 4.*

Livraria Boffoni, Rua do Chile, 1, Rio de Janeiro, 1948.

Este livro, de que é autor o Professor Leopoldo Nachbin, faz parte duma colecção de monografias, «Notas de Matemática», publicada sob a direcção do Professor A. Aniceto Monteiro, quando da sua estadia no Brazil. Trata-se do essencial dum curso de Teoria das Funções, professado pelo autor na Secção de Matemática da Faculdade de Filosofia do Rio de Janeiro.

O nome do Prof. Nachbin, que no domínio dos espaços funcionais e dos espaços abstractos tem publicado alguns trabalhos de grande mérito e de que a cultura matemática brasileira muito tem a esperar, é bem conhecido nos meios matemáticos internacionais e sem dúvida também dos leitores da «Gazeta de Matemática». Para estes não constituirá pois uma surpreza o elevado interêsse que este livro lhes poderá oferecer.

O objectivo central do curso é uma introdução à teoria dos espaços vectoriais topológicos. Colocando-se num alto nível de generalidade, o autor considera espaços vectoriais topológicos sobre um corpo topológico abstrato e não especialmente sobre o corpo dos números reais ou complexos. É precisamente o estudo aprofundado da teoria dos corpos topológicos que constitui a parte mais importante deste primeiro tomo. A noção de *corpo topológico estritamente mininal*, criada pelo autor, permite-lhe obter uma nova caracterização dos corpos *valorizáveis*, isto é, cuja topologia pode ser definida por meio dum valor absoluto, e também formular, para os espaços vectoriais topológicos cujo corpo de escalares é um corpo topológico estritamente mininal, importantes propriedades que adiante mencionaremos. (1)

Para conduzir o leitor até estes belos resultados, cujo interêsse não reside apenas na sua originalidade, o autor fornece, nos primeiros seis parágrafos do livro, todas as noções e teoremas necessários a uma iniciação neste domínio, não pressupondo conhecidos senão os preliminares da teoria dos conjuntos.

Assim, no § 1 são dadas as definições de espaço topológico, subespaço, transformação contínua, espaço topológico separado, etc. Ao produto de espaços topológicos é concedido aqui o lugar importante que ele merece, pela sua utilidade neste como noutros capítulos. O § 2 consta das definições de corpo e de subcorpo e o § 3 trata de corpos topológicos e das propriedades fundamentais desta noção. Veem a seguir, no § 4, os espaços vectoriais sobre um corpo comutativo abstracto. A recta, o plano e o espaço euclideano tridimensional são apontados como exemplos de espaço vectorial e designados para servir de ilustração geométrica intuitiva às noções a seguir introduzidas. Isso facilitará particularmente a compreensão do significado das noções de subespaço vectorial, variedade linear, homotetia, translação, produto de espaços vectoriais, forma linear, etc.

O § 5 é consagrado aos espaços vectoriais topológicos (sobre um corpo topológico) que são definidos

(1) O autor publicou, de resto, outras aplicações desta noção, numa nota «On strictly minimal topological division rings», *Bulletin of the American Math. Society*, **55** (1949) p. p. 1128-1136.

como espaços vectoriais munidos duma topologia tal que as operações de adição vectorial e de multiplicação por um escalar são contínuas. Destes espaços são demonstradas algumas propriedades simples fundamentais, nomeadamente as condições sob as quais ele se torna um espaço separado (de Hausdorff), bem como a caracterização das vizinhanças da origem. São consideradas a seguir as transformações lineares contínuas e os homomorfismos contínuos entre dois espaços vectoriais topológicos, mostrando-se como se constroiem as imagens homomorfas (directa e inversa), sobre um espaço vectorial, da topologia dum espaço vectorial topológico.

Muito criteriosamente, o autor ocupa todo o § seguinte com o estudo dos conjuntos limitados num espaço vectorial topológico, dedicando particular cuidado à apresentação desta noção, que tão grande importância assume no desenvolvimento da teoria dos espaços vectoriais topológicos. A definição rigorosa da noção de parte limitada é esclarecida pelo «seu conteúdo geométrico: uma parte L é limitada se e só se ela pode ser tornada, por meio de uma homotetia de centro na origem θ e de razão $\lambda\neq 0$ conveniente, tão pequena e próxima de θ quanto se desejar». Ou, o que é equivalente, «se toda a vizinhança da origem θ pode ser ampliada por uma homotetia de centro θ e razão λ conveniente, de modo a abranger L» (pág. 42 e 43). Afora casos triviais sem interêsse, um espaço topológico não é limitado e, se for separado, não possui subespaços limitados além do subespaço formado pela origem. As propriedades clássicas fundamentais dos conjuntos limitados são aqui cuidadosamente demonstradas para espaços vectoriais topológicos; nomeadamente, a condição necessária e suficiente para que uma parte dum produto de espaços topológicos seja limitada: cada uma das suas projecções nos espaços factores são partes limitadas destes espaços.

Aqui termina, por assim dizer, a introdução desta primeira parte da teoria dos espaços vectoriais topológicos. Na verdade, as noções que anteriormente foram estudadas nas suas linhas essenciais são, de ora em diante, encaradas dum ponto de vista menos geral, que permitirá avançar mais profundamente na análise dessas noções. Assim é, sobretudo, no § 7: *Valorizações e corpos topológicos estritamente minimais*.

A topologia sobre um corpo comutativo K é agora definida por meio duma função real definida sobre K — *a valorização* — gosando de propriedades que generalizam as do valor absoluto dos números complexos. Fazendo a distinção entre valorizações arquimedianas e não arquimedianas, o autor dá como exempo das primeiras o valor absoluto (ou uma potência $h, 0 < h \leqslant 1$, do valor absoluto) sobre o corpo dos números reais ou dos números complexos; e como exemplo das segundas, a *valorização p-ádica* sobre o corpo Q dos números racionais, demonstrando que esta é a única valorização não-arquimediana sobre Q. Promete igualmente demonstrar «um resultado importante de Ostrowski, segundo o qual aqueles dois exemplos (a menos de detalhes a serem especificados) são os únicos possíveis de valorizações arquimedianas.» (pág. 54). O aludido teorema de Ostrowski é, sem dúvida, o que estabelece que *todo o corpo valorizado arquimediano é isomorfo (algèbrica e topològicamente) ao corpo dos números complexos valorizado com o valor absoluto habitual* (²). Mas não pudemos encontrar depois uma referência expressa ou a demonstração deste teorema. Trata-se possìvelmente de uma omissão por lapso.

O estudo das valorizações não arquimedianas é desenvolvido com todo o pormenor e é demonstrado o critério de Shafarevitch-Kaplansky para que um corpo topológico, possa ser valorizado: é necessário e basta que o conjunto dos elementos nilpotentes ou neutros seja limitado. Esta proposição é completada por uma condição para que um corpo valorizado seja não-arquimediano: é necessário e suficiente que seja limitado o conjunto dos seus inteiros.

A propósito do problema da valorização dum corpo toplógico, o autor, como já atrás assinalámos, introduz a noção do corpo topológico estritamente minimal. Para que um corpo topológico seja estritamente minimal é necessário e suficiente que as suas partes limitadas L possam ser caracterizadas pela propriedade seguinte: existe uma vizinhança $\mathfrak{A}$ de 0 tal que $1 \notin L\,\mathfrak{A}$. Demonstra em seguida que todo o corpo valorizado é estritamente minimal e, recìprocamente, todo o corpo topológico estritamente minimal cujos elementos nilpotentes formam uma vizinhança de 0 é valorizável. O corpo dos números reais e dos números complexos são, pois, estritamente minimais. O interêsse desta noção aparece ainda claramente no teorema seguinte: os corpos topológicos estritamente minimais são os únicos corpos K tais que para todo o espaço vectorial topológico E sobre K e toda a forma linear f de E, f é contínua se $f^{-1}(0)$ for um conjunto fechado de E e sòmente neste caso. É demonstrada uma proposição análoga relativa à equivalência das noções de de forma linear contínua e forma linear fechada (isto é, cujo gráfico é um conjnnto fechado no produto topológico de E por K).

Os dois últimos parágrafos são dedicados ao estudo das topologias fortes e fracas. Seguindo Mackey, o

---

(²) A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)$. *Acta Math.*, **41** (1918) p.p. 271-284.

autor diz que uma topologia dum espaço vectorial topológico é forte se ela é a mais fina de todas as topologias que têm o mesmo conjunto de partes limitadas. Esta definição conduz à importante propriedade seguinte, que lhe serve de justificação: Se a topologia dum espaço vectorial topológico E sobre K é forte, então, qualquer que seja o espaço vectorial topológico F sobre K, toda a transformação linear de E em F, que transforme partes limitadas de E em partes limitadas de F, é contínua; o mesmo se não dá se a topologia de E não fôr forte. Mas para um leitor já familiarizado com a designação de topologias forte e fraca num espaço de Hilbert ou, mais geralmente, num espaço de Banach, toma especial significado esta outra proposição, que o autor demonstra sem comentários: *A topologia dum espaço vectorial topológico* E *localmente limitado sobre um corpo* K *não discreto é forte.* Na verdade, a condição de um espaço vectorial topológico ser localmente limitado (existência duma vizinhança limitada) não é senão a condição de Kolmogoroff, [3] necessária e suficiente para que um espaço vectorial topológico localmente convexo seja *normável.* Resulta pois da proposição indicada que a topologia definida por uma norma é forte, no sentido acima definido.

Uma topologia dum espaço vectorial topológico é dita fraca se ela é a menos fina de todas as topologias que tornam contínuas as mesmas formas lineares. O interesse desta noção tem origem na seguinte proposição: Dado um espaço vectorial E sobre um corpo topológico separado K, para cada topologia τ admissível sobre E, o conjunto das formas lineares sobre E contínuas relativamente a τ constitui um espaço vectorial; reciprocamente, para cada espaço vectorial F de formas lineares sobre E, existe pelo menos uma topologia τ admissível sobre E, relativamente à qual F é o conjunto de todas as formas lineares contínuas sobre E; e entre estas topologias há uma menos fina que as demais.

A terminar, o autor, anuncia para um tomo seguinte o estudo da noção de dual topológico dum espaço vectorial topológico, que virá completar e esclarecer as propriedades gerais das topologias fortes e fracas apresentadas nesta primeira parte do seu trabalho.

Depois desta rápida vista de olhos sobre o conteúdo deste livro, não nos parece inútil juntar alguns comentários e acentuar algumas características mais salientes. Entre estas impõe-se a grande actualidade do assunto, não sòmente como um capítulo da Análise Geral que está na primeira linha das preocupações de pesquiza de numerosos matemáticos, mas também como um instrumento indispensável para abordar os recentes desenvolvimentos da teoria dos espaços funcionais. Se necessário, tanto bastaria para justificar plenamente a sua inclusão num curso de Teoria das Funções. Do primeiro ponto de vista, não é demais insistir sobre o interêsse que apresenta este trabalho. A utilidade da formulação abstrata da teoria dos espaços vectoriais topológicos, pela grande simplicidade e elegância dos conceitos que ela proporciona, pela largueza dos domínios que permite abranger e a consequente economia de pensamento, tornou-se hoje uma ideia clara e geralmente aceite. No entanto não existia ainda, em língua portuguesa, uma exposição breve e sistematizada desta matéria, contendo as noções e resultados fundamentais e tendo em conta a orientação que nos últimos dez anos se tem imprimido a alguns dos principais capítulos. A teoria aqui desenvolvida aparece como um edifício fundado axiomàticamente e construído com uma solidez lógica sem lacunas. Por outro lado, a consistência e validade desta construção é posta em evidência pelo exemplo do espaço euclideano que aparece como caso particular.

Mas se deste ponto de vista, como exposição dogmática, este curso nos parece modelar, outro tanto se não pode dizer quando o consideramos como introdução à teoria dos espaços funcionais, ou, mais simplesmente, se temos em vista o seu intuito didático de fornecer aos alunos um novo instrumento de trabalho. Na verdade, através todo o livro se nota a ausência da preocupação de estabelecer uma ligação estreita entre os conceitos da Análise Geral e os correspondentes na Análise Funcional. Ora, para um leitor pouco familiarizado com as teorias matemáticas abstractas e cujos conhecimentos lhe não permitem encontrar sòzinho os «modelos concretos» da Análise Real ou da Análise Funcional aqui generalizados, estaria indicado fornecer como exemplos de espaços vectoriais topológicos, além dos espaços euclideanos os espaços funcionais mais correntes: o espaço dos polinómios, o espaço das funções contínuas, o das funções de quadrado do módulo somável (espaço de Hilbert), o das funções deriváveis, etc. Em particular nos §§ 8 e 9, isto permitiria mostrar como é corrente a consideração de topologias forte e fraca sobre um mesmo espaço vectorial, nomeadamente a topologia da convergência uniforme e a da convergência simples das sucessões de funções contínuas, por exemplo. Assim, quere-nos parecer que os preciosos comentários, indicações bibliográficas e notas com que se encerra o volume, poderiam proveitosamente alargar-se à sugestão de exemplos e exercícios. O leitor aí encontraria matéria para reflexão e interpretação

[3] A. Kolmogoroff, *Studia Mathematica*, 5 (1934), p. 29.

dos axiomas e principais resultados da teoria abstrata, e para a sua aplicação às teorias matemáticas que aquela engloba. Por outro lado, poupar-se-lhe-ia a impressão de aridez que tantas vezes as exposições dogmáticas deixam no espírito do leitor não iniciado — e desconfiado da «utilidade» da matemática «mais abstrata» do que aquela que lhe é familiar... As vantagens duma larga generalização tornar-se-iam evidentes até aos mais cépticos em tal matéria. Estamos certos de que o autor não deixará de obviar a esta deficiência nos tomos que a este se seguirão.

Para terminar, um rápido resumo pode ser feito do conteúdo deste livro: aí se estudam, com pormenor variável mas sempre com notável clareza, diferentes tipos de estruturas sobre um conjunto abstrato: *estruturas topológicas* (de espaço topológico), *algébricas* (de corpo, de espaço vectorial) e *mixtas* (de corpo topológico, de espaço vectorial topológico). A este respeito, esta publicação — continuando a linha dos Cadernos de Análise Geral lançados em Portugal pela Junta de Investigação Matemática, quando da passagem de A. Monteiro pelo Porto, em 1944 — subiu um importante degrau que a estas publicações não foi dado franquear, por razões que não importa agora analisar aqui. Por isso ainda, este trabalho é de recomendar a todos quantos naquelas publicações fizeram a sua iniciação no domínio da Análise Geral.

Alfredo Pereira Gomes (Bolseiro do C. N. R. S. — Paris)

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

87 — GREEN, S. L. — **Dynamics** — University Tutorial Press Ltd., London, 1948, 264 págs.

Em prefácio, o Autor destina o presente livro aos estudantes, candidatos ao «General Degree in Arts or Science», da Universidade de Londres ou «Degree in Engineering»; ou ainda aos estudantes do primeiro ano, candidatos ao título «Mathematical Honours».

Por um lado, verifica-se que estes candidatos possuem conhecimentos elementares de cálculo integral, com prática suficiente de integração das mais correntes equações diferenciais ordinárias. Por outro lado, não devem ainda ter adquirido os instrumentos de Análise como por exemplo o cálculo variacional, que lhes permitam atitude mais crítica e exame mais profundo dos problemas da mecânica racional.

Realmente, a idea de explicar os fenómenos mecânicos dentro dum «princípio de economia» — atitude que começou a manifestar-se com Euler (1744) e Maupertuis, concretizando-se com Hamilton (1835), Gauss, Lipschitz, Hertz, etc. — não pode ser apresentada numa obra com o objectivo da presente. Nem as equações gerais do movimento, estabelecidas primeiramente por Lagrange (1760 e 1788), generalizadas ùltimamente por Appell (1900), Maggi e M. Fernandes (*Portug. Math.*, vol. 2, 1941) entram no âmbito deste livro. Mesmo os simples teoremas gerais da dinâmica que nos permitem em muitos casos estabelecer os integrais primários das equações diferenciais do movimento, reduzindo assim o *problema analítico* ao *problema mecânico*, não aparecem sob forma sistematizada que caracterize um livro de dinâmica analítica.

Não compreendemos mesmo por que razão o Autor termina o Cap. I, destinado ao estudo dos vectores (16 págs.), com um parágrafo (2 págs.) intitulado Newtonian Dynamics. Neste começa por definir dinâmica, velocidade e aceleração dum ponto, quantidade de movimento (momentum) duma partícula material; apresenta as leis de Newton (3) como axiomática da mecânica; e termina por definir as unidades de comprimento, tempo, velocidade, aceleração, força nos sistema C. G. S. e britânico

Este aglomerado de axiomas, conceitos e definições não nos parece justificável num livro que, nas restantes 250 págs., pretende ter um aspecto essencialmente prático. Com efeito, esses axiomas, conceitos e definições deveriam ser apresentados sob forma clara e acessível, mostrando a pessoas não iniciadas as próprias relações e independências. Só depois, com exemplos e aplicações, se deveria iniciar o estudo prático dos problemas abordados.

Os Caps. II e III são dedicados ao estudo do movimento rectilíneo do ponto. Com um mínimo de noções teóricas — de resto é o que acontece em todo o livro — o movimento rectilíneo é estudado sob a forma de vários exercícios resolvidos. No Cap. IV estabelecem-se nos diversos tipos de coordenadas (cartesianas, polares, intrínsecas) as equações do movimento plano. Seguidamente faz-se o estudo do movimento dos projecteis no vazio e em meio resistente. O pêndulo simples e o movimento dum ponto sobre a cicloide aparecem como casos particulares ou relacionados com o movimento sobre a circunferência. O estudo do movimento do ponto termina com um capítulo pormenorizado sobre forças centrais.

A teoria dos centros de gravidade e momentos de inércia antecede o estudo da dinâmica dos sistemas materiais. Só nesta altura se estabelecem os teoremas fundamentais da mecânica — conservação da quantidade de movimento, etc. — e a noção de impulsão.

Segue-se, como aplicação, o estudo do movimento plano sobre um plano, o movimento dum corpo com um eixo fixo, em particular o pêndulo composto, e o movimento plano dum sólido. O livro termina com dois capítulos onde são estudados vários exemplos de aplicação dos capítulos anteriores e um apêndice sobre o estudo geométrico elementar das cónicas.

Como já dissemos, os conceitos mecânicos surgem através dos problemas resolvidos. Por um lado, não julgamos este o melhor processo de ensinar uma disciplina: as noções vão aparecendo, subordinadas à necessidade duma «analogia da prática» e não à duma sequência lógica da teoria. Assim, por exemplo, o Cap. XI — Motion of a Rigid Lamina in its Plane — tratando apenas duma geometria de movimento, está intercalado entre o estudo dinâmico dum sistema material e o do movimento dum sólido com um eixo fixo, assuntos nitidamente mecânicos.

Por outro lado, os três capítulos mais ricos em ideas são os mais ilustrados por noções teóricas — Vectors, Centre of Masses and Coefficients of Inertia of a System of Particles, Motion of a System of Particles.

Além disso, o desenvolvimento do estudo dos momentos de inércia, com que concordamos, aliás, não é acompanhado nos capítulos onde se deveria aplicar. Aos teoremas fundamentais da mecânica não se dá a importância que realmente possuem, podendo mesmo parecer ao leitor desprevenido, que só se aplicam aos sistemas materiais. Ao próprio Princípio de d'Alembert não se dá o realce que merece, restringindo-se-lhe mesmo o significado.

Enfim, admitindo que o aspecto prático do livro se destina a melhor servir as técnicas — opinião que não compartilhamos — parece-nos que o Autor poderia ter escolhido exemplos mais frequentes nas próprias técnicas.

Em resumo: o estudante encontra neste livro elementos muito valiosos para a sua preparação prática em mecânica racional. Os conhecimentos são transmitidos através de 128 problemas bem escolhidos, como exemplos, e resolvidos com muita clareza; há além disso 336 problemas de aplicação, propostos e com as respectivas soluções.

É essencial, na verdade, *encontrar-se a noção* através da aplicação prática; mas não é suficiente a *noção adquirida* por meio duma atitude de espectador em face dum problema resolvido.

Temos, por acaso, presente o livro de Borel — «La Mécanique et la Gravitation Universelle». Destina-se a um público com o mesmo nível de conhecimentos de matemática; mas é rico e sugestivo nos conceitos e noções teóricas apresentados. É um pequeno «Cours de Mécanique» — simplesmente lhe falta... a prática do presente livro.

J. Gaspar Teixeira

88 — MILLER, W. H. — **The Symbolic Method of Vector Analysis** — 3 sh, pag. 28. — GROVER, C. A. — **Hyperbolic Functions** — 4 sh, 40 pag. Classifax Publications.

Os livrinhos destinados a fornecer a técnicos noções científicas ficam, na maioria das vezes, muito longe dos objectos visados. Realmente, torna-se difícil apresentar em meia dúzia de páginas as bases e ideas que estruturam determinados conhecimentos. A colecção a que os presentes cadernos pertencem, pretende fornecer a um público não iniciado em matemáticas superiores, as noções de matemática fundamentais ao domínio da electrotecnia.

Julgamos que os presentes exemplares atingem plenamente os seus fins.

No primeiro, o Autor estuda a teoria elementar dos números complexos, relacionando-a com a álgebra vectorial e trigonometria plana.

Com estes conhecimentos, o técnico estará apto a resolver «pràticamente» certas equações diferenciais relativas a circuitos eléctricos.

É bem conhecida a revolução feita no final do século passado em electrotecnia pelo eng. STEINMETZ: representando vectorialmente certas grandezas eléctricas, como a tensão, densidade de corrente, etc., a derivação ou a integração duma dessas grandezas faz-se por uma «quadratura» em avanço ou em atrazo do respectivo vector.

Deste modo, complicadas equações diferenciais que regem os fenómenos que se passam nesses circuitos, reduzem-se a simples equações vectoriais escritas sob a forma complexa. O segundo fascículo expõe de uma maneira surpreendentemente simples as funções hiperbólicas, relacionando-as e mostrando as suas semelhanças com as funções circulares. Todas as noções, visando a aplicação prática imediata, são seguidas de exempos numéricos, algumas tabelas e respectivo formulário.

Não conhecemos outros volumes da mesma colecção, mas supomos que, pela orientação nestes apresentada, serão um valioso elemento de estudo dos técnicos que não tiveram oportunidade de fundamentar teòricamente os seus conhecimentos.

Tivessemos na nossa literatura elementos como estes, à disposição dos técnicos portugueses.

J. Gaspar Teixeira

REVISTAS RECEBIDAS POR PERMUTA COM GAZETA DE MATEMÁTICA

Argentina

Boletin Matemático, Buenos Aires.
Mathematicae Notae, Rosário.
Revista de la Unión Matemática Argentina, Buenos Aires.

Brasil

Matemática, Tecnica e Ciência, Rio de Janeiro.
Revista do Instituto de Resseguros do Brasil, Rio de Janeiro.
Revista Politécnica, S. Paulo.
Summa Brasiliensis Mathematicae, Rio de Janeiro.

Espanha

Euclides, Madrid.
Gaceta Matemática, Madrid.
Revista Matemática Hispano-Americana, Madrid.

Estados Unidos da América do Norte

Nuclear Science Abstracts, U. S. A. E. C., Oak Ridge.
Scripta Matematica, New York.

França

Bulletin Astronomique, Paris.
Bulletin de la Société Mathématique de France, Paris.
Annales de l'Institut Fourier, Grenoble.
Annales de l'Université de Lyon.
Intermédiaire des Recherches Mathématiques, Paris.
La Recherche Aéronautique — O. N. E. R. A. — Paris.
Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées et Bulletin de la Société Philomathique. Paris.
Re ue de Mathématiques Spéciales, Vuibert, Paris.

Inglaterra

The Mathematical Gazette, London.

Itália

Periodico di Matematiche, Bologna.

Portugal

Agros, Lisboa.
Análise, Instituto Francês em Portugal, Lisboa.
Anais Portugueses de Psiquiatria, Lisboa.
Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses, Lisboa.
Boletim da Sociedade de Estudos da Colónia de Moçambique, Lourenço Marques.
Ciencia, Revista dos Estudantes da Faculdade de Ciências, Lisboa.
Estudos Italianos em Portugal, Lisboa.
Gazeta de Física, Lisboa.
Portugaliae Mathematica, Lisboa.
Portugaliae Physica, Lisboa.
Revista de Economia, Lisboa.
Seguros, Lisboa.
Técnica, Lisboa.
Vértice, Coimbra.

Suíça

Elemente der Mathematik, Basel.

Uruguai

Publicaciones del Instituto de Matematica y Estadistica, Montevideo.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publica quatro números por ano

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso-prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto) . . . . 40$00
N.os 12 e 15 a 48, cada número . . . . 12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 12$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282