GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XII — N.º 49 — OUTUBRO 1951

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N. — Telef. 55 282

ANO XII—N.º 49 **GAZETA DE MATEMÁTICA** OUTUBRO — 1951

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário

por ***José Sebastião e Silva***

A análise infinitesimal é o ramo da matemática que maior êxito tem alcançado nas aplicações às ciências da natureza, e é por isso, também, o mais extenso, o mais rico, o mais fecundo, deixando a perder de vista a álgebra ou a geometria. Não é portanto de estranhar que a sua exclusão completa do programa dos liceus — como acontecia na reforma de 1936 — viesse a produzir graves perturbações no ensino global das matérias científicas. Sem ter adquirido a mínima familiaridade com os conceitos de infinitésimo e de derivada, o aluno, ao entrar na universidade, passava bruscamente a ter de assimilar o método infinitesimal em todas as minúcias e com os requintes de subtilização lógica que cem anos de crítica exaustiva lhe infligiram, quási desfigurando a sua primária feição intuitiva. Contemporâneamente, o mesmo aluno era forçado a aplicar o referido método em cursos volumosos de física e de química, em que se fala de integrais, de gradientes e de outras finuras — quando ele ainda mal se entendia com as derivadas e estava bem longe de saber o que é um integral.

O resultado era de prever. Queixavam-se os alunos de que lhes era exigido muito mais do que as suas possibilidades lhes permitiam dar — e mal sabiam os alunos até que ponto estava com eles a razão. Queixavam-se os mestres de que os alunos vinham pèssimamente preparados do liceu — e também os mestres, vamos lá, tinham a sua razão.

Evidentemente, a solução não estava em baixar o nível do ensino universitário. A solução estava simplesmente em regressar ao estado de coisas anterior a 1936, com os eventuais ajustamentos requeridos pela evolução da ciência e dos métodos de ensino. E foi isto afinal o que, numa bora feliz, se decidiu fazer na reforma de 1948. Estou certo de que todos os que se interessam verdadeiramente pelo ensino das ciências em Portugal hão-de ter sentido, nesse momento, íntimo regosijo, por verem que o bom-senso acabou por triunfar.

Não faltou depois, e não falta (a história de «O velho, o rapaz e o burro»...) quem protestasse contra a enormidade que é apresentar a alunos do liceu conceitos tão delicados como o de infinitésimo e o de derivada. Que se trata de conceitos delicados, ninguém o pode contestar; mas quanto a serem inacessíveis a rapazes de 15 ou 16 anos, temos de falar...

Não, senhores de pouca fé! As grandes ideias criadoras são sempre assim: o seu efeito sobre a mente juvenil é comparável ao do ar forte da montanha, que primeiro entontece, mas depois estimula e avigora. Dá-se o choque inicial — e logo depois começa a lenta, subterrânea germinação de ideias que só o tempo e a sã pedagogia podem levar a bom termo. Há que semear com antecedência as intuições primeiras para que a colheita se possa fazer no momento oportuno. O aluno que compreende fàcilmente é aquele que já meditou sobre o assunto, e para quem os novos ensinamentos são uma resposta luminosa a interrogações que ficaram latentes no espírito. Quando se não faz a sementeira — o que se pode colher? Em pedagogia, como na ciência, é por aproximações sucessivas que se deve proceder, imitando, de certo modo, a evolução histórica da ciência. É preciso que o aluno comece por compreender em primeira aproximação...

* * *

Reproduzir exactamente a evolução histórica é impossível — já M. de La Palisse era capaz de o dizer. Os criadores do cálculo infinitesimal estão bem longe do rigor lógico exigido nos nossos tempos de crítica inexorável. Veja-se a «Teoria das funções analíticas» de Lagrange: as suas demonstrações fazem sorrir pela ingenuidade dos processos. Percorrer no ensino os mesmos passos vacilantes seria simplesmente uma tolice.

Mas a matemática não é só lógica; a matemática é um produto humano, intimamente ligado às necessidades do homem, à sua existência sobre este planeta. Ensinar matemática sem mostrar a *origem* e a *finalidade* dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, *pelo menos de início*, não estejam sòlidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam.

O ideal seria conciliar o máximo de intuitividade com o máximo de racionalidade. E por isso mesmo que não há uma fórmula para efectuar esta conciliação é que a pedagogia é mais uma arte da que uma ciência. E é por isso também que se torna tão melindroso escrever livros de matemática para os liceus. Entre nós, agora então, duplamente difícil, por causa daquele interregno de 12 anos, que afastou os professores dos assuntos da análise.

Este afastamento já se traduziu de maneira eloquente nas deficiências do compêndio de álgebra que foi adoptado para os 6.º e 7.º anos dos liceus e que tanto tem dado que falar. Ao lê-lo, fica-se com a impressão de que o autor procurou refazer a sua cultura matemática no prazo de que dispunha para apresentar o livro a concurso — e é muito provável que ele, autor, já se tenha apercebido dos inconvenientes da sua precipitação.

Não quero com isto insinuar que não houvesse entre os actuais professores quem pudesse fazer melhor. O que me parece incontestável é a necessidade de organizar reuniões pedagógicas de professores do ensino secundário e do ensino superior, em colóquios, conferências, etc., à semelhança do que se faz lá fora. Seria oportuno rever o plano que, neste sentido, foi apresentado há quatro anos ao Instituto para a Alta Cultura pelo Professor Hugo Ribeiro, e de que já se tinha falado anteriormente na Gazeta de Matemática (n.º 26).

*
* *

A análise infinitesimal assenta essencialmente sobre os conceitos de função e de limite. E é sobretudo nesta base que reside a delicadeza do problema pedagógico de que nos estamos ocupando. Felizmente, têm-se feito grandes progressos no sentido da clarificação dos fundamentos da análise. E é hoje mais fácil do que outrora aquela conciliação da lógica com a intuição a que já nos referimos. Mas todo o cuidado é pouco para não cair em qualquer dos extremos...

O que desde logo se observa, na teoria dos limites, é que a linguagem se torna mais intuitiva, quando se fala de «limite duma variável» em vez de «limite duma sucessão» ou de «limite duma função». Mas é preciso ter presente que *não faz sentido falar de limite duma variável independente;* na realidade, é de limites de funções que se trata sempre: — funções de variável inteira (sucessões) ou funções de variável real.

Consideremos uma *variável real* x_n *função da variável natural* n: a cada valor de n corresponde um determinado valor de x_n; assim, a 1 corresponde x_1, a 2 corresponde x_2, etc. Os valores de x_n dispostos por ordem crescente dos índices formam uma *sucessão,*

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

de que a variável x_n se diz *o termo geral.*

Matemàticamente, nenhuma distinção pode existir entre «variável x_n» e «sucessão de termo geral x_n», porquanto as duas expressões resultam equivalentes em qualquer proposição da teoria. Mas a verdade é que, psicològicamente, os dois conceitos se distinguem: o primeiro parece ligado à ideia de *tempo,* enquanto o segundo parece ligado à ideia de *espaço* (A x_n poderiamos ainda chamar «variável ordenada», se esta expressão não fosse usada hoje na literatura matemática com um significado muito mais amplo).

Posto isto, a teoria elementar dos limites para as variáveis em questão (isto é, para as sucessões) pode desenvolver-se com uma grande simplicidade. E há toda a vantagem, do ponto de vista pedagógico, em que, ao conceito de limite, se anteponha o conceito de infinitésimo. Cumpre-nos prestar aqui justiça ao programa actual, que coloca o estudo dos infinitésimos antes do estudo dos limites — o que tem provocado críticas injustas da parte de vários professores. O conceito de infinitésimo é formalmente mais simples que o conceito de limite: «Diz-se que a variável x_n é um infinitésimo, quando, dado um número positivo δ, por mais pequeno que este seja, existe sempre uma ordem n_1, tal que se tenha $|x_n| < \delta$, para todos os valores de n superiores a n_1». (A ordem n_1 depende em geral de δ, sendo tanto maior quanto menor for δ). Claro está que, na prática do ensino, esta definição deve ser psicològicamente preparada com exemplos graduados; parece-me até que conviria começar por definir as noções de «variável limitada», de «variável crescente» e de «infinitamente grande», comparando-as entre si.

A definição de limite duma sucessão pode ser dada imediatamente a seguir àquela de infinitésimo: «Diz-se que a variável x_n tem por limite o número a quando $x_n - a$ é um infinitésimo». Nenhum inconveniente em formular a definição directa. É claro que se impõe, nesta altura, recorrer a exemplos concretos fornecidos pela geometria, recordando sumàriamente o uso que desta noção já tinha sido feito em anos anteriores, no cálculo de áreas e volumes (por via intuitiva).

Em seguida, podem estabelecer-se os teoremas relativos à soma de dois ou mais infinitésimos e ao produto dum infinitésimo por uma variável limitada (com os corolários relativos ao produto duma constante por um infinitésimo e ao produto de dois infinitésimos). As demonstrações podem ser feitas, ao mesmo tempo com extrema simplicidade e rigor absoluto.

Após este prévio estudo dos infinitésimos, em que a dificuldade das demonstrações é reduzida a um mínimo, tornando quási insensível a subida — a álgebra dos limites («limite da soma», «limite do produto», «limite do cociente») pode desenvolver-se de maneira bem mais simples e natural do que é uso fazer-se. E esta primeira parte do estudo dos limites deveria terminar com uma análise detalhada dos casos que se podem apresentar, no produto dum infinitamente grande por um infinitésimo, no cociente de dois infinitésimos, etc. — pretexto natural para um primeiro contacto com o símbolo ∞ e com os símbolos de indeterminação.

*
* *

A seguir aos limites de sucessões — os limites de funções (de variável real). E logo aqui surge uma questão delicadíssima. Como se sabe, o conceito de «limite duma função $f(x)$ quando x tende para um número a» pode ser definido pelo menos de duas maneiras diversas: ou partindo da noção já definida de limite duma sucessão (orientação de Heine) ou directamente, com o conhecido jogo dos δ e dos ε (orientação de Cauchy).

A primeira definição é sem dúvida a mais natural. O que se pretende afinal dizer, afirmando que $f(x)$ *tende para b quando x tende para a?* Isto apenas: que quando a variável x passa por uma *sucessão qualquer* de valores tendente para a, a função $f(x)$ passa necessàriamente por uma sucessão de valores tendente para b. Note-se que a sucessão de valores de x considerada pode ser *qualquer*, contanto que tenda para a: o que se pretende afirmar é que $f(x)$ tende para b, *qualquer que seja o modo por que x tende para a*. Ulteriormente, para comodidade da exposição, impõe-se ainda aos valores de x a condição de serem diferentes de a. E assim a definição surge, na sua forma definitiva:

«Diz-se que $f(x)$ *tende para b quando x tende para a*, e escreve-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

se, a **toda** a sucessão $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ de valores de x (distintos de a) tendente para a, corresponde uma sucessão $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ de valores de $f(x)$, tendente para b».

A definição é, como se vê, imediatamente apreensível. Que necessidade há então de utilizar depois uma outra, mais artificiosa, menos intuitiva[1] — com aquele jogo dos δ e dos ε, que tanto desnorteia os rapazes? Só pelo prazer bizarro de dar uma definição pura, em que não intervem o conceito de limite duma sucessão? Não, a razão não é essa.

É que, para demonstrar certos teoremas fundamentais da análise — teorema de Weierstrass, teorema da continuidade uniforme, etc. — a primeira definição obriga a utilizar o axioma de Zermelo, esse fantasma inquietante diante do qual tantos matemáticos escrupulosos empalidecem e recuam.

Mas, senhores, não há aqui motivo para inquietações! O fantasma não aparece no liceu, pela simples razão de que tais teoremas não fazem, nem devem fazer, parte do programa. Há tempo depois, na universidade, para mostrar que as duas definições são equivalentes, *desde que se admita o axioma de Zermelo* — óptima ocasião para dirigir a curiosidade dos alunos sobre uma das mais perturbantes questões de filosofia matemática, em que, inesperadamente, se rasga uma janela sobre o infinito.

As vantagens da primeira definição (no estilo de Heine) não se reduzem à espontaneidade da definição em si: concretizam-se depois nas demonstrações dos teoremas relativos ao «limite da soma», «limite do produto», etc. — já que, por esta via, esses teoremas aparecem como consequências *imediatas* das correspondentes proposições relativas a sucessões. Mais ainda: *a referida definição aplica-se perfeitamente ao caso em que uma das constantes a, b (ou ambas) é um dos símbolos* ∞, $+\infty$ ou $-\infty$. Ora tal não acontece com a definição de Cauchy, que só é válida no caso de a, b serem finitos. Quando esta hipótese não é introduzida, há que formular uma definição para cada uma das 16 modalidades possíveis e fazer as demonstrações dos respectivos teoremas! É certo que bastava definir directamente duas dessas modalidades e reduzir as restantes às primeiras mediante transformações simples. Mas onde está então a unidade, a nitidez doutrinal tão cara aos matemáticos?

Não há portanto que hesitar, no curso dos liceus.

---

[1] Segundo o estilo de Cauchy, a definição pode ser assim formulada: «Diz-se que $f(x)$ tem por limite b quando x tende para a, se, a todo o númereo $\varepsilon > 0$, se pode associar um número $\delta > 0$, de modo que se tenha $|f(x) - b| < \varepsilon$, sempre que $|x - a| < \delta$». A definição torna-se mais intuitiva quando se usa a linguagem das *visinhanças* (intervalos centrados em a e em b).

A primeira definição impõe-se categòricamente, uma vez que a segunda, como vimos, corresponde a escrúpulos de lógica que não têm qualquer sentido nesta fase do ensino.

* * *

A *origem* do conceito de limite conhece-a já o aluno, através dos exemplos da geometria. Mas a vantagem, a *finalidade*, daquela delicada rede de definições e de teoremas não lhe surgirá tão claramente ao espírito — se logo em seguida não se passar ao estudo das derivadas, única aplicação que se faz da teoria dos limites no ensino secundário[1]. De contrário, essa construção lógica, assim suspensa a meio do 6.º ano, há-de parecer-lhe um bizantinismo, uma daquelas caturrices que se sofrem, mas não se compreendem. Eu estou certo de que o autor ou os autores do programa já se convenceram de que o capítulo das derivadas não foi colocado no lugar conveniente. De resto, o estudo das derivadas deve ser feito em estreita conexão com o dos movimentos, na física.

Introduzir o conceito matemático de derivada sem ter partido do conceito mecânico de velocidade, e sem depois apresentar as múltiplas concretizações da mesma ideia na geometria e na física — é um erro grave de pedagogia.[2] Com tal orientação abstracta, o aluno ficará perplexo e frio, como diante dum corpo sem alma; ao passo que tudo se ilumina, e o espírito se povoa de belas ressonâncias criadoras, apenas se estabelece o contacto com o mundo externo.

Todos os que, desde os bancos do liceu, se têm interessado pela matemática, hão-de recordar-se do prazer intelectual que se experimenta, por exemplo, ao conhecer a maneira elegante por que, da lei dum movimento, se consegue deduzir a velocidade e a aceleração em função do tempo, e portanto a força que determina o movimento. Qualquer coisa de novo, de potente, de exaltante! É a aragem vigorosa do racionalismo científico que começa a percutir o nosso espírito.

* * *

Porque não introduzir no 7.º ano a noção de integral? Pois não é verdade que nos cursos gerais de física e de química se faz uso frequente desta noção?

Não se tratava, evidentemente, de fazer uma *teoria do integral segundo Riemann*... Tratava-se apenas de criar uma intuição, e de logificar essa intuição na medida em que tal fosse possível e oportuno.

Reconstituir a função a partir da derivada — a equação dos espaços a partir da equação das velocidades, o movimento a partir da força — pode haver problema mais sugestivo e que mais prenda a atenção do aluno?

A solução está naturalmente indicada; inesperadamente, o problema surge como equivalente ao do cálculo das áreas — e eis finalmente a noção de integral! Alguns casos de integração imediata, as primeiras regras formais de integração, podiam e deviam ser ensinadas nesta altura.

Haveria certamente que suprimir partes da matéria que tivessem menor interesse. Estou a lembrar-me da equação de Diofanto, que se tem venerado como um tabú através dos tempos. Todos os anos, pacientemente, os alunos vão aplicando aquele processo maquinal que permite obter *soluções inteiras e positivas*. Com que finalidade, pode saber-se? Para resolver problemas de Almanach, cuja subtileza está em atender a que não existem fracções de homem ou números negativos de cavalos?

Seja-me permitida uma última observação a respeito do programa (a cujos méritos não recuso homenagem). No 6.º ano está indicada, como abertura, uma teoria sintética dos números reais, construída com largo apêlo à intuição. Sem isso, tudo o resto está condenado a cair pela base — e não são os frágeis alicerces lançados em anos anteriores que viriam salvar a situação.

(1) É claro que consideramos incluídos na teoria dos limites o estudo da continuidade e o das indeterminações.

(2) Continuo a referir-me à fase de iniciação.

A Função de Forças e a Equação de Ampère

por José Gaspar Teixeira

O conceito de *função de forças* é dos mais fecundos em Física; no entanto há certos fenómenos para cujo esclarecimento não é, regra geral, empregado tal conceito.

Whittaker no seu «A Treatise on the Analytical Dynamics» define campo de forças conservativas do modo seguinte:[1] «Certain fields of force have the property that the work done by the forces of the field in a displacement of a dynamic system from one configuration to another depends only on the

(1) cf. pág. 38.

initial and final configuration of the system...».

Isto significa, como se sabe, a existência duma *função de forças*, $U(x, y, z)$, de que se obtêm, por derivações parciais, as componentes X, Y, Z da força do campo:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

ou

$$F = \text{grad}\, U.$$

Evidentemente, se a função $U(x, y, z)$ é uniforme, finita, contínua e derivável até a ordem segunda, a equação

$$U(x, y, z) = c \qquad (c \text{ — parâmetro arbitrário})$$

representa uma família de superfícies — *superfícies equipotenciais* — regulares, contínuas e sem pontos comuns.

O trabalho da força do campo ao longo dum arco de trajectória

$$\tau = \int_{P_0}^{P} F/dP = \int_{P_0}^{P} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz =$$

$$= \int_{P_0}^{P} dU = \left[U\right]_{P_0}^{P}$$

depende apenas dos extremos P_0 e P do arco dessa trajectória; e o seu valor não se altera quando os pontos P_0 e P percorrem arbitràriamente as respectivas superfícies equipotenciais.

Por outros termos, o trabalho ao longo de uma trajectória fechada é nulo.

Se a função $U(x, y, z)$ não é, porém, uniforme, [1] duas quaisquer das suas determinações U_1 e U_2 diferem, no mesmo ponto P, apenas por uma constante aditiva; para calcular o trabalho da força relativo a um deslocamento $P_0 P$, basta tomar uma determinação arbitrária em P_0 e seguir essa determinação com continuidade no deslocamento até P. Em particular, quando P volta ao ponto de partida, P_0, o trabalho é nulo, ou não, consoante se volte, ou não, a P_0 com a mesma determinação.

Por outros termos, o trabalho ao longo de uma trajectória $P_0 P$ não se altera, quando a trajectória, com os extremos P_0 e P fixos, sofre uma deformação contínua sem passar por pontos de descontinuidade das derivadas parciais da função de forças,

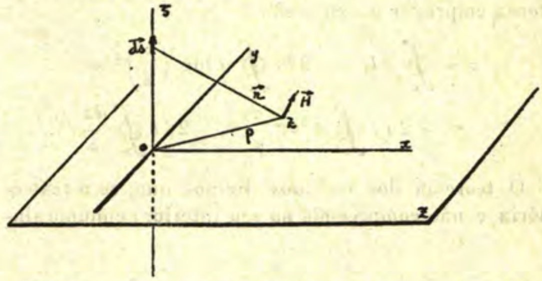
$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

São tudo considerações vulgares dos vulgares tratados de Mecânica Racional.

(¹) *Cours de Mécanique* — Painlevé — pág. 176.

Não encontramos, porém, nos mesmos tratados um exemplo simples que mostre ser este um caso fundamental e corrente em Electromagnetismo; nem nos respectivos tratados de Electricidade referência à resolução mecânica do mesmo problema, notável pela sua clareza.

Consideremos o plano da variável complexa, $z = x + iy$, e uma recta $o\zeta$ normal ao plano, na origem $z = o$.



Suponhamos que sobre $o\zeta$ se passa um fenómeno — deslocamento de cargas eléctricas, constituindo uma corrente eléctrica, estacionária, de intensidade I.

A lei de Biot-Savart dá-nos a expressão do vector H — *campo magnético* — produzido por uma corrente [1] eléctrica: se for $\vec{ds}$ um elemento da corrente potenciante e $\vec{r}$ o vector do ponto potenciado, será

$$\vec{H} = I \int \frac{\vec{ds} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad {}^{(1)}$$

o que dá, para o nosso exemplo

$$|H| = \frac{2I}{\rho}{}^{(2)}, \qquad (\rho = |z|)$$

função descontínua no ponto $z = 0$.

Este facto mostra-nos que o campo $\vec{H}$ deriva duma função de forças que, no plano z toma a forma

$$U = -Ii \log \frac{z}{\bar{z}}.$$

Ora esta função é multiforme e apresenta na origem um ponto crítico de ramificação: as determinações, em número infinito, encadeiam-se com continuidade umas nas outras, e constituem, em torno da origem, uma superfície de Riemann com uma infinidade de folhetos. As componentes da força [3] do campo (no plano z) são

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -I \frac{2y}{x^2 + y^2} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = I \frac{2x}{x^2 + y^2};$$

(¹) No caso presente, linear.

(²) No sistema electromagnético c. g. s.

(³) Trata-se pròpriamente duma *excitação* do campo magnético e não duma *força*.

o trabalho ao longo dum percurso $P_0 P$,

$$\tau = 2\int_{P_0 P} I\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

ou, em coordenados polares

$$\tau = 2I\int_{P_0 P} d\theta \qquad z = \rho\, e^{i\theta}.$$

Se a trajectória, porém, é fechada, preferível se torna empregar a expressão

$$\tau = \oint_c dU = -2Ii\oint_c d\log\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -2Ii\oint_c d\log\frac{z}{\rho} = -2Ii\oint_c \frac{dz}{z}.$$

O teorema dos resíduos diz-nos que, se a trajectória c não compreende no seu interior nenhuma singularidade da função integranda, $\frac{1}{z}$, o trabalho total é nulo.

Se, porém, compreende a origem — única singularidade — como

$$\oint_c \frac{dz}{z} = 2\pi i\,\Sigma R = 2\pi i$$

será
$$\tau = -2Ii\cdot 2\pi i = 4\pi I$$

expressão conhecida pelo nome de Equação de Ampère.

Não conhecíamos a expressão analítica da função de forças correspondente ao fenómeno.

Por outro lado, a semelhança da equação de Ampère com a expressão corrente do teorema dos resíduos sugere o emprego da teoria das funções analíticas como processo expedito de dedução da mesma Equação.

Um Teorema da Metamatemática

por *Maria Teodora Alves*

Dado o teorema

$$H \supset T \qquad (1),$$

o teorema

$$T' \supset H' \qquad (2),$$

em que T' e H' são respectivamente as negações de T e de H, chama-se *teorema contrapositivo do teorema* [1]. A equivalência entre estes dois teoremas encontra-se em qualquer tratado de Lógica Moderna.

Em geral, a hipótese e a tese de um teorema são respectivamente decomponíveis em hipóteses e teses parciais. Haverá, nesse caso, um só teorema contrapositivo ou, à semelhança dos teoremas recíprocos, em caso análogo, haverá mais de um teorema contrapositivo? Como obtê-los? Qual será a sua lei de formação?

Por aplicação do método dos quadros lógicos está demonstrado em «Método de redução ao absurdo, aspecto lógico e pedagógico» à pág. 15, que, dado o teorema

$$(H_1 \cap H_2) \supset T \qquad (3),$$

de hipótese decomponível em H_1 e H_2 e de tese indecomponível, os teoremas

$$(H_1 \cap T') \supset H'_2 \qquad (4)$$
$$(H_2 \cap T') \supset H'_1 \qquad (5)$$

(H'_1, H'_2 e T' são as negações de H_1, H_2 e T) são equivalentes entre si e ao teorema proposto (3).

Como vemos estes teoremas têm uma lei de formação análoga à formação do teorema (2).

A equivalência dos teoremas (3), (4) e (5) permitirá, dado um teorema do tipo (3), formar os outros dois teoremas e escolher aquele que mais cómoda ou mais elegante demonstração tiver. Uma vez demonstrado o teorema escolhido os outros dois ficam implícitamente demonstrados.

Na bibliografia indicada em «Método de redução ao absurdo» e em muita outra que não foi indicada mas que consultàmos, não há referência às conclusões que acabamos de citar. Ignoramos, portanto, se essas conclusões — embora de importância insignificante — têm qualquer originalidade.

A crítica oficial, a que a nossa dissertação foi submetida, apreciou-a entrincheirando-se no reduto da gramática e do vocabulário, e nada informou sobre os assuntos nela versados e, muito menos, naquele a que nos estamos a referir.

Neste artigo vamos apresentar a mesma questão — teoremas contrapositivos de um dado teorema do tipo (3) — tratando-a pela Algebra de Boole e vamos generalizar as conclusões.

[1] Dissertação apresentada, pela autora deste artigo, em repetição de exame de estado, para o magistério do ensino liceal.

Demonstraremos, por exemplo, a *equivalência do teorema* (3) *ao teorema*. (4).

Com efeito,

$$(H_1 \cap H_2) \supset T \equiv (H_1 \cap H_2)' \cup T$$

(definição de $\supset$)

$$\equiv (H'_1 \cup H'_2) \cup T$$

(lei da dualização)

$$\equiv (H'_1 \cup T) \cup H'_2$$

(propriedade comutativa e associativa)

$$\equiv (H_1 \cap T')' \cup H'_2$$

(lei da dualização e da involução)

$$\equiv (H_1 \cap T') \supset H'_2$$

e, finalmente, (definição de $\supset$).

Analògamente demonstraríamos a equivalência entre os teoremas (3) e (5).

Generalização.

Se o teorema proposto fosse do tipo

$$(H_1 \cap H_2 \cap \cdots H_n) \supset T \qquad (6)$$

poder-se-iam obter, por uma lei análoga, os teoremas contrapositivos seguintes em número de n:

$$(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n-1} \cap T') \supset H'_n$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

$$(H_2 \cap \cdots \cap H_n \cap T') \supset H'_1$$

A demonstração da equivalência entre estes teoremas entre si e ao teorema proposto, far-se-ia analògamente à demonstração anterior, para a caso de $n=2$.

Demonstremos a *equivalência entre os teoremas* $(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \supset T$ e $(H_2 \cap \cdots \cap T') \supset H_1'$.

Temos

$$\begin{aligned}(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) \supset T &\equiv (H_1 \cap \cdots \cap H_n)' \cup T \\ &\equiv H'_1 \cup H'_2 \cup \cdots \cup H'_n \cup T \\ &\equiv (H'_2 \cup \cdots \cup H'_n \cup T) \cup H'_1 \\ &\equiv (H_2 \cap \cdots \cap H_n \cap T')' \cup H'_1 \\ &\equiv (H_2 \cap \cdots \cap H_n \cap T') \supset H'_1 .\end{aligned}$$

Analògamente demonstraríamos a equivalência entre o teorema (6) e os restantes teoremas que dele deduzimos e também a equivalência desses teoremas entre si.

Podemos pois, formular o seguinte teorema de teoremas:

Se num terema, de hipótese decomponível em hipóseses parciais e de tese indecomponível, permutarmos a negação da tese sucessivamente com a negação de cada uma das hipóteses parciais, obteremos teoremas equivalentes entre si e ao teorema proposto.

Este teorema de teoremas é do domínio da Metamatemática e poderá ter aplicação na matemática elementar ou superior, em especial, na Geometria Analítica.

Indicamos agora algumas aplicações:

Geometria

Teorema: *Se uma recta, conduzida pelo centro de uma circunferência,* (H_1), *divide ao meio uma corda,* (H_2), *essa recta é perpendicular à corda* (T).

Tipo: $(H_1 \cap H_2) \supset T$

1.º Contrapositivo:

Se uma recta, conduzida pelo centro de uma circunferência, (H_1), não for perpendicular a uma corda da circunferência (T'), essa recta não divide essa corda ao meio (H'_2).

Tipo: $(H_1 \cap T') \supset H'_2$

2.º Contrapositivo:

Se uma recta divide uma corda de uma circunferência ao meio (H_2) e se não for perpendicular à corda (T'), essa recta não passa pelo centro da circunferência (H'_1).

Tipo: $(H_2 \cap T') \supset H'_1$

O teorema proposto e os dois teoremas contrapositivos dele deduzidos são, pelo estudo anteriormente feito, equivalentes entre si.

Demonstrado que um deles é verdadeiro os outros dois também são verdadeiros.

Aritmética

Teorema: *Se* N *for divisível por* a *e por* b, (H_1), *e se* m. d. c. (a, b) = 1, (H_2), N *é divisível por* a b.

1.º Contrapositivo:

Se N for divisível por a e por b (H_1) e se N não for divisível por $a\,b$ (T'), então $m.d.c.(a,b) \neq 1$, (H'_2).

2.º Contrapositivo:

Se o $m. d. c. (a, b) = 1$ (H_2) e N não for divisível por ab (T'), então N não é divisível por a e por b (H'_1), (simultâneamente).

Demonstrado um qualquer destes 3 teoremas, os outros dois são verdadeiros.

Álgebra

Teorema: *Dado* $f(x)$ *que admita derivada em* x_1, *se* $f'(x_1)=0, (H_1)$, *e* $f''(x_1)<0, (H_2)$, $f(x)$ *tem um máximo em* x_1 (T).

1.º teorema contrapositivo:

Dado $f(x$ que admita derivada em x_1, se $f'(x_1)=0$, (H_1), e se $f(x)$ não tem um máximo em x_1, (T'), então $f''(x_1)\geqslant 0$ (não é menor do que zero), (H'_2).

2.º teorema contrapositivo:

Dado $f(x)$ que admita derivada em x_1, se $f''(x_1)<0$, (H_2), e se $f(x)$ não tem um máximo em x_1, (T'), então $f'(x_1)\neq 0$ (não é igual a zero), (H'_1).

Estes três teoremas são equivalentes e a verdade de um deles arrasta necessàriamente a verdade dos outros dois.

PEDAGOGIA

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

II

por Maria Teodora Alves

As considerações que farei neste artigo referem-se ao 2.º ciclo liceal e, em especial, ao programa de Matemática.

A idade dos alunos, no 2.º ciclo da escola secundária, vai dos 13 aos 16 anos. É o período mais delicado da vida dos alunos.

O aluno, neste período da sua vida, é um mixto constantemente variável das qualidades da criança e do adulto. A evolução da sua mentalidade e do seu carácter não é gradual. Pelo contrário, é caracterizadamente oscilante. O aluno, que hoje se mostra atento e disciplinado, amanhã será desatento e insubmisso. Se hoje revela vivacidade de espírito e interesse, amanhã estará bronco e desinteressado.

Neste período da sua vida, o aluno é o joguete de uma emotividade que ainda não se disciplinou.

Não é necessário que o professor tenha grandes qualidades de observação ou longa experiência profissional — é o meu caso — para que possa produzir estas afirmações.

E não é sòmente o professor que tem de atender a este período crítico da vida dos alunos e no qual cada aluno pode dizer-se que é um caso particular. A escola, se quizer evitar a falência da sua missão, não pode organizar-se, ignorando este período crítico da vida dos alunos.

Ora, os principais objectivos da escola secundária, consistem na formação do carácter e mentalidade do aluno e, se é certo, como afirma Burloud, que «o passado que se conserva e se transmite na hereditariedade, não é o passado sob a forma de recordações, mas de hábitos específicos, aptidões e disposições para agir deste ou daquele modo», as responsabilidades que impendem sobre a escola são enormes.

A escola tem que organizar-se, tendo em vista que o aluno não é um motor cujo rendimento possa ser forçado. E, mesmo os próprios motores, precisam de repouso. O aluno é um ser vivo em evolução e que, se está sujeito à acção da escola, não deve ser subtraído à vida familiar que tem também a sua função educativa a qual é insubstituível. Há pois que contar com o tempo destinado à vida familiar do aluno, ao tempo para as suas distracções e para o repouso. As 24 horas do dia têm que ser distribuídas pela escola, pela vida familiar, pelas distracções e repouso do aluno.

Se não houver o justo equilíbrio entre todos estes factores, o regime de educação do aluno entrará em deficit. Se houver a tendência para cobrir esse deficit à custa do repouso, especialmente do sono, então o caso assumirá, em breve, proporções de catástrofe.

Estou a lembrar-me que o genial Cervantes apresenta, aos seus leitores, D. Quixote a ler muito e a dormir pouco, antes de o apresentar enlouquecido.

Na actual reforma do ensino liceal, o aluno do 2.º ciclo é obrigado a dispersar-se por 9 disciplinas, além de outras actividades obrigatórias. Deste facto, infere-se imediata e necessàriamente que os programas das diversas disciplinas têm que ser mínimos, o que não quer significar que devam perder eficiência.

Eu vou estabelecer as condições que devem, a meu ver, orientar essa redução de programas.

A escola secundária, em vez de se preocupar em ensinar aos alunos os resultados do pensamento científico, deverá preocupar-se em ensinar-lhes os métodos de pensar em ciência, baseando-se sòmente no número suficiente de factos que possa servir para estabelecer esses métodos. E porque os métodos científicos são deduzidos de conceitos e agem sobre conceitos e não sobre factos, embora os conceitos sejam extraídos dos factos, a escola deverá conduzir o aluno a criar uma atitude perante o aglomerado de factos.

Quer dizer, os programas da escola secundária devem reduzir os factos ao número mínimo, embora suficiente para que os métodos científicos, perante os alunos, possam ser estabelecidos.

Com efeito, muitas vezes a acumulação de factos, em vez de facilitar a clara formulação do conceito, perturba-a e confunde-a.

H. Poincaré, um dos mais eminentes matemáticos franceses de todos os tempos, preconizando o primado da capacidade de utilizar factos, sobre o conhecimento dos factos, serviu-se desta imagem brilhantemente sugestiva e verdadeira:

«A ciência constroe-se com factos como uma casa se constroe com materiais de construção, mas uma ciência não é uma colecção de factos, do mesmo modo que uma casa não é um monte de materiais de construção».

Eu não pretendo depreciar o valor da informação, o valor do conhecimento de factos. Mas o que afirmo é que, na escola secundária, o valor dos materiais oferecidos por qualquer ramo de estudo não está nos próprios materiais de informação mas na utilidade que possam fornecer para que o pensamento do aluno possa agir de modo a adquirir a arte de investigar relações, de fortalecer capacidades, de formar hábitos, de perseverança, de observação e clareza de raciocínio.

Eu vou tentar esclarecer a ideia que acabei de expor, exemplificando-a com questões do actual programa do 2.º ciclo.

Que importa que o aluno, ao concluir o 2.º ciclo, nada saiba dizer acerca de Hamurabi e o seu código, da reforma potítica do império romano ou da paz de Vestefália e de muitas outras rubricas do actual programa de história, apresentadas em estado de pulverização?

Desde que o aluno se mostre capaz, servindo-se do seu manual de história, ou de qualquer outro compêndio, de obter sobre esses temas a informação julgada suficinte, em nada importa a ignorância que possa revelar sobre eles, uma dada ocasião.

Que importa que um aluno do 2.º ciclo, perguntado sobre a centopeia: aparelhos circulatório e respiratório, sobre o micaxisto ou sobre a funária, nada saiba dizer?

Confesso que acho preferível que o aluno nada saiba dizer a esse respeito do que faça uma prolixa peroração, oral ou esctrita, de uma descrição que decorou e não de factos que tivesse observado.

As ciências naturais têm na escola secundária uma função inestimável e insubstituível, quando são verdadeiramente ensinadas como ciências de observação. É a disciplina que melhor se presta a educar o espírito de observação dos alunos pondo-os em contacto com a realidade concreta. Para nós, portugueses, as ciências naturais, quando estudadas pela observação e experiência, teriam função correctiva à nossa tendência para a divagação, alheia a toda a realidade.

Mas as ciências naturais estudadas como factos de informação, que não foram observados, têm uma função perniciosa, pois deixam de ser correctoras de males para se transformarem em amplificadoras desses males.

Na escola secundária, as ciências naturais, como instrução, têm importância reduzida, como educação têm, na hierarquia das disciplinas, uma elevada cota.

Claparède, o eminente pedagogo suisso, estabelece essa distinção de uma maneira perfeita:

«L'éducation doit viser à développer les fonctions intellectuelles et morales, plus qu'à bourrer le crâne d'une masse de connaissances qui (lorsqu'ils ne sont pas aussitôt oubliées) restent le plus souvent des connaissances mortes, séjournant dans la mémoire comme des corps étrangers, sans rapport avec la vie».

Que importa que o aluno não saiba onde fica o mar de Azooff, as ilhas do Almirantado ou Glasgow, desde que ele se mostre capaz de obter essa informação, recorrendo a um dicionário geográfico, a uma enciclopédia ou ao próprio compêndio?

É neste sentido que eu afirmo haver possibilidade de redução nos programas das disciplinas do 2.º ciclo: Seleccionar em cada disciplina apenas o número de factos que seja considerado suficiente para que o aluno possa ser educado nos métodos de trabalho. Aqueles factos que sejam considerados conjunto necessário de conhecimentos seriam distribuídos pelos diversos anos do curso geral e, sempre que possível, constituindo núcleos de revisão, embora com alargamentos sucessivos.

Por exemplo, todos estão de acordo que, em ciências naturais, um dos núcleos de conhecimentos essencial para os alunos, é uma ideia geral do corpo humano. Esse nucleo de conhecimentos não surgiria sòmente em um dos anos do curso geral. Surgiria, sendo possível, em vários anos do curso geral, embora alargado e com novas relações. O mesmo se poderá dizer de muitos outros núcleos de conhecimentos das ciências naturais, e também de outras disciplinas.

Se as responsabilidades das directrizes da organização da escola cabem ao legislador, neste pormenor da organização dos programas, as responsabilidades cabem exclusivamente à comissão que os organizou.

E só depois de estabelecidos os programas, acompanhados de instruções que indiquem os princípios guias que presidiram à sua coordenação, é que vem as responsabilidades do professor que lhes deve aplicar as regras da melhor didática que estejam de acordo com êles e com as possibilidades dos alunos a seu cargo.

Todavia é ao professor que são atribuídas todas as responsabilidades da falência dos alunos. É uma leviandade e uma grave injustiça cometidas, muitas vezes, por quem tinha a obrigação de conhecer a complexidade do problema educativo. Quando essa injustiça é cometida pelos encarregados de educação de alunos que falharam, ainda é suportável e poderá ter alguma desculpa...

Vem a propósito discriminar as responsabilidades dos professores e dos alunos, perante uma dada organização da escola e de programas e também porque essa discriminação esclarece o meu ponto de vista, acerca da redução de programas.

Se é da responsabilidade do professor ministrar aos alunos os conhecimentos considerados suficientes pelos programas, donde possam ser extraídos os métodos de trabalho científico, é da responsabilidade do aluno usar desses métodos e obter, por si próprio, os frutos dos métodos que usou. Isto é, se o professor deve guiar o aluno no uso dos métodos da ciência, é o aluno que tem que adquirir a técnica respectiva.

Se o professor deve instruir o aluno, o aluno não deve ser um receptor passivo dos conhecimentos ministrados.

Se as analogias ou diferenças entre as questões postas são da responsabilidade do professor, o uso dessas analogias ou diferenças é da responsabilidade do aluno que deverá aprender a usá-las, conforme as circunstâncias e como meios de desenvolver o próprio pensamento.

O professor não pode pensar pelo aluno. É o aluno que tem de pensar por si próprio.

É o que o eminente H. Wheat afirma, nesta síntese perfeita: «The teacher should teach methods of work, but the pupil may become his own best teacher through his use of the methods».

Considero de justiça lembrar que, na Imprensa portuguesa, um professor ilustre, o Senhor Doutor Serras e Silva, tem defendido com brilho, rara e infatigável perseverança, o ponto de vista de que a escola secundária, mesmo em instrução, tem de educar o aluno numa atitude perante a ciência, em vez de o transformar numa enciclopédia viva de conhecimentos.

Tem sido sempre essa a posição daquele ilustre professor perante as várias reformas de ensino secundário. Mas as ideias têm um poder de penetração muito lento, sobretudo quando colidem com as ideias que o hábito e a rotina acumulam, como os pólos de um ímam acumulam a limalha de ferro. A resistência das linhas de força das ideias assim acumuladas, a uma mudança de direcção, faz desanimar os mais perseverantes e, por isso, mais meritória é a atitude persistente do Senhor Doutor Serras e Silva.

Já me alonguei demasiadamente em considerações de ordem geral sobre programas do 2.º ciclo e devo agora aplicá-las à organização de um programa de matemática neste ciclo, que seja compatível com o número de horas que está destinado a essa disciplina.

Em vez do professor se preocupar em ensinar aos alunos os conhecimentos e os factos da Matemática, deverá ensinar-lhes os métodos pelos quais os alunos possam construir as ideias em Matemática, estimulando-os no uso desses métodos.

A Matemática, quanto à sua função na escola secundária, deverá ser considerada como um sistema de ideias, uma sequência de relações destinada a ser entendida pelo aluno, de preferência a uma técnica. O único caminho para obter esse objectivo consiste em usar os métodos de pensamento que lenta e gradualmente provoquem essas ideias de relação.

A técnica de cálculo no 2.º ciclo da escola secundária deverá ser apenas a suficiente para a compreensão dos métodos e claro entendimento da sequência das ideias de relação, postas em jogo por esses métodos.

A sobreposição da técnica de cálculo à correlação das ideias e dos métodos de pensamento, provoca a inversão do objectivo do ensino da Matemática, neste ciclo da escola secundária.

A meu ver, o programa de Matemática de qualquer dos anos do 2.º ciclo é incomportável para 3 horas semanais atribuídas à Matemática; e, na impossibilidade de ser aumentado esse número de horas, dado o quadro de disciplinas, impõe-se uma redução nos programas.

Eu atrevo-me a propor a supressão das seguintes rubricas do programa do 5.º ano:

«Logarítmos; teoremas relativos ao cálculo logarítmo, logarítmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais).

Nesta altura devo interromper o fio das minhas ideias para escutar os clamores que esta minha proposta deverá provocar.

— Suprimir o estudo dos logarítmos no curso geral dos liceus! Suprimir esse maravilhoso e importantíssimo instrumento de cálculo! Desde 1895 que o estudo dos logarítmos atravessa incolume tadas as nossas reformas do ensino secundário.

Em todos os programas de Matemática do ensino secundário dos países civilizados figura o estudo dos logarítmos.

Que despautério!

Eu não nego que a função logarítmica, em todo o vasto campo da Matemática, até mesmo na teoria dos números inteiros, tem a mais larga e vantajosa aplicação.

Também não nego que os logarítmos são um maravilhoso instrumento de cálculo, embora as máquinas de calcular e as regras de cálculo, tão vulgarizadas hoje, tenham reduzido o seu uso.

O que afirmo é que o estudo dos logarítmos, no curso geral dos liceus, como tema para exercícios formais é inferior a outros temas, como aqueles que a geometria pode fornecer, ou, como por exemplo o equacionar de problemas, e dos quais não é possível extraír as vantagens que podem proporcionar, dada a pressa com que são estudados.

O que afirmo é que o estudo dos logarítmos, no curso geral, como técnica de cálculo, é uma inutilidade.

Sòmente um inquérito entre os indivíduos que têm passado pelo curso geral dos liceus e não prosseguiram os seus estudos e aqueles que se destinaram às Faculdades de Direito ou de Letras me poderia convencer, se o resultado fosse favorável, da utilidade do estudo dos logarítmos no curso geral.

O aluno do curso geral dos liceus, que não prossiga os seus estudos ou se destina para a Faculdade de de Direito ou Letras, adquirindo a técnica de cálculo logarítmico, pode ser comparado a um indivíduo que adquirisse a técnica das escalas musicais do piano para, depois, nunca mais tocar piano.

Uma vez feita a supressão do estudo dos logarítmos no curso geral, o que, a meu ver, em nada diminuiria o valor formativo da Matemática, nem as suas reais vantagens utilitárias, no 2.º ciclo, poder-se-ia distribuir a matéria do actual programa pelos 3 anos do ciclo de modo a torná-lo mais bem compensado e coordenado e até mais consentâneo com a mentalidade dos alunos.

Assim:

Do actual programa do 3.º ano seriam transferidas para o 4.º ano as seguintes rubricas:

«Sistemas de 2 equações numéricas do 1.º grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica. «Desigualdades inteiras do 1.º grau a uma incógnita e resolução algébrica e gráfica».

Do actual programa do 4.º ano seriam transferidas para o do 5.º as seguintes rubricas: «Noção de número irracional; radicais; cálculo de radicais. Potências de expoente fraccionário; operações.

Sucessões numéricas. Noções de infinitamente grande e infinitamente pequeno; noção de limite de uma sucessão».

O meu próximo artigo versará sobre o programa de matemática do 3.º ciclo e terei ocasião de me referir, outra vez, ao estudo dos logarítmos.

Quanto à geometria, julgo que poderá ser conservada a distribuição que lhe dá o actual programa, mas as suas rubricas devem ser redigidas com mais cuidado, clareza e rigor. A esse respeito, já os Senhores Drs. L. Barros e David se referiram largamente na «Gazeta de Matemática».

Apesar da supressão que propuz e da consequente arrumação que deu lugar nas matérias do programa dos três anos do 2.º ciclo, ainda considero os programas sobrecarregados.

Julgo agora que é possível pedir à didáctica a necessária simplificação, que consistirá na observância destas duas simples regras:

a) Não transformar o aluno numa máquina de resolver exercícios.

b) Não transformar o aluno num formulário de teoremas.

Em outra oportunidade e lugar mais próprio (a revista pedagógica «Labor»), tenciono desenvolver este tema, referente à simplificação que a didáctica pode operar nos programas da Matemática.

Mas, organização da escola, programas, didáctica, tudo isso se subordina, infelizmente, ao exame O exame que devia ser, na vida escolar, apenas um incidente está transformado num objectivo, numa forçada finalidade.

Os pontos de exame têm de facto, maior influência do que quaisquer outros factores.

Basta que num ponto de exame seja feita uma pergunta que se desvie da clara interpretação dos programas e das regras de uma dada didáctica, para que no ano lectivo seguinte os programas se alarguem, os exercícios se multipliquem e a didáctica se distorsa no sentido revelado pela pergunta inesperada e outras possíveis.

Ser-me-ia muito fácil ilustrar copiosamente esta afirmação, mas ela está tão escorada pelos pontos de exames saídos em anos anteriores e é tão corriqueira, que não merece ocupar espaço na «Gazeta de Matemática».

(Continua)

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Ensino liceal — 3º. ciclo — 1951, Julho.

I

3262 — Determine o limite da função

$$F(x)=\frac{x^2-4}{x^3-5x^2+28}\,.$$

quando x tende para -2. R: *A função dada pode escrever-se* $F(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-7x+14)}$. *Para* $x\neq-2$ *é* $F(x)=\dfrac{x-2}{x^2-7x+14}$. *Logo o limite de* $F(x)$, *quando* x *tende para* -2, *é* $-1/8$ *(resultado da substituição de* x *por* -2 *na última expressão).*

3263 — Escreva a equação cartesiana da recta que passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é perpendicular à recta cuja equação é $2y+5x=6$. R: *O coeficiente angular da recta dada é* $-5/2$; *o da recta pedida será* $2/5$. *A equação desta recta é* $y=\dfrac{2}{5}(x+3)$.

3264 — Resolva a seguinte equação trigonométrica: $2\cos x \operatorname{tag} x=\sqrt{3}$. R: *A equação dada é equivalente à equação* $\operatorname{sen} x=\sqrt{3}/2$. *Como* $\operatorname{sen} 60^\circ=\sqrt{3}/2$, *a solução geral da equação é* $x=k\cdot180^\circ+(-1)^k\cdot60^\circ$.

3265 — Numa divisão, o dividendo é 162 e o resto 15. Que valores pode ter o divisor? R: $162=dq+15$ · *sendo* $d>15$. *Logo* $147=dq$, $d>15$. *Quere dizer* d *é um divisor de* 147, *superior a* 15. *Poderá ser* $d=21, 49, 147$.

II

3266 — Dada a função

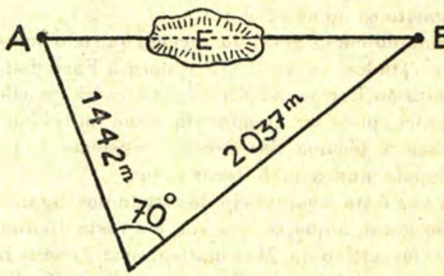
$$F(x)=(4-x)(3x^2+5x-2)\,,$$

determine os valores de x para os quais essa função tem valores negativos. R: *A expressão* $4-x$ *é positiva para* $x<4$ *e negativa para* $x>4$; *a expressão* $3x^2+5x-2$ *é positiva para* $x>1/3$ *ou* $x<-2$ *e negativa para* $-2<x<1/3$. *A função* $F(x)$ *será negativa para os valores de* x *que confiram sinais contrários às duas expressões anteriores; logo* $x>4$ *ou* $-2<x<1/3$.

3267 — Uma parábola tem por vértice a origem das coordenadas e por eixo o eixo dos x. Além disso, passa pelo ponto $(2,-6)$. a) Determine as coordenadas do foco. b) Escreva a equação cartesiana dessa parábola. c) Determine as coordenadas dos pontos em que a parábola é intersectada pela recta $y-x+k=0$. d) Determine k de forma que esses dois pontos coincidam. R: a) e b) *Sendo* $y^2=2px$ *a equação da parábola, as coordenadas do foco são* $(p/2, 0)$. *Para determinar* p, *atenda-se ao facto de* $(2,-6)$ *satisfazer à equação* $y^2=2px$. *Vem* $p=9$. c) *Basta resolver o sistema* $\begin{cases} y^2=18x \\ y-x+k=0 \end{cases}$. *Vem* $x=k+9\pm\sqrt{18k+81}$, $y=9\pm\sqrt{18k+81}$. d) *Deverá ser* $18k+81=0$ $k=-81/18=-9/2$.

3268 — Desejava calcular-se a distância entre dois pontos A e B. Como entre esses dois pontos existia uma elevação E, escolheu-se um terceiro ponto C, do qual os pontos A e B fossem visíveis, e fizeram-se as seguintes medições: $\overline{AC}=1442\,\text{m}$, $\overline{CB}=2037\,\text{m}$. Ângulo $C=70^\circ$.

Com esses dados, a) Determine, empregando logarítmos, os ângulos A e B do triângulo; b) Escreva



a expressão que lhe permitiria calcular a distância entre os pontos A e B. R: a) *O sistema* $A+B=110^\circ$, $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}$ *dará* A *e* B. *Temos:*

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{595}{3479}\operatorname{cotg}35^\circ\,;$$

$\log \text{tg}\,(A-B)/2 = \log 595 + \text{colog}\,3479 + \log \text{cotg}\,35^\circ =$
$= 2{,}77452 + \bar{4}{,}45855 + 0{,}15477 = \bar{1}{,}38784;$
$(A-B)/2 = 13^\circ\,43'\,33''$; *logo* $A-B = 27^\circ\,27'\,6''$. *Virá* $A = 68^\circ\,43'\,33''$ *e* $B = 41^\circ\,16'\,27''$. b) $c^2 = a + b^2 - 2\,ab\cos C$ (*não logarítmica*) ; $c = a\,\text{sen}\,C/\text{sen}\,A$ (*logarítmica*).

Soluções dos n.os 3262 a 3268 de Laureano Barros

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1951 — Ponto n.º 1.

3269 — Demonstrar que, se os inteiros positivos a e b forem primos entre si, também $a+b$ e a^2+ab+b^2 são primos entre si. R: *De* $a^2+b^2+ab = (a+b)^2 - ab$, *deduz-se que todo o divisor comum* k *de* a^2+b^2+ab *e de* $a+b$, *e portanto de* a^2+b^2+ab *e de* $(a+b)^2$, *é também divisor de* ab.

Mas $a+b$ *e* ab *são primos entre si por o serem* a *e* b. *(Vide por ex. «Gazeta de Matemática» n.os 44-45, exercício n.º 3.060). Logo* k *não pode ser diferente de* 1.

3270 — Demonstrar que, se um número primo p é a diferença entre os quadrados de dois números inteiros positivos, estes números são $\dfrac{p-1}{2}$ e $\dfrac{p+1}{2}$. R: *Designemos por* a *e* b ($a > b$, *por ex.*), *os dois inteiros positivos referidos. Em vista da hipótese* $p = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. *Mas como* p *é primo a decomposição anterior só é possível quando* $a - b = 1$ *e* $a+b = p$ *donde* $a = \dfrac{p+1}{2}$ *e* $b = \dfrac{p-1}{2}$.

3271 — Demonstrar que $3^{2n+3} + 40n - 27$, onde n é inteiro positivo, é sempre divisível por 64. [*N. B.* — Escrevendo $f(n) = 3^{2n+3} + 40n - 27$ calcular $f(1)$, formar a diferença $9f(n) - f(n+1)$ e proceder por indução completa]. R: $f(1) = 3^5 + 40 - 27 = \dot{\overline{64}}$. $9\,f(n) - f(n+1) = 3^{2n+5} + 360\,n - 9\cdot 27 - (3^{2n+5} + 40n + 40 - 27) = 320\,n - 256 = \dot{\overline{64}}$.

Como f(n) *é por hipótese múltiplo de* 64 *(visto se proceder por indução completa) fica provado que* f(n+1) *também o é. E como* $f(1) = \dot{\overline{64}}$, *fica feita a indução.*

3272 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\dfrac{2733}{340}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 17 e 20 respectivamente. R: $\dfrac{2733}{340} = \dfrac{x}{17} + \dfrac{y}{20}$ *ou* $20x + 17y = 2733$. *A solução do problema exige a determinação das raízes inteiras e positivas desta equação. Utilizando, por exemplo, o método de* Euler, *obtém-se:* $x_0 = 10$ *e* $y_0 = 149$. *As outras soluções são*: (27,129), (44,109), (51,89), (98,69), (115,49), (132,29) *e* (149,9).

3273 — Desenvolver segundo potências de x a função $n(1+x)^{n-1} + n(n-1)\,x\,(1+x)^{n-2}$, onde n é inteiro positivo, e do resultado obtido concluir que

$$1^2\cdot\binom{n}{1} + 2^2\cdot\binom{n}{2} + \cdots + (n-1)^2\cdot\binom{n}{n-1} + n^2\cdot\binom{n}{n} = n(n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

R: *Tem-se*:

$$(1+x)^{n-1} = 1 + \binom{n-1}{1}x + \binom{n-1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n-1}{k}x^k + \cdots + \binom{n-1}{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$x(1+x)^{n-2} = x + \binom{n-2}{1}x^2 + \cdots + \binom{n-2}{k-1}x^k + \cdots + \binom{n-2}{n-2}x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}x^k.$$

O coeficiente de x^k *no desenvolvimento pedido é pois:*

$$n\binom{n-1}{k} + n(n-1)\binom{n-2}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1!)} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k}+1\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k-1)}\cdot(k+1) = (k+1)^2\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = (k+1)^2\binom{n}{k+1},$$

vindo então para o desenvolvimento da função dada, segundo potências de x:

$$1^2\cdot\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2}x + \cdots + (k+1)^2\binom{n}{k+1}x^k + \cdots + n^2\binom{n}{n}\cdot x^{n-1} = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)\,x\,(1+x)^{n-2}.$$

Fazendo $x = 1$ *na igualdade anterior, e notando que* $n\,2^{n-1} + n(n-1)\,2^{n-2} = n(n+1)\,2^{n-2}$, *deduz-se, imediatamente, a identidade requerida.*

3274 — Determinar os valores reais de m para os quais uma das raízes da equação

$$x^2 + \frac{3m-5}{m-4}x + 16 = 0$$

é o cubo da outra raíz, e verificar esses valores. R: *Representemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação e suponhamos* $x_2 = x_1^3$. *Tem-se* $x_1 x_2 = x_1^4 = 16$, *donde* $x_1 = 2, -2, 2i, -2i$ *e* $x_2 = x_1^3 = 8, -8, -8i, 8i$.

Os valores imaginários de x_1 *e* x_2*, por não serem conjugados, não conduzem a um valor real para o coeficiente de* x *e, portanto, para* m.

Como $x_1 + x_2 = \dfrac{5-3m}{m-4}$ *tem-se*

$$10 = \frac{5-3}{m-4} \quad e \quad -10 = \frac{5-3m}{m-4},$$

donde os valores pedidos de m: 45/13 *e* 5.

Soluções dos n.os 3269 a 3274 de Manuel Zaluar

Exames de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1951 — Ponto nº. 1.

I

3275 — Com uma colecção de pesos de $1, 2, 2^2, 2^3 \cdots$ quilogramas, pretende-se fazer uma pesagem de 91 quilogramas, não utilizando na pesagem mais do que um peso de cada espécie. Quais são os pesos a utilizar? Justifique. R: *Basta escrever o número* 91 *no sistema de base* 2. *Tem-se* $91 = 1011011_{(2)} = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2 + 1$.

3276 — Demonstre que se um número de dois algarismos é divisível por 7, a diferença entre os cubos dos seus algarismos é também divisível por 7. R: *A hipótese é* $\overline{ab} = 10a + b = \dot{7}$ *ou* $3a + b = \dot{7}$. *Mas* $(3a+b)^3 = 3^3 a^3 + 3^3 a^2 b + 3^2 ab^2 + b^3 = 3^3 a^3 + b^3 + 3^2 ab(3a+b)$ *donde* $\dot{7} = 27a^3 + b^3 + \dot{7}$ *ou* $27a^3 + b^3 = \dot{7}$.

Se for $b > a$, *como* $28a^3 = \dot{7}$, *vem* $27a^3 + b^3 - 28a^3 = b^3 - a^3 = \dot{7}$; *se* $b < a$ $28a^3 - 27a^3 - b^3 = a^3 - b^3 = \dot{7}$, c. q. p.

II

3277 — Dada a equação $(m-2)x^2 + mx + 2m - 1 = 0$ de raizes x_1 e x_2, calcule a expressão $E = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2$ e determine m de modo que E seja negativo. R: $E = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 + x_1x_2 = \dfrac{m^2}{(m-2)^2} + \dfrac{2m-1}{m-2} = \dfrac{3m^2-5m+2}{(m-2)^2}$.

$E < 0$ *se* $3m^2 - 5m + 2 = 3(m-1)(m-2/3) < 0$ *ou seja, para* $2/3 < m < 1$.

3278 — Demonstre que, sendo T_p o termo do desenvolvimento de $(x+a)^n$ que é precedido de p termos, será

$$\frac{T_{p+1} \times T_{p-1}}{(T_p)^2} = \frac{np-p^2}{np-p^2+n+1}.$$

R: $T_p = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$, $T_{p+1} = \binom{n}{p+1} x^{n-p-1} a^{p+1}$, $T_{p-1} = \binom{n}{p-1} x^{n-p+1} a^{p-1}$

$$\frac{T_{p+1} \cdot T_{p-1}}{(T_p)^2} = \frac{p!\,p!\,(n-p)!\,(n-p)!}{(p+1)!\,(p-1)!\,(n-p-1)!\,(n-p+1)!} = \frac{p(n-p)}{(p+1)(n-p+1)} = \frac{np-p^2}{np-p^2+n+1}.$$

III

3279 — Sendo $\cot g(x + 5\pi/2) = -\sqrt{2}$ e x do 3.º quadrante calcule $\cos(\pi/3 - x)$. R: $\cot g(x + 5\pi/2) = \cot g(x + \pi/2) = -\operatorname{tg} x$, *logo* $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, $\cos x = -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$ *e* $\operatorname{sen} x = -\sqrt{6}/3$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}.$$

3280 — Demonstre que a diferença dos arcos compreendidos entre 0 e $\pi/2$ radianos e que têm, respectivamente, por tangentes

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \quad e \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

é igual a $\pi/4$ radianos. R: *Designemos por* α *e* β *os arcos do 1.º quadrante tais que* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ *e* $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *Pretende-se provar que* $\alpha - \beta = \pi/4$ *ou* $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 1$, *o que é imediato:*

$$\frac{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1} = 1.$$

Soluções dos n.os 3275 a 3280 de Manuel Zaluar.

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia e Instituto Superior Técnico — Ano de 1951 — Ponto n.º 1.

3281 — Resolva a inequação

$$x^2(2x^2 - 7x + 3) < 6x^2 - 5x + 1.$$

R: *A inequação dada pode sucessivamente escrever-se:*

$$2x^2(x-3)(x-1/2) - 6(x-1/3)(x-1/2) < 0$$
$$(x-1/2)(2x^3 - 6x^2 - 6x + 2) < 0,$$

ou, notando que o 2.º factor tem o zero evidente -1,

$$(x-1/2)(x+1)(2x^2 - 8x + 2) < 0$$
$$2(x-1/2)(x+1)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}) < 0.$$

O primeiro membro tem pois como zeros: -1, $2-\sqrt{3}, 1/2$ *e* $2+\sqrt{3}$. *A inequação é verificada para* $-1 < x < 2-\sqrt{3}$ *e* $1/2 < x < 2+\sqrt{3}$.

3282 — Faça o desenvolvimento do binómio

$$\left[2x+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^7$$

e diga o coeficiente do termo em x. R: *Tem-se para o desenvolvimento:*

$$\sum_{p=0}^{7}\binom{7}{p}(2x)^{7-p}(x/2)^{-p/2}=\sum_{p=0}^{7}2^{7-p/2}\binom{7}{p}x^{7-3p/2}.$$

O coeficiente pedido corresponde a $7-3p/2=1$, *ou* $p=4$, *e é portanto:* $2^5\binom{7}{4}=\dfrac{2^5\cdot 7!}{4!\,3!}=1120$.

3283 — Qual o valor da razão do número de arranjos para o número de combinações de n objectos p a p e como se chama?

3284 — Qual o menor valor de m que dá à equação

$$x^4+2x^2+9=0$$

quatro raízes reais, diferentes de zero, e quais são elas? R: *No enunciado há manifesto erro tipográfico visto o parâmetro* m *não figurar na equação apresentada.*

3285 — Dada a equação $x^2+bx+c=0$, determine b e c de modo que uma das raízes seja tripla da outra e que o produto dos seus quadrados seja igual a 144. R: *Representemos por* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação e suponhamos, por exemplo,* $|x_2|>|x_1|$. *Então:* $x_2=3x_1$, *e* $(x_1x_2)^2=144$. *Logo* $x_1x_2=\pm 12=c$ *e* $x_1+x_2=4x_1=-b$, *donde:* $x_1'=2$, $x_2'=6$ *e* $x_1''=-2$, $x_2''=-6$, *ou* $c'=12$, $b'=-8$ *e* $c''=12$ *e* $b''=8$. *A hipótese* $c=-12$, *conduz a raízes complexas não conjugadas e a* b *imaginário.*

Soluções dos n.os 3281 a 3285 de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 1949-1950.

3286 — Defina sucessão de Rolle de $f(x)$ em (a, b) e descreva, justificando, o seu préstimo na separação das raízes de $f(x)$ num intervalo. Faça a aplicação à equação $x^2e^x-k=0$. (Discussão com apresentação dos diferentes casos possíveis, consoante o valor de k).

3287 — Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente de desenvolvibilidade de $f(x)$ em série de Taylor referida ao ponto a. Dê e justifique alguma condição suficiente. Pode o conhecimento do desenvolvimento de $f'(x)=\sum \alpha_n(x-a)^n$ permitir escrever o de $f(x)$? Sob que hipótese? Qual é esse desenvolvimento? Faça a aplicação à determinação do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $f(x)=\log(4+x)$. (Intervalo de convergência do desenvolvimento).

3288 — Enuncie o teorema de Euler sobre funções homogéneas. É a recíproca exacta? Escreva a equação da tangente à imagem da função y implícitamente definida pela equação $f(x, y)=0$ num ponto genérico, pondo-a sob a forma $AX+BY+C=0$. Dê as expressões de A, B e C em $f(x, y)$ e suas derivadas. Mostre, servindo-se do teorema de Euler, que A, B e C são funções homogéneas, na hipótese de $f(x, y)$ ser homogénea de grau α. De que grau?

3289 — Sendo $f'''_{x^2y}(a, b)$ finita e $f'''_{x^3}(x, y)$ limitada no ponto $P(a, b)$, pode afirmar-se a continuidade de $f''_{x^2}(x, y)$ no ponto P? Justifique o teorema em que baseia a resposta. Supondo verificadas as condições anteriores e admitindo a continuidade de $f''_{y^2}(x, y)$ em $P(a, b)$, justifique a igualdade $f''_{xy}(a, b)=f''_{yx}(a, b)$, supondo que estas últimas derivadas são finitas.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência — 30/1/1951.

3290 — Determine a derivada em ordem a x de:

$$y=e^{1-x^2}\cdot \operatorname{tg}^4(x^3+1)+(1-x)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x-1} \qquad x\neq 1.$$

Justifique a regra operatória que usou para o cálculo da derivada da 2.ª parcela de y. Podia utilizar essa regra para achar essa derivada no ponto de abcissa 1? Porquê? Indique algum ponto onde se torne fácil o cálculo da derivada de y. Justifique. R:

$$y' = -2xe^{1-x^2}\cdot tg^4(x^3+1)+12x^2\cdot e^{1-x^2}\cdot tg^3(x^3+1)-$$
$$-\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\cdot\cos\frac{1}{x-1}.$$

A regra operatória usada foi a do produto que não se pode utilizar no ponto de abcissa 1 *visto que neste ponto a função* $\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$ *não está definida. No ponto de abcissa* -1 *torna-se particularmente simples o cálculo da derivada de* y, *porque neste ponto* $tg(x^3+1)$ *se anula e portanto para o cálculo da derivada basta achar a derivada de* $(1-x)\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}$ *no ponto* -1.

3291 — Determine a equação da circunferência C que passa pelos pontos $A(-2,1)$, $B(-4,-1)$ e cujo centro se encontra sobre a recta de equação $x-y+1=0$.

Ache a equação do logar geométrico dos pontos médios dos segmentos $\overline{MP}$ sabendo que M é um ponto de coordenadas $(5,0)$ e P é um ponto móvel da circunferência C. R: *Seja* $C(\alpha,\beta)$ *o centro da circunferência pedida. Então, temos:* $(\alpha+2)^2+(\beta-1)^2=(\alpha+4)^2+(\beta+1)^2$ *e* $\alpha-\beta+1=0$, *isto é,* $\alpha+\beta+3=0$ *e* $\alpha-\beta+1=0$. *Resolvendo o sistema formado por estas duas equações, obtemos* $\alpha=-2$ *e* $\beta=-1$ *que são as coordenadas do centro. O raio da circunferência será* $r=\sqrt{(-2+2)^2+(-1-1)^2}=2$. *Portanto, a equação da circunferência será* $(x+2)^2+(y+1)^2=4$.

Sejam X *e* Y *as coordenadas dum ponto qualquer do lugar pedido. Então, temos* $X=\frac{x+5}{2}$ *e* $Y=\frac{y}{2}$ *onde* x *e* y *são as coordenadas dum ponto corrente da circunferência* $(x+2)^2+(y+1)^2=4$. *Eliminando* x *e* y *entre estas três últimas igualdades resulta:* $(2X-3)^2+(2Y+1)^2=4$ *que é a equação do lugar pedido.*

3292 — Que entende por limite de uma sucessão de termo geral u_n? Qual a condição necessária e suficiente para que essa sucessão tenha limite finito? Prove que a condição é necessária e suficiente.

Se a sucessão de termo geral u_n converge para um número k, diga como é constituida essa sucessão no caso de k não ser ponto de acumulação do conjunto (u_n). Satisfaz essa sucessão a condição necessária e suficiente atrás referida? Razão disso. R: *A sucessão é constituida, a partir de certa ordem, pelo elemento* k *indefinidamente repetido. Satisfaz a condição necessária e suficiente como é simples de ver.*

3293 — Prove que as séries, de termos positivos, Σu_n e Σv_n são da mesma natureza se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l>0$ (l finito). O que pode concluir se for l igual a zero? E se for l igual a infinito? Justifique.

Verificando-se a condição $n^\alpha\cdot u_n\to l>0$, quando converge a série Σu_n? Neste caso qual o limite da sucessão de termo geral u_n? Porquê? R: *De* $u_n:\frac{1}{n^\alpha}\to l>0$ *e pelo anterior se conclui que* Σu_n *converge se* $\Sigma\frac{1}{n^\alpha}$ *convergir. Ora, sabemos que* $\Sigma\frac{1}{n^\alpha}$, *série de Dirichelet ou harmónica generalizada, só converge para* $\alpha>1$. *Portanto, nas condições enunciadas,* Σu_n *converge se* $\alpha>1$. *Se* Σu_n *converge então* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

3294 — Quando se diz que a função $f(x)$ é crescente no intervalo aberto (a,b)? Indique o limite inferior de tal função na vizinhança $I(b-\varepsilon,b)$, ($\varepsilon>0$ e arbitràriamente pequeno) e o limite superior destes limites inferiores quando ε tende para zero. Se esse limite for finito diga o que é necessário para que essa função $f(x)$ seja contínua no ponto b [relativamente ao intervalo fechado (a,b)].

Mostre que $f(x)$ é contínua no intervalo fechado (a,b), se aí for crescente e tomar todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Dê a imagem de uma função $f(x)$ crescente no *intervalo aberto* (a,b), que assume nesse *intervalo* todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ e, finalmente, não seja contínua no intervalo *aberto* (a,b). R: *Descreva-se, por exemplo, a imagem duma função crescente no intervalo aberto* (a, b), *que apresente uma descontinuidade finita num ponto interior* c, *tal que* $f(b)<f(c-0)$, *e com* $f(a)=f(a+0)$.

Soluções dos n.os 3290 a 3294 de José J. Laginha.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 30 de Junho de 1951 — 2.º exame.

3295 — Desenvolver em série de potências de $x+1$ a função $y=\frac{2}{(x+2)^2}$ e determinar o intervalo de convergência. Demonstre que toda a série de potências é derivável termo a termo. R:

$$Py=-\frac{2}{x+2}=-2\frac{1}{1+(x+1)}=$$
$$=-2[1-(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^3+\cdots+$$
$$+(-1)^n(x+1)^n+\cdots]=\sum_0^\infty(-1)^{n+1}\cdot 2(x+1)^n,$$

desenvolvimento válido para $|x+1|<1$, *ou* $-2<x<0$.

A série das derivadas $\sum\limits_1^\infty(-1)^{n-1}\cdot 2n\cdot(x+1)^{n-1}$ *é* *também convergente no mesmo intervalo e a sua soma e a derivada de* Py, *aonde* y *for uniformemente convergente, isto é, em qualquer intervalo fechado interior ao intervalo de convergência. Vem pois:*

$$\frac{2}{(x+2)^2}=\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2n\cdot(x+1)^{n-1}.$$

Para demonstrar que toda a série de potências é derivável termo a termo basta ver que $\sum\limits_0 a_n x^n$ *e* $\sum\limits_1 n\, a_n x^{n-1}$ *têm o mesmo intervalo de convergência e que, sendo a segunda uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado interior ao intervalo de convergência, a primeira é aí sua primitiva.*

3296 — Defina função regular e veja se $\log t$ é ou não regular no intervalo $(0, T)$. Enuncie o teorema de Cauchy sobre as funções regulares.

Seja $\widehat{OA}$ um arco de curva plana cujas equações paramétricas são $y=\varphi(t)$ e $x=\psi(t)$ com as funções φ e ψ regulares no intervalo (t_0, t_1); prove que o arco $\widehat{OA}$ admite uma tangente ordinária paralela à corda $\overline{OA}$.

Se $y=t^{-2}$ e $x=\log t$, calcule o verdadeiro valor de y/x para $t=0$. Justifique. R: f(x) *é regular em* (a, b) *se for contínua em* (a, b) *e admitir derivada finita ou infinita de sinal determinado em cada ponto interior. A função* logt *não é regular porque não é contínua para* $t=0$; *como para* $t>0$ *admite derivada* $=1/t$ *finita, ela será regular em qualquer intervalo finito fechado por mais próximo que o extremo esquerdo esteja da origem.*

Demonstrar que $\widehat{OA}$ *tem tangente ordinária paralela à corda* $\overline{OA}$, *é demonstrar que: se* $\varphi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são regulares no intervalo* (t_0, t_1) *com derivadas não conjuntamente nulas ou infinitas em pontos interiores, existe* t' *entre* t_0 *e* t_1 *que faz* $\dfrac{\varphi(t_0)-\varphi(t_1)}{\psi(t_0)-\psi(t_1)}=\dfrac{\varphi'(t')}{\psi'(t')}$ *(caso não seja ao mesmo tempo* $\varphi(t_0)=\varphi(t_1)$ *e* $\psi(t_0)=\psi(t_1)$*). É o teorema de Cauchy.*

Com $y=t^{-2}$ *e* $x=\log t$ *vem* $\dfrac{y}{x}=\dfrac{t^{-2}}{\log t}$ *e o verdadeiro valor para* $t=0$ *é* $\lim\limits_{t=0+}\dfrac{t^{-2}}{\log t}=\lim\limits_{t=0}\dfrac{-2t^{-3}}{t^{-1}}=\lim\limits_{t=0}-2t^{-2}=-\infty$. *A justificação está na regra de Cauchy para as indeterminações de tipos* $\dfrac{0}{0}$ *e* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3297 — Se $z=f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais limitadas no interior dum rectângulo de lados h e k centrado em $P(a, b)$, demonstre que f é contínua em P. Além das hipóteses anteriores, se f'_y é contínua em P demonstre que f é diferenciável em P.

Com $z=(x-2y)^2+y-1$ e $P(2,1)$ a equação $z=0$ define alguma função $y(x)$ na vizinhança de $x=2$? Porquê? Em caso afirmativo, qual o sentido da concavidade da curva repesentativa de $y(x)$ no ponto $x=2$? Justifique. R: *A primeira questão demonstra-se com a fórmula dos acréscimos finitos. Quanto à segunda questão basta notar que as derivadas parciais limitadas são finitas e as correspondentes funções parciais são regulares. Como uma derivada é contínua resulta a diferenciabilidade.*

A equação $(x-2y)^2+y-1=0$ *define uma curva contínua passando por* P(2, 1) *porque as derivadas parciais do primeiro membro são contínuas em* P *e* $f'_y(P)\neq 0$. *A função* z *é diferenciável em* P *e portanto a curva representativa de* y(x) *tem tangente em* P *de coeficiente angular dado por*

$$y'=\left[-\frac{2(x-2y)}{-4(x-2y)+1}\right]_{(2,1)}=0.$$

Mas,

$$y''=-\frac{[-4(x-2y)+1]2(1-2y')-2(x-2y)[-4(1-2y')]}{[-4(x-2y)+1]^2}$$

calculada em P *dá* $y''=-2$; *o sentido da concavidade é o dos* yy *negativos. A curva para baixo da tangente.*

3298 — Enuncie o teorema de d'Alembert e, supondo-o demonstrado, prove que o polinómio $f(z)$ de grau n admite precisamente n raízes reais ou complexas, iguais ou distintas. Deduza as fórmulas de Girard e diga como as utiliza para conseguir eliminar o segundo termo de um polinómio.

O que é um zero real isolado? Demonstre que um zero real inteiro simples é um zero isolado.

Poderia reproduzir a demonstração anterior para um polinómio $f(z)$ no caso de zeros complexos? Porquê? R: *Teorema de* d'Alembert: *o polinómio inteiro de grau* $n>0$ *tem pelo menos um zero* a_1. *Dividindo* f(z) *por* $(z-a_1)$ *o resto é* $f(a_1)=0$ *e o cociente é* $f_1(z)$ *de grau* $(n-1)$ *que admite um zero* a_2: $f(z)=(z-a_1)f_1(z)$, $f_1(z)=(z-a_2)f_2(z),\cdots$ *chega-se então a:* $f(z)=p_0(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$.

As fórmulas de Girard *óbtêm-se identificando os coeficientes na identidade:*

$$p_0\left(z^n+\frac{p_1}{p_0}z^{n-1}+\cdots\right)=p_0(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n).$$

A primeira das fórmulas de Girard *é* $\dfrac{-p_1}{p_0}=a_1+a_2\cdots+a_n$ *e se de um polinómio dado passarmos a outro com as raizes aumentadas de* h, *esse novo poli-*

nómio terá $\dfrac{-p'_1}{p'_0}=a_1+a_2+\cdots+a_n+nh$ *ou seja* $\dfrac{p'_1}{p'_0}=$ $=\dfrac{p_1}{p_0}-nh=0$ *donde* $h=\dfrac{p_1}{np_0}$. *Faz-se então a transformada de* $z'=z+h=z+\dfrac{p_1}{np_0}$.

Para demonstrar que zero real simples é zero isolado, faz-se $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ *com* $\varphi(a)\neq 0$ *e* $\varphi(x)$ *contínua para* $x=a$. *Existe pois uma vizinhança de* $\varphi(a)$ *sem a origem e devido à continuidade de* $\varphi(x)$ *existe uma vizinhança de* a *onde* x *faz* $\varphi(x)\neq 0$ *e portanto* $f(x)\neq 0$. *A demonstração reproduz-se nos mesmos termos para um zero complexo, porque se consideram as vizinhanças circulares dos pontos do plano complexo.*

3299 — Defina termo de uma matriz e defina determinante. Diga o que é menor de classe k, e deduza o número de menores de classe k de um determinante de ordem $n>k$.

Calcule o valor de um determinante de 4.ª ordem com todos os elementos iguais: demonstre os teoremas em que se baseou para o cálculo. R: *Termo de matriz* quadrada *é o produto de* n *elementos da matriz tomado um e só um em cada fila. Só para matriz quadrada vale a definição. Sinal de um termo é dado por* $(-1)^{\varphi+\psi}$ *onde* φ *e* ψ *são os números de inversões das permutações superior e inferior dos índices.*

Determinante é a soma dos termos da matriz afectados dos respectivos sinais. Menor de classe k *e de ordem* n−k *é qualquer determinante contido em* n−k *linhas e* n−k *colunas: o número de menores de classe* k *é evidentemente* $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$. *Aquele determinante é igual a zero: deve demonstrar,* a) *a troca de duas filas muda o sinal ao determinante;* b) *determinante com duas filas iguais é nulo.*

Soluções dos n.ºs 3295 a 3299 de J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 6 de Julho de 1951 — 2.º exame.

3300 — Defina extremos absolutos e locais de $f(x)$ no intervalo fechado (a,b). Seja $f(x)$ uma função com derivada positiva no interior do intervalo (a,b); $f(x)$ é contínua nos extremos: prove que $f(x)$ é monótona no intervalo fechado (a,b). Precise o resultado.

Encare a hipótese de $f'(x)$ ser nula num conjunto de pontos, finito ou numerável, interiores ao intervalo. Considere por último a hipótese de $f'(x)$ ser identicamente nula no interior de (a,b). R: *Seja* Y *o conjunto dos valores de* f(x) *para* x *no conjunto* X: *existe sempre um limite excedente dos valores da função em* X, *menor que todos os outros: este limite superior dos valores da função em* X, *se for assumido por* f(x) *em* X, *chama-se máximo absoluto. Dualmente se tem um mínimo absoluto de* f(x) *em* X. *Os dois designam-se por extremos absolutos. Máximos e mínimos ou extremos locais são os máximos e mínimos relativos; são sempre assumidos.*

Para provar a monotonia da função parte-se de $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$ *e vem* $f(c-h)<f(c)<f(c+h)$; *função pontualmente crescente (pròpriamenee) é crescente (pròpriamente); a continuidade nos extremos estende a conclusão ao intervalo fechado. Nas mesmas hipóteses (derivada finita ou infinita de sinal determinado) a função é regular e o teorema de Lagrange dá imediatamente a conclusão. Nesta segunda demonstração deverá precisar-se que, não se anulando a derivada, a função é pròpriamente crescente. Se em ponto isolado a derivada é nula a função não deixa de ser pròpriamente crescente e um conjunto finito ou numerável de pontos é sempre isolado (todos os seus pontos são isolados); a função é pròpriamente crescente mas com inflexões de tangente horisontal. Na última hipótese a função é constante no intervalo fechado. Todas as afirmações deveriam ser provadas como é óbvio.*

3301 — Faça o estudo da concavidade de uma curva por meio da fórmula de Taylor.

Prove que se $f'(x)-f'(d)$ tem sinal fixo para $|x-d|<k$, o arco $\widehat{AM}$ tem inflexão para $x=d$.

Estude a concavidade e pontos de inflexão de $y=2-(1-x)^{1/3}$ e represente a função nas vizinhanças do ponto $x=1$. R: *A concavidade em ponto da curva de tangente não paralela a* $\overline{OY}$ *é estudada por meio de* $\varphi(x)=f(x)-f(c)-(x-c)f'(c)$; *desenvolvendo* f(x) *com a fórmula de Taylor vem para* x *na vizinhança de* c, $f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+\dfrac{(x-c)^2}{2!}f''(c_1)$;

para pontos x *vizinhos de* c *tem-se pois* $\varphi(x)=$ $=\dfrac{(x-c)^2}{2!}f''(c_1)$ *com* c_1 *vizinho de* c. *Isto reduz o estudo da concavidade ao estudo da segunda derivada.*

Em $\varphi(x)=f(x)-f(d)-(x-d)f'(d)$ *faça-se* $f(x)-$ $-f(d)=(x-d)f'(d_1)$ *e teremos* $\varphi(x)=(x-d)[f'(d_1)-$ $-f'(d)]$; *com* x *à esquerda ou à direita de* d, *vem* d_1 *à esquerda ou à direita mas sempre na vizinhança onde o segundo factor mantém sinal; então* $\varphi(x)$ *varia de sinal com* (x−d) *e haverá inflexão.*

As derivadas $y'=\dfrac{1}{3}(1-x)^{-2/3}$ *e* $y''=\dfrac{2}{9}(1-x)^{-5/3}$ *são infinitas, a primeira sem mudar de sinal ao passar* x *por* 1, *a segunda mudando de sinal. Há, para* $x=1$, *inflexão com tangente paralela a* $\overline{OX}$. *A concavidade é positiva para* $x<1$ *e negativa para* $x>1$

3302 — Que entende por derivadas parciais de $z=f(x,y)$ num ponto $P(a,b)$ interior à região $\mathfrak{M}$ em que f vem definida.

Deduza a fórmula dos acréscimos finitos supondo que aquelas derivadas são finitas numa vizinhança do ponto $P(a,b)$.

Calcule a derivada da função composta de $f(x,y)$ e $x=e^u$ e $y=\operatorname{sen} u$ no ponto $u=\pi/6$. Indique as condições em que pode fazer esse cálculo. R: *Como as derivadas parciais são finitas as funções parciais são regulares e pode aplicar-se o teorema de* Lagrange *a cada uma delas; o contorno deverá estar mergulhado na vizinhança dada de* P.

$$\left[\frac{dz}{du}\right]_{u=\pi/6} = f'_x\left(e^{\pi/6}, \operatorname{sen}\pi/6\right) e^{\pi/6} + \\ + f'_y\left(e^{\pi/6}, \operatorname{sen}\pi/6\right) \cos\pi/6 \,;$$

para o cálculo deverá ser dada a função $f(x,y)$; *como* x *e* y *são funções diferenciáveis em* $\pi/6$, *falta apenas que a função* $f(x,y)$ *seja diferenciável no ponto cor-correspondente* $P(e^{\pi/6}, \operatorname{sen}\pi/6)$.

3303 — Demonstre o teorema de D'Alembert ou o lema que o precede. Prove que os zeros do polinómio $f(z)$ são todos isolados.

Decomponha em fracções simples a razão $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

R: $f(z)=(z-a)^p\varphi(z)$ *onde* $\varphi(a)\neq 0$ *e* $\varphi(z)$ *contínua para* $z=a$. *Devido à continuidade de* $\varphi(z)$ *existe um círculo centrado em* a *onde* $\varphi(z)$ *tal como* $\varphi(a)$ *é diferente de zero, e com* z *nesse círculo tambem* $f(z)\neq 0$. *O ponto* a *é zero isolado.*

Seja: $f(z) = p_0(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\cdots(z-l)^\lambda$ *donde*

$$\log f(z) = \log p_0 + \alpha\log(z-a) + \beta\log(z-b) + \cdots$$

e derivando

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \cdots + \frac{\lambda}{z-l}.$$

3304 — Diga o que entende por composição linear de filas de uma matriz. Defina dependência e independência linear, e característica.

Descreva o conhecido processo de cálculo da característica e prove que: a característica conserva-se invariante com a operação de Jacobi.

Se A é uma matriz quadrada (por exemplo de ordem 3) com o determinante $|A|=0$ mas em que um elemento (por exemplo a_1^1) tem complemento algébrico significativo, prove a dependência linear das filas. R. *O processo de cálculo da característica é o da condensação da matriz. Do determinante da matriz* A *tiram-se com os teoremas de* Laplace

$$a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + a_3^1 A_3^1 = |A| = 0\,;\quad a_1^2 A_1^1 + a_2^2 A_2^1 + \\ + a_3^2 A_3^1 = 0\,;\quad a_1^3 A_1^1 + a_2^3 A_2^1 + a_3^3 A_3^1 = 0$$

e somando convenientemente tem-se a igualdade matricial

$$A_1^1\left[a_1^1, a_1^2, a_1^3\right] + A_2^1\left[a_2^1, a_2^2, a_2^3\right] + A_3^1\left[a_3^1, a_3^2, a_3^3\right] = \\ = [0,0,0]$$ *ou* $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = \Theta$ *e por hipótese* $\lambda_1 \neq 0$.

Soluções dos n.os 3300 a 3304 de J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 18-7-1951.

3305 — Determine k de modo que a equação $3x^4+4x^3-6x^2-12x+k=0$ admita uma raiz dupla. Calcule as raízes dessa equação. R: *Determine-se o* m. d. c. *entre* $P(x) = 3x^4+4x^3-6x^2-12x+k$ *e* $P'(x)/12 = x^3+x^2-x-1$, *utilizando para isso, o algoritmo usado na determinação da sucessão de* Sturm, *até um resto independente de* x. *Então, temos*

$$\begin{array}{r|ccccc}
P(x)\cdots & 3 & 4 & -6 & -12 & k \\
P'(x)/12\cdots & 1 & 1 & -1 & -1 & (0) \\
\hline
 & -1 & 3 & 9 & -k & \\
-R\cdots & 4\,(1) & 8 & -k-1 & (0) & \\
\hline
 & 4\,(1) & -k+3 & 4 & & \\
-R_1\cdots & -k-5 & k+5 & & & \\
\dfrac{-1}{k+5}R_1\cdots & -1 & 1 & (0) & & \\
\hline
 & 12 & -k-1 & & & \\
-R_2\cdots & \underline{k-11} & & & &
\end{array}$$

Fazendo $k-11=0$ *vem* $k=11$. *O* m. d. c. $(P,P') = -x+1$ *dá-nos a raíz dupla* $x=1$, *de* $P(x)$. *Abaixando o grau de* $P(x)$ *pela regra de* Ruffini *vem o polinómio* $3x^2+10x+11$, *que admite as raízes complexas* $x = -\dfrac{5}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$.

3306 — Com um simples determinante resolve-se o seguinte problema: Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,-1,1)$ e que é perpendicular ao plano $\pi \equiv 2x+3y-4z=1$ e paralelo à recta $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. R: *Nas condições do enunciado temos o sistema:*

$$\begin{cases} A(x-1) + B(y+1) + C(z-1) = 0 \\ 2A + 3B - 4C = 0 \\ A + 2B + C = 0. \end{cases}$$

A condição para que este sistema (de equações homogéneas) tenha soluções não simultâneamente nulas é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

donde $11x - 6y + z - 18 = 0$, *que é a equação do plano pedido.*

3307 — Calcule um polinómio de grau não superior a 4 que represente aproximadamente a função $y=\cos x$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Ampliando a tabela das diferenças, qual o valor do polinómio correspondente a $-3\pi/2$? R: *Construamos a tabela das diferenças finitas:*

x	P (x)	Δ P (x)	Δ^2 P (x)	Δ^3 P (x)	Δ^4 P (x)
$-\pi$	-1	1	0	-2	4
$-\pi/2$	0	1	-2	2	
0	1	-1	0		
$\pi/2$	0	-1			
π	-1				

A fórmula de Gregory-Newton *dá-nos:*

$$P(x) = -1 + (x+\pi)\frac{1}{\pi/2} + \frac{(x-\pi)(x+\pi/2)\,x}{3!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(-2)}{(\pi/2)^3} + \frac{(x+\pi)(x+\pi/2)\,x\,(x-\pi/2)}{4!}\cdot\frac{4}{(\pi/2)^4}$$

donde, $P(x) = \dfrac{8}{3\pi^4}x^4 - \dfrac{14}{3\pi^2}x^2 + 1$.

Note-se que este polinómio é só constituído por termos de grau par, o que era de esperar visto a função cos x *ser uma função par.*

Para calcular o valor de $P(-3\pi/2)$, *escreve-se na tabela o valor* $\Delta^4 P(-3\pi/2) = \Delta^4 P(-\pi) = 4$ *e determinam-se em seguida os valores:* $\Delta^3 P(-3\pi/2) = -6$, $\Delta^2 P(-3\pi/2) = 6$, $\Delta P(-3\pi/2) = -5$ *e finalmente* $P(-3\pi/2) = 4$.

Soluções dos n.os 3305 a 3307 de José J. Laginha

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º **Exame de frequência ordinário — 10-6-1951.**

I

3308 — Estudar e representar gràficamente a função: $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

3309 — Calcule a soma da série: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n\,(n+2)}{(n+1)^2}$.

R: *Note-se que o termo geral* u_n *é da forma:*

$$u_n = \log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log\left(\frac{n}{n+1} : \frac{n+1}{n+2}\right) = \log\frac{n}{n+1} -$$

$$-\log\frac{n+1}{n+2} = \varphi(n) - \varphi(n+1).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n) = 0$ *tem-se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \varphi(1) = \log\frac{1}{2} =$ $= -\log 2$.

3310 — Uma recta é tangente à curva $y = x^3 + x$ num ponto A e corta-a num ponto B. Determine o lugar geométrico dos pontos P que dividem o segmento $\overline{BA}$ segundo a razão de secção: $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -2$.

R: *Seja a a abcissa de* A. *Tem-se então:* $A(a, a^3+a)$, $y'_a = 3a^2+1$ *e por equação da tangente* AB: $Y - a^3 - a = (3a^2+1)(X-a)$ *ou* $Y = (3a^2+1)\cdot X - 2a^3$. *As abcissas dos pontos de encontro de* AB *com a curva dada são as raizes da equação* $x^3 + x = (3a^2+1)\,x - 2a^3$, $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$, *ou ainda* $(x-a)^2(x+2a) = 0$. *É pois* $B(-2a, -8a^3-2a)$.

Seja $P(\xi, \eta)$. *O lugar dos pontos* P *tais que* $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = -2$ *é o de equação* $\dfrac{\sqrt{(\xi+2a)^2 + (\eta+8a^3+2a)^2}}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-a^3-a)^2}} = -2$ *que representa uma circunferência.*

II

3311 — Defina e estude a função seno hiperbólico de variável real e complexa. Verifique, em particular, para variável complexa, se a função é analítica.

3312 — Desenvolva em série inteira a exponencial neperiana, determine o seu raio de convergência e diga como poderia fazer o cálculo numérico de e^3 com uma aproximação dada.

Que resulta da série exponencial por derivação ou integração?

3313 — Averigue em que condições o adjunto dum determinante completamente hemisimétrico é simétrico ou também completamente hemisimétrico.

3314 — Indique os principais tipos de equações reduzidas das cónicas e mostre qual o papel desempenhado pelos invariantes para o estabelecimento daquelas.

Interprete os diferentes casos de anulamento dos invariantes: cada um por si, e dois a dois, simultâneamente. Poderão anular-se, ao mesmo tempo, os três invariantes fundamentais?

Soluções dos n.os 3309 e 3310 de Manuel Zaluar.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **3.º Exercício de revisão — 1950-51.**

3315 — Integrar a equação

$$sh^2 x\, ch\, x \cdot y'' + sh\, x \cdot y' + 4\, ch^3 x \cdot y = 0$$

fazendo a mudança $t = sh\, x$. R:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{ch}\, x \cdot \frac{dy}{dt}\,; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{sh}\, x \cdot \frac{dy}{dt} + \mathrm{ch}^2 x \frac{d^2 y}{dt^2}\,.$$

Substituindo, vem

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 4y = 0 \quad (\textit{Eq. de Euler}).$$

Fazendo $t = e^z$ *vem:*

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} + 4y = 0\,.$$

Equação característica: $k^2 + 4 = 0$ *de raízes* $\begin{cases} k_1 = 2\,i \\ k_2 = -2\,i \end{cases}$.

Integral geral de (1)*:*

$$y = C_1 \operatorname{sen} 2\,z + C_2 \cos 2\,z\,.$$

Retomando a primitiva variável independente:

$$y = C_1 \operatorname{sen} 2 \log \mathrm{sh}\, x + C_2 \cos 2 \log \mathrm{sh}\, x$$

3316 — Integrar a equação $y = -xy' + \log y'$ e determinar a linha integral que passa na origem. R: *É uma equação de Lagrange. Fazendo* $y' = z$ *e derivando vem* $z = -z - xz' + z'/z$ *ou, tomando* z *para variável independente*

$$(1) \qquad 2\,zx' + x = 1/z \quad (\textit{eq. linear}).$$

Integral geral da equação sem 2.º membro: $x = cz^{-1/2}$. *Fazendo a variação da constante, vem*

$$\frac{dc}{dz} = \frac{1}{2} z^{-3/2} \;\textit{donde}\; c = -z^{-1/2} + k$$

Integral geral de (1)*:* $x = -1/z + k/\sqrt{z}$. *O integral geral da equação dada fica definido por*

$$\begin{cases} x = -1/z + k/\sqrt{z} \\ y = -xz + \log z \end{cases}.$$

A linha integral pedida corresponde a $k = 1$.

3317 — Integrar $\begin{cases} y' + y + z = 0 \\ y + z + z' = -3\, sh\, x \end{cases}$.

R: *Eliminando* z *e* z' *entre estas duas equações e a que resulta por derivação da primeira vem:*

$$(1) \qquad y'' + 2\,y' = 3\, \mathrm{sh}\, x\,.$$

Integral geral da equação sem 2.º membro:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}\,.$$

A equação completa admite uma solução particular da forma $y_1 = A\, \mathrm{sh} x + B\, \mathrm{ch} x$.

Por substituição em (1) *obtem-se* $A = -1$ *e* $B = 2$. *Donde*

$$\begin{cases} Y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \mathrm{sh}\, x + 2\, \mathrm{ch}\, x \\ Z = -C_1 + C_2 e^{-2x} - \mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x \end{cases}$$

esta última obtida da primeira equação do sistema dado.

A linha integral pedida, corresponde a $C_1 = -3/2$ *e* $C_2 = -1/2$.

Soluções dos n.os 3315 a 3317 de Rogério Nunes

I. S. T. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência — Julho de 1951.**

3318 — As duas curvas torsas

$$R \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 + 2 \\ z = t^3 + 3 \end{cases} \qquad R' \begin{cases} x_1 = -2t^2 + 4 \\ y_1 = -2t^2 + 5 \\ z_1 = -2t^3 + 5 \end{cases}$$

têm um ponto comum P, para $t = 1$. Compare, nesse ponto, os respectivos triedros de Frénet e as curvaturas de flexão e torsão das duas curvas. R:

$$R \begin{cases} x = t^2 + 1 & x' = 2t & x'' = 2 \\ y = t^2 + 2 & y' = 2t & y'' = 2 \\ z = t^3 + 2 & z' = 3t^2 & z'' = 6t \end{cases}$$

$$R' \begin{cases} x_1 = -2t^2 + 4 & x_1' = -4t & x_1'' = -4 \\ y_1 = -2t^2 + 5 & y_1' = -4t & y_1'' = -4 \\ z_1 = -2t^3 + 5 & z_1' = -6t^2 & z_1'' = -12t \end{cases}.$$

1.º) *As tangentes em cada ponto das curvas correspondentes a um valor do parametro* t *são paralelas e de sentidos opostos. Como para* $t = 1$ *as curvas* R *e* R' *tem um ponto comum, segue-se que as tangentes são coincidentes em direcção e de sentidos opostos.*

2.º) *Os planos osculadores das curvas num ponto genérico são dados pelas equações*

$$\begin{vmatrix} X - (t^2 + 1) & Y - (t^2 + 2) & Z - (t^3 + 2) \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} X - (-2t^2 + 4) & Y - (-2t^2 + 5) & Z - (-2t^3 + 5) \\ -4t & -4t & -6t^2 \\ -4 & -4 & -12t \end{vmatrix} = 0$$

equações que simplificadas dão $X-Y+1=0$ *tanto para a 1.ª curva* R *como para a 2.ª curva* R' *donde se conclui que as curvas são planas e estão no mesmo plano*

$$X-Y+1=0.$$

Sendo as curvas planas, os seus triedros de Frénet *tem binormal constante que será* $(I-J)/\sqrt{2}$ *tanto para* R *como para* R'.

A torsão é nula para as 2 curvas, e a curvatura de flexão no ponto $(t=1)$ *comum às duas curvas é*

$$\frac{1}{\rho}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{17^3}} \text{ para R, e } \frac{1}{\rho_1}=\frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{17^3}} \text{ para R'}.$$

N. B. — *Também se poderia ver que as curvas eram planas por simples análise das equações das curvas: sendo para* R $x=t^2+1$ $y=t^2+2$ *tira-se por subtracção que* $y-x=1$ *que é a equação dum plano e identicamente para* R' $y-x=1$.

3319 — Mostrar que, se o volume V é limitado por uma superfície regular S, será

$$3V=\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$$

sendo α,β,γ os ângulos directores da normal exterior.

Verificar esta fórmula num cubo de aresta a e de faces paralelas aos planos coordenados. R: *Considere-se o vector* $\alpha=xI+yJ+zK$ *e aplique-se o teorema de* Ostrogradsky *para esse vector e para a superfície* S *em questão.*

Teremos:

$$\int_V \operatorname{div}\alpha\, dV-\int_S(\alpha\mid n)\,dS=$$
$$=\iint(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$$

e como $\operatorname{div}\alpha=3$ *será*

$$3\int dV=3V=\iint(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS.$$

Considerando o cubo definido pelas equações das faces: $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$, *teremos, por exemplo, para as faces paralelas ao plano dos* yz

$$1.^a \text{ face}\quad \begin{matrix} x=0\\ \cos\alpha=-1\\ \cos\beta=0\\ \cos\gamma=0\end{matrix}\qquad \int_0^a\int_0^a x\cos\alpha\,dy\,dz=0$$

$$2.^a \text{ fase}\quad \begin{matrix} x=a\\ \cos\alpha=1\\ \cos\beta=0\\ \cos\gamma=0\end{matrix}\qquad \int_0^a\int_0^a x\cos\alpha\,dy\,dz=a^3$$

e para as 3 faces será $3V=3a^3$, *o que verifica a proposição do enunciado.*

3320 — Como se sabe, o integral completo da equação

1) $$z=px+qy+f(p,q)$$

é

2) $$z=ax+by+f(a,b)$$

sendo a e b constantes arbitrárias. Obtenha este mesmo resultado, aplicando à equação 1) o método de Charpit-Lagrange. R: *Do sistema das características da equação* $z=px+qy+f(p,q)$ *tira-se*

$$\frac{dx}{\cdots}=\frac{dy}{\cdots}=\frac{dz}{\cdots}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}$$

donde $p=\text{Cte}=a$ *e* $q=\text{Cte}=b$.

Substituindo os valores de a *e* b *na equação proposta, porque* p, q *não são independentes mas sim ligados pela equação* 1) *tem-se* $z=ax+by+f(a,b)$ *que é o integral completo.*

Outro processo:

Querendo recorrer à integração da diferencial total ter-se-ia

$$dz=a\,dx+b\,dy$$

donde

$$z=ax+by+C$$

e essa constante C, *atendendo as relações*

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=a\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=b$$

e à equação proposta, só pode ser $C=f(a,b)$ *donde o integral completo*

$$z=ax+by+f(a,b).$$

3321 — Porque é que, na teoria da representação conforme, feita à custa do conceito de função analítica, são excepcionais os pontos z em que a derivada $f'(z)$ é nula? R: *Considerando 2 curvas* u *e* v *descritas pelo afixo de* z *no plano de* Argand, *curvas que tem um ponto comum* z_0 *em que as tangentes às curvas fazem os angulos* α_1 *e* α_2 *com o eixo dos* x, *o ângulo entre as duas curvas no ponto* z_0 *será* $\alpha_1-\alpha_2$.

Se $f(z)$ *é uma função analítica tal que* $f'(z_0)\neq 0$ *verifica-se, como se sabe:*

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)f'(z_0)+\varepsilon$$

e ter-se-á

1) $$\lim_{z\to z_0}\arg[(f(z)-f(z_0)]=$$
$$=\lim\arg(z-z_0)+\arg f'(z_0)$$

2) $$\lim\frac{\operatorname{mod}[f(z)-f(z_0)]}{\operatorname{mod}[z-z_0]}=\operatorname{mod}f'(z_0)$$

De (1) *se tira para as curvas transformadas de* u *e* v *estão rodadas dum ângulo* $f'(z_0)$ *em relação a* u *e* v *e o ângulo que as curvas transformadas fazem no ponto* $f(z_0)$ *será igual ao de* u *e* v *no ponto* z_0 *e igual ainda a* $\alpha_1-\alpha_2$.

2.º) *Na vizinhança do ponto* $f(z_0)$ *as curvas transformadas são obtidas por homotetia das curvas* u *e* v, *homotetia de razão* $\operatorname{mod}f'(z_0)$

Anulando-se $f'(z_0)$ *e sendo* n *a ordem da derivada que não se anula no ponto* z_0, *ter-se-á pela fórmula de* TAYLOR

$$f(z)-f(z_0)=\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+\varepsilon,$$

donde

$$\lim_{z\to z_0}\arg|f(z_0)=f(z_0)|=$$
$$=n\lim\arg(z-z_0)+\arg f^{(n)}(z_0)$$

donde se conclui

1.º $$\lim_{z\to z_0}\arg[f(z)-f(z_0)]=$$
$$=n\lim\arg(z-z_0)+\arg f^{(n)}(z_0)$$

2.º $$\lim\frac{\mathrm{mod}\,[f(z)-f(z_0)]}{\mathrm{mod}\,(z-z_0)}=0$$

Portanto o ângulo das curvas transformadas será n *vezes o ângulo das curvas* **u** *e* v *e portanto* $n(\alpha_1-\alpha_2)$ *e a representação não é* conforme *nesse ponto.*

Resumindo: *Como a «conformidade» da transformação resulta da analiticidade da função* f (z), *nos pontos onde* $f'(z)=0$ *será* $f'(z)$ *um complexo de módulo nulo e argumento indeterminado, e dessa indeterminação resulta a impossibilidade de tirarmos conclusões da igualdade* 1).

Soluções dos n.os 3318 a 3321 de J. de Quadros e Costa

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — MECÂNICA RACIONAL E TEORIA GERAL DE MÁQUINAS — **Alguns exercícios dos exames de frequência — 1950-1951.**

3322 — Em relação ao triedro $0\mathbf{ijk}\equiv 0xyz$, com $P(x,y,z)$, considere-se o campo vectorial (**v**) definido pela função $\mathbf{v}(P)=y\,\mathbf{i}-z\,\mathbf{j}$. Calcular a circulação de **v** ao longo de um circuito λ traçado sobre o plano π que passa pelo ponto $Q=0+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e é perpendicular ao vector $Q-0$. R: *Pelo teorema de* STOKES *a circulação é igual ao fluxo do rotacional de* **v** *através da área* σ *de que* λ *é o contorno total. Sendo* $\mathbf{N}=\mathrm{vers}\,(Q-0)=(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{3}$ *o versor normal a* π *e* $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$ *vem* $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,|\,\mathbf{N}=0$. *Logo a circulação é nula.*

3323 — Em relação ao triedro $0\mathbf{ijk}\equiv 0xyz$, com $P(x,y,z)$, o campo vectorial (**v**) é definido pela função $\mathbf{v}(P)=-xy^2\,\mathbf{i}+(y+z)\,\mathbf{k}$. Calcular o fluxo de **v** divergente do cubo, centrado em 0, de faces paralelas aos planos coordenados e com comprimento de aresta igual a 2. R: *Pelo teorema de* OSTROGRADSKI *o fluxo divergente do cubo de volume* τ *é igual a*

$$\int_\tau \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\tau=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dz=\frac{16}{3}.$$

3324 — Em relação ao triedro $0\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, considere-se a recta R de equação $P=0+\gamma(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$ e os cursores: $A_1\mathbf{v}_1=(1,2,0)\,(2\,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$ e $A_2\mathbf{v}_2=(0,1,1)\,(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$. Determinar $A_3\mathbf{v}_3$, tendo R por suporte e tal que o torsor $T=A_1\mathbf{v}_1+A_2\mathbf{v}_2+A_3\mathbf{v}_3$ seja equivalente a um vector deslizante. R: *Sendo* R *o suporte de* $A_3\mathbf{v}_3$ *podemos escrever* $A_3\mathbf{v}_3=(1,-1,0)[k(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)]$. *As coordenadas de* T *em relação a* A_1 *são*

$$\begin{cases}\mathbf{v}=(1+k)\,\mathbf{e}_1+(3-k)\,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\\ \mathbf{u}_{A_1}=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+3k\,\mathbf{e}_3.\end{cases}$$

Para que T *satisfaça ao enunciado terá de ser* $\mathbf{N}\,|\,\mathbf{u}_{A_1}=0$, *com* $\mathbf{v}\neq 0$. *Donde* $k=-2$ e $A_3\mathbf{v}_3=(1,-1,0)\,(-2\,\mathbf{e}_1+2\,\mathbf{e}_2)$.

3325 — O ponto P tem movimento rectilíneo. Sabe-se que a velocidade algébrica está relacionada com o tempo pela equação $v=(at+b)\,t$, que o espaço percorrido entre os instantes $t_1=1s$ e $t_2=3s$ vale 2m e que a aceleração é nula no instante t_1. Calcular a velocidade no instante t_2. R: *Sendo* $v=\frac{ds}{dt}=(at+b)\,t$ *vem* $s=\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+s_0$ *e, como o movimento é rectilíneo,* $j=\frac{dv}{dt}=2at+b$. *Atendendo às condições do enunciado teremos:*

$$\begin{cases}s(t_2)-s(t_1)=\frac{a}{3}(t_2^3-t_1^3)+\frac{b}{2}(t_2^2-t_1^2)=2\\ j(t_1)=2a\,t_1+b=0.\end{cases}$$

Donde

$$\begin{cases}a=3\\ b=-6\end{cases}\quad e\quad v(t_2)=9\,\mathrm{m/s}.$$

3326 — Sobre o plano fixo $0xy\equiv 0\mathbf{ij}$ move-se uma figura invariável plana, cujos pontos A e B têm por trajectórias respectivas o eixo $0x$ e a recta de equação vectorial $Q=0+\gamma\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$. Sabe-se que, em determinado instante, a abcissa da posição B_0 de B vale 3m e a da posição A_0 de A é igual a 4m. Se B passar por B_0 com a velocidade de 1,414 m/s, com que velocidade passará A *por* A_0? R: *Determina-se o* c. i. r., I, *procurando o ponto de encontro das rectas* $P=0+4\mathbf{i}+u\,\mathbf{j}$ e $Q=0+(3+\lambda)\,\mathbf{i}+(3-\lambda)\,\mathbf{j}$, *normais às trajectórias de* A *e* B *correspondentes às suas posições no instante considerado. Vem* I (4,2). *Sabendo que*

$$\frac{V(A_0)}{V(B)_0}=\frac{\overline{IA_0}}{\overline{IB_0}}\quad teremos\quad V(A_0)=\frac{\overline{IA_0}}{\overline{IB_0}}\,V(B_0)=2\,\mathrm{m/s}.$$

3327 — Demonstrar que o centro de gravidade de 3 pontos materiais — A, B e C —, de massas iguais, coincide com o baricentro da superfície homogénea do triângulo ABC.

3328 — As coordenadas vectoriais do torsor velocidade do sólido S, em relação ao triedro fixo $0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3$, são

$$\Omega = (t+1)\,\mathbf{e}_1 + (t^2-1)\,\mathbf{e}_2 + (t^3+1)\,\mathbf{e}_3$$
$$\text{e} \quad O' = (t-1)\,\mathbf{e}_1 - (t^3+1)\,\mathbf{e}_2 + (t^2-1)\,\mathbf{e}_3 .$$

Determinar os instantes em que o acto do movimento é de translação e aqueles em que ele é de rotação. Para os primeiros, achar a velocidade de translação. Para os segundos, escrever as equações dos respectivos eixos instantâneos de rotação. R: *O movimento é de translação se o torsor velocidade instantânea for redutível a um conjugado; de rotação se for redutível a um vector deslizante. Em qualquer caso será* $\Omega \mid O' = 0$, *o que se verifica nos instantes* $t = \mp 1$. *Para* $t = -1$ *vem* $\begin{cases} \Omega = 0 \\ O' = -2\,\mathbf{e}_1 \end{cases}$; *o movimento é uma translação de velocidade* $\mathbf{v} = -2\,\mathbf{e}_1$. *Para* $t = 1$ *vem* $\begin{cases} \Omega = 2\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 \\ O' = -2\,\mathbf{e}_2 \end{cases}$; *o movimento é de rotação e a equação vectorial do correspondente eixo instantâneo de rotação é* $Q = 0 + (\lambda+1)\,\mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_3$.

3329 — Sabendo que o momento de inércia em relação a um diâmetro do círculo homogéneo (densidade ρ) de raio r vale $\rho\pi r^4/4$, determinar o momento quadrático em relação ao eixo do tronco de cilindro de revolução homogéneo de densidade ρ, raio da base r e altura h. R: $\rho\pi h r^4/2$.

Soluções dos n.os 3322 a 3329 de Zozimo Pimenta de Castro do Rego

PROBLEMAS

Com o próximo n.º 50, completa a Gazeta de Matemática 12 anos de existência.

É já longa e rica a experiência adquirida; impõe-se, porém, mais do que nunca, uma atitude retrospectiva, afim de se evitar de futuro, e o melhor possível, certos erros cometidos.

Assim, já no n.º 1 se definiu o objectivo da Gazeta de Matemática: — «pretende ser ela um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de Matemática das Escolas Superiores portuguesas num campo onde eles encontram, por ventura, as maiores dificuldades — o campo da preparação prática».

Se em parte este objectivo foi atingido, o que é verdade é que existem lacunas que é necessário preencher. Estas lacunas são provenientes, segundo parece à Redacção, de:

1.º — Resultados imcompletos do inquérito aos leitores, aberto nos n.os 10 e 11, sobre, «O Que Pensa da Gazeta de Matemática?».

2.º — Desinteresse da parte de muitos professores de matemática pela Gazeta de Matemática.

Realmente, para a G. M. se aproximar do objectivo atraz recordado, é necessário haver uma permanente colaboração entre leitores e Redacção, principalmente no sentido daqueles manifestarem a esta os seus desejos, as suas necessidades.

Além disso, a existência de professores de matemática dos Ensinos Secundário e Superior que não acompanham a única revista portuguesa dedicada ao ensino da matemática, como conviria e desejaria a G. M., prova:

Ou a não realização da parte da G. M. dos objectivos em vista;

Ou o desinteresse desses professores por um aspecto importante do mesmo ensino.

Qualquer destas duas alternativas revela uma situação que urge melhorar.

Mais do que nunca se torna necessário que esses professores apontem qual o caminho a seguir, quais as modificações a fazer na nossa revista.

Tenciona a Redacção, a partir do próximo número de Janeiro abrir duas secções permanentes:

Inquérito aos Leitores, baseado nos termos expostos no n.º 11, pág. 29.

Concurso de Problemas.

O concurso constará de 3 secções:

Elementar — com problemas ao nível do ensino secundário.

Média — com problemas ao nível da disciplina de Cálculo Infinitesimal.

Superior — destinado a alunos com a cadeira de Análise Superior, licenciados e professores de matemática.

A seguir apresenta-se um projecto de regulamento do concurso e dois problemas tipos de cada secção com sugestões para a sua resolução.

Projecto de regulamento

1 — É aberto um concurso, entre os leitores da G. M., de problemas propostos pela Redacção, dividido em 3 secções: *a*) Elementar, *b*) Média e *c*) Superior.

2 — Cada solucionista poderá concorrer a uma ou a todas as secções.

3 — O concurso, em cada secção, consistirá na resolução de 8 problemas publicados em números sucessivos da G. M., dois em cada número.

4 — As soluções devem ser apresentadas até ao fim do trimestre a que respeita o número da G. M. em que saíram os problemas, afim de serem publicadas as melhores no mais próximo número em que for possível (em geral no segundo número posterior à publicação do problema).

5 — As soluções deverão ser apresentadas em folhas soltas e escritas de um só lado e cada folha só conterá um problema, e indicará o nome do solucionista.

a) Os símbolos deverão ser escritos à mão.

b) Os desenhos deverão ser apresentados em folhas separadas e cobertos a tinta da China, com indicação do problema a que se referem e o nome do autor da solução.

6 — Serão atribuídos prémios, estabelecidos no início de cada concurso, aos melhores solucionistas que, em cada secção, apresentem pelo menos 6 soluções certas.

Serão indicados em cada número todos os solucionistas dos problemas anteriores.

A G. M. desejaria que os seus leitores se manifestassem sobre este regulamento e enviassem também à Redacção as suas sugestões, quanto à natureza e grau de dificuldade dos problemas, de que damos junto exemplos.

PROBLEMAS

3330 — *Se* $b+c>a>0$ e $b^2+c^2=a^2$, prove que $a^3>b^3+c^3$. R: *Como* $b+c>0$, *então, e sem perda de generalidade, podemos supor que*

ou $$b>0 \quad e \quad c>0 \qquad (1)$$

ou $$b>0 \quad e \quad c<0 \qquad (2)$$

Como $(a-b)(a+b)=c^2$ *qualquer que seja* c *será sempre*

$$a-b>0 \quad ou \quad a>b \qquad (3)$$

Se $c>0$ *conclue-se anàlogamente*

$$a>c \qquad (4)$$

relação que se verifica ainda quando $c<0$.

Em qualquer caso é portanto $a>b$ *e* $a>c$, *donde* $a\cdot b^2>b^3$, *e* $a\cdot c^2>c^3$, *ou* $a(b^2+c^2)>b^3+c^3$, *e, finalmente* $a^3>b^3+c^3$.

É fácil ver que b *e* c *são diferentes de zero.*

3331 — Considere três esferas cujos raios medem respectivamente 4, 5 e 6 cm., tangentes entre si duas a duas e todas tangentes ao mesmo plano α. Considere ainda uma quarta esfera, tangente às três anteriores, cujo raio mede 3 cm. Determine a distância do centro da quarta esfera ao plano α. R: *Considere-se um sistema de eixos ortogonais sendo* α *o plano dos* xy *e passando o eixo dos* zz *pelo centro da esfera de raio 4 cm. As coordenadas dos centros das esferas serão:* $P_1(0,0,4)$, $P_2(x_1,0,5)$, $P_3(x_2,y_2,6)$ $Q(x_3,y_3,z_3)$, *se o plano dos* xz *passar pelos centros das esferas de raios 4 e 5 cm.*

A distância pedida será $|z_3|$.

Como as distâncias entre os centros das três primeiras esferas são respectivamente:

$$\overline{P_1P_2}=9;\ \overline{P_1P_3}=10 \ e \ \overline{P_2P_3}=11$$

conclue-se que $x_1^2+1=81$, $x_1=4\sqrt{5}$; $x_2^2+y_2^2+4=100$, $x_2^2+y_2^2=96$; *e* $(x_2-4\sqrt{5})^2+y_2^2+1=121$, *o que dá* $x_2=7:\sqrt{5}$ *e* $y_2=\sqrt{431:5}$

Por outro lado como é $\overline{P_1Q}=7$; $\overline{P_2Q}=8$ *e* $\overline{P_3Q}=9$ *conclue-se que*

$$x_3^2+y_3^2+(z_3-4)^2=49$$

$$(x_3-4\sqrt{5})^2+y_3^2+(z_3-5)^2=64$$

$$(x_3-7:\sqrt{5})^2+(y_3-\sqrt{431:5})^2+(z_3-6)^2=81$$

sistema que resolvido dá o valor de $|z_3|$.

3332 — Determinar as raízes da equação cúbica $f(x)=0$ para a qual as duas áreas limitadas por $y=f(x)$ e pelo eixo dos xx são números inteiros. R: *Sejam* $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ *as raízes da equação e ponhamos* $\alpha_1+h=\alpha_2$ *e* $\alpha_2+k=\alpha_3$.

Por outro lado a equação da cúbica poderá escrever-se: $$y=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

e as áreas pedidas A_1 *e* A_2 *serão dadas por*

$$A_1=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx=a(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)/12=$$
$$=a\,h^3(h+2k)/12$$

e

$$A_2=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx=-a\,k^3(2h+k)/12.$$

Para que A_1 *e* A_2 *sejam números inteiros é necessário que* $a\,h^3(h+2k)$ *e* $-a\,k^3(2h+k)$ *sejam múltiplos de 12. Se for* $a=1$, h *e* k *devem ser inteiros e ambos da mesma forma* $6m$, $6m+2$ *ou* $6m+4$, *e nestes casos as raízes de* $f(x)=0$ *serão:*

$$\begin{array}{lll} b-6p\,, & b\,, & b+6q \\ b-6p-2\,, & b\,, & b+6q+2 \\ b-6p-4\,, & b\,, & b+6q+4\,, \end{array}$$

onde b *é real e* p *e* q *são inteiros.*

3333 — Dá-se à recta $x=az+p$, $y=bz+q$ uma rotação θ, no sentido positivo, em torno de $0z$ Determinar θ de modo que as direcções primitiva e final sejam perpendiculares.

3334 — Provar que as raízes da equação $f(i,-iz)=0$ são os afixos dos focos reais da curva de equação tangencial $f(m,p)=0$ ($y=mx+p$ equação da tangente à curva). R: *Se a tangente for* $Y-y=m(X-x)$, *será* $p=Y-mX$. *Mas dos focos podem tirar-se tangentes de coeficientes angulares* $\pm i$. *Então*

$$p=Y-iX=-iz.$$

3335 — Faz-se a projecção estereográfica duma esfera de raio unidade sobre o plano (z) do equador, tomando como centro de projecção um dos polos; a origem de z é o centro da esfera. Provar que os afixos z_1 e z_2 das projecções de dois pontos diametralmente opostos sobre a esfera verificam a relação $z_2\bar{z}_1=-1$. R: *Sejam* $M_1(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ *e* $M_2(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$ *os pontos e* $z_1(x_1,y_1)$ *e* $z_2(x_2,y_2)$ *as respectivas projecções,*

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}\qquad y=\frac{\eta}{1-\zeta};$$

de $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ *temos*

$$\xi_i=\frac{2x}{\Delta_i+1}\qquad \eta_i=\frac{2y}{\Delta_i+1}\qquad (\Delta_i=x_i^2+y_i^2).$$

Então

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=-\frac{\Delta_2+1}{\Delta_1+1}=\rho \quad donde \quad \Delta_1^2\rho^2+(\Delta_1+1)\rho+1=0.$$

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{-1}{x_1^2+y_1^2}\qquad \frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{x_1^2+y_1^2}\qquad e\quad z_2\bar{z}_1=-1.$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

89 — STIGANT, S. AUSTEN — **Modern Electrical Engineering Mathematics** — Hutchinson's Scientific and Technical Publications, 1946.

O desenvolvimento extraordinário que têm tomado nos últimos anos numerosas aplicações da Electricidade levanta problemas cuja solução exige o recurso a técnicas de Matemática cada vez mais dedicadas. E nem só a obtenção de resultados num ou noutro problema impõe a utilização de novas técnicas de cálculo: assiste-se também a uma revisão dos métodos por que eram abordadas até aqui muitas questões de electrotecnia com o objectivo de procurar tratá-las com mais simplicidade, mais elegância e mais generalidade.

Tal objectivo tem sido atingido de várias formas: simplificando a tradução analítica dos problemas; uniformizando o tratamento de questões com estruturas semelhantes (quer dentro da electrotecnia quer pertencendo a domínios diferentes); simplificando os cálculos numéricos.

E assim, vemos a teoria das matrizes, a teoria dos grupos e a topologia aplicadas no estudo das rêdes; o cálculo tensorial e a geometria dos espaços de Riemann, no estudo das máquinas rotativas e das rêdes; o cálculo simbólico de Heaviside, no estudo de todos os regimes transitórios; o cálculo das probabilidades e a teoria das funções aleatórias, nos problemas de telecomunicações e na recente teoria da informação; a geometria do espaço de Hilbert, na interpetação de certas propriedades dos regimes periódicos não sinusoidais e dos regimes impulsivos (onde a teoria das distribuições de Schwartz poderá vir a prestar relevantes serviços); etc., etc.

O livro de S. Stigant contém a exposição elementar de algumas das aplicações menos vulgarizadas da matemática a problemas de electrotecnia.

Trata-se duma obra muito acessível, sem preocupações de rigor, constituindo uma excelente introdução a trabalhos mais especializados.

Não queremos deixar, contudo, de lhe fazer alguns reparos de caracter geral.

Assim, a insistência no enunciado de *regras* torna-se por vezes desagradável. Também se exagerou na apresentação de muitos resultados dum ponto de vista estritamente formal, pondo de parte quaisquer considerações de natureza crítica e demonstrativa.

Parecem-nos ainda deslocados, num livro do género deste, os capítulos de análise dimensional e aquele em que o Autor expõe o que chama «the per-unit method», que consiste em referir as grandezas físicas a uma unidade convenientemente escolhida em cada caso. É bem conhecida a utilidade deste último método em certas questões de electrotecnia, nomeadamente no estudo dos defeitos assimétricos nas redes trifásicas, mas afigura-se-nos desproporcionado dedicar-lhe um capítulo numa obra como esta.

No entanto o caracter de inovação que informa todo o livro compensa largamente os pequenos defeitos que lhe acabamos de apontar, tornando-o francamente recomendável aos estudantes de física e de electrotecnia.

Segue-se a lista dos nomes dos capítulos: Plane vector operators; Complex angles; Determinants; Matrices; Engineering examples of matrice theory; Dyadics; Tensors; The index notation in electrical engineering tensors; Tensor concepts in electrical engineering; The mechanism of tensor equations; Typical three-phase mesh network transformations tensors; Symmetrical components; The Heaviside operational calculus; Dimensional analysis; The per-unit method; The tensor calculus; The method of dimensions and the per-unit method; The steady state and transient responses of a network to excitation; Transient fenomena in switching parallel-connected capacitors.

O livro contém numerosas referências bibliográficas.

Fernando Soares David

90 — RIO NOGUEIRA — **Contribuição à Teoria da Capitalização** — Rio de Janeiro, 1949.

Constitui este trabalho a «tese de inscrição ao concurso para a cadeira de Complementos de Matemática e Matemática Financeira» na Faculdade de Ciências Económicas do Rio de Janeiro.

O objectivo essencial desta tese é, segundo o autor, «o estudo dos planos de capitalização em moldes mais gerais» É também da Introdução àquele trabalho o seguinte período: «Reconhecendo indispensável ao tratamento geral, a extensão das ideias básicas da Matemática Financeira, aborda nas duas primeiras partes questões centrais da Teoria da Capitalização e dos Empréstimos Aleatórios, onde são introduzidas probabilidades na exigibilidade de valores». E ainda: «Desde o início, conceitos e proposições compreendem os habituais e simplificam os múltiplos casos particulares; por serem aplicados a problemas mais gerais, as demonstrações seguem linha original . . . ».

A leitura destes períodos deixa a impressão de que o autor vai apresentar uma generalização de conceitos básicos ou a introdução de conceitos novos com vista a uma mais perfeita estruturação teórica das matérias versadas. Porém, a leitura dos diferentes capítulos não confirma aquela impressão inicial. Com efeito, no Capítulo I, em que é abordada a Teoria da Capitalização, o autor define capitalização certa nos mesmos moldes em que tem sido definida e define capitalizaçao aleatória pela mesma forma que em seguros se define, limitando-se apenas a não concretizar o acontecimento fortuito que pode importar a exigibilidade do capital. Dentro desta linha considera a segunda como mais geral do que a primeira por conter esta quando for igual a *1* a probabilidade do acontecimento que torna exigível o capital.

Desta forma temos de concluir que o trabalho não corresponde à orientação definida pelo autor na Introdução. O que há, sim, é uma exposição com uma característica pessoal, pois nos capítulos seguintes, que decorrem como consequência natural do primeiro, também se não introduz matéria nova; apenas se fazem aplicações à resolução de problemas.

É ainda da Introdução esta passagem: «A deficiência quase completa de bibliografia, a importância prática do problema que impõe actualmente a competição entre os actuários, levou o autor a explorar este campo de um ângulo mais elevado». Esta passagem é infeliz, pois os Boletins das Associações de actuários publicados em diversos países (Suíça, Itália, Países Bálticos, Tchecoslováquia, etc.) negam o que nela se contém. Isto para não falarmos já em livros da especialidade.

Feita em termos acessíveis e com um fim didático que o autor lhe quiz imprimir, a exposição não é isenta de imperfeições, quer em esclarecimento de conceitos quer mesmo do ponto de vista de análise. Só a título de exemplo mencionaremos as seguintes:

Para justificar o uso da expressão *força de juros* limita-se a dizer que é imprópria a denominação *taxa instantânea de capitalização.* Da mesma forma dá preferência a *força de ocorrência* e *força de mortalidade.* É muito possível que o autor tenha para isso as suas razões, mas em trabalho com um fim didático tais razões deveriam ser apresentadas . . .

É frequente, quanto a rendas, o uso e abuso do termo *antecipado*, impròpriamente usado dado o seu significado próprio internacionalmente aceite. Assim, por exemplo, o autor fala em rendas antecipadas por tal forma que parece excluir a existência de rendas imediatas. Vai mesmo ao ponto de qualificar de *antecipado* o seguro vitalício (vida inteira) e o seguro temporário. Porquê?

O autor define valor de uma renda (antecipada) por

$$R_0 = \lim_{\varepsilon = 0+} \int_0^\infty k_{0,\theta-\varepsilon} \, dS(\theta)$$

onde $S(\theta)$ é a soma dos termos da renda vencíveis no intervalo $(0, \theta)$ e considera as hipóteses $S(\theta) = 0$ se $\theta < 0$ e $S(\theta) > 0$ se $\theta > 0$. Mas nada diz quando $\theta = 0$.

Diz o autor que sendo $p_{\varepsilon t}$ a probabilidade de um acontecimento se dar no intervalo (ε, t) e sendo neste derivável, é $\mu_\varepsilon(t) = -p'_{\varepsilon, t}/p_{\varepsilon, t}$ a força de ocorrência. E a seguir: «Se é descontínua nos pontos de uma sucessão crescente $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ $\cdots t_i < \cdots$, a força média de ocorrência em $[t_i, t_{i+1}]$ pode ser definida pela fórmula

$$\mu_\varepsilon(t_i) = - \Delta p_{\varepsilon, t_i} / p_{\varepsilon, t_i} \Delta t_i \, .$$

Não esclarece, porém que esta mesma definição é válida se p_{ε, t_i} for contínua.

Louvamos o autor pelas intenções que teve; mas o resultado do seu trabalho ficou longe delas, e muito especialmente tratando-se de uma tese para admissão a um concurso universitário e dos fins didáticos que se pretendeu imprimir-lhe.

Embora em face da bibliografia existente não se veja motivo especial que o recomende aos que por estes assuntos se interessam, não consideramos inútil a sua leitura.

A. da Costa Miranda

91 — HASSE, Helmut — **Höhere Algebra,** Dritte verbesserte Auflage, I (Lineare Gleichungen), II (Gleichungen höhere Grades); Sammlung Göschen, Bände 93, 1932, Walter de Gruyter & C.°, Berlin, 1951.

Estes dois volumes da muito conhecida e acessível colecção alemã de livrinhos de algibeira contém a 3.ª edição «melhorada» dum livro modelo de organização, detalhe e escrupuloso rigor. É aparente que este livro influenciou decididamente muitas das melhores exposições dos capítulos fundamentais da álgebra que subsequentemente têm sido publicadas — e ainda hoje ele constitue um excelente texto a usar num primeiro ensino sério do assunto. Os melhoramentos introduzidos nesta 3.ª edição não são expressamente indicados. Porém uma comparação com a 2.ª edição pode ser feita página a página através das 150 páginas que cada volume aproximadamente contém, e assim se verifica que os resultados incluídos são os mesmos e as demonstrações as mesmas. Os melhoramentos que encontramos limitam-se a detalhes de redacção (I pp. 8, 49 ou 53 onde «... $(E\,A^{-1})^{-1}=A$. Daher ist einerseits auch $EA=E\,(A^{-1})^{-1}=A$, d. h. E ist auch vorderes E Einselement, und andrerseits somit $(A^{-1})^{-1}=A$, also $A^{-1}A=E$, d. h. A^{-1} ist auch vorderes Reziprokes zu A» substitui «... $(A^{-1})^{1}=A$. Daher ist also $A^{-1}A=E$, d. h. A^{-1} ist auch vorderes Reziprokes zu A», II p. 61), que a aperfeiçoam ou introduzem novas observações de detalhe, ou então ao desaparecimento de gralhas (I p. 74). (Assim, a indicação «verbesserte Auflage», do frontespício, aparece-nos um pouco forçada, inadequada). Esperamos que o, terceiro, volume de problemas em forma de exercícios (com sugestões para os resolver) Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Band 1082) seja também reeditado.

Estas informações são porventura bastantes para quem conheça a 2.ª edição. Porém é provável que não haja, ao todo, meia dúzia de leitores portugueses incluídos nesta categoria, não só entre os responsáveis pelo ensino da Matemática no nosso país, mas também entre os estudiosos do nosso país. Por isto incluimos aqui os títulos dos vários capítulos: Aneis, Corpos, Domínios de integridade; Grupos; Álgebra linear livre de determinantes [com detalhada exposição do método de Toeplitz]; Álgebra linear com determinantes; Os primeiros membros das equações algébricas; As raízes das equações algébricas; Os corpos das raízes das equações algébricas; A estrutura dos corpos das raízes das equações algébricas; Solubilidade por radicais das equações algébricas. Mas desistimos de apontar, nesta necessàriamente breve notícia, outros detalhes que contribuem para valorizar esta obra; porque duvidamos poder fazê-lo de modo que os leitores para os quais eles são novidades possam acompanhar-nos. Fica-nos a vaga esperança de que o estudo orientado por obras como esta de Hasse ajudará a formar uma mentalidade adulta no nosso pais através da influência que venha a ter nos nossos futuros professores de matemática, conscientes da responsabilidade (que sobretudo a eles cabe) de ensinar a pensar correctamente; e fica-nos também a esperança de que uma ulterior e madura reflexão sobre a leitura do livro ajude a extirpar da nossa terra preconceitos que, em nossa opinião, têm sido extremamente perniciosos. Um destes preconceitos subestima o papel da língua alemã na difusão de obras de matemática. A leitura destas em língua alemã é ainda hoje (mesmo depois do deslocamento do centro de gravidade dos estudos para fora da Alemanha e da actual profusão de traduções) um requerimento necessário a uma bem equilibrada cultura matemática. A falta deste requerimento não terá sido a responsável pelo atrazo imenso dos nossos estudos de Análise, um capítulo que a existência da brilhante escola francesa deixara acessível; mas foi já, decerto, uma das causas do atrazo, provàvelmente ainda maior, dos nossos estudos de Álgebra, Fundamentos e Geometria. A escola de Göttingen (conhecida como a Alexandria dos tempos modernos) onde Hasse foi professor, floriu e decaiu (com o nazismo) sem em Portugal quase darmos por isso. Assim, quanto ao livro de Hasse, não nos recordamos de o ter visto citado no nosso país excepto nos trabalhos do professor A. Almeida e Costa.

Hugo Ribeiro (Univ. of Nebraska, U. S. A.)

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publica quatro números por ano

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número	12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 12$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282