GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CANDIDATOS AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

J. CALADO, B. CARAÇA, R. L. GOMES, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

ANO II JANEIRO - 1941

PREÇO DÊSTE NÚMERO 4$00

EPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

2.º ANO - N.º 5

GAZETA DE MATEMÁTICA

JANEIRO DE 1941

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

AO LEITOR

Tôdas as publicações que desempenham uma função útil estão sujeitas a evoluir — a própria natureza da sua função o impõe.

Uma publicação é lançada com um determinado objectivo que procura realizar de certa maneira, dirigindo-se a um certo público. Ao fim de alguns números, as reacções do público, os seus desejos, o agrupamento dos seus leitores em sectores determinados, indicam claramente se a publicação tem condições de vida e, nesse caso, em que sentido deve orientar-se para bem servir o seu público.

A «Gazeta de Matemática» possui já a experiência necessária à sua orientação definitiva e vem portanto no seu 5.º número, dar conta dos resultados dessa experiência:

1.º A «Gazeta de Matemática» tem condições de vida, e verifica-se que ela correspondeu a uma necessidade da nossa população académica.

2.º A «Gazeta» deve fazer incidir a sua acção, em especial, sôbre a preparação para a aptidão às Escolas Superiores e sôbre os primeiros anos dessas Escolas. É aí que a experiência mostrou residir principalmente o público que dela necessita.

3.º Em conseqüência desta verificação, a «Gazeta» vai, não dizemos mudar a orientação, mas rectificá-la e afirmá-la melhor no seu sector principal de acção.

Como? Dedicando, ao ensino das cadeiras gerais das Escolas Superiores — Álgebra, Cálculo Infinitesimal, Mecânica Racional — uma actividade maior do que a simples publicação e resolução de pontos. Vai passar a dar indicações mais gerais, mais completas, porventura mais úteis. A partir do próximo número, vai publicar exposições sistemáticas da prática referente a capítulos das cadeiras referidas. Quantas vezes o estudante se sente embaraçado pela falta de um bom guia que o ajude na resolução de problemas — o estudo duma curva, a realização dum cálculo numérico, etc. A «Gazeta» vai procurar suprir essa deficiência; daqui por diante publicará, em cada número, um guia prático dum problema geral.

O mesmo vai procurar fazer-se no que diz respeito às preparações para admissão às Escolas. Cada número ficará constituído por uma parte, digamos, transitória — os pontos saídos nos períodos imediatamente anteriores — e uma parte permanente que, acumulada, número a número, formará ao fim de algum tempo um instrumento — guia de trabalho precioso.

A «Gazeta» julga, dêste modo, orientar o seu esfôrço naquêle sentido em que a prática indica que êle pode ser mais útil; os nossos leitores dirão se acertamos.

B. C.

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

As convenções e os métodos da Lógica matemática têm-se imposto gradualmente, como valiosos instrumentos de análise das idéias, a despeito das fortes reacções que de início se opuzeram à sua introdução no domínio da Ciência [1]. Pareceu-nos, em particular, que, para uma clara e perfeita compreensão da parte do programa de matemática do 3.º ciclo dos liceus, que se refere aos métodos da Geometria, muito haveria a lucrar com o emprêgo judicioso de alguns elementos de Lógica matemática, ministrados prèviamente ao aluno, numa extensão do programa que, sem o sobrecarregar em excesso, teria a compensadora vantagem de o favorecer em grande parte do seu trabalho, contribuindo apreciàvelmente para o desenvolvimento das suas faculdades de análise. No esbôço que, em seguida, apresentamos, fomos àlem do que seria necessário para uma simples aprendizagem dos métodos da Geometria: a idéia que nos orientou foi a de mostrar, ainda que modestamente, até que ponto chegam, tanto neste como em outros domínios de aplicação, as possibilidades didácticas da Lógica matemática. Assim, ver-se-á que também o estudo da Aritmética racional e o das inequações podem ser nitidamente beneficiados com esta orientação.

1 — Considerando as três proposições seguintes:

α — X é um triângulo;

β — O Sol é uma estrêla;

γ — Todos os múltiplos de 3 são pares;

vê-se imediatamente que, enquanto a primeira é falsa ou verdadeira conforme a figura geométrica á que X, na realidade, se refere, a segunda é *incondicionalmente* verdadeira e a última, *incondicionalmente* falsa. A veracidade da proposição α é, pois, *condicionada* pela natureza de X, por isso que será verdadeira para umas *determinações,* e falsa para outras *determinações,* daquela variável [2]: diremos então que α é uma proposição *condicional* em X (ou, simplesmente, uma

[1] Estas reacções foram devidas, em grande parte, a alguns exagêros reprováveis dos logísticos. É inteiramente justa a ironia de H. Poincaré, ao comentar as célebres definições do número 1, dadas em símbolos do sistema de Peano.

[2] Pressupõe-se, é claro, que X satisfaz a uma condição prévia, neste caso expressa pela proposição «X é uma figura geométrica». Frases, como «A alma é um triângulo», em que não se atende a êste preceito, são — não pròpriamente falsas, porque não se chega a pôr aqui o problema do «verdadeiro ou falso» — mas antes vazias de sentido.

condição), e para o pôr em evidência podemos escrever $\alpha(X)$, em vez de α. Por outro lado, as proposições tais como β e γ dir-se-ão *categóricas*, por isso que a sua veracidade não depende de circunstância alguma: ou bem são verdadeiras, e são-no então em qualquer caso, ou bem são falsas, e não há possibilidade de as tornar verdadeiras. Se lembrarmos que tôda a igualdade entre expressões algébricas encerra, na verdade, uma proposição, apenas formulada em linguagem diferente da usual, encontraremos, logo, exemplos de proposições categóricas verdadeiras, nas identidades; de proposições categóricas falsas, nas igualdades impossíveis, e de proposições condicíonais, nas equações. Exemplos análogos nos fornecem as inidentidades, as desigualdades impossíveis e as inequações.

Podem ainda, naturalmente, apresentar-se proposições condicionais em mais de uma variável, como por exemplo a seguinte « X, Y e Z são três rectas que se intersectam no ponto U», que é, como se vê, condicional em X, Y, Z e U; mas tudo o que dissermos para as proposições condicionais em uma só variável fàcilmente se generaliza a todas as outras proposições; além de que, como é evidente, um sistema qualquer de variáveis, $X, Y, Z, \cdots$, pode sempre, mediante um acto mental simples, considerar-se como uma variável única, de categoria diferente, $W=(X, Y, Z, \cdots)$.

2 — Dadas as duas proposições:

$\alpha - X$ é um múltiplo de 6;
$\beta - X$ é um múltiplo de 3;

nota-se que, sempre que a primeira é verdadeira, a segunda também o é, ou o que vem a dar o mesmo, que, sempre que esta é falsa, aquela é falsa também; de modo que podíamos escrever: «Se X é um múltiplo de 6, X será também um múltiplo de 3» ou «X é divisível por 6, logo é divisível por 3». Diremos então que α ***implica*** β, ou que β é ***conseqüência*** de α, ou que β ***resulta*** de α (tôdas estas expressões são equivalentes), e escreveremos, simbòlicamente, $\alpha \longrightarrow \beta$.

É fácil ver que, dadas três proposições α_1, α_2 e α_3, se $\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2$ e $\alpha_2 \longrightarrow \alpha_3$, então $\alpha_1 \longrightarrow \alpha_3$; o que se exprime dizendo que a ***implicação lógica*** goza da propriedade transitiva. Por exemplo: a proposição «X é um quadrado» implica a proposição «X é um rectângulo», a qual por sua vez implica a proposição «X é um paralelogramo», donde resulta que a primeira implica a terceira.

Convém notar que as proposições categóricas se comportam como proposições condicionais, quando ainda se ignora, ou se supõe ignorar, se elas são afinal verdadeiras ou falsas. Assim, antes de averiguar se qualquer das proposições «153 é múltiplo de 6» e «153 é múltiplo de 3» é ou não verdadeira, já se pode assegurar que a segunda é verdadeira, se a primeira o fôr, e que esta será falsa, se a segunda fôr por sua vez falsa; isto é, podemos dizer, como para as proposições condicionais, que a primeira implica a segunda. Observações análogas se devem aplicar a tudo o que dissermos em seguida.

3 — Os exemplos anteriores bastam para mostrar que, dadas duas proposições α_1 e α_2, se $\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2$, não se deve daí concluir, sem mais, que também $\alpha_2 \longrightarrow \alpha_1$; isto é, a implicação lógica não goza da propriedade simétrica, embora goze da propriedade reflexiva (qualquer proposição se implica a si mesmo). Pode no entanto acontecer que se tenha, ao mesmo tempo, $\alpha_1 \longrightarrow \alpha_2$ e $\alpha_2 \longrightarrow \alpha_1$: dir-se-á então que as proposições α_1 e α_2 são equivalentes, e escrever-se-á $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Exemplos: as proposições «X é um triângulo equilátero» e «X é um triângulo equiângulo» são equivalentes; do mesmo modo são equivalentes as proposições «x é um número compreendido entre 3 e 4» e «x verifica a desigualdade $x^2-7x+12<0$». Outros exemplos:

I — (n é divisível por 3, por 4 e por 5) $\equiv$ (n é divisível por 60)

II — $(-6<2x<3) \equiv \left(-3<x<\dfrac{3}{2}\right)$

III — (X é um ser vivo) $\equiv$ (X é um animal ou uma planta).

Quando uma prop. α implica uma prop. β, também se diz que α é ***condição suficiente*** para que se verifique β, ou que β é ***condição necessária*** para que se verifique α; e ainda se costuma dizer que β é uma condição ***mais restritiva ou mais forte*** do que α, ou que α é uma condição ***menos restritiva ou mais fraca*** do que β. Se $\alpha \equiv \beta$, é também usual dizer que α (ou β) é condição ***necessária*** e ***suficiente*** para que se verifique β (ou α). Esta terminologia é muito conhecida.

A ***equivalência lógica*** goza evidentemente das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

É também manifesto que tôdas as proposições categóricas, ***reconhecidas*** como verdadeiras, são entre si equivalentes, o que levou a representá-las, indistintamente, pelo símbolo 1. Anàlogamente, as proposições absolutamente falsas são equivalentes entre si, e recebem, por isso, a representação comum 0. Pôsto isto, eu direi que toda a prop. α implica a prop. 1, baseando-me na seguinte consideração: sempre que α é verdadeira, a prop. 1 também o é, por isso que é ***sempre*** verdadeira. Do mesmo modo direi que 0 implica qualquer prop. α: com efeito, sempre que α é falsa, a prop. 0 também o é, por isso que é ***sempre*** falsa. Assim, qualquer que seja a prop. α, ter-se-á: $0 \longrightarrow \alpha \longrightarrow 1$.

4 — Sejam agora as proposições:

$\alpha - X$ é divisível por 5;
$\beta - X$ é divisível por 3;
$\gamma - X$ é divisível por 15.

É fácil reconhecer que, sempre que as proposições α e β se verificam simultâneamente, e só então, a última é verdadeira. Portanto, afirmar ***simultâneamente*** α e β equivale à simples afirmação de γ. Diremos, nêste caso, que a proposição γ equivale ao ***produto lógico*** das proposições α e β, e escreveremos $\gamma \equiv \alpha . \beta$. Dêste modo, o sinal . substitui a conjunção copulativa ***e***. Outros exemplos:

I — (X é um losango) . (X é um rectângulo) $\equiv$ (X é um quadrado);

II — $(-3<x<4) . (1<x<7) \equiv (1<x<4)$;

III — $(12=\dot{n}) . (18=\dot{n}) \equiv (6=\dot{n})$.

Como fàcilmente se pode verificar, a ***multiplicação lógica*** goza das propriedades comutativa e associativa. Além disso, tem-se, qualquer que seja α: $\alpha . 1 \equiv \alpha$, $\alpha . 0 \equiv 0$. Por outro lado, se $\alpha \longrightarrow \beta$, $\alpha\beta \equiv \alpha$, e, reciprocamente, se $\alpha\beta \equiv \alpha$, $\alpha \longrightarrow \beta$; em particular $\alpha . \alpha \equiv \alpha$.

Consideremos ainda as proposições formuladas em seguida:

$\alpha - X$ divide 4;
$\beta - X$ divide 6;
$\gamma - X$ é um divisor de 12, menor que 10.

Vê-se fàcilmente que a última é verdadeira, quando, e só quando, uma, pelo menos, das primeiras se verifica. Dêste modo, afirmar γ equivale a dizer que *uma, pelo menos,* das proposições α e β é verdadeira. Diz-se então que a proposição γ é a *soma lògica* das proposições α e β, e escreve-se $\gamma \equiv \alpha+\beta$, onde o sinal $+$ substitue a conjunção disjuntiva *ou*. Outro exemplo: (X é um número inteiro)+(X é um número fraccionário) $\equiv$ (X é um número racional).

A *adição lógica* goza das propriedades comutativa e associativa, e ainda das seguintes: 1) $\alpha+0\equiv\alpha$; 2) $\alpha+1\equiv1$, qualquer que seja a proposição α; 3) $\alpha+\beta\equiv\beta$ é equivalente a $\alpha\rightarrow\beta$, (donde, em particular, $\alpha+\alpha\equiv\alpha$).

Pode ainda verificar-se, *o que é muito importante*, que, não só a multiplicação lógica é distributiva em relação à adição lógica, como esta é distributiva em relação àquela; isto é, quaisquer que sejam as proposições α, β, γ, tem-se: $\alpha.(\beta+\gamma)\equiv\alpha.\beta+\alpha.\gamma$ e $\alpha+\beta.\gamma\equiv(\alpha+\beta).(\alpha+\gamma)$.

Muito fàcilmente se definem somas e produtos lógicos, com mais de dois dados, o que deixamos ao cuidado do leitor.

5 — Considerando agora as proposições

α — O número inteiro X é par;
β — O número inteiro X é ímpar;

vê-se que não podem tais proposições ser simultâneamente verdadeiras, nem simultâneamente falsas; isto é, se uma é verdadeira, a outra é necessàriamente falsa, e se uma é falsa, a outra é necessàriamente verdadeira. Diremos então que estas proposições são *contraditórias*, ou que uma *nega* a outra, e escreveremos: $\beta\equiv\alpha'$ ou $\alpha\equiv\beta'$ [1]. Outros exemplos:

I — $(x>5)\equiv(x\le5)'$;
II — (Todos os múltiplos de 6 são múltiplos de 3)$\equiv$(Alguns múltiplos de 6 não são múltiplos de 3)$'$.

Dada uma proposição α é fácil reconhecer $\alpha.\alpha'\equiv0$ (princípio da não contradição) e $\alpha+\alpha'\equiv1$ (princípio do terceiro excluído). As duas condições $\alpha.\beta\equiv0$, $\alpha+\beta\equiv1$ são além disso suficientes para que $\alpha\equiv\beta'$.

São muito importantes as seguintes propriedades:

1) $(\alpha')'\equiv\alpha$; 2) Se $\alpha\rightarrow\beta$, $\beta'\rightarrow\alpha'$; 3) $(\alpha+\beta)'\equiv\alpha'.\beta'$;
4) $(\alpha.\beta)'\equiv\alpha'+\beta'$; 5) $1'\equiv0$.

A *negação lógica* põe assim em evidência a dualidade que se verifica, por exemplo, entre a *soma lógica* e o *produto lógico*.

É necessário não confundir proposições contraditórias com proposições *incompatíveis*, aplicando esta designação a duas ou mais proposições cujo produto lógico seja igual a 0. Exemplo: as proposições «X é um número primo» e «X é um múltiplo de 6» são incompatíveis, mas não contraditórias, porque podem ser simultâneamente falsas.

6 — As convenções anteriores constituem a base do chamado *cálculo proposicional*, em que o papel dos números aparece desempenhado pelas proposições, e em que os sinais de relação e de operação correspondem às palavras *se, não, ou, e*. É manifesta a analogia entre as relações $\alpha\rightarrow\beta$ (onde α e β designam proposições) e $a\ge b$ (onde a e b representam números); e ainda entre as relações $\alpha\equiv\beta$ e $a=b$. Uma diferença há, porém, que desde já convém assinalar: enquanto, para cada par de números a e b, se verifica necessàriamente uma das relações $a<b$, $a=b$, $a>b$ (ou, o que é o mesmo, uma das relações $a\le b$, $b\ge a$), pode acontecer que, dadas duas proposições α e β, não se verifique nenhuma das relações $\alpha\rightarrow\beta$, $\beta\rightarrow\alpha$. Porém, conforme o que se viu, as regras formais do cálculo proposicional não diferem consideràvelmente das do cálculo numérico, como também se pode ajuïzar do exemplo: $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\equiv\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$. Outra analogia: das relações $\alpha\rightarrow\beta$, $\gamma\rightarrow\delta$, deduz-se $\alpha+\gamma\rightarrow\beta+\delta$, e ainda $\alpha\gamma\rightarrow\beta\delta$. Convém, contudo, nunca perder de vista as diferenças que existem entre um e o outro cálculo.

7 — Devemos agora notar que toda a proposição categórica pode apresentar-se sob a forma duma implicação lógica (afirmada ou negada) entre duas proposições condicionais, como fàcilmente se infere dos seguintes exemplos:

I — (5 é um número dígito)$\equiv$(X é igual a 5 $\rightarrow$ X é um dígito);
II — (Todos os múltiplos de 6 são pares)$\equiv$(n é $\dot{6}$ $\rightarrow$ n é par);
III — (Alguns múltiplos de 3 não são pares)$\equiv$(Y é $\dot{3}$ $\rightarrow$ Y é par)$'$;
IV — (Nenhum múltiplo de 6 é primo)$\equiv$(W é $\dot{6}$ $\rightarrow$ W *não* é primo);
V — (Alguns losangos são rectângulos)$\equiv$(X é um losango $\rightarrow$ $\rightarrow$ X *não* é um rectângulo)$'$.

Assim, em geral, a tôda a proposição categórica α pode dar-se uma das formas seguintes: $\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t}$ ou $(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})'$, onde $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{t}$ designam proposições condicionais; isto é, ou $\alpha\equiv(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})$, ou $\alpha\equiv(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})'$. *No primeiro caso,* dá-se a $\mathfrak{h}$ o nome de *hipótese* e a $\mathfrak{t}$ o nome de *tese* da proposição α; podemos dizer então que α *transforma* $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{t}$, e escreveremos $\alpha\,|\,\mathfrak{h}\equiv\mathfrak{t}$. Duas proposições α e β, tais que $\alpha\equiv(\mathfrak{a}_1\rightarrow\mathfrak{a}_2)$, $\beta\equiv(\mathfrak{b}_1\rightarrow\mathfrak{b}_2)$, sendo $\mathfrak{a}_1\equiv\mathfrak{b}_2$ e $\mathfrak{a}_2\equiv\mathfrak{b}_1$ (a tese de cada uma coincide com a hipótese da outra), dizem-se *recíprocas*, e, quando enunciadas conjuntamente (isto é, quando se efectua o seu produto lógico), obtém-se a proposição *mais forte* $\mathfrak{a}_1\equiv\mathfrak{a}_2$; por exemplo, as proposições «todo o divisor do m. d. c. de dois números divide também êsses números» e «todo o divisor comum de dois números divide o seu m. d. c.» são entre si recíprocas, e fundem-se na proposição «para que um dado número n divida dois números a e b quaisquer, é necessário e suficiente que divida o seu m. d. c.».

Há ainda outros modos de enunciar proposições categóricas, empregando proposições condicionais: assim, a proposição do exemplo V pode formular-se do seguinte modo: «(X é um losango).(X é um rectângulo)$\neq0$» [2]; a do exemplo II é equivalente a «(X *não* é $\dot{6}$)+(X é par)$\equiv1$» [3], etc.

Observações: 1) Uma proposição categórica α escrita sob a forma $(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})$ ou $(\mathfrak{h}\rightarrow\mathfrak{t})'$ não depende, evidentemente, do símbolo escolhido para representar a variável que figura nas proposições $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{t}$, contanto que êsse símbolo seja o mesmo em ambas; assim, em II podíamos pôr Z, X ou qualquer outra letra, em vez de n [4]. A proposição α traduz, por assim dizer, o que existe de *constante* entre $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{t}$, através de todas as mudanças possíveis do símbolo representativo da variável.

2) Para especificar que uma proposição $\alpha(X)$ não é verificada por mais de uma determinação de X, pode fazer-se uso da seguinte implicação: $\alpha(Y).\alpha(Z)\rightarrow(Y=Z)$. Assim, por exemplo, a expressão «(X é um múltiplo comum de 4 e 6, menor que 20).(Y é um múltiplo comum de 4 e 6, menor que 20)$\rightarrow$($X=Y$)» significa «não existe mais de um múltiplo comum de 4 e 6, inferior a 20».

[1] O sinal $'$ substitui, portanto, o advérbio *não*.
[2] «Existem losangos que também são rectângulos».
[3] «Dado um número inteiro, de duas uma: ou êsse número é par ou não é múltiplo de 6».
[4] Deve, é claro, respeitar-se qualquer convenção prévia, relativa à escolha do símbolo.

Exercício: Mostrar que o produto lógico das implicações $a \to c$, $b \to d$, é equivalente à implicação única $a + b \to a'd + b'c + cd$.

8 — Nas suas modalidades mais freqüentes, o silogismo não é mais do que uma aplicação da propriedade transitiva da implicação lógica. Seja, por exemplo, o raciocínio «Todos os múltiplos do 6 são pares; 12 é múltiplo de 6, logo 12 é par», cujas premissas, postas sob a forma de implicação lógica, são as seguintes:

α: X é $\dot{6} \to X$ é par;

β: Y é igual a $12 \to Y$ é $\dot{6}$;

e representemos por a, b, c, d, respectivamente, a hipótese de α, a hipótese de β, a tese de α e a tese de β. Atendendo à observação 1 do parágrafo anterior, podemos substituir Y por X, em β, o que permite identificar a com d, isto é, pôr $a(X) \equiv d(X)$, e, portanto, escrever $b \to d \to c$, donde $b \to c$.

A proposição $b \to c$, que podemos representar por γ, é, evidentemente, a conclusão do raciocínio, e resulta, como se acaba de ver, da aplicação sucessiva de β e de α sôbre b: $\beta \mid b \equiv d$, $\alpha \mid d \equiv c$, donde $\alpha \mid \beta \mid b \equiv \gamma \mid b \equiv c$. Podemos então escrever $\alpha \mid \beta \equiv \gamma$ e dizer, por analogia com o que fizemos para as proposições condicionais, que α *transforma* β em γ; para justificar esta convenção, basta notar que, escrita sob a forma «12 é $\dot{6}$», a proposição β coincide afinal com a hipótese de α, desde que se ponha 12 no lugar de X, e assim «12 é $\dot{6}$» $\to$ «12 é par», isto é, $\beta \to \gamma$ (segundo α).

Consideremos agora um raciocínio cujas premissas sejam do tipo: $(a \to b)'$ (proposição α_1), $c \to b$ (proposição α_2). Nêste caso a conclusão será $(a \to c)'$, pois que, se a implicação $a \to c$ fôsse verdadeira, como se tem $c \to b$ (segundo α_2) ter-se-ia $a \to b$, o que, segundo α_1, é falso.

(Continua) JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

433 — Encontrar os três lados dum triângulo rectângulo, sabendo que o lado médio é igual à semi-soma dos outros dois e que o número que exprime a sua superfície é o mesmo que exprime o seu perímetro. R: *Se forem* b *o cateto médio,* c *o outro e* a *a hipotenusa será:* $2b = a + c$; $\frac{bc}{2} = a + b + c$ *e* $a^2 = b^2 + c^2$ *donde, resolvendo o sistema,* $a = 10$, $b = 8$, *e* $c = 6$.

J. C.

434 — Qual a razão entre os quintos termos dos desenvolvimentos dos binómios $(1-a)^n$ e $(1+a)^n$? Se a ordem dos termos correspondentes fôr par, qual será a sua razão? R: $T_5 = \binom{m}{4}(-a)^4$; $T'_5 = \binom{m}{4} a^4$ *donde* $\frac{T_5}{T'_5} = 1$. *Se a ordem correspondente fôsse par, então a razão seria* -1, *como é óbvio.*

J. C.

435 — Na equação $9x^2 + 12x + 4 = 0$ indicar, sem resolver, qual a natureza das raízes; dizer os sinais, a sua soma e o seu produto. R: *Como* $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$ *as raízes são reais e iguais. Por ser a soma* $S = -4/3$, *as raízes são negativas e o seu produto é* $P = 4/9$.

J. C.

436 — Calcule por logaritmos o volume dum paralelipípedo de que se conhece a diagonal da base 20,35 m e um ângulo adjacente $28^\circ\, 30'\, 4''$ e a altura 7,50 m. R: *Se o paralelipípedo fôr rectângulo a base é um rectângulo de área* $A = 20{,}35^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, m^2 = \frac{20{,}35^2}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha\, m^2$ *designando por* α *o ângulo de* $28^\circ\, 30'\, 4''$, *e o volume é* $V = \frac{7{,}50 \times 20{,}35^2}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha\, m^3$ *logo* $\log . V = \log 7{,}50 + 2 \log 20{,}35 + \log \operatorname{sen} 57^\circ 0' 8'' + \operatorname{colog} 2 = 3{,}11475$ *e por isso* $V = 1302{,}5\ m^3$.

J. C.

437 — Simplificar a expressão $\dfrac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{3\pi - 4x}{2} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

R: $$\frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{3\pi-4x}{2} + \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + \cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos 2x + \cos^2 x} = -\operatorname{cosec} x.$$

J. C.

438 — Pelo método geométrico do problema inverso, dadas duas rectas paralelas AX e BY e um ponto fixo O complano à distância d da mais próxima, determinar a posição duma perpendicular comum $\overline{CD}$ às duas paralelas dadas tal que do ponto se veja $\overline{CD}$ sob um ângulo dado α. Discutir as soluções possíveis. ¿Qual o valor máximo que pode ter α?

(Vêr solução no próximo número).

439 — *a)* ¿Com os algarismos 0, 1, 2, ⋯, 8 e 9 poder-se-á escrever um número na base 13? *b)* ¿Qual o número no sistema decimal que corresponde a 371 na base 7? R: a) *Nem todos os números do sistema da base* 13 *podem escrever-se com os algarismos dados, pois devem adoptar-se símbolos novos para representar no sistema da base* 13 *os números* 10, 11 e 12 *do sistema decimal.* b) *Na base* 7 *os únicos algarismos adoptados na escrita dos números são* 0, 1, 2, 3, 4, 5 *e* 6. *O símbolo* 371 *não representa pois um número da base* 7.

J. C.

I. S. C. E. F. — 23 de Julho de 1940

440 — *a)* Defina número primo e diga em que consiste a decomposição de um número em factores primos, que propriedades e aplicações conhece. *b)* Sejam os dois números $A = p^2 . q^n$ $B = q^2 . p^n$, onde p e q são números primos e n inteiro e positivo. Quantos divisores comuns têm A e B e quais? R: *Se* $n \geq 2$ *o número de divisores é 9:* $1, p, p^2, q, q^2, p.q, p^2.q, p.q^2$ *e* $p^2.q^2$; *se* $n = 1$ *o número de divisores é 4:* $1, p, q$ *e* $p.q$.

441 — Diga o que é um sistema de equações; defina solução. Resolva o seguinte problema: determinar p, q, r de modo que a função $y = x^3 + px^2 + qx + r$ tome para $x = 0, 1, 2$ os valores 3, 7, 19, respectivamente.

R: $\begin{cases} r = 3 \\ p + q + r = 6 \\ 4p + 2q + r = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \\ r = 3. \end{cases}$

442 — Determinar todos os sistemas de três números tais que: o produto dos dois primeiros seja igual ao terceiro, o produto do primeiro pelo terceiro seja quatro vezes o segundo e o produto do segundo pelo terceiro seja nove vezes o primeiro. R: $\begin{cases} xy = z \\ xz = 4y \\ yz = 9x \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} xy = z \\ y(x^2-4)=0 \\ x(y^2-9)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases}$.

443 — Dado um triângulo equilátero de lado l determinar a que distância a contar de um vértice se deve tirar uma paralela à base oposta de modo que as duas figuras obtidas tenham a mesma área. R: $x = \frac{\sqrt{6}}{4} l$.

444 - De um trapézio rectângulo conhecem-se as bases b e B e sabe-se que dos dois ângulos internos não rectos um é duplo do outro. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução do trapézio em tôrno da sua base maior. R: $V = \pi (B-b)^2 (B+2b)$.

445 — Sabendo que x é um ângulo do 3.º quadrante tal que $\cos x = -\frac{2}{3}$ calcular o valor numérico de $A = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$.
R: $\cos x = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec x = -\frac{3}{2}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $A = -\frac{5+3\sqrt{5}}{30} = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{5}}{10}$.

I. S. C. E. F. — Exercícios de revisão

446 — Torne calculável por logaritmos a expressão $1 + \operatorname{sen} a + \cos a$. R: $1 + \operatorname{sen} a + \cos a = 1 + \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2} \cos\frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$.

447 — Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas duma circunferência Γ que passam por um ponto P interior a Γ. R: *O lugar geométrico é a circunferência de diâmetro* PC *(*C *centro de* Γ*) a qual se reduz ao centro* C *se* P *coïncidir com êste.*

448 — Três esferas Γ, Γ' e Γ'' de centros O, O' e O'' são tangentes exteriormente 2 a 2. Seja π um plano tangente às três esferas e sejam A, A' e A'' os pontos de tangência. ¿A que condição devem satisfazer os raios das 3 esferas para que o diedro $A'AOA''$ seja recto? R: *Por* Γ, Γ' *e* Γ'' *serem tangentes ao plano* π, *o rectilíneo do diedro* $A'AOA''$ *é o ângulo* $A'AA''$. *Êste será recto se* $\overline{A'A''}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AA''}^2$. *Tem-se* $\overline{AA'}^2 = (r+r')^2 - (r-r')^2 = 4rr'$, $\overline{AA''}^2 = (r+r'')^2 - (r-r'')^2 = 4rr''$ *e* $\overline{A'A''}^2 = (r'+r'')^2 - (r'-r'')^2 = 4r'r''$. *Logo, o diedro será recto se* $r'r'' = rr' + rr''$.

As soluções dos exercícios 440 a 448 foram-nos cedidas pelo assistente Dr. Augusto Sá da Costa.

I.S.T. — Ponto modêlo (Diário do Govêrno—2.ª sér.—14-6-1940)

449 — Duas cidades, A e B, estão ligadas por uma estrada com 50 quilómetros de comprimento. No mesmo instante partem de A para B dois automóveis cujas velocidades estão entre si como 1 : 2 e de B para A outro automóvel com a velocidade de 60 quilómetros à hora. Êste último cruza com os outros dois e entre os dois cruzamentos há um intervalo de oito minutos e meio. Admitindo que os movimentos são uniformes, ¿quais são as velocidades dos dois primeiros automóveis? R: *Sejam* x *e* y *os números que exprimem as velocidades dos dois primeiros automóveis em quilómetros por minuto. Represente-se por* t *o intervalo de tempo, em minutos, decorrido desde o instante da partida até ao instante do primeiro encontro e note-se que* t *representa ainda o número de quilómetros que até êste último instante o terceiro automóvel percorre. Tem-se.* $y = 2x$, $t = 50 - 2xt$ *e* $t + 8{,}5 = 50 - x(t + 8{,}5)$, *donde, eliminando* t *entre as duas últimas equações:* $17x^2 - 24{,}5x + 8{,}5 = 0$. *Há duas soluções para o problema, a saber:*

$$x_1 = \frac{73}{85},\ y_1 = \frac{146}{85} \quad e \quad x_2 = \frac{99}{170},\ y_2 = \frac{99}{85}.$$

H. R.

450 — Resolver gràficamente a equação $\sqrt{2}\, x^2 + x - 2 = 0$.

451 — Dadas as equações

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{1-a^2}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha = 2\beta$$

deduzir a relação entre a e b. R: *Eliminando* α *e* β *obtêm-se fàcilmente a relação pedida:* $128b^8 - 256b^6 + 160b^4 - 32b^2 - a^2 + 1 = 0$.

H. R.

452 — Numa circunferência de raio R inscreve-se um triângulo isósceles cuja base é igual a metade da altura. Calcular a área do triângulo e o comprimento dos três arcos em que a circunferência fica dividida. R: *Se se representar por* x *a distância do centro da circunferência à base do triângulo deverá ser, como fàcilmente se verifica,* $17x^2 + 2Rx - 15R^2 = 0$ *donde* $x = \frac{15}{17} R$. *A área é pois* $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{15}{17}R + R\right)\frac{1}{2}\left(\frac{15}{17}R + R\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{32}{17}\right)^2 R^2 = \frac{256}{289} R^2$. *O comprimento do arco menor é* $R \operatorname{arc\,sen} \frac{15 \times 16}{17^2}$ *exprimindo-se êste arco (do 1.º quadrante), em radianos. Os comprimentos dos outros dois arcos são iguais a metade da diferença entre* $2\pi R$ *e o arco anteriormente determinado.*

H. R.

453 — São dados dois segmentos de recta de comprimentos a e $2a$, tendo uma extremidade comum onde formam um ângulo de 120º. Traçada a bissectriz dêste ângulo, determinar a distancia a que ela passa do ponto eqüidistante dos extremos dos segmentos. R: *O ponto eqüidistante dos extremos dos segmentos é o centro da circunferência de raio* R *circunscrita ao triângulo de que os segmentos são dois lados. O terceiro lado dêste triângulo é o lado do triângulo equilátero inscrito naquela circunferência e é, pois* $R\sqrt{3}$. *Daqui resulta que é* $R = \sqrt{\frac{5a^2 + 2a}{3}}$. *Ora a distância pedida,* x, *é um cateto do triângulo rectângulo cujo vértice opôsto é o terceiro vértice daquêle triângulo equilátero inscrito e de ângulo neste último vértice igual a* 10º. *Portanto,* $x = \sqrt{\frac{5a^2 + 2a}{3}} \operatorname{sen} 10º$.

H. R.

454 — Calcular o volume, a área e o diedro do octaedro regular de aresta a. R: *O volume do octaedro é* $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$, *a área é* $2a^2\sqrt{3}$ *e o diedro é* $2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$ *com* $0 < \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} < \pi$.

H. R.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Exame de freqüência, 1940

455 — Se $\lim\limits_{n=\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A$ è $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{x_n} = A$, $x_n > 0$; calcular $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}$.

456 — Dados os números reais $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ tais que sejam positivas as diferenças $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $\cdots$, $a_{2n-1} - a_{2n}$, mostrar que à equação $f(x) = (x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n-1}) + b(x-a_2)\cdots(x-a_{2n}) = 0$, onde é $b > 0$, tem todas as raízes reais e desiguais.

457 — Calcular pelo binómio de Newton com 3 casas decimais exactas o valor de $\sqrt[5]{34}$.

458 — Se as raizes da equação $f(x) = 0$ são todas reais e diferentes de zero, mostrar que 3 coeficientes consecutivos quaisquer verificam sempre a condição $a_m^2 - a_{m-1} \cdot a_{m+1} > 0$.

F. C. L. — I.° exame de freqüência, Fev. 1940

459 — Reduza à forma $a+bi$ $3(\cos 225^\circ - i \operatorname{sen} 225^\circ) \times \frac{2}{3}(-\cos 120^\circ - i \operatorname{sen} 120^\circ) \times \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. R: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

460 — Determine os máximos e mínimos da função $y = \frac{3x^2 - a^2}{(a^2+x^2)^3}$. R: máx. $(2a^2)^{-2}$ *para* $x = \pm a$, mín. $-a^{-4}$ *para* $x = 0$.

461 — Determine a derivada em ordem a x da função y definida pela equação $\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2 - \sqrt{xy}} - \log \sec \sqrt[3]{x^2+y^2} = 0$.

462 — Reduza à forma $a+bi$ um dos valores de $(3-5i)^3 - (\sqrt{3}-i)^{3/2}$. R: $-196-12i$ *ou* $200-8i$.

463 — Determine $L = \lim\limits_{x=\infty} \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^x$. R: $L = e$.

464 — Determine, aplicando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 1.ª ordem da função $y = \operatorname{sen} x \cdot \log \sqrt{x^2-1}$.

465 — Resolva pelo método das raízes primitivas a equação $x^{12} - 1 = 0$. R: $\pm 1, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

466 — Calcúle os 3 primeiros termos não nulos do desenvolvimento da função $y = e^{\cos x}$ pela fórmula de Mac Laurin. R: $y = e - \frac{x^2}{2} e + \frac{x^4}{6} e + \cdots$.

467 — Determine a derivada em ordem a x da função y definida pela equação $a^{\cos xy} - \operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg} \log \sqrt[4]{(\cos x)^{\operatorname{sen} y}}\right] = 0$.

468 — Resolva, pelo método trigonométrico, a equação $x^6 + 4096 = 0$. R: $\pm 4i$, $\pm 2\sqrt{3} \pm 2i$.

469 — Determine $L = \lim\limits_{x=0} \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1}{x+1} \right|^{\frac{1}{x}}$. R: $L = 1$.

470 — Determine, aplicando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 3.ª ordem da função $y = e^{\cos x} \cdot \sqrt{x}$.

471 — Resolva a equação $x^8 - 6561 = 0$. R: ± 3, $\pm 3i$, $\pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} i$.

472 — Determine os máximos e mínimos da função $y = \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$. R: máx. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *para* $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, mín. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *para* $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

473 — Determine a derivada parcial em ordem a y da função $z = \frac{y^5 \cdot \operatorname{arc\,sen} \log (x^y - y^{\sqrt{x}})}{\operatorname{cosec} \sqrt{y-x}}$.

474 — Reduza $\frac{\cos 45^\circ - i \operatorname{sen} 45^\circ}{3(-\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)} - (2-i)^3$ à forma $a+bi$. R: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-24}{2} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-132}{2}$.

475 — Calcule os 3 primeiros termos não nulos do desenvolvimento da função $y = e^x \cdot \sec x$ pela fórmula de Mac Laurin R: $y = 1 + x + x^2 + \cdots$.

476 — Determine a derivada de 1.ª ordem da função $y = (x+1)^x \cdot \log \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{a^x}}{\sqrt{x^5 - \sqrt{x}}}$.

Os exercícios 459 a 476 e soluções respectivas foram-nos cedidos pelo assistente Dr. J. Pais Morais.

F. C. L. — Alguns exercícios do curso

477 — Derive a função $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ e explique o resultado. R: *Supõe-se que* $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ *representa o valor aritmético do radical. A derivação conduz à expressão*

$$y' = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} = \varepsilon \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \varepsilon = +1 \ \textit{para} \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi & (1) \\ \varepsilon = -1 \ \textit{para} \quad (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi. & (2) \end{cases}$$

Justificação do resultado simples obtido: *Sabe-se que* $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \varepsilon \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. *Temos pois* $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\varepsilon \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.

No caso (1), $y = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + n\pi \quad y' = \frac{1}{2}$

No caso (2), $y = \operatorname{arc\,tg}\left(-\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = (k+1)\pi - \frac{x}{2} + n\pi \quad y' = -\frac{1}{2}$.

478 — Sabe-se que a função $f(x)$ da variável real x, definida, contínua e admitindo derivada no intervalo, $(0, \infty)$ satisfaz neste intervalo à condição (1) $f(xy) = f(x) f(y)$. Prove que (2) $y f'(y) f(x) = x f'(x) f(y)$. Deduza de (2) a expressão mais geral das funções satisfazendo a (1). R: *Como* x *e* y *são dois valores quaisquer do intervalo, podemos considerar em* (1) x *e* y *como variáveis independentes uma da outra. Derivando ambos os membros de* (1) *em ordem a* x *e em ordem a* y *obtemos respectivamente* $y \frac{df(xy)}{d(xy)} = f'(x) f(y)$, $x \frac{df(xy)}{d(xy)} = f'(y) f(x)$ *donde* $x f'(x) f(y) = y f'(y) f(x)$. *Por conseguinte, no intervalo citado,* $x \frac{f'(x)}{f(x)} = y \frac{f'(y)}{f(y)} = \text{const.} = k$. *Podemos escrever* $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x} = \frac{kx^{k-1}}{x^k} = \frac{(x^k)'}{x^k}$. *Esta igualdade mostra-nos que as funções* $f(x)$ *e* x^k *têm derivadas logarítmicas iguais* *no intervalo considerado. O seu cociente é pois constante:* $\frac{f(x)}{x^k} = C$ $f(x) = Cx^k$. *Mas, atendendo a* (1), *deve ter-se* $C(xy)^k = Cx^k Cy^k$ *ou* $C(xy)^k = C^2 (xy)^k$ *donde* $C = 1$. *A função* $f(x)$ *é pois da forma* $f(x) = x^k$.

479 — Sabe-se que a função $f(x)$, definida, contínua e admitindo derivada no intervalo $(-\infty, +\infty)$, satisfaz neste intervalo à condição (1) $f(x+y) = f(x) f(y)$. Prove que (2) $f(y) f'(x) = f(x) f'(y)$ Deduza de (2) a expressão mais geral das funções satisfazendo a (1). R: *Derivando ambos os membros de* (1) *em ordem a* x *e a* y *obtemos respectivamente* $\frac{df(x+y)}{d(x+y)} = f'(x) f(y)$, $\frac{df(x+y)}{d(x+y)} = f(x) f'(y)$ *donde* (2) $f'(x) f(y) = f'(y) f(x)$. *Por conseguinte* (3) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)} = k$. *Notemos que a função* $f(x)$ *é positiva, pois que, fazendo em* (1) $x = y = \frac{z}{2}$ *obtemos* $f(z) = \left[f\left(\frac{z}{2}\right) \right]^2$. *A função* $\log f(x)$ *é pois definida no intervalo* $(-\infty, +\infty)$. *Como* (3) *pode escrever-se* $\frac{d}{dx} \log f(x) = k$ *concluimos que* $\log f(x) = kx + \log C$ *onde* $\log C$ *representa uma constante arbitrária* $(C > 0)$. *Portanto* $f(x) = Ce^{kx}$. *A condição* (1) *mostra-nos que* $C = 1$. *Logo* $f(x) = e^{kx}$.

480 — Sabe-se que a função $f(x)$, definida, contínua e admitindo derivada no intervalo $(0, +\infty)$, satisfaz neste intervalo à condição (1) $f(xy) = f(x) + f(y)$. *Prove que* (2) $xf'(x) = yf'(y)$. Deduza de (2) a expressão mais geral das funções satisfazendo a (1). R: $f(x) = k \log x$. *Processo de resolução análogo.*

Os exercícios 477 a 480 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo assistente Dr. Vergilio S. Barroso.

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, 19 de Fev. de 1940

481 — Resolver a equação $\left(z^2 + \frac{i\sqrt{2}}{z^2}\right)\left(z^2 - \frac{i\sqrt{2}}{z^2}\right) = 2i$.

R: *A equação pode escrever-se:* $z^4 - \frac{2i^2}{z^4} = 2i$ *ou* $z^8 - 2iz^4 + 2 = 0$ *donde* $z^4 = i \pm \sqrt{3}\, i = (1 \pm \sqrt{3})\, i$. *As 8 raizes da equação são, pois, os 4 valores de* $\sqrt[4]{(1+\sqrt{3})i}$ *e os 4 valores de* $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})i}$, *que fàcilmente se determinam.*

M. Z.

482 — Estudar e discutir o sistema $\begin{cases} x + a(y+z) = 0 \\ y + a(x+z) = 0 \\ z + a(x+y) = 0. \end{cases}$

R: *O determinante dos coeficientes é*

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)^2 (2a+1)$$

e tem-se $\Delta(a) \neq 0$ *para* $a \neq 1, -\frac{1}{2}$. *O sistema é então determinado (e admite só a solução* $x = y = z = 0$*) para qualquer valor de* a *diferente de* 1 *ou* $-\frac{1}{2}$, *e representa 3 planos distintos passando pela origem.*

O caso $a = 1$ *conduz a uma indeterminação de grau* 2. *Com efeito, neste caso as 3 equações não são distintas, e, conseqüentemente os 3 planos são coïncidentes.*

O caso $a = -\frac{1}{2}$ *conduz a uma indeterminação de grau* 1. *Com efeito, pode tomar-se para determinante principal*

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$ *e para sistema de equações principais*

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}(y+z) = 0 \\ y - \frac{1}{2}(x+z) = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad donde \quad \frac{x}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \rho \quad ou \quad \begin{cases} x = 3\rho \\ y = 3\rho, \\ z = 3\rho \end{cases}$$

equações paramétricas da recta, eixo do feixe a que pertencem os 3 planos.

M. Z.

483 — Determine um polinómio de grau não superior a 4 que represente apròximadamente a função $y = \operatorname{sen} x$ no intervalo $(-\pi, +\pi)$.

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, 21 de Fev. de 1940

484 — Estudar o sistema $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \beta x + \gamma y + \alpha z = 0 \\ \gamma x + \alpha y + \beta z = 0 \end{cases}$ onde α, β, γ são as raizes cúbicas da unidade. R: *Designando por* α, β *e* γ *as raizes cúbicas da unidade, tem-se:* $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3 = 1$, $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha^2 = \beta\gamma$, $\beta^2 = \gamma\alpha$ *e* $\gamma^2 = \alpha\beta$ *(basta notar que as 3 raizes têm módulo* 1 *e argumentos* 0°, 120°, *e* 240°*). Em vista disto são nulos o determinante de 3.ª ordem e todos os de 2.ª ordem que podem formar-se a partir da matriz dos coeficientes. O sistema é pois indeterminado e admite* ∞^2 *soluções:*

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} y - \frac{\gamma}{\alpha} z = -\frac{\gamma}{\beta} y - \frac{\alpha}{\beta} z = -\frac{\alpha}{\gamma} y - \frac{\beta}{\gamma} z.$$

M. Z.

485 — Uma função de expressão analítica desconhecida toma para $x = -2, -1, 0, 1, 2$, respectivamente os valores $13, -2, -3, -2, 13$. Calcular os valores aproximados de x para os quais a função toma o valor 4.

I. S. T. — Alguns exercícios do 1.º exame de freqüência, 1940

486 — Calcular a e b de modo que $1-i$ seja raiz da equação $x^9 + ax^7 + b = 0$. R: *Deverá ser* $(1-i)^9 + a(1-i)^7 + b \equiv 0$. *Atendendo a que* $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$, *tem-se* $(1-i)^7 = 2^{7/2}\left(\cos\frac{49\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{49\pi}{4}\right) = 8 + 8i$ *e* $(1-i)^9 = 2^{9/2}\left(\cos\frac{63\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{63\pi}{4}\right) = -16 + 16i$ *e portanto* $-16 + 8a + b + (16 + 8a)\, i = 0$ *donde* $\begin{cases} -16 + 8a + b = 0 \\ 16 + 8a = 0 \end{cases}$ *e* $a = -2$, $b = 32$.

M. Z.

487 — Calcular n de modo que $(\sqrt{3} - i)^n$ seja real e positivo. R: *Como* $\sqrt{3} - i = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$ *tem-se* $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n (\cos n\,330^\circ + i \operatorname{sen} n\,330^\circ)$ *e os valores de* n *que correspondem a valores reais e positivos são tais que* $n\,330^\circ = k\,360^\circ$ *ou* $n = \frac{k\,360^\circ}{330^\circ} = \frac{k\,12}{11}$, *e portanto terá de ser* $n = \dot{1}\dot{2}$.

M. Z.

488 — Mostrar que, sendo z um complexo qualquer, toda a fracção $\frac{a + bi}{c + di}$ se pode escrever sob a forma $A + Bz$ por uma única maneira.

489 — Mostrar que $y=(c_1+c_2\,x)\cos nx+(c_3+c_4\,x)\,\mathrm{sen}\,nx$ é solução da equação $y^{IV}+2\,n^2\,y''+n^4\,y=0$.

490 — Calcular o verdadeiro valor de $\dfrac{\mathrm{tg}\,(a+x)-\mathrm{tg}\,(a-x)}{\mathrm{arc\,tg}\,(a+x)-\mathrm{arc\,tg}\,(a-x)}$ para $x=0$.

491 — Calcular o verdadeiro valor de $\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x\,(e^{\pi x}+1)}$ para $x=0$.

492 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x)=\frac{(4-x)\sqrt{1-x^2}}{(2-x)^2}.$$

493 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x)=\mathrm{tg}\,x\,.\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

494 — AB é um segmento rectilínio vertical; AC outro segmento rectilíneo horizontal (dirigido para leste); BD um terceiro segmento rectilíneo horizontal (dirigido para o norte). Marquem-se distâncias iguais $\overline{CP}$ e $\overline{BQ}$ ao longo de CA e BD respectivamente. Determinar o mínimo comprimento de PQ.

495 — Desenhe-se uma semi-circunferência de centro O e diâmetro base AB. Por A e O tirem-se duas paralelas AP e OQ encontrando a circunferência respectivamente em P e Q. Determinar a direcção dessas paralelas de modo que a área $APQOA$ seja máxima.

496 — Considere-se num plano vertical uma semi-circunferência tendo por base o diâmetro horizontal $\overline{AB}$. Seja $\overline{PQ}$ uma corda paralela a $\overline{AB}$. Sôbre $\overline{PQ}$ como diâmetro base, considere-se outra semi-circunferência. Determinar a posição de $\overline{PQ}$, para a qual o ponto mais alto da segunda circunferência está a uma distância máxima de $\overline{AB}$. R: *Seja* M *o ponto mais alto,* $\overline{\mathrm{AB}}=2\mathrm{R}$, O *e* O' *os pontos médios de* $\overline{\mathrm{AB}}$ *e* $\overline{\mathrm{PQ}}$, *centros das duas circunferências, e* α *o ângulo* $\widehat{\mathrm{BOQ}}$. *A distância que se pretende máxima é* $\overline{\mathrm{OM}}$ *e tem-se* $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{OO'}}+\overline{\mathrm{O'M}}=\overline{\mathrm{OO'}}+\overline{\mathrm{O'Q}}=\mathrm{R}\,(\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha)$. *Basta pois procurar* α *de modo que seja máxima a função* $\mathrm{sen}\,\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ *ou seja* $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

M. Z.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 1940

497 — Determine o intervalo de convergência da série $\dfrac{2x^2}{2^2-1}+\dfrac{2^2\,x^3}{3^2-1}+\dfrac{2^3\,x^4}{4^2-1}+\dfrac{2^4\,x^5}{5^2-1}+\cdots$ e o caracter da série nos extremos dêsse intervalo.

498 — Definidas as funções u e v de x pelo sistema $uv-e^x=0$, $u^v-\log x=0$ calcule $\dfrac{d^2\,u}{dx^2}$.

499 — Dada a equação $x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{d^2\,y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$ substitua a função y de x pela função u de t sabendo que $x=\log u$ e $y=\log t$.

500 — Determine o caracter do produto infinito cujos termos são $u_1=\dfrac{1^2+2}{1^2+1}$, $u_2=\dfrac{2^2+2}{2^2+1}$, $u_3=\dfrac{3^2+2}{3^2+1}$, $\cdots$.

501 — Dada a função u de x e y definida por $u=v^2+w^2-vw$ em que $v=e^x$ e $w=e^{xy}$, calcule $\dfrac{\partial^2\,u}{\partial x\partial y}$.

502 — Dada a equação $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ substitua as variáveis independentes x e y pela variável, t relacionadas com estas pela expressão $x^2-y^2=e^{2t}$.

503 — Desenvolva em fracção contínua a raiz positiva da equação $2x^2-4x-1=0$ e calcule, com um êrro inferior a uma décima milésima, o valor dessa raiz.

504 — Definidas as funções u e v de x e y pelo sistema $u^v+x^2=0$, $\log uv-2y=0$ calcule $\dfrac{\partial^2\,u}{\partial x\partial y}$.

505 — Dada a equação $(1-x^2)^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2x\,(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1=0$ substitua a variável independente x pela variável t relacionada com ela pela expressão $x=\mathrm{sen}\,t$.

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, 16 de Fev. de 1940

506 — Determinar a relação que liga A, B e C de modo que a primitiva de $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(x-2)^2\,(x-3)^2}$ seja algébrica. R: *Supondo* A, B *e* C *satisfazendo à relação procurada ter-se-á* $\displaystyle\int\frac{\mathrm{Ax^2+Bx+C}}{\mathrm{(x-2)^2\,(x-3)^2}}\,dx=\frac{\mathrm{ax+b}}{\mathrm{(x-2)(x-3)}}+\mathrm{const.}$, *e derivando.* $\dfrac{\mathrm{Ax^2+Bx+C}}{\mathrm{(x-2)^2(x-3)^2}}=\dfrac{\mathrm{a\,(x^2-5x+6)-(ax+b)\,(2x-5)}}{\mathrm{(x-2)^2\,(x-3)^2}}$ *donde* $\mathrm{Ax^2+Bx+C=-ax^2-2bx+6a+5b}$. *Identificando tem-se:* $\mathrm{A=-a}$, $\mathrm{B=-2b}$, $\mathrm{C=6a+5b}$, *donde por eliminação de* a *e* b: $\mathrm{C=-6A-\frac{5}{2}B}$ *ou* $\mathrm{12A+5B+2C=0}$.

M. Z.

507 — O integral impróprio $\displaystyle\int_0^\infty x^{-1}\,\mathrm{sen}\,(x^3-\alpha x)\,dx$ será convergente?

508 — A função $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^\pi\log\,(3x+4\alpha)\,dx$ terá máximos e mínimos? R: *A função integranda* $\mathrm{f\,(x,\alpha)=\log\,(3x+4\alpha)}$ *admite derivada em ordem a* α, $\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial\alpha}=\dfrac{4}{\mathrm{3x+4\alpha}}$, *contínua na região definida por* $0\leq\mathrm{x}\leq\pi$, $\alpha>0$. *Tem-se então* $\mathrm{F'}(\alpha)=\displaystyle\int_0^\pi\frac{4}{\mathrm{3x+4\alpha}}\,dx=\frac{4}{3}\log\frac{3\pi+4\alpha}{4\alpha}$. *A equação* $\mathrm{F'}(\alpha)=0$ *equivale a* $\dfrac{3\pi+4\alpha}{4\alpha}=1$ *que não tem solução finita. A função* $\mathrm{F}(\alpha)$ *não admite pois máximos nem mínimos.*

M. Z.

I. S. C. E. F. — 1.º exame de freqüência, 23 de Fev. de 1940

509 — Calcular $\displaystyle\int_0^\pi\cos x\,.\,\cos 2x\,.\,\cos 3x\,.\,dx$. R: *Notando que* $\mathrm{\cos x\,.\,\cos 2x\,.\,\cos 3x}=\frac{1}{2}\,\mathrm{(\cos 3x+\cos x)\,\cos 3x}=\frac{1}{4}\,\mathrm{(1+\cos 6x+}$

$\frac{1}{4}\cos 4x + \cos 2x)$, *tem-se* $\int_0^{\pi}\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x \,.\, dx = \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$.

M. Z.

510 — Integrar por séries $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{1}{2}}}$. R: *Tem-se* $(1-x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \,.\, 3}{2^2 \, 2!}x^6 + \cdots + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \cdots \,.\, (2n-1)}{2^n \,.\, n!}x^{3n} + \cdots$, *série uniformemente convergente para* $|x| < 1$. *É legítimo usar o método de integração por séries visto tratar-se do intervalo* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *e vem:* $\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}dx = \left[x + \frac{1}{2 \,.\, 4}x^4 + \frac{1 \,.\, 3}{2^2 \,.\, 2! \,.\, 7}x^7 + \cdots + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \cdots \,.\, (2n-1)}{2^n \,.\, n! \,.\, (3n+1)}x^{3n+1} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5 \,.\, 4} + \frac{1 \,.\, 3}{2^9 \,.\, 2! \,.\, 7} + \cdots + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \cdots \,.\, (2n-1)}{2^{4n+1} \,.\, n! \,.\, (3n+1)} + \cdots$.

M. Z.

511 — Estudar a função $F(\alpha) = \int_0^{\alpha}\alpha \log(\alpha x)\, dx$.

I. S. T. — 1.º exame de freqüência, 1940

512 — Calcular o integral $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6}}dx$.

513 — Averiguar a convergência ou divergência do integral $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{1-e^x}\right)\frac{dx}{x}$.

514 — Sendo $u_n = \frac{2n^2 x}{(1+n^2x^2)\log(n+1)}$ para qualquer valor inteiro de n, e $v_n = u_n - u_{n+1}$, averiguar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é integrável têrmo a têrmo no intervalo $(0, x)$.

515 — Calcular o integral $\int \frac{x^{-1/2}\,dx}{(1-x^p)(2x^p-1)^{1/2p}}$ (p inteiro).

516 — Calcular o integral $\int \frac{b^3\,dx}{x^6 - a^6}$.

517 — Averiguar a convergência ou divergência do integral $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2(\operatorname{sen} x)^{3/2}}$.

518 — Sendo $u_n = nxe^{-nx^2}$, para qualquer valor inteiro de n, e $v_n = u_n - u_{n-1}$ verificar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ não é integrável têrmo a têrmo, no intervalo $(0, x)$.

519 — Calcular o integral $\int x^{\lambda} \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{k}\,dx$, sendo λ e k constantes.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Exame final, Junho de 1939

520 — Uma circunferência rola sem escorregar sôbre uma recta OX. Determinar as trajectórias fixa e móvel e a velocidade do centro instantâneo de rotação, sabendo-se que a velocidade de rotação de circunferência é w e o seu raio é r.
R: *Trajectória polar fixa*: *recta* OX; *trajectória polar móvel*: *circunferência dada*; *velocidade do centro instantâneo*: $v = wr$.

521 — Determinar o momento de inércia e o raio de giração de um triângulo isósceles rectângulo em relação à sua hipotenusa. Sabe-se que o comprimento desta é $2a$.

R: $I = \frac{Ma^2}{6}$; $K = \frac{a}{\sqrt{6}}$ (M = *massa do triângulo*).

Os exercícios 520 e 521 e soluções respéctivas foram-nos cedidos pelo Dr. Jorge César Oom.

I. S. T. — 1.º exame de freqüência, 1940

522 — Determinar as geodésicas da superfície $z = x^2 + y$.

523 — Escrever o desenvolvimento formal da segunda derivada covariante $X^{\,k}_{i/pq}$.

524 — Determinar o vector V_α, as direcções unidas e os invariantes da homografia $\alpha = \begin{pmatrix} 3J-2K & I+3K & J-2I \\ I & J & K \end{pmatrix}$.

525 — Transformar o sistema de funções $\begin{cases} \varphi_1(x) = x \\ \varphi_2(x) = x^2 \\ \varphi_3(x) = 3x+2 \end{cases}$ num sistema ortonormal equivalente.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — 1.º exame de freqüência, 2 de Fev. de 1940

526 — Uma urna tem a seguinte composição: 3 esferas brancas, 2 esferas pretas, 5 esferas vermelhas. Fazem-se 5 extracções, com reposição da esfera saída. Calcule as probabilidades de: *a)* saírem 2 esferas brancas e 2 esferas vermelhas; *b)* o número de esferas saídas ser quando muito 3.

R: *a)* $P = \frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}135$. *b)* $P = 0{,}8125$.

M. Z.

527 — Determine k de modo que a variável $x_i = i$ a que se associa a probabilidade $p_i = \frac{ki}{1+k}$ possa ser considerada como variável casual de ordem 4 ($i = 1, 2, 3, 4$). Determinado k, calcule o valor médio, o valor quadrático médio e o desvio quadrático médio desta variável. R: $k = \frac{1}{9}$, $M(x) = 3$, $\sigma = \sqrt{M(x^2)} = \sqrt{10}$, $\mu = 1$.

M. Z.

F. C. L. — 1.º exame de frequência, 9 de Fev. de 1940

528 — Tiram-se 6 cartas dum baralho de 52. Determine a probabilidade de saída de 2 damas e 1 ás (não interessa o naipe).

529 — 4 urnas têm as seguintes composições: U_1 (3 esf. br. e 2 esf. pr.), U_2 (1 esf. br. e 4 esf. pr.), U_3 (3 esf. br. e 3 esf. pr.) e U_4 (5 esf. br. e 3 esf. pr.). Tira-se uma esfera de cada urna. Calcule as probabilidades seguintes: *a)* saírem pelo menos 2 esferas brancas; *b)* o número de esferas saídas não exceder 3.

COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE GEOMETRIA ANALÍTICA

F. C. C. — Exame final, 1939

530 — Achar a função pertencente a R que permuta circularmente as raízes de $f(z)=(z^2-2)(z^2-8)$.

531 — Estudar a equação recíproca irredutível de grau $2n$ com G_{2n} por grupo de Galois.

532 — Achar a função $Z=\chi(z)$ que permuta circularmente as raízes da equação $z^{100}+z^{75}+z^{50}+z^{25}+1=0$.

533 — Achar a estrutura do grupo de Galois de $z^5-\sqrt{5}=0$ no domínio de racionalidade desta equação.

F. C. C. — Exame de freqüência, Maio de 1940

534 — Verificar que

$$1,\quad u=(12)(34),\quad v=(13)(24)\quad \text{e}\quad w=(14)(23)$$

constituem um grupo G_4, e que os 3 grupos G_2 são todos invariantes.

535 — Achar todos os divisores de um grupo circular de ordem 12 e indicar os respectivos períodos.

536 — Mostrar que todo o grupo constituído por potências de uma substituïção é necessàriamente circular.

537 — Verificar que

$$s_1=(123)(456),\ s_2=(132)(456),\ s_3=(14)(25)(36),$$
$$s_4=s_3\,s_1=(153426),\ s_5=s_3\,s_2=(162435)$$

formam com a identidade um grupo G_6. Indicar se é *transitivo* e *imprimitivo*.

F. C. L. — Pontos de exame de 1940

538 — Designando α um número inteiro e S uma substituïção de n elementos de período β mostre que S^{α} e S têm o mesmo período se α e β são primos entre si.

539 — É dado um triângulo rectângulo ABC ($\widehat{A}=90^o$). Os vértices B e C deslocam-se sôbre duas rectas perpendiculares. Determine o lugar geométrico de A.

540 — Mostre que o conjunto dos valores de $\sqrt[n]{1}$ forma um grupo tomando para lei de composição o produto de complexos.

MECÂNICA CELESTE

F. C. P. (1938)

541 — *Sôbre a cinemática relativista.*

Consideremos um sistema material cuja configuração no referencial $R(x, y, z, t)$ é um plano π_t animado de um movimento de translação de velocidade $\mathbf{u}$. E suponhamos que o referencial $\bar{R}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ está relacionado com o anterior R, mediante as fórmulas de Lorentz

$$L.\ \left(\bar{x}=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \bar{y}=y,\ \bar{z}=z,\ \bar{t}=\frac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\quad \beta=\frac{v}{c}\right).$$

Determinar a condição para que a configuração, do sistema material neste referencial $\bar{R}$ seja anàlogamente um plano $\pi_{\bar{t}}$, animado de uma translação $\bar{\mathbf{u}}$.

Nota. — Configuração de um sistema material S *na data* t *de um referencial* R *é o lugar geométrico das posições (simultâneas), na data* t, *dos diferentes pontos materiais de* S.

Ex. sugerido pelo *problema de E. Esclagon* in *La Notion de Temps. pág. 45 a 48.*

R. L. G.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — 1.º Exame de freqüência, 10 de Fev. de 1940

542 — Sejam $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ as *matrizes associadas* (1) (E. Cartan) aos vectores reais, x, y, z cujas coordenadas normais são (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3).

Calcular os dois sistemas de matrizes

$$\text{I}\ \begin{cases} A(x)\,A(y)+A(y)\,A(x) \\ A(y)\,A(z)+A(z)\,A(y) \\ A(z)\,A(x)+A(x)\,A(z) \end{cases}$$

$$\text{II}\ \begin{cases} A(x)\,A(y)-A(y)\,A(x) \\ A(y)\,A(z)-A(z)\,A(y) \\ A(z)\,A(x)-A(x)\,A(z) \end{cases}$$

Exprimir o sistema II em função das matrizes associadas a novos vectores.

A que condição geométrica devem satisfazer os vectores x, y, z para que as suas matrizes associadas sejam comutáveis entre si duas a duas? A condição será ainda a mesma no caso de as matrizes anticomutarem?

Que forma assumem os sistemas I e II na hipótese de x, y, z constituirem um terno orto-normado?

Essa forma será função do sentido do terno x, y, z?

Seja e_1 um vector fundamental de $A(x)$ e representemos por e_2 o vector $A(y)\,e_1$ ou $A(z)\,e_1$. Supondo ainda que x, y, z formam um terno orto-normado, e_1 e e_2 constituirão uma base?

Fazer a representação das três matrizes $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ na base e_1, e_2.

543 — Sejam $a_1, a_2 \cdots a_n$ n vectores reais e independentes de um espaço métrico E_n. E suponhamos que, aplicando-lhes o processo de ortogonalização de Schmidt, se obtêm os vectores $b_1, b_2, \cdots b_n$. Que relação de grandeza é que existe entre as normas dos dois vectores quaisquer de um mesmo índice?

Identificando $a_1, a_2, \cdots a_n$ com as linhas de uma matriz real A e recorrendo ao produto AA' demonstrar que $(\det. A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n}(a_i, a_i)$.

544 — Sejam $B_1, B_2, \cdots B_p$ p matrizes de 4.ª ordem que satisfazem às condições $B_i^2=-1$, $B_i\,B_k+B_k\,B_i=0$. Demonstrar que p não pode exceder o número 5: $p\leq 5$.

Indicação: Verificar que B_j transforma todo o vector fundamental de B_k $(k \neq j)$ em um vector que é também fundamental (de B_k). E aproveitar êste resultado para construir a base de representação das matrizes B_j $(j=1, 2, 3, \cdots p)$.

---

(1) $A(x)=\begin{Vmatrix} x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & -x_3 \end{Vmatrix}$

PROBLEMAS DIVERSOS

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Séries

545 — Achar o termo geral do desenvolvimento de $y=e^x \cos x$ em série inteira em x. R: y *é a parte real de* $z=e^x(\cos x+i \operatorname{sen} x)=e^{x(1+i)}$. *Ora,* $z=\sum \frac{x^n}{n!}(1+i)^n=\sum \frac{x^n}{n!}\left[1+ni+\frac{n(n-1)}{2}i^2+\cdots\right]$. *Será, pois,* $y=\sum\left[\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k\binom{n}{2k}\right]$, *designando por* 2p *o maior número par contido em* m.

546 — Demonstrar a convergência das séries $(S)\ 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$ e $(S')\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$, que são formadas pelos mesmos termos, e achar a relação que liga as respectivas somas. R: (S') *é evidentemente convergente. Como em* (S) *há dois termos positivos por cada têrmo negativo, se agruparmos os termos* 3 *a* 3, *o enésimo grupo será* $(n=1,2,\cdots)\ \frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$, *visto os primeiros* n *números pares serem* $2,\cdots 2n$, *e os primeiros* 2n *números ímpares serem* $1,\cdots 2n-1, 2n+1, \cdots 4n-1$. *Associando todos os termos positivos consecutivos, obtem-se a nova série* $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{8n-4}{(4n-1)(4n-3)}-\frac{1}{2n}+\cdots$ *que é alternada, de termos decrescentes e de limite nulo. Esta série é, pois, convergente e, portanto, também o é a proposta. Por outro lado,* $S_{3n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$, $S'_{4n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$, $S_{3n}-S'_{4n}=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\cdots+\left(\frac{1}{4n}-\frac{1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}S'_{2n}$; *logo,* $S=\frac{3}{2}S'$.

Funções contínuas e medida L

547 — Pode uma função contínua transformar um conjunto de medida nula num conjunto de medida positiva? Pode. R: *Sejam* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ *as equações de uma curva que enche o quadrado de vértices opostos* $(0,0)$ *e* $(1,1)$. *É mensurável o conjunto* (τ) *dos valores de* t *que fazem* $\varphi(t)=\xi$. *Ora, se todos êsses conjuntos* (τ) *tivessem medida positiva, seria possível com as medidas de alguns dêles exceder a medida do intervalo* $(0,1)$ *da curva, — o que é manifestamente absurdo. Logo, há conjuntos* (τ) *de medida nula que uma função contínua —* $y=\psi(t)$ *— transforma em* $(0,1)$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

548 — Mostrar que tôda a transformação L ortogonal, real, da 3.ª ordem e det. $=+1$, representa uma rotação.

O ângulo de rotação — θ — e os cosenos directores — c_1, c_2, c_3 — do respectivo eixo (de rotação) são dados pelas fórmulas $1+2\cos\theta=l_{11}+l_{22}+l_{33}$, $c_i^2=\frac{l_{ii}-\cos\theta}{1-\cos\theta}$. Exprimir l_{ij} — elemento geral de L — em função de θ e dos c_i. Deve dar: $l_{ij}=\cos\theta \cdot \delta_{ij}+(1-\cos\theta)\,c_i\,c_j+\operatorname{sen}\theta \cdot c_{ij}$.

c_{ij} — elemento geral da matriz hemi-simétrica

$$\left\|\begin{matrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

(Ex. proposto em Madelung — Die Mathematischen Hiefsmittel des Physikers (1936) — pág. 102, 103).

Indicação: calcular as constantes e os vectores fundamentais de L. R. L. G.

549 — Sendo

$$B=\left\|\begin{matrix} 1 & c_3 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & -c_2 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ -c_3 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & 1 & c_1 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ c_2 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & -c_1 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} & 1 \end{matrix}\right\|, \quad \sum_{i=1}^{3} c_i^2=1,$$

mostrar que $A=(B')^{-1}.B$ representa uma rotação em tôrno do eixo (c_1, c_2, c_3), de ângulo θ.

Indicação: escrever $B=1+C$, $C=-C'$, e calcular as constantes e vectores fundamentais de C. Deduzir depois as constantes e vectores fundamentais de A.

(Ex. proposto em Frazer, Duncan and Collar — Elementary Matrices — pág. 253.) R. L. G.

550 — Demonstrar que AB e BA têm as mesmas constantes fundamentais.

NOTA — *Turnbull and Aitken, em «An introduction to the theory of canonical matrices», pág. 181, (London, 1932) e Mac Duffee em «The theory of matrices», pág. 23, (Berlin, 1933) fazem a demonstração daquêle resultado, que Sylvester enunciou,* sem demonstração, *em 1883, no vol. 16 — Philos. Mag. Demonstra-se, porém, muito fàcilmente notando que* $(BA)Bx=\lambda Bx$ *quando* $ABx=\lambda x$, *e* $(AB)Ax=\mu Ax$ *quando* $BAx=\mu x$. *Isto para* λ *e* $\mu \neq 0$. *Para* λ *ou* $\mu=0$ *basta notar que, então,* $|AB|=|BA|=0$. R. L. G.

551 — Sejam $x(x_1, x_2, x_3)$ e $X(X_1, X_2, X_3)$ as coordenadas de um mesmo vector em dois ternos orto-normados (directos) τ e T. Supondo que as coordenadas e a posição relativa dos dois ternos são funções dum parâmetro t, exprimir $\frac{dX}{dt}\left(\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \frac{dX_3}{dt}\right)$ em função de x e $\frac{dx}{dt}$. Que aplicação pode fazer dêstes resultados à teoria do movimento relativo?

R. L. G.

552 — A soma da série constituída pelos inversos de tôdas as potências que têm por base e expoente um número inteiro superior à unidade é precisamente a unidade.

553 — Se cada uma das letras $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n, \cdots$ for capaz de assumir, independentemente das outras, uma infinidade numerável de valores distintos, o conjunto das sucessões $p_1, p_2, \cdots p_n, \cdots$ tem a potência do contínuo.

554 — Se cada uma das letras p_i for capaz de assumir, independentemente das outras, uma infinidade contínua de valores, o conjunto das sucessões (S) $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n, \cdots$ tem a potência do contínuo.

Os problemas números 545, 546 e 547 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo Prof. Doutor José Vicente Gonçalves bem como os problemas números 552, 553 e 554.

RESOLUÇÃO DUM PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 4

432 — Seja a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e seja P um dos vértices de um dos rectângulos que podem inscrever-se nela (estes constituem uma simples infinidade e os seus lados são, necessàriamente, paralelos aos eixos da elipse). As coordenadas do ponto P são, por exemplo, $(x, +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})$ e a área do rectângulo terá por medida $S=4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$.

Ora, S é máxima com $y=x^2(a^2-x^2)$ e tem-se, sucessivamente, $y'=2x(a^2-x^2)-2x^3=2a^2x-4x^3$, $y''=2a^2-12x^2$, $a^2x-2x^3=0 \rightarrow x(a^2-2x^2)=0 \rightarrow x=0$ e $x=\frac{\sqrt{2}a}{2}$; a primeira raiz corresponde a um mínimo de S e a segunda a um máximo, visto que $y''_{\frac{\sqrt{2}a}{2}}=-4a^2<0$.

Outra solução — A área do rectângulo de dimensões $2x$ e $2y$ tem por medida $S=4xy$. Mas (x, y) deverá ser um ponto da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Logo, as condições de estacionaridade da área S do rectângulo inscrito na elipse serão

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}a}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}b}{2}, \end{cases}$$

valores que correspondem, necessàriamente, ao máximo.

A. Sá da Costa

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Realizou-se a assembleia geral da Sociedade Portuguesa de Matemática, para aprovação dos estatutos e eleição dos corpos gerentes. A direcção ficou assim constituída: Presidente, prof. Pedro José da Cunha; vice-presidente, prof. Victor Hugo de Lemos; tesoureiro, dr. Manuel Zaluar Nunes; secretário geral, dr. António Monteiro; 1.º secretário, dr.ª Maria Pilar Ribeiro; 2.º secretário, dr. Augusto Sá da Costa. Também foi eleita a mesa da assembléia geral.

Para delegados à Associação para o Progresso das Ciências foram escolhidos o prof. Bento de Jesus Caraça e o prof. Francisco Leite Pinto.

A Sociedade Portuguesa de Matemática (S. P. M.) tem por objectivo cultivar e promover o estudo das Ciências Matemáticas, puras e aplicadas. Pode ser admitido como sócio ordinário qualquer indivíduo de nacionalidade portuguesa ou estrangeira. Os sócios residentes em Coimbra e no Pôrto poderão constituir núcleos de trabalho cientìficamente autónomos. Os socios residentes em qualquer cidade do território nacional poderão solicitar da direcção autorização para constituirem um núcleo da Sociedade nessa cidade.

Estão já inscritos mais de cem sócios, o que revela um acolhimento muito favorável da parte do público, para os objectivos que a Sociedade se propôs atingir.

RECTIFICAÇÕES

Por lapso no n.º 4 da «Gazeta de Matemática» atribui-se ao professor da Universidade do Pôrto, dr. A. Madureira e Sousa a resolução de «Um problema de Geometria Analítica», devida ao professor da mesma Universidade Dr. Ruy Luís Gomes. A presente rectificação foi-nos solicitada por carta que nos escreveu o professor Madureira e Sousa onde nos indicou também que encontrou o problema em: «Lezioni di Geometria Analitica» (5.ª ed., pág. 43) de Guido Castelnuovo, onde figura sem demonstração.

— A resposta correcta do n.º 379 é: m *deve satisfazer simultâneamente às desigualdades* $4^2-(m-1)^2<0$ e $m+1>0$ *donde se deduz* $m>3$. M. Z.

— Pedíamos aos nossos leitores o favor de assinalarem à redacção da «Gazeta de Matemática» todas as incorrecções que notem, ou dúvidas encontradas que tentaremos esclarecer.

ASSINATURAS

A partir dêste número, e devido às circunstâncias do momento, somos forçados, bem contra a nossa vontade, a aumentar o preço da «Gazeta» para 4$00 por número: conseqüentemente o preço das assinaturas aumenta e passa a ser de 15$00 por cada 4 números (1 ano). Os números especiais terão preço variável, função do número de páginas.