
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XII — DEZEMBRO 1951

N.º 50

HOMENAGEM
A
GOMES TEIXEIRA

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*

ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

REDAÇÃO

Redactor principal: *Manuel Zaluar*

Redactores adjuntos: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES:

EM PORTUGAL:

Coimbra: António A. Lopes, L. G. Albuquerque; **Leiria:** J. da Silva Paulo; **Lisboa:** A. Ferreira de Macedo, A. Sá da Costa, F. C. Araújo, H. de Menezes, J. Calado, J. Gaspar Teixeira, J. Sebastião e Silva, J. R. Albuquerque, Luís Passos, Manuel Peres J.^o, M. Teodora Alves, Mário Madureira, Orlando M. Rodrigues, Vasco Osório e V. S. Barroso; **Ponte Delgada:** J. J. Rodrigues dos Santos; **Porto:** Almeida Costa, Andrade Guimarães, Delgado de Oliveira, F. Soares David, Laureano Barros, L. Neves Real, M. G. Miranda, M. G. P. Barros, Rios de Souza e Ruy Luís Gomes.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — Buenos Aires: L. A. Santaló; **Mendoza:** F. Toranzos; **San Juan:** António Monteiro; **San Luis:** Manuel Balanzat; **Brasil — Belo Horizonte:** Cristovam dos Santos; **Recife:** Luiz Freire; **Rio de Janeiro:** Achille Bassi e Leopoldo Nachbin; **São Paulo:** Omar Catunda; **Espanha — Barcelona:** Francisco Sanvisens; **Madrid:** Sixto Rios Garcia; **Itália — Roma:** Emma Castelnuovo; **França — Paris:** Paul Belgodère; **Marseille:** A. Pereira Gomes; **Suissa — Zürich:** H. Wermus; **Uruguay — Montevideo:** Rafael La Guardia; **U. S. A. — Lincoln:** Maria Pilar Ribeiro.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA

POR BENTO DE JESUS CARAÇA

Nova edição englobando num volume as duas primeiras partes já publicadas e a terceira parte inédita, que se compõe dos seguintes capítulos:

- I — *O método dos limites.*
- II — *Um novo instrumento numérico — as séries.*
- III — *O problema da continuidade.*

PREÇO: 60 Esc.

NO PRELO:

ÁLGEBRA MODERNA POR VAN DER WAERDEN

Vol. 1 — fasc. 2 — Trad. de Hugo Ribeiro

COMEMORAÇÃO
DO
CENTENÁRIO DO NASCIMENTO
DO
PROFESSOR DOUTOR FRANCISCO GOMES TEIXEIRA

Número dedicado a todos os estudiosos e investigadores portugueses no campo da Matemática

A Gazeta de Matemática completa o seu 12.^o ano de existência com a publicação do presente n.^o 50, que dedica ao ilustre matemático F. Gomes Teixeira e também a todos os estudiosos e investigadores portugueses no campo das matemáticas.

Ao celebrar o 1.^o centenário do nascimento de Gomes Teixeira a Gazeta de Matemática aponta um exemplo de dedicação ao Ensino, de amor à Investigação, e de sacrifício pelo desenvolvimento e expansão da cultura matemática portuguesa.

A Redacção da G. M. neste momento recorda saudosamente alguns dos seus colaboradores desaparecidos ou actualmente impossibilitados de participação mais directa na formação intelectual da nossa juventude.

Profundo reconhecimento àqueles matemáticos estrangeiros e portugueses que contribuíram com a sua valiosa colaboração, à Junta de Investigação Matemática e à Sociedade Portuguesa de Matemática pelo auxilio material concedido.

Que o exemplo apontado seja, para todos e particularmente para a juventude, um forte incitamento de valorização científica.

Ao Leitor interessado em conhecer a obra científica do Homenageado, indicamos a consulta de:

Obras sobre Mathematica do Dr. F. Gomes Teixeira, publicadas por ordem do Governo Portugues — Coimbra, Imprensa da Universidade;

Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas — Coimbra, 1877-1905

Anais Científicos da Academia Politécnica do Porto, actualmente *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, publicações científicas de que foi fundador.

Dados biográficos e bibliográficos importantes encontram-se em:

O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira, por Henrique de Vilhena (elogio académico)
Vários artigos em *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, Vols.: XVIII, XXXIV e XXXV.

Í N D I C E

	Pág.
WHITTAKER, SIR EDMUND — On the reversion of series	1
HADAMARD, J. — Equações de derivadas parciais e funções de variáveis reais	3
SANTALÓ, L. A. — Sobre pares de figuras convexas	7
BASOCO, M. A. — On a certain arithmetical identity related to the doubly periodic functions of the second and third kinds	11
DIAZ, J. GALLEGO — Sobre la conversión del orden en las elasticidades parciales	15
COSTA, A. ALMEIDA — Sobre aneis de endomorfismos	17
HAUPT, OTTO — Über eine Kennzeichnung von Bogen minimalen Ordnungswertes	23
COELHO, RENATO PEREIRA — Un critère de continuité	27
ALBUQUERQUE, JOSÉ RIBEIRO DE — As séries de termos quaisquer	29
CHEREP, REBECA — Invariantes afines de ciertas ternas de curvas en el espacio	35
REAL, LUÍS NEVES — A noção de «filtro» e as suas relações com a teoria dos limites e a definição dos números reais	39
HADWIGER, H. — Hillsche Hypertetraeder	47
CASTELNUOVO, EMMA — L'insegnamento delle trazioni	49
GIÃO, ANTONIO — Quelques problèmes de physique théorique	57
POMPILJ, G. — Sulla media e la varianza di un campione	69
TEIXEIRA, JOSÉ GASPAS — Algumas aplicações da teoria analítica dos polinómios	77
FARINHA, JOÃO — Sobre um caso de convergência de fracções contínuas de elementos complexos	81
REIS, MANUEL DOS — Sobre fórmulas assintóticas conjecturais referentes à distribuição dos números primos	83
BALANZAT, MANUEL — Sobre la metrización de los espacios cuasi-métricos	91
MONTEIRO, A. A. — Les filtres fermés des espaces compacts	95
GOMES, RUY LUÍS — Integral de Riemann-Stieltjes num espaço localmente compacto	97

Prémio Nacional Dr. Francisco Gomes Teixeira

DAVID, FERNANDO SOARES — Sobre a comutabilidade de operadores com espectros contínuos	103
-------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Elogio

FREIRE, LUÍS — Sobre Gomes Teixeira	109
-----------------------------------------------	-----

<i>Errata</i>	113
-------------------------	-----

A JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e a SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
concederam para auxiliar a publicação deste número, subsídios respectivamente de 3.000 e 1.000 Escs.

On the reversion of series ^(*)

by E. T. Whittaker, Sc. D., F. R. S.

University of Edinburgh

One of the most celebrated of Teixeira's discoveries is the extended form of Burmann's theorem which he published (1) in 1900. I propose to show that this theorem may be used to establish a general formula for the reversion of series, or for the calculation of a root of an algebraic equation of any degree.

From the theorem, it is known that if $y(x)$ as a function of x , written in the form

$$y(x) = (x - \alpha) \psi(x),$$

then under suitable conditions as regards convergence, we have

$$x - \alpha = \sum_r \frac{\{y(x)\}^r}{r!} \frac{d^{r-1}}{d\alpha^{r-1}} \left[\left\{ \psi(x) \right\}^{-r} \right]$$

Suppose that

$$y(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots \quad (1)$$

$$= x(a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots),$$

so that

$$\alpha = 0$$

$$\psi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (2)$$

The theorem becomes

$$x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\{y(x)\}^r}{r!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{d\alpha^{r-1}} \left[\left\{ \psi(x) \right\}^{-r} \right] \right\}_{\alpha=0} \quad (3)$$

Now it was shown by H. W. SEGAR (2) that if

$$(a + bx + cx^2 + \dots)^{-n} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$$

then the coefficient A_r may be written as a deter-

minant of r rows and columns

$$A_r = \frac{(-1)^r}{r! a^{r+n}} \begin{vmatrix} nb & a & 0 & 0 & \dots \\ 2nc & (n+1)b & 2a & 0 & \dots \\ 3nd & (2n+1)c & (n+2)b & 3a & \dots \\ 4ne & (3n+1)d & (2n+2)c & (n+3)b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (4)$$

But from Taylor's theorem we have

$$\left\{ \psi(x) \right\}^{-n} = \sum_r \frac{x^r}{r!} \left\{ \frac{d^r}{dx^r} \left[\psi(x) \right]^{-n} \right\}_{x=0} \quad (5)$$

Comparing (4) and (5) we have

$$\left\{ \frac{d^r}{dx^r} \left[\psi(x) \right]^{-n} \right\}_{x=0} = \frac{(-1)^r}{a^{r+n}}$$

$$\begin{vmatrix} nb & a & 0 & 0 & \dots \\ 2nc & (n+1)b & 2a & 0 & \dots \\ 3nd & (2n+1)c & (n+2)b & 3a & \dots \\ 4ne & (3n+1)d & (2n+2)c & (n+3)b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (6)$$

Substituting from (6) in (3), we have

$$x = \frac{y}{a} - b \frac{y^2}{a^3} + \frac{y^3}{3! a^5} \left| \begin{matrix} 3b & a \\ 6c & 4b \end{matrix} \right| -$$

$$- \frac{y^4}{4! a^7} \left| \begin{matrix} 4b & a & 0 \\ 8c & 5b & 2a \\ 12d & 9c & 6b \end{matrix} \right| + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{r-1} y^r}{r! a^{2r-1}} \left| \begin{matrix} rb & a & 0 & 0 & \dots \\ 2rc & (r+1)b & 2a & 0 & \dots \\ 3rd & (2r+1)c & (r+2)b & 3a & \dots \\ 4re & (3r+1)d & (2r+2)c & (r+3)b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right| + \dots \quad (7)$$

This formula (7) is the reversal of the series (1): it gives that root x of the equation (1) which tends to zero when y tends to zero.

(*) Received 1951 February.

(1) *Journal für Math.*, CXXII (1900), p. 97.

(2) *Mess. of Math.*, XXI (1892), p. 177.

O artigo que a seguir se publica foi traduzido do original em inglês pelo Doutor A. Pereira Gomes. O seu Autor, o grande matemático francês, Professor J. Hadamard dirigiu à Redacção da «Gazeta de Matemática» as seguintes palavras:

Il m'a été donné de rencontrer quelques fois M. Gomes Teixeira; plus souvent de le lire. J'ai ainsi pu apprécier la haute valeur de l'homme et du savant, et suis heureux de m'associer à l'hommage rendu à cette belle personnalité et à cette belle oeuvre.

J. Hadamard

Paris, le 10 Mars 1951.

Equações de derivadas parciais e funções de variáveis reais (*)

por J. Hadamard

Membro do Instituto

As funções de variáveis reais têm sido tratadas cada vez mais profundamente e, ao que parece, completamente, considerando-se sucessivamente espécies mais gerais, afim de fazer incidir sobre elas hipóteses tão pouco restritivas quanto possível. Neste sentido, as funções contínuas são incluídas nas funções integráveis à LEBESGUE. Vêm então as funções integráveis à DENJOY e as funções integráveis à FERRON, após o que têm atraído a atenção as sucessivas classes de de BAIRE, etc.

Parece que se tem ido tão longe quanto possível na direcção oposta, quero dizer, considerando-se propriedades cada vez mais especiais das funções. Entre as funções contínuas, foi-se levado a distinguir:

- A) funções absolutamente contínuas;
- B) » de variação limitada;
- C) » satisfazendo à condição LIPSCHITZ-HÖLDER; então
- D) funções admitindo derivada;
- E) » cuja derivada goza das propriedades A), B) ou C);
- F) funções admitindo um certo número p de derivadas, que pode ainda supor-se satisfazerem às condições A), B) ou C).

Se agora tomamos $p = \infty$, isto é,

- G) funções admitindo derivadas de todas as ordens, parece à primeira vista que nenhuma outra hipótese oferece interesse enquanto nos não restringimos às
- H) funções analíticas.

Mas por outras considerações, a lacuna entre as condições G) e H) aparece como muito larga; e na realidade, ela foi agora preenchida com o auxílio da teoria das equações de derivadas parciais: mais precisamente, do problema de CAUCHY.

Como se sabe, a questão referente à existência de soluções para as equações de derivadas parciais recebeu uma resposta geral — ou considerada como

tal — no célebre teorema de CAUCHY-KOWALEWSKY. Este teorema estabelece que para uma tal equação, digamos de 2.ª ordem (dando o valor duma derivada de 2.ª ordem $\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, u, x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \right),$$

em termos das outras segundas derivadas, das primeiras derivadas, da função desconhecida u e das variáveis independentes), se o segundo membro é holomorfo nas diferentes variáveis, podemos determinar uma solução u escolhendo arbitrariamente os valores de u e de $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ para $x = 0$, como funções

das outras variáveis independentes x_i — seja

$$(1) \quad u(0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1}),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)_{x_0=0} = \psi(x_1, \dots, x_{m-1}).$$

Se, além disso, φ e ψ são holomorfas, este problema de CAUCHY, admite uma e só uma solução (1).

Esta resposta ao nosso problema capital foi muitas vezes considerada como completamente geral, devido à tendência, entre os géometras do último século, para não considerar a hipótese de analiticidade como uma restrição essencial de generalidade.

O estado actual da Ciência tem levado a conclusões muito diferentes. Pode acontecer que o problema de CAUCHY seja possível sem qualquer hipótese de analiticidade; tal é o caso, por exemplo, do problema de propagação do som num meio ilimitado em todos os sentidos (sendo a equação diferencial a das ondas esféricas e as condições «defenidas» relativas a $t=0$); dum modo geral, duma equação do tipo «simplesmente-hiperbólico» (sendo os dados de CAUCHY originados por uma superfície espacial. Mas se se considera agora a equação de LAPLACE (equação

(*) Recebido em 1951, Março.

dos potenciais) e tentamos determinar uma solução u pelos dados de CAUCHY (1), pode ver-se facilmente que, por exemplo, nenhuma solução existe se uma destas funções é suposta idênticamente nula e a outra não analítica.

Isto não introduz nenhuma nova concepção, visto que somos ainda conduzidos à condição H) de analiticidade. Mas as coisas mudam se partirmos agora da equação do calor,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Se tomamos ainda φ , um dos dados de CAUCHY, como idênticamente nulo, o problema em geral não é possível, mesmo se o outro dado ψ satisfaz à condição G).

As condições necessárias e suficientes para a existência duma solução são:

1.º Condição G) (que existam as derivadas $\psi^{(p)}$ de todas as ordens);

2.º Condição H₂) (que os valores absolutos de $\psi^{(p)}$ admitam limites superiores:

$$H_2) \quad |\psi^{(p)}(y)| \leq K(2p)! R^p,$$

onde K e R são duas constantes positivas (isto é, independentes de p e y , embora geralmente diferentes para os diversos ψ).

A condição H₂) difere da condição de analiticidade: ela é *menos restritiva*, pois que a analiticidade é expressa, além de G), pelas desigualdades

$$H) \quad |\psi^{(p)}(y)| \leq Kp! / R^p,$$

onde K e R têm a mesma significação que acima.

Portanto, a «classe de espécie 2» definida por aquela condição é intermediária entre as classes G) e H). O mesmo se pode dizer, sem dúvida, das «classes de espécie α » definidas por

$$(H\alpha) \quad |\psi^{(p)}(y)| \leq K\Gamma(\alpha p) / R^p,$$

para qualquer α maior que a unidade (2).

Por um tal resultado, foi aberto o caminho para uma longa e importante série de pesquisas.

Primeiramente, a propriedade mais clássica — e até agora considerada como característica — das séries de TAYLOR é que uma função ψ é completamente determinada quando são dados os valores

numéricos da própria função ψ e das suas derivadas de todas as ordens, para um determinado valor da variável independente no interior do intervalo (a, b) , onde ela é suposta holomorfa; tem-se, como consequência, que se ψ é dada num intervalo (a, b) e é suposta holomorfa num intervalo (a, c) mais extenso (com $a < b < c$), um tal problema de *prolongamento analítico* — isto é, determinação de ψ no intervalo complementar (b, c) — se for possível, é determinado.

A questão que surge naturalmente é: pertencerá esta propriedade à classe H₂)? Se uma função pertence a esta classe, será o seu prolongamento analítico determinado adentro da classe?

A resposta é negativa. Pode mostrar-se facilmente que as funções

$$(2) \quad e^{-\frac{1}{y}}, \quad (2') \quad \frac{1}{y^n} e^{-\frac{1}{y}}$$

pertencem à classe de espécie 2. As sucessivas derivadas — mais precisamente, «derivadas à direita» — de ambas elas são todas nulas para $y=0$. Assim (2) ou (2') podem «prolongar», para $y \geq 0$, uma função idênticamente igual a zero para $y < 0$, gerando uma função contínua assim como todas as suas derivadas, para cada y real de $-\infty$ a $+\infty$.

A questão pode ser agora obviamente generalizada. Usando um símbolo análogo ao de LANDAU, suponhamos que

$$f = \odot g,$$

onde f e g são funções do inteiro p , a segunda das quais positiva, significa que existem duas constantes K e R tais que

$$|f| < Kg / R^p$$

para cada p positivo. Sendo dada uma sucessão de números A_p , o sistema de desigualdades

$$(A) \quad \psi^{(p)}(y) = \odot A_p,$$

a ser satisfeito pelas sucessivas derivadas duma função ψ , define uma classe de funções (a classe das funções analíticas, se $A_p = p!$). Diremos agora que esta classe A_p é *quase-analítica* se o prolongamento, no sentido considerado acima, é determinado adentro desta classe. A questão é: sob que condição a sucessão A_p define, pelas desigualdades (A), uma classe quase-analítica.

Este belo problema foi completamente resolvido pelas pesquisas de BOREL, DENJOY e CARLEMAN. A condição para a quasi-analiticidade é a divergência da série

$$\sum \frac{1}{p\sqrt{A_p}},$$

préviamente regularizada, isto é, quando certos valores de A_p são substituídos por outros menores se,

(1) A demonstração de CAUCHY e SOFIA KOWALEWSKY apenas provou que não existe mais do que uma solução holomorfa. Que nenhuma outra *qualquer* solução pode existir resulta, ao menos para muitos casos (equações lineares de coeficientes analíticos), de trabalhos posteriores (HOLMGREN, HANS LEWY, CARLEMAN).

(2) $\alpha = 1$ é a classe das funções analíticas. Para $\alpha < 1$, uma função, satisfazendo às desigualdades (H₂) é não só analítica, mas também uma função inteira de genus maior do que $1/(1-\alpha)$.

para alguns valores de p , eles são anormalmente grandes.

Ainda outra generalização é possível e foi estudada. Imaginemos um sistema de condições — não necessariamente da forma (A) — imposto a uma função ψ , definindo-se assim uma classe c . Pode acontecer que esta classe seja quasi-analítica, sendo a significação de «prolongamento» ligeiramente modificada pois que as derivadas já não intervêm: uma função ψ é definida em (a, b) e satisfaz às condições c ; tentemos defini-la em (b, c) de forma que as mesmas condições sejam satisfeitas em (a, c) ; diremos que a classe é quasi-analítica se este prolongamento (quando possível) é possível duma só maneira.

Estas espécies de classes quasi-analíticas foram obtidas por SERGE BERNSTEIN como uma consequência das suas célebres e profundas investigações sobre aproximação polinomial. Quanto elas podem ser diferentes das consideradas acima, será imediatamente assinalado pelo facto que algumas delas compreendem funções desprovidas de qualquer derivada.

II

Ainda outros caminhos de investigação foram sugeridos pela consideração das classes H_2 ou H_α . Uma propriedade essencial das funções analíticas é a de gerarem outras pelas operações clássicas da Análise, tais como a adição, multiplicação, formação de funções de funções e funções compostas, definição de funções implícitas por meio de equações ordinárias ou também por equações diferenciais. Como se sabe, a demonstração de que estas operações, aplicadas a funções analíticas, produzem ainda funções analíticas, é geralmente levada a cabo com o auxílio de «funções dominantes», baseando-se no facto que as desigualdades com os membros maiores positivos podem combinar-se por adição e multiplicação.

Maurice Gevrey generaliza isto às classes de espécie α , constituindo para estas classes toda uma nova Análise, inteiramente paralela à antiga, mas onde os sucessivos cálculos são não só sujeitos à «dominação» como no método de Cauchy, mas à «sobredominação», isto é, substituindo cada termo pela sua potência de ordem α e fazendo uso da desigualdade

$$(a + b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha, \quad a > 0, b > 0, \alpha > 1.$$

Assim, o produto de duas funções pertencentes à classe de espécie $\alpha > 1$ é ainda uma função da mesma classe; etc.

Sem dúvida, podemos estudar propriedades semelhantes nas classes mais gerais (A). No que diz respeito ao produto, a questão foi completamente resol-

vida por Gorny (1): a propriedade relativa ao produto subsiste em cada classe do tipo (A) considerada num intervalo infinito. Ela é também válida se o intervalo é finito, desde que substituamos A_p por $\max(A_p, p!)$.

III

Outras questões respeitantes ao problema de Cauchy conduzem a propriedades notáveis e inesperadas de funções de variáveis reais.

Partamos da equação das ondas esféricas,

$$(E_3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Esta equação é hiperbólica e, mais precisamente, «simplesmente hiperbólica». Contudo o problema de Cauchy que lhe diz respeito pode ser impossível. Tais casos ocorrem se, em vez de $t=0$, os dados são originados pela hypersuperfície $x=0$: uma superfície temporal («time-like») em lugar de uma espacial («space-like»). O problema de determinar a solução de (E₃) por

$$u(0, y, z, t) = \varphi(y, z, t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \psi(y, z, t)$$

onde φ e ψ já não são supostas analíticas (mesmo se indefinidamente diferenciáveis), é em geral impossível. Como deveremos escolher φ e ψ — ou, para simplificar, uma destas funções, tomando-se a outra idênticamente nula — para chegar a um problema de CAUCHY possível?

Sem dúvida, um problema análogo existe para cada número de dimensões: por exemplo, para a equação das ondas cilíndricas. Mas, desta vez, aparece uma nova e curiosa circunstância se considerarmos um meio unidimensional, ficando a equação diferencial reduzida à equação das cordas vibrantes

$$(E_1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Neste caso não há distinção entre direcções espaciais e temporais: a variável t desempenha um papel inteiramente análogo a x , de modo que o problema de que agora falamos não existe para este caso. Consequentemente, encontraremos propriedades de funções de diversas variáveis que não têm análogo no caso duma só variável.

(1) Conservo o cruel remorso de não ter conseguido obter, para este jovem tão belamente dotado, uma nomeação numa Universidade Americana. A recusa duma tal nomeação equivalerá para ele a uma condenação à morte: não pôde ser libertado dum campo de concentração em França, que abandonou somente para seguir para a câmara de gaz, na Alemanha.

Vê-se facilmente que a questão pode ser, e mesmo duma infinidade de maneiras, reconduzida à expressão duma função de duas ou mais variáveis por médias «semi-circulares» ou «hemi-esféricas».

Para a equação das ondas cilíndricas

$$(E_2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

à qual nos referiremos de preferência, por conveniência de figuração, tomemos no semi-plano $x \geq 0$, um semi-círculo tendo o seu centro $(0, y_0)$ sobre o eixo dos y , sendo o seu raio designado por t_0 . O valor médio duma função arbitrária $\chi(x, y)$ sobre este semi-círculo será uma função de y_0 e de t_0 , digamos $\psi(y_0, t_0)$.

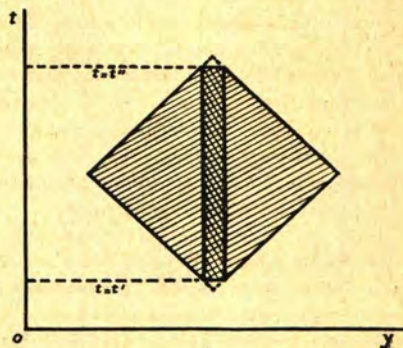
Sendo agora dada $\psi(y_0, t_0)$, é possível encontrar uma função $\chi(x, y)$ correspondente?

É certamente possível (duma só maneira) se ψ é analítica nas duas variáveis que contém e, mais geralmente, como resulta duma proposição de VOLTERRA, se é analítica em y_0 ; mas o problema é, pelo contrário, certamente impossível se ψ é independente de t e não analítica em y_0 .

Para um dado ψ , o χ requerido pode ser obtido por aplicação, uma infinidade de vezes, das duas operações que combinam derivação e integração. Para que χ exista, é necessário que cada uma destas sucessivas operações seja possível (o que, no entanto, em virtude da intervenção da integração, pode acontecer mesmo sem a existência de derivadas de ψ). Se assim é, estas operações levam ao valor médio do produto χP , onde P é um polinómio; donde por processos conhecidos de passagem a limite, o valor de χ em cada ponto. Sômente, é ainda necessária a convergência nestas passagens a limite.

Mas as operações assim sumariamente descritas oferecem um notável aspecto. Elas podem ser efectuadas quando ψ é dada no interior dum pequeno segmento do eixo dos y e variando t de t' a t'' — por outras palavras, num rectângulo (1), embora exíguo, paralelo ao eixo dos t (veja-se o diagrama junto). Se, agora, as condições de validade e convergência destas operações são satisfeitas, elas definirão χ e, conseqüentemente, ψ , não só no interior

do rectângulo, mas em todo o interior dum losango (ver diagrama) circunscrito àquele (de lados inclinados de 45° em relação à vertical), com excepção das partes que correspondem a $t < t'$ ou a $t > t''$. Portanto, vemos que as funções satisfazendo às condições



de possibilidade do nosso problema admitem um certo prolongamento analítico — não, porém, sobre qualquer espécie de domínios, mas sobre domínios de certas formas.

Se recordarmos que a redução do problema de CAUCHY a um problema de médias semi-circulares pode ser obtida pelos mais variados caminhos, encontramos que o prolongamento analítico de $\psi(y, t)$, se dado no interior duma certa área S_0 do plano yt , atinge uma área circunscrita a S_0 e limitada por características de ambos os sistemas.

Vemos pois que, para funções de diversas variáveis, existem novas espécies de prolongamentos analíticos, que não têm análogo para funções duma só variável, a saber, prolongamentos sobre áreas ou volumes de certas formas especiais.

(1) No caso da equação das ondas esféricas — uma equação em quatro variáveis, a última das quais, t , é uma variável do tipo-tempo, — a função $\psi(y, z, t)$ pode ser dada no interior dum círculo, embora pequeno, do plano yz e para $t' \leq t \leq t''$, isto é, no interior dum cilindro circular, embora exíguo, de eixo paralelo ao eixo dos t ; e sendo assim, ela será determinada em todo o interior dum duplo cone circunscrito ao cilindro (ou mais exactamente na parte deste duplo cone correspondente a $t' \leq t \leq t''$).

Sobre pares de figuras convexas (*)

por L. A. Santaló

Universidad de La Plata — Argentina

Dedicatoria. Entre la gran variedad de asuntos que trató F. GOMES TEIXEIRA figura también el de los cuerpos convexas. En efecto, aunque matemático analítico principalmente, publicó varias notas sobre la geometría de las figuras convexas en las que se refleja su fino espíritu geométrico. Por esto, en este número dedicado a su memoria y como sincera homenaje a la misma, no creo esté demasiado fuera de lugar un tema como el indicado en el título de la presente nota.

1. Introducción. El estudio de las figuras convexas (conjuntos convexas, limitados y cerrados) constituye un importante capítulo de la Geometría, con abundante literatura (1). A cada figura convexa van unidos una serie de características (longitud, área, diámetro, anchura mínima, círculo inscrito, etcétera) y el estudio de los valores extremales de algunas de estas características, conocidas otras, presenta interesantes problemas.

Una generalización que parece poco estudiada es la de considerar figuras K^2 formadas por un par de figuras convexas. Mas general, se trataría de considerar figuras K^r formadas por r figuras convexas. También en este caso se pueden definir ciertas características (área, longitud, diámetro total, diámetro de cada componente, mínimo círculo que contiene K^r , etc.) y se presentan muchos problemas de máximos y mínimos, generalización de los correspondientes a $r=1$, únicos generalmente estudiados.

En esta nota nos vamos a limitar al caso $r=2$ y vamos a dar, como ejemplo, dos tipos de problemas: a) Una generalización del teorema de HELLY a figuras K^2 compuestas de dos figuras convexas; b) Algunos problemas extremales de figuras K^2 .

2. Generalización del teorema de HELLY. Para el caso del plano, $n=2$, el teorema de HELLY a que nos referimos, dice: *Dado en el plano un conjunto de figuras convexas, si cada 3 de ellas tienen punto común, existe punto común a todas* (1).

Nuestra generalización a «pares» de figuras convexas $K^2=K_1+K_2$ afirma:

TEOREMA. *Dado en el plano un conjunto de pares de figuras convexas K^2 , si cada 17 de ellos tienen punto común, existe un punto común a todos.*

La demostración, que también puede aplicarse para el teorema original de HELLY, la basaremos en dos lemas.

LEMA I. *Sean K_i ($i=1, 2, 3$) tres figuras convexas (cerradas) cuya intersección J tenga puntos interiores y sea tal que $K_i \cap K_j = J$. En estas condiciones, toda figura convexa K que tenga punto común con K_1, K_2, K_3 , tiene punto común con J .*

Demostración. Supongamos que exista una figura convexa K con punto común con K_1, K_2, K_3 y sin punto común con J . Elijamos tres puntos $\alpha_i \in K_i \cap K$. El triángulo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ (que puede degenerar en un segmento) está contenido en K y por tanto no contiene a J ni las rectas $\alpha_i \alpha_j$, pueden tener punto común con J , pues si $\alpha_1 \alpha_2$, por ejemplo, cortara a J en un punto P , por pertenecer este punto a las tres K_i , los puntos α_1, α_2 pertenecerían a una misma figura K_i , contra la hipótesis de que las K_i tomadas dos a dos no tienen mas punto común que la intersección J . Por tanto el triángulo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ tiene un lado, sea $\alpha_1 \alpha_2$, que separa J y al otro vértice α_3 . Tracemos por α_1 la recta de apoyo de J que

(*) Recibido en Abril de 1951.

(1) T. BONNESEN-W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin, 1934.

(1) BONNESEN-FENCHEL, loc. cit. pág. 3.

deja a distinto lado a J y a α_3 . Sea Q el punto de contacto (o uno de ellos si hay mas de uno). Por pertenecer Q a J , cada segmento $Q\alpha_i$ pertenece a K_i y es exterior a J . Si Q fuera interior a alguna K_i habria dos de estas figuras con punto común exterior a J , contra la hipótesis. Luego Q , pertenece al contorno de las tres K_i y por tanto las prolongaciones de $Q\alpha_i$ serán exteriores a K_i . Si esto fuera posible, tomando un punto S interior a J y próximo a Q , alguno de los segmentos Sz_i cortaria a alguno de los $Q\alpha_i$ en puntos distintos de los extremos; estos puntos de intersección pertenecerian a dos K_i sin pertenecer a J , lo que es contrario a la hipótesis.

LEMA II. Sean 17 pares de figuras convexas K_i^2 ($i=1, 2, \dots, 17$) cuya intersección J tenga puntos interiores y sea tal que $K_i^2 \cap K_j^2 = J$ (es decir, las figuras K_i^2 no tienen, dos a dos, otros puntos comunes que los de J). En estas condiciones, todo par de figuras convexas K^2 que corte a todas las K_i^2 , corta también a J .

Demostración. La intersección de pares de figuras convexas se compone, a lo sumo, de 4 figuras convexas J_i ; sea $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$. Según el Lema I, cada componente de K^2 podrá cortar a lo sumo a 2 figuras K_i^2 por cada J_i sin cortar a J : en total puede cortar a 8 figuras K_i^2 sin cortar a J . Las dos componentes de K^2 pueden, por tanto, cortar a lo sumo a 16 figuras K_i^2 . Luego si cortan, por hipótesis, a 17, deben cortar a J .

Sentados estos lemas pasemos a la demostración del teorema.

Supongamos primero que cada 17 figuras K^2 tengan puntos interiores comunes, para poder aplicar los lemas anteriores. Luego veremos que esta condición es superflua. Supongamos también primero que el conjunto sea finito. Procedemos por inducción. Supongamos el teorema cierto para N figuras K^2 y vamos a demostrar que lo es también para $N+1$.

Sean K_i^2 ($i=1, 2, \dots, 16$) 16 figuras de entre las N que cumplen la condición del enunciado y K_{N+1}^2 la nueva figura añadida. Sea J_i la intersección de todas las K_α^2 ($\alpha=1, 2, \dots, N$) sin contar la K_i^2 ($i=1, 2, \dots, 16$) y S la intersección de las K_i^2 ($i=1, 2, \dots, 16$). Por suponer el teorema cierto para N , la figura K_{N+1}^2 debe cortar a los J_i y también a S por suponer que cada 17 figuras del conjunto tienen punto común. Pero las figuras J_i, S tomadas dos a dos no tienen mas punto común que J , luego se cumplen las condiciones del Lema II y K_{N+1}^2 debe cortar a J .

Debemos ahora prescindir de la condición de que cada 17 figuras tengan puntos «interiores» comunes. Supongamos que solo tienen punto común. Considerando las figuras paralelas exteriores a distancia ϵ , ellas tendrán puntos «interiores» comunes y por tanto la demostración anterior vale. Si el teorema vale para cualquier ϵ , tratándose de conjuntos cerrados, vale en el limite para $\epsilon=0$.

El paso a un conjunto infinito, numerable o no, se puede hacer aplicando un teorema de RIESZ, exactamente igual a como lo hace D. KÖNIG para el caso del teorema de HELLY (1).

3. Generalizaciones. El problema se puede generalizar considerando conjuntos de figuras K^r compuestas cada una de r figuras convexas y también pasando al espacio euclidiano de n dimensiones en lugar del plano. En ambos casos la demostración puede hacerse siguiendo en líneas generales el método anterior. Nos limitaremos a dar el siguiente enunciado general.

Sea dado en el espacio euclidiano de n dimensiones un conjunto de figuras K^r compuestas cada una de r figuras convexas. Si cada nr^3+1 de ellas tienen punto común, existe un punto común a todas.

El número nr^3+1 es el que da la demostración anterior. Es posible, sin embargo, que se pueda disminuir. Para el caso $r=2, n=2$ que hemos considerado en detalle, es probable que se pueda sustituir 17 por 13.

Sería también interesante ver si el teorema anterior se puede generalizar de manera análoga a como el primitivo teorema de HELLY fué generalizado por su propio autor a conjuntos de «celdas» en vez de figuras convexas (2).

4. Tres problemas extremales sobre pares de figuras convexas. Dada una figura K^2 compuesta de dos figuras convexas K_1, K_2 , utilizaremos las siguientes denominaciones:

d = Distancia mínima = extremo inferior de las distancias entre un punto de K_1 y otro de K_2 .

D = Distancia máxima = extremo superior de las distancias entre un punto de K_1 y otro de K_2 .

δ = Diámetro = extremo superior de las distancias entre dos puntos cualesquiera de K^2 . Es siempre $D \leq \delta$.

δ_1, δ_2 = Diámetros de las componenetes K_1, K_2 .

F = Área de K^2 .

L = Longitud del contorno de K^2 .

(1) D. KÖNIG, Ueber konvexe Körper, Mat. Zeits., 14, 1922.

(2) E. HELLY Ueber systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, Monatshefte Mat. und Phys., 37, 1930.

Con estas denominaciones vamos a considerar tres problemas.

1. *Dados d y D, hallar el máximo de F.*

Sean K_1 y K_2 las dos componentes de K^2 . Sean L_1, L_2 las longitudes de los contornos respectivos y supongamos $L_1 \geq L_2$. Supongamos primero que el contorno de K_2 no tenga puntos angulosos, de manera que también resulte convexa la figura $K_2 - \epsilon$ paralela interior a distancia ϵ suficientemente pequeña. Afirmamos que para la K^2 de máxima área, K_2 no puede tener puntos interiores. En efecto, en caso contrario consideremos las figuras convexas $K_1 + \epsilon, K_2 - \epsilon$ paralelas exteriores e interiores respectivamente a distancia ϵ . Para la nueva figura K^2 resultante, d y D no han variado y en cambio el área se ha incrementado de

$$(1) \quad \Delta F = L_1 \epsilon + \pi \epsilon^2 - (L_2 \epsilon - \pi \epsilon^2) = (L_1 - L_2) \epsilon + 2\pi \epsilon^2 > 0$$

o sea, F ha aumentado. Si K_2 tiene puntos angulosos (teniendo puntos interiores) se puede aproximar convenientemente por otra figura convexa que no los tenga y el resultado subsiste.

Luego, para que K^2 sea de área máxima la componente K_2 no debe tener puntos interiores: debe ser un segmento. Sea el segmento de extremos A, B . Supongamos que sea AP ($P \in K_1$) el segmento tal que $d = AP$. Sea r la recta normal a AP trazada por P . Con centro B y radio D tracemos el arco de circunferencia que se apoya en r . Queda así un segmento de círculo en el interior del cual debe quedar K_1 . Este segmento circular será máximo cuando la distancia de B a r sea mínima, o sea, cuando B esté en la paralela a r por A . Entonces K_1 debe estar contenida en los dos segmentos de círculo de centros A, B y radio D limitados por r . La parte común a estos segmentos será máxima cuando ambos coincidan, o sea, $A \equiv B$. Por tanto:

Dados d y D el máximo de F se obtiene por la figura compuesta de un punto A mas un segmento de círculo de radio D y centro A cuya base diste d del punto A.

Poniendo $\varphi = \arccos(d/D)$ el resultado se puede escribir

$$F \leq \varphi D^2 - dD \operatorname{sen} \varphi.$$

2. *Dados d, D hallar el máximo de L.*

Con la misma demostración anterior, con solo sustituir (1) por $\Delta L = L_1 + 2\pi \epsilon - (L_2 - 2\pi \epsilon) = L_1 - L_2 + 4\pi \epsilon \geq 0$, resulta que el máximo corresponde

a la misma figura anterior. Por tanto se puede también escribir

$$L \leq 2 \varphi D + 2\sqrt{D^2 - d^2}.$$

Ambos problemas se complican si se sustituye D por δ .

3. *Hallar el círculo de radio mínimo que contiene a cualquier par de figuras convexas cuyos diámetros respectivos sean δ_1, δ_2 y la distancia mínima entre ellas sea d.*

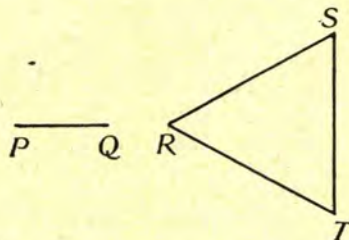
Para el caso de una sola figura convexa se sabe que el radio mínimo ρ está dado por $\rho = \delta/\sqrt{3}$ (1). En el caso de un par de figuras convexas conviene considerar dos casos (supondremos siempre $\delta_2 \geq \delta_1$):

a) $\delta_2 \leq \delta_1 + d$. Consideremos el caso de dos segmentos PQ, RS de una misma recta cuyas longitudes sean $PQ = \delta_1, QR = d, RS = \delta_2$. Para cubrirlos a los dos se necesita un círculo de radio

$$(2) \quad \rho = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + d).$$

Vamos a demostrar que cualquier par de figuras convexas en las condiciones del enunciado puede cubrirse con este círculo. En efecto, cualquier K_1 de diámetro δ_1 que contenga Q estará contenida en el círculo de centro Q y radio $\delta_1 = QP$; análogamente, cualquier K_2 de diámetro δ_2 que pase por R estará contenida en el círculo de centro R y radio $\delta_2 = RS$. Como ambos círculos están contenidos en el círculo de diámetro PS , queda probado el enunciado.

b) $\delta_2 > \delta_1 + d$. En este caso no vale lo anterior. Consideremos la K^2 formada por un segmento PQ de longitud δ_1 y un triángulo equilátero RST de



lado δ_2 colocados como indica la figura 1, en la cual es $QR = d$. Para cubrir toda la figura hace falta un círculo de radio

(1) BONNESEN-FENCHEL, loc. cit. pag. 78.

$$(3) \quad \rho = \frac{\delta_2^2 + (\delta_1 + d)^2 + \sqrt{3} \delta_2 (\delta_1 + d)}{2(\delta_1 + d) + \sqrt{3} \delta_2}.$$

Afirmamos que con este radio se puede cubrir cualquier figura K^2 con las condiciones del enunciado. En efecto, la primera componente K_1 de K^2 estará contenida en el segmento circular limitado por la circunferencia de centro R y radio $\delta_1 + d$ y la perpendicular por Q a la recta QR . La segunda componente K_2 puede estar contenida en un círculo de radio $\delta_2/\sqrt{3}$ (sea O su centro) y por tanto estará contenida en la intersección de este círculo con el de centro R y radio δ_2 . Si giramos el cir-

culo de radio ρ que contiene la fig. 1 alrededor de R hasta que su centro se coloque sobre RO , cubrirá tanto al segmento circular mencionado que cubre K_1 como a la intersección mencionada que contiene a K_2 , y por tanto cubrirá a K^2 .

En resumen:

Dados δ_1, δ_2 y d , y suponiendo $\delta_2 \geq \delta_1$, cualquier figura K^2 con estos elementos puede cubrirse con un círculo de radio ρ dado por (2) si $\delta_2 \leq \delta_1 + d$ o por (3) si $\delta_2 > \delta_1 + d$.

LA PLATA (Argentina), Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas.

On a certain arithmetical identity related to the doubly periodic functions of the second and third kinds (*)

by M. A. Basoco

The University of Nebraska, U. S. A.

1. **Introduction.** The problem of representing the doubly periodic functions of the first (i. e. elliptic), second and third kinds (using a terminology introduced by HERMITE) in various types of trigonometric series has been discussed by many authors including the distinguished Portuguese mathematician FRANCISCO GOMES TEIXEIRA. To TEIXEIRA we owe a systematic study (1) of the developments of the functions of the second kind, and the present writer is glad to acknowledge the influence of this paper of TEIXEIRA on his study of certain related problems. (2)

In what follows we shall be concerned with an arithmetical result which is implied by an identity which involves the JACOBI elliptic theta functions and certain doubly periodic functions of the second kind. The latter are meromorphic functions which satisfy periodicity conditions of the form

$$(1) \quad \begin{cases} f(z+2\omega) = f(z) \\ f(z+2\omega') = cf(z), \quad c \neq 1, \quad \Re\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0. \end{cases}$$

Included in this category are the following

$$(2) \quad f(z) \equiv \Phi_{abc}(z, v) \equiv \vartheta'_1 \frac{\vartheta_a(z+v)}{\vartheta_b(z)\vartheta_c(v)}, \quad (a, b=0, 1, 2, 3)$$

for which, in a standard notation, (3) we have $\vartheta'_1 = \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$, $(2\omega, 2\omega') = (\pi, \pi\tau)$, $0 < \text{amp } \tau < \pi$ and $c = \exp(-2iv)$. These functions were first discovered by JACOBI (4) in connection with his work on the dyna-

mics of a rotating rigid body. HERMITE (1) was the first to obtain the Fourier Series developments of these functions and TEIXEIRA (2) has shown how HERMITE's results could be obtained as examples illustrating his general theory. For future reference we note that the function $\Phi_{111}(z, v)$ has the development

$$(3) \quad \vartheta'_1 \frac{\vartheta_1(z+v)}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(v)} = \cot z + \cot v + 4 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n} \left(\sum_1 \sin 2(dz + \delta v) \right),$$

where the inner sum ranges over all the positive, integral divisors d, δ of n , and $\sum_1(z), \sum_1(v)$ are less than $\sum_1(\pi\tau)$.

2. **The Analytical Identity.** The basic identity which is to be established is obtained by using a procedure which is in the spirit of the methods used by TEIXEIRA (loc. cit.) suitably modified to take care of the fact that we begin with a function which has the periodicity properties of a doubly periodic function of the *third* kind (3).

Consider the function

$$(4) \quad f(y) \equiv \vartheta_3(x+y+z)\Phi_{111}(x+y, -y),$$

where x and z are regarded for the time being as parameters and y is a complex variable. It follows from the properties of the theta functions that

$$(5) \quad \begin{cases} f(y+\pi) = f(y), \\ f(y+n\pi\tau) = q^{n^2} e^{2ni(y-\tau)} f(y), \\ q = \exp(\pi i\tau), \quad n = \text{integer}. \end{cases}$$

The function $f(y)$ has simple poles at $y = n\pi\tau$,

(*) Received April, 1951.

(1) F. GOMES TEIXEIRA, «Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométriques», *J. für die Reine und Ang. Mat.* **125**, (1901) p.p. 301-318.

(2) M. A. BASOCO (i) *Bull. Am. Math. Soc.* **37** (1931), p.p. 301-318, (ii) *Ibid.* **38** (1932), p. p. 560-568, (iii) *Am. J. Math.* **54** (1932) p.p. 242-252.

(3) WHITTAKER AND WATSON, «*Modern Analysis*», Chap. XXI.

(4) JACOBI, *Werke*, Bd. 2, p. p. 291-315.

(1) HERMITE, *Oeuvres*, t. 4 p.p. 190 and 199-200.

(2) TEIXEIRA, loc. cit. p.p. 317-318.

(3) For the general theory of these functions, reference may be made to a monograph by APPELL in the *Mémoires des Sciences Mathématiques*, **36**, (1929). Also to M. A. BASOCO, *Acta Mathematica*, **57**.

and at $y = -x + n\pi\tau$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, with residues $-q^{n\tau} e^{-2ni\tau} \vartheta_3(x+z)$ and $q^{n\tau} e^{-2ni(x+z)} \vartheta_3(z)$ respectively.

Let C represent a contour in the y -complex plane composed of $(n+1)$ cells (of width π) above and n cells below the real axis and consider the auxiliary function

$$(6) \quad \Phi(t) \equiv f(t) \cot(t-y),$$

which has poles at $t=y$, $t=n\pi\tau$ and $t=-x+n\pi\tau$. The residue at $t=y$ is $f(y)$. An application of the CAUCHY residue theorem leads, upon letting $n \rightarrow \infty$, to the result:

$$(7) \quad \vartheta_3(x+y+z) \Phi_{111}(x+y, -y) = \\ = \vartheta_3(z) \chi(x+y, x+z) - \vartheta_3(x+z) \chi(y, z)$$

where,

$$(8) \quad \chi(u, v) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r\tau} e^{-2irv} \cot(u - r\pi\tau), \\ q = e x p(\pi i \tau).$$

Subject to the conditions noted below, we may express this result in the form

$$(9) \quad \chi(u, v) = \cot u + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n\tau} \sin 2nv + \\ + 4 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left(\sum \sin \{ (\delta - d)u + 2dv \} \right),$$

where the inner sum refers to all the positive integral divisors d, δ of n such that $d < \delta$ and $\delta \equiv d, \pmod{2}$ and $\delta(u), \delta(v)$ are less than $\delta(\pi\tau)$.

3. **The Arithmetical Identity.** If the expansions (3) and (9) are substituted in (7) and if we use the fact that $\vartheta_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n\tau} \cos 2nz$, we are led, after a fairly long calculation to the relation:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left\{ \sum_{(a)} \sin 2 [(\delta+i)x + (\delta-d+i)y + iz] \right\} = \\ & - 4 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left\{ \sum_{(b)} \sin [(\Delta'+\Delta)x + (\Delta'-\Delta)y + \right. \\ & \left. + 2(\Delta-h)z] - \sum_{(b)} \sin [-2hx + (\Delta'-\Delta)y + \right. \\ & \left. + 2(\Delta-h)z] \right\} + \cot(x+y) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \varepsilon(n) [\cos 2sz - \\ & \quad - \cos 2s(x+y+z)] - \\ & \quad - \cot y \sum_{n=1}^{\infty} q^n \varepsilon(n) [\cos 2s(x+z) - \\ & \quad - \cos 2s(x+y+z)] + \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \lambda(n) \left\{ \sum_{(d)} [\cos 2rz \sin 2t(x+z) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \cos 2r(x+z) \sin 2tz] \right\}, \right\} \end{aligned} \right.$$

where the integers $i, d, \delta, h, \Delta, \Delta', t$ are subject to the relations:

- (a) $n = i^2 + 2d\delta$, $i \geq 0$, $\delta > 0$, $d > 0$,
 (b) $n = h^2 + \Delta\Delta'$, $h \geq 0$, $0 < \Delta < \Delta'$, $\Delta \equiv \Delta', \pmod{2}$.
 (11) (c) $n = s^2$, $s > 0$, $\varepsilon(n) = 1$ or 0 according as n is or is not a perfect square.
 (d) $n = r^2 + t^2$, $r > 0$, $t > 0$, $\lambda(n) = 1$ or 0 according as n is or is not a sum of two squares.

The terms in (10) which involve the cotangent functions may be reduced by means of the formula

$$\sin r u \cot u = \sum_{k=0}^{r-1} \cos(r-2k)u.$$

The resulting terms when combined with the last series in (10) give the following simplified expression

$$(12) \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \varepsilon(n) \left\{ \sum_{j=1}^{s-1} [\sin(jx + jy + sz) - \right. \\ \left. - \sin(sx + jy + sz)] \right\} + \\ + 4 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \lambda(n) \left\{ \sum_{(d)} \sin(rx + (r-t)z) \right\}.$$

In this way it is seen that (10) contains only trigonometric terms of the form $\sin(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ where α, β, γ are integers.

Using a procedure which was probably first used by LIOUVILLE in connection with his celebrated arithmetical formulae (LIOUVILLE, in this connection merely gave results; no proofs were given) and which in recent times as been fully justified by BELL (1) we obtain the following «paraphrase» of (10):

Let $F(x, y, z)$ be a single valued function defined for integral values of the arguments and subject only to the of parity conditions:

$$F(-x, -y, -z) = -F(x, y, z), \quad F(0, 0, 0) = 0.$$

Then identity (7) implies and is implied by the arithmetical identity:

$$(13) \quad \sum_{(a)} F(\delta + i, \delta - d + i, i) = \\ = \sum_{(b)} \left\{ F\left(\frac{\Delta'+\Delta}{2}, \frac{\Delta'-\Delta}{2}, \Delta-h\right) - \right. \\ \left. - F\left(-h, \frac{\Delta'-\Delta}{2}, \Delta-h\right) \right\} + \varepsilon(n) T(n) + \lambda(n) L(n),$$

where,

(1) E. T. BELL, (1) *Trans. Am. Math. Soc.*, 22 (1921) p.p. 1-30 and 198-219, (11) *Colloquium Publications, Am. Math. Soc.*, 7, 1928.

$$T(n) = \sum_{j=1}^{s-1} \left\{ F(j, j, s) - F(s, j, s) \right\}, \quad n = s^2, \quad s > 0.$$

and

$$L(n) = \sum F(r, 0, r-t), \quad n = r^2 + t^2, \quad r, t > 0$$

and (a), (b) refer to integral partitions (11), in which n is an arbitrary positive integer.

4. Conclusion. Somewhat simpler formulae may be obtained by restricting the parity $F(x, y, z)$ through either of the following conditions:

$$1) F(-x, y, z) = F(x, y, z), F(x, -y, -z) = -F(x, y, z), F(x, 0, z) = 0;$$

$$2) F(-x, y, z) = -F(x, y, z), F(x, -y, -z) = F(x, y, z), F(x, 0, z) = 0.$$

Corresponding to these more restrictive parity conditions we have respectively:

$$(14) \quad \sum_{(a)} F(\delta + i, \delta - d + i, i) = \\ = \sum_{(b)} \left\{ F\left(\frac{\Delta' + \Delta}{2}, \frac{\Delta' - \Delta}{2}, \Delta - h\right) - \right. \\ \left. - F\left(h, \frac{\Delta' - \Delta}{2}, \Delta - h\right) \right\} + (\varepsilon) T(n),$$

$$(15) \quad \sum_{(a)} F(\delta + i, \delta - d + i, i) = \\ = \sum_{(b)} \left\{ F\left(\frac{\Delta' + \Delta}{2}, \frac{\Delta' - \Delta}{2}, \Delta - h\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(h, \frac{\Delta' - \Delta}{2}, \Delta - h\right) \right\} + \varepsilon(n) T(n).$$

These formulae are of interest in connection with certain results obtained by USPENSKY in a series of memoirs entitled «Sur les Relations entre les Nombres de Classes des Formes Binaires et Positives» (1). In fact, formulas (14) and (15) were obtained by USPENSKY using purely arithmetical methods. These methods are «elementary» in the sense that no analytical processes are used, but this does not necessarily mean that they are simple. By way of application of these results it may be said that USPENSKY has used these formulae to enumerate the number of representations of a number as the sum of three squares, the enumerating function being a divisor function. Hence we see that these formulae are related to GAUSS' classic enumeration in terms of the class number function for binary quadratic forms of negative discriminant.

It is clear that results analogous to (13), (14), (15) may be obtained by replacing equation (4) by the functions

$$f(y) = \vartheta_{\alpha}(x + y + z) \Phi_{abc}(u, v),$$

where u, v are linear functions of x and y .

(1) J. V. USPENSKY, *Bull. de l'Académie des Sciences de l'U. S. S. R* (1926) p.p. 547-566 and *Bull. Am. Math. Soc.*, **36** (1930) p.p. 743-754.

Sobre la inversión del orden en las elasticidades parciales^(*)

por J. Gallego Díaz

Madrid — España

El objeto del presente trabajo es investigar las condiciones generales bajo las cuales, dada una función $z = F(x, y)$, es lícito invertir el orden de las elasticidades parciales. Nos proponemos, pues, averiguar cuales son las funciones que satisfacen a la ecuación:

$$E''_{x,y}(z) = E''_{y,x}(z). \quad (1)$$

Recordamos que, dada una función $y = y(x)$, se llama *elasticidad* de la función y se representa por el símbolo $E(y)$ a la expresión:

$$E(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \quad (2)$$

Análogamente, dada una función z de dos variables independientes x e y , se llama *elasticidad parcial* primera de z respecto de x , a la expresión:

$$E_x(z) = z'_x \cdot \frac{x}{z}. \quad (3)$$

y elasticidad parcial primera de z respecto de y , a la expresión:

$$E_y(z) = z'_y \cdot \frac{y}{z}. \quad (4)$$

Para el calculo de las elasticidades parciales sucesivas basta observar que la elasticidad de un producto es igual a la suma de las elasticidades de los factores y que la elasticidad de un cociente es igual a la diferencia entre la elasticidad del numerador y del denominador.

Así:

$$E_x[E_x(z)] = E''_{xx}(z) = E_x(z'_x) + 1 - E_x(z)$$

$$E_y[E_y(z)] = E''_{yy}(z) = E_y(z'_y) + 1 - E_y(z)$$

$$E_y[E_x(z)] = E''_{xy}(z) = E_y(z'_x) - E_y(z) \quad (5)$$

$$E_x[E_y(z)] = E''_{yx}(z) = E_x(z'_y) - E_x(z). \quad (6)$$

La ecuación (1) equivale, pues a

$$E_y\left(\frac{z'_x}{z}\right) = E_x\left(\frac{z'_y}{z}\right), \quad (7)$$

o lo que es lo mismo:

$$z''_{xy} \cdot \frac{y}{z'_x} - z'_y \cdot \frac{y}{z} = z''_{yx} \cdot \frac{x}{z'_y} - z'_x \cdot \frac{x}{z}. \quad (8)$$

Y si suponemos cumplidas las conocidas condiciones de existencia y de continuidad de las derivadas de las funciones consideradas, podemos admitir que $z''_{xy} = z''_{yx}$ con lo cual la ecuación (8) pasa a ser

$$z''_{xy} \left[\frac{y}{z'_x} - \frac{x}{z'_y} \right] = \frac{1}{z} (y z'_y - x z'_x)$$

es decir:

$$\frac{z''_{xy} (y z'_y - x z'_x)}{z'_x \cdot z'_y} = \frac{1}{z} (y z'_y - x z'_x)$$

la cual se satisface, bien por ser:

$$a) \quad y z'_y = x z'_x \quad (9)$$

o por ser

$$b) \quad z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y. \quad (10)$$

La integración de estas dos ecuaciones en derivadas parciales es inmediata. Para la ecuación (9) se tendrá que verificar, como es sabido,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}$$

o sea:

$$L(xy) = \alpha; \quad z = \beta; \quad xy = K_1; \quad z = K_2.$$

$$Y, \text{ por tanto: } \boxed{z = \varphi(xy)} \quad (11)$$

Y para la ecuación (10), puesta en la forma:

$$\frac{z''_{xy}}{z'_x} = \frac{z'_y}{z}$$

integraremos respecto de y , resultando:

$$L z'_x = L z + L \Psi(x); \quad L z = L \frac{z'_x}{\Psi(x)}; \quad \frac{z'_x}{z} = \Psi(x)$$

e integrando respecto de x :

$$L z = \tau_1(x) + \omega_1(y)$$

(*) Recibido en Mayo, 1951.

y, por tanto:
$$z = \alpha(x) \cdot \beta(y) \quad (12)$$

Podemos comprobar el resultado (12) mediante el cambio de función: $z_1 = Lz$ o lo que es lo mismo: $z = e^{z_1}$.

Las derivadas parciales de z respecto de x e y son:

$$z'_x = e^{z_1} (z_1)'_x, \quad z'_y = e^{z_1} (z_1)'_y$$

$$z''_{xy} = e^{z_1} [(z_1)'_x (z_1)'_y + (z_1)''_{xy}]$$

y la ecuación (10) se convierte en:

$$e^{2z_1} [(z_1)'_x (z_1)'_y + (z_1)''_{xy} - (z_1)'_x (z_1)'_y]$$

y puesto que

$$e^{2z_1} \neq 0$$

resulta:

$$(z_1)''_{xy} = 0. \quad (13)$$

Las soluciones de (13) serán, pues,

$$z_1 = \gamma(x) + \delta(y)$$

y, por tanto:

$$Z = e^{z_1} = e^{\gamma(x) + \delta(y)} = \alpha(x) \cdot \beta(y). \quad (14)$$

ecuación idéntica a la (12).

La generalización al caso de una función de n variables independientes es obvia.

Dada la importancia que, a nuestro juicio, presenta el cálculo de elasticidades para el estudio de los fenómenos naturales (físicos, biológicos, económicos, psicológicos, etc.) (1) estimamos que los resultados obtenidos en el presente trabajo ofrecen un doble interés ya que, por un lado, sirven de corroboración a algunos de los conseguidos en el trabajo a que antes aludimos y, por otro lado, si admitimos, como parece lógico, que las funciones utilizadas en las ciencias experimentales satisfacen a la ecuación (1), estas han de ser del tipo de las (11) o de las (12).

Por último, es inmediato advertir que, si además de (11) suponemos que ha de cumplirse:

$$z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$$

resulta: $z = kxy$.

Y, si además de (12) suponemos que ha de cumplirse, igualmente, $z''_{x^2} + z''_{y^2} = 0$, resulta:

$$z = \cosh y (a_1 e^{hx} + b_1 e^{-hx}).$$

o bien: $z = \sinh y (a e^{hx} - b e^{-hx})$.

(1) Véase nuestro trabajo: «Una métrica universal para las ciencias experimentales», en esta misma revista, n.º 41-42, 1949, (Recensión de L. M. BLUMENTHAL en *Mathematical Reviews*, Enero 1951, pg. 3).

Sobre anéis de endomorfismos^(*)

por A. Almeida Costa

da Universidade do Porto

Introdução. No que vai seguir-se, \mathfrak{M} é um módulo e Ω um domínio operatório do mesmo, formado por endomorfismos de \mathfrak{M} . $\bar{\Omega}$ é o anel dos endomorfismos- Ω , de \mathfrak{M} , e $\bar{\Omega}' \subseteq \bar{\Omega}$ um anel contido em $\bar{\Omega}$. \mathfrak{R} será um sub-módulo- Ω , de \mathfrak{M} , podendo \mathfrak{R} afectar-se de um índice, sem perder esse significado. O conjunto dos endomorfismos pertencentes a $\bar{\Omega}'$, que aniquilam \mathfrak{R} , constitui um ideal direito, representado por \mathfrak{s} e chamado *ideal aniquilador*. A \mathfrak{R}_i corresponderá \mathfrak{s}_i , no mesmo sentido. Por *ideal de contracções* em \mathfrak{R} , designaremos o conjunto \mathfrak{n} dos endomorfismos de $\bar{\Omega}'$ que aplicam \mathfrak{M} dentro de \mathfrak{R} . A \mathfrak{R}_i corresponderá \mathfrak{n}_i , no mesmo sentido.

O § 2 destina-se a completar, em certos pontos, as investigações de que demos larga conta em dois trabalhos anteriores: [10] — «Sobre os endomorfismos dos módulos», *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, 1948, vol. xxxiii, págs. 5 a 32; [14] — *Über Kontraktions- und Vernichtungs Ideale in der allgemeinen Modultheorie*, *Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa*, 2.ª série, A—Ciências Matemáticas, vol. 1, 1951, págs. 297 a 344. Em particular, demonstraremos um teorema A' e algumas consequências do mesmo, em correspondência com o teorema A e certas consequências que se encontram em [14]. O teorema $42'$ encontra-se enunciado a págs. 35 do importante livro de N. JACOBSON, «*Theory of rings*», 1943, livro que adiante será indicado por (II). Depois de darmos uma demonstração, completamo-lo com o enunciado do teorema $43'$. Quanto aos teoremas $64'$ e $65'$, que caracterizam os módulos completamente redutíveis, deverão comparar-se com os teoremas 36 e 37 de [10, págs. 31 e 32], os quais constituem uma outra caracterização dos mesmos módulos. As notações, a terminologia e a numeração dos teoremas farão corpo comum aqui, em [14] e num artigo em publicação nos *Anais da Faculdade de Ciências do Porto*, tomo xxxv, 1950-1951.

Esse Capítulo formará o Cap. xv da nossa obra «*Sistemas hiper-complexos*», da qual os doze primeiros Capítulos se encontram em volume, já desde 1948, e os Capítulos xiii e xiv constituem o texto duma conferência realizada no *Congresso Luso-Espanhol*, levado a efeito em Lisboa, em Outubro de 1950. O leitor encontrará nas *Actas* do referido Congresso, vol. 1, a reprodução integral dessa conferência. Julgamos ser úteis neste momento, repetindo que os interessados poderão actualizar facilmente os seus conhecimentos no domínio da *Teoria dos Anéis e Ideais não comutativos*, se, depois de adquirirem as noções mais elementares da *Teoria dos Grupos* e da *Teoria dos Anéis*, quiserem ler os quatro primeiros Capítulos do citado livro «*Sistemas hiper-complexos*», e, em seguida, precisamente os referidos Capítulos xiii, xiv e xv. O conjunto constitui uma exposição perfeitamente ordenada e acessível. Ele deverá ser seguido, de resto, de três Capítulos mais, cuja publicação fica diferida para mais tarde.

No § 3, tratando especialmente do caso em que Ω é um anel de divisão, limitamo-nos a dar uma demonstração, em parte modificada, de um teorema que se encontra em N. JACOBSON, «*Structure theory of simple rings without finiteness assumptions*», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 57, 1945, págs. 228 a 245. Esse teorema refere-se a *anéis densos*, que aquele algebrista americano define do modo seguinte: dado \mathfrak{M} e suposto Ω um anel de divisão, diz-se que $\bar{\Omega}'$ é denso em \mathfrak{M} , sobre Ω , se, considerados x_1, \dots, x_n e \mathfrak{M} , independentes- Ω , e também y_1, \dots, y_n e \mathfrak{M} , independentes- Ω ou não, existir um endomorfismo $A \in \bar{\Omega}'$ tal que $x_i A = y_i$, ($i=1, 2, \dots, n$). As referências a esta memória de JACOBSON serão feitas por [4].

No § 4, em face dum artigo de T. NAKAYAMA, *Über einfache distributive Systeme endlicher Ränge*, *Proceedings of the Imperial Academy*, Tokyo, vol. xx, 1944, págs. 61 a 66, veremos como um método de demonstração de C. CHEVALLEY leva a estabelecer um teorema

(*) Recebido em Maio de 1951.

que também se encontra em [4], embora provado aí por forma completamente diferente. Esse teorema refere-se a *anéis irreductíveis*, que podem definir-se como vai ver-se. Imaginemos \mathfrak{M} e o anel de divisão Ω . $\bar{\Omega}$ diz-se irreductível em \mathfrak{M} , sobre Ω , se não existir sub-módulo de \mathfrak{M} que seja admissível- $\bar{\Omega}$. As referências ao trabalho citado de NAKAYAMA serão feitas por [3]. Os números das diferentes referências jogam também com os que se utilizam nos Capítulos XIII a XVIII, de que atrás falámos.

2. Sobre algumas proposições gerais. Em [14, § 2], demonstrámos um teorema *A*, que não teve o seu correspondente em [14, § 3]. Todavia, vale para sub-módulos- Ω , o

TEOREMA A': *Se $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ e $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, os respectivos ideais aniquiladores, supondo $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}$, verificam a igualdade $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$, como soma directa. Sabemos que $\mathfrak{s} \supseteq (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$, [14, teor. 2']. Dado $B \in \mathfrak{s}$, tomemos $m \in \mathfrak{M}$. Decompondo m de duas maneiras distintas, sob as formas $m = n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2$, ($n_1, n'_1 \in \mathfrak{N}_1$; $n_2, n'_2 \in \mathfrak{N}_2$), vê-se que $n_1 - n'_1 = n'_2 - n_2 \in \mathfrak{N}$, de modo que se tem $n_1 B = n'_1 B$, $n_2 B = n'_2 B$. Conclui-se, assim, que, dado $m \in \mathfrak{M}$, se obtêm endomorfismos- Ω , de \mathfrak{M} , por via das seguintes correspondências: $m \rightarrow n_1 B = m A'_2$, $m \rightarrow n_2 B = m A'_1$. Supondo $m - n_1 = -n_1 + 0 \in \mathfrak{N}_1$, vê-se que $n_1 \rightarrow n_1 A'_1 = 0 \cdot B = 0$, pelo que $\mathfrak{N}_1 A'_1 = (0)$, $A'_1 \in \mathfrak{s}_1$. É, análogamente, $A'_2 \in \mathfrak{s}_2$. E, sendo $m = n_1 + n_2$, $m B = n_1 B + n_2 B = m A'_2 + m A'_1 = m (A'_1 + A'_2)$, conclui-se $B = A'_1 + A'_2$. Por isso, tem-se $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$. Ora esta soma é directa, pelo facto de ser $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 = (0)$, como resulta de [14, teor. 1'].*

Em todo este § admitiremos sempre $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}$ e utilizaremos a noção de *aniquilador modular*, para significar sub-módulo- Ω que é aniquilado por um dado conjunto de endomorfismos. Também fixaremos a regra geral de que um elemento dum conjunto representado por uma letra gótica maiúscula se indicará pela letra latina minúscula correspondente.

COROLÁRIO C': *Supondo $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, tem-se $\bar{\Omega} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$.*

COROLÁRIO D': *Nos termos do corolário anterior, fazendo a decomposição $1 = E'_1 + E'_2$, ($E'_i \in \mathfrak{s}_i$), em idempotentes ortogonais, vê-se que \mathfrak{N}_i e \mathfrak{s}_1 são aniquiladores reciprocos, de sorte que \mathfrak{N}_1 é aniquilador modular de E'_1 .*

Representando por $\mathfrak{P}_i \supseteq \mathfrak{N}_i$ o aniquilador modular de \mathfrak{s}_i , ($i=1, 2$), sabemos que $(0) = \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$, [14, teor. 2']. Suponhamos $x \in \mathfrak{P}_1$, $x \notin \mathfrak{N}_1$ e escrevamos $x = n_1 + n_2$.

Será $x E'_1 = n_1 E'_1 + n_2 E'_1 = 0 = n_2 E'_1$, de sorte que $n_2 \neq 0$ e $n_2 \in \mathfrak{P}_1$. Assim, não será nula a intersecção dos \mathfrak{P}_i , o que é absurdo. Conclui-se $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{N}_1$, e, portanto, $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{N}_1$. Como \mathfrak{s}_1 e E'_1 têm o mesmo aniquilador, modular segue-se o resto do corolário.

O teorema *A'* arrasta a possibilidade de se enunciar o teorema *B'*, em correspondência com o teorema *B*, de [14, § 5]. Tem-se:

TEOREMA B': *Se $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, e se se admite que \mathfrak{s}_1 é nilideal e que \mathfrak{s}_2 é nilideal bilateral, \mathfrak{s} é nilideal; se \mathfrak{s}_1 e \mathfrak{s}_2 são nilpotentes, \mathfrak{s} é nilpotente; e, se \mathfrak{s}_1 e \mathfrak{s}_2 são semi-nilpotentes, \mathfrak{s} é semi-nilpotente.*

Ainda sobre o conteúdo de [14, § 5] daremos o

COROLÁRIO A': *Supondo $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = \mathfrak{M}$, então, admitindo que \mathfrak{s}_1 é nilideal, tem-se $\mathfrak{N}_2 = (0)$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}$, consequentemente, $\mathfrak{s}_1 = (0)$. Este corolário só merece enunciado pela unidade que dá aos nossos raciocínios. Ele resulta, é certo, do teorema 17' de [14, § 5] mas traduz também propriedades imediatas da soma directa.*

Passando a [14, § 6], podemos enunciar o

TEOREMA C': *Se \mathfrak{N}_1 e \mathfrak{N}_2 tiverem nilideais aniquiladores \mathfrak{s}_1 e \mathfrak{s}_2 , então, supondo $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, não existe sub-módulo $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{N}$ que possa ser aniquilador modular dum idempotente. De facto, supondo $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{N}$, o ideal aniquilador de \mathfrak{P} será $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$. Sabemos que não há em \mathfrak{s} elemento idempotente, pelo que o não haverá em \mathfrak{E} .*

Em [(II), pgs. 35], encontra-se o enunciado que vai seguir-se:

TEOREMA 42': *Seja \mathfrak{M} um módulo- Ω e suponhamos $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_h$, com $(\mathfrak{N}_i, (\mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1}, \dots, \mathfrak{N}_h)) = \mathfrak{M}$, ($i=1, 2, \dots, h$). Então, pondo $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{i-1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \dots \cap \mathfrak{N}_h$, conclui-se: 1') $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i) = \mathfrak{M}$; 2') $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}_i = (0)$; 3') $(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{i-1}, \mathfrak{M}_{i+1}, \dots, \mathfrak{M}_h) = \mathfrak{N}_i$; 4') $(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_h) = \mathfrak{M}$. Da demonstração, que é simples, vamos dar apenas a parte que prova 3'). Sem dúvida que $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{N}_i$, se $j \neq i$. Resta mostrar que cada $n_i \in \mathfrak{N}_i$ pode sempre ser escrito sob a forma $n_i = m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_h$, ($m_j \in \mathfrak{M}_j$). Dado n_i , se este elemento pertence a todos os \mathfrak{N}_j , então $n_i = 0$ tem a forma indicada. Supondo, de contrário, que, por ex., é \mathfrak{N}_k , o primeiro*

\mathfrak{N}_i que não contém n_i , podemos escrever $n_i = n_{k_1} + m_{k_1}$, ($i \neq k_1$). Vê-se que $n_{k_1} \in \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{k_1}$. Em seguida, seja \mathfrak{N}_{k_2} , ($i \neq k_2 > k_1$), o primeiro \mathfrak{N}_i que não contém n_{k_1} . Podemos escrever $n_{k_1} = n_{k_2} + m_{k_2}$, com $n_{k_2} \in \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{k_2}$, e também $n_i = n_{k_2} + m_{k_2} + m_{k_1}$. O raciocínio prossegue até se chegar a um n_{k_i} , com $i \neq k_i$, pertencente a todos os \mathfrak{N}_i . Nesse momento é $n_{k_i} = 0$ e $n_i = m_{k_1} + \dots + m_{k_i}$, como se afirmou.

Em complemento, podemos dizer:

TEOREMA 43': Nas condições do teorema 42', existem idempotentes E'_1, \dots, E'_h , tais que: 5') \mathfrak{N}_i é o aniquilador modular de E'_i e o ideal direito aniquilador de \mathfrak{N}_i é $\mathfrak{s}'_i = E'_i \bar{\Omega}$; 6') $1 = E'_1 + \dots + E'_h$ e $E'_i E'_j = 0$, se $i \neq j$; 7') $\bar{\Omega} = E'_1 \bar{\Omega} + \dots + E'_h \bar{\Omega}$; 8') o ideal de contrações em \mathfrak{N}_i é $n_i = \bar{\Omega} E'_1 + \dots + \bar{\Omega} E'_{i-1} + \bar{\Omega} E'_{i+1} + \dots + \bar{\Omega} E'_h$; 9') o ideal direito aniquilador de \mathfrak{N}_i é $E'_1 \bar{\Omega} + \dots + E'_{i-1} \bar{\Omega} + E'_{i+1} \bar{\Omega} + \dots + E'_h \bar{\Omega}$; 10') o ideal de contrações em \mathfrak{M}_i é $m_i = \bar{\Omega} E'_i$. A afirmação 5') resulta imediatamente do corolário D'. Em seguida, escrevamos, para $x \in \mathfrak{M}$, $x = m_1 + m_2 + \dots + m_h$, com $m_i \in \mathfrak{M}_i$. O corolário D' garante-nos também ser \mathfrak{N}_i o aniquilador modular de $1 - E'_i$. Por isso, sendo $m_i = m_i E'_i + m_i (1 - E'_i)$, tem-se $m_i = m_i E'_i$. Nessas condições, é $x E'_i = m_i E'_i = m_i$, de sorte que $x (E'_1 + \dots + E'_h) = x E'_1 + \dots + x E'_h = m_1 + \dots + m_h = x$. Por outro lado, $x E'_i E'_j = m_i E'_j = 0$, se $j \neq i$, pelo que 6') fica provado. 7') traduz uma propriedade elementar da teoria dos anéis; 8'), 9') e 10') encontram-se provados em [14, teor. 19 e 19'].

Nos dois teoremas, que ainda vamos estabelecer neste §, é introduzida a condição de máximo para os sub-módulos- $\bar{\Omega}$, de \mathfrak{M} .

TEOREMA 64': Se \mathfrak{M} é um módulo- $\bar{\Omega}$ com condição de cadeia ascendente e se $\bar{\Omega}$ não tem radical; então, admitindo que, para cada sub-módulo máximo $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{M}$, é diferente de zero o ideal aniquilador \mathfrak{s} , podemos afirmar que (0) é intersecção dum certo número de sub-módulos máximos e que \mathfrak{M} é completamente redutível. Neste enunciado só oferece interesse o caso em que \mathfrak{M} não é irredutível- $\bar{\Omega}$. Tomemos, em \mathfrak{M} , um sub-módulo máximo $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{M}$. O ideal \mathfrak{s}_1 não pode ser nilideal, pois que, se o fosse, seria nilpotente e de expoente 2, [14, teor. 16'], e $\bar{\Omega}$ teria radical não nulo. Por esse facto, \mathfrak{N}_1 é precisamente aniquilador modular dum idempotente $E_1 \in \mathfrak{s}_1$, [14, teor. 23'], tendo-se $\mathfrak{N}_1 E_1 = (0)$, $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M} E_1 = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}'$, se $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M} E_1$. E vê-se que $n_1 E_1 = 0$, $n' E_1 = n'$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1$, sem esquecermos a relação $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}(1 - E_1)$. Se \mathfrak{N}' for máximo, o teorema está demonstrado, pois que ambas as parcelas de \mathfrak{M} serão também sub-módulos sim-

ples. Se \mathfrak{N}' não é máximo, tomemos $\mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{N}'$ e máximo. É, então, $\mathfrak{N}_2 E_2 = (0)$, $(0) = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M} E_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M} E_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_2$, como anteriormente. E vê-se que o aniquilador modular de $E_1 E_2$ é $-\mathfrak{M}$, pois $\mathfrak{M} E_1 E_2 = \mathfrak{N}' E_2 \subseteq \mathfrak{N}_2 E_2 = (0)$. É válida a igualdade $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_2 \cap (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'') = \mathfrak{N}_2 \cap \Omega_1$, com $\Omega_1 = (\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'')$, como vamos provar. Sem dúvida que \mathfrak{N}' está contido no 2.º membro. Se, agora, $n_2 = n' + n''$ for um elemento do 2.º membro, do facto de ser $n_2 E_2 = 0 = 0 + n''$, concluímos $n_2 = n'$ e \mathfrak{N}' como se deseja. E tem-se $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \Omega_1$, ao mesmo tempo que, sendo $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1$, é $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \Omega_1 + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$, $\Omega_1 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2$. Se $\Omega_1 \neq \mathfrak{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, pois que, então, \mathfrak{N}' , \mathfrak{N}' e $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ são simples. Se Ω_1 não é máximo, o processo continua. Obtém-se $(0) = \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{M} E_3 = \mathfrak{N}_3 \cap \mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_3 + \mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{M} E_1 E_3 = \mathfrak{M} E_2 E_3 = (0)$, pois que $\mathfrak{N}_3 \supset \Omega_1 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2$. São válidas as igualdades $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}''' + \mathfrak{N}'' + \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 = \Omega_2 + \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3$, $\Omega_2 = \mathfrak{M} E_1 + \mathfrak{M} E_2 + \mathfrak{M} E_3$. Se $\Omega_2 \neq \mathfrak{M}$ é máximo, o teorema fica demonstrado, com $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 \cap \Omega_2$ e com a decomposição anterior para \mathfrak{M} . A cadeia $(0) \subset \mathfrak{N}' \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ é finita, de sorte que se chega a encontrar Ω_{n-2} máximo e tal que $(0) = \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{n-1} \cap \Omega_{n-2}$, $\mathfrak{M} = \Omega_{n-2} + \mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{n-1}$, $\Omega_{n-2} = \mathfrak{M} E_1 + \dots + \mathfrak{M} E_{n-1}$. Nesse momento, o sub-módulo simples $\mathfrak{N}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{N}_{n-1}$ tem a forma $\mathfrak{M} E_n$, vindo $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} E_1 + \dots + \mathfrak{M} E_n$. Os idempotentes E_i verificam as relações $E_i E_j = 0$, ($i < j$; $i = 1, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, n$).

Inversamente, se \mathfrak{M} é um módulo completamente redutível, a condição de cadeia ascendente é válida, o radical do seu anel de endomorfismos é nulo, [10, pgs. 30; (II), pgs. 58 e seguintes], e, para cada sub-módulo máximo, o ideal aniquilador é $\neq (0)$. Portanto:

TEOREMA 65': As condições enunciadas no teorema 64' são necessárias e suficientes, para que \mathfrak{M} seja completamente redutível.

Da comparação com os teoremas 36 e 37, de [10], resulta ainda que as mesmas condições são necessárias e suficientes para que valha em \mathfrak{M} a condição de cadeia descendente, $\bar{\Omega}$ não tenha radical e seja diferente de zero o ideal de contrações num sub-módulo mínimo.

3. Sobre anéis densos. Trata-se de provar neste § o seguinte

TEOREMA: Se $\bar{\Omega}$ é um anel denso de endomorfismos- $\bar{\Omega}$, de \mathfrak{M} , e se \mathfrak{M} é um ideal bilateral de $\bar{\Omega}$ que contém transformações lineares finitas, então, dado o sub-módulo- $\bar{\Omega}$ finito $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, há uma projecção $E \in \bar{\Omega}$,

de \mathfrak{M} sobre \mathfrak{N} . Convém observar que nenhuma hipótese se faz quanto à dimensionalidade de \mathfrak{M} , sobre $\bar{\Omega}$. No caso de $\mathfrak{N}=[x]$ ser um sub-módulo- $\bar{\Omega}$ com uma única dimensão, JACOBSON, [4], faz a demonstração como segue. Imaginemos $0 \neq B \in \mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}B = -[y_1, \dots, y_n]$ um espaço finito com a base formada pelos elementos y_i , supostos independentes- Ω . Admitamos que $z_1 \in \mathfrak{M}$, $z_1 B = y_1$, $A_1 \in \bar{\Omega}$, $y_1 A_1 = z_1$, $y_i A_1 = 0$, se $i \neq 1$. Vê-se que $\mathfrak{M}BA_1 = [y_1, \dots, y_n]A_1 \subseteq \subseteq [z_1]$, $z_1 B A_1 = z_1$, de sorte que $E_1 = B A_1 \in \mathfrak{M}$ é idempotente e tal que $\mathfrak{M}E_1 = [z_1]$. Para se construir o idempotente E tal que $\mathfrak{M}E = [x]$, suponhamos $A_2, A_3 \in \bar{\Omega}$, $z_1 A_2 = x$, $A_3 = z_1$. Então, verifica-se que $\mathfrak{M}A_3 E_1 A_2 \subseteq [z_1]$, $A_2 = [x]$, $x A_3 E_1 A_2 = x$, de modo que $A_3 E_1 A_2 = E$ é precisamente o idempotente procurado. Passando ao caso em que $\mathfrak{N} = [x_1, \dots, x_n]$, onde os x_i são independentes- Ω , imaginemos construídos idempotentes E'_i , ($i=1, 2, \dots, n$), tais que $[x_1, \dots, x_n] = \mathfrak{M}E'_1 + \dots + \mathfrak{M}E'_n$, $\mathfrak{M}E'_i = [x_i]$, $E'_i \in \mathfrak{M}$. É fácil de construir um idempotente F e \mathfrak{M} nas condições seguintes: $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}F$, $E'_1 F = F E'_1 = 0$. Vejamos primeiramente que se tem $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2(1-E'_1)$ onde, 1 significa o endomorfismo idêntico. Um elemento do 2.º membro é da forma $mE'_1 + m'E'_2(1-E'_1) = (m-m'E'_2)E'_1 + m'E'_2$, ($m, m' \in \mathfrak{M}$), o que mostra pertencer ao primeiro. Inversamente, um elemento do 1.º membro é da forma $mE'_1 + m'E'_2 = mE'_1 + m'E'_2 + m'E'_2 E'_1 - m'E'_2 E'_1 = (m+m'E'_2)E'_1 + m'E'_2(1-E'_1)$, pelo que pertence ao segundo. O referido 2.º membro é uma soma directa. Como a sua 2.ª parcela não é nula e é de 1.ª ordem, designemos por $E''_1 \in \mathfrak{M}$ um idempotente tal que $\mathfrak{M}E''_1(1-E'_1) = \mathfrak{M}E''_1$. Vê-se que $E''_1 E'_1 = 0$. Pondo, então, $F = E''_1 - E'_1 E''_1$, vem imediatamente $F E'_1 = E'_1 F = 0$, $F F = F$, $E''_1 F = E''_1$, $F E''_1 = F$, $\mathfrak{M}E''_1 = \mathfrak{M}E''_1 F \subseteq \mathfrak{M}F$, $\mathfrak{M}F = \mathfrak{M}F E''_1 \subseteq \mathfrak{M}E''_1$, e, portanto, $\mathfrak{M}E''_1 = \mathfrak{M}F$. Em seguida, o idempotente $E_1 = E'_1 + F$ é tal que $[x_1, x_2] = \mathfrak{M}E_1$. O processo continua, pondo $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E'_3$. Chegamos a encontrar o idempotente G nas seguintes condições: $G \in \mathfrak{M}$, $G E_1 = E_1 G = 0$, $\mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}G$, $\mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}E'_2 + \mathfrak{M}E'_3 = \mathfrak{M}E'_1 + \mathfrak{M}F + \mathfrak{M}G$. Vamos ver que os três idempotentes E_1, F, G são ortogonais.

De facto,

$$\begin{aligned} E_1 E'_1 &= E'_1, & E'_1 E_1 &= E'_1, & G E_1 E'_1 &= 0 = G E'_1, \\ E'_1 E_1 G &= 0 = E'_1 G, & E_1 F &= F, & F E_1 &= F, \\ G E_1 F &= G F = 0, & F E_1 G &= F G = 0. \end{aligned}$$

Teremos, deste modo, $[x_1, x_2, x_3] = \mathfrak{M}E_1 + \mathfrak{M}G = \mathfrak{M}E_2$, $E_2 = E_1 + G = E'_1 + F + G$. O raciocínio prossegue, até à demonstração do teorema. Tem lugar este

ADITAMENTO. A projecção E e $\bar{\mathfrak{M}}$ decompõe-se em projecções ortogonais e_i todas pertencentes a \mathfrak{M} , de tal modo que

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n] &= \mathfrak{M}E = \mathfrak{M}e_1 + \dots + \mathfrak{M}e_n, & \begin{cases} e_i e_k = 0, & \text{se } i \neq k; \\ k \bar{\equiv} n. \end{cases} \\ [x_1, \dots, x_k] &= \mathfrak{M}e_1 + \dots + \mathfrak{M}e_k, \end{aligned}$$

4. Sobre a densidade dos anéis irreduzíveis. Do teorema em causa neste §, que vai ser enunciado, a parte directa é provada como em [4]. O que tem principal interesse é a demonstração da parte inversa, à qual se é levado, rigorosamente falando, com um raciocínio devido a CHEVALLEY, que se encontra em [3].

TEOREMA de CHEVALLEY-JACOBSON. Seja $\bar{\Omega}'$ um anel denso arbitrário em \mathfrak{M} , sobre Ω , este suposto anel de divisão. $\bar{\Omega}'$ é anel irreduzível e Ω é o seu comutador. Inversamente, se $\bar{\Omega}'$ é irreduzível e o anel de divisão $\bar{\Omega}'$ é o seu comutador, então $\bar{\Omega}'$ é denso em \mathfrak{M} , sobre Ω .

Partamos do anel denso $\bar{\Omega}'$ e suponhamos $(\mathfrak{M}/\Omega) = 1$, isto é, \mathfrak{M} de 1.ª ordem sobre Ω . Então, pois que \mathfrak{M} é finito, o anel denso $\bar{\Omega}'$ é a totalidade dos endomorfismos- Ω , pelo que é o comutador de Ω . Podemos afirmar que $\bar{\Omega}'$ é anti-isomorfo de Ω . Escrevendo $\mathfrak{M} = x\bar{\Omega}'$, ($0 \neq x \in \mathfrak{M}$), pois que $\bar{\Omega}'$, por ser denso, é irreduzível, procuremos também o comutador de $\bar{\Omega}'$. Como $\bar{\Omega}'$ é anel de divisão, o seu comutador é anel de divisão Θ , que contém $\bar{\Omega}'$, e é anti-isomorfo de $\bar{\Omega}'$. Seja $d' \in \Theta$. Por se ter $x d' = x d$, para um certo $d \in \Omega$, vem, se $d' \neq d$, $x(d' - d) = 0$, $x(d' - d)(d' - d)^{-1} = -x = 0$, o que é absurdo. Assim, $d' = d$, $d' \in \Omega$ e $\Theta = \Omega$. $\bar{\Omega}'$ e Ω são, portanto, comutadores recíprocos, no caso de \mathfrak{M} ter uma só dimensão. Inversamente, se $\bar{\Omega}'$ é irreduzível e Ω o seu comutador, na hipótese $(\mathfrak{M}/\Omega) = 1$, $\bar{\Omega}'$ é denso em \mathfrak{M} sobre Ω , sendo $\bar{\Omega}'$ e Ω comutadores recíprocos. O teorema encontra-se completamente demonstrado, no caso de \mathfrak{M} ter uma só dimensão.

Suponhamos agora que isso não tem lugar e voltemos ao anel $\bar{\Omega}'$. Admitindo que B pertence ao comutador de $\bar{\Omega}'$, trata-se de provar que $B = b \in \Omega$. Seja $0 \neq x \in \mathfrak{M}$. Em primeiro lugar, x e $x B$ são dependentes- Ω , visto que, de contrário, poderíamos encontrar $C \in \bar{\Omega}'$, nas condições seguintes: $x C = 0$, $x B C \neq 0$, $x B C = x C B = 0$, o que é absurdo. Pondo $x B = x b_x$, onde $b_x \in \Omega$, vamos provar que, para $y \in \mathfrak{M}$ e qualquer, é também $y B = y b_x$. De facto, escolhamos $A \in \bar{\Omega}'$ de modo que seja $x A = y$. Então, $x A B = x B A = y B = x b_x A = x A b_x = y b_x$, como se quer. Demonstrado que b_x é independente de x , poremos $x B = x b$, o que prova a afirmação, pois, se $x = 0$, $0 \cdot B = 0 \cdot b = 0$. A parte directa do teorema

encontra-se, assim, com JACOBSON, completamente demonstrada. A parte inversa será provada deste modo: pois que \mathfrak{M} não é de 1.ª ordem relativamente a Ω , começaremos por mostrar que, dados x_1, \dots, x_n, x_{n+1} e \mathfrak{M} e independentes- Ω , é possível encontrar endomorfismos B_1, \dots, B_n, B_{n+1} e $\bar{\Omega}'$, para os quais $x_i B_i = x_i, x_j B_j = 0$, ($i \neq j$; $j = 1, 2, \dots, n+1$), contanto que se admita existirem n endomorfismos A_i para os quais $x_i A_i = x_i, \dots, x_n A_n = -x_n, x_i A_j = 0$; se $i \neq j$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$); depois, tendo em conta a irredutibilidade de $\bar{\Omega}'$ e a existência dos A_i , procuram-se C_1, \dots, C_n e $\bar{\Omega}'$ realizando as igualdades $x_i C_i = y_i, \dots, x_n C_n = y_n$, onde os y_i são quaisquer elementos de \mathfrak{M} . O endomorfismo $C = \sum A_i C_i$ e $\bar{\Omega}'$ será tal que $x_i C = y_i, \dots, x_n C = -y_n$, e a densidade de $\bar{\Omega}'$ ficará estabelecida.

DEMONSTRAÇÃO. Encontrados os A_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), designaremos por \mathfrak{s} o ideal direito aniquilador do sub-espaço $[x_1, \dots, x_n]$. Para cada $x_0 \notin [x_1, \dots, x_n]$, vamos ver que é $x_0 \mathfrak{s} \neq (0)$. Se for $x_0 \mathfrak{s} = (0)$, começemos por fixar i e consideremos B tal que $x_i B = 0$. Então, sendo $x_i A_i B = x_i B = 0$ e $x_j A_i B = 0$, concluímos $A_i B \in \mathfrak{s}$ e $x_0 A_i B = 0$. A correspon-

dência $x_i A \rightarrow x_0 A_i A$, ($A \in \bar{\Omega}'$ é qualquer), por ser $x_i \bar{\Omega}' = \mathfrak{M}$, é um endomorfismo de \mathfrak{M} , visto que, se se admitir $x_i A = x_i C$, é $x_i(A-C) = 0$, e, pela observação acabada de fazer quanto a B , é $x_0 A_i(A-C) = 0$, o que dá $x_0 A_i A = x_0 A_i C$. O referido endomorfismo é um endomorfismo- $\bar{\Omega}'$, que representaremos por $a_i \in \Omega$. Ele dá $x_i A \rightarrow x_i A a_i = -x_0 A_i A$; $x_i = x_i A_i \rightarrow x_i A_i a_i = x_0 A_i A_i$; e, como $x_i(A_i^2 - A_i) = 0$, é $A_i^2 - A_i \in \mathfrak{s}$, $x_0(A_i^2 - A_i) = 0$, $x_0 A_i A_i = x_0 A_i$. Posto isto, tomemos $D = \sum A_i$. Vale $x_j(A-DA) = x_j A - x_j A = 0$, $x_0(A-DA) = -(x_0 - x_0 D)A = 0$. E, como A é qualquer, tem-se $x_0 - x_0 D = 0$, $x_0 = x_0 D = x_0 \sum A_i$. Os endomorfismos- $\bar{\Omega}'$, representados por $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Omega$, dão, assim, $x_0 = x_0 \sum A_i = x_0 \sum A_i A_i = \sum x_i A_i a_i = \sum x_i a_i \in [x_1, \dots, x_n]$, contra a hipótese feita sobre x_0 . Estabelecido que $x_0 \mathfrak{s} \neq (0)$, tem-se $x_0 \bar{\Omega}' = \mathfrak{M}$, e, portanto, $x_0 \mathfrak{s} = \mathfrak{M}$. Existe $A_0 \in \mathfrak{s}$ para o qual $x_0 A_0 = x_0$. Também existem $A'_i \in \mathfrak{s}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), para os quais $x_0 A_i = x_0 A'_i$. Pondo, então, $x_0 = x_{n+1}$, $A_0 = B_{n+1}$, $B_i = A_i - A'_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), vê-se que $x_{n+1} B_{n+1} = x_{n+1}$, $x_i B_{n+1} = -x_i A_0 = 0$, $x_i B_i = x_i A_i - x_i A'_i = x_i$, $x_j B_i = x_j A_i - x_j A'_i = 0$, ($j \neq i$). A demonstração está feita.

Über eine Kennzeichnung von Bogen minimalen Ordnungswertes^(*)

von Otto Haupt

Universität Erlangen Deutschland

In dem Gesamtwerk von F. GOMES TEIXEIRA finden sich zahlreiche Arbeiten, die sich mit ebenen Kurven und deren Differentialgeometrie beschäftigen. Es erscheint daher nicht unangemessen, dem Gedenken an den einhundertsten Geburtstag Teixeira's die Erörterung einer Fragestellung zu widmen, welche ihren Ausgangspunkt in Sätzen der ebenen Differentialgeometrie hat.

1. Unser Problem lässt sich an zwei bekannten Beispielen bequem erläutern.

1.1. Es sei E_2 die euklidische Ebene. Ferner sei B ein offener⁽¹⁾ Konvexbogen in E_2 , der *streckenfrei* ist (d. h. der keine Strecke enthält). Lassen wir irgend zwei Punkte p' und p'' von B gegen einen Punkt p von B konvergieren und konvergiert gleichzeitig die Verbindungsgerade von p' und p'' gegen eine Gerade P (durch p), so bezeichnen wir P als eine (Geraden-) g -*Paratingente* an B in p und p selbst als *Schmiegpunkt* von P auf B . Zwei Paratingenten Q' , Q'' mit den *Schmiegpunkten* q' , q'' (wobei $q' = q''$ zugelassen ist) liegen nun *gleichartig* in q' bzw. q'' zu B im folgenden Sinne: In einer (hinreichend kleinen) Umgebung von q' bzw. q'' (in E_2) liegen Q' bzw. Q'' ganz auf einer Seite von B und zwar beide auf der gleichen Seite; dabei können zwei verschiedene Seiten von B erklärt werden wie folgt: Man ergänze B zu einer einfachen geschlossenen beschränkten Kurve C (was für jeden einfachen Bogen (nicht nur für Kon-

vexbogen) möglich ist)⁽¹⁾ und führe als die eine (etwa positive) bzw. als die andere (etwa negative) Seite von B das Innere bzw. das Äußere von C ein. Wir erinnern noch daran, dass B streckenfrei und konvex ist genau dann, wenn B bezüglich des Systems g der Geraden in E_2 den $(g-)$ Ordnungswert Zwei besitzt, d. h. wenn B mit jeder Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam hat. Bezeichnet man allgemeiner als $(g-)$ Ordnungswert eines Bogens das Maximum (falls es existiert) der Mächtigkeit des Durchschnittes des Bogens mit den Geraden, so ist der Ordnungswert Zwei das Minimum aller (überhaupt möglichen) Ordnungswerte. Unsere bisherigen Feststellungen besagen also

Satz: Vor. Es sei g das System aller Geraden des E_2 . Ferner sei B ein offener Bogen (in E_2) vom g -Ordnungswert Zwei, d. h. vom minimalen g -Ordnungswert. Beh. Alle g -Paratingenten von B liegen gleichartig zu B .

Anmerkung (1) Es ist B notwendig streckenfrei, wenn B vom minimalen g -Ordnungswert Zwei ist. — (2) Man beachte folgendes: Jede g -Paratingente ist «freie» Tangente im Gegensatz zur Tangente im üblichen Sinne, der «gebundenen» Tangente, bei der einer der Punkte, etwa p'' , stets gleich dem Grenzpunkt p ist. In einem Punkt q von B können unendlich viele Paratingenten (mit q als Schmiegpunkt) existieren. (Für Konvexbogen kann dies allerdings nur in abzählbar vielen Punkten eintreten; und genau in diesen Punkten gibt es dann mehrere gebundene Tangenten an den Konvexbogen und zwar genau zwei)⁽²⁾.

* Eingegangen am 4/6/1951.

(1) Unter einem (einfachen, abgeschlossenen) Bogen A verstehen wir ein (beschränktes) topologisches Bild einer abgeschlossenen Strecke oder ev. der Kreisperipherie in den E_2 ; speziell bezeichnen wir ein topologisches Bild der Kreisperipherie auch als Kurve. Unter einem offenen Bogen verstehen wir ein topologisches Bild einer offenen Strecke.

(1) Vgl. z. B. B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorl. über Topologie I*, (Berlin 1923) S. 69.

(2) Vgl. z. B. HAUPT-AUMANN-PAUC, *Diff. — und Integr. Rechn.* II. Bd. 2. Aufl. (Berlin 1950), Nr. 2. 2. 5.

Wir fragen nun, ob und in welcher Weise dieser Satz sich *umkehren* lässt. Dass, bei einer etwaigen Umkehrung des Satzes, an den Bogen B ausser der Forderung der gleichartigen Lage der g -Paratingenten noch weitere Forderungen zu stellen sind, zeigt das Beispiel etwa des durch $0 < \varphi < 2\pi$ bestimmten Teilbogens B der Archimedischen Spirale $r = \varphi, \varphi > 0$; denn einerseits besitzt jeder Punkt p von B eine konvexe Umgebung auf B , andererseits gibt es etwa zur Geraden $\varphi = \pi/4$ beliebig benachbarte Geraden, welche mit B drei Punkte gemeinsam haben. Eine Forderung, durch welche derartige Vorkommnisse ausgeschlossen werden, lässt sich so formulieren: Es sei B irgendein offener streckenfreier Bogen in E_2 ; und es sei B in einem festen Sinne orientiert, d. h. mit einem festen Durchlaufungssinn versehen. Dann soll jede *Sekante* von B , d. h. jede Gerade G , die mit B mindestens zwei Punkte gemeinsam hat, normal orientierbar sein (zu B), d. h. für (mindestens, also für genau) eine (der beiden) Orientierung(en) von G soll diejenige lineare «Anordnung» der Punkte des Durchschnittes BG von B mit G , welche durch die feste Orientierung von B bestimmt ist, die gleiche sein wie diejenige, welche durch die in Rede stehende Orientierung von G bestimmt ist; eine «Anordnung» wird dadurch bestimmt, dass von je zwei Punkten feststeht, welcher «vor» bzw. «hinter» dem anderen liegt (und wenn die Relation «vor» bzw. «hinter» transitiv ist). Bei beliebigem Bogen B ist jede Sekante normal orientierbar, welche mit B genau zwei Punkte gemeinsam hat, dagegen nicht notwendig jede Sekante, welche mit B mindestens drei Punkte gemeinsam hat (vgl. den obigen Spiralbogen B).

Ausser der normalen Orientierbarkeit der Sekanten benötigen wir noch die normale Orientierbarkeit der Paratingenten.

Diese erklären wir allgemein so: Es sei B wieder ein offener, streckenfreier Bogen in E_2 , bezüglich dessen die Geraden normal orientierbar sind. Ferner sei P eine g -Paratingente an B im Schmiegepunkt p , d. h. es sei P Limes (etwa im metrischen Raum der Geraden) einer Folge von Sekanten G_v . Wir betrachten auf P neben p noch einen (von p verschiedenen) nicht zu B gehörigen Punkt t (da B streckenfrei ist, existieren solche Punkte t auf P); es seien U_p und U_t Umgebungen von p bzw. t in E_2 , von denen U_t sowohl zu U_p als zu B fremd ist. Für schliesslich alle v ist dann sowohl $U_p BG_v$ als $U_t G_v$ nicht leer; es sei etwa $t_v \in U_t G_v$. Liegt nun t_v für unendlich viele G_v hinter (oder für unendlich viele) G_v vor jedem Punkt von $U_p BG_v$, so werde P derart orientiert, dass t hinter bzw. vor p liegt auf P ; und P heisst *normal orientierbar* bezüglich B , wenn diese Orientierung die gleiche ist für alle Geradenfolgen, die P zum Limes haben. Ist die Forderung der normalen Orientierbarkeit sowohl der Sekanten als der Paratingenten bezüglich B erfüllt, so sagen wir, es liege B normal zum System g der Geraden; die Sekanten (bzw. die Paratingenten) bezeichnen wir genauer als g -Sekanten (bzw. g -Paratingenten).

Zwecks Formulierung der ins Auge gefassten Umkehrung des obigen Satzes müssen schliesslich in den Begriff «gleichartig gelegen zu B » noch weitere Fälle einbezogen werden. Auf jeder zu B normal orientierten g -Sekante oder g -Paratingente G unterscheiden wir die einseitigen Umgebungen eines Punktes q von BG in hintere und vordere Umgebungen je nachdem sämtliche Punkte dieser Umgebungen (abgesehen von q) hinter oder vor q liegen. Zwei Fälle sind möglich: *Erstens* es ist q nicht hinterer (oder nicht vorderer) Häufungspunkt von BG auf B (und G); es gibt dann auf G eine hintere (vordere) Umgebung von q , die, abgesehen von q , ganz auf der positiven oder ganz auf der negativen Seite von B liegt; je nachdem sprechen wir von q als von einem *hinteren* (vorderen) positiven oder negativen *Stützpunkt* von G auf B . *Zweitens* es ist q hinterer (vorderer) Häufungspunkt von BG auf B (und G), d. h. jede hintere (vordere) Umgebung U von q auf G enthält (unendlich viele) von q verschiedene Punkte aus BG . Dabei besteht folgende Alternative: *Entweder* gibt es ein U , das fremd ist zur negativen oder zur positiven Seite von B , dann bezeichnen wir q als *hinteren* (vorderen) positiven bzw. negativen *H-Stützpunkt* von G auf B ; *oder* der Durchschnitt eines jeden U mit der positiven sowohl als mit der negativen Seite von B ist nicht leer, dann heisse q ein *hinterer* (vorderer) *H-Schnittpunkt*.

Sind nun Q^I, Q^{II} zwei normal orientierte g -Sekanten oder g -Paratingenten, sind ferner q^I, q^{II} Punkte aus BQ^I , bzw. aus BQ^{II} , so heissen Q^I und Q^{II} *hinten gleichartig gelegen* in q^I bzw. q^{II} zu B , wenn folgendes stattfindet: Ist q^I hinterer positiver oder negativer Stütz- oder *H-Stützpunkt* oder ist q^I hinterer *H-Schnittpunkt* so auch q^{II} hinterer positiver bzw. negativer Stütz- bzw. *H-Stützpunkt* bzw. *H-Schnittpunkt*. Entsprechend wird die vorn gleichartige Lage definiert. Liegen q^I und q^{II} hinten gleichartig und ebenso vorn gleichartig, so sagt man, es seien Q^I bzw. Q^{II} *gleichartig* zu B gelegen in q^I und q^{II} .

Die fragliche Umkehrung des obigen Satzes lautet **Umkehrung.** Vor. Es sei B ein streckenfreier offener Bogen, der normal liegt zum System g der Geraden. Ferner sollen alle (d. h. irgend zwei) g -Paratingenten in ihren Schmiegepunkten gleichartig

liegen zu B . — Beh. Es besitzt B den minimalen g -Ordnungswert Zwei, ist also ein Konvexbogen.

Anmerkung. In der Vor. wird nicht gefordert, dass jede Gerade nur endlich viele Punkte mit B gemeinsam haben oder dass B in jedem Punkt nur eine Paratingente besitzen soll.

1. 2. Als zweites, etwas weniger triviales Beispiel sei das folgende gewählt. Es bezeichne B einen offenen Teilbogen eines Ellipsenquadranten. Bekanntlich liegt B normal zum System c der Kreise (1) (im Sinne der Definition in Nr. 1. 1.); dabei sind die c -Paratingenten an B identisch mit den Schmiegekreisen (Krümmungskreisen) im üblichen Sinne (?). Und alle (d. h. irgend zwei) c -Paratingenten von B liegen gleichartig zu B in ihren Schmiegpunkten. Ferner besitzt B den c -Ordnungswert Drei, d. h. jeder Kreis hat mit B höchstens drei Punkte gemeinsam. Daraus folgt aber schon die gleichartige Lage der c -Paratingenten. Es gilt nämlich allgemein der

Satz. Vor. Es sei B ein zum System c der Kreise normaler Bogen vom (minimalen) c -Ordnungswert Drei. Keine c -Paratingente von B sei ein Nullkreis. — Beh. Alle c -Paratingenten liegen gleichartig zu B .

Anmerkung. Bis auf abzählbar viele Ausnahmen existiert in jedem Punkt genau eine c -Paratingente.

Auch hier gilt die (3)

Umkehrung. Vor. Es sei B ein offener kreisbogenfreier, zum System c der Kreise normaler Bogen. Alle c -Paratingenten von B sollen von Nullkreisen verschieden sein und in ihren Schmiegpunkten gleichartig zu B liegen. — Beh. Es besitzt B den c -Ordnungswert Drei.

2. Die in Nr. 1. 1. und Nr. 1. 2. angegebenen Sätze, einschliesslich ihrer Umkehrung, sind bereits so allgemein, dass — abgesehen von den Begriffen «System der Geraden» bzw. «Kreise» — sämtliche in ihnen auftretenden Begriffe topologischer Natur (4)

(1) Zum System C werden die Geraden gerechnet, nicht aber die Nullkreise.

(2) Hierzu sowie zum Folgenden vgl. z. B. Haupt-Aumann-Paue, a. a. O., Nr. 2. 2. 6. 1.

(3) Für den etwas spezielleren Fall, dass B konvex ist sowie mit jedem Kreis höchstens endlich viele Punkte gemeinsam hat und in jedem Punkt genau eine C -Paratingente besitzt, ist der Satz des Textes und seine Umkehrung enthalten in einem früher angegebenen Resultat. Vgl. HAUPT, Archiv d. Math. I (1948), S. 102 ff.; in Fussnote 5 dieser Arbeit ist das Zitat unter b) zu streichen.

(4) d. h. erklärbar mit Hilfe lediglich von Begriffen der Topologie des E_2 .

sind. Die Beweise zeigen nun, dass an Eigenschaften des Systems der Geraden bzw. Kreise ebenfalls nur topologische benötigt werden. Man wird dadurch auf folgende Verallgemeinerung dieser Systeme geführt: Unter einem System f von «Ordnungscharakteristiken» (kurz: OCh) C verstehe man eine gewisse Gesamtheit von Bogen (Kurven) etwa auf einer Kreisscheibe K , die je durch k Punkte eindeutig bestimmt sind ($k \geq 2$ feste, durch f bestimmte natürliche Zahl) und sich stetig mit ihren Bestimmungspunkten ändern (1). Für einen (innerhalb K gelegenen) offenen Bogen B erklärt man genau wie früher (Nr. 1. 1.: Fall $f=g$, $k=2$, bzw. Nr. 1. 2.: Fall $f=c$, $k=3$) die Begriffe: f -Paratingente, normal zu f und gleichartig gelegen zu B ; dabei möge hier der Kürze wegen gefordert werden, dass jede f -Paratingente selbst OCh ist. Definiert man schliesslich als f -Ordnungswert das Maximum (falls es existiert) der Mächtigkeiten des Durchschnitts von B mit den OCh, so ist k der minimale f -Ordnungswert. Es gilt dann in Verallgemeinerung von Nr. 1. 1. und 1. 2. der (?) rein topologische

Satz. Vor. Es sei B ein offener Bogen, der keine Teilbogen einer OCh enthält. Ferner liege B normal zum System f der OCh. — Beh. Folgende Aussagen sind gleichwertig (1) Es besitzt B den f -Ordnungswert k ; (2) Alle f -Paratingenten von B liegen gleichartig zu B in ihren Schmiegpunkten.

Anmerkung. (I) In den Vor. des Satzes wird weder die Eindeutigkeit der f -Paratingente in jedem Punkt von B gefordert noch die Endlichkeit der Durchschnitte von B mit den OCh. — (II) Der Satz lässt sich ferner verallgemeinern zu einem Theorem über Korrespondenzen auf B (3).

Bezüglich des an anderer Stelle zu führenden Beweises sei nur folgendes angedeutet: Es ist (2) aus (1) im wesentlichen mittels bekannter Methoden zu erschliessen. In ähnlicher Weise ergibt sich (1) aus (2) falls BC endlich ist für alle $C \in f$. Die Hauptlast des Beweises beruht also auf dem Nachweis, dass aus (2) die Endlichkeit aller BC folgt oder vielmehr, dass die Existenz eines unendlichen BC Anlass zum Auftreten zweier nicht gleichartig gelegener f -Paratingenten gibt.

(1) Genaueres bei HAUPT, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933) S. 1 ff.

(2) Dass in der Beh. des nachstehenden Satzes (2) aus (1) folgt, liess sich vermutlich aus noch nicht veröffentlichten Sätzen von Herrn H. HALLER entnehmen, welcher auch zeigt, dass die Normalität von B schon aus (1) folgt. Vgl. auch H. HALLER, Sitz. — Ber. d. Physik. — med. Sozietät zu Erlangen 69 (1937) S. 215 ff.

(3) Vgl. HAUPT, Math. Nachr. 4 (1950), S. 81 f., sowie M. LINSMAN, Introduction à une Théorie abstraite usw., Mémoires Acad. Belgique Sci. XVII (1938).

3. Der in Nr. 2 formulierte Satz gestattet seiner Allgemeinheit wegen zahlreiche Anwendungen. Unter diesen sei nur noch die folgende genannt⁽¹⁾:

Vor. Es sei $y = f(x)$ eine eindeutige reelle endliche stetige Funktion der reellen Variablen x im (offenen) Intervall (a, b) ; das kartesische Bild von $y = f(x)$ sei B . Das System k der OCh sei das

System der Parabeln (d. h. der kartesischen Bilder von) $y = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \dots$ höchstens $(k-1)$ -ten Grades ($k > 2$). Es enthalte B keinen Teilbogen einer OCh.

Beh. *Folgende Aussagen sind gleichwertig: (1) Der k -te Differenzenquotient von $f(x)$ ist nirgends positiv oder nirgends negativ. — (2) Es besitzt B den k -Ordnungswert k . — (3) Die k -Paratingenten an B (also die Schmiegeparabeln höchstens $(k-1)$ -ten Grades von B) liegen sämtlich gleichartig zu ihren Schmiegepunkten.*

⁽¹⁾ Zu nachstehender Beh., (1) und (2), vgl. Haupt-Aumann-Pauc, a. a. O., Nr. 2. 2. 5. und 2. 2. 6. 2.

Un critère de continuité^(*)

par Renato Pereira Coelho

Nous n'avons pas trouvé dans les traités d'Analyse les plus répandus aucune mention du critère de continuité suivant, qui peut-être n'est pas sans utilité.

Soit $f(P)$ une fonction réelle définie sur une région du plan et P_0 un point de l'intérieur de cette région. Pour que $f(P)$ soit continue en P_0 il faut et il suffit que — après l'introduction dans ce plan d'un système de coordonnées polaires ρ et θ dont l'origine est P_0 — les deux conditions suivantes soient vérifiées :

α) il y a une demi-droite $\theta = \theta_0$ suivant laquelle $f(P)$ est continue en P_0

β) l'oscillation $\omega(r)$ de $f(P)$ sur les circonférences $\rho = r$ tend vers zéro en même temps que r .

Pour démontrer cette proposition sous une forme un peu plus générale il est utile de considérer au lieu de bases de filtre, des familles, partiellement ordonnées et filtrantes à gauche, d'ensembles non vides de l'espace où la fonction est définie. Soit $\{A_i; i \in I\}$ une telle famille et $B_i = \bigcup_{j \leq i} A_j$. $\{B_i; i \in I\}$ est une base de filtre qui ne change pas si l'on remplace les ensembles A_i par des ensembles A'_i tels que $A_i \subset A'_i \subset B_i$. Inversement, quel que soit le filtre \mathcal{F} , une quelconque de ses bases forme, relativement à \subset , une famille $\{A_i\}$.

Le théorème dont il s'agit peut alors s'énoncer de la manière suivante.

THÉORÈME. Soit R un ensemble quelconque et $\{A_i; i \in I\}$ une famille, partiellement ordonnée par \leq et filtrante à gauche, de sous-ensembles non vides de R . Soit \mathcal{F} le filtre engendré par cette famille de la façon indiquée ci-dessus et \mathcal{F}_0 un filtre plus fin que \mathcal{F} et tel que

γ) quel que soit $F_0 \in \mathcal{F}_0$ il y a un index $i_0 \in I$ tel que $A_i \cap F_0 \neq \emptyset$ si $i \leq i_0$. Soit $f(x)$ une fonction

définie sur R et à valeurs dans un espace uniforme S . Dans ces conditions il faut et il suffit pour que

$$\lim_{\mathcal{F}} f(x) = 1$$

que

$$\alpha') \lim_{\mathcal{F}_0} f(x) = 1$$

et que

$\beta')$ quel que soit l'entourage U_1 de S il y ait un index i_1 tel que

$$f(A_i) \times f(A_i) \subset U_1 \text{ si } i \leq i_1.$$

La nécessité de la condition se démontre sans difficulté: $\alpha')$ est un résultat bien connu [N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, II, p. 36] et pour démontrer $\beta')$ il suffit de considérer un entourage symétrique U tel que $\check{U} \subset U_1$ et un index i_1 tel que $f(B_{i_1}) \subset U$.

Pour montrer que la condition est suffisante soit U un entourage quelconque de S et U_1 un autre entourage tel que $\check{U}_1 \subset U$. Soit $F_0 \in \mathcal{F}_0$ tel que $f(F_0) \subset U_1$ (l) et i_0 et i_1 les indices correspondants, d'après γ) et $\beta')$ à F_0 et U_1 . Si $j \leq i_0$, i_1 il y a un point $a_j \in A_j \cap F_0$.

$(l, f(a_j)) \in U_1$ et $\{f(a_j)\} \times f(A_j) \subset U_1$. Par conséquent $\{l\} \times f(A_j) \subset U$, $\{l\} \times \bigcup_{j \leq i} f(A_j) \subset U$ et $f(B_i) \subset U$ c. q. f. d.

On peut remarquer que la relation γ) entre \mathcal{F}_0 et $\{A_i\}$ n'a pas été utilisée dans la première partie de la démonstration.

Quels que soient \mathcal{F}_0 et $\{A_i\}$, il est toujours possible de considérer une nouvelle famille $\{A'_i\}$ qui vérifie γ) et $A_i \subset A'_i \subset B_i$, engendrant par suite le même filtre \mathcal{F} . Une méthode triviale est de poser $A'_i = B_i$. Une autre, qui peut conduire dans un plus grand nombre de cas à la vérification de la condition $\beta')$, est la suivante.

Soit \mathcal{G} une base quelconque du filtre \mathcal{F}_0 . Quels que soient $i \in I$ et $G \in \mathcal{G}$, $G \cap B_i \neq \emptyset$ parce que

(*) Reçu le 8 Juin, 1951 — Ce travail a été présenté au «Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências — Lisboa — 1950», et n'a pas encore été publié.

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$. Alors il y a un $i' \leq i$ tel que $G \cap A_{i'} \neq O$. Donné i , considérons seulement—s'il y en a—les G qui ne rencontrent pas A_i mais qui rencontrent un A_{i_0} avec $i_0 < i$. Pour chacun de ces G soit i' un index tel que $G \cap A_{i'} \neq O$. Soit A'_i la réunion de A_i avec tous ces $A_{i'}$.

Evidemment $A_i \subset A'_i \subset B_i$. Quel que soit $F \in \mathcal{F}_0$

il y a un $G \in \mathcal{G}$ et contenu dans F . Il y a un i_0 tel que A_{i_0} rencontre G .

Alors $G \cap A'_i \neq O$ et, si $i < i_0$ et $G \cap A_i = O$, il y a, correspondant à ce G , un $A_{i'} \subset A'_i$ tel que $G \cap A_{i'} \neq O$. Donc, quel que soit $i \leq i_0$, G rencontre A'_i et par conséquent de la même propriété jouiront tous les $F \in \mathcal{F}_0$, c. q. f. d.

As séries de termos quaisquer^(*)

por José Ribeiro de Albuquerque

Universidade Técnica de Lisboa

Sejam $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, números reais formando um conjunto numerável, bem ordenado de tipo de ordem ω . Supomos que na sucessão há números positivos e negativos, havendo uma infinidade numerável de termos de cada sinal. Percorrendo a sucessão evidentemente que os termos consecutivos de um mesmo sinal são em número finito.

Definição 1. Chamaremos *série de termos quaisquer* a série

$$(1) \quad \Sigma \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

Se na série (1) somarmos os termos consecutivos do mesmo sinal, obtemos a série

$$(2) \quad S) \quad \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots + (-1)^n \alpha_n + \dots$$

Em geral, uma série de termos alternadamente positivos e negativos é chamada uma *série alternada*. A série (2) será chamada *série alternada equivalente à série (1)*.

Esta designação tem a sua razão de ser no seguinte

TEOREMA 1. *A série de termos quaisquer e a série alternada equivalente são da mesma natureza.*

Demonstração. Formemos as somas de termos consecutivos das duas séries (1) e (2)

$$(3) \quad \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$$

$$(4) \quad s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

Toda a soma s_p é uma soma σ_q e portanto: se a série de termos quaisquer é convergente a série alternada equivalente também o é, e as somas são iguais.

Dada uma soma σ_{n_x} , ou ela é uma soma s_x , ou ela está compreendida entre duas somas s_x e s_{x+1} consecutivas e, facilmente se vê que

$$(5) \quad s_x \leq \sigma_{n_x} \leq s_{x+1} \text{ se o último termo de } \sigma_{n_x} \text{ é positivo,}$$

$$(6) \quad s_x \geq \sigma_{n_x} \geq s_{x+1} \text{ se o último termo de } \sigma_{n_x} \text{ é negativo.}$$

Depois de estabelecido isto, tomemos uma qual-

quer sub-sucessão de (3),

$$(7) \quad \sigma_{n_{\alpha_1}}, \sigma_{n_{\alpha_2}}, \sigma_{n_{\alpha_3}}, \dots, \sigma_{n_{\alpha_p}}, \dots$$

e sejam

$$(8) \quad \sigma_{n_{\alpha'_1}}, \sigma_{n_{\alpha'_2}}, \sigma_{n_{\alpha'_3}}, \dots, \sigma_{n_{\alpha'_p}}, \dots$$

os termos de (7) que terminam por uma parcela positiva; sejam

$$(9) \quad \sigma_{n_{\alpha''_1}}, \sigma_{n_{\alpha''_2}}, \sigma_{n_{\alpha''_3}}, \dots, \sigma_{n_{\alpha''_p}}, \dots$$

os termos de (7) que terminam por uma parcela negativa. Devido às relações (5) e (6), teremos pois:

$$(10) \quad s_{\alpha'_1} \leq \sigma_{n_{\alpha'_1}} \leq s_{\alpha'_1+1}, s_{\alpha'_2} \leq \sigma_{n_{\alpha'_2}} \leq s_{\alpha'_2+1}, \dots$$

$$(11) \quad s_{\alpha''_1} \geq \sigma_{n_{\alpha''_1}} \geq s_{\alpha''_1+1}, s_{\alpha''_2} \geq \sigma_{n_{\alpha''_2}} \geq s_{\alpha''_2+1}, \dots$$

e formemos as duas sucessões:

$$(12) \quad s_{\alpha'_1}, s_{\alpha'_2}, \dots$$

$$(13) \quad s_{\alpha''_1+1}, s_{\alpha''_2+1}, \dots$$

Se em (12) há apenas um número finito de termos distintos, necessariamente em (8) há apenas um número finito de termos distintos. Do mesmo modo, se em (13) há apenas um número finito de termos distintos, necessariamente em (9) há apenas um número finito de termos distintos. Logo, se em (7) há uma infinidade de termos distintos (ou assim considerados) em (8) ou (9), ou em ambas, há uma infinidade de termos distintos, e o mesmo se passa em (12) e (13). Com os infinitos termos distintos de (12) e (13) forma-se uma sub-sucessão de (4) que é *minorante* da sub-sucessão (7). Da mesma maneira se forma uma *majorante*.

A sub-sucessão (7) vem enquadrada por duas sub-sucessões de (4). Podemos pois afirmar que: se a série alternada equivalente é convergente, a série de termos quaisquer também o é, e as somas são iguais.

A série de termos quaisquer e a série alternada equivalente são simultaneamente convergentes ou divergentes.

(*) Recebido em 1951, Agosto.

e portanto

$$l - \varepsilon < \frac{a_{2m} + a_{2m+2} + \dots + a_{2(m+p)-2}}{a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p)-1}} < l + \varepsilon$$

ou seja

$$l - \varepsilon < \frac{S'_{m+p} - S'_m}{S''_{m+p} - S''_m} < l + \varepsilon$$

qualquer que seja p independente de m . Conclui-se que: se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = l$, então $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S'_{m+p} - S'_m}{S''_{m+p} - S''_m} = l$.

Esta proposição é válida para l nulo, finito ou infinito.

Inversamente: se fixado m e dado $\varepsilon > 0$, a partir de certa ordem $p(\varepsilon)$ se tem

$$l - \varepsilon < \frac{a_{2m} + a_{2m+2} + \dots + a_{2(m+p)-2}}{a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p)-1}} < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < \frac{a_{2m} + a_{2m+2} + \dots + a_{2(m+p+1)-2}}{a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p+1)-1}} < l + \varepsilon$$

...

também se tem

$$(l - \varepsilon)(a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p)-1}) < (a_{2m} + a_{2m+2} + \dots + a_{2(m+p)-2}) < (l + \varepsilon)(a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p)-1})$$

$$(l - \varepsilon)(a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p+1)-1}) < (a_{2m} + a_{2m+2} + \dots + a_{2(m+p+1)-2}) < (l + \varepsilon)(a_{2m+1} + a_{2m+3} + \dots + a_{2(m+p+1)-1})$$

e subtraindo a primeira da segunda, a segunda da terceira, e assim sucessivamente, vem:

$$(l - \varepsilon)a_{2(m+p+1)-1} < a_{2(m+p+1)-2} < (l + \varepsilon)a_{2(m+p+1)-1}$$

$$(l - \varepsilon)a_{2(m+p+2)-1} < a_{2(m+p+2)-2} < (l + \varepsilon)a_{2(m+p+2)-1}$$

ou

$$l - \varepsilon < \frac{a_{2(m+p+1)-2}}{a_{2(m+p+1)-1}} < l + \varepsilon$$

a partir de certa ordem $p(\varepsilon)$. Conclui-se que: se $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S'_{m+p} - S'_m}{S''_{m+p} - S''_m} = l$ então, é $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = l$. Esta proposição é válida para l nulo, finito ou infinito.

Temos assim:

TEOREMA 3. Se $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S'_{m+p} - S'_m}{S''_{m+p} - S''_m} = l$ então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} = l$$

e reciprocamente, qualquer que seja o valor de l nulo, finito ou infinito.

Consideremos agora a série alternada

$$S) \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

e sejam

$$S') \quad a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2k} + \dots$$

$$S'') \quad a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k+1} + \dots$$

as séries componentes formadas com os termos de um mesmo sinal. Com estas convenções temos as seguintes relações:

$$(16) \quad S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k-1} \quad S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k}$$

e por último

$$(17) \quad S_{2k+1} = S'_{k+1} - S''_k$$

Estas relações permitem estabelecer desde já alguns resultados sobre as séries alternadas.

Assim, podemos enunciar imediatamente o seguinte:

TEOREMA 4. A série alternada é convergente (absolutamente) quando as séries componentes o forem, e a soma de $\sum (-1)^n a_n$ é a diferença das somas de $\sum a_{2k}$ e $\sum a_{2k+1}$.

Com efeito, se as séries componentes $\sum a_{2k}$ e $\sum a_{2k+1}$ forem convergentes, temos:

$$a_{2k} \rightarrow 0 \quad a_{2k+1} \rightarrow 0$$

e portanto $a_n \rightarrow 0$. As relações (16) dizem-nos que se S_{2k-1} e S_{2k} tiverem limites, terão limites iguais. A relação (17) garante-nos a existência desse limite único.

A série alternada é então absolutamente convergente, e a soma é a diferença das somas das séries componentes

c. q. d.

TEOREMA 5. A série alternada é divergente quando uma só das séries componentes $\sum a_{2k}$ ou $\sum a_{2k+1}$ o fôr.

A relação (17) mostra imediatamente que assim é.

Basta supor que uma das séries componentes é divergente mas com o termo geral a tender para zero, e a outra série componente convergente, para haveremos exemplos de séries alternadas que são divergentes mas para as quais o módulo do termo geral tende para zero.

TEOREMA 6. Se as duas séries componentes $\sum a_{2k}$ e $\sum a_{2k+1}$ são divergentes, para a série alternada $\sum (-1)^n a_n$ ser convergente é necessário que: $a_n \rightarrow 0$ e $\frac{a_{n-1}}{a_n} \rightarrow 1$.

Com efeito, da relação (17) vem:

$$S_{2k+1} = S'_{k+1} \left(1 - \frac{S''_k}{S'_{k+1}}\right) = S''_k \left(\frac{S'_{k+1}}{S''_k} - 1\right)$$

simplesmente alternadas do terceiro e quarto tipos são decrescentes; inversamente, as séries alternadas decrescentes são simplesmente alternadas e do 3.º ou do 4.º tipos.

Supondo que o termo geral da série alternada proposta, tende em valor absoluto para zero, $a_n \rightarrow 0$, e supondo que ela é simplesmente alternada, então, se é do 3.º ou 4.º tipo será convergente; se é do 1.º ou 2.º tipo, e se for quase-decrescente, (Teor. 7), será convergente.

Uma série simplesmente alternada, $\Sigma (-1)^n a_n$, que pertence ao 1.º tipo, se as suas séries componentes, Σa_{2k} e Σa_{2k+1} , são convergentes, ela será convergente (absolutamente); se as suas séries componentes não são da mesma natureza, ela será divergente; se a sua série componente de termos menores, Σa_{2k+1} , for divergente, a outra série componente, Σa_{2k} , também é divergente, e, para a série alternada proposta ser convergente é necessário e suficiente que seja quase decrescente.

Com efeito, este último resultado encontra-se enunciado no teorema seguinte que vamos demonstrar:

TEOREMA 8. *Seja $\Sigma (-1)^n a_n$ uma série simplesmente alternada cujas séries componentes, Σa_{2k} , e Σa_{2k+1} , são divergentes mas de termos gerais em valor absoluto a tender para zero: a condição necessária e suficiente para que a série alternada seja convergente é que ela seja quase-decrescente.*

A condição é suficiente como o prova o teor. 7. Vejamos pois que é também necessária. Para isso, suporemos que a série não é quase-decrescente, e portanto: dado um inteiro p por maior que ele seja, existe um k tal que: $a_{2k+1} < a_{2k+2p}$.

Sendo assim, vem: $\frac{a_{2k+2p}}{a_{2k+1}} > 1$. Mas, como $a_{2k+1} \rightarrow 0$, teremos:

$$\frac{a_{2k+2p}}{a_{2k+2p+1}} > \frac{a_{2k+2p}}{a_{2k+1}} > 1$$

Fazendo crescer p tanto quanto se queira, virá, se existir: $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+2p}}{a_{2k+2p+1}} = l > 1$. Portanto, se existir, será: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, e então pelo teorema 6, a série alternada é divergente.

Logo, para $\Sigma (-1)^n a_n$ ser convergente é necessário que a série seja quase-decrescente.

c. q. d.

Com este teorema e com as observações que o precederam fica completamente esclarecida a natureza das séries simplesmente alternadas.

Suponhamos agora que alguma das séries (18) ou (19) é uma série de termos quaisquer. O teorema 1 permite substituí-la pela série alternada equivalente.

Definição 3. A série alternada proposta será chamada *duas-vezes alternada* se a série alternada equivalente for simplesmente alternada; ela será chamada *p-vezes alternada* se a série alternada *p-vezes* equivalente for simplesmente alternada.

Uma série alternada será chamada *infinitas-vezes alternada* se não é equivalente a nenhuma série simplesmente alternada.

Vejamos em que condições é que o estudo de uma série *p-vezes* alternada depende do estudo de uma outra série simplesmente alternada.

Seja dada uma série alternada, a série proposta

$$S^0) \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

e formemos as duas séries

$$\Sigma'_0) \quad a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) - \dots$$

$$\Sigma''_0) \quad (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2k} - a_{2k+1}) + \dots$$

e suponhamos que alguma delas é uma série de termos quaisquer; substituamo-la pela série alternada equivalente:

$$S^1) \quad a'_0 - a'_1 + a'_2 - a'_3 + \dots + (-1)^n a'_n + \dots$$

à qual por sua vez correspondem as duas séries Σ'_i e Σ''_i , que são séries de termos do mesmo sinal se e só se (definição 3) a proposta S é duas vezes alternada; caso contrário, passaremos a uma série S'' alternada 2 vezes equivalente, à qual corresponderão as séries Σ'_2 e Σ''_2 , etc., assim sucessivamente.

Se a série proposta S é *p-vezes* alternada; então, a série S^{p-1} é a sua série alternada $(p-1)$ -vezes equivalente, e esta série S^{p-1} é simplesmente alternada.

Pelo teorema 2, se o valor absoluto do termo geral da série S^{p-1} , a_n^{p-1} , tende para zero também o termo geral da série Σ_{p-2} donde ela deriva, tende em valor absoluto para zero e, por consequência também $a_n^{p-2} \rightarrow 0$. Por último, segue-se que: $a_n \rightarrow 0$.

Viu-se, por conseguinte, que se o valor absoluto a_n^{p-1} do termo geral da série

$$S^{p-1}) \quad a_0^{p-1} - a_1^{p-1} + a_2^{p-1} - a_3^{p-1} + \dots + (-1)^n a_n^{p-1} + \dots$$

tende para zero também, em valor absoluto, o termo geral de qualquer das séries

$$\Sigma'_{p-2}) \quad a_0^{p-2} - (a_1^{p-2} - a_2^{p-2}) - (a_3^{p-2} - a_4^{p-2}) - \dots - (a_{2k+1}^{p-2} - a_{2k+2}^{p-2}) - \dots$$

$$\Sigma_{p-2}^{//} (a_0^{p-2} - a_1^{p-2}) + (a_2^{p-2} - a_3^{p-2}) + \dots + \\ + (a_{2k}^{p-2} - a_{2k+1}^{p-2}) + \dots$$

tenderá para zero e o mesmo se verificará com a série

$$S^{p-2} \quad a_0^{p-2} - a_1^{p-2} + a_2^{p-2} - a_3^{p-2} + \dots + \\ + (-1)^n a_n^{p-2} + \dots$$

Pelo teorema 1, a série S^{p-1} é da mesma natureza que a série $\Sigma_{p-2}^{//}$. Vamos agora demonstrar o seguinte

TEOREMA 9. *Com $a_n^{p-2} \rightarrow 0$, a condição necessária e suficiente de convergência da série S^{p-2} é que uma só (qualquer) das séries $\Sigma_{p-2}^{//}$ ou $\Sigma_{p-2}^{//}$ seja também convergente.*

Com efeito, o teorema torna-se evidente observando que: se $a_n^{p-2} \rightarrow 0$ as duas séries $\Sigma_{p-2}^{//}$ e $\Sigma_{p-2}^{//}$ serão da mesma natureza, e, se convergentes, com a mesma soma. c. q. d.

Então, com $a_n^{p-1} \rightarrow 0$, vem (teor. 2) $a_n^{p-2} \rightarrow 0$. Em seguida (teor. 9), com $a_n^{p-2} \rightarrow 0$ as séries S^{p-2} e

S^{p-1} são equivalentes. Mas, com $a_n^{p-2} \rightarrow 0$ vem: $a_n^{p-3} \rightarrow 0$ e (teors. 9 e 1) as séries S^{p-3} e S^{p-1} são equivalentes. Finalmente, podemos afirmar:

TEOREMA 10. *Se $\Sigma (-1)^n a_n$ é uma série p-vezes alternada; se a série $\Sigma (-1)^n a_n^p$ é a série alternada p-vezes equivalente; se o módulo p-vezes generalizado do termo geral da série, a_n^p , tender para zero; então, a série proposta é da mesma natureza da série simplesmente alternada n-vezes equivalente $\Sigma (-1)^n a_n^p$.*

Fica pois provado que o estudo de uma série alternada se reduz ao estudo de uma série simplesmente alternada.

Para este estudo ficar completo deveríamos ainda resolver os seguintes dois problemas:

P_1 . Existem séries infinitas vezes alternadas? Caso afirmativo, construir um exemplo de tais séries. Era conveniente, a construção de uma série p-vezes alternada.

P_2 . No caso de existirem, serão divergentes as séries infinitas vezes alternadas?

Invariantes afines de ciertas ternas de curvas en el espacio (*)

por Rebeca Cherep

Universidad de La Plata, Argentina

Introducción. Para tres elementos curvilíneos de segundo orden (E_2) en el espacio ordinario (S_3), han sido obtenidos varios invariantes proyectivos por Buzano (1). Este ha estudiado un caso completamente general que nosotros nos proponemos, en el presente trabajo, considerar desde el punto de vista afín, a la vez que lo ampliaremos con dos casos particulares. Obtendremos, como es inmediato, entre los invariantes afines los seis proyectivos hallados por Buzano; una interpretación métrica y afín de los nuevos invariantes completará en cada caso el estudio de los $3E_2$.

1. Caso general. Sean P_1, P_2 y P_3 los centros de $3E_2$ pertenecientes a las curvas alabeadas C_1, C_2 y C_3 respectivamente; supongamos que los planos osculadores a dichas curvas en esos puntos, se intersectan en un punto O que no pertenece al plano $P_1P_2P_3$.

Si elegimos el sistema de coordenadas cartesianas de manera que el punto O sea el origen y las rectas OP_1, OP_2 y OP_3 los ejes x, y, z respectivamente, las expresiones de los E_2 con centro en los puntos P_1, P_2 y P_3 serán:

$$(1.1) \quad \begin{array}{l} C_1: \quad y = a_1(x-h) + a_2(x-h)^2 + \dots \\ \quad \quad z = b_1(x-h) + b_2(x-h)^2 + \dots, \\ C_2: \quad x = c_1(y-k) + c_2(y-k)^2 + \dots \\ \quad \quad z = d_1(y-k) + d_2(y-k)^2 + \dots, \\ C_3: \quad x = e_1(z-j) + e_2(z-j)^2 + \dots \\ \quad \quad y = f_1(z-j) + f_2(z-j)^2 + \dots, \end{array}$$

donde h, k y j son las distancias OP_1, OP_2 y OP_3 respectivamente.

A fin de obtener los invariantes afines de segundo orden de las curvas C_1, C_2 y C_3 en la vecindad de los puntos P_1, P_2 y P_3 , debemos considerar la transformación afín más general que deje invariante los ejes; será:

$$(1.2) \quad x = \alpha X, \quad y = \beta Y, \quad z = \gamma Z,$$

donde α, β, γ son constantes arbitrarias. Por esta transformación, los puntos $P_1(h, 0, 0), P_2(0, k, 0)$ y $P_3(0, 0, j)$ pasan a los puntos de coordenadas: $(h/\alpha, 0, 0), (0, k/\beta, 0)$ y $(0, 0, j/\gamma)$ respectivamente; de ello se obtienen las siguientes relaciones:

$$(1.3) \quad \alpha = \frac{h}{H} \quad \beta = \frac{k}{K} \quad \gamma = \frac{j}{J}$$

siendo $H, K,$ y J las distancias entre los puntos transformados de P_1, P_2 y P_3 y el punto O .

Introduciendo (1.2) en las (1.1) hallamos las ecuaciones de los E'_2 , transformados de los E_2 , a saber:

$$\begin{aligned} Y &= A_1(X-H) + A_2(X-H)^2 + \dots \\ Z &= B_1(X-H) + B_2(X-H)^2 + \dots, \\ X &= C_1(Y-K) + C_2(Y-K)^2 + \dots \\ Z &= D_1(Y-K) + D_2(Y-K)^2 + \dots, \\ X &= E_1(Z-J) + E_2(Z-J)^2 + \dots \\ Y &= F_1(Z-J) + F_2(Z-J)^2 + \dots, \end{aligned}$$

donde los coeficientes A_1, A_2, B_1, \dots , etc. están dados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \beta A_1 = a_1 \alpha & \alpha E_1 = e_1 \gamma & \alpha C_2 = c_2 \beta^2 \\ \gamma B_1 = b_1 \alpha & \beta F_1 = f_1 \gamma & \gamma D_2 = d_2 \beta^2 \\ \alpha C_1 = c_1 \beta & \beta A_2 = a_2 \alpha^2 & \alpha E_2 = e_2 \gamma^2 \\ \gamma D_1 = d_1 \beta & \gamma B_2 = b_2 \alpha^2 & \beta F_2 = f_2 \gamma^2 \end{array}$$

Eliminando los parámetros α, β, γ de estas ecuaciones, se obtienen los siguientes 9 invariantes afines independientes:

$$I_1 = a_1 c_1 \quad I_2 = b_1 e_1 \quad I_3 = d_1 f_1$$

(*) Recibido en 29 de Setiembre de 1951.

(1) «*Osservazioni intorno agli invarianti proiettivi di elementi curvilíneos.* Atti della Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 81-82, pp. 109-113.

$$I_4 = \frac{b_1 c_2}{d_2} \quad I_5 = \frac{a_1 e_2}{f_2} \quad I_6 = \frac{d_1 a_2}{b_2}$$

$$I_7 = \frac{a_2^2 c_2}{b_2^2 e_2} \quad I_8 = \frac{d_2^2 f_2}{e_2^2 a_2} \quad I_9 = \frac{e_2^2 b_2}{f_2^2 d_2}$$

Los tres primeros invariantes dependen sólo parcialmente de los E_2 considerados ya que dependen únicamente de los tres planos osculadores (elección del origen O); los otros seis dependen totalmente de los E_2 .

Una sencilla combinación de los invariantes hallados conduce a la obtención de los invariantes proyectivos determinados por BUZANO.

Para consideraciones posteriores será útil introducir los siguientes invariantes, dependientes de los anteriores:

$$i_1 = \frac{a_1 d_1}{b_1} \quad i_2 = \frac{e_1 d_1}{c_1} \quad i_3 = \frac{a_1 e_1}{f_1}$$

$$i_4 = \frac{c_1 f_2}{e_2} \quad i_5 = \frac{f_1 b_2}{a_2} \quad i_6 = \frac{e_1 d_2}{c_2}$$

$$i_7 = a_1 d_1 e_1 \quad i_8 = b_1 c_1 f_1 \quad i_9 = \frac{a_2 d_2 e_2}{b_2 c_2 f_2}$$

Interpretación métrica y afin: Para dar una caracterización afin de los invariantes obtenidos, llamemos $t_1, t_2, t_3, \pi_1, \pi_2$ y π_3 a las rectas tangentes y planos osculadores de las curvas C_1, C_2 y C_3 en los puntos P_1, P_2 y P_3 respectivamente. Las condiciones de paralelismo entre esas rectas y de pertenencia entre rectas y planos se expresa brevemente por el siguiente cuadro:

	t_1	t_2	t_3	π_1	π_2	π_3
t_1		$I_1=1,$ $i_1=1$	$I_2=1,$ $i_2=1$		$I_4=1$	$I_5=1$
t_2	$I_1=1,$ $i_1=1$		$I_3=1,$ $i_3=1$	$I_6=1$		$i_4=1$
t_3	$I_2=1,$ $i_2=1$	$I_3=1,$ $i_3=1$		$i_5=1$	$i_6=1$	

Para la interpretación afin del invariante i_9 consideremos los siguientes planos que pasan por OP_1 :

- 1) Plano OP_1P_3 ($y=0$),
- 2) Plano OP_1P_2 ($z=0$),
- 3) Plano osculador π_1 ($b_2y - a_2z=0$) y
- 4) Plano determinado por OP_1 y la recta r intersección de los planos osculadores π_2 y π_3 ($e_2d_2y - f_2c_2z=0$).

Su relación doble es: $(\infty, 0, \frac{b_2}{a_2}, \frac{c_2 d_2}{f_2 c_2}) = \frac{a_2 e_2 d_2}{b_2 c_2 f_2}$ que coincide precisamente con el invariante i_9 . Es interesante hacer notar que esta relación doble hubiese sido la misma si se hubiesen tomado los planos correspondientes que pasen por OP_2 u OP_3 .

BUZANO, en el trabajo citado, ha demostrado que considerando las distancias Δ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) desde el punto P_i al plano osculador en P_j , la razón $-\frac{\Delta_{13} \Delta_{32} \Delta_{21}}{\Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{31}}$ es un invariante proyectivo. Por tanto, es también afin y tomando el caso particular en que el triedro ($O: P_1, P_2, P_3$) es ortogonal se comprueba de inmediato que este invariante coincide con nuestro i_9 .

Para dar ahora una caracterización métrica de los invariantes i_7, i_8 determinemos los puntos R, S y T en que las rectas tangentes t_1, t_2 y t_3 intersectan a los planos $x=0, y=0, z=0$ respectivamente. Siendo δ el ángulo OP_1, OP_2 y φ el ángulo que forma OP_3 con su proyección sobre el plano OP_1P_2 , el volumen del tetraedro de vértices O, R, S, T se puede expresar en la forma:

$$V = \frac{1}{6} h k j (i_7 + i_8) \text{sen } \delta \text{sen } \varphi.$$

2. Ternas de curvas que se cortan en un punto ordinario. Sea O el punto de intersección de tres curvas alabeadas C_1, C_2 y C_3 cuyas rectas tangentes en dicho punto las indicaremos con t_1, t_2 y t_3 respectivamente.

Si elegimos el sistema de coordenadas con centro en O y los ejes x, y, z coincidentes con las tangentes t_1, t_2 y t_3 , las expresiones según series de potencias de las curvas C_1, C_2 y C_3 en el entorno del punto O son:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} C_1: \quad & y = a_2 x^2 + \dots \\ & z = b_2 x^2 + \dots, \end{aligned} \quad \begin{aligned} C_2: \quad & x = c_2 y^2 + \dots \\ & z = d_2 y^2 + \dots, \end{aligned}$$

$$C_3: \quad \begin{aligned} & x = e_2 z^2 + \dots \\ & y = f_2 z^2 + \dots, \end{aligned}$$

Aplicada la transformación afin (1.2) que deja invariante los ejes, las curvas (2.1) se transforman en las siguientes:

$$Y = A_2 X^2 + \dots \quad X = C_2 Y^2 + \dots$$

$$Z = B_2 X^2 + \dots, \quad Z = D_2 Y^2 + \dots,$$

$$X = E_2 Z^2 + \dots$$

$$Y = F_2 Z^2 + \dots,$$

donde los coeficientes A_2, B_2, \dots , etc., están dados por el sistema:

$$\beta A_2 = a_2 \alpha^2 \quad \alpha C_2 = c_2 \beta^2 \quad \alpha E_2 = e_2 \gamma^2$$

$$\gamma B_2 = b_2 \alpha^2 \quad \gamma D_2 = d_2 \beta^2 \quad \beta F_2 = f_2 \gamma^2$$

La eliminación de los parámetros α, β, γ conduce a los siguientes 3 invariantes afines de segundo orden:

$$J_1 = \frac{a_2^2 c_2}{b_2^2 e_2} \quad J_2 = \frac{d_2^2 f_2}{c_2^2 a_2} \quad J_3 = \frac{e_2^2 b_2}{f_2^2 d_2}$$

Introduciremos en lugar de los invariantes precedentes el siguiente:

$$J = J_1 J_2 J_3 = \frac{a_2 d_2 e_2}{b_2 c_2 f_2}$$

Interpretación métrica y afín del invariante J: Análogamente a lo hecho en el § 1, consideremos los siguientes planos que pasan por la recta tangente a la curva C_1 en el punto O (eje x):

- 1) Plano que contiene a la tangente a C_3 (eje z): $y = 0$.
- 2) Plano que contiene a la tangente a C_2 (eje y): $z = 0$.
- 3) Plano osculador a C_1 en el punto O : $b_2 y - a_2 z = 0$.
- 4) Plano que contiene a la recta intersección de los planos osculadores a las curvas C_2 y C_3 en el punto O : $e_2 d_2 y - f_2 c_2 z = 0$.

Su relación doble es: $(\infty, 0, \frac{b_2}{a_2}, \frac{d_2 e_2}{c_2 f_2}) = \frac{a_2 d_2 e_2}{b_2 c_2 f_2}$ valor que coincide con el invariante J .

De la relación anterior resulta evidente la siguiente conclusión: *Los planos osculadores a las curvas C_1, C_2 y C_3 en el punto O , forman un haz cuando el invariante J es igual a 1.*

Además, como ya hicimos notar en el párrafo anterior, la relación doble se mantiene igual si se toman los planos correspondientes que pasan por las otras dos tangentes, es decir: *Dadas tres curvas C_i ($i=1, 2, 3$) que pasan por un punto O , si se indican con t_i y π_i las rectas tangentes y los planos osculadores a dichas curvas en el punto O y con r_{ij} ($i \neq j$) las intersecciones de los planos π_i y π_j , la relación doble del haz de planos $t_1, t_2, \pi_1, t_1 r_{12}$, es siempre igual al invariante J .*

A fin de dar una caracterización métrica del invariante J , veamos las expresiones de las rectas r_i introducidas más arriba:

$$\begin{aligned} r_{12}: \quad & d_2 x = c_2 z & r_{13}: \quad & f_2 x = e_2 y \\ & b_2 y = a_2 z & & a_2 z = b_2 y \\ r_{23}: \quad & e_2 y = f_2 x & & \\ & c_2 z = d_2 x & & \end{aligned}$$

Llamemos M_1, M_2 y M_3 a los puntos en que estas rectas intersectan a los planos $z = \lambda, y = \lambda, x = \lambda$, respectivamente. Llamando ϑ al ángulo

$t_1 t_2$ y φ al ángulo formado por t_3 y su proyección sobre el plano $t_1 t_2$, el volumen del tetraedro de vértices O, M_1, M_2, M_3 , se expresa entonces, en función del invariante J de la siguiente manera:

$$J = \frac{\lambda^3 (J-1)^2}{6 J} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi.$$

3. Ternas de curvas con una tangente común en un punto ordinario. Para mayor sencillez consideremos que las tres curvas pasan por un punto O donde tienen la misma recta tangente t . Si elegimos el sistema de coordenadas de manera que el origen sea el punto O , que el eje x coincida con la tangente t y que los planos $z=0, y=0$ coincidan con los planos osculadores a las curvas C_1, C_2 en el punto O , entonces las expresiones en series de potencias de las curvas en el entorno del punto O , son las siguientes:

$$\begin{aligned} C_1: \quad & y = a_2 x^2 + \dots \\ & z = b_2 x^3 + \dots \\ C_2: \quad & y = c_3 x^3 + \dots \\ & z = d_2 x^2 + \dots, \\ (3.1) \quad & \\ C_3: \quad & y = e_2 x^2 + \dots \\ & z = f_2 x^2 + \dots, \end{aligned}$$

Para determinar los invariantes afines correspondientes a los elementos de segundo orden de las curvas C_1, C_2 y C_3 en el punto O , tomemos la transformación afín más general que conserve el origen y los planos xy y xz , ésta será la siguiente:

$$(3.2) \quad x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \quad y = \delta Y, \quad z = \varepsilon Z$$

siendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ constantes arbitrarias.

Aplicada la transformación (3.2) a las curvas (3.1), éstas se transforman en las siguientes:

$$\begin{aligned} Y = A_2 X^2 + \dots & \quad Y = C_3 X^3 + \dots \\ Z = B_2 X^3 + \dots & \quad Z = D_2 X^2 + \dots, \\ Y = E_2 X^2 + \dots & \\ Z = F_2 X^2 + \dots, & \end{aligned}$$

donde los coeficientes A_2^2, D_2, E_2 y F_2 están dados por el sistema:

$$\begin{aligned} \delta A_2 = a_2 \alpha^2 & \quad \delta E_2 = e_2 \alpha^2 \\ \varepsilon D_2 = d_2 \alpha^2 & \quad \varepsilon F_2 = f_2 \alpha^2 \end{aligned}$$

La eliminación de los parámetros α, δ y ε de estas ecuaciones indica que: el único invariante afín determinado por los elementos de segundo orden de las curvas C_1, C_2 y C_3 en el punto O es el siguiente:

$$I = \frac{a_2 f_2}{d_2 e_2}$$

Interpretación métrica y afín del invariante I: Para la caracterización métrica y afín del invariante I ,

se puede considerar a éste como el producto de los dos invariantes que resultan al proyectar las curvas C_1 y C_3 paralelamente al eje z sobre el plano $z=0$ y las curvas C_2 y C_3 paralelamente al eje y sobre el plano $y=0$. Los dos pares de curvas planas serán:

$$\begin{aligned} C'_1: & y = a_2 x^2 + \dots, & C''_2: & z = d_2 x^2 + \dots \\ C'_3: & y = e_2 x^2 + \dots, & C''_3: & z = f_2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

y sus respectivos invariantes:

$$I' = \frac{a_2}{e_2} \qquad I'' = \frac{f_2}{d_2}$$

o sea:

$$I = I' I'' \quad (1)$$

Los invariantes I' e I'' han sido obtenidos y caracterizados por L. A. SANTALÓ en «*Affine Invariants of Certain Pairs of Curves and Surfaces*», Duke Math. Journal; Vol. 14, 3, 1947.

(1) Hacemos notar que los invariantes I' e I'' son también invariantes de las curvas dadas, pero se refieren sólo a pares de ellas. Por eso, hemos preferido tomar directamente al invariante I .

A noção de «filtro» e as suas relações com a teoria dos limites e a definição dos números reais^(*)

por Luís Neves Real

Porto

Alguns dos participantes na actividade desenvolvida no Pôrto pela **Junta de Investigação Matemática** elaboraram um *Curso de Análise da variável real*, cuja realização, em sessões públicas, ficaria como homenagem a GOMES TEIXEIRA, na passagem do primeiro centenário do seu nascimento.

A orientação do curso visando a contribuir para uma actualização da obra de GOMES TEIXEIRA de mais funda influência na formação matemática da juventude universitária portuguesa — o seu **Curso de Análise Infinitesimal** — inspirava-se nos trabalhos do grupo BOURBAKI, desde as obras já hoje clássicas até às suas mais recentes concepções nos domínios da integração. Era porém indispensável um trabalho preparatório para abordar certas noções correntes nos livros e publicações dessa escola. As notas seguintes correspondem a essa preocupação e dizem respeito às noções de «convergência segundo um filtro», «filtro de CAUCHY» e «espaços uniformes» — noções introduzidas na ciência por ANDRÉ WEIL em 1937, e pouco correntes ainda no nosso ensino. Têm estas notas um propositado carácter de divulgação e referem-se a N. BOURBAKI, *Les Structures fondamentales de l'Analyse*, Livre III — *Topologie Générale*, Ch. I, II, Paris, 1940. A propósito é dever referir GOMES TEIXEIRA, *Cálculo Diferencial*, em **Curso de Análise Infinitesimal**, 4.ª edição: *Theoria dos numeros irracionais*.

Consideremos as duas rectas r e r' e nelas os seus pontos referidos a duas origens o e o' . Suponhamos que existe uma aplicação de r sobre r' : uma função f que, a cada ponto x de r faz corresponder um ponto $f(x)$ de r'

$$x \rightarrow f(x).$$

Seja a um ponto de r , ponto de abscissa a ; e A um ponto de abscissa A de r' .

Como é sabido diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ se, para todo número $\delta > 0$ se puder determinar um número $\varepsilon > 0$ de modo que a imagem de todo ponto x do intervalo

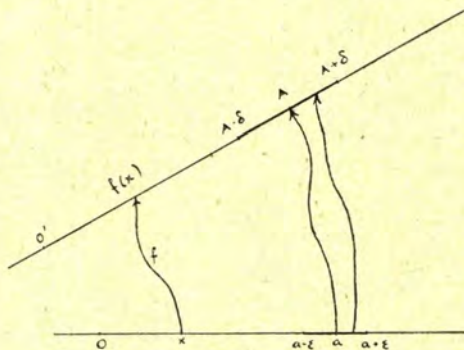


Fig. 1

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ caia no intervalo $(A - \delta, A + \delta)$ o que simbolicamente representaremos por

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \delta; \delta > 0 \rightarrow \exists \varepsilon [\varepsilon > 0 \text{ e}$$

$$\forall x (a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \rightarrow A - \delta < f(x) < A + \delta)]!$$

Uma primeira etapa na passagem da análise da variável real para a análise geral foi atingida ao traduzir-se em termos gerais a ideia intuitiva de que a definição (1) é uma formulação rigorosa: pontos tão vizinhos de A quanto se queira hão-de ser imagens de pontos suficientemente vizinhos de a . Esta primeira etapa consistiu na axiomatização da ideia

(*) Recebido em Setembro de 1951.

de vizinhança dum ponto. Para o caso particular das rectas r e r' considerar-se-iam (por exemplo) em cada ponto x a classe \mathfrak{B}_x de todos os intervalos abertos de centro nesse ponto $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, sendo ε um número real qualquer positivo. Satisfaz esta classe de conjuntos a duas propriedades essenciais:

$\mathfrak{B}.1$ — A intersecção de dois conjuntos da classe contém sempre um conjunto da mesma classe.

$\mathfrak{B}.2$ — O ponto x pertence a todos os conjuntos da classe \mathfrak{B}_x .

São estas propriedades que se tomam como características do que se chama uma *base de vizinhanças* num espaço (E) — de SIERPINSKI (cf. PEREIRA GOMES, «Cadernos de Análise Geral», N.º 5, secção *Topologia*). Se num conjunto E se puder associar a cada um dos seus elementos, x , uma classe \mathfrak{B}_x de subconjuntos de E com essas propriedades, diz-se que se organizou esse conjunto como um *espaço topológico* e à classe \mathfrak{B}_x chama-se *base das vizinhanças do ponto x do espaço E* . Dada a base de vizinhanças define-se seguidamente como *vizinhança de x* , qualquer subconjunto de E que contenha um conjunto da base \mathfrak{B}_x . Atentando agora na definição (1) e notando que, a cada δ e a cada ε , correspondem um conjunto B_A da base \mathfrak{B}_A das vizinhanças de a , vê-se a equivalência de (1) a:

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall B_A \exists B_a \mid f(B_a) \subset B_A$$

afirmativa de que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ se para todo conjunto B_A da base \mathfrak{B}_A , existir um conjunto B_a da base \mathfrak{B}_a cuja imagem $f(B_a)$, pela função f , esteja incluída em B_A .

Observemos que, para definir limite duma função, (2) relaciona a classe \mathfrak{B}_A , das vizinhanças de A com a imagem $f(\mathfrak{B}_a)$, da classe \mathfrak{B}_a , base das vizinhanças de a : a condição necessária e suficiente para que A seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é: «em qualquer conjunto da classe \mathfrak{B}_A , incluem-se sempre conjuntos (um pelo menos) da classe $f(\mathfrak{B}_a)$ ».

Para podermos formular de modo mais geral esta noção de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ estudemos a classe $f(\mathfrak{B}_a)$, classe das imagens, por f , de todas as vizinhanças de a .

Nada garante que se comporte em r' como uma base de vizinhanças dos pontos desta recta. Mas possui tal classe $f(\mathfrak{B}_a)$ as propriedades seguintes:

$B_f.1$ — As intersecções de dois conjuntos da classe contém um conjunto da mesma classe; e

$B_f.2$ — O conjunto vazio \emptyset não pertence à classe.

$B_f.1$ é idêntica a $\mathfrak{B}.1$, mas $\mathfrak{B}.2$ é um caso particular de $B_f.2$; de modo que a classe \mathfrak{B}_A base das vizinhanças de A igualmente satisfaz a estas propriedades.

São de resto elas, juntamente com a definição dada de *vizinhança* que garantem à classe \mathfrak{V}_A (mais rica, isto é com mais elementos, que \mathfrak{B}_A), de todas as vizinhanças de A (isto é constituída por todos os conjuntos de r' que contém um conjunto de \mathfrak{B}_A) as propriedades:

$F.1$ $V_A \in \mathfrak{V}_A$ e $V_A \subset V'_A$ implicam que $V'_A \in \mathfrak{V}_A$: qualquer conjunto que contenha um conjunto da classe pertence ainda à classe;

$F.2$ O espaço inteiro pertence a \mathfrak{V}_A .

$F.3$ $V_A \in \mathfrak{V}_A$ e $V'_A \in \mathfrak{V}_A$ implicam que $V_A \cap V'_A \in \mathfrak{V}_A$: a intersecção de dois conjuntos da classe é um conjunto da mesma classe.

$F.4$ $\emptyset \notin \mathfrak{V}_A$: o conjunto vazio não é elemento da classe.

Como $f(\mathfrak{B}_a)$ satisfaz igualmente a $B_f.1$ e $B_f.2$ é possível, por meio dum procedimento paralelo ao que nos conduziu de B_A a \mathfrak{V}_A , gerar a partir de $f(\mathfrak{B}_a)$ uma nova classe \mathfrak{F} constituída por todos os conjuntos de pontos de r' que contém um conjunto da família $f(\mathfrak{B}_a)$. \mathfrak{F} , que satisfaz igualmente às condições $F.1$, $F.2$, $F.3$ e $F.4$, vai permitir enunciar de modo simples a condição de convergência de $f(x)$. Efectivamente, (2) pode escrever-se em termos já dos elementos V_A e V_a das classes \mathfrak{V}_A e \mathfrak{V}_a das vizinhanças de A e a :

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall V_A \exists V_a \mid f(V_a) \subset V_A$$

e, como $f(\mathfrak{V}_a)$, com o mesmo processo de geração utilizado sobre $f(\mathfrak{B}_a)$, conduz à mesma classe \mathfrak{F} , posso afirmar simplesmente que

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \mathfrak{V}_A \subset \mathfrak{F}$$

isto é: a condição necessária e suficiente para que A seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, é que «a classe das vizinhanças de A esteja incluída na classe \mathfrak{F} gerada pela imagem, por f , da classe \mathfrak{V}_a das vizinhanças de a ».

Note-se que na classe das vizinhanças dum ponto — por exemplo A — (como também na classe \mathfrak{F}) qualquer conjunto da classe intersecta noutro da mesma classe (sempre com resultado diferente de \emptyset) um conjunto ainda da mesma classe. Assim com conjuntos de \mathfrak{V}_A pode organizar-se um encadeamento sem fim de conjuntos que, em linguagem figurada, se diz que uns aos outros se *filtram*, deixando sempre passar outros conjuntos da classe. O ponto A , por exemplo, *passa* constantemente através de todos os elementos deste *filtro*. No caso particular de \mathfrak{V}_A a intersecção consta do conjunto $\{A\}$ cujo único elemento é o próprio ponto A . Mas podem imaginar-se classes de conjuntos satisfazendo às condições $F.1$, $F.2$, $F.3$ e $F.4$ e de intersecção vazia; por exem-

plo a classe gerada pelos conjuntos da forma $\{A - \delta, A + \delta\} - A$ (os intervalos abertos de centro em A , com exclusão do próprio A).

Estas considerações foram feitas com o objectivo de tornar natural a sugestiva designação de *filtro sobre o conjunto* E dada a qualquer classe de sub-conjuntos de E que satisfaça às quatro propriedades acima enunciadas; e a designação de *filtro das vizinhanças dum ponto*, dada à classe das vizinhanças desse ponto. Por analogia com base de vizinhanças, chamar-se-á a qualquer classe de sub-conjuntos de E com as propriedades $B_f.1$ e $B_f.2$ *base de filtro sobre* E : dada uma base de filtro \mathcal{B}_f , é um filtro \mathcal{F} a classe de todos os conjuntos F de E assim definida

$$F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists B [B \in \mathcal{B}_f \text{ e } B \subset F]$$

Diz-se de dois filtros \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 que satisfaçam à relação de inclusão $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ (isto é: os conjuntos de \mathcal{F}_2 são igualmente elementos de \mathcal{F}_1) que \mathcal{F}_1 é mais fino que \mathcal{F}_2 ou \mathcal{F}_2 é menos fino que \mathcal{F}_1 .

Convenções que permitem dizer: Para que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ é preciso e basta que seja o filtro gerado pela imagem $f(\mathcal{B}_a)$ do filtro das vizinhanças de a mais fino que \mathcal{Q}^A , filtro das vizinhanças de A .

Esta condição esclarece que a definição clássica de $\lim f(x)$ se apoia em dois filtros de vizinhanças — os de a e A — comparando o filtro ligado a A — o das vizinhanças deste ponto na topologia adoptada no contradomínio da função $f(x)$ — com o filtro gerado pelas imagens, segundo f , dum filtro dado no domínio de $f(x)$ — precisamente o das vizinhanças desse ponto. Mas sendo o essencial na operação da passagem ao limite duma função o critério de *finura* aplicado para comparar os dois filtros e, por outro lado, gerando as imagens dum filtro um outro filtro — conclui-se que a definição clássica nos dá uma definição de limite apoiada num filtro particular: o filtro das vizinhanças de a .

Assim se chega a uma primeira generalização da noção de *limite duma função*: o limite de $f(x)$, segundo um filtro \mathcal{F} : Direi que $A = \lim_{\mathcal{F}} f(x)$ se o filtro gerado pela imagem de \mathcal{F} for mais fino que \mathcal{Q}^A , filtro das vizinhanças de A .

Acentue-se que este filtro \mathcal{F} pode nada ter com a topologia definida no domínio da função, domínio este que pode até não ser um espaço topológico. Por exemplo entre o eixo Ox e o eixo Oy estabeleçamos uma correspondência pela função

$$f(x) = x, \text{ se } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1, \text{ se } x > 1.$$

Suponhamos o eixo Oy munido da topologia da recta real. E sobre Ox limitemo-nos a considerar o

filtro \mathcal{F}_1 , gerado pela base constituída pelos intervalos fechados $[x, 1]$, com $x < 1$. Vê-se que a definição acima adoptada nos conduz a escrever $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

\mathcal{F}_1

Pode entretanto verificar-se que, munindo Ox da topologia da recta real, não existe

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

visto que o filtro obtido pela imagem $f(\mathcal{Q}_1)$ das vizinhanças do ponto 1 de Ox dá, por intersecção dos conjuntos que o constituem, um conjunto com os dois pontos 0 e 1 do eixo Oy .

Tudo isto nos prepara para as seguintes generalizações:

Ponto limite x dum filtro \mathcal{F} sobre um espaço topológico E é um ponto cujo filtro \mathcal{Q}_x das respectivas vizinhanças em E é menos fino que \mathcal{F} , filtro dado.

Filtro \mathcal{F} *convergente para um ponto x dum espaço topológico* é todo filtro mais fino que \mathcal{Q}_x , filtro das vizinhanças desse ponto.

Nesta concepção cabem perfeitamente as noções de *limite duma sucessão numérica* e de *sucessão numérica convergente*.

De facto a definição clássica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \rightarrow \exists N [\forall n (n > N \rightarrow a - \delta < x_n < a + \delta)]$$

compara as vizinhanças $V_a = (a - \delta, a + \delta)$ do ponto a , com os subconjuntos \bar{S}_N da sucessão $\{x_n\}$ assim definidos

$$\bar{S}_N = \{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+p}, \dots\}$$

caracterizando-se a convergência de $\{x_n\}$ pela propriedade

$$\forall V_a \{ \exists N [\forall n (n > N \rightarrow \bar{S}_N \subset V_a)] \}$$

Ora os \bar{S}_N constituem a base dum filtro sobre a recta real — o filtro constituído por todos os conjuntos numéricos cujos conjuntos complementares têm apenas um número finito de pontos da sucessão $\{x_n\}$. Chamando a este filtro o filtro elementar associado à sucessão $\{x_n\}$ podemos dizer: o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ se o filtro elementar associado a $\{x_n\}$ convergir para a (ou se o filtro elementar associado à sucessão for mais fino que \mathcal{Q}_a , filtro das vizinhanças de a).

O facto das imagens dos conjuntos da base dum filtro gerarem um filtro, habilita-nos a uma outra formulação deste tipo de convergência.

No conjunto dos números naturais

$$\omega_0 = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

a classe de todos os conjuntos destes números, cujos complementares são finitos, é um filtro, que admite como base a classe dos conjuntos S_n constituídos por todos os números naturais maiores ou iguais a n :

$$S_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

Este filtro designa-se por *filtro de FRECHET* e dá, por imagem, graças à aplicação $n \rightarrow x_n$, um filtro na recta real, filtro que vem a ser precisamente o filtro elementar associado à sucessão $\{x_n\}$, considerada. Assim *calcular o limite duma sucessão numérica $\{x_n\}_n$ quando n tende para infinito é uma expressão sinónima de calcular o limite da sucessão $\{x_n\}$ segundo o filtro de FRECHET; e diz-se que $\{x_n\}$ converge para a quando para a convergir o filtro obtido por imagem do filtro de FRECHET, pela aplicação $n \rightarrow x_n$.*

Como a noção de sucessão convergente, também a de sucessão de CAUCHY, com ela intimamente ligada, sofreu um processo crítico, que, em sucessivas abstrações, conduziu à noção de filtro de CAUCHY.

É sabido que numa sucessão $\{x_n\}$ de números reais se diz sucessão de CAUCHY quando possui a seguinte propriedade

$$\forall \delta \exists N \{ \delta > 0 \rightarrow \forall n \forall p (n > N \rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \delta) \}$$

o que, tomando como *distância* de dois números reais x e y , o módulo da sua diferença, pode interpretar-se da seguinte maneira: qualquer que seja o número positivo δ existe uma ordem N tal que

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+p}, \dots$$

constituem um conjunto C_N onde, entre dois quaisquer dos seus elementos, a distância é menor que δ , por outras palavras: quaisquer que sejam x e y se $x \in C_N$ e $y \in C_N$, $d(x, y) < \delta$ — o que patenteia uma *uniformidade* de comportamento dos pontos do conjunto C_N . Chamando-se *diâmetro* dum conjunto ao supremo do conjunto numérico formado pelas distâncias dos seus pontos, dir-se-á ainda que, se uma sucessão é de CAUCHY, podem sempre nela encontrar-se conjuntos C_N de diâmetro inferior a qualquer número arbitrário e positivo δ , — o que se resume na frase: na sucessão $\{x_n\}$ podem encontrar-se conjuntos *tão pequenos quanto se queira*. Pensando no filtro elementar associado à sucessão $\{x_n\}$, deduz-se daqui ter esse filtro associado conjuntos *tão pequenos quanto se queira*. Designando, de um modo geral, por *filtro de CAUCHY* todo filtro que possui conjuntos *tão pequenos quanto se queira*, vê-se que a toda sucessão de CAUCHY corresponde um filtro de CAUCHY.

Estas noções, dadas no espaço dos números reais (porque familiar a todos nós) assentam fun-

damentalmente num critério de *pequenez dum conjunto*, ou de *proximidade de pontos dum espaço*, critério que foi formulado em termos da *distância de dois números*. Três propriedades intervêm essencialmente nessa formulação

$$D.1 \quad d(x, y) = 0 \text{ se e só se } x = y$$

$$D.2 \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetria)}$$

$$D.3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (desigualdade triangular).}$$

De modo que em todos os espaços topológicos, onde se define, para cada par de pontos x e y desse espaço, uma função não negativa que possui aquelas três propriedades — espaços chamados métricos — podem nele traduzir-se os teoremas basilares da teoria dos limites dos números reais. No sentido porém de abordarmos uma fase do desenvolvimento das noções de convergência que em si engloba já essa adaptação aos espaços métricos, detenhamo-nos ainda na observação das propriedades $D.1$, $D.2$, $D.3$, quando x , y e z representam pontos da recta real \bar{R} . Tomemos o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais. Assim se constitui o que em teoria dos conjuntos se chama o espaço produto de \bar{R} por si mesmo e se representa por $\bar{R} \times \bar{R}$. Corresponde $\bar{R} \times \bar{R}$ biunivocamente ao conjunto dos pontos do plano cartesiano e neste plano figuraremos o par (x, y) pelo ponto de coordenadas x e y (fig. 2). Posto

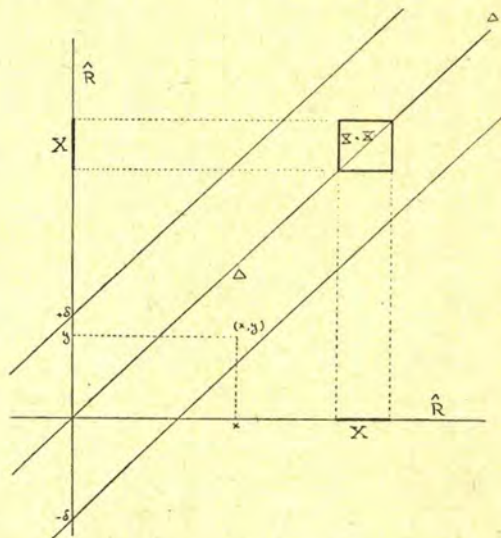


Fig. 2

isto, dizer que $d(x, y) < \delta$ ou $|x - y| < \delta$ significa afirmar que pertence o par (x, y) à faixa P_δ , constituída por todos os pontos do plano compreendidos entre as rectas $y = x + \delta$ e $y = x - \delta$. Cha-

maremos a P_δ proximidade de ordem. Se um conjunto numérico X é de diâmetro inferior a δ , nesta representação estará o conjunto plano produto $X \times X$ incluído na proximidade P_δ de ordem δ :

$$X \times X \subset P_\delta.$$

Se a distância de dois pontos x e y é nula isso quer dizer que (x, y) , representa um ponto da recta $y = x$, distinguida com a letra Δ e a designação de diagonal entre os sub-conjuntos de $\bar{R} \times \bar{R}$ e definida para um espaço produto qualquer como o conjunto dos pares da forma (x, x) .

A simetria $d(x, y) = d(y, x)$ — se $|x - y| < \delta$ também $|y - x| < \delta$ — diz-nos que se $(x, y) \in P_\delta$ igualmente $(y, x) \in P_\delta$. Esta propriedade implica uma outra menos restrita: se conhecemos a proximidade do par (x, y) (a proximidade dos pontos x e y em \bar{R}) ficamos a conhecer a proximidade a que pertence o par (y, x) , isto é a natureza da proximidade de y a x . Sendo U um conjunto qualquer de $\bar{R} \times \bar{R}$ (ou dum espaço produto qualquer) representa-se por U^{-1} o conjunto dos pares (x, y) tais que $(y, x) \in U$. Para $\bar{R} \times \bar{R}$ é evidente que, por cada proximidade P_δ , se tem em P_δ^{-1} ainda uma proximidade (pois que $P_\delta = P_\delta^{-1}$).

Quanto a D.3 ela permite concluir a proximidade de dois números x e z , por intermédio duma triangulação, apoiada nas proximidades de x e z a um terceiro número y . Particularmente, ela permite concluir que é inferior a δ a distância de x a z , se forem a inferiores a $\delta/2$ tanto a distância de x a y como a de y a z .

No espaço produto $\bar{R} \times \bar{R}$ (como em qualquer espaço produto) esta utilização dum ponto y entre dois outros faz-se através da chamada composição de conjuntos: Se U_1 e U_2 são dois conjuntos de $\bar{R} \times \bar{R}$, chama-se $U_1 U_2$ conjunto composto por U_1 e U_2 ao conjunto de todos os pares (x, z) tais que existe y de modo a ser $(x, y) \in U_1$ e $(y, z) \in U_2$.

No plano (tomado como espaço produto $\bar{R} \times \bar{R}$), se considerarmos a proximidade $P_{\delta/2} P_{\delta/2}$ coincide com P_δ : dado um par $(x, z) \in P_\delta$ pode determinar-se uma proximidade $P_{\delta/2}$ tal que existe y de modo a ser $(x, y) \in P_{\delta/2}$ e $(y, z) \in P_{\delta/2}$; propriedade que, das proximidades a que pertencem os pares (x, y) e (y, z) , deduz a natureza da proximidade a que pertence o par (x, z) .

Esta correspondência entre as propriedades da distância e as das faixas P_δ — as proximidades de \bar{R} — correspondendo cada uma a um número real e positivo δ , leva a abstrair da noção de distância e a tirar o critério de pequenez ou proximidade em \bar{R}

do prévio conhecimento duma classe de conjuntos — a classe dos P_δ — dada no espaço produto $\bar{R} \times \bar{R}$. Efectivamente, imaginadas traçadas no plano as faixas P_δ , bastaria tomar como definições: dois números x e y serão próximos de ordem δ se o par (x, y) pertencer a P_δ ; um conjunto X de números é pequeno de ordem δ se $X \times X$ estiver incluído em P_δ .

Um filtro \mathcal{F} sobre \bar{R} é um filtro de CAUCHY se contiver conjuntos tão pequenos quanto se queira, entendendo-se por tal que: qualquer que seja a proximidade P_δ existem sempre em \mathcal{F} conjuntos F pequenos de ordem δ .

A proximidade dos pontos dum conjunto X pequeno de ordem δ tem nm caracter uniforme: quaisquer que sejam x_1 e x_2 de X a sua proximidade é de ordem δ (o que se observa afim de se encontrar uma sugestão para designar por estrutura uniforme toda estrutura dum conjunto R para o qual se define no espaço produto $R \times R$ uma classe \mathcal{F} de conjuntos, chamados proximidades de R com as seguintes propriedades (agora evidentes para o caso particular de R ser a recta real):

U_0 \mathcal{F} é um filtro.

U_1 Δ está incluída em todos os conjuntos de \mathcal{F} .

U_2 Se $P \in \mathcal{F}$ também $P^{-1} \in \mathcal{F}$.

U_3 Para todo $P \in \mathcal{F}$ existe $\bar{P} \in \mathcal{F}$ tal que $\bar{P}^2 \subset P$ (representando por \bar{P}^2 o conjunto composto $\bar{P} \bar{P}$).

Para estudar agora a convergência de filtros sobre a recta real \bar{R} , munida da estrutura topológica habitual (sendo as vizinhanças dos números os intervalos abertos neles centrados) e da estrutura uniforme que nela define a classe \mathcal{F} das faixas P_δ , come-

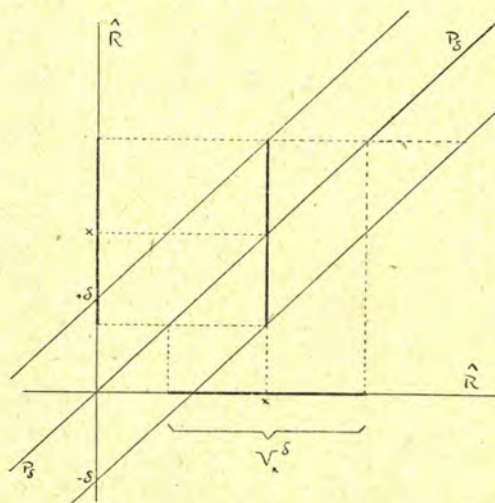


Fig. 3

çamos por observar a ligação existente entre essas duas estruturas: na realidade a vizinhança V_x^d dum ponto x coincide com o conjunto dos pontos y tais que $(x, y) \in P_d$ (fig. 3). Esta ligação entre as duas estruturas exprime-se dizendo que a topologia de R pode deduzir-se da sua estrutura uniforme.

A um espaço E , cuja topologia foi deduzida, por este processo, dum estrutura uniforme nele dada, chama-se *espaço uniforme*. Vê-se pois como dum estrutura uniforme definida em E se deduz sempre uma organização topológica de E como espaço uniforme.

Terminada esta observação procuremos relacionar os filtros convergentes em \bar{R} e os filtros de CAUCHY definidos sobre \bar{R} . Como em todos os espaços uniformes, acontece que todo filtro convergente é um filtro de CAUCHY. Na verdade: para toda proximidade P de \bar{R} , existe uma outra proximidade \bar{P} tal que $\bar{P}^2 \subset P$. Seja \bar{P}_{x_0} a vizinhança de x_0 correspondente à proximidade \bar{P} . Sendo x_0 limite de \mathcal{F} existe em \mathcal{F} um conjunto X , tal que $X \subset \bar{P}_{x_0}$; e como \bar{P}_{x_0} é pequeno de ordem \bar{P}^2 e $\bar{P}^2 \subset P$, \mathcal{F} possui conjuntos tão pequenos quanto se queira e é, por isso, um filtro de CAUCHY. Quanto à condição suficiente não é ela verdadeira em todos os espaços uniformes. Por exemplo, se (como se fez para a recta real \bar{R}) definissemos sobre a recta racional R um conjunto de proximidades (faixas P traçadas no plano $R \times R$ constituído pelos pares (x, y) de pontos de coordenadas racionais), o filtro associado de

$$\{0,1; 0,10; 0,101; 0,10100; 0,101001; \\ 0,10100100001; \dots\}$$

é um filtro de CAUCHY, que não é convergente em R .

Pelo contrário todo filtro de CAUCHY sobre a recta \bar{R} é convergente, propriedade que distingue entre os espaços uniformes, os *espaços uniformes completos*. A análise das razões desta essencial propriedade conduzir-nos-á a generalizar a definição dos números reais a partir dos números racionais, pelo método de CANTOR.

Orienta esta definição (dada a partir do espaço não completo da recta racional R) precisamente o objectivo de identificar no domínio dos números reais as noções de sucessão convergente e sucessão de CAUCHY, de modo a tornar válida na recta real a condição necessária e suficiente de convergência enunciada por CAUCHY.

Partamos do espaço uniforme R dos números racionais, sendo a classe das suas proximidades as faixas P_d dos pontos (x, y) de $R \times R$ tais que $|x - y| < d$; consideraremos o conjunto \bar{R} de todas

as sucessões de CAUCHY $\{x_n\}$ de números racionais e convençionemos dizer que a *distância das sucessões* $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ é menor que d (número racional positivo) se existir N tal que $|x_{N+p} - y_{N+p}| < d$ para todo inteiro positivo p . Com esta convenção estudemos no espaço produto $\bar{R} \times \bar{R}$ o conjunto \bar{P} de todos os pares $(\{x_n\}, \{y_n\})$ de sucessões de CAUCHY $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ cuja distância é menor que d .

Como $\{x_n\}$ é sucessão de CAUCHY, o filtro elementar \mathcal{X} a ela associado possui um conjunto $X \subset R$:

$$X \equiv \{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+m}, \dots\}$$

pequeno de ordem P_d ; análogamente o filtro \mathcal{Y} associado a $\{y_n\}$ possui um conjunto $Y \subset R$ de ordem P_d :

$$Y \equiv \{y_{N+1}, y_{N+2}, \dots, y_{N+m}, \dots\}.$$

O conjunto união $X \cup Y$ é comum aos filtros X e Y e a sua ordem P_{2d} , pois

$$|y_{N+i} - x_{N+k}| \leq |y_{N+i} - x_{N+i}| + |x_{N+i} - x_{N+k}| < 2d.$$

Assim, cada \bar{P}_d , proximidade de \bar{R} coincide com o conjunto dos pares de sucessões de CAUCHY, cujos filtros elementares associados têm em comum um conjunto de (números racionais) pequeno de ordem P_{2d} . A existência desta correspondência entre a classe dos \bar{P} e a classe dos P , sugere que, para completar um espaço uniforme R qualquer, se tome o conjunto \bar{R} constituído por todos os filtros de CAUCHY sobre R e em \bar{R} se defina uma estrutura uniforme, tendo como base das proximidades de \bar{R} a classe \bar{P} de todos os conjuntos \bar{P} de pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de filtros de CAUCHY sobre R que têm em comum um conjunto de ordem P . Pode verificar-se que assim se obtém efectivamente uma base de proximidades em \bar{R} .

Ora \bar{R} resulta precisamente um espaço uniforme completo. Para o verificarmos continuemos a atentar no modelo \bar{R} , o conjunto das sucessões de CAUCHY de números racionais. Entre estas sucessões encontram-se as de termos todos iguais entre si

$$\{x, x, x, \dots, x, \dots\}$$

que representaremos por (x) , onde x é um número racional. O sub-conjunto (R) de \bar{R} , constituído por todas as sucessões deste tipo, pode pôr-se em correspondência biunívoca com o espaço R dos números racionais, pela aplicação

$$x \leftrightarrow (x).$$

Quando se dá a definição dos números reais a partir dos números racionais é precisamente passagem essencial demonstrar que todo número real $\xi = \{x_n\}$, definido pela sucessão de CAUCHY, $\{x_n\}$ pode consi-

derar-se, mediante apropriada definição de limite.

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$$

onde (x_n) é a imagem em \tilde{R} do número (racional) x_n de R . Análogamente, para completar um espaço uniforme R qualquer, deveremos considerar o sub-conjunto (R) de \tilde{R} , $(R) \subset \tilde{R}$, constituído pelos filtros de CAUCHY (x) cuja base é o conjunto $\{x\}$ com $x \in R$; e demonstrar que qualquer elemento de \tilde{R} , isto é qualquer filtro \mathfrak{A} sobre R pode considerar-se, em \tilde{R} , como limite do filtro (\mathfrak{A}) imagem em (R) , por meio de $x \rightarrow (x)$, do próprio filtro \mathfrak{A} . Prova que decorre de ser o filtro \mathfrak{P}_x das vizinhanças de \mathfrak{A} menos fino do que \mathfrak{A} . De facto, tome-se a vizinhança \tilde{P}_x de \mathfrak{A} , constituída por todos os filtros \mathfrak{Y} tais que $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{A}) \in \tilde{P}_x$. Esta relação implica que \mathfrak{A} e \mathfrak{Y} têm em comum um conjunto C pequeno de ordem P . Mas todo $c \in C$ dá lugar a um filtro (c) que satisfará a $((c), \mathfrak{A}) \in \tilde{P}_x$. Assim a imagem (C) , em \tilde{R} de C satisfará a $(C) \subset P_x$.

Porém essa imagem (C) sendo dum elemento C do filtro \mathfrak{A} pertencerá à imagem (\mathfrak{A}) deste mesmo filtro; o que prova ser menos fino o filtro das vizinhanças de \mathfrak{A} do que (\mathfrak{A}) .

Esta densidade de (R) em \tilde{R} vai permitir mostrar que em \tilde{R} todo filtro de CAUCHY é convergente. Uma vez mais guiemo-nos pelo procedimento seguido na passagem de R considerado como a recta racional para \tilde{R} considerado como o conjunto de todas as sucessões de CAUCHY de números racionais. A demonstração consiste na escolha em correspondência a cada um dos elementos

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

pertencentes a uma sucessão de CAUCHY, $\{\xi_n\}$ onde cada elemento ξ_n é por sua vez uma sucessão de CAUCHY $\xi_n = \{x_m\}$ de números racionais, x_m de elementos de (R)

$$(x_1), (x_2), \dots, (x_n), \dots$$

tais que $|\xi_n - (x_n)| < \delta$. A sucessão $\{(x_n)\}$ seria uma sucessão de CAUCHY, porque

$$|(x_n) - (x_m)| \leq |\xi_n - (x_n)| + |\xi_n - \xi_m| + |\xi_m - (x_m)| < 3\delta,$$

mas constituída apenas por elementos de (R) . Ora a sucessão $\{x_n\}$ que lhe corresponderia em R seria igualmente de CAUCHY. Assim $\{x_n\}$ seria um elemento de \tilde{R} , limite até de $\{(x_n)\}$ e por isso igualmente da sucessão de CAUCHY dada, $\{\xi_n\}$.

Façamos agora a transposição desta demonstração para mostrar que é completo o espaço uniforme \tilde{R} dos filtros de CAUCHY sobre R (R um espaço uniforme não completo qualquer). Em vez duma sucessão

de CAUCHY começaremos por considerar um qualquer filtro de CAUCHY \tilde{C} sobre \tilde{R} . Assim como à sucessão $\{\xi_n\}$ substituímos outra sucessão de CAUCHY, cujos elementos (x_n) eram imagens de números racionais x_n , imagens essas vizinhas de menos de δ dos correspondentes elementos na sucessão $\{\xi_n\}$, vamos agora substituir, ao filtro de CAUCHY sobre \tilde{R} , um filtro (\mathfrak{C}) de CAUCHY, sobre $(R) \subset \tilde{R}$, filtro porém com elementos próximos, da mesma ordem \tilde{P} (qualquer), dos elementos de \tilde{C} . Para isso, e fixada uma proximidade \tilde{P} , considera-se para cada conjunto $C \in \tilde{C}$ a união

$$\bigcup_{c \in C} \tilde{P}_c$$

das vizinhanças \tilde{P}_c (correspondentes à proximidade \tilde{P}) de todos os elementos c de C . As intersecções destas uniões com a imagem (R) de R

$$(R) \cap \bigcup_{c \in C} \tilde{P}_c$$

constituem uma base de filtro como facilmente se verifica. Mas filtro que é de CAUCHY. Efectivamente se \tilde{P}^1 é uma proximidade qualquer de \tilde{R} a propriedade U_3 das proximidades assegura-nos que existe P tal que $\tilde{P}^2 \tilde{P} = \tilde{P}^3 \subset \tilde{P}^1$. Escolhendo no filtro \mathfrak{C} um conjunto C pequeno de ordem \tilde{P} , $(R) \cap \bigcup_{c \in C} \tilde{P}_c$

será pequeno de ordem \tilde{P}^3 e portanto de ordem \tilde{P}^1 . Sendo (\mathfrak{C}) de CAUCHY é-o igualmente a sua imagem C , em R . Portanto C é um elemento de \tilde{R} , cujo filtro das vizinhanças é então menos fino que (\mathfrak{C}) ; mas este é claramente menos fino que \tilde{C} pois todo elemento de (\mathfrak{C}) é-o também de \tilde{C} . Todo filtro de CAUCHY em \tilde{R} é pois convergente: \tilde{R} é um espaço uniforme completo.

Deve ter sido já observado que em \tilde{R} (considerado como conjunto de todas as sucessões de CAUCHY de números racionais) não se tem ainda a recta real R : os elementos de \tilde{R} não são os números reais. Efectivamente falta ao espaço uniforme completo \tilde{R} uma propriedade fundamental da recta real (e da própria recta racional) — a separação de dois quaisquer dos seus pontos; não é possível no espaço \tilde{R} e, para dois seus pontos arbitrários, determinar duas vizinhanças respectivas sem pontos comuns. Diz-se que R não é espaço separado. E ser espaço separado é propriedade essencial num espaço dotado da noção de limite, pois é a separação que garante à convergência (das sucessões e dos filtros) um único li-

mite. Ora, é de facto, possível encontrar duas sucessões distintas (por exemplo $\{x_n\}$ e $\{x_n - \frac{1}{n}\}$) distintas, mas para as quais não existe uma proximidade \tilde{P} tal que $(\{x_n\}, \{x_n - \frac{1}{n}\}) \notin \tilde{P}$. De modo que é impossível determinar em \tilde{R} , com a topologia compatível com a sua estrutura uniforme, uma vizinhança de $\{x_n\}$ e outra de $\{x_n - \frac{1}{n}\}$ sem pontos comuns. Mais geralmente sendo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sucessões tais que, para d arbitrário, se pode determinar N de modo a ser $|x_n - y_n| < d$ para $n > N$, o par correspondente, $(\{x_n\}, \{y_n\})$, pertence a todas as proximidades; a intersecção em $\tilde{R} \times \tilde{R}$ de todas as proximidades de \tilde{R} não se confunde pois com a diagonal Δ do espaço produto $\tilde{R} \times \tilde{R}$.

Recorde-se que, para a definição de números reais, se introduz uma relação de equivalência entre as sucessões de CAUCHY de números racionais, relação essa que é

$$[\{x_n\} \approx \{y_n\}] \Leftrightarrow \forall d \exists N [\forall n (n > N \rightarrow |x_n - y_n| < d)].$$

Ora esta relação de equivalência pode exprimir-se em termos das proximidades \tilde{P}_d de \tilde{R} na forma seguinte, onde $\cap \tilde{P}_d$ representa a intersecção de todas as proximidades de \tilde{R} :

$$[\{x_n\} \approx \{y_n\}] \Leftrightarrow (\{x_n\}, \{y_n\}) \in \cap \tilde{P}_d$$

isto é duas sucessões são equivalentes se o par que elas determinam em $\tilde{R} \times \tilde{R}$ pertence a todas as proximidades da estrutura uniforme definida em \tilde{R} ; números reais são classes de sucessões de CAUCHY de números racionais equivalentes entre si.

Vê-se que este problema da definição dos números reais a partir dos números é, num dos seus aspectos, um caso particular do processo a seguir para tornar separado um espaço uniforme qualquer não separado:

Por transposição da noção de sucessões equivalentes

para um espaço uniforme qualquer \tilde{R} , diremos que dois pontos x e y deste espaço serão equivalentes se o seu par (x, y) pertencer à $\cap \tilde{P}$ do correspondente espaço produto $\tilde{R} \times \tilde{R}$.

Com as classes \bar{x} de todos os pontos de \tilde{R} equivalentes a x , forma-se um novo conjunto \bar{R} (o conjunto cociente de \tilde{R} pela relação de equivalência adoptada) que pode igualmente organizar-se como espaço uniforme separado completo.

Para levar a efeito essa organização note-se que na recta real \tilde{R} de elementos $[x_n]$ (designando-se por tal o número real que é o conjunto de todas as sucessões equivalentes à sucessão $\{x_n\}$, sucessão que representa o respectivo número real) a proximidade \tilde{P}_d , por exemplo, que é definida pela faixa limitada pelas duas paralelas à diagonal tiradas pelos pontos $(0, d)$ e $(0, -d)$ pertencem dois números quaisquer $[x_m]$ e $[y_m]$ que satisfaçam a

$$|[x_m] - [y_m]| < d.$$

Mas para que os números reais $[x_m]$ e $[y_m]$ satisfaçam a esta desigualdade deve existir em $[x_m]$ uma sucessão $\{x'_m\}$ e em $[y_m]$ uma sucessão $\{y'_m\}$ que pertençam simultaneamente à proximidade \tilde{P}_d de \tilde{R} .

Esta observação indica-nos a relação existente entre as proximidades \tilde{P}_d de \tilde{R} e as \tilde{P}_d de \bar{R} ; e diz-nos que na passagem dum espaço uniforme não separado qualquer \tilde{R} para um outro separado \bar{R} , se define a estrutura uniforme sobre \bar{R} da forma seguinte: em correspondência a cada \tilde{P} de $\tilde{R} \times \tilde{R}$ formamos em $\bar{R} \times \bar{R}$ o conjunto de todos os pares (\bar{x}, \bar{y}) das classes \bar{x} e \bar{y} de pontos de \tilde{R} tais que existe $x' \in \bar{x}$ e $y' \in \bar{y}$, $x' \in \tilde{R}$ e $y' \in \tilde{R}$ com $(x', y') \in \tilde{P}$.

As relações que têm lugar entre as proximidades dos dois espaços permitirão verificar o caracter completo deste espaço e o de ampliação relativamente ao espaço uniforme e não completo, donde partirmos no início.

Hillsche Hypertetraeder (*)

von H. Hadwiger

Universität Bern, Schweiz

Es sei (a_1, \dots, a_k) ein System von k linear unabhängigen isogonalen Einheitsvektoren a_v des k -dimensionalen euklidischen Raumes, sodass für ein

$$\omega = \cos \theta, \quad -\frac{1}{k-1} < \omega < 1,$$

$$(a_i, a_j) = \omega \quad [i \neq j; i, j = 1, \dots, k]$$

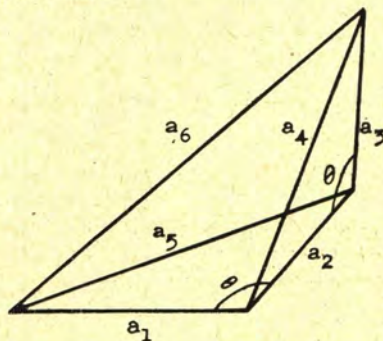
gilt. Das k -dimensionale Simplex H_ω , dessen Punkte durch die in einem Ursprung Z angreifenden Ortsvektoren

$$\sum_1^k \lambda_v a_v \quad [1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0]$$

gegeben sind, wollen wir ein Hillsches Hypertetraeder nennen. Für $k=3$, also im Falle des gewöhnlichen Raumes, ist H_ω ein von M. J. M. HILL (1) beschriebenes Tetraeder (vergl. Abb. und Tabelle), dessen Volumen sich auf Grund der üblichen Inhaltsaxiome ohne Grenzübergang aus dem Prismavolumen ableiten lässt. Diese Möglichkeit hängt aufs engste mit der Tatsache zusammen, dass das Hillsche Tetraeder mit einem Würfel zerlegungsgleich (endlichgleich) ist (2). Mühelos lässt sich bestätigen, dass die bekannten

von M. DEHN (3) aufgestellten notwendigen Bedingungen für eine bestehende Zerlegungsgleichheit im vorliegenden Falle erfüllt sind (vergl. Tabelle).

Die oben erwähnte eindeutige Bestimmbarkeit des Volumens ohne Stetigkeitsbetrachtung ist andererseits nach einem allgemeinen Satz von B. JESSEN (4) übrigens auch hinreichend dafür, dass diese speziellen Tetraeder mit einem Würfel ergänzungsgleich bzw. zerlegungsgleich sind.



a_i Kanten

α_i Flächenwinkel

$$\omega = \cos \theta$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

i	a_i	$\cos \alpha_i$
1	1	$\sqrt{1+2\omega}/2+2\omega$
2	1	$-\omega/1+\omega$
3	1	$\sqrt{1+2\omega}/2+2\omega$
4	$\sqrt{2+2\omega}$	0
5	$\sqrt{2+2\omega}$	0
6	$\sqrt{3+6\omega}$	1/2

(*) Eingegangen am 4.10.1951.

(1) M. J. M. HILL, Determination of the volumes of certain species of tetrahedra without employment of the method of the limits; Proc London Math. Soc. 27 (1896) 39-53.

(2) Nach den Hillschen Konstruktionen ergibt sich zunächst die Zerlegungsgleichheit seines Tetraeders mit einem dreiseitigen Prisma; hieraus resultiert weiter die Zerlegungsgleichheit eines Hillschen Tetraeders mit einem Parallelotop. Hier kam damals die Schlussweise zum Stillstand, da man erst viel später erkannte, dass jedes Parallelotop mit einem Würfel zerlegungsgleich ist. Dies wurde u. W. erstmals von A. EMCH Endlich-gleiche Zerschneidung von Parallelotopen in gewöhnlichen und höheren Euklidischen Räumen; Comm. Math. Helv. 18. (1945/46) 224-231 bewiesen. Eine diesbezügliche Bemerkung von C. JUEL (Egalité par addition de quelques polyèdres; Ber. d. K. Ges. d. Wiss. Kopenhagen 1903, 65-67), die sich auf eine Pyramide, welche sich aus vier «rechtwinkligen» Hillschen Tetraedern zusammensetzt, bezieht, wurde aus den oben genannten Gründen von H. VOET (Ueber Gleichheit und Endlichgleichheit von Prismen und Pyramiden; 139. Programm d. Königlichen Friederichs-Gymnasiums zu Breslau 1904, S. 9 Fussnote 1) als Irrtum angeführt. Die JUELSche Behauptung ist aber doch richtig!

(3) M. DEHN, Ueber den Rauminhalt; Math. Ann. 55. (1901) 465-478. Einen vereinfachten Beweis des Dehnschen Satzes gab kürzlich JOSÉ DA SILVA PAULO, Aequivalenz von Polyedern; Gaz. Mat., Lisboa, 9, 4-6 (1948).

(4) B. JESSEN, En Bemaerking om Polyedres Volumen; Mat. Tidsskr. B, 1941.

In der vorliegenden Note will ich einen kurzen Beweis dafür skizzieren, dass die sich auf die Hillschen Tetraeder beziehende klassische Satzaussage für alle Dimensionen zutrifft, d. h. es gilt

Die k -dimensionalen Hillschen Hypertetraeder H_ω sind mit einem k -dimensionalen Hyperwürfel W zerlegungsgleich.

Ueber die Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder ist für $k > 3$ u. W. noch nicht sehr viel bekannt; begreiflicherweise, wenn man bedenkt, dass gewisse charakteristische Schwierigkeiten nicht einmal im elementargeometrischen Fall $k=3$ überwunden werden konnten⁽⁵⁾. Der hier mitgeteilte Sachverhalt dürfte für gewisse Untersuchungen über Zerlegungsgleichheit im k -dimensionalen Raum wertvolle Hinweise liefern.

Um den in Aussicht gestellten Beweis einzuleiten, gehen wir von der Bemerkung aus, dass es eine Gruppe von kongruenten Abbildungen γ_p [$p = 1, 2, \dots, k!$] (Drehungen und Spiegelungen) des k -dimensionalen Raumes gibt, welche die k im Ursprung Z angreifenden Vektoren a_ν [$\nu = 1, 2, \dots, k$] des isogonalen k -Beins (a_1, a_2, \dots, a_k) in sich überführen.

Es sei $a_\nu^p = \gamma_p(a_\nu)$ der Bildvektor von a_ν ; dann ist das Bildsimplex $H_\omega^p = \gamma_p(H_\omega)$ von H offenbar durch die Ortsvektoren $\sum_1^k \lambda_\nu a_\nu^p$ [$1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$] festgelegt. Die in dieser Darstellung auftretende Anordnung (a_1^p, \dots, a_k^p) stellt eine der Abbildung γ_p eineindeutig zugeordnete Permutation der ursprünglichen Anordnung (a_1, \dots, a_k) dar. Bezeichnet $(\lambda_1^p, \dots, \lambda_k^p)$ die kogrediente Permutation des Koeffizientensatzes $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, so lässt sich H_ω^p auch durch die Ortsvektoren $\sum_1^k \lambda_\nu^p a_\nu$ beschreiben.

(*) Die für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder hinreichenden Bedingungen konnten immer noch nicht aufgefunden werden; sie sind vermutlich mit den DEHNschen notwendigen Bedingungen identisch.

Im Hinblick einerseits auf die Nebenbedingung $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ ergibt sich, dass die $k!$ verschiedenen Bildsimplexe H_ω^p paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben können, und andererseits erhellt der Umstand, dass p alle Permutationen durchläuft, dass das Vereinigungspolyeder

$$P = \sum_1^{k!} H_\omega^p$$

durch die Ortsvektoren

$$\sum_1^k \lambda_\nu^p a_\nu \quad [0 \leq \lambda_\nu \leq 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, k]$$

dargestellt ist, da ja ein beliebiger Koeffizientensatz (λ_ν) , der den Nebenbedingungen rechts genügt, stets als Permutation eines monoton fallenden Koeffizientensatzes (λ_ν) darstellbar ist. Also ist P ein k -dimensionales Parallelotop, insbesondere ein Hyperhomboid. Nach einem bekannten Satz von A. EMOH⁽⁶⁾ u. a. ist P mit einem Hyperwürfel W' zerlegungsgleich. Von den $k!$ Bildsimplexen H_ω^p sind $\frac{k!}{2}$ kongruent und $\frac{k!}{2}$ symmetrisch zu H_ω . Nach der geläufigen k -dimensionalen Erweiterung eines klassischen Satzes⁽⁷⁾ sind aber symmetrische Polyeder zerlegungsgleich. Unser Würfel W' ist somit zerlegungsgleich mit der Vereinigung von $k!$ kongruenten Exemplaren H_ω . Da andererseits der Würfel W' auch zerlegungsgleich mit $k!$ kongruenten kleineren Würfeln W ist, folgt so, dass H_ω mit W in diesem Sinne selbstergänzungsgleich ist. Nach den vom Verf. kürzlich bewiesenen allgemeinen Sätzen über Ergänzungsgleichheit⁽⁸⁾ resultiert nunmehr die Zerlegungsgleichheit von H_ω mit W , w. z. b. w.

(*) vergl. Fussnote (2).

(7) vergl. etwa: H. SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie, II. Teil, Leipzig 1905; Nr. 38.

(8) H. HADWIGER, Ergänzungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder; befindet sich im Druck und erscheint voraussichtlich in der Math. Zeitschr.

L'insegnamento delle frazioni (*)

di Emma Castelnuovo

Roma

Come ogni ramo della matematica così anche l'aritmetica ha una sua storia: una storia propriamente detta relativa alla scoperta o alla chiarificazione di un dato concetto numerico, e una storia dell'inserirsi e del divulgarsi del concetto stesso nella vita. Indubbiamente le due storie sono legate fra loro, ma i passaggi dall'una all'altra sono sempre molto lenti.

Ora, l'atteggiamento intellettuale del fanciullo è spesso dovuto a un'azione ereditaria considerata nel senso più largo; ma, evidentemente, non è il lavoro fatto da un matematico su questo o quell'argomento che lascia una traccia nella mentalità infantile, bensì lo sviluppo e l'uso di una determinata nozione nella vita pratica.

Questo lento processo di assimilazione esercita una profonda influenza sulla disposizione del bambino ad apprendere.

Ci proponiamo qui di analizzare le difficoltà che incontra l'allievo nello studio delle frazioni e di discutere un piano per un primo insegnamento di questo concetto, collegandolo all'uso e alla pratica che del concetto stesso si fece nella storia dell'umanità.

L'insegnamento attuale delle frazioni

Nelle popolazioni civili lo studio sistematico, da un punto di vista pratico, del calcolo frazionario viene impartito a ragazzi dagli 11 ai 14 anni.

Occorre notare che ad 11 anni il bambino ha acquisito nel campo concreto il concetto di talune frazioni, in particolare delle unità frazionarie; recenti esperienze fatte a Ginevra all'Institut Rousseau sotto la guida di Jean Piaget provano che è proprio nel periodo dagli 8 agli 11 anni che il bambino afferra e comprende — naturalmente per gradi — il concetto di frazione. Quando noi iniziamo lo studio sistematico delle frazioni il ragazzo ne ha dunque già acquisito il concetto.

Dopo uno o due anni di questo studio, dopo infiniti

esercizi su espressioni frazionarie, si verifica un fatto assai strano: il ragazzo incaricato di andare ad acquistare $\frac{3}{8}$ di litro di latte è un pò incerto se gli bas-

terà portare una bottiglia vuota da $\frac{1}{2}$ litro. Il

nostro giovanetto, per scusare le proprie incertezze, afferma che gli studi fatti avevano carattere teorico e che così si dice a Scuola — il corso di Aritmetica serve per aiutare a ragionare proprio come quello di latino. Quanto al suo professore, conscio evidentemente del risultato negativo del proprio insegnamento, preferisce sorvolare sui problemi pratici ed insistere sempre più su quelle espressioni frazionarie che, di anno in anno, crescendo in lunghezza e in altezza tendono con la loro estensione ad invadere l'intera lavagna.

Nè l'allievo nè il maestro hanno osservato che sul libro di testo è scritto «Aritmetica pratica». Minima è evidentemente la colpa dell'allievo, grande quella del maestro, ma grandissima quella dell'autore del libro.

Nella maggior parte dei testi la frazione viene introdotta prima come *operatore* e poi come *numero*; ma non sono due definizioni, anche se si succedono opportunamente, che possono chiarire il concetto. Il periodo che è passato storicamente fra la nozione concreta e quella astratta non può ridursi alle poche righe che intercorrono fra una definizione e l'altra. Bisogna tener presente che è sono dopo secoli di lavoro che il simbolo $\frac{m}{n}$ fu spogliato del suo significato concreto e fu considerato come un numero.

Inoltre, le operazioni di addizione e sottrazione sono state create per necessità pratiche, cioè sono nate storicamente in modo concreto, mentre a Scuola il

(*) Ricevuto nell' Ottobre 1951.

calcolo frazionario viene svolto considerando la frazione come numero. Giustamente osserva R. Courant (1) che per ridurre immediati i calcoli sull'addizione e sottrazione si poteva stabilire per esempio che:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4};$$

ma è la rappresentazione concreta che ci impedisce di fissare per il calcolo numerico norme arbitrarie come la precedente.

Se l'attenzione dell'allievo non è costantemente richiamata all'interpretazione concreta è inevitabile che egli cadrà in errori di questo genere.

Un corso ciclico per le frazioni

Nell'insegnamento non si deve trascurare nessuno dei vari aspetti del concetto di frazione anche se si ha l'impressione di perder tempo. Io sarei del parere di «frazionarli» nei primi tre anni della Scuola secondaria: nel 1.º la frazione dovrebbe introdursi da un punto di vista concreto come *operatore*; nel 2.º come *numero*; nel 3.º come *rapporto*.

Qui mi propongo di discutere solo l'insegnamento del primo anno di questo corso ciclico.

Quest'insegnamento potrà essere iniziato anche subito, senza aver bisogno di svolgere alcuna teoria preliminare sul massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Si eviterà così il pericolo di difendersi troppo in questo studio astratto nel primo anno, quando l'allievo non può intendere ancora l'interesse di una teoria generale.

Il concetto di frazione nel piano concreto

Mi pare che le difficoltà che s'incontrano nel concetto di frazione sul piano concreto debbano attribuirsi a due fattori:

I) la frazione $\frac{m}{n}$ porta a fissare l'attenzione su tre punti contemporaneamente:

- 1) la parte $\frac{1}{n}$
- 2) la somma delle m parti
- 3) l'intero.

Questa contemporaneità di pensiero, obbligando a una sintesi, determina un notevole sforzo d'astrazione; è una difficoltà di ordine visivo.

II) La frazione $\frac{m}{n}$ ha, pur limitandosi sempre al

campo concreto, due significati:

- 1) l'atto operativo: dividere l'intero in n parti e prenderne m ;
- 2) il risultato dell'operazione: la parte di valore $\frac{m}{n}$.

Questo duplice aspetto porta a una difficoltà di ordine psicologico.

Analisi della prima difficoltà. Questa porta ad evitare la frazione.

A me pare che in questo punto la mentalità infantile riproduca, fin nei particolari, quella degli antichi.

Troviamo infatti che il pensiero dominante degli Egiziani e dei calcolatori Greci nel campo delle frazioni è quello di spezzare una frazione in somma di unità frazionarie:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{p}$$

Abituata a lavorare sugli interi, entità visibili, la mente dei primitivi rifugge dalla considerazione di tre concetti contemporanei, cioè dal concetto generale $\frac{m}{n}$, e si limita alla considerazione di unità frazionarie.

L'unità frazionaria porta a fissare l'attenzione solo su due punti simultaneamente: la parte e l'intero. Spezzare la frazione significa lavorare su entità visibili, percettive.

Per evitare dunque le frazioni gli antichi ricorsero alle unità frazionarie.

Lo stesso avviene nei nostri bambini: per prendere $\frac{3}{4}$ di una tavoletta di cioccolata il bambino ne prende prima $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{2}$ di quello che rimane; opera quindi, come gli antichi, lo spezzamento:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Un altro modo di evitare le frazioni è quello di creare nuove unità di misura: è quanto è stato fatto dai Babilonesi e più tardi dai Romani, che arrivarono a enormi complicazioni nel loro sistema di unità di misura pur di evitare il simbolo $\frac{m}{n}$.

Anche il bambino ricorre a questo metodo: se il bastone che ha preso per misurare la distanza fra due oggetti è contenuto per esempio più di 4 volte e meno di 5, egli dice che «non è buono» e preferisce pren-

(1) R. COURANT and H. ROBBINS: *What is Mathematics* — Oxford University Press, 1946 — pag. 54. Traduzione italiana: Casa editrice Einaudi.

derne un altro più piccolo o più grande, ma tale che sia contenuto un numero intero di volte. Egli cambia dunque unità di misura.

Quanto alle unità frazionarie, benchè fin dalla più remota antichità ne compaiano di assai complesse, come nel Papyrus Rhind:

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232},$$

nella vita pratica egiziana sono state introdotte gradualmente.

Ce lo prova il fatto che gli Egiziani per prendere un sottomultiplo di un numero procedevano fin che possibile con successive divisioni per 2, cioè si valevano delle unità frazionarie:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Queste furono anzi assunte come sottomultipli dell'unità di capacità, l'hekat. (1)

Successivamente si utilizzarono molto spesso anche le unità:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}.$$

Nei bambini l'analogia con la mentalità antica si ritrova nella successiva, graduale assimilazione del concetto di unità frazionaria. Si osserva infatti che al bambino l'unità $\frac{1}{2}$ riesce molto più semplice delle

altre: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ (2). La differenza di difficoltà fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ ad esempio mi sembra debba attribuirsi a questo: $\frac{1}{2}$ traduce l'operazione di un movimento

semplice (la piegatura di una strisciolina di carta, per esempio, in modo che i due estremi coincidano), mentre $\frac{1}{3}$ traduce un'operazione complessa (la trisezione).

E' chiaro che da un punto di vista percettivo si coglie subito la prima operazione, perchè se ne vede l'immediata esecuzione, mentre «vedere» la seconda è più difficile perchè non è chiaro il modo di eseguirla.

Trovato $\frac{1}{2}$, non c'è difficoltà ad avere $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

(1) È interessante notare che questi sottomultipli rimasero in uso si può dire fino ai giorni nostri, fino all'introduzione del sistema decimale.

(2) Anche su questa graduale difficoltà riscontrata dal bambino interessanti esperienze sono state fatte all'Institut Rousseau di Ginevra.

Giustamente osserva J. PIAGET (1) che queste successive divisioni in due esercitano sul bambino una vera seduzione. Ma direi che questo sia un caso particolare di un fatto più generale: è il ripetersi di un'operazione che esercita un'attrazione sul bambino; qui poi oltre al ripetersi di questo atto operativo si ha come risultato un graduale rimpiccolimento e quindi viene eccitata la fantasia infantile.

Nella storia dell'aritmetica pratica egiziana si ritrova oltre all'uso delle unità frazionarie quello molto frequente della frazione $\frac{2}{3}$. Si è voluto attribuire

a questa frazione un carattere mitico, come aveva nel campo della geometria il triangolo di lati 3, 4, 5. Ma anche il mito vuole le sue ragioni. Mi sembra che sia presumibile che l'uso della frazione $\frac{2}{3}$ si riallacci

all'importanza che aveva questa frazione nella gamma cinese, la più antica a cui si possa risalire (2). Pur non prevedendo la funzione teorica che avrebbe avuto questa frazione nella gamma greca, se ne era intuita l'importanza, tanto che veniva considerata come una nuova unità di misura.

È chiaro che nella mente infantile non può riscontrarsi una particolare facilità per la frazione $\frac{2}{3}$; essa in fondo ha avuto un predominio solo per un periodo determinato di secoli e questo predominio non era dovuto a una convenienza pratica.

Analisi della seconda difficoltà. Questa porta a considerare le frazioni come degli interi.

Questa difficoltà deriva, come abbiamo detto, dai due diversi significati che ha la frazione $\frac{m}{n}$, pur considerata sempre nel campo concreto: l'atto operativo e il risultato, la parte ottenuta.

Il fatto che gli antichi dividevano una frazione in unità frazionarie — enti visibili — ci prova anche che essi fermavano l'attenzione sul risultato, non sull'azione che conduce al risultato. Dai papiri egiziani risulta che la pratica nell'addizionare le unità $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ era tale che non si sentiva il bisogno di ridurle esplicitamente allo stesso denominatore. Essi «vedevano» dunque queste frazioni; ne percepivano il valore.

(1) J. PIAGET: La géométrie spontanée de l'enfant. pg. 424. Paris, Presses Universitaires de France.

(2) A. REY: La science orientale avant les Grecs, pg. 499. Paris, Albin Michel.

Come negli antichi il concetto di operatore è nascosto dal risultato così avviene nel bambino. Se gli diciamo di prendere i $\frac{3}{4}$ di una torta già divisa in 4 fette, egli prenderà 3 fette e non ricorderà più il valore di una fetta rispetto all'intero. Egli è condotto dunque ad agire come sugli interi. La sua mente si fissa sul risultato; egli non pensa a come è stato ottenuto e non lo mette in relazione col totale.

Abbiamo detto che gli antichi riuscivano a «vedere» solo le unità frazionarie. L'intuizione di noi adulti — aiutata dall'azione ereditaria — si spinge un pò più in là: oltre alle unità frazionarie infatti noi riusciamo a cogliere il valore di frazioni a termini piccoli, per esempio la frazione $\frac{3}{4}$. Se invece la frazione ha termini grandi, per esempio $\frac{147}{352}$, la nostra mente non riesce a percepirne la grandezza e deve ricorrere all'atto operativo. Dunque, quando manca il sussidio visivo, si ritorna necessariamente all'operatore. Occorre risalire alle origini, alla costruzione.

In un primo insegnamento delle frazioni dovremo perciò insistere molto sull'atto operativo.

Un piano per l'insegnamento delle frazioni nel 1.º corso.

Da quanto abbiamo visto mi sembra che si possa asserire che il concetto di frazione non sorge naturalmente nel bambino come non è sorto in modo spontaneo negli antichi; e la cosa è avvalorata dal fatto che le società inferiori attuali non ne fanno uso. I secoli di lavoro pratico in questo campo sono ancora troppo pochi perchè se ne possa risentire una certa azione ereditaria.

Il bambino cerca di evitare la frazione propriamente detta e se è obbligato a questi calcoli s'industria ad attuarli come se operasse su degli interi.

A noi insegnanti si pone perciò un problema didattico diverso da quello che si presenta nell'introduzione dei numeri interi nelle scuole elementari; il problema è il seguente:

Far sentire la convenienza del calcolo frazionario e quindi fermarsi a lungo sul piano concreto; quando poi l'analogia coi numeri interi portasse a soffocare il concetto di frazione, richiamare la mente del bambino alla nozione primitiva.

Un'espressione conveniente per mettere in evidenza il valore relativo della frazione.

Ritorniamo all'esempio fatto prima sui $\frac{3}{4}$ della torta. Il bambino prende tre fette senza preoccuparsi

della quarta. Solo se lo faremo riflettere su quello che rimane egli collegherà il numero delle parti che ha preso con l'intero, cioè avrà la concezione della frazione $\frac{3}{4}$ (1).

È qui il punto delicato, è qui dove il concetto di frazione si stacca veramente da quello di numero intero. È su questa *relatività* di valore che dobbiamo insistere nel primo avvicinarsi al concetto di frazione: è il valore relativo che interessa, non l'assoluto.

Io credo che la poca chiarezza che hanno i ragazzi nel concetto di frazione sia dovuta in parte all'espressione che usiamo; quando per esempio si dice: *tre quarti*, la mente considera i quarti come fossero oggetti; come dire: tre seggiole, tre case, ecc. e opera su questi come sugli interi, cioè fissa l'attenzione sul fatto che sono *tre*. Mi sembra che un'espressione capace di far riflettere sul valore relativo della frazione potrebbe essere la seguente (del resto usata per frazioni a termini grandi): *3 su 4*, dove alla preposizione «su» venga dato il significato originario. *3 su 4* significa infatti: 3 parti *delle* 4 parti, 3 parti *invece* di 4 parti, 3 *possibilità* su 4.

Quest'espressione doveva essere comunemente usata dagli Egiziani ogni volta che si trovavano davanti a una frazione di numeratore 2 e denominatore dispari; sappiamo che essi cercavano di disgregarla in somma di unità frazionarie per darle un senso. Ma finchè era scritta come frazione, per esempio (con notazione moderna) $\frac{2}{13}$, non la chiamavano «due tredicesimi»,

ma dicevano: «esprimi 2 entro 13, cioè vedi di quante parti si compone 2 rispetto a 13».

L. RODET in un interessante articolo sul *Bulletin de la Société Mathématique de France* (t. VI, 1877-78) mette bene in evidenza il valore di quest'espressione che fu poi ripresa e adoperata dagli Arabi e dagli Ebrei.

La frazione. Le operazioni sulle frazioni. Addizione e sottrazione.

In un primo tempo converrà valersi di carta quadrata, dove il lato del quadretto sarà considerato come qualcosa d'indivisibile. Si comincerà col far costruire le unità frazionarie:

$$(1) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$\frac{1}{2}$ significa la metà dell'intero; prenderemo dunque

(1) Vedi l'osservazione analoga fatta da L. JOHANNOT in «*Le raisonnement mathématique de l'adolescent*» pg. 57. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé; e da H. G. WHEAT in «*The psychology and teaching of Arithmetic*», pg. 375. Boston, Heath and Company.

per intero un segmento divisibile in due: di 2 quadretti (1), o di 4, 6, ..., insomma di un numero pari di quadretti. $\frac{1}{2}$ significa anche 1 su 2, una parte invece di due parti. S'insisterà su questo valore relativo per cui non ha importanza la grandezza dell'intero da cui si parte. Così si procederà per $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Si noti che come intero si potrebbe prendere una grandezza qualunque; il segmento è conveniente perchè facilmente rappresentabile, percepibile. Questo intero costituisce un appoggio visivo, una «base».

Partendo da un determinato segmento, per esempio di 16 quadretti, il ragazzo osserverà facilmente che:

1) ogni frazione (1) ha valore doppio della successiva;

$$2) \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$$

Arriverà così alla proprietà fondamentale delle frazioni. Si accorgerà che per ridurre ai «minimi termini» la frazione $\frac{8}{16}$ senza dover eseguire successive divisioni si può dividere subito i due termini per il loro *massimo comun divisore*; il concetto di massimo comun divisore entra così nell'insegnamento in modo naturale.

Si passerà poi alle unità frazionarie $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

Come si *confronerà* $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$? Bisognerà prendere un segmento divisibile in due parti e in tre parti; cioè composto di 6 quadretti, o di 12, o di 18, ...

Ecco che si vede la convenienza pratica d'introdurre il *minimo comune multiplo*.

Si arriverà presto alla *frazione come somma di unità frazionarie*; si costruirà insomma la frazione come un modo breve di espressione.

Esempio: sia da eseguire l'addizione:

$\frac{1}{2}$ di un dato segmento + $\frac{1}{4}$ dello stesso segmento.

Per esprimere graficamente $\frac{1}{2}$ dovremo prendere un segmento formato da un numero pari di quadretti; per esprimere $\frac{1}{4}$ un segmento uguale al precedente e divisibile in quattro parti uguali. Converterà sce-

gliere un segmento di 4 quadretti (vedi disegno). Opero l'addizione come se si trattasse di interi: ottengo 3 quadretti. È qui il punto delicato: ottengo 3 quadretti, è vero; ma, che cosa rappresentano questi quadretti rispetto al segmento di partenza? Osserviamo: ho avuto 3 quadretti invece di 4 quadretti, 3 parti su 4, 3 su 4; lo scrivo brevemente

così: $\frac{3}{4}$.

Si entra in tal modo nel concetto di frazione.

In modo analogo si otterrà la differenza di due frazioni.

È chiaro che con questo procedimento il ragazzo si abituerà ben presto a calcolare espressioni del tipo:

$$2 - \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

Alcune volte si arriverà a frazioni in cui il numeratore supera il denominatore (*frazioni improprie*). Esse assumeranno significato scomponendole in un numero intero e in una frazione propriamente detta. Si pensi che la frazione impropria riesce generalmente difficile perchè poco naturale, dato che si parte da un problema, spesso irrealizzabile, di questo

tipo: prendere i $\frac{7}{5}$ di un oggetto.

La frazione impropria assume invece significato, anche nel campo concreto, se viene ad essere costruita come somma di frazioni.

Conviene anche tener presente che le frazioni improprie furono introdotte solo in via teorica nel 1700.

Le frazioni su cui il ragazzo lavorerà saranno sempre a termini piccoli. La frazione a termini grandi teoricamente non chiarisce certo il concetto e da un punto di vista pratico si può dire che non esista. Basterebbe per esempio confrontare le statistiche, dovute soprattutto agli americani e agli inglesi (1) relative alle frazioni che intervengono nella vita pratica.

Potrà accadere che, pur limitandosi sempre a calcoli su frazioni a termini piccoli, si debba prendere

(1) Vedi per esempio: H. G. WHEAT: «The psychology and teaching of Arithmetic», Heath and Company, Boston, 1937.

P. B. BALLARD: «Teaching the Essentials of Arithmetic», University of London Press, London, 1928.

The Scottish Council for Research in Education: «Studies in Arithmetic», vol. 1°, University of London Press, London, 1939

(1) Per brevità diremo quadretto invece che lato di un quadretto.

come «base» un segmento non contenuto nel foglio. È allora che il ragazzo si accorgerà che la rappresentazione grafica può essere anche mentale, purché egli mantenga — e questo è importante — la percezione del segmento.

Questo momento del calcolo frazionario equivale a quello che è segnato nel campo dei numeri interi dal distacco del numero dalla sua rappresentazione grafica. Tale distacco non è mai totale: la percezione visiva è sostituita da una percezione mentale: si «vede» il numero.

Moltiplicazione e divisione

Diciamo subito che ci sembra molto discutibile se sia opportuno introdurre queste operazioni in un primo insegnamento delle frazioni; nel caso affermativo è bene porre ogni attenzione su questo studio che è molto delicato.

Moltiplicazione

Dato che ci limitiamo alle frazioni di grandezza, terremo presente che i fattori e il risultato di una moltiplicazione dovranno poter essere interpretati nel campo concreto.

Ora, mentre nel campo dei numeri interi la moltiplicazione si può interpretare come un'addizione abbreviata:

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4,$$

questa interpretazione viene a mancare se si passa alle frazioni.

Ricorriamo allora alla rappresentazione geometrica: sappiamo che nel campo degli interi il prodotto $3 \cdot 4$ rappresenta l'area di un rettangolo di dimensioni 3 e 4, espresse in una data unità di misura; questa interpretazione può estendersi al caso in cui base e altezza del rettangolo siano frazioni di interi. La scrittura:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

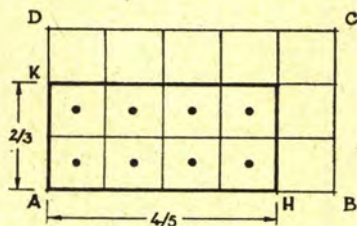
rappresenta l'operazione che si deve eseguire per calcolare l'area di un rettangolo di dimensioni $\frac{2}{3}$ di un segmento e $\frac{4}{5}$ di un altro segmento.

Risulta dalla rappresentazione grafica che il rettangolo che ha per dimensioni i segmenti di partenza AB e AD si compone di 15 parti, mentre il rettangolo di dimensioni $AH = \frac{4}{5} AB$ e $AK = \frac{2}{3} AD$ si compone di 8 parti.

Abbiamo dunque: 8 parti invece di 15 parti, 8 su 15, $\frac{8}{15}$. Quindi:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Va osservato che a differenza delle operazioni di addizione e sottrazione i due termini della moltiplicazione non debbono necessariamente riferirsi alla stessa unità; per esempio nel caso della figura i segmenti AB e AD sono disuguali.



Dalla regola di moltiplicazione di due fattori si si passa facilmente a quella di tre o più fattori: basta infatti eseguire la moltiplicazione a due a due per ottenere la regola generale.

Da un punto di vista didattico l'interpretazione visiva della moltiplicazione, che abbiamo ora dato, riesce assai facile perché si può riattaccare al procedimento seguito alla Scuola elementare per introdurre la moltiplicazione fra due numeri interi. Col disegno, con l'uso del pallottoliere ecc. si fanno disporre gli oggetti in modo da formare un rettangolo; così, per esempio, il risultato della moltiplicazione $2 \cdot 3$ viene presentato sotto la forma rettangolare qui riprodotta:

• •
• •
• •

Il problema sulla moltiplicazione

Siamo partiti dalla scrittura $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ interpretata come operazione per trovare l'area di un rettangolo di dimensioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ e abbiamo scoperto la regola di moltiplicazione delle frazioni.

In generale nei libri di testo si dà la regola di moltiplicazione delle frazioni senza alcuna giustificazione.

Passando quindi alle applicazioni e ai vari tipi di problemi si enuncia la regola: «per prendere una frazione di un numero o di un'altra frazioni e si deve eseguire una moltiplicazione».

Talvolta, per un desiderio di maggiore efficacia didattica, prima d'introdurre la regola di moltiplicazione di due frazioni si parte da un problema del seguente tipo: prendere $i \frac{2}{3}$ dei $\frac{4}{5}$ di una data grandezza. Il ragazzo è condotto a prendere prima $i \frac{4}{5}$ della grandezza, ottenendo così una seconda grandezza, e poi $i \frac{2}{3}$ di quest'ultima. È condotto cioè ad operare successivamente.

Allora si cerca di fargli comprendere che quanto si ottiene in due operazioni successive coincide col risultato che si avrebbe operando una sola volta sulla grandezza di partenza con la frazione $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. Ecco come si procede in generale: siccome

da un punto di vista grafico risulta:

$$(1) \quad \frac{2}{3} \text{ dei } \frac{4}{5} = \frac{8}{15},$$

dato che:

$$8 = 2 \cdot 4, \quad 15 = 3 \cdot 5,$$

si conviene che:

$$(2) \quad \frac{2}{3} \text{ dei } \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}.$$

Ma, a quest' uguaglianza si può arrivare solo se si è precedentemente introdotta l'operazione di moltiplicazione e se si è provato che:

$$(3) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Allora dalla (1) e dalla (3) risulterà la (2).

È proprio questa mancanza di ordine logico che il bambino avverte inconsciamente.

Occorre quindi introdurre prima la moltiplicazione di due frazioni (per esempio basandosi sull'appoggio visivo del rettangolo) e successivamente interpretare come moltiplicatoria l'espressione «dei».

La difficoltà viene così attenuata, non certo eliminata.

È sempre una convenzione, sia pure giustificata, quella per cui si traduce in simbolo di moltiplicazione l'espressione «dei»; e quindi, come in tutte le convenzioni, il bambino avverte un senso di artificio che lo costringe a uno sforzo d'astrazione.

Divisione

Ricorriamo allo stesso esempio numerico trattato nella moltiplicazione.

Partiremo dalla scrittura:

$$(1) \quad \frac{8}{15} : \frac{2}{3}$$

e procederemo come nel caso della moltiplicazione: la (1) può interpretarsi come l'altezza (o la base) di un rettangolo di cui è data l'area e la base (o l'altezza). Si tratta quindi di costruire un rettangolo la cui area sia gli $\frac{8}{15}$ dell'area di un altro e vedere come

risulta l'altezza se la base diventa $i \frac{2}{3}$ della base

primitiva. Indubbiamente la costruzione è molto complicata. Sarei quindi d'opinione di trovare la regola della divisione con questa interpretazione geometrica solo in casi particolari (il divisore è un numero intero o un'unità frazionaria).

È difficile far derivare la regola di divisione da un problema concreto, e questo è avvalorato dal fatto che storicamente tale operazione compare molto tardi e da un punto di vista teorico, considerando la frazione come numero.

Ritengo quindi opportuno d'introdurre la divisione come l'operazione inversa della moltiplicazione; si troverà empiricamente il quoziente e si verificherà poi il risultato.

Il problema sulla divisione

Ancor più che per la moltiplicazione si riscontra nel ragazzo una notevole difficoltà nell'interpretare i problemi sulle frazioni che portano a una divisione. Anche qui la difficoltà è assolutamente giustificata.

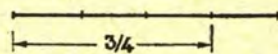
Non invertiamo il problema esposto per la moltiplicazione perchè poco visibile, ma ci limitiamo ad un esempio numerico e concreto particolarmente semplice: trattiamo un caso in cui il dividendo è un numero intero. Sia da risolvere il problema:

$\frac{3}{4}$ di litro di latte costano L. 60; quanto costa 1 litro?

La risoluzione è facile se si poggia l'attenzione su uno schema grafico.

L'intero segmento rappresenta 1 litro; $i \frac{3}{4}$ equivalgono a L. 60. Dun-

que $\frac{1}{4}$ del segmento



equivale a $L. 60 : 3 =$

$= L. 20$, e quindi l'intero segmento equivale a $L. 20 \cdot 4 = L. 80$.

Il ragazzo è condotto anche in questo problema a spezzare la difficoltà operando due volte successivamente.

Si cerca di fargli comprendere che il problema si traduce nella divisione di partizione:

$$60 : \frac{3}{4}$$

Ma, se ci si limita a frazioni di grandezza, la difficoltà che ha il ragazzo è perfettamente logica e non può essere alleviata dall'analogia col campo degli interi. Infatti: il problema con dati interi:

3 litri di latte costano $L. 240$; quanto costa 1 litro? viene tradotto nella divisione di partizione:

$$240 : 3,$$

dove il numero 3 è un numero puro.

La divisione a cui siamo portati nel problema analogo con dati frazionari è la seguente:

$$60 : \frac{3}{4};$$

ora, questa divisione non ha senso se si considera la frazione $\frac{3}{4}$ solo nel campo concreto; per noi—finora— a frazione come numero puro non esiste.

Dunque, finchè ci si limita al campo concreto non dobbiamo far tradurre in una divisione un problema del tipo ora esposto; la risoluzione sarà eseguita sul diano grafico.

Conclusione

Non intendiamo di aver dato un metodo per un primo insegnamento delle frazioni; abbiamo solo voluto richiamare l'attenzione su un problema didattico che non deve sfuggire al maestro.

La nostra esposizione si chiude invitando i colleghi a riflettere su alcuni interrogativi:

- 1) Dobbiamo tener conto dello sviluppo storico nell'insegnamento delle frazioni?
- 2) È opportuno fare un corso ciclico?
- 3) Dobbiamo dare libertà al professore nell'insegnamento delle frazioni?

Quelques problèmes de physique théorique (*)

par Antonio Gião

I — Sur la masse propre du photon. II — Sur la différence de comportement de la masse dans un champ gravifique et de la charge électrique dans un champ électromagnétique. III — Propriétés générales du champ électromagnétique généralisé. IV — Sur l'équation de SCHWINGER-TOMONAGA. V — Champs magnétiques stellaires à variation périodique.

I

Sur la masse propre du photon

De la quantification des équations du champ métrique interne et externe dans notre théorie unitaire [1] nous avons pu déduire l'expression suivante pour le potentiel électrostatique $V(r)$ d'une charge ponctuelle ε isolée, c'est-à-dire suffisamment éloignée de toute autre charge :

$$(1) \quad V(r) = \varepsilon \frac{e^{-\eta_1 r} - e^{-\eta_2 r}}{r},$$

où η_1 et η_2 sont des constantes dont nous indiquons plus loin les valeurs. Ce potentiel, identique au potentiel déduit par M. L. DE BROGLIE par sa méthode du « champ soustractif » [2], est la différence d'un potentiel quasi coulombien à grande portée (constante η_1) et d'un potentiel de YUKAWA à faible portée (constante η_2). Il reste fini pour $r \rightarrow 0$ et correspond à une valeur finie

$$(2) \quad W_0 = \frac{\varepsilon^2 (\eta_2 - \eta_1)^2}{4 (\eta_1 + \eta_2)}$$

de l'énergie propre de la particule électrisée. La constante η_1 , qui nous intéresse ici particulièrement, est reliée par

$$(3) \quad m_{ph}^0 = \frac{\hbar}{2\pi c} \eta_1$$

à la masse propre m_{ph}^0 du photon, que nous allons essayer de déterminer.

D'après notre théorie unitaire [3], l'espace-temps peut être considéré comme une hypersurface V_4 d'un espace auxiliaire ambiant pseudo-euclidien pentadi-

mensionnel E_5 , et toutes les propriétés électromagnétiques correspondent à des propriétés de la métrique externe de V_4 dans E_5 . Considérons, comme dans un travail récent [4] auquel nous renvoyons le lecteur pour éviter des répétitions, deux déformations opposées (D_1, D_2) de V_4 , c'est-à-dire telles que les dérivées premières et secondes des coordonnées des points de E_5 sur V_4 par rapport aux coordonnées des points de V_4 , ont la même valeur absolue et des signes opposés en tout couple (P_1, P_2) de points correspondants de D_1 et D_2 . La Géométrie Différentielle nous apprend alors que les composantes ω_{ik} du tenseur métrique externe de V_4 , contrairement à celles du tenseur métrique interne g_{ik} , ont la même valeur absolue et des signes opposés en P_1 et P_2 .

Considérons les équations du champ métrique externe

$$(4) \quad S_{ik} - \frac{1}{2} (S + \lambda_{\omega}) \omega_{ik} = U_{ik},$$

où S_{ik} désigne le tenseur de Ricci formé avec le tenseur externe ω_{ik} , S l'invariant $\omega^{ik} S_{ik}$ (avec $\omega^{ik} \omega_{ik} = \delta^i_i$), U_{ik} la densité d'énergie-quantité de mouvement de l'électricité (ce tenseur joue, pour l'électricité, un rôle parallèle à celui du tenseur T_{ik} pour la matière), et enfin λ_{ω} la constante cosmologique électromagnétique. Dans le cas où il est possible d'admettre l'existence de deux déformations D_1 et D_2 de l'espace-temps rigoureusement opposées, on déduit facilement de (4) la relation

$$(5) \quad U_{ik} = -\frac{1}{2} \lambda_{\omega} \omega_{ik},$$

(*) Recebido em Outubro de 1951.

valable en un point quelconque de D_1 ou de D_2 . Pour arriver [4] à cette relation il suffit d'appliquer le système (4) à un couple quelconque (P_1, P_2) de points correspondants de D_1 et D_2 , et de supposer que ces déformations rigoureusement opposées de l'espace-temps sont associées à des distributions de charge électrique ayant la même valeur absolue, c'est-à-dire que les valeurs absolues $|U_{ik}|$ des composantes de la densité d'énergie-impulsion électrique sont les mêmes en P_1 et P_2 .

Pour obtenir une autre expression de U_{ik} , nous rappellerons ici le principe fondamental de notre méthode de quantification des équations du champ métrique. D'après ce principe, les états quantiques de U_{ik} sont reliés aux états quantiques de ω_{ik} par la relation

$$(6) \quad U_{ik}^{(lm)} = \frac{1}{4} U^{(l)} \omega_{ik}^{(lm)}, \quad (U = \omega^{ik} U_{ik}),$$

dans laquelle l'indice supérieur l prend la valeur 1 pour la classe d'états quantiques non accompagnés d'émission ou d'absorption de rayonnement, la valeur 2 pour la classe d'états qui correspondent à une émission ou absorption de rayonnement et la valeur 3 pour la classe d'états d'interaction de la particule avec les autres particules d'un système. L'indice supérieur m symbolise l'ensemble des nombres quantiques habituels indépendamment de l'appartenance d'un état à l'une des trois classes $l=1, l=2$ et $l=3$.

La relation (6) permet de quantifier le système (4). Tout d'abord, ce système peut être écrit comme suit

$$(7) \quad S_{ik} = U_{ik} - \frac{1}{2} (U + \lambda_\omega) \omega_{ik}.$$

La quantification par (6) donne alors

$$(8) \quad S_{ik}^{(lm)} = -\frac{1}{2} \left(\lambda_\omega + \frac{U^{(l)}}{2} \right) \omega_{ik}^{(lm)}.$$

Pour pouvoir envisager l'existence de deux particules correspondant à des déformations rigoureusement opposées de l'espace-temps, il faut évidemment quantifier l'état de ces particules et ne considérer que les états quantiques où d'une part il n'y a pas d'interaction des particules et où d'autre part elles n'émettent ni n'absorbent de rayonnement. Il faut donc que les états des deux particules appartiennent à la classe définie par $l=1$. La relation (6) et le système (8) s'appliquent donc à deux déformations rigoureusement opposées à la condition de poser $l=1$. Afin de comparer ce résultat à (5), il faut maintenant remarquer que cette relation repose essentiellement sur l'hypothèse de l'égalité, en valeur absolue, de la charge des deux particules qui occupent une paire de déformations rigoureusement opposées

de l'espace-temps. Or, il est clair qu'une telle hypothèse exige, pour être valable, que l'espace-temps, abstraction faite des déformations opposées, soit tel que le U_{ik} correspondant s'annule identiquement, d'après les équations du champ externe (4). L'espace-temps le plus général qui jouit de cette propriété est une hypersphère de DE SITTER, dont nous désignerons la constante cosmologique par λ_ω^0 . Nous devons donc écrire pour deux déformations rigoureusement opposées

$$(9) \quad U_{ik} = -\frac{1}{2} \lambda_\omega^0 \omega_{ik}, \quad U = -2 \lambda_\omega^0$$

d'où l'on déduit en quantifiant

$$(10) \quad U_{ik}^{(lm)} = -\frac{1}{2} \lambda_\omega^0 \omega_{ik}^{(lm)}, \quad U^{(l)} = -2 \lambda_\omega^0.$$

En posant $l=1$ et en comparant ce résultat à (8) on obtient finalement pour des déformations rigoureusement opposées

$$(11) \quad S_{ik}^{(1m)} = -\frac{1}{2} (\lambda_\omega - \lambda_\omega^0) \omega_{ik}^{(1m)}.$$

Pour les champs faibles ici considérés, on a la linéarisation suivante

$$(12) \quad \square \omega_{ik}^{(1m)} = \eta_1^2 \omega_{ik}^{(1m)}$$

avec

$$(13) \quad \eta_1^2 = \chi_0 (\lambda_\omega - \lambda_\omega^0),$$

χ_0 étant la courbure moyenne de l'hypersphère de DE SITTER la plus proche du domaine d'espace-temps envisagé. Cette constante η_1 n'est autre que la constante η_1 de (1), car ce potentiel est une solution particulière du système (8) linéarisé [1]. Posons

$$(14) \quad P_0 (\lambda_\omega - \lambda_\omega^0) = b,$$

P_0 étant le rayon de l'hypersphère de DE SITTER dont la courbure moyenne est λ_ω^0 . Comme on a $\lambda_\omega^0 = 1/P_0$, on obtient immédiatement

$$(15) \quad m_{ph}^0 = \frac{h}{2\pi c} \frac{\sqrt{b}}{P_0}$$

en comparant (13) à (3). Ce résultat exprime une relation entre des propriétés microphysiques et macrophysiques (cosmologiques) fondamentales de l'Univers et montre d'ailleurs qu'il est impossible d'envisager le photon comme une particule à masse propre évanouissante. Cette masse propre est cependant très petite. En effet, nous avons montré ailleurs [3] qu'il faut poser $b \simeq 1$, de sorte que (15) devient

$$(16) \quad m_{ph}^0 \simeq \frac{h}{2\pi c P_0} \simeq 10^{-65} \text{ gr},$$

pour $P_0 = 10^{27}$ cm. (ordre de grandeur généralement admis en cosmologie relativiste).

Il est curieux de constater l'accord de (16) avec le résultat correspondant de la théorie de la particule de spin maximum 2 («graviton-photon») [5], théorie qui par ailleurs repose sur des hypothèses peu séduisantes.

II

Sur la différence de comportement de la masse dans un champ gravifique et de la charge électrique dans un champ électromagnétique

La matière et l'électricité sont les deux contenus fondamentaux de l'espace-temps. Dans certains phénomènes, leurs propriétés se manifestent avec un parallélisme presque parfait, tandis que dans d'autres phénomènes, non moins importants, leur comportement est essentiellement différent. Nous voulons nous occuper spécialement ici du point suivant: le mouvement d'un corps dans un champ de gravitation est indépendant de sa masse, tandis que le mouvement d'un corps électrisé dans un champ électromagnétique dépend d'une manière essentielle du rapport charge/masse. Cette propriété ayant été considérée à tort jusqu'ici comme un obstacle très sérieux s'opposant à un traitement unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme, nous croyons utile de montrer qu'elle est une simple conséquence du fait que la masse est une quantité essentiellement positive, tandis que la charge électrique est positive ou négative.

Résumons tout d'abord l'explication [4] de ce fait fondamental par notre théorie unitaire. Les propriétés électromagnétiques étant, pour cette théorie, des propriétés de la métrique externe de l'espace-temps, sont naturellement empreintes de la dualité caractéristique de cette métrique, par opposition à l'unicité des propriétés métriques internes qui décrivent les phénomènes gravifiques-matériels proprement dits. Par suite du fait qu'à toute hypersurface V_N d'un espace ambiant on peut attacher deux tenseurs métriques externes $(\omega_{ik})_1$ et $(\omega_{ik})_2$ satisfaisant à $(\omega_{ik})_1 = -(\omega_{ik})_2$ (ambiguïté de la direction de la normale en chaque point de V_N), il est possible d'attacher, en accord avec les équations du champ (équations 4 de la Note I précédente), à toute déformation de l'espace-temps des distributions d'électricité ayant la même valeur absolue de la charge et des signes opposés. De même, deux déformations opposées de l'espace-temps (au sens de la Note I) seront occupées par des charges de signes opposés, tandis que la densité d'énergie-impulsion matérielle est essentiellement la même dans les deux déformations. On peut dire que la ma-

tière est un contenu «interne» de l'espace-temps, tandis que l'électricité est en quelque sorte un contenu superficiel «inscrit» sur les faces «positive» et «négative» de l'espace-temps, considéré en tant qu'hyper-surface d'un espace ambiant pseudo-euclidien E_5 . En d'autres termes: l'électricité correspond à quelques propriétés de la forme de l'espace-temps, tandis que la matière (masse) est «indifférente» à la forme. La différence de comportement entre la matière et l'électricité doit donc être, en dernière analyse, une manifestation de la différence fondamentale entre la structure métrique interne et la structure métrique externe (forme) de l'espace-temps, en dépit du fait que ces deux structures sont décrites par des tenseurs symétriques du second ordre satisfaisant à des équations du champ ayant la même forme analytique (équations 4 de la Note I et équations analogues pour g_{ik} et T_{ik}).

Rappelons maintenant que selon la théorie des particules fondamentales [6] que l'on peut construire en se basant sur notre théorie unitaire, on doit admettre l'existence d'une seule espèce de particules véritablement élémentaires, qui n'est autre qu'un électron généralisé susceptible de se trouver dans une infinité dénombrable d'états de charge et de masse propre, dont le premier ($n=1$) est l'électron normal de charge $\pm e$ et de masse propre $(m_0)_e$, tandis que les autres états ($n \geq 2$) sont des états microélectroniques ou des microélectrons dont les charges $\pm e_n$ et les masses propres $(m_0)_n$ satisfont à

$$(1) \quad e_n = \frac{e}{n^5} \quad ; \quad (m_0)_n = \frac{(m_0)_e}{n^5}$$

(Les rapports $e_n/(m_0)_n$ sont donc constants pour tous les états). Toutes les autres particules fondamentales, y compris le proton et le neutron, doivent être considérées, non comme des particules élémentaires, mais comme des particules résultant de la fusion d'électrons généralisés, c'est-à-dire d'électrons et de microélectrons des deux signes. Les équations densitaires du mouvement des fluides élémentaires qui correspondent à chaque valeur de n s'écrivent [7]:

$$(2) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_g \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -\frac{1}{\xi_g} (\Theta_g^j)_i,$$

pour les fluides élémentaires de matière et

$$(3) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -\frac{1}{\xi_\omega} (\Theta_\omega^j)_i,$$

pour les fluides élémentaires d'électricité. Dans ces équations, Θ_g^j et Θ_ω^j sont les tenseurs des tensions hydrodynamiques internes des fluides, ξ_g et ξ_ω des scalaires de densité généralisée de masse et charge

propres et $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_\omega$ le symbole de Christoffel formé avec le tenseur métrique externe ω_{ik} comme $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_g$ est formé avec g_{ik} . On voit donc qu'abstraction faite de l'influence des tensions internes, les trajectoires des particules infinitésimales des fluides élémentaires d'électricité sont les géodésiques de la métrique externe $d\Omega^2 = \omega_{ik} dx^i dx^k$.

Nous avons montré en détail dans un travail antérieur [7] que l'on peut déduire des équations densitaires du mouvement les équations pour les particules «centres de gravité» des particules finies de matière et d'électricité, et nous avons écrit ces équations dans le cas général. En particulier, si l'on néglige l'influence du spin de la particule et de la non homogénéité du champ électromagnétique (influence qui n'apparaît précisément que lors du passage des équations densitaires à des équations pour les particules finies), ainsi que l'influence de la réaction du rayonnement (réaction du champ métrique externe propre de la particule sur son mouvement), ce qu'il est permis de faire dans le présent travail où il s'agit simplement de chercher l'origine de la différence de comportement de la masse et de la charge dans les champs de force, alors [7] les équations du mouvement d'une particule finie d'électricité s'écrivent :

$$(4) \quad \frac{dV^i}{ds} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_\omega^0 V^j V^k = 0,$$

V^i étant le vecteur vitesse du centre de «gravité» de la particule et

$$(5) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_\omega^0 \equiv \frac{\delta^{ih}}{\chi_\omega} [h, jk]_\omega^0 \equiv \\ \equiv \frac{1}{2\chi_\omega} \left(\frac{\partial \omega_{ji}^0}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{jk}^0}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ik}^0}{\partial x^j} \right),$$

ω_{ik}^0 étant le tenseur métrique externe (abstraction faite du tenseur métrique externe propre de la particule dont on étudie le mouvement) et χ_ω un scalaire (courbure moyenne de l'hypersphère d'espace-temps telle que les $\bar{\omega}^{ik} \equiv -\frac{g^{ik}}{\chi_\omega} + \omega^{ik}$ soient des petites quantités par rapport à $1/\chi_\omega$).

Les équations (4) sont applicables à tout électron ou microélectron et ne manifestent aucune influence du rapport e/m sur le mouvement, de sorte que le comportement des électrons dans un champ électromagnétique pur est tout-à-fait parallèle à leur comportement dans un champ gravifique pur. Nous allons montrer que la différence essentielle de comportement de la masse et de la charge dans les champs de force n'apparaît qu'à partir du moment où l'on considère

des particules non élémentaires formées par la fusion d'électrons et de microélectrons. Soit en conséquence un ensemble de ν électrons ou microélectrons de charge $\pm e_p$ et de masse propre $(m_0)_p$ ($p=1, \dots, \nu$). Les rapports $|e_p|/(m_0)_p$ ont tous la valeur $e/(m_0)_e$ de l'électron normal. Le mouvement de chacune de ces ν particules d'électricité satisfait aux équations (4), de sorte qu'on peut écrire pour la particule complexe

$$(6) \quad \frac{1}{Q} \sum_p \frac{dV_p^i}{ds} e_p + \frac{1}{Q} \sum_p \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}_\omega \right]_p V_p^j V_p^k e_p = 0,$$

Q étant la charge de la particule donnée par

$$Q = \sum_p e_p.$$

Les équations (6) peuvent s'écrire comme suit

$$\frac{1}{Q} \sum_p \frac{dV_p^i}{ds} \frac{e_p}{(m_0)_p} (m_0)_p + \\ + \frac{1}{Q} \sum_p \frac{\delta^{ih}}{(\chi_\omega)_p} ([h, jk]_\omega^0)_p V_p^j V_p^k e_p = 0.$$

Remarquons que les e_p de même que les $(\chi_\omega)_p$ peuvent être positifs ou négatifs, mais les rapports $e_p/(\chi_\omega)_p$ sont toujours positifs, conformément à des résultats antérieurs [4]. On peut donc écrire

$$\frac{1}{Q} \sum_p \frac{dV_p^i}{ds} \frac{|e|}{(m_0)_e} (m_0)_p + \\ + \frac{1}{Q} \sum_p \frac{\delta^{ih}}{|\chi_\omega)_p|} ([h, jk]_\omega^0)_p V_p^j V_p^k e_p = 0.$$

L'opération de fusion que nous envisageons ici étant une opération après laquelle toutes les particules prennent la même quantité de mouvement, on voit que l'on peut écrire aussi après fusion des particules

$$(7) \quad \frac{1}{Q} \frac{|e|}{(m_0)_e} \sum_p \frac{dV_p^i}{ds} (m_0)_p + \\ + \frac{1}{Q} V^j V^k \sum_p \frac{\delta^{ih}}{|\chi_\omega)_p|} ([h, jk]_\omega^0)_p e_p = 0.$$

Posons

$$\langle F_{jk}^i \rangle \equiv \frac{(m_0)_e c^2}{|e| Q} \sum_p \frac{\delta^{ih}}{|\chi_\omega)_p|} ([h, jk]_\omega^0)_p e_p \equiv \\ \equiv \frac{1}{Q} \sum_p (F_{jk}^i)_p e_p$$

et définissons par

$$\frac{DV^i}{Ds} = \frac{1}{M_0} \sum_p \frac{dV_p^i}{ds} (m_0)_p$$

(M_0 masse propre de la particule) l'accélération du

centre de gravité de la particule complexe. Les équations (7) prennent alors la forme

$$(8) \quad \frac{D V^i}{D s} + \frac{Q}{M_0 c^2} \langle F_{jk}^i \rangle V^j V^k = 0.$$

Nous sommes ainsi arrivés très simplement à des équations du mouvement de la particule électrisée sous l'action du champ électromagnétique (généralisé)

$\langle F_{jk}^i \rangle$ où l'influence du rapport charge/masse propre apparaît classiquement. Pour une particule dont la vitesse reste très inférieure à c ($V \ll 1$, $j = 1, 2, 3$), les équations (8) se simplifient et prennent une forme lorentzienne classique

$$(9) \quad \frac{D V^i}{D s} + \frac{Q}{M_0 c^2} \varphi_j^i V^j = 0, \quad (\varphi_j^i = (2 - \delta_j^i) \langle F_{jk}^i \rangle).$$

Nous verrons dans la Note III que les φ_j^i se réduisent au champ électromagnétique classique lorsque les ω_{ik}^0 satisfont à des conditions très générales. Quoi qu'il en soit, le résultat (7) montre nettement que l'intervention de Q/M_0 dans le mouvement de la particule soumise à un champ électromagnétique provient du fait que la particule n'est pas élémentaire. Inversement, la facilité de la déduction de (8) à partir de (4) peut être considérée comme une preuve que toutes les particules dont le Q/M_0 n'est pas celui de l'électron résultent de la fusion de particules élémentaires. Nous voyons ainsi que la différence de comportement de la masse et de la charge dans les champs de force n'est au fond qu'apparente, puisqu'elle disparaît pour les électrons et les microélectrons dont sont formées toutes les particules.

III

Propriétés générales du champ électromagnétique généralisé

Dans la Note précédente, nous avons rencontré des grandeurs à trois indices F_{jk}^i définies par

$$(1) \quad F_{ik}^j = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\omega^0 = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{\delta^{ih}}{\gamma_\omega} [h, jk]_\omega^0$$

et qui représentent, dans notre théorie, le champ électromagnétique qui agit sur les particules électrisées. Il convient d'étudier les propriétés générales de ce champ électromagnétique généralisé et de mettre en évidence les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il se réduise au champ électromagnétique classique à deux indices.

Disons avant tout que la généralisation à laquelle conduit nécessairement notre théorie est bien naturelle, puisque c'est aussi une grandeur à trois indices

$$G_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_g^0 = \frac{1}{2} \delta^{ih} \left(\frac{\partial g_{jh}^0}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}^0}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hk}^0}{\partial x^j} \right)$$

qui régit le mouvement des particules matérielles sous l'action d'un champ de gravitation et qui représente donc le véritable champ de gravitation selon les équations bien connues

$$\frac{d V^i}{d s} + G_{jk}^i V^j V^k = 0,$$

dont la forme est tout à fait analogue à celle des équations (4) de la Note II.

De la loi de transformation des symboles de CHRISTOFFEL de première espèce pour une transformation de coordonnées $x^i \rightarrow \bar{x}^i$, on déduit immédiatement

$$(2) \quad \bar{F}_{jk}^i = F_{bc}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} + \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\gamma_\omega} \omega_{ab}^0 \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial^2 x^b}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}.$$

Le champ F_{jk}^i est donc un tenseur du troisième ordre lorsque la transformation $x^i \rightarrow \bar{x}^i$ appartient au groupe des transformations linéaires. Il en est donc ainsi pour toute transformation de Lorentz. De plus, F_{jk}^i se comporte comme un tenseur du second ordre dans toute transformation $x^i \rightarrow \bar{x}^i$ linéaire qui laisse invariante l'une des coordonnées. On a alors par exemple

$$\bar{F}_{j(k)}^i = F_{b(k)}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}.$$

En particulier, dans le cas important des transformations linéaires purement spatiales, on a

$$F_{j(4)}^i = F_{b(4)}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}.$$

De la définition de F_{jk}^i on déduit

$$F_{jk}^i - F_{kj}^i = 0,$$

et

$$F_{jk}^i + F_{ik}^j = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\gamma_\omega} \frac{\partial \omega_{ij}^0}{\partial x^k}.$$

En particulier, pour $k=4$ (valeur temporelle de l'indice) on a

$$F_{j4}^i + F_{i4}^j = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\gamma_\omega} \frac{\partial \omega_{ij}^0}{\partial x^4}$$

de sorte que F_{j4}^i se comporte comme un tenseur antisymétrique du second ordre pour des transformations linéaires purement spatiales des coordonnées

lorsque la métrique externe est statique. La définition (1) donne enfin pour $k=4$:

$$F_{j(4)}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\lambda \omega} \frac{\partial \omega_i^0}{\partial x^4}$$

avec

$$A^i = \frac{(m_0)_e c^2}{e} \frac{1}{\lambda \omega} \frac{\omega_i^0}{2}$$

Si la métrique est statique le champ $F_{j(4)}^i$ dérive donc du potentiel A^i . Remarquons ici que dans toutes les relations précédentes nous avons écrit F_{jk}^i au lieu de F_{ijk} bien que les premiers termes du second membre de (2) représentent une loi triplement covariante. Mais on doit écrire, par suite de (1), $F_{jk}^i = \delta^{ih} F_{hjk} = F_{ijk}$.

La transformation (2), pour un changement $\bar{x}^i \rightarrow x^i$ linéaire, peut s'écrire comme suit:

$$(3) \quad \bar{F}_{j(4)}^i = \left(F_{b(4)}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{\partial x^4}{\partial \bar{x}^4} + \left(F_{bt}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^4},$$

avec $l=1, 2, 3$. Considérons alors une transformation de LORENTZ

$$\begin{cases} x^t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\bar{x}^t \sqrt{1-\beta^2} + v^t \bar{x}^4 / c), \\ x^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\bar{x}^4 - i v_t \bar{x}^t / c), \end{cases}$$

qui donne à (3) la forme suivante:

$$F_{j(4)}^i = \left(F_{b(4)}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(F_{bt}^a \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{v^t / ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Pour des petites vitesses par rapport à c les termes en F_{bt}^a sont des petites quantités par rapport aux termes en $F_{b(4)}^a$, de sorte que $F_{j(4)}^i$ se comporte alors approximativement comme un tenseur du second ordre (antisymétrique si la métrique externe est statique). Il en est de même des φ_j^i de l'équation (9) de la Note II précédente. En résumé, le champ électromagnétique, d'après notre théorie, ne peut être décrit par un tenseur antisymétrique du second ordre (comme le tenseur de MAXWELL-MINKOWSKI classique) que dans les conditions que nous venons de mettre en évidence. Dans le cas général, il faut utiliser F_{jk}^i pour décrire le véritable champ électromagnétique.

Il est intéressant de comparer, dans un cas simple, la loi du mouvement relativiste classique avec la loi

déduite de F_{jk}^i . Considérons une particule électrisée partant du repos et se déplaçant suivant l'axe des x^1 sous l'action d'un champ électrostatique homogène pur. Abstraction faite de la réaction du rayonnement, l'équation relativiste classique du mouvement s'écrit

$$(4) \quad \frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} \varphi_1^4 \frac{dx^4}{ds} = 0.$$

Mais on a ici

$$(5) \quad \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 + (V^1)^2 = 1, \quad (V^1 \equiv dx^4/ds)$$

de sorte que

$$\frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} \varphi_1^4 \sqrt{1-(V^1)^2} = 0,$$

d'où en intégrant (avec $s \equiv ict$):

$$(6) \quad x^4 = x_0^4 + \frac{M_0 c^2}{Q \varphi_1^4} \left[\cosh \left(\frac{Q}{M_0 c} \varphi_1^4 t \right) - 1 \right],$$

ou bien:

$$(7) \quad x^4 = x_0^4 + \frac{Q}{M_0} \varphi_1^4 \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi_1^4 \right)^3 \frac{t^4}{4!} + \frac{1}{c^4} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi_1^4 \right)^5 \frac{t^6}{6!} + \dots$$

(les termes d'ordre > 2 sont la correction relativiste au mouvement newtonien).

L'équation du mouvement, étudié selon notre théorie, s'écrit

$$(8) \quad \frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} F_{44}^1 \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 = 0,$$

ou bien, par suite de (5):

$$\frac{dV^1}{ds} + \frac{Q}{M_0 c^2} F_{44}^1 [1 - (V^1)^2] = 0.$$

En intégrant on obtient

$$(9) \quad x^4 = x_0^4 - \frac{M_0 c^2}{Q F_{44}^1} \log \cos \left(\frac{Q}{M_0 c} F_{44}^1 t \right)$$

ou encore (pour $|Q F_{44}^1 t / M_0 c| < \pi/2$):

$$(10) \quad x^4 = x_0^4 + \frac{Q}{M_0} F_{44}^1 \frac{t^2}{2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{Q}{M_0} F_{44}^1 \right)^3 \frac{t^4}{3 \cdot 4} + \frac{1}{c^4} \left(\frac{Q}{M_0} F_{44}^1 \right)^5 \frac{2}{6 \cdot 15} t^6 + \dots$$

On voit que la correction relativiste n'a pas la même valeur dans notre théorie et dans la théorie classique et que l'écart des deux corrections peut devenir sensible pour de grandes valeurs de t , c'est-à-dire après un long parcours de la particule, ou bien pour des champs électrostatiques intenses.

Si l'on désigne en effet par $(x^1)_{\text{class.}}$ sa position suivant la théorie classique, les résultats précédents donnent

$$x^1 - (x^1)_{\text{class.}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi_1^1 \right)^3 \frac{1}{4!} t^4 + \frac{1}{c^4} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi_1^1 \right)^5 \frac{15}{6!} t^6 + \dots$$

puisque l'on a ici $F_{44}^1 = \varphi_1^1$. Dans une vérification expérimentale de ces résultats il est probablement plus facile de comparer les vitesses au lieu des espaces parcourus par la particule. On a alors :

$$(11) \quad \frac{dx^1}{dt} - \left(\frac{dx^1}{dt} \right)_{\text{class.}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi_1^1 \right)^3 \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{c^4} \left(\frac{Q}{M_0} \varphi_1^1 \right)^5 \frac{15}{5!} t^5 + \dots$$

On voit que pour des champs très intenses l'effet étudié ici peut devenir sensible même après un parcours relativement petit de la particule. La formule (11) montre que la vitesse de la particule est constamment supérieure, d'après notre théorie, à la vitesse déterminée par l'équation relativiste classique du mouvement.

Il est à peine nécessaire d'insister sur l'importance de la vérification expérimentable de l'effet exprimé par la formule (11), car une telle vérification équivaldrait à vérifier expérimentalement que la notion classique de champ électromagnétique (tenseur antisymétrique du second ordre) doit être généralisée par une grandeur à trois indices F_{jk}^i , ce qui est l'une des principales conséquences de notre théorie unitaire (1).

IV

Sur l'équation de SCHWINGER-TOMONAGA

Considérons, dans l'espace-temps, une famille d'hypersurfaces 3-dimensionnelles σ du genre espace, dépendant d'un paramètre temporel τ . Prenons, sur l'une quelconque des σ , un réseau orthogonal x^j ($j=1, 2, 3$) et désignons par ρ^i les coordonnées géodésiques locales orthogonales correspondantes en un point $P(x)$ de σ . L'axe temporel local ρ^4 est normal à σ et l'on a sur σ : $d\rho^4 = f(x) d\tau$.

Supposons qu'il existe un hamiltonien $H(x)$ tel que

(1) A priori d'ailleurs la loi relativiste classique (4) du mouvement ne peut être exacte. En effet, contrairement à ce qui arrive avec (9), conséquence de la loi généralisée (8), l'expression (6) n'implique pas, par elle-même, l'existence d'une borne supérieure pour les valeurs de s , du fait que la vitesse de la particule est nécessairement $< c$.

la fonction d'état $\Psi(x)$ du système étudié satisfasse en chaque point de σ à l'équation d'évolution

$$(1) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \rho^4} = H(\Psi)$$

qu'on peut écrire

$$(2) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = [f(x) H(x)](\Psi).$$

Définissons par

$$(3) \quad \left[\int f(x) \mathfrak{H}(x) d\sigma \right] \int \Psi d\sigma = \int f(x) H(x) \Psi d\sigma$$

un opérateur hamiltonien $\mathfrak{H}(x)$ et posons

$$(4) \quad \Psi[\sigma] = \frac{1}{\sigma} \int \Psi d\sigma.$$

On déduit alors de (2) :

$$(5) \quad \frac{\partial \Psi[\sigma]}{\partial \tau} = \left[\int d\sigma f(x) \mathfrak{H}(x) \right] \Psi[\sigma].$$

Si l'opérateur $\mathfrak{H}(x)$ ne dépend pas de τ , la solution générale de cette équation s'écrit formellement :

$$(6) \quad \Psi[\sigma] = \left[e^{\int d\sigma f(x) \mathfrak{H}(x)} \right] \Psi_0[\sigma]$$

$\Psi_0[\sigma]$ décrivant l'état «initial» du système et l'opérateur exponentiel étant naturellement défini par le développement

$$e^{\int d\sigma f(x) \mathfrak{H}(x)} = 1 + \tau \int d\sigma f(x) \mathfrak{H}(x) + \frac{\tau^2}{2!} \int d\sigma f(x) \mathfrak{H}(x) \int d\sigma' f(x') \mathfrak{H}(x') + \dots$$

Soit V le volume d'espace-temps compris entre deux hypersurfaces σ' et σ de la famille et posons

$$(8) \quad \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Psi[\sigma'] - \Psi[\sigma]}{V}$$

la notation $\delta/\delta\sigma(x)$ servant à rappeler que l'opération $V \rightarrow 0$ a lieu dans le voisinage du point x de σ . En remarquant que $dV = f\tau d\sigma$, on voit que (8) est aussi la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$(9) \quad \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \mathfrak{H} \Psi[\sigma],$$

formellement identique à l'équation de SCHWINGER-TOMONAGA [8,9]. La déduction précédente montre nettement l'origine de cette équation et de la fonctionnelle d'état $\Psi[\sigma]$. L'équation (9) peut être soumise à une opération de superquantification qui confère à $\Psi[\sigma]$ le caractère d'un opérateur fonctionnel.

Les recherches d'électrodynamique quantique basées sur l'équation (9) utilisent toujours des développements en série analogues à (7), ce qui donne lieu

à des calculs impraticables dès que l'on veut pousser les approximations au delà du premier ou du deuxième ordre. Il nous semble donc très utile de mettre la solution (6) sous forme finie. Pour cela, considérons d'abord la solution générale de l'équation (2) qui s'écrit formellement :

$$(10) \quad \Psi = \left[e^{\int(x) \tau H(x)} \right] (\Psi_0).$$

Désignons par φ_0 une solution particulière de (2) telle que $\Psi_0 + \varphi_0$ admette un logarithme. Posons $H = H_1 + H_2$, où l'opérateur H_1 est la partie de l'hamiltonien qui dépend explicitement des symboles $\partial/\partial\rho^i$. Pour toute fonction F dérivable nous écrivons :

$$\left[e^{\tau H_1} \right] (F) = \tau (F).$$

La solution (10) prend alors la forme

$$(11) \quad \Phi \equiv \Psi + \varphi_0 = \left[e^{\tau H_2} \left(e^{\tau \left(\frac{1}{\tau} \log \Phi_0 \right)} \right) \right]^{\tau}$$

Supposons que l'on a

$$(12) \quad H_1 = k \gamma^j \frac{\partial}{\partial \rho^j}, \quad H_2 = \sum_1^n \alpha_p(x) \varepsilon^p,$$

k étant une constante et les γ^j et ε^p des matrices satisfaisant à $(\gamma^j)^2 = (\varepsilon^p)^2 = 1$. Dans ce cas on aura

$$e^{\tau H_2} = \prod_1^n \left[\cosh(\tau \alpha_p) + \sinh(\tau \alpha_p) \varepsilon^p \right]$$

et

$$e^{\tau H_1} = \prod_1^3 \left[\cosh \left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho^j} \right) + \gamma^j \sinh \left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho^j} \right) \right]$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} & \left[\cosh \left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho^j} \right) \right] F(x, \tau) = \\ & = \frac{1}{2} [F(x^j + \xi, \tau) + F(x^j - \xi, \tau)], \\ & \left[\sinh \left(\tau k \frac{\partial}{\partial \rho^j} \right) \right] F(x, \tau) = \\ & = \frac{1}{2} [F(x^j + \xi, \tau) - F(x^j - \xi, \tau)], \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{k} \int_{x^j}^{x^j + \xi} d\rho^j = \tau, \quad [x^j \text{ coordonnées géodésiques de pôle } P(x)],$$

et nous poserons pour simplifier l'écriture

$$\left[e^{\tau H_1} \right] (F) = \tau (F) = \tau F \tau.$$

Par suite des résultats précédents, on voit que (11) prend la forme :

$$(13) \quad \Phi = \left[\prod_1^n \left[\cosh(\tau \alpha_p) + \sinh(\tau \alpha_p) \varepsilon_p \right] \left(e^{\tau \left(\frac{1}{\tau} \log \Phi_0 \right)} \right) \right]^{\tau}.$$

Telle est la solution de l'équation (2) sous forme finie quand l'hamiltonien a la forme (12), ce qui est en particulier le cas de l'hamiltonien de DIRAC pour lequel on a

$$(14) \quad \begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \gamma^i \frac{\partial}{\partial \rho^j}; \\ H_2 &= -\frac{2\pi}{h} \left(\frac{\varepsilon}{c} A_j \gamma^j - m \cdot c \alpha_4 \right), \end{aligned}$$

les γ^j et α_4 étant des matrices bien connues.

De la solution (13) on déduit immédiatement par (4) la solution de l'équation de SCHWINGER-TOMONAGA correspondante. Il est permis d'espérer que cette solution sans développements en série pourra simplifier beaucoup les calculs de l'électrodynamique quantique.

V

Champs magnétiques stellaires à variation périodique

En appliquant les équations de CODAZZI à un domaine quasi-statique de l'espace-temps on trouve [10] la relation suivante entre les composantes spatio-temporelles des tenseurs métriques externe ω_{ik} et interne g_{ik} d'un tel domaine

$$(1) \quad \frac{\partial \omega_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{lj}}{\partial x^i} = (A_j^i + A_i^j) \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} \right),$$

($j, l = 1, 2, 3$),

avec

$$(2) \quad 2A_k^i = \chi \delta_k^i + g^{il} \bar{\omega}_{lk}$$

χ étant la courbure moyenne de l'espace-temps et $\bar{\omega}_{ik}$ un tenseur dont les composantes sont des petites quantités par rapport à $l g_{ik}$ au moins pour $i \neq k$. Or, nous savons [7, 10] (voir l'équation 1 de la Note III) que le champ magnétique H_i est donné par

$$(3) \quad H_i = \frac{1}{\chi_{\omega} \sqrt{-1}} \frac{(m_0)_c c^2}{e} \left(\frac{\partial \omega_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_{ji}}{\partial x^l} \right)$$

On a donc pour un domaine quasi-statique de l'espace-temps

$$(4) \quad H_i = \frac{1}{\chi_{\omega} \sqrt{-1}} \frac{(m_0)_c c^2}{e} (A_j^i + A_i^j) \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} \right),$$

i, j, l étant une permutation circulaire de 1, 2, 3.

Considérons une sphère en rotation constante. Il est facile de déduire [10] des équations du champ métrique interne g_{ik} la solution extérieure suivante

$$(5) \quad g_{ik}(P) = \frac{2K}{c^3 \sqrt{-1}} \gamma \frac{M_{rot.}}{r^3} (u_i x_l - u_l x_i),$$

$M_{rot.}$ étant le moment de rotation de la sphère, K la constante newtonienne de la gravitation, r la distance du point extérieur P au centre de la sphère, u_i les composantes du vecteur unitaire de l'axe de rotation, x_i des coordonnées orthogonales sphéro-centriques et γ un coefficient numérique ≤ 1 ($\gamma=1$ pour une sphère dont la densité et la vitesse de rotation sont constantes ou possèdent la symétrie sphérique). En comparant (5) à (4) on déduit immédiatement

$$(6) \quad \vec{H} = \frac{2\xi}{\chi_\omega} \frac{(m_0)_e}{ec} K \gamma M_{rot.} \text{rot} \left[\vec{u} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right],$$

où nous avons posé $\xi = A_j + A_l^i$ (cette quantité ξ est un scalaire pour des transformations purement spatiales des coordonnées et d'autre part $A_j^i + A_l^i$ a la même valeur pour toute valeur de j et $l=1, 2, 3$). L'électromagnétisme classique nous apprend que (6) est le champ magnétique extérieur d'une sphère uniformément aimantée dont le moment magnétique $M_{magn.}$ est donné par

$$(7) \quad M_{magn.} = \frac{2\xi}{\chi_\omega} \frac{(m_0)_e}{ec} K \gamma M_{rot.}$$

Nous avons appliqué précédemment [10, 11] cette formule pour expliquer le champ magnétique général de la Terre, du Soleil et de certaines étoiles magnétiques (78 Virginis par exemple) étudiées par H. W. BABCOCK au MOUNT WILSON [12]. Les champs magnétiques stellaires à variation périodique découverts par BABCOCK [13] peuvent d'ailleurs être expliqués aussi par (7), car le coefficient ξ a en général une variation périodique [14]. Enfin, nous avons montré [15] qu'en ne négligeant pas les composantes non diagonales du tenseur A_i^k défini par (2), les équations de CODAZZI donnent une relation plus générale que (6) et expliquent facilement l'inclinaison de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation.

Dans le présent travail nous voulons généraliser quelques uns de ces résultats en montrant que la forme du coefficient ξ à laquelle conduit la théorie rend compte très aisément de la courbe du champ magnétique polaire H_p de l'étoile B. D.-18° 3789 (constellation de la Vierge), récemment publiée par BABCOCK [16]. Pour déterminer le coefficient ξ on peut utiliser, comme nous l'avons fait dans un travail an-

térieur [14], les équations de propagation du second ordre des fonctions d'onde fondamentales Ψ_{mn} et Φ_{mn} de notre théorie unitaire

$$(8) \quad \square \Psi_{mn} \alpha_n \Psi_{mn}; \quad \square_\omega \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn}$$

[$m = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots, \infty$; \square laplacien (dalembertien pour une métrique interne hyperbolique normale) attaché à la métrique g_{ik} ; \square_ω dalembertien attaché à la métrique externe ω_{ik} et formé avec les ω_{ik} comme \square est formé avec les g_{ik} . Pour un domaine quasi-statique les équations (8) peuvent se mettre sous la forme

$$(9) \quad \square \Phi_{mn} = \gamma_\omega \left(\beta_n - \bar{\omega}_{44} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2} \right) \Phi_{mn};$$

$$\Delta_3 \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn}.$$

En cherchant [14] pour $n=1$ [niveau principal (électronique) des tenseurs de densité d'énergie-impulsion] une solution de la forme

$$(10) \quad \Phi_{m1} = \lambda (x^4) \Psi_{m1} (x^1, x^2, x^3) + \varphi_{m1} (x^1, x^2, x^3),$$

généralisation minima de la relation $\Phi_{m1} = \lambda \Psi_{m1}$ pour le cas statique, on trouve ($x^4 \equiv ic t$):

$$(11) \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \sigma^2 \lambda = \frac{a c^2}{1 + \chi_\omega \bar{\omega}^{44}};$$

$$\Delta_3 \varphi_{m1} - \chi_\omega \beta_1 \varphi_{m1} = a \Psi_{m1},$$

a étant une constante arbitraire et

$$(12) \quad \sigma^2 = \frac{c^2 (\chi_\omega \beta_1 - \alpha_1)}{1 + \chi_\omega \bar{\omega}^{44}}.$$

On obtient donc

$$(13) \quad \lambda(t) = \lambda_0 - \Lambda \sin(\sigma t),$$

en choisissant convenablement l'origine des temps et en posant

$$(14) \quad \lambda_0 = \frac{a}{\chi_\omega \beta_1 - \alpha_1}.$$

Considérons maintenant les tenseurs de densité d'énergie-impulsion $T_{ik}(\Psi_{mn})$ et $U_{ik}(\Phi_{mn})$ exprimés par les fonctions d'onde fondamentales et leurs dérivées [v. par ex. 7]. Les composantes spatio-temporelles ($T_{4j}, U_{4j}, j = 1, 2, 3$) de ces tenseurs sont les suivantes (on néglige ici les petites contributions des niveaux $n \geq 2$ et on tient compte de la condition $\partial \Psi_{m1} / \partial x^4 = 0$ dans le cas actuel):

$$(15) \quad U_{4j} = \frac{1}{2} \sqrt{\chi_\omega} \left\{ \left(\Phi_{m1} \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial}{\partial q_j} \Phi_1^m - \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial q_j} \varepsilon_{q1}^4 \Phi_1^m \right) + \left(\Phi_{m1} \varepsilon_{q1}^j \frac{\partial}{\partial q_4} \Phi_1^m - \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial q_4} \varepsilon_{q1}^j \Phi_1^m \right) \right\},$$

$$(16) \quad T_{4j} = \frac{1}{2} \chi_{\omega} \left\{ \Psi_{m1} \varepsilon_1^4 \frac{\partial}{\partial \rho_j} \Psi_1^m - \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial \rho_j} \varepsilon_1^4 \Psi_1^m \right\},$$

où nous avons désigné par q^i les coordonnées géométriques locales orthogonales attachées à la métrique externe et définies en chaque point par $d\Omega^2 = -\omega_{ik} dx^i dx^k = \sum_1^4 (dq^i)^2$ (pour ce qui est de la signification des matrices ε_i^j et ε_{q1}^i voir par exemple [7]). Posons

$$(17) \quad \begin{aligned} \mu_{4j} &= \frac{1}{2} (\Psi_{m1} \varepsilon_{q1}^j \Psi_1^m - \Psi_{m1} \varepsilon_{q1}^j \Psi_1^m), \\ w_{4j} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\Psi_{m1} \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial \Psi_1^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial q_j} \varepsilon_{q1}^4 \Psi_1^m \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\Psi_{m1} \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial \Psi_1^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial q_j} \varepsilon_{q1}^4 \Psi_1^m \right) \right\} \\ \tau_{4j} &= \frac{1}{2} \left(\Psi_{m1} \varepsilon_{q1}^4 \frac{\partial \Psi_1^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial q_j} \varepsilon_{q1}^4 \Psi_1^m \right). \end{aligned}$$

On obtient alors

$$(18) \quad \begin{aligned} U_{4j} &= \left[\left[\lambda_0^2 \sqrt{\frac{\chi}{\chi_{\omega}}} + \frac{1}{T_{4j}} (\lambda_0 w_{4j} + \tau_{4j}) \chi \sqrt{\chi_{\omega}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma \Lambda \sqrt{\chi \chi_{\omega}}}{i c} \frac{\mu_{4j}}{T_{4j}} \cos(\sigma t) + \left(\Lambda^2 \sqrt{\frac{\chi}{\chi_{\omega}}} \right) \sin^2(\sigma t) - \right. \\ &\quad \left. - \Lambda \left(2 \lambda_0 \sqrt{\frac{\chi}{\chi_{\omega}}} + \frac{w_{4j}}{T_{4j}} \chi \sqrt{\chi_{\omega}} \right) \sin(\sigma t) \right] T_{4j}. \end{aligned}$$

Des équations du champ métrique externe (équations 4 de la Note I) on déduit la solution suivante dans un domaine quasi-statique

$$(19) \quad \omega_{4i}(P) = -\frac{\chi_{\omega}}{2\pi} \int \frac{U_{4i}(Q)}{r} dv_Q, \quad (i=1, 2, 3),$$

en négligeant naturellement le terme cosmologique en λ_{ω} . En appliquant cette solution à une sphère en rotation et en utilisant (1) et (5) on voit que l'on peut écrire dans ce cas

$$(20) \quad \omega_{4i}(P) = 2 \chi_{\omega} \frac{e c}{(m_0)_e} \frac{M_{\text{magn.}}}{r^3} (u_i x_i - u_i x_i)$$

d'où l'on déduit en tenant compte de (6)

$$(21) \quad \omega_{4i} = \xi g_{4i} \quad (i=1, 2, 3).$$

Comparons la solution (19) à la solution extérieure

$$(22) \quad g_{4i}(P) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{T_{4i}(Q)}{r} dv_Q, \quad (i=1, 2, 3)$$

pour le champ métrique interne quasi-statique qui prend la forme (5) pour une sphère en rotation. Par

suite de la condition (21) on doit avoir nécessairement pour une sphère en rotation

$$(23) \quad U_{4i} = \frac{\xi}{\chi_{\omega}} T_{4i}, \quad (i=1, 2, 3)$$

Le coefficient de T_{4i} dans l'expression (18) doit donc être égalé au scalaire ξ/χ_{ω} dans le cas d'une sphère en rotation constante. Posons donc :

$$(24) \quad \begin{aligned} b_1 &= \lambda_0^2 \sqrt{\chi \chi_{\omega}} + \frac{1}{T_{4j}} (\lambda_0 w_{4j} + \tau_{4j}) \chi \chi_{\omega} \sqrt{\chi_{\omega}} \\ b_2 &= -\frac{\sigma \Lambda}{i c} \chi_{\omega} \sqrt{\chi \chi_{\omega}} \frac{\mu_{4j}}{T_{4j}}, \\ b_3 &= \Lambda^2 \sqrt{\chi \chi_{\omega}}, \\ b_4 &= -\Lambda \left(2 \lambda_0 \sqrt{\chi \chi_{\omega}} + \frac{w_{4j}}{T_{4j}} \chi \chi_{\omega} \sqrt{\chi_{\omega}} \right). \end{aligned}$$

L'expression de ξ devient alors :

$$(25) \quad \xi = b_1 + b_2 \cos(\sigma t) + b_3 \sin^2(\sigma t) + b_4 \sin(\sigma t).$$

De la relation (6) on déduit immédiatement le champ polaire à la surface d'une étoile de rayon r_0 :

$$H_p = B \xi,$$

avec

$$(26) \quad B = \frac{4}{\chi_{\omega}} \frac{(m_0)_e}{e c} K \gamma \frac{M_{\text{rot.}}}{r_0^3}.$$

En tenant compte du résultat (25), on obtient donc finalement :

$$(27) \quad H_p = B b_1 + B b_2 \cos(\sigma t) + B b_3 \sin^2(\sigma t) + B b_4 \sin(\sigma t).$$

Pour l'étoile B. D. - 18° 3789, qui se prête particulièrement bien aux mesures de l'effet ZEEMAN par suite de l'orientation de son axe magnétique suivant la ligne de vision, BABCOCK a montré [16] que la courbe d'équation

$$(28) \quad H_p \text{ (gauss)} = 2000 + 6600 \cos(\sigma t) - 1600 \cos(2\sigma t)$$

représente très bien les observations avec

$$(29) \quad \frac{\sigma}{2\pi} = 1,25 \text{ microcycles/sec.}$$

La période magnétique P_m (égale à la période de la variation d'intensité des raies métalliques) a la valeur :

$$P_m = \frac{2\pi}{\sigma} = 9,295 \text{ jours.}$$

L'équation (28) de la courbe des observations peut se mettre sous la forme

$$(30) \quad H_p \text{ (gauss)} = 400 + 6600 \cos(\sigma t) + 3200 \sin^2(\sigma t)$$

puisque $2 \sin^2(\sigma t) = 1 - \cos(2\sigma t)$. Remarquons que les coefficients Bb_1, Bb_2, Bb_3 et Bb_4 de (27) ainsi que σ font intervenir, d'après (12, 26, 24), les constantes arbitraires $\lambda_0, \Lambda, \chi, \omega^{44}$ et τ que l'on peut déterminer maintenant, pour l'étoile en question, en posant

$$Bb_1 = 400 \text{ gauss}; \quad Bb_2 = 6600 \text{ gauss}$$

$$Bb_3 = 3200 \text{ gauss}; \quad b_4 = 0;$$

$$\frac{\sigma}{2\pi} = 1,25 \text{ microcycl./sec.}$$

Ces valeurs rendent identiques la courbe théorique (27) et la courbe des observations (30). Remarquons que $b_4 = 0$ implique, d'après (24), pour l'étoile B. D. -18° 3789:

$$w_{4j} = - \frac{\lambda_0^2}{\chi_{\omega} \sqrt{\chi}} T_{4j}$$

d'où l'on déduit aussi

$$\tau_{4j} > \frac{2 \lambda_0^2}{\chi_{\omega} \sqrt{\chi}} T_{4j}$$

puisque $b_1 > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GIÃO A. — *J. Phys. Rad.*, 1951, **12**, 99-106; *C. R. Acad. Sc.*, 1950, **230**, 278, 434, 1740, 1838.
- [2] BROGLIE L. de. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **229**, 157, 269, 401; *Portugaliae Math.*, 1949, **8**, 37-48.
- [3] GIÃO A. — *Portugaliae Phys.*, 1946, **2**, 1-98; *Portugaliae Math.*, 1946, **5**, 145-192.
- [4] GIÃO A. — *Portugaliae Math.*, 1949, **8**, 143-153.
- [5] BROGLIE L. de. — *Théorie générale des particules à spin*, (Gauthier-Villars, Paris, 1943), p. 191.
- [6] GIÃO A. — *Portugaliae Math.*, 1947, **6**, 67-114; *Ibid.*, 1948, **7**, 1-44.
- [7] GIÃO A. — *J. Phys. Rad.*, 1951, **12**, 31-40.
- [8] SCHWINGER J. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 416; *Ibid.*, 1948, **74**, 1439-1461.
- [9] DYSON F. J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 486-502.
- [10] GIÃO A. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 764-768; *J. Phys. Rad.*, 1949, **10**, 240-249; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1813; 1947, **225**, 924; 1948, **226**, 645, 1298; 1949, **228**, 742.
- [11] GIÃO A. — *Gazeta de Mat.*, 1947, **34**, 9-12; *Ibid.*, 1948, **35**, 10-12.
- [12] BABCOCK H. W. — *Astrophys. J.*, 1947, **105**, 105-119; *Pub. Astro. Soc. Pac.*, 1947, **59**, 112-124.
- [13] BABCOCK H. W. — *Pub. Astro. Soc. Pac.*, 1947, **59**, 260-261; *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 489.
- [14] GIÃO A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, 2126.
- [15] GIÃO A. — *C. R. Acad. Sc.*, 1949, **228**, 1203.
- [16] BABCOCK H. W. — *Nature*, 1950, **166**, 249-251.

Sulla media e la varianza di un campione (*)

di G. Pompili

Roma

1. — Posizione del problema

Sia M una massa finita formata da H elementi e_1, e_2, \dots, e_H a cui competono ordinatamente certi valori x_1, x_2, \dots, x_H di un dato carattere quantitativo X .

Alla massa M resta in tal modo associata una variabile casuale \mathfrak{X} che assume i valori x_1, x_2, \dots, x_H — non necessariamente tutti distinti — ciascuno con la stessa probabilità $\frac{1}{H}$. Se poi h_1 degli H valori x_i coincidono in un certo valore x'_1, h_2 coincidono in x'_2, \dots, h_k ($k \leq H$) coincidono nel valore x'_k , potremo anche dire che la v. c. (sigla di «variabile casuale») \mathfrak{X} assume i valori x'_1, x'_2, \dots, x'_k con probabilità $p_1 = \frac{h_1}{H}, p_2 = \frac{h_2}{H}, \dots, p_k = \frac{h_k}{H}$.

Secondo un simbolismo da tempo in uso indicheremo con m_r il momento r -mo della v. c. \mathfrak{X} :

$$m_r = M(\mathfrak{X}^r) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H x_i^r \quad (r = 1, 2, \dots);$$

tra questi momenti è particolarmente importante quello del primo ordine m_1 , che è comunemente chiamato «media».

Indicheremo poi con \bar{m}_r il momento r -mo rispetto alla media m_1 :

$$\bar{m}_r = M([\mathfrak{X} - m_1]^r) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H (x_i - m_1)^r \quad (r = 2, 3, \dots);$$

tra questi momenti è particolarmente notevole quello di second'ordine che indicheremo con μ_x^2 e chiameremo, secondo una terminologia ormai diffusa, *varianza* della v. c. \mathfrak{X} .

Ciò premesso immaginiamo di avere un campione

della nostra v. c. costruito scegliendo a caso N elementi della massa M , con un procedimento rispetto a cui tutti gli elementi della massa si trovino nelle stesse condizioni, e raccogliendo poi i valori che il carattere X assume in corrispondenza agli elementi scelti.

Sopra questo campione, con qualche avvertenza che chiariremo nel seguito, si definiscono due parametri m_1 e μ_x^2 , chiamati rispettivamente *media* e *varianza* del campione, i quali, al variare del campione stesso, descrivono due v. c. che è interessante studiare, determinandone in particolare, la media e la varianza.

In vista di tale problema è opportuno precisare meglio il metodo di scelta che, come è noto, può essere di due tipi fondamentali:

I) *estrazione a caso con ripetizione* (schema bernoulliano) in cui si rimette di volta in volta l'elemento estratto nella massa,

II) *estrazione a caso senza ripetizione* (schema dell'estrazione in blocco) in cui l'elemento estratto non viene ricollocato nella massa.

Il problema che ci siamo prospettato nelle righe precedenti è già stato risolto sia nello schema bernoulliano che in quello dell'estrazione in blocco (1).

Tuttavia in sede di sistemazione espositiva dei risultati si può raggiungere una notevole semplificazione basandosi sull'impiego sistematico della

(*) Ricevuto nell' Ottobre 1951.

(1) Per le formule relative allo schema di BERNOULLI ved. un qualunque buon trattato di «Statistica» o «Calcolo delle probabilità»; per quelle relative allo schema dell'estrazione in blocco ved.: AL. A. TSCHUPROW: *On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions in the case of correlated observations*, *Metron*, II, 1923; J. S. NEYMAN: *Contribution to the Theory of Small Samples drawn from a finite Population*, *Biometrika*, XVII, 1925; A. E. R. CHURCH: *On the means and squared standard-deviations of small samples from any population*, *Biometrika*, XVIII, 1926.

v. c. delle prove ripetute associata allo schema d'estrazione, il che rende, per così dire, automatico il procedimento per ricavare le formule.

Ho già esposto completamente questo metodo d'impostare e risolvere il problema nel caso bernoulliano dell'estrazione a caso con ripetizione (1); in questa Nota impiego lo stesso metodo anche nel caso dell'estrazione in blocco, cosa che non mi ero ancora deciso a fare non tanto per difficoltà concettuali — perchè mi sarebbe bastato seguire pedissequamente quanto avevo già fatto per il caso bernoulliano — quanto per una certa laboriosità di calcoli veramente scoraggiante.

Ma esigenze di simmetria e amore di completezza mi hanno spinto ad introdurre anche questo argomento nel mio corso di «Calcolo delle probabilità» inducendomi così ad affrontar la fatica che, con qualche opportuno accorgimento che il Lettore noterà, ho cercato di rendere minima.

Aggiungo che i campioni ottenuti con scelta a caso senza ripetizione sono già stati studiati sistematicamente da G. GINI (2) il quale ha stabilito risultati fondamentali sopra le medie combinatorie potenziate di tali campioni.

2. — La v. c. dell'estrazione in blocco

I risultati delle prove ripetute N volte, con estrazione a caso senza ripetizione, nell'ipotesi di k alternative, descrivono, al variare del gruppo di N prove, la v. c. multipla $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_k)$, detta «dell'estrazione in blocco», che è $(k-1)$ -pla e non k -pla, come potrebbe sembrare, perchè le k v. c. \mathcal{D}_i soddisfano alla relazione identica:

$$(2.1) \quad \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \dots + \mathcal{D}_k = N.$$

I momenti fattoriali di tali v. c. sono noti (3):

$$(2.2) \quad m_{(r_1, \dots, r_k)} = M [\mathcal{D}_1 (\mathcal{D}_1 - 1) \dots \\ \dots (\mathcal{D}_1 - r_1 + 1) \mathcal{D}_2 (\mathcal{D}_2 - 1) \dots (\mathcal{D}_2 - r_2 + 1) \dots \\ \dots \mathcal{D}_k (\mathcal{D}_k - 1) \dots (\mathcal{D}_k - r_k + 1)] = \\ = \frac{N(N-1) \dots (N-r+1)}{H(H-1) \dots (H-r+1)} h_1(h_1-1) \dots \\ \dots (h_1 - r_1 + 1) h_2(h_2-1) \dots (h_2 - r_2 + 1) \dots \\ \dots h_k(h_k-1) \dots (h_k - r_k + 1)$$

dove si è posto $r = r_1 + r_2 + \dots + r_k$.

Mediante i momenti fattoriali si possono poi cal-

colare subito i momenti ordinari e quelli rispetto alla media, ricorrendo a formule assai facilmente ricavabili e che qui, per comodità del Lettore, mi limito a riportare per i momenti fino al quart'ordine.

Diamo anzitutto le formule che legano i momenti ordinari a quelli fattoriali:

$$(2.3) \quad \begin{cases} m_1 &= m_{(1)} \\ m_2 &= m_{(2)} &+ m_{(1)} \\ m_{1,1} &= m_{(1,1)} \\ m_3 &= m_{(3)} &+ 3m_{(2)} &+ m_{(1)} \\ m_{2,1} &= m_{(2,1)} &+ m_{(1,1)} \\ m_{1,1,1} &= m_{(1,1,1)} \\ m_4 &= m_{(4)} &+ 6m_{(3)} &+ 7m_{(2)} &+ m_{(1)} \\ m_{3,1} &= m_{(3,1)} &+ 3m_{(2,1)} &+ m_{(1,1)} \\ m_{2,2} &= m_{(2,2)} &+ m_{(2,1)} &+ m_{(1,2)} &+ m_{(1,1)} \\ m_{2,1,1} &= m_{(2,1,1)} &+ m_{(1,1,1)} \\ m_{1,1,1,1} &= m_{(1,1,1,1)} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

I momenti rispetto alla media sono poi legati ai momenti rispetto all'origine dalle formule seguenti:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \bar{m}_2 &= m_2 - m_1^2 \\ \bar{m}_{1,1} &= m_{1,1} - m_{1,0} m_{0,1} \\ \bar{m}_3 &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \\ \bar{m}_{2,1} &= m_{2,1} - m_{2,0} m_{0,1} + 2m_{1,0}^2 m_{0,1} - 2m_{1,0} m_{1,1} \\ \bar{m}_{1,1,1} &= m_{1,1,1} - m_{1,1,0} m_{0,0,1} + \\ &- m_{1,0,1} m_{0,1,0} - m_{0,1,1} m_{0,0,1} + \\ &+ 2m_{1,0,0} m_{0,1,0} m_{0,0,1} \\ \bar{m}_4 &= m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4 \\ \bar{m}_{3,1} &= m_{3,1} - 3m_{2,1} m_{1,0} + 3m_{1,1} m_1^2 m_0 + \\ &- 3m_{3,0} m_{0,1} + 3m_{2,0} m_{1,0} m_{0,1} - 3m_{1,0}^3 m_{0,1} \\ \bar{m}_{2,2} &= m_{2,2} - 2m_{2,1} m_{0,1} - 2m_{1,2} m_{1,0} + \\ &+ 4m_{1,1} m_{1,0} m_{0,1} + m_{2,0} m_{0,1}^2 + \\ &+ m_{0,2} m_{1,0}^2 - 3m_{1,0}^2 m_{0,1} \\ \bar{m}_{2,1,1} &= m_{2,1,1} - 2m_{1,1,1} m_{1,0,0} + \\ &- m_{2,1,0} m_{0,0,1} - m_{2,0,1} m_{0,1,0} + \\ &+ 2m_{1,1,0} m_{1,0,0} m_{0,0,1} + \\ &+ 2m_{1,0,1} m_{1,0,0} m_{0,1,0} + m_{1,0,0}^2 m_{0,1,1} + \\ &+ m_{2,0,0} m_{0,0,1} m_{0,1,0} + \\ &- 3m_{1,0,0}^2 m_{0,1,0} m_{0,0,1} \\ \bar{m}_{1,1,1,1} &= m_{1,1,1,1} - m_{1,1,1,0} m_{0,0,0,1} + \\ &- m_{1,1,0,1} m_{0,0,1,0} - m_{1,0,1,1} m_{0,1,0,0} + \\ &- m_{0,1,1,1} m_{1,0,0,0} + \\ &+ m_{1,1,0,0} m_{0,0,1,0} m_{0,0,0,1} + \\ &+ m_{1,0,1,0} m_{0,1,0,0} m_{0,0,0,1} + \\ &+ m_{1,0,0,1} m_{0,1,0,0} m_{0,0,1,0} + \\ &+ m_{0,1,1,0} m_{1,0,0,0} m_{0,0,0,1} + \\ &+ m_{0,1,0,1} m_{1,0,0,0} m_{0,0,1,0} + \\ &+ m_{0,0,1,1} m_{1,0,0,0} m_{0,1,0,0} + \\ &- 3m_{1,0,0,0}^2 m_{0,1,0,0} m_{0,0,1,0} m_{0,0,0,1} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

(1) Ved.: G. POMPILI: *Complementi di calcolo delle probabilità*, Veschi, Roma, 1948; pagg. 148 e seg.

(2) Ved.: C. GINI: *Le medie dei campioni*, Metron, XV, 1950, G. POMPILI: *Sulle medie combinatorie potenziate dei campioni*, Rend. Sem. Mat. di Padova, XVIII, 1948.

(3) Ved.: G. POMPILI: *Complementi di Calcolo delle Probabilità*, Veschi, Roma, 1948, pag. 135.

In particolare dalla prima delle (2.3) si ricava, in base alla (2.2), che la media della v. c. \mathfrak{D}_i è Np_i ; in simboli:

$$(2.5) \quad M(\mathfrak{D}_i) = Np_i.$$

Possiamo quindi definire le v. c. scarto:

$$(2.6) \quad \mathfrak{R}_i = \mathfrak{D}_i - Np_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

che soddisfano alla relazione lineare identica:

$$(2.7) \quad \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots + \mathfrak{R}_k = 0.$$

Convieni dire subito che il calcolo dei momenti della v. c. $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_k)$, cioè dei momenti rispetto alla media della v. c. dell'estrazione in blocco, calcolo da farsi attraverso le (2.3) e le (2.4), è però tuttavia laborioso; ciò mi ha indotto a condurre avanti i calcoli in un caso particolare, tuttavia completamente sufficiente per la soluzione del problema che ci siamo posto; il caso particolare in questione corrisponde a $k=H$ e quindi $h_1 = h_2 = \dots = h_H = 1$.

In queste condizioni il momento fattoriale $m_{(r_1, r_2, \dots, r_H)}$ è nullo, a meno che non sia r_i ($i = 1, 2, \dots, H$) eguale a 0 a 1, nel qual caso, se r delle r_i sono eguali ad 1 e le rimanenti $H-r$ sono nulle, in base alla (2.2), si ha che il valore del momento fattoriale è dato da:

$$(2.8) \quad \frac{N(N-1)\dots(N-r+1)}{H(H-1)\dots(H-r+1)}.$$

In queste condizioni si ottengono subito i momenti della v. c. dell'estrazione in blocco:

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{D}_i) &= \frac{N}{H} \\ M(\mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_j) &= \frac{N(N-1)}{H(H-1)} \\ M(\mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_j \mathfrak{D}_w) &= \frac{N(N-1)(N-2)}{H(H-1)(H-2)} \\ M(\mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_j \mathfrak{D}_w \mathfrak{D}_x) &= \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{H(H-1)(H-2)(H-3)} \\ \dots \end{aligned} \right.$$

Approfitando ora delle (2.4) e delle (2.9) possiamo scrivere le espressioni dei momenti rispetto alla media. Prima però converrà fare due posizioni che ci permetteranno una scrittura più compatta:

$$(2.10) \quad \alpha = \frac{N}{H}, \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{H-N}{H}$$

Dopo di che i momenti rispetto alla media della v. c. dell'estrazione in blocco assumono la forma seguente:

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{R}_i^2) &= \alpha\beta \\ M(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_j) &= -\frac{\alpha\beta}{H-1} \\ M(\mathfrak{R}_i^3) &= \alpha\beta(\beta-\alpha) \\ M(\mathfrak{R}_i^2 \mathfrak{R}_j) &= -\frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{H-1} \\ M(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_j \mathfrak{R}_w) &= 2\frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{(H-1)(H-2)} \\ M(\mathfrak{R}_i^4) &= \alpha\beta(1-3\alpha\beta) \\ M(\mathfrak{R}_i^3 \mathfrak{R}_j) &= -\frac{\alpha\beta(1-3\alpha\beta)}{H-1} \\ M(\mathfrak{R}_i^2 \mathfrak{R}_j^2) &= \alpha\beta \left[\alpha\beta - \frac{(\beta-\alpha)^2}{H-1} \right] \\ M(\mathfrak{R}_i^2 \mathfrak{R}_j \mathfrak{R}_w) &= \frac{\alpha\beta}{H-1} \left[2\frac{(\beta-\alpha)^2}{H-2} + \beta^2 \right] \\ M(\mathfrak{R}_i^3 \mathfrak{R}_j \mathfrak{R}_w \mathfrak{R}_x) &= 3\frac{\alpha\beta(1-3\alpha\beta)}{(H-1)(H-2)(H-3)} \\ \dots \end{aligned} \right.$$

3. - Le v. c. «momento»

Per poter approfittare, nei successivi calcoli, delle formule (2.11), stabilite alla fine del numero precedente, converrà dire, riprendendo il discorso del n. 1, che negli H elementi della massa M il carattere X assume ordinatamente i valori x_1, x_2, \dots, x_H .

In tali condizioni i momenti della corrispondente v. c. \mathfrak{X} sono dati, come si è visto da:

$$(3.1) \quad m_r = M(\mathfrak{X}^r) = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H x_i^r \quad (r=1, 2, \dots)$$

e in modo del tutto analogo si definiscono i momenti rispetto alla media:

$$(3.2) \quad \bar{m}_r = M[(\mathfrak{X}-m_1)^r] = \sum_{i=1}^H \frac{1}{H} (x_i - m_1)^r \quad (r=2, 3, \dots)$$

Scegliendo a caso senza ripetizione, come già si è detto, N elementi della massa M si otterranno le N determinazioni seguenti del carattere X : $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_N}$ le quali formeranno un campione della v. c. \mathfrak{X} , campione ottenuto con un'estrazione in blocco.

In termini della corrispondente v. c. dell'estrazione in blocco possiamo dire che la determinazione (o_1, o_2, \dots, o_H) , relativa al nostro campione è for

mata da N numeri 1 e $H-N$ numeri 0, così distribuiti:

$$(3.3) \quad o_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j_1, j_2, \dots, j_N \\ 0 & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

*

Come momento r -mo del nostro campione possiamo prendere la quantità:

$$(3.4) \quad m_r = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i^r$$

che in base alle (3.3), si può anche scrivere in quest'altra forma

$$(3.5) \quad m_r = \frac{1}{N} \sum_1^N x_i^r o_i$$

che è per noi assai comoda perchè permette di scrivere subito l'espressione esplicita della v. c. \mathfrak{M}_r , descritta da m_r , al variare del campione:

$$(3.6) \quad \mathfrak{M}_r = \frac{1}{N} \sum_1^H x_i^r \mathcal{D}_i.$$

*

Il valor medio di questa v. c. \mathfrak{M}_r , descritta dal momento r -mo m_r del campione, coincide con il momento r -mo m_r della v. c. \mathfrak{X} di partenza.

La dimostrazione è immediata; basta infatti ricordare che, in base alla prima delle (2.9) è:

$$M(\mathcal{D}_i) = \frac{N}{H},$$

dopo di che si ha subito:

$$(3.7) \quad M(\mathfrak{M}^r) = \frac{1}{N} \sum_1^H x_i^r M(\mathcal{D}_i) = \frac{1}{H} \sum_1^H x_i^r = m_r$$

c. v. d.

*

Possiamo infine definire la v. c. scarto:

$$(3.8) \quad \mathfrak{S}_r = \mathfrak{M}_r - m_r = \frac{1}{N} \sum_1^H x_i^r \mathfrak{R}_i$$

di cui ci interessano i successivi momenti.

Questi momenti si calcolano in modo concettualmente assai semplice secondo un schema che ho già avuto occasione di esporre (1), ma che tuttavia nel

nostro caso porta a calcoli piuttosto laboriosi; per il qual motivo mi limiterò a ricorrere a tale schema generale solo per il calcolo di alcuni momenti, mentre per altri, che pure interessano, mi servirò di particolari accorgimenti.

I calcoli che seguono mi sembrano abbastanza chiari; e pertanto mi limiterò a riportarli senza una parola di spiegazione.

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{S}_r \mathfrak{R}_i) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i \neq j}^{i \neq j} x_i^r M(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_j) + \right. \\ &\quad \left. + x_i^r M(\mathfrak{R}_i^2) \right] = \frac{\beta}{H-1} (x_i^r - m_r) \\ M(\mathfrak{S}_r \mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i \neq j, k}^{i \neq j, k} x_i^r M(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_j \mathfrak{R}_k) + \right. \\ &\quad \left. + x_i^r M(\mathfrak{R}_i^2 \mathfrak{R}_i) + x_i^r M(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i^2) \right] - \\ &= \frac{\beta(\beta-\alpha)}{(H-1)(H-2)} (2m_r - x_i^r - x_i^r) \\ M(\mathfrak{S}_r \mathfrak{R}_i^2) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i \neq j}^{i \neq j} x_i^r M(\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i^2) + \right. \\ &\quad \left. + x_i^r M(\mathfrak{R}_i^3) \right] = \frac{\beta(\beta-\alpha)}{H-1} (x_i^r - m_r) \\ M(\mathfrak{S}_r^2 \mathfrak{R}_i) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i \neq j}^{i \neq j} x_i^r M(\mathfrak{S}_r \mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_i) + \right. \\ &\quad \left. + x_i^r M(\mathfrak{S}_r \mathfrak{R}_i^2) \right] = \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha(H-1)(H-2)} \cdot \\ &\quad \cdot [x_i^{2r} - m_{2r} - 2m_r(x_i^r - m_r)]. \end{aligned} \right.$$

Mediante questi valori medi si calcolano poi subito i due momenti seguenti:

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{S}_r^2) &= \frac{1}{N} \sum_1^H x_i^r M(\mathfrak{S}_r \mathfrak{R}_i) = \\ &= \frac{H-N}{H-1} \cdot \frac{1}{N} (m_{2r} - m_r^2) \\ M(\mathfrak{S}_r^2 \mathfrak{S}_u) &= \frac{1}{N} \sum_1^H x_i^r M(\mathfrak{S}_r^2 \mathfrak{R}_i) = \\ &= \frac{(H-N)(H-2N)}{(H-1)(H-2)} \cdot \frac{1}{N^2} [m_{2r+u} + \\ &\quad - 2m_{r+u}m_r - m_{2r}m_u + 2m_r^2m_u]. \end{aligned} \right.$$

Un altro momento che c'interessa calcolare è $M(\mathfrak{S}_1^2)$; ma seguendo la strada fin'ora percorsa andremmo incontro a calcoli piuttosto laboriosi; ricorreremo perciò ad altro ordine di considerazione, e, per rendere i calcoli più semplici, li eseguiamo nella ipotesi *non restrittiva* che sia $m_1 = 0$.

(1) G. POMPILI: Sulla media geometrica e sopra un indice di mutabilità calcolati mediante un campione, Mem. Soc. Italiana delle Scienze, s. III, 1947.

Indichiamo con $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$ le v. c. descritte dalle determinazioni assunte dalla v. c. \bar{X} nelle successive N prove con le quali viene costruito il campione.

Queste N v. c. non sono certo indipendenti perchè, eseguendosi le N prove secondo lo schema dell'estrazione a caso senza ripetizione, il risultato di una prova è ovviamente influenzato dai risultati delle prove precedenti; inoltre esse sono formalmente eguali alla v. c. \bar{X} , intendendosi con questo che hanno in comune con tale v. c. la funzione di ripartizione.

I momenti del quart'ordine della v. c. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ si calcolano abbastanza facilmente e il calcolo è ancor più facilitato dall'ipotesi posta che sia:

$$(3.11) \quad m_1 = \frac{1}{H} \sum_1^H x_i = 0.$$

Anzitutto possiamo subito scrivere:

$$(3.12) \quad M(\bar{x}_i^4) = M(\bar{X}^4) = \bar{m}_4$$

mentre per il calcolo dei momenti misti occorre tener presente che due v. c. \bar{x}_i con indice in basso diverso non possono mai assumere contemporaneamente lo stesso valore x_i ; avremo pertanto:

$$(3.13) \left\{ \begin{aligned} M(\bar{x}_i^3 \bar{x}_i) &= \frac{1}{H(H-1)} \sum_1^H \sum_{j \neq i} x_i^3 x_j = \\ &= \frac{1}{H(H-1)} \sum_1^H x_i (H\bar{m}_3 - x_i^3) = -\frac{\bar{m}_4}{H-1} \\ M(\bar{x}_i^2 \bar{x}_i^2) &= \frac{1}{H(H-1)} \sum_1^H \sum_{j \neq i} x_i^2 x_j^2 = \\ &= \frac{1}{H(H-1)} \sum_1^H x_i^2 (H\bar{m}_2 - x_i^2) = \frac{H\bar{m}_2^2 - \bar{m}_4}{H-1} \\ M(\bar{x}_i^2 \bar{x}_j \bar{x}_i) &= \frac{1}{H(H-1)(H-2)} \sum_1^H \sum_{j \neq i} \sum_{w \neq i, j} x_i^2 x_j x_w = \\ &= \frac{1}{H(H-1)(H-2)} \sum_1^H \sum_{j \neq i} x_j x_i \cdot \\ & \quad (H\bar{m}_2 - x_j^2 - x_i^2) = \frac{1}{H(H-1)(H-2)} \cdot \\ & \quad \cdot \sum_1^H x_i (-H\bar{m}_2 x_i + 2x_i^3 - H\bar{m}_3) = \\ & = -\frac{H\bar{m}_2^2 - 2\bar{m}_4}{(H-1)(H-2)} \\ M(\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_i \bar{x}_i) &= \frac{2}{H(H-1)(H-2)(H-3)} \cdot \\ & \quad \cdot \sum_1^H \sum_{j \neq i} \sum_{w \neq i, j} \sum_{z \neq i, j, w} x_i x_w x_j x_z = \\ & = \frac{1}{H(H-1)(H-2)(H-3)} \sum_1^H \sum_{j \neq i} \sum_{w \neq i, j} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} x_w x_j x_i (-x_w - x_i - x_j) = \\ = \frac{1}{H(H-1)(H-2)(H-3)} \sum_1^H \sum_{j \neq i} x_i x_j (2x_i^2 + 2x_j x_i + 2x_j - H\bar{m}_2) = \\ = \frac{1}{H(H-1)(H-2)(H-3)} \sum_1^H x_i (-6x_i^3 + \\ + 3Hx_i \bar{m}_2 + 2\bar{m}_3) = 3 \frac{H\bar{m}_2^2 - 2\bar{m}_4}{(H-1)(H-2)(H-3)}. \end{aligned} \right\}$$

Ciò posto si osservi che la v. c. scarto \mathfrak{S}_1 , nelle nostre ipotesi, non è altro che la media aritmetica delle N v. c. \bar{x}_i , cioè:

$$(3.14) \quad \mathfrak{S}_1 = \frac{1}{N} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_N)$$

di modo che si può subito scrivere:

$$(3.15) \quad \mathfrak{S}_1^4 = \frac{1}{N^4} [\sum \bar{x}_i^4 + 4 \sum \bar{x}_i^3 \bar{x}_j + 6 \sum \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 + \\ + 12 \sum \bar{x}_i^2 \bar{x}_j \bar{x}_w + 24 \sum \bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_w \bar{x}_z]$$

dove i 5 sommatori a secondo membro comprendono rispettivamente $N, 2 \binom{N}{2}, \binom{N}{2}, 3 \binom{N}{3}, \binom{N}{4}$ termini.

Passando infine, nella (3.12), ai valori medi, possiamo scrivere:

$$(3.16) \quad M(\mathfrak{S}_1^4) = \frac{1}{N^4} \left[N M(\bar{x}_i^4) + 8 \binom{N}{2} M(\bar{x}_i^3 \bar{x}_j) + \right. \\ \left. + 6 \binom{N}{2} M(\bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2) + 36 \binom{N}{3} M(\bar{x}_i^2 \bar{x}_j \bar{x}_w) + \right. \\ \left. + 24 \binom{N}{4} M(\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_w \bar{x}_z) \right],$$

da cui ricordando le (3.11), si ottiene infine:

$$(3.17) \quad M(\mathfrak{S}_1^4) = \frac{H-N}{H-1} \cdot \frac{1}{N^3} \left[\bar{m}_4 + \right. \\ \left. + 3 \frac{(H-N-1)(N-1)}{(H-2)(H-3)} (H\bar{m}_2^2 - 2\bar{m}_4) \right].$$

*

Chiederemo questo numero così pieno di formule elencando solo quelle che c'interessarono per il seguito, calcolate nell'ipotesi, che per i nostri scopi non risulterà restrittiva, che sia $m_1 = 0$:

$$(3.18) \left\{ \begin{aligned} M(\mathfrak{G}_1^2) &= \frac{H-N}{H-1} \cdot \frac{\bar{m}_2}{N} \\ M(\mathfrak{G}_2^2) &= \frac{H-N}{H-1} \cdot \frac{\bar{m}_4 - \bar{m}_2^2}{N} \\ M(\mathfrak{G}_1^2 \mathfrak{G}_2) &= \frac{H-N}{H-1} \cdot \frac{H-2N}{H-2} \cdot \frac{\bar{m}_4 - \bar{m}_2^2}{N^2} \\ M(\mathfrak{G}_1^4) &= \frac{H-N}{H-1} \cdot \frac{1}{N^3} \left[\bar{m}_4 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{(H-N-1)(N-1)}{(H-2)(H-3)} (\bar{Hm}_2^2 - \bar{m}_4) \right]. \end{aligned} \right.$$

4. - La v. c. «media»

Della v. c. \mathfrak{M}_1 descritta dalla media m_1 del campione ci sbrigheremo in due parole. Infatti, per la (3.7), si può subito scrivere:

$$(4.1) \quad M\mathfrak{M}_1 = m_1$$

e, in base alla prima delle (3.18) si può dare l'espressione della varianza:

$$(4.2) \quad \mu^2 \mathfrak{M}_1 = M(\mathfrak{G}_1^2) = \frac{H-N}{H-1} \frac{\mu^2 \bar{x}}{N}.$$

5. - La v. c. «varianza»

Nel caso di un campione ottenuto secondo lo schema bernoulliano, cioè con estrazione a caso senza ripetizione, per definire la varianza del campione stesso si introduce un opportuno fattore di correzione in modo che la v. c. descritta da tale varianza abbia per media proprio la varianza della v. c. di partenza; ed effettivamente come varianza del campione si prende non già la media aritmetica dei quadrati degli scarti dalla media del campione medesimo, ma tale media aritmetica moltiplicata per il fattore $\frac{N}{N-1}$.

Anche nel caso dell'estrazione in blocco converrà definire la varianza μ^2 del campione in modo che la media della v. c. descritta da tale parametro coincida con la varianza della v. c. di partenza.

A tale scopo bisogna porre:

$$(5.1) \quad \mu^2 = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{1}{N-1} \sum_1^N (x_j - m_1)^2$$

che si può anche scrivere in quest'altra maniera per i nostri scopi più comoda:

$$(5.2) \quad \mu^2 = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{1}{N-1} \sum_1^H (x_i - m_1)^2 o_i.$$

La (5.2) permette di dare subito l'espressione es-

plicità della v. c. $\bar{\mathfrak{M}}_2$ descritta dalla varianza μ^2 al variare del campione:

$$(5.3) \quad \bar{\mathfrak{M}}_2 = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{1}{N-1} \sum_1^H (x_i - \mathfrak{M}_1)^2 \mathfrak{G}_i$$

che possiamo anche scrivere in quest'altra maniera:

$$(5.4) \quad \bar{\mathfrak{M}}_2 = \frac{H-2}{H} \cdot \frac{N-1}{N} [\mu^2 \bar{x} + \mathfrak{G}_2 - 2m_1 \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_1^2].$$

Vogliamo anzitutto controllare che la v. c. $\bar{\mathfrak{M}}_2$, sopra definita, è invariante di fronte ai cambiamenti d'origine, la cosa è praticamente pacifica trattandosi di varianza, ma è facile eseguire direttamente il controllo. Se infatti ai valori x_i si somma la quantità a ottenendo i nuovi valori $x'_i = x_i + a$ che appartengono alla v. c. $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + a$ e se indichiamo con l'apice i momenti e le v. c. relativi a questa nuova v. c. si ha:

$$m'_1 = m_1 + a$$

$$\mu^2 \mathfrak{X}' = \mu^2 \mathfrak{X}$$

$$\mathfrak{G}'_1 = \mathfrak{G}_1$$

$$\mathfrak{G}'_2 = \mathfrak{G}_2 + 2a \mathfrak{G}_1$$

e quindi:

$$(5.5) \quad \bar{\mathfrak{M}}'_2 = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} [\mu^2 \mathfrak{X}' + \mathfrak{G}'_2 - 2m'_1 \mathfrak{G}'_1 + \mathfrak{G}'_1^2] = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} [\mu^2 \bar{x} + \mathfrak{G}_2 - 2m_1 \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_1^2] = \bar{\mathfrak{M}}_2$$

c. v. d.

Dalla (5.5) segue in particolare che possiamo, senza perdere nulla in generalità, portare l'origine nella media o , quel che è la stessa cosa, supporre $m_1 = 0$ dopo di che la (5.4) si scrive più semplicemente così:

$$(5.6) \quad \bar{\mathfrak{M}}_2 = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} [\mu^2 \bar{x} + \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1^2].$$

*

Possiamo ora controllare, ricordando le (3.18), che la media della v. c. $\bar{\mathfrak{M}}_2$ coincide con la varianza della v. c. di partenza; si ha infatti:

$$(5.7) \quad M(\bar{\mathfrak{M}}_2) = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N-1}{N} [\mu^2 \bar{x} + M(\mathfrak{G}_2) - M(\mathfrak{G}_1^2)] = \mu^2 \bar{x}$$

c. v. d.

Sottraendo dalla v. c. $\bar{\mathfrak{M}}_2$ il suo valor medio $\mu^2 \bar{x}$ otteniamo la v. c. scarto:

$$(5.8) \quad \bar{\mathfrak{C}}_2 = \bar{\mathfrak{M}}_2 - \mu_x^2 = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} \left[\frac{H-N}{N(H-1)} \mu_x^2 + 2\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1^2 \right]$$

di cui interessa in modo particolare il secondo momento, che ci dà la varianza della v. c. $\bar{\mathfrak{M}}_2$ stessa.

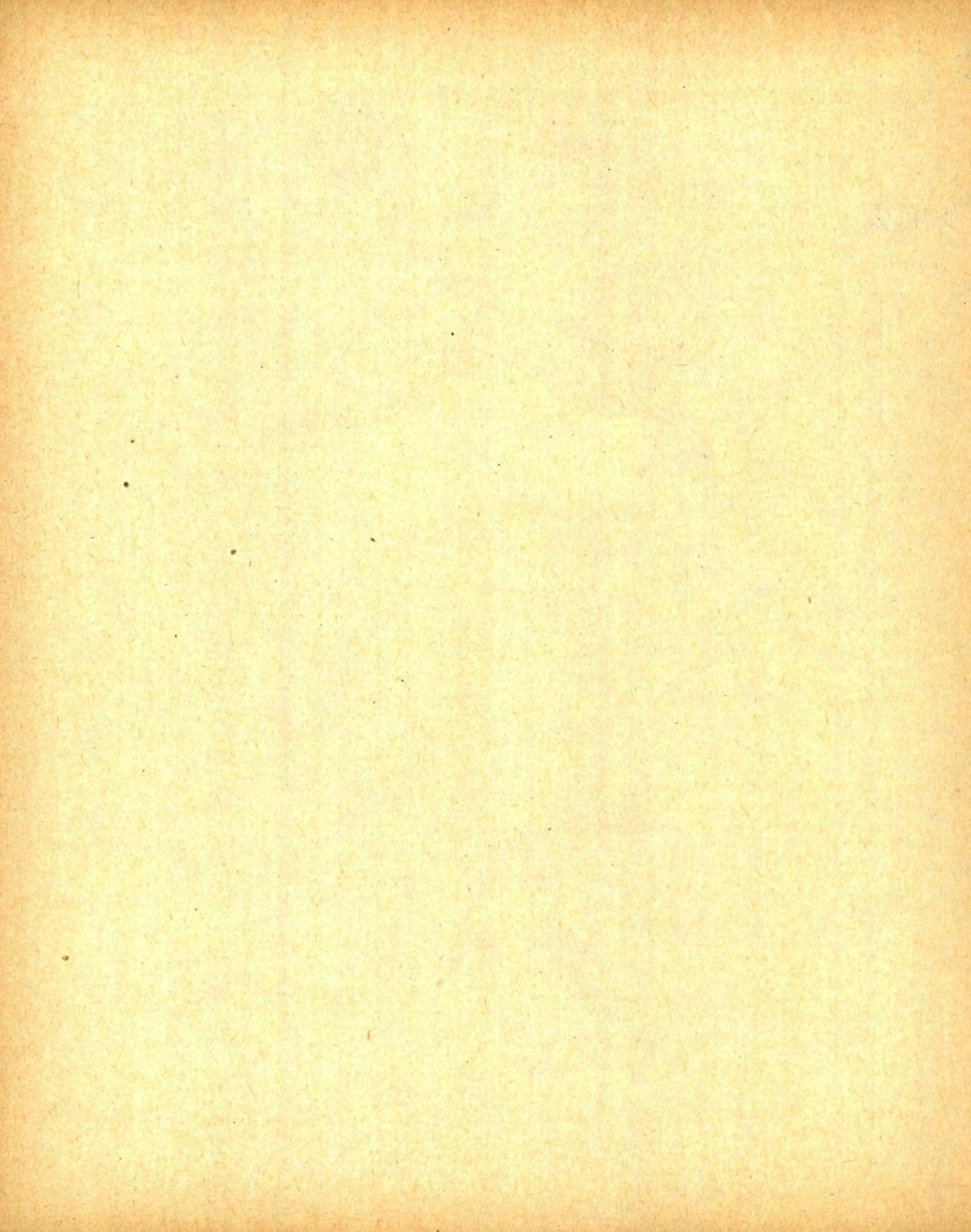
Per calcolare rapidamente tale secondo momento conviene, approfittando delle (3.18), determinare preventivamente i due valori medi seguenti:

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{aligned} M(\bar{\mathfrak{C}}_2 \mathfrak{C}_2) &= \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} \cdot \left[\frac{H-N}{N(H-1)} \mu_x^2 M(\mathfrak{C}_2) + M(\mathfrak{C}_2^2) + \right. \\ &\quad \left. - M(\mathfrak{C}_1^2 \mathfrak{C}_2) \right] = \frac{H-N}{H-2} \cdot \frac{1}{N} (\bar{m}_4 - \bar{m}_2^2) \cdot \\ M(\mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_1^2) &= \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} \cdot \left[\frac{H-N}{N(H-1)} \mu_x^2 M(\mathfrak{C}_1^2) + M(\mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_1^2) + \right. \\ &\quad \left. + M(\mathfrak{C}_1^4) \right] = \frac{H-N}{H} \cdot \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} &\cdot \frac{1}{N(N-1)} \left\{ \frac{H(N-1)}{(H-1)(H-2)} \bar{m}_2^2 + \right. \\ &+ \frac{H-2N}{H-2} \bar{m}_4 - \frac{1}{N} \left[\bar{m}_4 + \right. \\ &\left. \left. + 3 \frac{(H-N-1)(N-1)}{(H-2)(H-3)} \cdot (H\bar{m}_2^2 - \bar{m}_4) \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

Mediante i precedenti valori medi (5.9) possiamo poi calcolare, nel modo più semplice, il secondo momento della v. c. scarto $\bar{\mathfrak{C}}_2$:

$$(5.10) \quad \mu_{\bar{\mathfrak{M}}_2}^2 = M(\bar{\mathfrak{C}}_2^2) = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{N}{N-1} \left[\frac{H-N}{N(H-1)} \mu_x^2 M(\bar{\mathfrak{C}}_2) + M(\bar{\mathfrak{C}}_2 \mathfrak{C}_2) + \right. \\ \left. - (M\bar{\mathfrak{C}}_2 \mathfrak{C}_1^2) \right] = \frac{H-1}{H} \cdot \frac{H-N}{H-1} \left\{ \frac{1}{H-2} (\bar{m}_4 - \bar{m}_2^2) + \right. \\ \left. - \frac{1}{H(N-1)} \left[\frac{H(N-1)}{(H-1)(H-2)} \bar{m}_2^2 + \frac{H-2N}{H-2} \bar{m}_4 + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{N} \left(\bar{m}_4 + 3 \frac{(H-N-1)(N-1)}{(H-2)(H-3)} (H\bar{m}_2^2 - \bar{m}_4) \right) \right] \right\}.$$



Algumas Aplicações da Teoria Analítica dos Polinómios^(*)

por José Gaspar Teixeira

Instituto Industrial de Lisboa

A teoria analítica dos polinómios — estudo dos polinómios como funções analíticas — pode considerar-se, sob certos aspectos elementares, como o prolongamento natural da discussão da natureza dos zeros dos mesmos polinómios, iniciada já nos cursos de matemáticas elementares.

No presente trabalho abordaremos alguns problemas relacionados com resultados obtidos por nós em 1944 e apresentados ao Congresso Luso-Espanhol do mesmo ano.

Problema. Consideremos um polinómio, $P_2(x)$, do 2.º grau em x , de coeficientes reais dependentes de dois parâmetros — funções lineares⁽¹⁾ desses parâmetros, por exemplo

$$P_2(x) = \varphi_0(\xi, \eta)x^2 + 2\varphi_1(\xi, \eta)x + \varphi_2(\xi, \eta)$$

em que

$$\varphi_i = a_i\xi + b_i\eta + c_i \quad (i = 0, 1, 2).$$

Para a discussão da natureza dos zeros de P_2 , começaremos por notar as posições relativas das rectas r_i e da cónica C , de equações respectivamente $\varphi_i = 0$ e $\varphi_1^2 - \varphi_0\varphi_2 = 0$:

- 1) C é tangente às rectas r_0 e r_2 , nos pontos de intersecção destas rectas com r_1 .
- 2) Os pontos de C só existem nos ângulos onde $\varphi_0\varphi_2 > 0$; consequentemente:
se for T o triângulo definido pelas rectas r_i ,
 - a) C será hipérbole e não terá pontos interiores ao triângulo T , se, no interior de T for $\varphi_0 \cdot \varphi_2 < 0$.
 - b) C será elipse ou parábola e terá pontos interiores a T se, no interior de T for $\varphi_0 \cdot \varphi_2 > 0$.

Posto isto, sejam R_x as regiões simplesmente conexas determinadas do plano $\xi\eta$ pelo trilátero r_0, r_1, r_2 e pela cónica C .

O polinómio $P_2(x)$ gosa, em relação a estas regiões R_x , das propriedades seguintes:

- I — Conservando-se o ponto $M(\xi, \eta)$ no interior de uma mesma região R_x , não se altera a natureza dos zeros do polinómio P_2 .
- II — Quando $M(\xi, \eta)$ se desloca sobre r_0 , um dos zeros de P_2 conserva-se no ponto infinito; sobre r_1 os dois zeros permanecem simétricos; sobre r_2 um dos zeros é nulo; enfim, sobre C os dois zeros são sempre iguais.

Aplicações. São imediatas as generalizações do problema anterior para o caso das equações $\varphi_i = 0$ representarem curvas à Jordan, limitando áreas simplesmente conexas.

Este método, porém, da discussão da natureza dos zeros dum polinómio não poderá ser aplicado a equações de grau superior ao quarto.

Mas o interesse prático da repartição das raízes da equação

$$(1) \quad P_2(x) = 0$$

reside no facto de ser ela a equação característica da equação diferencial de 2.ª ordem, homogénea, de coeficientes constantes,

$$(2) \quad \varphi_0 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\varphi_1 \frac{dx}{dt} + \varphi_2 x = 0,$$

que rege tantos fenómenos da mecânica e da física.

Em muitos desses problemas, interessa menos a determinação do integral geral da equação diferencial,

(*) Recebido em 3 de Novembro de 1951. Dissertação apresentada em concurso de provas públicas para Professor Ordinário do 1.º grupo do Instituto Industrial de Lisboa.

(1) São óbvias as generalizações a polinómios de coeficientes reais, funções regulares de dois parâmetros.

que o comportamento do mesmo integral quando a variável t aumenta indefinidamente.

Como se sabe, se for $\zeta = \alpha + i\beta$ uma raiz complexa da equação (1) o integral geral de (2) tem a forma

$$x(t) = e^{\alpha t} (Ae^{i\beta t} + Be^{-i\beta t})$$

e é

$$|x(t)| = k^2 e^{\alpha t}.$$

Portanto, se $\alpha < 0$, é $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$; se $\alpha = 0$, o integral geral $x(t)$ é função limitada para todos os valores de t .

Em qualquer dos casos, diz-se que, o sistema, sêdo do fenómeno em estudo, sofre uma evolução *estável* (1).

O estudo da estabilidade do sistema reduz-se pois ao estudo do sinal da parte real das raízes complexas da equação característica da respectiva equação diferencial.

O problema anterior mostra um critério simples, de natureza geométrica, aplicável ao estudo da estabilidade de um sistema físico.

Consideremos, por exemplo, um sistema cuja evolução obedece à equação diferencial

$$(\eta - \xi) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2(\xi - 1) \frac{dx}{dt} + (\eta + \xi)x = 0.$$

A equação característica tem a forma

$$(\eta - \xi)\lambda^2 + 2(\xi - 1)\lambda + (\eta + \xi) = 0$$

e, basta traçar as rectas: $\eta - \xi = 0$, $\xi - 1 = 0$ e $\eta + \xi = 0$, e a hipérbole $2\xi^2 - \eta^2 - 2\xi + 1 = 0$ (fig. 1) para concluirmos:

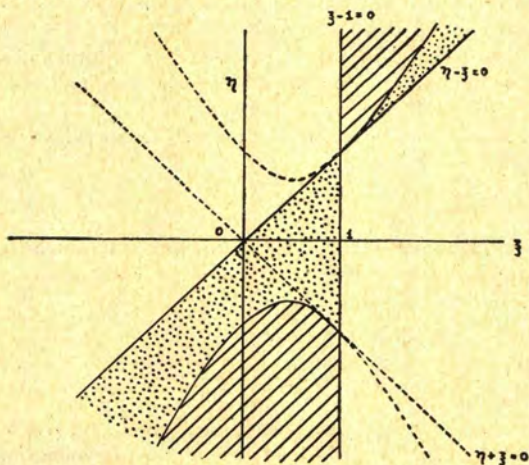


Fig. 1

Se os valores dos parâmetros ξ, η são tais que o ponto $M(\xi, \eta)$ se situa

(1) Se t for a variável tempo, e se $\lim_{t \rightarrow \infty} (x) = \infty$, o sistema viria a sofrer uma rutura mecânica, disrupção eléctrica, etc.

- na região tracejada, o sistema funciona em regime *periódico amortecido*.
- sobre os arcos AB e CD dos ramos da hipérbole o sistema tem um *amortecimento crítico*.
- na região pontuada, o regime é *aperiódico estável*.

Se, porém, a equação diferencial for

$$(\xi - \eta) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2(\xi - 1) \frac{dx}{dt} + (\xi + \eta)x = 0$$

a cónica reduz-se à parábola $\eta^2 - 2\xi + 1 = 0$, (fig. 2).

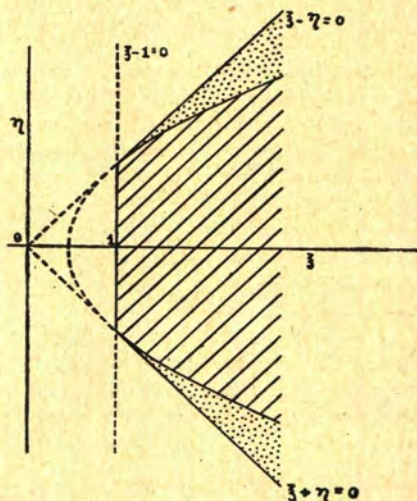


Fig. 2

Agora, se o ponto M estiver situado:

- na área tracejada, o sistema funciona em regime *periódico amortecido*
- sobre os arcos AB e CD da parábola, o sistema tem *amortecimento crítico*.
- na região pontuada o regime é *aperiódico estável*.

Nos dois casos vê-se, gráficamente, que o regime de amortecimento crítico é um caso limite comum dos regimes periódicos amortecidos e aperiódico estável.

Generalizações. A análise anterior tem o inconveniente de não permitir uma generalização quanto ao grau do polinómio, pois baseia-se na resolubilidade por radicais da respectiva equação.

Há, no entanto, processos clássicos aplicáveis a equações quaisquer de coeficientes reais.

Temos, por exemplo o

TEOREMA DE HURWITZ (1). *A condição necessária e suficiente para que os zeros do polinómio de coeficientes reais*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (a_0 > 0)$$

tenham todos a parte real negativa, é que os determinantes

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \dots, \Delta_n$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_\lambda \end{vmatrix} \quad (a_k = 0 \text{ se } k > n)$$

$$\lambda > 1$$

sejam todos positivos.

Este teorema permite-nos resolver o caso de aplicação anterior, qualquer que seja a ordem da equação diferencial respectiva.

Outros critérios, devidamente adoptados, são também aplicáveis ao mesmo problema. Assim, conhece-se o

TEOREMA DE ENESTRÖM KAKEYA (1). *Se os coeficientes dum polinómio f(x) são reais e verificam as desigualdades*

$$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$$

todos os zeros de f(x) estão contidos no círculo unidade, $|x| \leq 1$.

Como a bilinear, $z = \frac{x+1}{x-1}$ transforma o interior do círculo $|x| < 1$ no semi-plano $\Re(z) < 0$ (estabelecendo uma correspondência biunívoca e contínua entre os pontos das respectivas fronteiras), se a transformada

$$(z-1)^n f\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$$

verifica as condições do teorema de KAKEYA, todas as raízes da equação $f(x)=0$ tem a parte real negativa.

Generalizações de outro tipo poderão obter-se, considerando polinómios de coeficientes complexos.

Referir-nos-emos apenas a um método devido a HERMITE, completado por um teorema de SCHUR e citado por DIEUDONNÉ (2).

Seja $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ um polinómio de coeficientes complexos; a transformada

$$f^*(x) = x^n \overline{f(1/\bar{x})} = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} x + \dots + \bar{a}_0 x^n$$

tem os zeros simétricos dos de $f(x)$ em relação ao círculo unidade. A expressão

$$K(f) = \frac{f(x)f^*(y) - f(y)f^*(x)}{x-y} = \sum_{h,k=0}^{n-1} A_{h,k} x^h y^k$$

é tal que os seus coeficientes verificam as relações

$$A_{h,k} = A_k \quad \bar{A}_{h,k} = A_{n-h-1, n-k-1};$$

se em K substituirmos x^h, y^{n-k-1} respectivamente por u_h e u_k , e fizermos $a_{h,k} = A_{h, n-k-1}$, obtemos uma forma de HERMITE $H(f; u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ associada a $f(x)$.

Então podemos enunciar o

TEOREMA DE SCHUR. *A condição necessária e suficiente para que todos os zeros do polinómio f(x) sejam interiores ao círculo unidade é que a forma H seja definida positiva.*

Enfim, refazendo a análise anterior, substituindo porém a transformada $f^*(x)$ por $f(x)$, obtemos outro critério que nos permite afirmar quando todos os zeros dum polinómio de coeficientes complexos tem a parte real negativa.

Anteriormente a CAUCHY, os métodos usados no estudo analítico das funções eram pouco rigorosos, grosseiros, mesmo, abusando-se duma «intuição evidente» na falta duma estruturação lógica, ainda inexistente.

O estudo dos polinómios como funções analíticas inicia-se realmente com CAUCHY, mas até o fim do Sec. XIX procura-se apenas a determinação das posições dos zeros reais dos polinómios de coeficientes reais, deduzidas das posições relativas desses mesmos coeficientes.

No entanto, um dos primeiros resultados obtidos deve-se ao próprio CAUCHY, mas sobre polinómios de coeficientes quaisquer:

TEOREMA. *Todos os zeros do polinómio de coeficientes complexos*

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

estão contidos no círculo $|x| \leq x_0$, em que x_0 representa a raiz positiva da equação

$$(2) \quad A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1} x^{n-1} = A_n x^n \quad A_i = |a_i|.$$

Não conhecemos qualquer trabalho onde o estudo analítico dos polinómios seja feito como corpo próprio de doutrina. Pode dizer-se que os resultados conhecidos são em regra dispersos, havendo até métodos característicos dos polinómios de coeficientes complexos e métodos característicos dos de coeficientes reais.

(1) Citado por J. DIEUDONNÉ—*La théorie analytique des polynômes d'une variable.*

(2) DIEUDONNÉ—*Loc. cit.*

Relativamente poucos são os resultados obtidos sobre as propriedades dos argumentos dos zeros.

Em 1944 obtivemos algumas contribuições para o anterior teorema de CAUCHY (1).

Assim:

A condição necessária e suficiente de existência dum zero do polinómio (1) sobre a circunferência $|x|=x_0$ é que os respectivos coeficientes verifiquem as relações únicas e simplesmente determinadas

$$(A) \quad \arg \frac{a_i}{a_{i+1}} = \arg \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}} + \frac{\pi}{n} \quad (i=0, 1, \dots, n-2).$$

Além disso,

Os polinómios cujos coeficientes verificam as relações

$$(B) \quad \arg \frac{a_i}{a_{i+1}} = \varphi + k\pi,$$

menos restritivas que as anteriores, constituem um domínio de integridade, D_φ , caracterizado pela propriedade seguinte:

Todos os polinómios dum D_φ têm os respectivos zeros simétricos em relação à recta $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$ (em particular sobre a própria recta).

Com efeito, se for

$$P_n(x) = e^{i\lambda x} \sum_{j=0}^n |a_j| e^{i\lambda_j x} \quad (\lambda_j = j\varphi + k_j\pi) \quad k_0=0$$

um elemento de D_φ , a soma e o produto de dois elementos de D_φ ainda é elemento de D_φ . Que D_φ é domínio de integridade, torna-se agora evidente.

D_0 é o domínio que contém todos os polinómios de coeficientes reais.

Passa-se dos elementos do domínio D_φ para os do domínio $D\psi$, efectuando no plano da variável x uma rotação em torno da origem de abertura $\varphi - \psi$.

O conjunto θ_{φ_x} dos polinómios de D_φ cujo coeficiente independente tem o mesmo argumento x , não constitui um sub-anel de D_φ .

Seja, abreviadamente, φ_x o sub-anel de D_φ , gerado pelo conjunto θ_{φ_x} . Se definirmos, à maneira vulgar, adição e multiplicação e admitirmos como correspondentes os elementos dos anéis φ_x e ψ_x que se transformam um no outro por meio da rotação

anterior, então esta rotação define uma isomorfia entre φ_x e ψ_x .

Além disso, como são isomorfos dois anéis ψ_x e ψ_π , serão isomorfos φ_x e ψ_π .

Note-se porém que o conjunto θ_0 é já um sub-anel de D_0 . Esta circunstância permite concluir que a rotação considerada estabelece entre um φ_x e θ_0 , não uma isomorfia mas uma homomorfia.

Ora θ_0 é o conjunto de todos os polinómios de coeficientes reais e termos independentes positivos — os polinómios que satisfazem às primeiras condições dos enunciados dos teoremas de HURWITZ e KAKEVA. Por outro lado, os polinómios cujos coeficientes verificam as condições B) constituem um anel, \mathfrak{A} .

Então as mesmas condições B) permitem a subdivisão de \mathfrak{A} em sub-anéis (1) φ_x , isomorfos entre si, mas cada um homomorfo ao anel θ_0 .

Esta análise permite uma generalização dos teoremas de HURWITZ e KAKEVA para o caso de coeficientes complexos; assim:

TEOREMA 1. *A condição necessária e suficiente para que os zeros dum polinómio de coeficientes complexos, verificando as condições B)*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_0 = |a_0| e^{i\lambda}$$

tenham todos a parte real negativa é que os determinantes

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} \Delta_1 = A_1, & \Delta_2, & \Delta_3, & \dots & \Delta_n \\ A_1 & A_3 & A_5 & \dots & A_{2\lambda-1} \\ A_0 & A_2 & A_4 & \dots & A_{2\lambda-2} \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots & A_{2\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} (A_k = 0 \text{ se } k > n) \\ \lambda > 1 \\ A_j = a_j e^{i(j\varphi - \lambda)} \end{aligned}$$

sejam todos positivos.

TEOREMA 2. *Se os coeficientes (complexos) dum polinómio $f(x)$ verificam as condições B) e são tais que*

$$0 < A_0 < A_1 < \dots < A_n \\ A_j = a_j e^{i(j\varphi - \lambda)}$$

todos os zeros de $f(x)$ estão contidos no círculo unidade $|x| < 1$.

(1) TEIXEIRA, J. GASPARD — Sur une certaine classe de polynômes à coefficients complexes.

(1) Evidentemente, não disjuntos.

Sobre um caso de convergência de fracções contínuas de elementos complexos^(*)

por João Farinha
Universidade de Coimbra

Embora menos facilmente manejável do que as séries e os produtos infinitos, o algoritmo das fracções contínuas tem sido bom auxiliar no estabelecimento de muitas proposições fundamentais da matemática: por exemplo, a irracionalidade não quadrática de π .

Como problema inicial deste algoritmo, põe-se, naturalmente, o da determinação de condições de convergência. Nesta ordem de ideias, tem esta nota por objectivo demonstrar uma condição suficiente de convergência numa certa classe de fracções contínuas de elementos complexos.

THEOREMA. *Sejam $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ funções de uma variável complexa que verificam num domínio Δ as seguintes hipóteses:*

$$|f_1| \geq 1 + \alpha_1, \quad |f_n| \geq 1 + \alpha_n + \frac{1}{1 + \alpha_{n-1}} \quad (n=2, 3, \dots)$$

sendo $\lim (\alpha_n) > a > 0$.

Nestas condições, a fracção contínua infinita

$$\frac{1}{f_1 + \frac{1}{f_2 + \dots + \frac{1}{f_n + \dots}}}$$

é uniformemente convergente em Δ e todas as reduzidas têm os afixos no círculo

$$|z| \leq \frac{a+1}{a(a+2)}.$$

Se representarmos por B_n o denominador da reduzida de ordem n , a fracção contínua considerada é, como se sabe, equivalente à série

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}} \quad (B_0 = 1).$$

Ora das hipóteses anteriores decorre a convergência absoluta e uniforme desta série.

Em primeiro lugar é

$$(1) \quad \left| \frac{B_n}{B_{n-1}} \right| \geq 1 + \alpha_n.$$

Com efeito:

$$\left| \frac{B_2}{B_1} \right| = \left| f_2 + \frac{1}{f_1} \right| \geq |f_2| - \left| \frac{1}{f_1} \right| \geq 1 + \alpha_2.$$

Mas se for $\left| \frac{B_k}{B_{k-1}} \right| \geq 1 + \alpha_k$, ter-se-á

$$\left| \frac{B_{k+1}}{B_k} \right| = \left| f_{k+1} + \frac{B_{k-1}}{B_k} \right| \geq 1 + \alpha_{k+1}$$

e deste modo fica provada (1), com toda a generalidade.

Por outro lado da hipótese $|f_1| \geq 1 + \alpha_1$ e de (1) resulta que nenhum B_i se anula e a identidade

$$|B_n| = \prod_1^n \left| \frac{B_k}{B_{k-1}} \right|$$

dá então $|B_n| \geq \prod_1^n (1 + \alpha_n) > (1 + a)^n$.

Assim, será em Δ , e para todos os valores de n

$$\frac{1}{|B_n B_{n-1}|} \leq \frac{1}{(1+a)^{2n-1}}.$$

A série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}}$ é pois absoluta e uniformemente convergente. E com isto se prova a primeira parte da proposição.

A segunda parte é imediata, pois $\frac{a+1}{a(a+2)}$ é jus-

tamente a soma da série majorante $\sum \frac{1}{(1+a)^{2n-1}}$.

(*) Recebido em 1951, Novembro, 8.

Sobre fórmulas assintóticas conjecturais referentes à distribuição dos números primos^(*)

por Manuel dos Reis
Universidade de Coimbra

1.

No 3.º artigo da série *Some problems of «partitio numerorum»*, sub-intitulado *On the expression of a number as a sum of primes*¹⁾, HARDY e LITTLEWOOD tentaram aplicar a este problema, e a alguns outros referentes à distribuição dos números primos, o método analítico que, com tão bons resultados, tinham utilizado no problema de WARING, da partição dum número em potências do mesmo grau. O êxito foi muito menor: numerosas e interessantes, as proposições obtidas eram todas conjecturais, pois de nenhuma o método permitia verdadeira demonstração. A proposição «fraca» de GOLDBACH, segundo a qual todo número impar (suficientemente grande) é soma de três primos, e a fórmula assintótica de que essa proposição imediatamente resulta, só puderam HARDY e LITTLEWOOD deduzi-las rigorosamente da célebre hipótese de RIEMANN sobre os zeros da função $\zeta(s)$ e da infinidade de hipóteses correspondentes sobre os zeros das funções $L(s)$ de DIRICHLET, isto é de uma infinidade de conjecturas. Para as outras proposições, por exemplo para a proposição «forte» de GOLDBACH segundo a qual todo número par (pelo menos suficientemente grande) é soma de dois primos, nem isso foi possível.

No 5.º artigo da referida série, publicado pouco depois com o sub-título *A further contribution to the study of Goldbach's problem*²⁾, HARDY e LITTLEWOOD puderam, da mencionada infinidade de hipóteses, deduzir rigorosamente que quase todos os números pares são somas de dois primos, mas não esclarecer se os números pares, que não são somas de dois primos, se porventura existem, são ou não em número infinito. Sendo impossível no estado actual da ciência, ao que parece, demonstrar aquelas hipóteses ou provar a sua

falsidade, o método de HARDY e LITTLEWOOD, nos problemas referidos e em muitos outros relativos à distribuição dos números primos deve considerar-se principalmente, a nosso ver, *as a machine for the production of heuristic formulae*³⁾, para usar palavras dos próprios autores, e o objectivo da presente nota é mostrar, numa série de exemplos, que essa máquina pode ser substituída por outra muito mais simples: o «crivo de Eratóstenes» prosseguido até um ponto, sempre o mesmo, que proposições analiticamente demonstradas nos indicarão. Desses exemplos, uns são de HARDY e LITTLEWOOD, outro é caso particular de exemplo tratado por eles, outros finalmente são exemplos de que eles se não ocuparam. Na escolha guiámo-nos por um critério de simplicidade e de brevidade, deixando o tratamento geral do assunto para um trabalho posterior.

A citada proposição «fraca» de GOLDBACH foi, com a respectiva fórmula assintótica tal como a tinham obtido HARDY e LITTLEWOOD, demonstrada completamente por VINOGRADOV⁴⁾ em 1937, mediante novo método; e a utilização deste método permitiu a VAN DER CORPUT⁵⁾ demonstrar a proposição «forte» na sua forma atenuada, isto é para quase todos os números pares. Mas a proposição «forte» para todos os números pares suficientemente grandes, e todas as outras proposições conjecturais de HARDY e LITTLEWOOD, continuam indemonstradas. De resto o teorema de VINOGRADOV apoiará o nosso processo, que fundaremos no célebre «teorema dos números primos» de HADAMARD e de LA VALLÉE POUSSIN relativo à sucessão natural dos números e , mais geralmente, às progressões aritméticas⁶⁾.

³⁾ Loc. cit. in (1), pág. 69.

⁴⁾ *Some theorems concerning the theory of primes*, *Recueil mathématique*, 44 (1937), págs. 179-195. Cf. J. G. VAN DER CORPUT, *Sur la démonstration de l'hypothèse de Goldbach pour les nombres impairs donnée par M. Vinogradov*, Paris 1938.

⁵⁾ *Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs*, *Acta Arithmetica*, 2 (1937), págs. 266-290.

⁶⁾ Cf. E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, II, págs. 9-28.

* Recebido em 1951, Novembro, 15.

¹⁾ *Acta mathematica*, 44 (1923), págs. 1-70.

²⁾ *Proceedings of the London Mathematical Society* (2), 22 (1924), págs. 46-56.

2.

Suprimindo, na sucessão dos n primeiros inteiros positivos, os primos não superiores a n^α , com $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, e seus múltiplos, restam a unidade e os primos desde n^α até n . E tem-se, como é sabido, designando por $\pi(x)$ e $[x]$, respectivamente, o número de primos que não excedem x e o maior inteiro contido em x ,

$$(1) \quad \pi(n) - \pi(n^\alpha) + 1 = n - \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{3} \right] - \dots + \left[\frac{n}{2 \cdot 3} \right] + \dots - \left[\frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] - \dots + \dots,$$

onde os denominadores que figuram no 2.º membro são os primos não superiores a n^α e os seus produtos dois a dois, três a três, etc. até ao produto de todos esses primos. Ora sendo pelo teorema dos números primos, para $n \rightarrow \infty$,

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}, \quad \pi(n^\alpha) \sim \frac{n^\alpha}{\alpha \log n},$$

tem-se evidentemente

$$\pi(n) - \pi(n^\alpha) + 1 \sim \frac{n}{\log n}$$

e portanto é

$$(2) \quad n - \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{3} \right] - \dots + \left[\frac{n}{2 \cdot 3} \right] + \dots - \left[\frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] - \dots + \dots \sim \frac{n}{\log n}.$$

Por outro lado

$$(3) \quad n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} - \dots + \frac{n}{2 \cdot 3} + \dots - \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \dots + \dots = n \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) \dots = n \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p} \right),$$

onde o produto se estende a todos os primos não superiores a n^α , é um valor aproximado do 2.º membro de (1) e, pelo conhecido teorema de MERTENS, o seu valor assintótico para $n \rightarrow \infty$ é

$$\frac{n}{\log n^\alpha} = \frac{e^{-\gamma}}{\alpha} \cdot \frac{n}{\log n},$$

onde e e γ são respectivamente a base dos loga-

ritmos naturais e a constante de EULER⁷⁾; se tomarmos pois

$$(4) \quad \alpha = e^{-\gamma} = 0,561 \dots$$

resulta

$$n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} - \dots + \frac{n}{2 \cdot 3} + \dots - \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \dots + \dots \sim \frac{n}{\log n},$$

cujo confronto com (2) mostra que então o 2.º membro de (1) e o seu valor aproximado (3) são assintoticamente iguais. De ora avante α terá sempre a definição (4).

Se portanto o teorema dos números primos não estivesse demonstrado, a hipótese da igualdade assintótica do 2.º membro de (1) e do seu valor aproximado (3) conduziria a

$$\pi(n) - (\pi^\alpha) + 1 \sim n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} - \dots + \frac{n}{2 \cdot 3} + \dots - \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \dots + \dots \sim \frac{n}{\log n^\alpha}$$

donde, claramente,

$$\boxed{\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}},$$

isto é, conduziria a uma fórmula assintótica conjectural exacta.

O valor aproximado (3) pode escrever-se directamente mediante conceitos simples de estatística matemática. Havendo em cada conjunto de p inteiros consecutivos um só múltiplo de p , e por isso atribuindo a um múltiplo de p a probabilidade $\frac{1}{p}$ e

consequentemente a um não-múltiplo de p a probabilidade $1 - \frac{1}{p}$, será $\prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p} \right)$ a probabili-

dade de um não múltiplo de nenhum dos primos p não superiores a n^α e portanto $n \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p} \right)$

e estimativa estatística do 1.º membro de (1). Esta observação é geral, e muito fácil de verificar na maior parte dos casos.

3.

Generalizando o que precede, consideremos a progressão aritmética de termo geral $ax + b$ ($x = 1, 2, \dots, l$), com a e b inteiros positivos primos entre si, e seja $al + b = n$. A congruência

⁷⁾ $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$.

$ax + b \equiv 0 \pmod{p}$ não tem raiz se o primo p divide a , isto é se $p|a$; e tem uma só raiz no caso contrário, isto é se $p \nmid a$, o que significa que os valores de x que tornam $ax + b$ divisível por p estão em progressão aritmética de razão p . Suprimindo pois na progressão dada os primos $p \nmid a$ não superiores a n^2 , e seus múltiplos, restam só primos do intervalo (n^2, n) , cujo número é $\pi_a(n) - \pi_a(n^2)$, designando por $\pi_a(\xi)$ o número de primos da progressão dada que não excedem ξ ; além disso é

$l \prod_{n^2 \geq p \nmid a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ a estimativa estatística de $\pi_a(n) - \pi_a(n^2)$, e a hipótese de que estas duas funções de n são assintoticamente iguais para $n \rightarrow \infty$ dá

$$\begin{aligned} \pi_a(n) - \pi_a(n^2) &\sim l \prod_{n^2 \geq p \nmid a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \\ &= \frac{n-b}{a} \cdot \frac{\prod_{p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{n^2 \geq p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}; \end{aligned}$$

para n suficientemente grande é

$$\prod_{n^2 \geq p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

e tem-se, portanto,

$$\begin{aligned} \pi_a(n) - \pi_a(n^2) &\sim \frac{n-b}{a} \cdot \frac{\prod_{p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \\ &= \frac{n-b}{\varphi(a)} \prod_{p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{n}{\varphi(a)} \cdot \frac{\alpha}{\log n^2}, \end{aligned}$$

donde

$$(5) \quad \boxed{\pi_a(n) \sim \frac{1}{\varphi(a)} \cdot \frac{n}{\log n}};$$

$\varphi(a)$ designa a conhecida função de EULER, isto é o número de inteiros positivos não superiores a a e primos relativamente a a . Ora a relação (5) constitui o teorema dos números primos para a progressão aritmética $ax + b$, e obtivemos uma fórmula assintótica exacta.

4.

Consideremos agora a sucessão dos binários de números ímpares $x, x+k$, onde k é um número par positivo e $x=1, 3, 5, \dots, 2l-1$, e seja $2l-1+k=n$. As congruências $x \equiv 0 \pmod{p}$ e $x+k \equiv 0 \pmod{p}$, onde p é primo ímpar, têm a mesma raiz se $p|k$, e raízes diferentes se $p \nmid k$; portanto, em cada conjunto de p binários $x, x+k$ consecutivos, se $p|k$ há um só binário em que pelo menos um dos dois números (neste caso ambos) é divisível por p , mas há dois tais binários (com um só dos números divisível por p) se $p \nmid k$. Suprimindo pois na sucessão dada os binários $x, x+k$ em que pelo menos um dos dois números é divisível por algum dos primos não superiores a n^2 , restam só binários de primos do intervalo (n^2, n) e possivelmente o binário $1, 1+k$, em número de $P_k(n) - P_k(n^2) + \varepsilon$, designando por $P_k(\xi)$ o número de binários de diferença k não superiores a ξ e sendo $\varepsilon=0$ ou $\varepsilon=1$; além disso é

$$l \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p|k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

a estimativa estatística de $P_k(n) - P_k(n^2) + \varepsilon$, e a hipótese de que estas duas funções são assintoticamente iguais para $n \rightarrow \infty$ dá

$$\begin{aligned} P_k(n) - P_k(n^2) + \varepsilon &\sim l \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \\ &\cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p|k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{n-k+1}{2} \cdot \\ &\cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p|k}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p \nmid k}} \frac{p-1}{p-2}; \end{aligned}$$

para n suficientemente grande é

$$\prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p|k}} \frac{p-1}{p-2} = \prod_{3 \leq p|k} \frac{p-1}{p-2};$$

além disso é

$$\begin{aligned} \prod_{3 \leq p \leq n^2} \left(1 - \frac{2}{p}\right) &= \prod_{3 \leq p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \\ &\cdot \prod_{3 \leq p \leq n^2} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} = 4 \prod_{p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\frac{\prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\}}{\prod_{p > n^2} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\}} \sim 4 \left(\frac{\alpha}{\log n^2} \right)^2 \cdot \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\};$$

tem-se portanto

$$P_k(n) - P_k(n^\alpha) + \varepsilon \sim \frac{n}{2} \cdot \frac{4}{\log^2 n} \cdot \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} \cdot \prod_{3 \leq p | k} \frac{p-1}{p-2},$$

donde

$$P_k(n) \sim \frac{2n}{\log^2 n} \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} \cdot \prod_{3 \leq p | k} \frac{p-1}{p-2},$$

que é a fórmula assintótica conjectural obtida por HARDY e LITTLEWOOD. Em particular é

$$P_2(n) \sim \frac{2n}{\log^2 n} \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\}$$

a fórmula assintótica conjectural para o número de binários de primos «gémeos» ($k=2$) não superiores a n .

5.

Consideremos a sucessão dos binários de números ímpares $x, x+n$, onde n é um número par positivo e $x = 1-n, 3-n, 5-n, \dots, (n-1)-n$, portanto $x+n = 1, 3, 5, \dots, n-1$. As considerações do n.º 4 são quase literalmente aplicáveis a este caso e, designando por $Q(\xi)$ o número de binários de primos da sucessão dada cujos valores absolutos não excedem ξ , a estimativa estatística de $Q(n) - Q(n^\alpha) + \varepsilon$, onde se tem agora $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 2$, é

$$\frac{n}{2} \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{p} \right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p | n}} \left(1 - \frac{1}{p} \right),$$

o que dá, procedendo como no n.º 4,

$$Q(n) \sim \frac{2n}{\log^2 n} \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} \cdot \prod_{3 \leq p | n} \frac{p-1}{p-2},$$

que é a fórmula assintótica conjectural para a proposição «forte» de GOLDBACH, obtida por HARDY e LITTLEWOOD. Com efeito os binários que estamos considerando são de números ímpares de diferença n , mas os diminuidores são negativos; equivalem pois a binários de números ímpares positivos de soma n .

A fórmula assintótica conjectural que precede, bem como as do n.º 4, foram também obtidas por STÄCKEL⁸⁾ independentemente de HARDY e LITTLEWOOD, e por método diferente. As fórmulas obtidas anteriormente por SYLVESTER e por BRUN para $Q(n)$ e $P_2(n)$ estavam erradas por factores constantes⁹⁾.

6.

Consideremos a sucessão dos números x^2+k , em que k é inteiro diferente de zero e de quadrado negativo, e $x = 1, 2, 3, \dots, l$. Seja $l^2+k=n$. A congruência $x^2+k \equiv 0 \pmod{p}$, onde p é primo, tem uma só raiz se $p=2$ ou se $3 \leq p | k$; e tem duas raízes ou nenhuma se $3 \leq p \nmid k$, conforme $-k$ seja, ou não, resto quadrático de p . Isto conduz, análogamente aos n.ºs precedentes, a escrever, designando por $P(n)$ o número de primos da sucessão dada não superiores a n ,

$$P(n) \sim l \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p | k}} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \cdot \prod_{\substack{\sigma \leq n^2 \\ \sigma \nmid k}} \left(1 - \frac{2}{\sigma} \right),$$

onde σ percorre os primos ímpares não divisores de k de que $-k$ é resto quadrático; ora o 2.º membro pode escrever-se

$$l \cdot \frac{\prod_{p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)}{\prod_{\substack{3 \leq p \leq n^2 \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)} \cdot \prod_{\sigma \leq n^2} \left(1 - \frac{2}{\sigma} \right) = -l \prod_{p \leq n^2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \cdot \prod_{\substack{\sigma \leq n^2 \\ \sigma \nmid k}} \frac{\sigma-2}{\sigma-1} \cdot \prod_{\substack{\sigma' \leq n^2 \\ \sigma' \nmid k}} \frac{\sigma'}{\sigma'-1},$$

onde σ' percorre os primos ímpares não divisores de k , de que $-k$ é não-resto quadrático; será pois

⁸⁾ Cf. P. STÄCKEL und W. WEINREICH, *Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen*, Abh. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1922.

⁹⁾ Cf. HARDY e LITTLEWOOD, loc. cit. in 1), pag. 32-37.

$$P(n) \sim l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\varpi-1}\right) \cdot \prod_{\varpi' \leq n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{\varpi'-1}\right) = l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\},$$

onde $\left(\frac{-k}{p}\right)$ é o conhecido símbolo de LEGENDRE, igual a +1, ou -1, conforme -k é, ou não, resto quadrático de p; tem-se portanto

$$P(n) \sim \sqrt{n-k} \cdot \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{\prod_{3 \leq p \nmid k} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\}}{\prod_{n^\alpha < p \nmid k} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\}},$$

isto é

$$P(n) \sim \frac{\sqrt{n}}{\log n} \cdot \prod_{3 \leq p \nmid k} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\},$$

fórmula assintótica conjectural contida no trabalho de HARDY e LITTLEWOOD citado em 4). Em particular, tem-se conjecturalmente

$$P(n) \sim \frac{\sqrt{n}}{\log n} \cdot \prod_{p \geq 3} \left\{1 - \left(\frac{-1}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\}$$

para o número de primos da forma $x^2 + 1$ não superiores a n.

7.

Consideremos também a sucessão dos números x^3+k em que k é inteiro não cubo, positivo ou negativo, e $x = 1, 2, \dots, l$. Seja $l^3+k=n$. A congruência $x^3+k \equiv 0 \pmod{p}$, onde p é primo, tem uma só raiz se $p=2$, ou $p=3$, ou $p \equiv -1 \pmod{6}$, ou $p \equiv 1 \pmod{6}$ com $p|k$; tem três raízes ou nenhuma se $p \equiv 1 \pmod{6}$ com $p \nmid k$, conforme k for, ou não, resto cúbico de p. Isto conduz, designando por P(n) o número de primos da sucessão

dada não superiores a n, a escrever

$$P(n) \sim l \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \prod_{n^\alpha \geq p \equiv -1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{n^\alpha \geq p \equiv 1 \\ p|k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{3}{\varpi}\right),$$

onde as congruências se referem ao módulo 6, e ϖ percorre os primos $\equiv 1 \pmod{6}$ não divisores de k de que k é resto cúbico; ora o 2.º membro pode escrever-se

$$l \frac{\prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{\substack{n^\alpha \geq p \equiv 1 \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{3}{\varpi}\right) = l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \frac{\varpi-3}{\varpi-1} \cdot \prod_{\varpi' \leq n^\alpha} \frac{\varpi'}{\varpi'-1},$$

onde ϖ' percorre os primos $\equiv 1 \pmod{6}$ não divisores de k, de que k é não-resto cúbico; será pois

$$P(n) \sim l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{2}{\varpi-1}\right) \cdot \prod_{\varpi' \leq n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{\varpi'-1}\right) = l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{n^\alpha \geq p \equiv 1 \\ p \nmid k}} \left\{1 - (k)_p \frac{2}{p-1}\right\},$$

onde $(k)_p$ é 1, ou $-\frac{1}{2}$, conforme k é, ou não, resto cúbico de p; portanto

$$P(n) \sim \sqrt[3]{n-k} \cdot \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{\prod_{p \equiv 1, p \nmid k} \left\{1 - (k)_p \frac{2}{p-1}\right\}}{\prod_{n^\alpha < p \equiv 1, p \nmid k} \left\{1 - (k)_p \frac{2}{p-1}\right\}},$$

isto é

$$P(n) \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{\log n} \cdot \prod_{\substack{p \equiv 1 \pmod{6} \\ p \nmid k}} \left\{1 - (k)_p \frac{2}{p-1}\right\},$$

que é a fórmula assintótica conjectural obtida por HARDY e LITTLEWOOD para o número de primos x^3+k (k não cubo) não superiores a n.

8.

Consideremos ainda a sucessão dos números x^4+k , em que k é inteiro diferente de zero e de quadrado negativo, e $x=1, 2, \dots, l$. Seja $l^4+k=n$. Utilizemos, se p é primo e $3 \leq p \nmid k$: o simbolo de LEGENDRE $\left(\frac{-k}{p}\right)$ já usado no n.º 6, igual a ± 1 conforme $-k$ é resto ou não-resto quadrático de p ; e, se também $p \equiv 1 \pmod{4}$ e $\left(\frac{-k}{p}\right) = 1$, o simbolo $\left(\frac{-k}{p}\right)_4$, igual a ± 1 conforme $-k$ é resto não resto biquadrático de p . A congruência $x^4+k \equiv 0 \pmod{p}$, em que p é primo qualquer, tem uma só raiz se $p=2$ ou $3 \leq p \nmid k$; mas se $3 \leq p \nmid k$, tem essa congruência: duas raízes se $p \equiv 3 \pmod{4}$ com $\left(\frac{-k}{p}\right) = 1$; quatro raízes se $p \equiv 1 \pmod{4}$ com $\left(\frac{-k}{p}\right) = 1$; e nenhuma raiz se $p \equiv 3 \pmod{4}$ com $\left(\frac{-k}{p}\right) = -1$, ou $p \equiv 1 \pmod{4}$ com $\left(\frac{-k}{p}\right) = -1$, ou $p \equiv 1 \pmod{4}$ com $\left(\frac{-k}{p}\right)_4 = -1$. Isto conduz, designando ainda por $P(n)$ o número de primos da sucessão dada não superiores a n , a escrever

$$P(n) \sim l \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 3} \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \cdot \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{4}{p}\right),$$

onde a congruência se refere ao módulo 4, σ percorre os primos ímpares não divisores de k de que $-k$ é resto quadrático, e p percorre os primos $\equiv 1 \pmod{4}$ não divisores de k de que $-k$ é resto biquadrático. Ora tem-se

$$\prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{4}{p}\right) = \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 1} \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \cdot \prod_{p' \leq n^\alpha} \frac{p'}{p'-2} \cdot \prod_{p \leq n^\alpha} \frac{p-4}{p-2},$$

onde a congruência se refere ao módulo 4, e p' percorre os primos $\equiv 1 \pmod{4}$ não divisores de k de que $-k$ é resto quadrático mas não biquadrático;

portanto

$$\prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{4}{p}\right) = \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 1} \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \cdot \prod_{p' \leq n^\alpha} \left(1 + \frac{2}{p'-2}\right) \cdot \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{2}{p-2}\right) = \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 1} \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \cdot \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 1} \left\{1 - \left(\frac{-k}{\sigma}\right)_4 \frac{2}{\sigma-2}\right\}.$$

Por conseguinte é

$$P(n) \sim l \left(1 - \frac{1}{2}\right) \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\sigma \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right) \cdot \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 1} \left\{1 - \left(\frac{-k}{\sigma}\right)_4 \frac{2}{\sigma-2}\right\},$$

o que, segundo cálculos efectuados no n.º 6, dá

$$P(n) \sim l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\} \cdot \prod_{n^\alpha \geq \sigma \equiv 1} \left\{1 - \left(\frac{-k}{\sigma}\right)_4 \frac{2}{\sigma-2}\right\}$$

e portanto, analogamente a n.ºs precedentes,

$$P(n) \sim \frac{\sqrt[4]{n}}{\log n} \cdot \prod_{3 \leq p \nmid k} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\} \cdot \prod_{\substack{p \equiv 1 \pmod{4} \\ \left(\frac{-k}{p}\right) = 1, p \nmid k}} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right)_4 \frac{2}{p-2}\right\},$$

fórmula assintótica conjectural para o número de primos x^4+k ($-k$ não quadrado) não superiores a n . Em particular é

$$P(n) \sim \frac{\sqrt[4]{n}}{\log n} \cdot \prod_{p \geq 3} \left\{1 - \left(\frac{-1}{p}\right) \frac{1}{p-1}\right\} \cdot \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left\{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)_4 \frac{2}{p-2}\right\}$$

a fórmula assintótica conjectural para o número de primos x^4+1 não superiores a n . Analogamente a estas fórmulas, que julgamos novas, muitas outras poderiam obter-se.

9.

O exemplo que segue pertence a um tipo de problemas que, ao que cremos, não tem sido considerado, salvo no caso linear de que demos o exemplo do n.º 4. Seja dada a equação $y = x^2 + k$, e ocupemo-nos do número de soluções dela com $x = 1, 2, \dots, l$ nas quais x e y sejam ambos primos (o exemplo do n.º 4 equivale a problema análogo para a equação $y = x + k$. Seja $n = l^2 + k$. Como no n.º 6, k será inteiro diferente de zero e de quadrado negativo; e será par, para que x e y possam ser simultaneamente ímpares; além disso será $k \not\equiv -1 \pmod{3}$, senão $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$ daria $y \equiv 0 \pmod{3}$, isto é um dos dois números x, y seria necessariamente divisível por 3. As congruências $x \equiv 0 \pmod{p}$ e $x^2 + k \equiv 0 \pmod{p}$, onde p é primo, têm uma só e mesma raiz se $p=2$ ou $3 \leq p | k$; se $3 \leq p \nmid k$ têm ao todo três raízes diferentes quando $\left(\frac{-k}{p}\right) = 1$, e uma só raiz (da primeira) quando $\left(\frac{-k}{p}\right) = -1$. Podemos pois escrever, designando por $R(n)$ o número de soluções em questão,

$$R(n) \sim l \left(1 - \frac{1}{2}\right) \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p | k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\varpi}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{3}{\varpi}\right),$$

onde, como no n.º 6, ϖ ou ϖ' percorrem respectivamente os primos ímpares não divisores de k de que $-k$ é, ou não, resto quadrático; portanto

$$\begin{aligned} R(n) &\sim \frac{l}{2} \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p | k}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{\varpi' \leq n^\alpha} \frac{\varpi'-1}{\varpi'-2} \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \frac{\varpi-3}{\varpi-2} = \frac{l}{2} \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p | k}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{\varpi' \leq n^\alpha} \left(1 + \frac{1}{\varpi'-2}\right) \cdot \prod_{\varpi \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\varpi-2}\right) = \\ &= 2l \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-2}\right\}, \end{aligned}$$

e tem-se por conseguinte a fórmula assintótica conjectural

$$R(n) \sim \frac{2\sqrt{n}}{\log^2 n} \cdot \prod_{p \leq 3} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} \cdot \prod_{3 \leq p \nmid k} \left\{1 - \left(\frac{-k}{p}\right) \frac{1}{p-2}\right\} \cdot \prod_{3 \leq p | k} \frac{p-1}{p-2}$$

para o número de soluções de $y = x^2 + k$ (k inteiro diferente de zero e de quadrado negativo, par e $\not\equiv -1 \pmod{3}$) não superiores a n , com x e y ambos primos.

10.

Consideremos finalmente as diversas representações dum número ímpar como soma de três números ímpares. Pode figurar-se cada uma destas representações por um ponto do plano, cujas coordenadas trilineares são as três parcelas respectivas. Sendo $n > 0$ o número ímpar dado, e adoptando como triângulo fundamental um triângulo equilátero cujos vértices são os pontos, $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$, e $(0, 0, n)$, então os pontos que figuram aquelas representações são os duma rede de triângulos equiláteros, constituída por rectas paralelas aos lados do triângulo fundamental cujas distâncias a estes lados são os números ímpares; e os pontos da rede interiores ao triângulo fundamental figuram as representações de n como soma de três números ímpares positivos. A estas últimas representações nos limitaremos aqui.

Suprimindo os pontos da rede situados nas rectas cujas distâncias aos lados do triângulo fundamental são os primos ímpares não superiores a n^α e seus múltiplos, restam os pontos figurativos das representações de n como soma de três parcelas, cada uma das quais é um primo de intervalo $(n^\alpha, n-2)$ ou a unidade. O número de pontos suprimidos utilizando um só primo ímpar $p \leq n^\alpha$ é, como se verifica sem dificuldade:

a) para $n = hp + 2k$, h inteiro, $k = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$,

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 3 \left\{ k + (k+p) + \dots + \left(k + \frac{h-1}{2} p\right) \right\} - \\ &= 3 \left(1 + 2 + \dots + \frac{h-1}{2} \right) = 3(p-1) \frac{h^2-1}{8} + \\ &+ 3k \frac{h+1}{2}; \end{aligned}$$

b) para $n = hp + 2k$, h inteiro, $k = \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \dots, p-1$,

$$\sigma_b = 3 \left\{ k + (k+p) + \dots + \left(k + \frac{h-1}{2} p\right) \right\} -$$

$$-3 \left(1 + 2 + \dots + \frac{h+1}{2} \right) = 3(p-1) \frac{h^2-1}{8} + \\ + 3(k-1) \frac{h+1}{2};$$

c) para $n = hp$, k inteiro,

$$\sigma_c = 3 \left(p + 2p + \dots + \frac{h-1}{2} p \right) - \\ - 2 \left(1 + 2 + \dots + \frac{h-1}{2} \right) = (3p-2) \frac{h^2-1}{8}.$$

O número total de pontos da rede é o número triangular de ordem $\frac{n-1}{2}$, isto é $\frac{n^2-1}{8}$. Portanto

o quociente da divisão do número de pontos não suprimidos, utilizando só o primo p , pelo número total é, em cada um dos três casos precedentes, para $n \rightarrow \infty$:

$$v_a = 1 - \frac{\sigma_a}{n^2-1} = 1 - \frac{3(p-1)(h^2-1) + 12k(h+1)}{p^2 h^2 + 4kph + 4k^2 - 1} = \\ = 1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} + O\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$v_b = 1 - \frac{\sigma_b}{n^2-1} = 1 - \frac{3(p-1)(h^2-1) + 12(k-1)(h+1)}{p^2 h^2 + 4kph + 4k^2 - 1} = \\ = 1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} + O\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$v_c = 1 - \frac{\sigma_c}{n^2-1} = 1 - \frac{(3p-2)(h^2-1)}{p^2 h^2 - 1} = 1 - \frac{3}{p} + \\ + \frac{2}{p^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Atribuindo pois a um ponto da rede, não suprimido utilizando um só primo ímpar p , a probabilidade v_a ou v_b , conforme o caso, se $p \nmid n$, ou a probabilidade v_c se $p|n$, a estimativa estatística do número de pontos, não suprimidos utilizando todos os primos ímpares não superiores a n^α , é

$$\frac{n^2-1}{8} \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid k}} \left\{ 1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \cdot \\ \cdot \prod_{n^\alpha \geq p|n} \left\{ 1 - \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \sim$$

$$\sim \frac{n^2}{8} \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq n^\alpha \\ p \nmid n}} \left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} \right) \cdot \prod_{n^\alpha \geq p|n} \left(1 - \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2} \right) = \\ = \frac{n^2}{8} \cdot \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} \right) \cdot \prod_{n^\alpha \geq p|n} \frac{p^2-3p+2}{p^2-3p+3} \\ = \frac{n^2}{8} \cdot \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \cdot \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left\{ 1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right\} \cdot \\ \cdot \prod_{n^\alpha \geq p|n} \frac{p^2-3p+2}{p^2-3p+3} \\ = n^2 \prod_{p \leq n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^3 \cdot \prod_{3 \leq p \leq n^\alpha} \left\{ 1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right\} \cdot \\ \cdot \prod_{n^\alpha \geq p|n} \frac{p^2-3p+2}{p^2-3p+3};$$

assintoticamente igual a este resultado devemos considerar também, portanto, o número de representações de n como soma de três parcelas, cada uma das quais é um primo do intervalo $(n^\alpha, n-2)$ ou a unidade, e por conseguinte o número de representações de n como soma de três primos ímpares. Designando este último número por $R(n)$ tem-se pois

$$R(n) \sim \frac{n^2}{\log^3 n} \cdot \prod_{p \geq 3} \left\{ 1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right\} \cdot \prod_{p|n} \frac{p^2-3p+2}{p^2-3p+3},$$

que é a fórmula assintótica de HARDY e LITTLEWOOD que VINOGRADOV conseguiu demonstrar rigorosamente. O facto de, não só nos exemplos considerados nos n.ºs 2 e 3 mas também neste, se obter uma fórmula assintótica exacta confere alto grau de probabilidade, cremos nós, à exactidão das fórmulas assintóticas conjecturais obtidas nos n.ºs 4-9, e de muitas outras que pelo mesmo processo se podem obter, e portanto da hipótese que a este processo serve de base.¹⁾

1) Vários n.ºs do presente artigo foram extraídos, com modificações, duma comunicação que apresentámos ao Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências reunido em Lisboa em 1950, ainda não publicada.

Sobre la metrización de los espacios cuasi-métricos^(*)

por Manuel Balanzat

Univ. Nac. de Cuyo — San Luis — Argentina

1. — Empezemos recordando las definiciones de espacios con métrica débil y de espacios cuasimétricos:

Si sobre un conjunto E se define para cada par ordenado (x, y) de elementos de E un número real $\delta(x, y) \geq 0$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$\delta(x, x) = 0 \quad \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$$

y si se define el sistema fundamental de entornos de un punto a de E como el conjunto de los esferoides abiertos de centro a (es decir los conjuntos de puntos x tales que $\delta(a, x) < \lambda$ en donde λ toma valores reales), se dice entonces que E es un espacio con métrica débil.

Si se supone además que $\delta(x, y) = 0$ implica $x = y$, el espacio se denomina *cuasimétrico*; si se añade finalmente la condición de simetría $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ obtenemos el caso clásico de los espacios métricos.

Es inmediato que si un espacio con métrica débil cumple el axioma de FRÉCHET de los espacios accesibles es un espacio cuasimétrico y, recíprocamente, todo espacio cuasimétrico es accesible.

En una memoria («Sur les espaces à métrique faible», *Portugaliae Mathematica*, vol. 4, fas. 1, 1943) HUGO RIBEIRO planteó el problema de las relaciones entre los espacios con una métrica débil y los espacios métricos, y en particular planteó el problema de si todo espacio con métrica débil que fuese normal sería metrizable. Empezaremos por dar una solución negativa al problema planteado por HUGO RIBEIRO dando: un ejemplo de espacio cuasimétrico completamente normal y no metrizable.

Para ello consideremos el conjunto de los números reales del intervalo $(0 \leq x \leq 1)$ y definamos una cuasidistancia $q(x, y)$ de la forma siguiente:

$$q(x, y) = \begin{cases} |y - x| & \text{si } x \leq y \\ 1 & \text{si } x > y \end{cases}$$

Es claro que $q(x, y)$ es siempre mayor o igual a cero y es igual a cero cuando y sólo cuando $x = y$.

Pasemos ahora a probar la condición $q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$; la condición se cumple siempre que sea $x = y$, o $x = z$, o $y = z$; consideremos ahora los otros seis casos posibles:

$$x < y < z: q(x, y) = |x - y|; q(x, z) = |x - z|; q(z, y) = 1$$

$$x < z < y: q(x, y) = |x - y|; q(x, z) = |x - z|; q(z, y) = |z - y|$$

$$y < x < z: q(x, y) = 1; q(x, z) = |x - z|; q(z, y) = 1$$

$$y < z < x: q(x, y) = 1; q(x, z) = 1; q(z, y) = 1$$

$$z < x < y: q(x, y) = |x - y|; q(x, z) = 1;$$

$$q(z, y) = |z - y|;$$

$$z < y < x: q(x, y) = 1; q(x, z) = 1; q(z, y) = |z - y|$$

y vemos que en todos los casos se cumple la condición.

Es pues un espacio cuasimétrico en el que los entornos de centro a y radio r son los intervalos $a \leq x < r$.

Vamos a probar ahora que E es completamente normal: para ello consideremos dos conjuntos A y B no mutuamente conexos.

Si $a \in A$, como $A \cap \bar{B}$ es vacío se puede determinar un esferoide abierto $E(a)$ de centro a que no contenga ningún punto de B . Análogamente para todo $b \in B$ se puede determinar un esferoide abierto $E(b)$ de centro b y tal que no contenga ningún punto de A .

Tomemos los conjuntos

$$A^* = \bigcup_{a \in A} E(a) \quad B^* = \bigcup_{b \in B} E(b)$$

A^* y B^* son conjuntos abiertos que contienen respectivamente a A y B ; si probamos que carecen de puntos comunes habremos probado que E es completamente normal, en efecto: para probar que $A^* \cap B^*$ es vacío basta probar que cualesquiera que sean $E(a)$ y $E(b)$, el conjunto $E(a) \cap E(b)$

(*) Recibido en 26 de Noviembre de 1951.

es vacío. Si $a \in A$ y $b \in B$ tiene que ser $a \neq b$; supongamos $a < b$. Sea r el radio de $E(a)$, como $b \notin E(a)$ es $b \geq a + r$; ahora bien, todo $x \in E(a)$ es menor que $a + r$ y todo $y \in E(b)$ es mayor o igual que b , luego tenemos

$$x < a + r \leq b \leq y$$

es decir que x es distinto de y como queríamos demostrar.

Para probar que E no es metrizable, probaremos que tiene un conjunto denso numerable y carece de base numerable.

La primera parte es inmediata ya que el conjunto de los puntos racionales del intervalo es denso en E puesto que en todo entorno de cualquier x de E hay puntos racionales del intervalo.

Vamos a demostrar ahora que E carece de base numerable. Sea \mathcal{Q} una base; para cada $a \in E$ tiene que existir un $V(a)$ de la base contenido en $a \leq x < 1$ y tal que $a \in V(a)$; tomemos ahora dos puntos distintos a y b y supongamos $a < b$, es claro que entonces $a \notin V(b)$ luego $V(a) \neq V(b)$, cualesquiera que sean a y b .

Hemos hecho así corresponder a cada número real de $(0 \leq x < 1)$ un elemento de \mathcal{Q} de forma tal que a números distintos correspondan elementos distintos, luego, la base \mathcal{Q} no puede ser nunca numerable.

2.— Si recordamos que todo espacio topológico de HAUSDORFF, compacto y con base numerable es metrizable, cabe preguntarse: suprimiendo alguna de estas condiciones y reemplazándola por la condición de que el espacio sea cuasimétrico, se obtendrá un espacio métrizable?

Esto es cierto cuando la condición que se suprime es la de base numerable, ya que HUGO RIBEIRO demostró (loc cit.) que todo espacio cuasimétrico de HAUSDORFF y compacto es metrizable. Vamos a ver en cambio que ello deja de ser cierto para los espacios cuasimétricos, compactos y con base numerable, así como para los espacios cuasimétricos de HAUSDORFF y con base numerable.

Empezaremos por dar un ejemplo de un espacio cuasimétrico, compacto y con base numerable que no es metrizable.

Para ello tomemos un conjunto numerable cualquiera de elementos distintos

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

y definamos la cuasidistancia de la forma siguiente:

$$q(a_n, a_p) = \begin{cases} \frac{1}{n+p} & \text{si } n < p \\ 0 & \text{si } n = p \\ 1 & \text{si } n > p \end{cases}$$

Como $q(a_n, a_p)$ es siempre ≥ 0 y es igual a cero si, y sólo si, $n=p$, para probar que es una cuasidistancia bastará probar que $q(a_n, a_p) \leq q(a_n, a_r) + q(a_r, a_p)$; consideremos los seis casos posibles para puntos distintos:

$$n < p < r: q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p}; q(a_n, a_r) = \frac{1}{n+r};$$

$$q(a_r, a_p) = 1$$

$$n < r < p: q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p}; q(a_n, a_r) = \frac{1}{n+r};$$

$$q(a_r, a_p) = \frac{1}{r+p}$$

$$p < r < n: q(a_n, a_p) = 1; q(a_n, a_r) = 1; q(a_r, a_p) = 1$$

$$p < n < r: q(a_n, a_p) = 1; q(a_n, a_r) = \frac{1}{n+r};$$

$$q(a_r, a_p) = 1$$

$$r < p < n: q(a_n, a_p) = 1; q(a_n, a_r) = 1;$$

$$q(a_r, a_p) = \frac{1}{r+p}$$

$$r < n < p: q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p}; q(a_n, a_r) = 1;$$

$$q(a_r, a_p) = \frac{1}{r+p}$$

La propiedad es evidente en todo los casos, excepto en el segundo y para éste se ve fácilmente ya que se tiene

$$r < p; n+r < n+p; \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+r};$$

$$q(a_n, a_p) < q(a_n, a_r)$$

y por consiguiente

$$q(a_n, a_p) < q(a_n, a_r) + q(a_r, a_n).$$

Se ve fácilmente que el espacio tiene una base numerable: la formada por los esferoides con centros en cada punto y radios racionales.

Vamos ahora a probar que el espacio es compacto. Como es numerable, en él coinciden los conceptos de compacto y perfectamente compacto según FRÉCHET (no es en cambio compacto en el sentido de BOURBAKI, ya que si bien tiene la propiedad de BOREL-LEBESGUE, no es un espacio de HAUSDORFF). Basta, pues, probar que todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Sea F el conjunto infinito y a_n un punto cualquiera de F ; consideremos un esferoide E de centro a_n y radio r cualquiera.

Sea p un número natural tal que $p > n$ y $p+n > \frac{1}{r}$.

Como F es infinito, en él hay un punto a_q tal que $q \geq p$. Entonces será $q > n$ y tendremos

$$q(a_n, a_q) = \frac{1}{n+q} < \frac{1}{n+p} < r$$

luego $a_q \in E$ y a_n es punto de acumulación de F . Vemos así que todos los puntos del espacio son puntos de acumulación de cualquier subconjunto de él que sea infinito luego es compacto.

Para probar que no es metrizable probaremos que no es un espacio de HAUSDORFF, en efecto: sean a_m y a_n dos puntos del espacio y V y W dos esferoides de centros a_m y a_n , y radios r y s respectivamente. Tomemos un número natural p tal que se tenga: $p > n$, $p+n > \frac{1}{r}$, $p > m$, $p+m > \frac{1}{s}$, entonces

$$q(a_m, a_p) = \frac{1}{m+p} < r \text{ luego } a_p \in V$$

$$q(a_n, a_p) = \frac{1}{n+p} < s \text{ luego } a_p \in W$$

y como esto es válido cualesquiera que sean r y s se deduce que el espacio no es de HAUSDORFF.

3. — Pasemos ahora a dar un ejemplo de un espacio cuasimétrico, de HAUSDORFF, con base numerable y no metrizable.

Para ello tomemos el conjunto de los números algebraicos del intervalo $(0 < x < 1)$ y definamos de la forma siguiente una cuasidistancia:

$q(x, y) = 0$ para $x = y$ y si $x \neq y$, entonces designando por r los números racionales y por i los irracionales

$$q(r^I, r^{II}) = |r^I - r^{II}|; \quad q(i, r) = |i - r|;$$

$$q(r, i) = 1; \quad q(i^I, i^{II}) = 1.$$

Probemos que es una cuasidistancia demostrando la propiedad $q(x, y) \leq q(x, z) + q(z, y)$. Como la cuasidistancia es siempre menor o igual que 1, la propiedad se cumple siempre que y o z son irracionales; si ambos son racionales se tiene, cualquiera que sea x

$$q(x, y) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y| = q(x, z) + q(z, y).$$

El espacio es pues cuasimétrico y los esferoides abiertos de centros a y radio h están constituidos por a y los puntos racionales x tales que $|x - a| < h$.

Como en el ejemplo anterior se ve que el espacio, siendo cuasimétrico y numerable, tiene una base numerable.

Tomamos ahora dos puntos cualesquiera x e y distintos y sea $|x - y| = h$. Tomando dos esferoides de centros x e y y radios menores que la mitad de h , se ve inmediatamente que carecen de puntos

comunes, lo que prueba que el espacio es de HAUSDORFF.

Para probar que no es metrizable probaremos que no es regular. En efecto: sea M el conjunto de los números algebraicos irracionales. M es cerrado, en efecto: sea $r \notin M$, entonces r es racional y cualquier esferoide de centro r sólo contiene puntos racionales, es decir no contiene ningún punto de M , luego cualquiera, que sea r no perteneciente a M , no puede ser punto de acumulación de M , luego M es cerrado.

Sea ahora a un punto racional y V un esferoide de centro a y radio h cualquiera, en el intervalo $|x - a| < h$ hay puntos irracionales (que no pertenecen a V); sea i uno de estos puntos irracionales. Todo conjunto abierto que contenga a M debe contener un esferoide de centro i , es decir los puntos racionales de un intervalo de centro i , luego tiene que contener puntos de V ; ello nos prueba que el espacio no es regular, y por consiguiente no es metrizable.

4. — Un espacio cuasimétrico completamente regular puede muy bien no ser metrizable, como lo prueba el primer ejemplo que hemos dado, pero si modificamos la condición de completa regularidad se puede obtener una condición suficiente para que el espacio sea metrizable.

Una función $y = f(x)$ definida en un espacio cuasimétrico y tomando valores reales es continua en un conjunto F del espacio E , si para cada punto a de F y cada ϵ real existe un μ real tal que si $q(a, x) < \mu$ se tiene $|f(a) - f(x)| < \epsilon$. Esta definición de continuidad es, evidentemente, un caso particular de la definición general de función continua en los espacios topológicos.

El número μ depende de a y de ϵ ; por analogía con el caso de los espacios métricos diremos que la función es *uniformemente continua* si se puede encontrar un μ que sólo dependa de ϵ , es decir si para todo ϵ existe $\mu(\epsilon)$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para todo par de puntos (x, y) tales que $q(x, y) < \mu(\epsilon)$.

Vamos a probar ahora que: *si un espacio E cuasimétrico es tal que para todo conjunto cerrado A y todo punto a no perteneciente a A , existe en E una función numérica uniformemente continua, tomando sus valores en el intervalo $(0, 1)$ y tal que $f(a) = 0$ y $f(x) = 1$ para todo x de A , entonces el espacio es metrizable.*

Para probar este teorema nos apoyaremos en el siguiente resultado de NIEMYZKI («On the third axiom of metric space», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 29, 1927):

«Sea E un conjunto en el que se hace correspon-

der a cada par ordenado (x, y) de puntos de E un número real $\delta(x, y) \geq 0$ sujeto a las condiciones siguientes:

1.º $\delta(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

2.º $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

3.º Para cada a de E y cada número real $\varepsilon > 0$, existe un $\mu(a, \varepsilon)$, tal que si $\delta(a, b) < \mu(a, \varepsilon)$ y $\delta(c, b) < \mu(a, \varepsilon)$, entonces $\delta(a, c) < \varepsilon$.

Tomemos como sistema fundamental de entornos de cada punto a de E los esferoides abiertos de centro a (es decir el conjunto de puntos x de E tales que $\delta(a, x) < r$, para los valores reales de r).

Entonces el espacio topológico así obtenido es metrizable.

Sea E el espacio cuasimétrico del teorema; tomemos $\delta(x, y)$ igual a la menor de las cuasidistancias $q(x, y)$ y $q(y, x)$. Es inmediato que $\delta(x, y)$ cumple las condiciones 1.º y 2.º del teorema de NIEMYTZKI; vamos a probar que también cumple la 3.º. En efecto:

Sea a de E y $\varepsilon > 0$. Tomemos el esferoide abierto de centro a y radio ε . Sea M el conjunto cerrado complementario de dicho esferoide. Por hipótesis existe una función $f(x)$ uniformemente continua en E y tal que $f(x) = 1$ para todo x de M (es decir para los x tales que $q(a, x) \geq \varepsilon$) y $f(a) = 0$.

Llamemos $\mu(a, \varepsilon)$ al número μ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ para $q(x, y) < \mu(a, \varepsilon)$.

Como $\delta(x, y) \leq q(x, y)$ tendremos $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ para $\delta(x, y) < \mu(a, \varepsilon)$.

Tomemos ahora dos puntos b y c tales que $\delta(a, b) < \mu(a, \varepsilon)$ y $\delta(b, c) < \mu(a, \varepsilon)$; se tendrá

$$|f(a) - f(b)| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |f(b) - f(c)| < \frac{1}{2}, \quad \text{y como}$$

$f(a) = 0$, se tiene

$$|f(c)| = |f(a) - f(c)| \leq |f(a) - f(b)| + |f(b) - f(c)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

y de acá se deduce que $\delta(a, c)$ es menor que ε pues si fuese $\delta(a, c) \geq \varepsilon$ sería $q(a, c) \geq \varepsilon$ y entonces sería $f(c) = 1$.

Vemos pues que se cumple la condición 3.º del teorema de NIEMYTZKI; luego E con la topología introducida por $\delta(x, y)$ es metrizable. Queda ahora por probar que la topología introducida por $\delta(x, y)$ es la misma que la introducida por $q(x, y)$. En efecto:

Sea a un punto cualquiera de E y $Q(r)$ el esferoide definido por la condición $q(a, x) < r$; como $\delta(a, x) \leq q(a, x)$, $Q(r)$ contiene el esferoide $D(r)$ definido por la condición $\delta(a, x) < r$.

Tomemos ahora el esferoide $D(r)$ y sea $f(x)$ la función uniformemente continua en E y tal que $f(a) = 0$ y $f(x) = 1$ para $q(a, x) \geq r$. Sea μ el número real tal que $|f(x) - f(y)| < 1$ para $q(x, y) < \mu$.

Tomemos ahora el esferoide $Q(\mu)$ definido por la condición $q(a, x) < \mu$, y sea x uno cualquiera de sus puntos; como $q(a, x) < \mu$ se tiene: $|f(x)| = |f(a) - f(x)| < 1$, luego $q(a, x) < r$ ya que si fuese $q(a, x) \geq r$ sería $f(x) = 1$; como $\delta(a, x) \leq q(a, x) < r$ se deduce que x pertenece a $D(r)$, y como x es cualquiera se deduce que $Q(\mu)$ está contenido en $D(r)$.

Queda así probada la identidad de las dos topologías y por consiguiente demostrado el teorema.

Les filtres fermés des espaces compacts

par A. A. Monteiro

Univ. Nacional de Cuyo — San Juan — Argentina

La famille Φ_R de tous les filtres (1) d'un réticulé R a des propriétés qui dépendent des propriétés de R .

ATUO KOMATU [1] a déterminé les propriétés caractéristiques de l'ensemble Φ_R dans le cas où R est un réticulé quelconque. D'autres résultats analogues ont été indiqués par GARRETT BIRKHOFF et ORRIN FRINK [2].

LEOPOLDO NACHBIN [3] a généralisé et complété les résultats précédents en indiquant, en particulier, les propriétés caractéristiques de la famille de tous les filtres d'une algèbre de BOOLE (2) et d'une algèbre de BOOLE généralisée.

Soit \mathcal{F} la famille de tous les ensembles fermés d'un espace compact I (nous supposons dans cette note, qu'un espace compact vérifie l'axiome d'HAUSDORFF). Les filtres de \mathcal{F} seront appelés des *filtres fermés* de l'espace topologique I (PIERRE SAMUEL [4]).

Nous nous proposons d'indiquer dans cette note, des propriétés caractéristiques du réticulé $\Phi_{\mathcal{F}}$. Pour cela rapellons les définitions suivantes:

A) Un élément d'un réticulé R sera dit *inférieurement compact* (ou plus simplement *compact*) (L. NACHBIN [3]) si étant donnée une famille, non vide, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ d'éléments de R telle que

$$\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \subseteq x$$

il existe une partie finie, non vide, A_0 de A telle que

$$\bigcap_{\alpha \in A_0} x_\alpha \subseteq x$$

B) Un réticulé R ayant un premier élément (0) sera dit *compact* si 0 est dit compact.

C) Un *atome* d'un réticulé R (ayant un premier élément) est un élément $a \in R$ tel que: 1.º) $a \neq 0$, 2.º) si $x \subseteq a$, alors ou $x = 0$ ou $x = a$.

D) Un élément x de R sera dit *atomique* s'il existe une famille, non vide, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$, d'atomes de R telle que

$$\bigcup_{\alpha \in A} a_\alpha = x.$$

E) Nous dirons qu'un réticulé R , ayant un premier et un dernier élément 1, vérifie l'*axiome de la normalité*, si étant donnés $a, b \in R$ tels que $a \cap b = 0$, il existe des éléments $a_1, b_1 \in R$ tels que $a \cap b_1 = a_1 \cap b = 0$, $a_1 \cup b_1 = 1$ (Voir H. WALLMAN [5]).

Si nous exigeons, en outre, que les éléments a_1, b_1 vérifient la condition $a_1 \cap b_1 = 0$, nous dirons que R vérifie l'*axiome de la disconnexion normale*.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant:

THÉOREME — Pour qu'un réticulé Φ soit isomorphe à la famille $\Phi_{\mathcal{F}}$ de tous les filtres fermés d'un espace compact il faut et il suffit que

- I) Φ soit distributif, complet et compact.
- II) Tout élément de Φ soit le produit d'éléments compacts. (1)
- III) Les éléments compacts de Φ , distincts de 0 coïncident avec les éléments atomiques de Φ .
- IV) Φ vérifie l'axiome de la normalité.

Si nous voulons caractériser la famille de tous les filtres fermés d'un espace métrisable compact ξ , il suffit de remplacer l'axiome II par:

II') Il existe une famille dénombrable K , d'éléments compacts de Φ , telle que tout élément de Φ soit le produit d'éléments de K .

(1) Un filtre d'un réticulé R est une partie, non vide, F de R telle que: 1.º) si $x, y \in F$ alors $x \cap y \in F$; 2.º) Si $x \subseteq y$ et $x \in F$ alors $y \in F$. Un filtre F est propre si $F \neq R$.

(2) ou, ce que revient au même, de la famille de tous les systèmes deductifs d'une Algèbre de Boole.

(1) Nous disons que x est le produit des éléments x_i si $x = \bigcap_i x_i$.

Il est intéressant de remarquer que $\Phi_{\mathcal{F}}$ ne peut vérifier

L'AXIOME DE LA DISJONCTION DE WALLMAN, [5].

Si $a, b \in R$ sont tels que $a \cap b \neq a$ il existe un élément tel que $a \cap w \neq 0$, $w \cap b = 0$

à moins que l'espace compact donné I soit formé par un nombre fini de points.

Pour obtenir une caractérisation de la famille $\Phi_{\mathcal{F}}$ de tous les filtres fermés d'un espace compact totalement disconnexe il suffit de remplacer dans l'énoncé du théorème précédent la condition IV par

IV') Φ vérifie l'axiome de la disconnexion normale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOMATU (ATUO) — On a characterisation of join homomorphic transformation-lattice. *Proc. Imp. Acad. Tokyo.* **19** (1943), pp. 119-124.
- [2] BIRKHOFF (GARRETT) and FRINK JR. (ORRIN) — Representation of lattices by sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), pp. 299-315.
- [3] NACHBIN (LEOPOLDO) — On a characterisation of the lattice of all ideals of a Boolean Ring. *Fundamenta Mathematicae.* **36** (1949) pp. 137-142.
- [4] SAMUEL (PIERRE) — Ultrafilters and compactification of Uniform Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948) pp. 100-132.
- [5] WALLMANN (HENRI) — Lattices and Topological Spaces. *Ann. of Math.* **39** (1938) pp. 112-126.

Integral de Riemann-Stieltjes num espaço localmente compacto

Ruy Luís Gomes

Porto

O Curso de *Analyse Infinitesimal* de Gomes Teixeira, cuja primeira edição foi publicada no Porto em 1889, assenta, no que respeita a Integração, na definição de CAUCHY, do integral de uma função contínua num intervalo $[a, b]$.

Ora, estando a «Gazeta de Matemática» a organizar um número comemorativo do 1.º centenário do nascimento do grande Mestre e Investigador, parece-nos de verdadeiro interesse para os estudantes das nossas Escolas Superiores, uma exposição simples e actualizada da noção de integral, tendo precisamente como ponto de partida a definição de CAUCHY.

Assim, este artigo trata no essencial, do prolongamento por continuidade do integral de CAUCHY; mas de modo a abranger o integral de RIEMANN e o integral de STIELTJES. E ainda com a vantagem didáctica de utilizar um método que nos conduz directamente, ao integral de LEBESGUE-STIELTJES num espaço localmente compacto, ou seja, às mais modernas teorias da integração.

Resumo

Constroi-se a noção de integral de RIEMANN-STIELTJES de uma função limitada, de suporte compacto em E , pelo prolongamento por continuidade de uma funcional linear e não-negativa no sub-espaço L das funções contínuas, de suporte compacto em E . Para isso introduz-se uma topologia conveniente no espaço \mathcal{F} das funções limitadas, de suporte compacto e recorre-se ao teorema fundamental do prolongamento por continuidade⁽¹⁾. Dá-se uma condição necessária e suficiente de integrabilidade em termos de medida de LEBESGUE-STIELTJES. Mostra-se que a definição de função integrável coincide com a definição clássica de STIELTJES quando E se reduz a um intervalo fechado de R^1 . Estende-se a definição ao caso de a

funcional ser linear e contínua (em termos da topologia da convergência uniforme).

Relaciona-se a definição do texto com a generalização de integral de STIELTJES, devida a POLLARD.

1. — O espaço topológico \mathcal{F} .

Designemos por E um espaço localmente compacto e por \mathcal{F} a classe das funções numéricas, limitadas, de suporte compacto⁽²⁾ em E .

PROPOSIÇÃO 1. \mathcal{F} é um espaço de RIESZ⁽³⁾ (espaço vectorial reticulado).

Na verdade se f_1, f_2 pertencem a \mathcal{F} , o mesmo sucede a $c_1 f_1 + c_2 f_2$, a $f_1 \cap f_2$ e a $f_1 \cup f_2$, quaisquer que sejam os números reais c_1, c_2 .

As funções contínuas, de suporte compacto formam um sub-espaço (de RIESZ) de \mathcal{F} . Designá-lo-hemos por L .

Se E é compacto, \mathcal{F} coincide com a classe das funções limitadas e L com a das funções contínuas.

TEOREMA 1. A condição necessária e suficiente para que $f \in \mathcal{F}$, é que existam funções $\varphi_1 \leq \varphi_2$ de L , tais que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ para todo x de E .

Na verdade, se f admite o infimo l e o supremo L e é nula no complementar dum conjunto compacto $K \subset E$, podemos tomar $\varphi_1 = l \varphi_0$ e $\varphi_2 = L \varphi_0$, sendo φ_0 , contínua, de suporte compacto, igual à unidade em K ⁽⁴⁾.

Inversamente, de $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ deduz-se que $f \in \mathcal{F}$.

(¹) De suporte compacto, quer dizer, nulas no complementar de um conjunto compacto, que pode variar de função para função.

(²) Designação introduzido por DIEUDONNÉ [*Bull. Soc. Math. France*, t. 72, 1944, p. 193-194].

(³) Se E não é compacto tem-se $l \leq 0$ e $0 \leq L$. Por outro lado, dado um conjunto compacto, $K \subset E$, é sempre possível determinar uma função como φ_0 [cf. BOURBAKI, Livre III, Chap. IX, § 4, Cor. Prop. 4]. Se E é compacto, basta fazer $\varphi_1 = l$ $\varphi_2 = L$.

(¹) BOURBAKI — Livre III, Chap. I, § 6, p. p. 37-38 e RUY LUÍS GOMES «*Integral Lebesgue-Stieltjes*», J. I. M., Porto, 1952.

DEFINIÇÃO 1. Entende-se por *intervalo*, a classe das funções f de \mathcal{F} tais que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, sendo $\varphi_1 \leq \varphi_2$ duas funções de L . E representa-se pelo símbolo $[\varphi_1, \varphi_2]$.

DEFINIÇÃO 2. Entende-se por *vizinhança* de uma função f de \mathcal{F} , qualquer intervalo que contém f .

PROPOSIÇÃO 2. Estas vizinhanças transformam \mathcal{F} num espaço topológico (de KURATOWSKY).

Com efeito: 1) toda função $f \in \mathcal{F}$ admite uma vizinhança; 2) toda vizinhança de f contém f ; 3) dadas duas vizinhanças de f existe sempre uma vizinhança contida na intersecção daquelas. (3)

Daqui por deante interpretamos sempre \mathcal{F} como um espaço munido desta topologia. E é evidente que, segundo essa topologia, L é denso em \mathcal{F} , quer dizer, o fecho de L coincide com o próprio espaço \mathcal{F} :

2. — Integral superior e Integral inferior de Riemann-Stieltjes.

Representemos por $F(\varphi)$ uma funcional linear e não-negativa (6) em L , isto é, uma funcional definida em L e tal que

$$F(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 F(\varphi_1) + c_2 F(\varphi_2),$$

para $\varphi_1, \varphi_2 \in L$, c_1, c_2 números reais; $0 \leq F(\varphi)$ para $0 \leq \varphi$.

DEFINIÇÃO 3. Entende-se por *integral superior e integral inferior RIEMANN-STIELTJES* de uma função $f \in \mathcal{F}$, os números representados e definidos respectivamente por

$$\overline{F}(f) = \inf_{(V)} [\sup_{\varphi \in V} F(\varphi)], \quad \underline{F}(f) = \sup_{(V)} [\inf_{\varphi \in V} F(\varphi)]$$

sendo (V) a classe das vizinhanças de f .

TEOREMA 2. Os integrais — superior e inferior — são sempre finitos e, além disso, $\underline{F}(f) \leq \overline{F}(f)$, $0 \leq \underline{F}(f)$ e $0 \leq \overline{F}(f)$ para $0 \leq f$.

Que são finitos deduz-se imediatamente da monotonia (7) de $F(\varphi)$.

Vejamos agora a relação $\underline{F}(f) \leq \overline{F}(f)$. Como,

(3) Na verdade, reportando-nos às designações utilizadas no teorema 1, f admite a vizinhança $[\varphi_1, \varphi_2]$; toda vizinhança de f contém f por definição; se $[\varphi'_1, \varphi'_2]$ e $[\varphi''_1, \varphi''_2]$ são vizinhanças de f , o mesmo sucede a $[\varphi'_1 \cup \varphi''_1, \varphi'_2 \cap \varphi''_2]$, que está contida na intersecção daquelas.

(6) Se E se reduz a intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}^n$, $F(\varphi)$ pode ser, por exemplo, o integral de RIEMANN-STIELTJES da função contínua, φ , em ordem a uma qualquer função não-decrescente.

(7) Como $F(\varphi)$ é não-negativa, tem-se $F(\varphi_1) \leq F(\varphi_2)$ para $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

por definição, é sempre possível determinar vizinhanças V, V' , tais que $\underline{F}(f) < \inf_{\varphi \in V'} F(\varphi) + \varepsilon$, $\sup_{\varphi \in V''} F(\varphi) < \overline{F}(f) + \varepsilon$, construindo $V \subset V' \cap V''$, resulta

$$\underline{F}(f) < \inf_{\varphi \in V'} F(\varphi) + \varepsilon < \inf_V F(\varphi) + \varepsilon < \sup_{\varphi \in V''} F(\varphi) + \varepsilon < \overline{F}(f) + 2\varepsilon,$$

onde

$$\underline{F}(f) \leq \overline{F}(f).$$

Finalmente, se $0 \leq f$, a função f admite uma base de vizinhanças em que só figuram funções $\varphi \in L^+$, isto é, da classe das funções de L que são não negativas. E este facto combinado com $0 \leq F(\varphi)$ para $\varphi \in L^+$, mostra-nos que $0 \leq \underline{F}(f)$, $0 \leq \overline{F}(f)$.

PROPOSIÇÃO 3. Tem-se $\overline{F}(f) = \overline{F}(\bar{f}) = \inf_{\bar{f} \leq \varphi} F(\varphi)$,

$\underline{F}(f) = \underline{F}(\underline{f}) = \sup_{\varphi \leq \underline{f}} F(\varphi)$, designando por \underline{f}, \bar{f} os limites inferior e superior, de f .

Na verdade como V é da forma $[\varphi_1, \varphi_2]$ e $\inf_{\varphi \in V} F(\varphi) = F(\varphi_1)$, $\sup_{\varphi \in V} F(\varphi) = F(\varphi_2)$, vem $\overline{F}(f) = \inf_{\varphi \in V} F(\varphi) = \inf_{\bar{f} \leq \varphi} F(\varphi)$ e $\underline{F}(f) = \sup_{\varphi \in V} F(\varphi) = \sup_{\varphi \leq \underline{f}} F(\varphi)$.

Recorrendo ao integral de LEBESGUE-STIELTJES (8), — que designaremos pela letra F , ainda se pode escrever

$$\overline{F}(f) = \overline{F}(\bar{f}) = F(\bar{f})$$

e

$$\underline{F}(f) = \underline{F}(\underline{f}) = F(\underline{f}),$$

pois tanto \bar{f} como \underline{f} são somáveis (4).

COROLÁRIO 1. $\overline{F}(f) - \underline{F}(f) = \overline{F}(\omega) = F(\omega)$, sendo ω a oscilação pontual de $f \in \mathcal{F}$.

É uma consequência imediata da aditividade de F na classe das funções somáveis, combinada com a propriedade $\overline{F}(f) = \overline{F}(\bar{f})$ e com $\omega = \bar{\omega} = \bar{f} - \underline{f}$.

COROLÁRIO 2. Sejam f_1, f_2 duas funções quaisquer de \mathcal{F} . Tem-se $\overline{F}(f_1 + f_2) \leq \overline{F}(f_1) + \overline{F}(f_2)$ e $\underline{F}(f_1) + \underline{F}(f_2) \leq \underline{F}(f_1 + f_2)$.

Basta recorrer à Proposição 2 e à aditividade de $F(\varphi)$ em L .

(8) Cf. H. CARTAN — Sur les Fondements de la Théorie du Potentiel, Bull. Soc. Math. France, 69, 1941, p. 73-74 e RUY LUIS GOMES — Integral de Lebesgue-Stieltjes, J. I. M. Porto, 1952.

3. — Funções Integráveis

DEFINIÇÃO 4. Diz-se que f é integrável RIEMANN-STIELTJES em ordem a $F(\varphi)$, $\varphi \in L$, se $\underline{F}(f) = \overline{F}(f)$ e o valor comum, $F(f)$, desses dois números, chama-se integral de RIEMANN-STIELTJES de f .

TEOREMA 3. As funções integráveis formam um espaço de RIESZ, sub-espaço de \mathcal{F} no qual $F(f)$ é linear e não-negativa.

São integráveis, em particular, as funções de L . O integral assim definido não é mais do que o prolongamento por continuidade da funcional linear e não-negativa, $F(\varphi)$, $\varphi \in L$, nos termos da topologia de \mathcal{F} . E sabemos que este prolongamento é único.

TEOREMA 4. A condição necessária e suficiente para que $f \in \mathcal{F}$ seja integrável RIEMANN-STIELTJES é que os pontos da descontinuidade de f formem um conjunto, D , da medida nula.

É uma consequência imediata de

$$\overline{F}(f) - \underline{F}(f) = F(\omega)$$

e das propriedades do integral LEBESGUE-STIELTJES $F(\omega)$.

4. — Integral de Riemann-Stieljes num intervalo fechado $I \subset R^1$

Vamos aplicar a teoria desenvolvida nos parágrafos anteriores ao caso de E se reduzir a $I \subset R^1$ e estabelecer as relações que a ligam às definições conhecidas, nomeadamente, a de STIELTJES e a generalização de POLLARD.

Em primeiro lugar, como $F(\varphi)$ se reduz, então, a uma funcional linear e não-negativa na classe L das funções contínuas num intervalo fechado $[a, b]$ da recta euclídeana, o teorema de RIESZ (9) diz-nos que

$F(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) d\psi(x)$, sendo o segundo membro o integral de STIELTJES da função contínua φ em ordem à função não decrescente ψ .

Designando por P uma partição qualquer de $[a, b]$ nos sub-intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, por $d(P)$ a amplitude máxima destes sub-intervalos, por z_j um ponto compreendido entre x_{j-1} e x_j e finalmente por $\Delta_j \psi$ o acréscimo $\psi(x_j) - \psi(x_{j-1})$, tem-se, (10) pela definição de STIELTJES

$$\int_a^b \varphi d\psi = \lim_{d(P) \rightarrow 0} S(P; \varphi, \psi)$$

$$S(P; \varphi, \psi) = \sum_j \varphi(z_j) \Delta_j \psi.$$

Ora, pode demonstrar-se o

TEOREMA 5. Seja f uma função limitada no intervalo $[a, b]$.

A definição de integral de STIELTJES em ordem a uma função não-decrescente ψ coincide com a definição dada anteriormente em ordem à funcional linear não-negativa $F(\varphi) = \int_a^b \varphi d\psi$, $\varphi \in L$. E inversamente.

Na verdade, se existe $\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum f(z_j) \Delta_j \psi$, existem também $\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum L_j \Delta_j \psi$ e $\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum l_j \Delta_j \psi$, em que $L_j = \sup f$ e $l_j = \inf f$ em $[x_{j-1}, x_j]$. E todos estes limites são iguais.

Por outro lado, como ψ não tem mais do que uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade, podemos supor que os x_j , $x_j \neq a, b$, não caem em nenhum desses pontos.

Consequentemente, é possível arranjar $\varphi_1 \leq \varphi_2$, tais que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ e $F(\varphi_2) - \sum_j L_j \Delta_j \psi + \varepsilon$, $\sum_j l_j \Delta_j \psi - \varepsilon \leq F(\varphi_1)$ donde $\underline{F}(f) = \overline{F}(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum f(z_j) \Delta_j \psi$.

Suponhamos agora que $\underline{F}(f) = \overline{F}(f)$ e sejam φ_1, φ_2 tais que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, $F(\varphi_2) - F(\varphi_1) < \varepsilon$. Vem $\sum_j \varphi_1(z_j) \Delta_j \psi \leq \sum_j f(z_j) \Delta_j \psi \leq \sum_j \varphi_2(z_j) \Delta_j \psi$. Mas se $d(P)$ é suficientemente pequeno, pode considerar-se que $\sum_j \varphi_2(z_j) \Delta_j \psi$ não difere de $F(\varphi_2)$ nem $\sum_j \varphi_1(z_j) \Delta_j \psi$ de $F(\varphi_1)$. Logo, $\lim_{d \rightarrow 0} \sum f(z_j) \Delta_j \psi = F(f)$.

Este resultado (11) dá-nos ainda uma justificação da definição de integral RIEMANN-STIELTJES de uma função $f \in \mathcal{F}$ em ordem a uma funcional linear e não-negativa em L .

Dada agora uma funcional linear e contínua em L , basta decompô-la na diferença (12) $F^+ - F^-$ de duas funcionais lineares e não-negativas, para ficarmos habilitados a definir o integral de RIEMANN-STIELTJES em ordem a F^+ e em ordem a F^- :

Se f é integrável em ordem a F^+ e a F^- , $F(f) = F^+(f) - F^-(f)$ define o integral RIEMANN-STIELTJES em ordem a uma funcional linear e contínua em L .

(9) Sur certains systèmes singuliers d'Équations Intégrales — Ann. Ec. Nor. Sup. 28, Année 1911, p. p. 41, 42, 43. Cf demonstração de H. LEBESGUE in Leçons sur l'Intégration, Paris, 1928, 2 éd., p. 265.

(10) Notações de GRAVES in The Theory of Functions of Real Variables, New-York, 1946, p. 260.

(11) Quando $\psi = x$, $F(\varphi)$ coincide com o integral de CAUCHY, $\int_a^b \varphi dx$, e o prolongamento de $F(\varphi)$ conduz-nos ao integral de RIEMANN.

(12) Resultado conhecido. Ver uma demonstração em Integral de LEBESGUE-STIELTJES, já citado.

Finalmente se E se reduz a $I \subset R^1$, $F(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) d v(x)$, sendo $v(x)$ uma função de variação total limitada⁽¹³⁾, e a definição anterior coincide com a definição clássica de integral em ordem a uma função $v(x)$ de *v. t. l.*

Em 1923 POLLARD introduziu⁽¹⁴⁾ os integrais — superior e inferior—de RIEMANN-STIELTJES nos termos destas expressões

$$\int_a^b f d\psi = \inf_P \bar{S}(P; f, \psi)$$

$$\int_a^b f d\psi = \sup_P \underline{S}(P; f, \psi),$$

nas quais

$$\bar{S}(P; f, \psi) = \sum_l \mathcal{L}_i \Delta_i \psi,$$

$$\underline{S}(P; f, \psi) = \sum_l \mathcal{L}_i \Delta_i \psi$$

$\mathcal{L}_i \sup f$ em $[x_{j-1}, x_j]$, $\mathcal{L}_i \inf f$ em $[x_{j-1}, x_j]$.

Sujeitando a partição P à condição de nenhum dos pontos x_j , diferentes de a e b , cair num ponto de descontinuidade de ψ , veem os integrais

$$\int_a^b f d\psi = \inf_P \bar{S}(P; f, \psi)$$

$$\int_a^b f d\psi = \sup_P \underline{S}(P; f, \psi).$$

Ora, vamos demonstrar o

$$\text{TEOREMA 6. } \int_a^b f d\psi = \bar{F}(f), \quad \int_a^b f d\psi = \underline{F}(f).$$

⁽¹³⁾ Teorema de RIESZ, loc. cit.

⁽¹⁴⁾ *The Stieltjes Integral and its generalizations*—Quart. Jour. Math., 49, 1920-1923, p. p. 73-138.

Basta observar que: dada uma função φ , tal que $f \leq \varphi$, é possível arranjar⁽¹⁵⁾ uma partição admissível que verifique $\bar{S} \leq F(\varphi) + \varepsilon$, donde $\int_a^b f d\psi \leq F(f)$.

Inversamente, dada uma partição admissível, como os seus pontos de divisão são pontos de continuidade de ψ , é possível arranjar φ , tal que $f \leq \varphi$ e $F(\varphi) \leq \bar{S} + \varepsilon$, donde $\bar{F}(f) \leq \int_a^b f d\psi$.

Logo, $\int_a^b f d\psi = \bar{F}(f)$ e do mesmo modo se mostraria que $\int_a^b f d\psi = \underline{F}(f)$.

COROLÁRIO 3. *Tem-se sempre* $\int_a^b f d\psi - \int_a^b f d\psi = \int_a^b \omega d\psi$.

Se ψ é contínua no interior de $[a, b]$ os integrais \int_a^b , \int_a^b coincidem com os de POLLARD e vem a fórmula⁽¹⁶⁾

$$\int_a^b f d\psi - \int_a^b f d\psi = \int_c^b \omega d\psi.$$

⁽¹⁵⁾ Note-se que ψ não admite mais do que uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade.

⁽¹⁶⁾ POLLARD, loc. cit. Ver uma demonstração totalmente diferente da do texto, em E. W. HOBSON — *The theory of Functions* Vol. I, Cambridge, 3 ed. 1927, p. 556-557.

**PRÉMIO NACIONAL
DOUTOR FRANCISCO GOMES TEIXEIRA**

A Gazeta de Matemática publica neste número comemorativo o trabalho, até hoje inédito, a que foi atribuído em 1945 o Prémio Gomes Teixeira. Criado pela portaria n.º 9.366 do Ministério da Educação Nacional, de 9 de Novembro de 1939, que adiante se transcreve, este prémio só uma única vez foi atribuído. Mereceu-o Fernando Soares David, então aluno da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

PORTARIA N.º 9.366

Considerando o estatuído na lei n.º 1:941 (base VII) e no regimento da Junta Nacional da Educação (artigos 15.º, n.º 10.º, e 44.º, § 2.º), relativamente à concessão de prémios nacionais aos melhores estudantes do ensino superior, para ao mesmo tempo se consagrarem professores que hajam sido exemplo de devoção ao ensino e ao bem comum e relevantemente contribuíram para o progresso das ciências;

Ouvido o Conselho Permanente da Acção Educativa:

Manda o Governo da República Portuguesa, pelo Ministro da Educação Nacional, o seguinte:

a) É criado o Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira, em homenagem ao insigne matemático contemporâneo, cuja obra didáctica e de investigação contribuiu poderosamente para o progresso das ciências exactas em Portugal e cujas virtudes cívicas ficaram como modelo perene de bondade e amor pátrio, o qual se destina a galardoar, mediante con-

curso, o melhor trabalho de matemáticas puras elaborado em cada ano lectivo por um aluno de qualquer estabelecimento de ensino universitário em que sejam professadas;

b) O prémio, da importância de 2.500\$, será anualmente concedido por proposta de um júri constituído pelo presidente da Junta Nacional da Educação e por dois professores de cada Faculdade de Ciências, sob a presidência do primeiro;

c) Os directores das três Faculdades, ouvidos os respectivos Conselhos, elaborarão, no prazo de noventa dias, para serem superiormente aprovadas, as normas técnicas e regulamentares a que hão-de obedecer o trabalho e o concurso a realizar já no corrente ano lectivo.

Ministério da Educação Nacional, 9 de Novembro de 1939. — O Ministro da Educação Nacional, *António Faria Carneiro Pacheco*.

Sobre a comutabilidade de operadores com espectros contínuos

por Fernando Soares David

Porto

Resumo. Começamos por dar uma condição necessária e suficiente de comutabilidade de dois operadores de HERMITE, definidos num espaço de HILBERT, admitindo resoluções da identidade e possuindo espectros contínuos, em termos de comutação de certos operadores associados com espectros pontuais puros e uma base de vectores próprios.

Seguidamente, damos uma interpretação física dessa condição.

Por fim, estudamos, com base na teoria desenvolvida, o caso da posição e da quantidade de movimento dum ponto móvel sôbre uma linha, concluindo a incompatibilidade destes observáveis pela impossibilidade de existência dum estado próprio comum aos dois observáveis de espectros pontuais associados, sempre que se efectuem medições com erros de produto inferior à constante de PLANCK.

1. Considerações prévias. Há no nosso trabalho dois aspectos que consideramos fundamentais. O primeiro diz respeito ao método usado no tratamento da comutabilidade de operadores com espectros contínuos: redução ao caso canónico do mesmo problema para operadores com uma base de vectores próprios. Assim se evita o recurso ao método pouco rigoroso das diferenciais próprias e, como se verá pela forma dos operadores associados, se traduz fielmente (do ponto de vista experimental) a operação de medir com certo erro.

O segundo consiste no estudo da incompatibilidade dos observáveis «posição» e «quantidade de movimento» pelo método anterior.

Regra geral, nos livros de Física Teórica as relações de incerteza de HEISENBERG são obtidas aplicando o método das diferenciais próprias. Nos «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik» de JOHANN VON NEUMANN, o tratamento desta questão

aparece deslocado da linha geral da obra: tendo-se estabelecido para operadores não limitados a noção de comutabilidade por meio das respectivas resoluções da identidade, o problema é abordado sem recorrer a estes operadores.

No nosso trabalho, julgamos ver, associada à melhor definição de compatibilidade — a estabelecida com base na comutação das resoluções da identidade — uma formulação correcta duma teoria de diferenciais próprias.

2. Teorema fundamental. Sejam A e B dois operadores de HERMITE de espectros contínuos R_λ e R_μ , admitindo resoluções da identidade $E(\lambda)$ e $F(\mu)$. Diremos que os dois operadores comutam sempre que, e só quando, comutarem $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ da forma usual. Tem-se

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda) ; \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} \mu dF(\mu) .$$

Consideremos associados a A e B os operadores

$$f_\alpha(A) = \sum_{R_\lambda} \lambda'_n E(I_n) , \quad g_\beta^{\mu_0, \mu_1}(B) = \sum_{(R_\mu)} \mu'_m F(J_m)$$

onde $\{I_n\}$ e $\{J_m\}$ são rêsdes de intervalos semiabertos à esquerda, disjuntos, respectivamente em R_λ e $(\mu_0, \mu_1] \subset R_\mu$ e $\lambda'_n \in I_n$, $\mu'_m \in J_m$ (1); $\alpha = \lim \sup ||I_n||$ e $\beta = \lim \sup ||J_m||$ são elementos característicos destas redes.

(1) A dissimetria entre f_α e g_β justifica-se do modo seguinte: por um lado, os cálculos que se seguem exigem que um, pelo menos, dos operadores seja limitado; por outro lado, pareceu-nos natural limitar apenas um, tendo em vista os operadores representativos da «posição» e «quantidade de movimento», o segundo dos quais é limitado em Mecânica Relativista.

$f_x(A)$ e $g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B)$ possuem espectros pontuais puros. Os valores próprios do primeiro são λ'_n e as projecções próprias correspondentes $E(I_n)$; o segundo tem por valores próprios os μ'_m e zero, com projecções próprias $F(J_m)$ e $1 - \sum_{(\mu_0, \mu_1]} F(J_m)$ (2).

O objectivo deste parágrafo é estudar a comutação de A e B por intermédio da comutação de $f_x(A)$ e $g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B)$.

Tem lugar o teorema fundamental seguinte:

«É condição necessária e suficiente para que A e B comutem, que comutem os $f_x(A)$ e $g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B)$ relativos a quaisquer decomposições de R_{λ} e $(\mu_0, \mu_1]$ para qualquer $(\mu_0, \mu_1] \subset R_{\mu}$ [é manifesto que tal comutação só tem sentido no domínio de definição de $f_x(A)$].»

Com efeito, se $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ comutam o mesmo acontece a $E(I_n)$ e $F(J_m)$. Donde, atendendo à continuidade de $F(\lambda)$:

$$\begin{aligned} F(J_m) f_x(A) &= F(J_m) \lim_N \sum_{-N}^N \lambda'_n E(I_n) = \\ &= \lim_N \sum_{-N}^N \lambda'_n F(J_m) E(I_n) = \\ &= (\lim_N \sum_{-N}^N \lambda'_n E(I_n)) F(J_m) = f_x(A) \cdot F(J_m). \end{aligned}$$

Multiplicando por μ'_m e somando entre μ_0 e μ_1 , tem-se:

$$g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B) \cdot f_x(A) = f_x(A) \cdot g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B).$$

Reciprocamente, se $f_x(A)$ e $g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B)$ comutam para todas as decomposições de R_{λ} e $(\mu_0, \mu_1]$, também comutam

$$E(\lambda) = \sum_{(-\infty, \lambda]} E(I_n) \quad \text{e} \quad F(\mu) = \sum_{(\mu_0, \mu_1]} F(J_m).$$

Considerando uma sucessão de intervalos $(\mu_0^{(n)}, \mu]$, onde $\mu_0^{(n)} \rightarrow -\infty$, concluímos, por continuidade, que comutam também $E(\lambda)$ e $F(\mu)$.

3. Interpretação física. Em Mecânica Quântica este resultado tem uma interpretação simples.

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} os observáveis representados por

(2) Note-se que g_{β} está definido no espaço todo e é limitado (beschränkt)—portanto contínuo—enquanto que f_x pode não ser limitado e o seu domínio de definição é

$$E[\sum \lambda'_n | E(I_n) f_x |^2 < +\infty].$$

A e B . Assentemos, uma vez por todas, no seguinte: o facto de se considerar determinada decomposição do espectro (contínuo!) dum observável em intervalos disjuntos, implica que a indicação mais precisa que se pode obter sobre o valor duma medição do observável é sabê-lo interior a determinado intervalo. Medir os observáveis $f_x(\mathcal{A})$ e $g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(\mathcal{B})$ é medir

\mathcal{A} e \mathcal{B} com erros limitados superiormente por α e β , não podendo o valor de \mathcal{B} ser exterior a $(\mu_0, \mu_1]$.

\mathcal{A} e \mathcal{B} serão compatíveis quando se puderem medir simultaneamente com precisões arbitrárias e em qualquer zona dos espectros, isto é, quando $f_x(A)$ e $g_{\beta}^{\mu_0, \mu_1}(B)$ forem comutáveis para todos os pares de números α, β e todos os intervalos $(\mu_0, \mu_1]$. Demonstramos a equivalência desta condição à comutabilidade de $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ para todos os valores de λ e μ . Assim se justifica que esta comutação seja considerada característica da compatibilidade de \mathcal{A} e \mathcal{B} , como fez VON NEUMANN.

Basta que exista um par de números α_0, β_0 e um intervalo $(\mu_0, \mu_1]$ tais que $f_{\alpha_0}(A)$ e $g_{\beta_0}^{\mu_0, \mu_1}(B)$ não comutem, para que se possa concluir a incompatibilidade de \mathcal{A} e \mathcal{B} .

4. Aplicação. Neste número concluiremos, por aplicação dos resultados anteriores, a incompatibilidade dos observáveis «posição» e «quantidade de movimento» dum ponto móvel sobre uma linha.

As resoluções da identidade correspondentes aos observáveis posição (\mathcal{Q}) e quantidade de movimento (\mathcal{P}) são respectivamente (cf. J. v. NEUMANN — op. cit., II-8) $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ assim definidos:

$$E(\lambda) f(q) = \begin{cases} f(q), & q \leq \lambda \\ 0, & q > \lambda \end{cases}$$

$$F(\mu) = M E(\mu) M^{-1}$$

onde

$$M F(\mu) = f(q) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p q} F(p) dp$$

(h é a constante de PLANCK); portanto

$$M^{-1} f(q) = F(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p q} f(q) dq.$$

Sejam $I = (\lambda', \lambda'']$ e $J = (\mu', \mu'']$ dois intervalos dos espectros de \mathcal{Q} e \mathcal{P} . O significado dos operadores de projecção $E(I)$, $F(J)$ é o seguinte:

$$E(I) f(q) = E(\lambda'') f(q) - E(\lambda') f(q) = \begin{cases} f(q), & q \in I \\ 0, & q \in 1 - I \end{cases}$$

$$F(J) f(q) = M E(J) M^{-1} f(q) = M E(J) F(p) =$$

$$\begin{aligned}
 &= M \cdot \begin{cases} F(p), & p \in J \\ 0, & p \in 1-J \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} p q} F(p) dp = \\
 &= \frac{1}{h} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} p q} dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p r} f(r) dr.
 \end{aligned}$$

Suponhamos que I e J fazem parte de redes $\{I_\alpha^{(n)}\}$, $\{J_\beta^{(m)}\}$ de intervalos, respectivamente, do espectro de \mathcal{Q} e dum intervalo $(\mu_0, \mu_1]$ convenientemente escolhido no espectro de \mathcal{P} . Seja $\alpha = -\limsup \{ |I^{(n)}| \}$, $\beta = \limsup \{ |J^{(m)}| \}$. Os operadores correspondentes $f_\alpha(Q)$ e $g_\beta^{\mu_0, \mu_1}(P)$ têm espectros pontuais puros e uma base de vectores próprios. As variedades próprias são do tipo

$$(\mathcal{Q}) : V(I) = E [E(I)\varphi = \varphi] = E [\varphi(q) = 0, q \in 1-I]$$

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} W(J) = E [F(J)\psi = \psi] = E \left[\psi(q) = \right. \\ \left. = \frac{1}{h} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} p q} dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p r} \psi(r) dr \right] \\ W(J_0) = E [\chi(q) = 1 - \sum_{(\mu_0, \mu_1]} F(J^{(m)}) \chi(q)]. \end{cases}$$

Uma condição necessária de comutabilidade dos operadores $f_\alpha(Q)$ e $g_\beta^{\mu_0, \mu_1}(P)$ — e portanto de compatibilidade de $f_\alpha(Q)$ e $g_\beta^{\mu_0, \mu_1}(\mathcal{P})$ — é a existência duma função própria comum, o que se pode sempre reduzir ao caso da existência dum elemento comum a uma $V(I)$ e uma $W(J)$. Seja $\psi(q)$ essa função; tem-se

$$q \in I : \psi(q) = \frac{1}{h} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} p q} dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p r} \psi(r) dr$$

$$q \in 1-I : \psi(q) = 0.$$

Portanto, com $q \in I$:

$$\psi(q) = \frac{1}{h} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} p q} dp \int_I e^{-\frac{2\pi i}{h} p r} \psi(r) dr.$$

Tomando módulos

$$|\psi(q)| \leq \frac{1}{h} \int_J \left| \int_I e^{-\frac{2\pi i}{h} p r} \psi(r) dr \right| dp.$$

Sendo o integral do segundo membro independente de q , tem-se, designando por M o módulo máximo (necessariamente diferente de zero e finito) de $\psi(q)$ em I :

$$\begin{aligned}
 M &\leq \frac{1}{h} \int_J \int_I |\psi(r)| dr dp \\
 &\leq \frac{1}{h} \int_J \int_I M dr dp = \frac{|I| \cdot |J|}{h} \cdot M.
 \end{aligned}$$

Donde

$$|I| \cdot |J| \geq h.$$

Sendo α , β os limites superiores das amplitudes dos I e dos J , respectivamente, tem-se a relação fundamental

$$(1) \quad \alpha \cdot \beta \geq h.$$

Trata-se, como já foi dito, duma condição necessária de compatibilidade de $f_\alpha(Q)$ e $g_\beta^{\mu_0, \mu_1}(\mathcal{P})$.

Segue-se imediatamente a incompatibilidade de \mathcal{Q} e \mathcal{P} .

Temos em (1) uma verdadeira relação de incerteza. (Não se trata contudo, exactamente, da célebre relação de HEISENBERG, onde em vez de α e β figuram os desvios médios quadráticos dos dois observáveis).

A sua interpretação física é a seguinte: quando os limites superiores dos erros cometidos numa avaliação de \mathcal{Q} e \mathcal{P} verificam a relação $\alpha \cdot \beta < h$ não é possível medir simultaneamente os dois observáveis.



ELOGIO

Sobre Gomes Teixeira (*)

por Luís Freire

Universidade do Recife

Por sugestão do meu presado amigo, o PROF. ANTÔNIO MONTEIRO, que, entre nós, no Brasil, até ontem, prestou relevantes e inesquecíveis serviços ao nosso ensino e cultura da matemática, traço estas singelas linhas comemorativas do centenário do grande matemático português FRANCISCO GOMES TEIXEIRA.

Em sua maior parte este artigo é a reprodução do que em 1933 publiquei num jornal brasileiro ao ter notícia do seu passamento (*Diário de Pernambuco*, 7 de Novembro de 1933).

*

Procurei conhecer a obra de GOMES TEIXEIRA quando, há já muitos anos, em 1924, através das páginas do *L'Enseignement Mathématique*— o grande órgão oficial da Comissão Internacional do Ensino Matemático —, dei conta das recepções que lhe fizeram na tradicional Sorbonne e na Universidade de Toulouse.

Poucos os que as poderão grangear — o sábio português, de certo, colheu naqueles momentos a maior das recompensas espirituais da sua vida apostolar.

A obra de GOMES TEIXEIRA, que foi professor na Universidade de Coimbra e Reitor da do Porto, distribue-se por sete enorme volumes in-quarto, afóra as suas conferências e ensaios.

Citado por matemáticos do porte de PAUL APPELL, o seu *Tratado das Curvas especiais notáveis, planas e reversas* foi premiado pela Academia das Ciências de Madrid.

O Instituto de França coroou com o prémio Binoux os seus trabalhos sobre a Filosofia e a História das Ciências.

Os três volumes dos sete de sua obra matemática completa, dedicados às curvas notáveis, constituem um verdadeiro monumento elevado à técnica, à história e à filosofia das matemáticas, ao mesmo tempo.

Neles se encontram, e para cada curva, o estudo da forma, da construção, da retificação, da área que elas delimitam, o de suas propriedade e sua história, as relações existentes entre as curvas e os problemas em que essas aparecem.

Difícil é encontrar-se sobre um assunto especial obra tão completa e inteligente.

A ciência portuguesa se orgulhará sempre de semelhante obra.

*

Quando já o pêso dos anos não permitia a GOMES TEIXEIRA meditações profundas sobre os delicados assuntos de matemática, consagrou-se ele inteiramente aos estudos da história da matemática portuguesa, estudos esses que fizeram o objeto de suas conferências, em 1923, nas Faculdades das Ciências de Paris e de Toulouse.

O seu belo livro *Panegíricos e Conferências* dá conta desse labor dos seus últimos anos.

Tratando com alto senso filosófico o evoluir das questões em matemática, tem-se neste livro a cristalização de pensamento do Mestre, o coroamento de uma vida que de facto penetrou nos arcanos temíveis da ciência do número.

Mas quem se assenhoreia desses segredos não pode deixar de ficar um tanto poeta ...

Já dizia o matemático KRONECKER ao seu colega DUHAMEL: *Wir sind Dichter* (Somos poetas).

GOMES TEIXEIRA, em seus *Panegíricos e Conferências* tem páginas de verdadeiro lirismo.

Vejamos alguns dos seus trechos:

«A imaginação é a qualidade primacial para ser grande na Poesia ou na Matemática; é na imaginação que está a força do poeta, é na imaginação que está a força do geômetra; mas os meios para um ou outro a aplicarem são diferentes, assim como o são também as origens da inspiração de cada um, que o

(*) Recebido em 1951, Agosto.

poeta vai ordinariamente beber às cenas da vida humana e às belezas da natureza e geometra vai buscar às harmonias numéricas que são o regulamento do Mundo.

Aos fatos e realidades do Mundo físico substitue o poeta imagens literárias e o matemático imagens geométricas, que encantam e emocionam a alma, e uma e outra são produtos do génio de cada um deles.

Mas o geometra vai mais longe do que o poeta nos resultados da imaginação, que ordinariamente correspondem, no caso do primeiro, a realidades, no caso do segundo, a idealismos e ficções, e podemos com razão exclamar com SULLY PRUDHOMME: qual de vós, poetas, pôde gozar o orgulho de uma criação semelhante à de um teorema de que depende a predição de um fenómeno celeste?!»

«Para os que estão em condições de compreender as Matemáticas, essas ocupam sob o ponto de vista estético, o mesmo lugar entre as ciências naturais, que a Poesia ocupa entre as outras letras e as Belas Artes ocupam entre as outras artes. Para estes, as Matemáticas são ciências que interessam pelo que têm de útil e encantam pelo que têm de belo; são as chaves da Filosofia natural, as bases que a sustentam, os clarões que a iluminam, os adornos que a enfeitam, são um mundo de grandezas abstratas, em que a alma encontra primeiro o encanto do mistério e depois a consolação da luz.

Às harmonias da natureza, que são o encanto dos sentidos, correspondem nas matemáticas harmonias numéricas, que são o encanto da razão.

Um trabalho matemático é para quem o sabe ler o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir, um quadro para quem o sabe ver, uma ode para quem a sabe sentir.

Assim como admiramos na música a harmonia dos sons, na escultura a harmonia das formas, na pintura a associação da harmonia das formas e das cores, na Matemática, como na Poesia, encantam-nos as harmonias das idéias creadas pela imaginação, sem a qual não há poeta, sem a qual não há geometra».

Essa alma sentimental de português precisaria pouco para atingir ao fervor da crença religiosa.

Já por essa tocada desde os seus primórdios, o avançar dos anos não a fez senão exaltar.

E daí aparecer o analista das matemáticas, o poeta do número, como autor de dois «romances de amor a Deus».

S. Francisco e Clara de Assis têm belos hinos na pena sábia de GOMES TEIXEIRA.

«A existência de Deus é a questão mais sublime da Filosofia e da Ciência», diz êle em uma das suas introduções ao estudo da vida e da obra daqueles dois santos.

E assim se despediu do mundo esse português illustre que aos encantos da mais fascinante de todas as ciências juntou as doçuras da fé que tão fortemente iluminou a sua noite longa vida.

Falecendo aos 80 anos, proporcionou-lhe a Providência, em que tanto confiou, tempo bastante para meditar sobre essas matemáticas tão vastas e absorventes, legando assim à sua geração e as que se seguiram magníficos trabalhos.

Não se foi como GALOIS aos 20 anos, nem como ABEL aos 26.

*

A GOMES TEIXEIRA devemos nós, brasileiros, a gratidão de um acolhimento cuja lembrança bem nos tocará sempre: era no seu *Jornal das Ciências Matemáticas e Astronômicas do Porto* que OTO DE ALENCAR publicava alguns dos seus mais robustos trabalhos, dentre êles destacando-se a memória notável: *Da acção duma força aceleratriz sobre a propagação do som*.

É aí que o matemático brasileiro se torna o eco da voz potente de GOMES DE SOUSA — o Sousinha —: na obra vertiginosa deste seu compatriota genial, encontra Oto, num mergulho de fôlego, os materiais e os métodos necessários à resolução do tão alto e fascinante problema de física matemática que constituía o objeto de sua memória.

Aos trinta e poucos anos de idade haveriam de desaparecer essas duas grandes forças do pensamento brasileiro — uma menos curta existência lhes teria permitido obra excepcional, produzindo-se com GOMES DE SOUSA, em especial, talvez uma completa reforma no tratamento matemático dos problemas de filosofia natural.

Não fora o fato de a obra de GOMES TEIXEIRA estar redigida em francês, e certamente teria ela o destino da de DANIEL DA SILVA, o seu grande mestre, sem nenhuma dúvida a mais completa organização de matemático, em Portugal.

DANIEL DA SILVA, desconhecendo os trabalhos de MÖBIUS e de MINDING, relativos à mecânica racional, criou duma vez o que esses continham, indo mesmo bem adiante daqueles dois notáveis matemáticos.

Escreveu, porém, em português, o que lhe valeu o «silêncio fechado da mais bela das línguas mortas» (G. AMADO)...

Vinte e cinco anos após, o célebre DARBOUX apresentava à Academia das Ciências de Paris u'a memória em que declarava muito inovar aos trabalhos de de MÖBIUS e MINDING.

Todas as proposições do matemático francês se encontravam em verdade no trabalho do matemático português, que, ainda ultrapassava as do próprio DARBOUX.

«O que aproveita escrever em português» exclamava desolado DANIEL DA SILVA em carta dirigida a GOMES TEIXEIRA e na qual lhe dava parte da memória de DARBOUX (G. TEIXEIRA — *Panegíricos e Conferências*).

GOMES TEIXEIRA, que nunca perdeu ocasião de fazer valer a prioridade e superioridade, no assunto referido, de seu mestre venerado, não poderia, pois, destinar a sua própria obra àquele «silêncio» fatal — fê-la, assim, aparecer em francês.

*

É com amargor que não vejo o nome de OTO DE ALENCAR, aparecer nos livros de *Análise Matemática* — em muitas partes dessa ciência o seu nome certamente figuraria destacado se os matemáticos estrangeiros estivessem inteirados dos seus trabalhos, ora de elegante e impecável metodologia, ora de pura e alta pesquisa.

Que mina rara de sugestões, de conhecimento amplo e sistematizado, de relações importantes

achadas pela primeira vês, não é a sua memória publicada em 1904 na *Revista dos Cursos da Escola Politécnica do Rio de Janeiro* e intitulada *Aplicações geométricas de RICCATI*?!

Pena é que não houvesse também escrito em francês, pois, todos os seus trabalhos são vinculados, de profunda elaboração interior, de vistas agudíssimas e notavelmente originais, modelos que o são de disciplina e ordem matemática.

Outro homem de ciência brasileiro digno também de ser conhecido é MANUEL AMOROSO COSTA que, com o seu livro póstumo, *As idéias fundamentais da Matemática*, pôs-se ao nível dos melhores autores desses assuntos.

Que me revelem os bons amigos portugueses haver intercalado os nomes de três brasileiros entre as linhas por mim destinadas a homenagear o sábio matemático português FRANCISCO GOMES TEIXEIRA no passamento do seu centenário.

A sua generosa acolhida a um deles provocou naturalmente tal associação.



ERRATA

Pág.	Col.	Lin.	Em vez de	Leia-se
2	—	8	personalité	personnalité
83	1	17	da célebre	duma extensão da célebre
83	2	3	primos	primos,
84	1	7 a contar de baixo	$\dots = n \prod_{p \leq n^2}$	$= n \prod_{p \leq n^2}$
84	2	6	$+ \dots - \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5}$	$- \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 5}$
84	2	15	(π^2)	$\pi (n^2)$
85	1	4	$ax + b$	$ax + b$
85	2	19	binários	binários de primos
87	1	8 a contar de baixo	$x^3 + k$	$x^3 + k,$
88	1	10	não resto	ou não-resto
89	1	9	$y = x + k.$	$y = x + k).$
89	2	3	$p < 3$	$p > 3$
89	2	17	pontos, $(n, 0, 0), (0, n, 0),$ e	pontos $(n, 0, 0), (0, n, 0)$ e
90	1	8	número	número
90	1	2 a contar de baixo	$p \neq k$	$p \neq n$
90	1	3	k inteiro	h inteiro
90	2	4 e 5 a contar de baixo	1)	10)

NOTAS DE MATEMÁTICA

Colecção fundada por A. A. MONTEIRO
e continuada sob a direcção de L. NACHBIN e C. SILVA DIAS

L. NACHBIN, *Combinação de Topologias*

Estudo de propriedades do conjunto ordenado de todas as topologias sobre um conjunto

Esc \$50,00 ou Cr \$25,00

L. NACHBIN, *Espaços vetoriais topológicos*

Estudo dos espaços topológicos, corpos, corpos topológicos, espaços vetoriais, espaços vetoriais topológicos, partes limitadas, topologias fracas e fortes

Esc \$140,00 ou Cr \$70,00

A. A. MONTEIRO, *Filtros e ideais*

Estudo dos reticulados ou «lattices» distributivos, reticulados e lógicas de Brouwer, reticulados e álgebras de Boole, aritmética dos filtros primos e máximos

Esc \$100,00 ou Cr \$50,00

M. M. PEIXOTO, *Convexidade das curvas*

Estudo das funções convexas no sentido clássico e no sentido generalizado de Beckenbach e suas relações com as desigualdades diferenciais

Esc \$100,00 ou Cr \$50,00

M. L. MOUSINHO, *Espaços projetivos*

Estudo dos reticulados completos modulares complementados e seu emprego na caracterização ordinal dos espaços projetivos de dimensão qualquer

Esc \$70,00 ou Cr \$35,00

C. SILVA DIAS, *Curso de Topologia Algébrica*

Estudo dos complexos lineares, classificação das superfícies fechadas, complexos simpliciais, grupos de homologia, grupos de Poincaré e de homotopia

Em impressão

Estas obras podem ser obtidas através das seguintes livrarias:

LIVRARIA SÁ DA COSTA

Rua Garrett, 100-102
Lisboa—Portugal

EDITORIAL LATINO AMERICANA

Rua Senador Dantas, 76, Grupo 505
Rio de Janeiro—Brasil

NO PRELO:

INTEGRAL DE LEBESGUE-STIELTJES POR RUY LUÍS GOMES

PUBLICAÇÃO DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará três números em 1952

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1952 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.º 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.º 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, á composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1952 quando pedidas directamente, assinatu-

ras de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automaticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.º 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto) 40\$00
N.º 12 e 15 a 49, cada número. 12\$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

Número avulso: ESC. 60\$00

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282
