GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMATICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIII — N.° 51 — ABRIL 1952

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XIII — N.º 51 **GAZETA DE MATEMÁTICA** ABRIL — 1952

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, rc — LISBOA-N

Sur la distance d'un point variable à un ensemble fixe

par **Lucien Chamard** *

1.—Soit M un point extérieur à un ensemble donné E. La plus grande sphère ouverte centrée en M et disjointe de E (ou sphère d'appui de E centrée en M) a pour rayon ρ, la distance de M à E, et se note S_M^ρ. Les points de E situés à la surface de S_M^ρ sont des projections de M sur E et constituent l'ensemble fermé $\varpi(M)$. Quant aux segments rectilignes qui joignent M à ses projections, ce sont les projetantes de M sur E et leur faisceau se note $\Phi(M)$. Mx désignant une demi-droite issue de M et extérieure à $\Phi(M)$, [1] le plus grand cône de révolution indéfini et ouvert d'axe Mx et disjoint de $\Phi(M)$ est le «cône d'appui» de $\Phi(M)$ axé sur Mx et son demi-angle au sommet φ est la «distance angulaire» de Mx à $\Phi(M)$. Il se note Γ_M^φ.

2. — Considérons deux points M et M' situés respectivement aux distances ρ et ρ' de E. Selon le système de notations sus-indiqué $\Phi(M)$ et $\Phi(M')$ désignent respectivement les faisceaux de projetantes de ces deux points, tandis que $\varpi(M)$ et $\varpi(M')$ sont les ensembles de leurs projections.

Théorème I. $\Phi(M)$ *et* $\Phi(M')$ *sont respectivement du même côté au sens large* [2] *que le point correspondant par rapport au plan radical des deux sphères* S_M^ρ *et* $S_{M'}^{\rho'}$.

Celà est évident si S_M^ρ et $S_{M'}^{\rho'}$ son disjointes, puisque $\varpi(M)$ appartient à S_M^ρ, $\varpi(M')$ à $S_{M'}^{\rho'}$ et que le plan radical de deux sphères sans point intérieur commun les sépare. Si les deux sphères S_M^ρ et $S_{M'}^{\rho'}$ ont des points communs, le plan radical sépare encore les parties des sphères non communes, parties qui portent respectivement $\varpi(M)$ et $\varpi(M')$.

Dans ce dernier cas, c'est-à-dire si $MM' < \rho + \rho'$, on peut présenter la proposition précédente sous la forme suivante:

Théorème I'. $\Phi(M)$ *et* $\Phi(M')$ *sont respectivement de même côté que* M *et* M' *par rapport à la surface du cône de révolution qui a pour sommet le milieu* I *de* MM', *pour axe* IM [3] *et pour demi-angle au sommet l'angle* ω *définit par*

$$\cos\omega = -\left[\frac{|\rho'-\rho|}{\overline{MM'}} \cdot \frac{(\rho+\rho')}{\sqrt{2(\rho^2+\rho'^2)-\overline{MM'}^2}}\right].$$

En effet, la surface du cône en question, qui passe par le cercle commun aux surfaces des deux sphères, sépare $\varpi(M)$ et $\varpi(M')$ au même titre que le plan radical et laisse M du côté de $\varpi(M)$ et M' du côté de $\varpi(M')$.

Cas particulier: Pour $\rho=\rho'$, les deux propositions précédentes s'identifient avec la proposition que M. Georges Durand a donnée sous la dénomination de Lemme des deux points [4].

On sait que les faisceaux de projetantes jouissent de la semi-continuité supérieure d'inclusion ou $\overline{SCI}$ [5], c'est-à-dire que si M' tend vers M,

* Docteur-ès-Sciences, Professeur à l'École William Ponty, Sébikotane, et chargé du cours de Mathématiques du S. P. C. N. à l'Institut Universitaire de Dakar.

(1) Si $\Phi(M)$ ne remplit pas $\overline{S_M^\rho}$ c'est-à-dire la fermeture de S_M^ρ.

(2) «au sens large» signifie que $\varpi(M)$ [ou $\varpi(M')$] peut avoir tout ou partie de ses points dans le plan radical des deux sphères.

(3) Dans le cas où $\rho' > \rho$.

(4) Georges Durand, «Sur une généralisation des Surfaces Convexes» Thèse, Paris, 1931 ou *Journal de Math. pures et appliquées*, 9.e série, Tome X. Année 1931. Fasc. n.º 4, Chap. I, § 16, p. 347.

(5) Georges Bouligand. *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*, N.º 77.

l'accumulatif de $\Phi(M')$ est inclus dans $\Phi(M)$. Cette propriété associée au théorème I', m'a conduit à ce résultat

THÉORÈME II. — *Soit* Mx *une demi-droite issue d'un point* M *extérieur à un ensemble* E, *demi-droite elle-même extérieure au faisceau des projetantes de* M. *On peut trouver une suite* $\{M_i\}$ *de points tendants vers* M, *admettant* Mx *comme demi-tangente unique et telle que l'accumulatif des faisceaux de projetantes* $\Phi(M_i)$ *est formé de projetantes de* M *situées à la surface du cône d'appui* $\Gamma^{\varphi}_{M_x}\Phi(M)$ *axé sur* Mx.

Démonstration du Théorème II: Du Théorème I et de la $\overline{S.C.I.}$ des projetantes, on déduit immédiatement ce résultat: L'accumulatif des faisceaux de projetantes pour *toute* suite de points admettant Mx comme demi-tangente unique appartient au sous-faisceau des projetantes de M qui se trouvent sur la surface du cône d'appui de $\Phi(M)$ qui a pour axe Mx, et pour demi-angle au sommet φ et pour notation Γ^{φ}_{Mx}.

Nous allons démontrer que *toute* projetante MA de M située sur la surface de Γ^{φ}_{Mx} appartient à l'accumulatif des projetantes de *quelque* suite de points admettant Mx comme demi-tangente unique. Celà est évident si M n'a qu'une projetante sur la surface de Γ^{φ}_{Mx} et, en particulier, si M est un point ordinaire (doué d'une seule projetante sur E).

Mais supposons que M ait plus d'une projetante sur la surface de Γ^{φ}_{Mx} et considérons l'une d'elles, soit MA. Toute demi-droite issue de M et située dans l'angle $A\widehat{M}X$ est l'axe d'un cône d'appui de $\Phi(M)$ ne portant pas d'autre projetante de M que MA sur sa surface.

MA appartient donc à l'accumulatif des projetantes de toute suite de points admettant une demi-droite quelconque de l'angle $A\widehat{M}x$ comme demi-tangente unique. Considérons, dans l'angle $A\widehat{M}x$, une suite de demi-droites $\{Mx\}_{i=1,2,3,\cdots}$ définie par $(Mx\widehat{,}Mx\,i)=\dfrac{\varphi}{2^i}$ et soit $\sigma^{\varepsilon_i\,\gamma_i}_{M_i\,x_i}$ un secteur sphéro-conique de sommet M, d'axe Mx_i, de rayon ε_i et de demi-angle au sommet γ_i. Le rayon ε_1 est arbitraire et $\varepsilon_i=\dfrac{\varepsilon_1}{2^{i-1}}$ tandis que $\gamma_i=\dfrac{\varphi}{2^{2+i}}$.

Chaque secteur sphéro-conique $\sigma^{\varepsilon_i\,\gamma_i}_{Mx_i}$ contient des points dont l'accumulatif des projetantes, pour i donné, contient MA. On peut choisir dans $\sigma^{\varepsilon_i\,\gamma_i}_{Mx_i}$ un point Mi de telle sorte que la suite $\{Mi\}$ admette Mx comme demi-tangente unique. Chaque point Mi de la suite se projette sur un voisinage $\mathfrak{A}_i$ de A, d'après la $\overline{S.C.I.}$ et le raisonnement complémentaire que nous venons de donner. Lorsque i parcourt la suite des entiers, M_i tend vers M suivant Mx et l'accumulatif de ses projetantes comprend visiblement MA puisque le voisinage $\mathfrak{A}_i$ est évanescent.

Notons que, d'après le Théorème précédent, φ n'est autre que l'angle ω de la formule du Théorème I' lorsque M' tend vers M en même temps que ρ' tend vers ρ.

$$\cos\varphi=-\left[\lim\frac{|\rho'-\rho|}{MM'}\cdot\frac{2\rho}{\sqrt{4\rho^2}}\right]=-\left[\lim\frac{|\rho'-\rho|}{M'M}\right]$$

on en déduit que $-\cos\varphi$ n'est autre que la dérivée de la fonction de point $\rho(M)$ dans la direction Mx.

On retrouve donc là un résultat déjà établi par M. DE MISÈS [6] qui n'a pas dégagé le rôle de la notion purement géométrique de cône d'appui des faisceaux des projetantes.

4. — On sait que, pour une fonction $\rho(M)$ admettant des surfaces de niveau douées d'une normale en chaque point, le gradient en M est un vecteur dont la direction orientée, normale à la surface de niveau qui passe par M, est celle de l'accroissement B «le plus rapide» de $\rho(M)$, ou mieux celle de l'accroissement de $\rho(M)$ qui correspond au déplacement rectiligne MM' le plus court.

La fonction $\rho(M)$ qui fait l'objet de la présente étude a des ensembles de niveau qui n'ont pas partout le caractère de surface; de plus, de même en leurs parties superficielles, ces ensembles de niveau ne sont pas, en général, doués d'une normale en chaque point; enfin il se peut qu'en certains points de ces parties superficielles la fonction ne puisse croître.

Pour être sûr qu'un point M ait ses environs superficiels sur l'ensemble de niveau $F\rho$ qui le porte et qu'en ce point la fonction $\rho(M)$ puisse croître nous nous limiterons à la partie de $F\rho$ qui mérite le nom de frontière extérieure pour l'ensemble ouvert des points situés à une distance de E moindre que ρ [7]. Une telle frontière est formée de

---

(6) R. DE MISÈS. *La base géométrique du Théorème de* M. MANDELBROJT. Comptes-rendus de l'Acad. des Sc. de Paris. 205-1937, pp. 1353, 1355.

(7) Un point de la frontière extérieure d'un ensemble est un point de la frontière de cet ensemble qui est aussi point d'accumulation de points extérieurs à l'ensemble.

points (α) et éventuellement de certains points (β). [8]

Si M est un point (α), il existe pour $\Phi(M)$ un «cône d'appui maximal» unique [9] $\Gamma^{\theta}_{M_z}$ dont le demi-angle au sommet θ est le maximum de l'angle φ introduit dès le début de cette étude. Pour un point (α), θ est obtus. Dans la direction Mz, la dérivée de $\rho(M)$ est $-\cos\theta = \max \lim\limits_{M' \to M} \frac{\rho(M') - \rho(M)}{MM'}$.

Si M est un point (β), il convient de remarquer de suite que $\theta = \frac{\pi}{2}$ et que

$$\max \lim_{M' \to M} \frac{\rho(M') - \rho(M)}{MM'} = 0$$

et qu'il peut exister plus d'un cône d'appui maximal pour $\Phi(M)$. Les axes des cônes d'appui en question remplissent un angle plan dont la mesure peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 2π inclusivement ou bien encore sont deux demi-droites oposées.

Ce qui précède justifie la définition suivante:

Définition: *On appele «gradient» (généralisé) de la fonction* ρ (M) *en un point* M *le collectif des vecteurs dont la direction orientée est celle de tout cône d'appui maximal de* Φ (M) *et dont la longueur est le cosinus du supplément du demi-angle au sommet de ce cône d'appui maximal.*

En un point (α) le gradient se réduit à un vecteur unique de longueur inférieure ou égale à 1 (l'égalité est atteinte pour un point ordinaire, c'est-à-dire doué d'une seule projetante).

En point (β) où $\rho(M)$ peut croître, le gradient, formé de vecteurs nuls ne se manifeste plus que par les directions de ces vecteurs.

En un point (β) où $\rho(M)$ ne peut croître ou bien en un point (γ) le gradient n'existe pas.

5. — On sait qu'en Analyse classique on considère les lignes de forces ou lignes de gradient définies par le fait qu'en chacun de leurs points elles sont tangentes au gradient de la fonction de point envisagé. Dans le cas de la fonction $\rho(M)$, on doit considérer plus généralement les «ensembles de gradients» caractérisés par le fait que leur contingent postérieur est, à chaque point, formé par le gradient de $\rho(M)$ au même point.

J'ai pu établir le résultat suivant:

Théorème III — *L'ensemble de gradient de la fonction distance* ρ (M) *issu* [10] *du point* M *est formé de points de multifurcation si* M *est lui-même un point de multifurcation.*

En effet, considérons l'ensemble de niveau F_{ρ} ($\rho' > \rho$) et la sphère d'appui $S^{M M'}_{M}$ de $F_{\rho'}$ centrée en M. MM' est la plus petite distance de M à $F_{\rho'}$, donc le rapport $\frac{\rho(M') - \rho(M)}{MM'}$ est, grâce au fait que M' est une projection de M sur $F_{\rho'}$, aussi grand que possible. Je dis que, si M est un point de multifurcation il en est de même de M'. En effet, supposons pour un instant le contraire, c'est-à-dire que M' soit ordinaire et soit $M'A'$ la projetante de M' sur E. La sphère $S^{M M'}_{M}$ passe, comme $S^{A' M'}_{A'}$ par le point M' et doit être incluse dans $S^{A' M'}_{A'}$. Son centre M doit donc être sur le rayon $A'M'$ de $S^{A' M'}_{A'}$ c'est-à-dire sur la projetante $M'A'$ de M'. Mais alors, on sait que tout point situé sur une projetante d'un autre point est ordinaire [11]. M serait donc ordinaire contrairement à l'hypothèse. Aussi nous devons admettre que M' est un point de multifurcation.

Ce fait subsiste quelle que soit la différence $\rho' - \rho$ ou, ce qui revient au même, la proximité des points M et M'.

En résumé, si M est un point de multifurcation et si M' est un point tel que $\frac{\rho(M') - \rho(M)}{MM'}$ conserve une valeur maxima, si petit que soit MM', M' ne cesse pas, dans les mêmes conditions d'être un point de multifurcation, de sorte que la limite de la demi--droite MM' apartient à la fois au gradient de $\rho(M)$ et au ctg postérieur de l'ensemble des points de multifurcation relatifs à l'ensemble E.

C. Q. F. D.

Si M était ordinaire, le gradient de $\rho(M)$ en M serait opposé à la projetante unique et l'ensemble de gradient issu de M serait le prolongement de cette projetante jusqu'à ce qu'on rencontre éventuellement un point de multifurcation.

6. — ρ désignant toujours la valeur de la fonction distance à partir de laquelle on définit les ensembles de gradient, si on fait tendre ρ vers zéro, on s'aperçoit qu'au départ de E, les points frontaux de E, c'est-à-dire les points de E qui livrent passage à la surface d'une sphère d'appui non nulle, se comportent comme des points ordinaires tandis que les autres sont «comme» des points de multifurcation.

---

(8) Un point (α) est un point par lequel passe un plan d'appui du faisceau de ses projetantes ne portant aucune de ces projetantes. Un point (β) admet encore un plan d'appui pour ses projetantes mais ce plan d'appui contient obligatoirement deux d'entre elles. Un point (γ) n'a pas de plan d'appui de projetantes.

(9) Cette unicité s'établit par un raisonnement analogue à celui qu'on trouve dans l'ouvrage de M. T. Bonnesen «*Les Problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes. Collection des Monographies sur la Théorie des Fonctions*. Paris. Gauthier-Villars. 1929. Chap. III, N.º 25, p. 44.

(10) J'entends par là que je ne considère sur cet ensemble que des points situés à une distance de E supérieure à la distance ρ du point M.

(11) G. Bouligand. *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*, Paris, Vuibert, 1932, Chap. XII, N.º 91, p. 93.

Exemplo de conjunto não mensurável à Lebesgue

por **Ruy Luís Gomes**

Dado o grande interesse teórico deste assunto, por um lado, e por outro a circunstância de não ser considerado senão em bibliografia ainda hoje pouco acessível aos estudantes das nossas Universidades, pareceu-nos útil trazer ao conhecimento dos leitores da «Gazeta de Matemática» um exemplo simples de conjunto não-mensurável.

E fazemo-lo transcrevendo, acrescentado de todas as demonstrações, o *capítulo VII*, *intitulado Non-Measurable Sets*, *das lições dadas por J. von Neumann no Institute for Advanced Study*, *Princeton*, *nos anos lectivos de 1933-34 e 1934-35* [1].

Trata-se da exposição de um dos maiores matemáticos da actualidade e até do ponto de vista didático se impõe com um modelo de clareza e de simplicidade.

E nada mais é preciso invocar para justificar a sua publicação nesta revista.

Demonstração da existência de conjuntos não-mensuráveis à Lebesgue

DEFINIÇÃO 1. *Dado um conjunto* M *de números reais diz-se que o número* a *é um período de* M *se* $(x+a) \in M$ *quando e só quando* $x \in M$.

Segundo esta definição, zero é sempre um período de qualquer conjunto M de números reais.

TEOREMA 1. *Designemos por* P *o conjunto dos períodos de* M. P *é um grupo aditivo.*

Dem. Basta provar que P contém, com a e b, $a-b$. Ora, escrevendo

$$(x+(a-b))+b=x+a$$

e notando que a e b são, por hipótese, períodos de M, imediatamente se deduz que $a-b$ é um período.

THEOREMA 2. *Seja* P *o conjunto dos períodos de* M. *Há-de realizar-se uma destas três hipóteses*: 1) P *só contém o período* 0; 2) P *contém um período mínimo, positivo*, a, *e todos os seus elementos são múltiplos inteiros*, na, *de* a; 3) P *é denso no conjunto*, R, *dos números reais.*

Dem. Se P contém um período diferente de zero, é evidente que contém um período positivo, por isso mesmo que P é um grupo aditivo. Designemos, então, por a o infímo dos períodos positivos de P e suponhamos, como primeira hipótese, que esse ínfimo é o menor dos períodos positivos de P.

Seja b outro período qualquer. Existe um inteiro e um só, n, tal que $n \leqslant b/a < n+1$, donde $0 \leqslant b-an < a$. Ora, como $b-an$ também é um período e não-negativo, terá de ser $b-an=0$ ou $b=an$, pois a é o menor dos períodos positivos.

Suponhamos, finalmente, que P não admite mínimo positivo, mas designemos $\bar{a}$ o ínfimo dos períodos positivos de M. Pela definição de ínfimo, existe um período positivo b tal que $\bar{a}<b<\bar{a}+\varepsilon$ e, consequentemente, um outro período positivo c tal que $\bar{a}<c<b$. Segue-se daqui que $0<b-a<\varepsilon$, sendo $b-a$ um período positivo de M. Dados, então, dois números quaisquer $\alpha<\beta$ é sempre possível arranjar um período positivo $a'<\beta-\alpha$, donde $a'+\alpha<\beta$. Depois, determinemos o inteiro n tal que

$$(n-1)\,a' \leqslant \alpha\,, \quad \alpha < n\,a'\,.$$

Virá

$$\alpha < na' = (n-1)\,a' + a' \leqslant \alpha + a' < \beta\,,$$

como se pretendia demonstrar.

DEFINIÇÃO 2: *Seja* M *um conjunto de números reais e representemos por* I_{ab} *o intervalo semi-aberto* $a \leqslant x < b$. *Definimos* $f(a,b)$ *como* $\mu_e(I_{ab}M)$, *sendo* μ_e *a medida exterior*-L.

É imediato que $f(a,b)$ é finito, não-negativa e $f(a,b) \leqslant \mu(I_{ab}) = b-a$.

TEOREMA 3: *Dados três números* $a<b<c$ *tem-se* $f(a,c)=f(a,b)+f(b,c)$.

Para fazer a demonstração começamos por recordar o seguinte

LEMA: *Todo conjunto aberto* G *se pode escrever como soma de uma sucessão monótonamente ascendente*, $\{M_k\}$, *de conjuntos fechados tais que*

$$\rho(M_k, 1-M_{k+1}) > 0\,.$$

Com efeito, como $1-G$ é fechado, se o ponto P pertence a G, $d(P,1-G)>0$ e inversamente. Consequentemente, $G=\Sigma M_k$, sendo M_k o conjunto dos

---

[1] JOHN VON NEUMANN — *Functional Operators*, Vol. I: *Measures and Integrals*, Princeton University Press, 1950.

pontos de G tais que $\rho(P, 1-G) \geqslant \frac{1}{k}$. E é evidente que $M_k \subset M_{k+1}$ e $M_k = \overline{M}_k$, pois $\rho(P, 1-G)$ é uma função contínua em ordem a P.

Posto isto, representemos por P um ponto de M_k e por a um ponto de $1-M_{k+1}$. Tem-se

$$\rho(Q, 1-G) < \frac{1}{k+1},$$

visto que $a \notin M_k$. Consequentemente, existe um ponto $R \in 1-G$ tal que $\rho(\theta, R) < \frac{1}{k+1}$ sendo, por outro lado, $\rho(P, R) \geqslant \frac{1}{k}$.

De $\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geqslant \rho(P, R)$, vem, pois $\rho(P, Q) \geqslant \rho(P, R) - \rho \geqslant (Q, R) > \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, donde finalmente $\rho(M_k, 1-M_{k+1}) = \frac{1}{k(k+1)} > 0$.

Nestas condições, dado um conjunto aberto G de medida finita e um conjunto qualquer M, temos

$GM = \sum M_k M = M_k M + M_{k+1} M - M_k M + \cdots$ donde

$$\mu_e(GM) \leqslant \mu(M_k M) + \sum_{p=1}^{\infty} \mu_e(M_{k+p} M - M_{k+p-1} M).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(1) \quad & \mu_e(M_{k+1}M - M_k M) + \mu_e(M_{k+3}M - M_{k+2}M) + \cdots \\ & = \lim_{p=\infty} \{ \mu_e(M_{k+1} - M_k M) + \cdots - \\ & - \mu_e(M_{k+2p+1} M - M_{k+2p} M) \} = \\ & = \lim_{p=\infty} \mu_e(M_{k+2p+1} M - M_k M)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}& \mu_e(M_{k+2} M - M_{k+1} M) + \mu_e(M_{k+4} M - M_{k+3} M) + \cdots \\ (2) \quad & = \lim_{p=\infty} \{ \mu_e(M_{k+2} M - M_{k+1} M) + \cdots + \\ & + \cdots \mu_e(M_{k+2p} M - M_{k+2p-1} M) \} \\ & = \lim_{p=\infty} \mu_e(M_{k+2p} M - M_{k+1} M),\end{aligned}$$

pois os conjuntos que figuram em (1) e em (2), têm entre si distâncias positivas e quando isto se verifica a medida exterior à Lebesgue, μ_e, é aditiva.

Ora, como

$$M_{k+2p+1} M - M_k M \subset GM$$
$$M_{k+2p} M - M_{k+1} M \subset GM$$

segue-se que as duas séries (1) e (2) são ambas convergentes, daí resultando que o mesmo sucede à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(M_n M - M_{n-1} M),$$

soma das duas anteriores.

Tomando, então, k suficientemente grande, resulta

$$\Sigma \mu_e(M_{k+p} M - M_{k+p-1} M) < \varepsilon,$$

donde $\mu_e(GM) < \mu_e(M_k M) + \varepsilon$,

e, portanto, $\mu_e(GM) \leqslant \lim_{k=\infty} \mu_e(M_k M)$.

Combinando esta desigualdade com

$$\mu_e(GM) \geqslant \lim_{k=\infty} \mu_e(M_k M),$$

consequência imediata de $GM \supset M_k M$, vem

$$\mu_e(GM) = \lim_k \mu_e(M_k M).$$

Ora, sendo

$$I_{ac} = (a, b) + (b, c) + (b)$$

e escrevendo (a, b) e (b, c) como soma dos respectivos conjuntos M_k, vem

$$(a, b) = \Sigma M'_k, \quad (b, c) = \Sigma M''_k,$$

e

$$\begin{aligned} I_{ac} M &= \Sigma M'_k M + \Sigma M''_k M + (b) M \\ \mu_e(I_{ac} M) &= \lim_k \mu_e(M'_k M + M''_k M) \\ &= \lim_k \mu_e(M'_k M) + \lim_k \mu_e(M''_k M) \\ &= \mu_e(I_{ab} M) + \mu_e(I_{bc} M)\end{aligned}$$

ou

$$f(a, c) = f(a, b) + f(b, c).$$

TEOREMA 4: *Se* p *é um período do conjunto* M, *então* $f(a+p, b+p) = f(a, b)$.

Na verdade se $x' \in I_{a+p\, b+p} M$, temos $x' \in M$ e $x' = p + x$, $x \in I_{ab}$. E como p é um período resulta também $x \in M$, quere dizer, $I_{a+p\, b+p} M \subset I_{ab} M$ e inversamente, donde $f(a+p, b+p) = f(a, b)$.

TEOREMA 5: *Se* $a \leqslant a$, $b' \leqslant b$, *resulta*

$$f(a', b') \leqslant f(a, b).$$

Basta atender a que $I_{a'b'} \subset I_{ab}$.

TEOREMA 6: *Se* M *tem um conjunto de períodos denso em toda a parte, e se* $b - a = b' - a'$, *tem-se* $f(a, b) = f(a', b')$, *de modo que* $f(a, b)$ *é na realidade uma função* $g(b-a)$ *de comprimento de* I_{ab} *exclusivamente.*

Dem. Como $b - a = b' - a'$, vem $b - b' = a - a'$. Determinemos, então, um período p tal que

$$a - a' \leqslant p < a - a' + \varepsilon$$

$$b - b' \leqslant p < b - b' + \varepsilon.$$

Teremos

$$a \leqslant a' + p < a + \varepsilon, \quad b \leqslant b' + p < b + \varepsilon$$

e, em consequência,

$$f(a', b') = f(a' + p, b' + p) \leqslant f(a, b + \varepsilon) \leqslant f(a, b') + \varepsilon.$$

Igualmente teríamos

$$f(a\,,b) \leqslant f(a'\,b') + \varepsilon\,,$$

donde

$$f(a\,,b) = f(a'\,,b')\,.$$

Daqui por deante suporemos que M admite um conjunto de períodos denso em toda a parte.

Teorema 7: *Dados dois números positivos quaisquer* u, v, $g(u) + g(v) = g(u+v)$.

Dem. Determinemos três nùmeros $a < b < c$, tais que $b - a = u$, $c - b = v$. Vem $f(a\,,c) = f(a\,,b) + f(b\,,c)$ donde o teorema.

Teorema 8: *Se* k *designa um número racional positivo qualquer, tem-se* $g(k\,u) = k\,g(u)$.

Dem. Se k é inteiro, trata-se de uma consequência imediata do teorema 6. Se k é da forma $\frac{m}{n}$, vem

$$g\left(\frac{m}{n}\,u\right) = \frac{1}{n}\,n\,g\left(\frac{m}{n}\,u\right) = \frac{1}{n}\,g\,(m\,u) = \frac{m}{n}\,g\,(u)\,.$$

Teorema 9: $g(u) = c\,u$, onde $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Dem. Pelo teorema 7, vem $0 \leqslant g\,(u+v) - g\,(u) = g(v)$ ou $0 \leqslant g(x) - g(y) \leqslant x - y$, com $y = u$, $x = u + v$, donde se conclue que $g\,(u)$ é uma *função contínua*, de u. Aproximando este resultado do teorema 8, resulta $g\,(x) = x\,g(1) = c\,x$. Ora, sendo $0 \leqslant f(a\,,b) \leqslant b - a$, vem $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Teorema 10: *Se* $g(u) = c\,u$, *então* $c = 1$, *a menos que* M *seja um conjunto de medida nula e neste caso* $c = 0$.

Dem. Seja I um intervalo e façamos $m = \mu_e(I\,M) < \infty$. Em virtude da definição da medida exterior-L podemos cobrir $I\,M$ com uma família numerável de intervalos abertos, J_i, de comprimento total inferior a $m + \varepsilon$. Consequentemente, $I\,M \subset J_1\,M + J_2\,M + \cdots$, $m = \mu_e\,(I\,M) \leqslant \mu_e\,(J_1 M) + \mu_e(J_2\,M) + \cdots + \cdots \leqslant c\,(l_1 + l_2 + \cdots) < c\,(m + \varepsilon)$, designando por l_i o comprimento de J_i. Mas, sendo $m < c\,(m + \varepsilon)$, vem $m \leqslant c\,m$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, resulta que $c = 1$, a não ser que $m = 0$. E se $m = \mu_e\,(I\,M)$, para todo I, tem-se [1] $\mu_e\,(M) = 0$.

Teorema 11: *Se* M *tem um conjunto de períodos denso em toda a parte, realiza-se uma destas três hipóteses:* 1) M *tem medida nula*; 2) 1—M *tem medida nula*; 3) $\mu_e(M) = \mu_e(1-M) = \infty$ *e* $\mu_i\,(M) = \mu_i(1-M) = 0$.

Dem. Em virtude do teorema anterior, se $\mu_e(M) \neq 0$, tem-se $c = 1$. Seja, então, N um conjunto mensurável contido em $1 - M$. A definição de conjunto mensurável [2] permite-nos escrever $\mu_e\,(I\,(M + N)) = \mu_e\,(I\,M) + \mu_e\,(I\,N)$, $q \cdot q \cdot$ seja o intervalo I. Portanto, designando por $a\,,b$ os extremos de I, vem $0 = (b - a) - (b - a) = \mu_e(I) - \mu_e(I\,M) \geqslant \mu_e\,(I\,(M + N)) - \mu_e\,(I\,M) = \mu_e\,(I\,N)$, donde $\mu_e\,(I\,N) = 0$ e depois $\mu_e\,(N) = 0$. Quere dizer, a medida interior de $1 - M$, $\mu_i\,(1 - M) = 0$.

Sendo assim, ou também é $\mu_e\,(1 - M) = 0$, e, portanto, $1 - M$ tem medida nula. Ou $\mu_e\,(1 - M) > 0$. Atendendo ainda a que, pela definição de período M e $1 - M$ têm os mesmos períodos, resulta que M tem medida nula ou, então, $\mu_i\,(M) = 0$ e $(\mu_e\,(M) > 0$.

Na hipótese, $\mu_e\,(M) > 0$, $\mu_e\,(1 - M) > 0$, vem, $\mu_i\,(M) = \mu_i(1 - M) = 0$ e, portanto, $\mu_e\,(M) = \mu_e\,(I - M) = \infty$.

Em consequência, M e $1 - M$ não *são mensuráveis.*

Teorema 12 (*construção de um conjunto* M) *: existem conjuntos não mensuráveis.*

Dem. Definamos no conjunto dos números reais a seguinte relação de equivalência: $x \sim y$ se $x - y =$ = racional. E designemos por C_x a classe dos números equivalentes a x. O conjunto dos números reais é evidentemente a soma das classes C_x, e tem-se: 1) a classe C_0 coincide com o conjunto dos números racionais; 2) se x e x' são ambos racionais $C_x = C_{x'}$; 3) se x e x' são ambos irracionais $C_x\,C_x$ é vazio, sendo vazio pois $C_x\,C_{-x}$, para x irracional.

Consideremos agora os pares $[C_x\,C_{-x}]$ em que x é irracional e não façamos distinção entre $[C_x\,C_{-x}]$ e $[C_{-x},\,,C_x]$. Segue-se daqui que para $x \sim y$ ou $-x \sim y$, $[C_y\,,C_{-y}]$ não se distingue de $[C_x\,,C_{-x}]$.

Aplicando então o *axioma de Zermelo* escolhamos um C_x de cada um dos pares distintos $[C_x\,,C_{-x}]$ e representemo-lo por $C_{\bar{x}}$. Façamos finalmente $C = \sum_{\bar{x}} C_{\bar{x}}$, $\overline{\overline{C}} = \sum_{\bar{x}} C_{-\bar{x}}$. Temos $\overline{C}\,\overline{\overline{C}} = 0$, $C_0 + \overline{C} + \overline{\overline{C}} =$ conjunto dos números reais e $1 - \overline{C} = C_0 + \overline{\overline{C}}$. Por outro lado, cada um dos conjuntos, C_0, $\overline{C}, \overline{\overline{C}}$ admite um conjunto denso em toda parte de períodos, a saber a totalidade dos números racionais e àlém disso $\mu\,(C_0) = 0$.

Se $\overline{C}$ é mensurável o mesmo acontece a $1 - \overline{C}$ e portanto a $\overline{\overline{C}}$ em virtude de $1 - \overline{C} = C'' + C_0$. E sendo $\overline{C}$, $\overline{\overline{C}}$ transformados um do outro por intermédio da simetria $y = -x$ as suas medidas terão de ser iguais. Ora, por força de $C_0 + \overline{C} + \overline{\overline{C}} =$ conj. dos números reais conclue-se que nem $\overline{C}$ nem $\overline{\overline{C}}$ podem ter medida nula. Então, pelo teorema anterior, combinado com $1 - \overline{C} = \overline{\overline{C}} + C_0$, $\mu\,(C_0) = 0$, vem $\mu_e\,(\overline{C}) = \mu_e\,(\overline{\overline{C}}) = \infty$ e $\mu_i\,(\overline{C}) = \mu_i\,(\overline{\overline{C}}) = 0$, donde se deduz que $\overline{C}$ e $\overline{\overline{C}}$ são exemplos de *conjuntos não mensuráveis* (de números reais).

---

(1) Basta tomar $\}K_i\{$ tal que $M \subset K_1 + K_2 + \cdots$, pois será $\mu_e(M) = \mu_e\,(M\,K_1 + M\,K_2 + \cdots) \leq \mu_e\,(M\,K_1) + \mu_e\,(M\,K_2) + \cdots = 0$.

(2) Se A é um conjunto mensurável tem-se $\mu_e\,(X) = \mu_e\,(A\,X) + \mu_e\,(X - A)$, q.q. seja X (Carathéodory). Basta, pois, aplicar esta igualdade ao caso $X = I\,(M + N)$, $A = I\,N$.

PEDAGOGIA

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL *

III

por *Maria Teodora Alves*

O programa de Matemática do 3.° ciclo consta de Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria Analítica.

A Aritmética é estudada no 6.° ano, a Geometria Analítica no 7.° ano e a Álgebra e Trigonometria são estudadas tanto no 6.° como no 7.° anos.

O programa de Matemática neste ciclo é, pois, dispersivo. Mas, pior do que a dispersão por quatro ramos da Matemática, há a dispersão que provém dos assuntos tratados em cada um destes ramos não terem sido bem coordenados, apresentando soluções de continuidade, até com saltos bruscos.

Na Aritmética, no 6.° ano, a teoria dos números inteiros é estudada com a recomendação expressa de que «A teoria da adição e da multiplicação são apresentadas pelo método da indução»; em Álgebra no 7.° ano é estudado o número complexo a duas unidades; mas o número fraccionário não é objecto de estudo neste ciclo. O aluno é, portanto, deixado com as ideias intuitivas, e referidas apenas à tecnica de cálculo, que adquiriu no 1.° ciclo. Quanto ao número irracional, o aluno é também deixado com a noção a que se refere o programa do 4.° ano, o que equivale a dizer que é deixado sem nenhumas ideias a tal respeito.

Em resumo: O aluno termina o curso dos liceus sem ter adquirido o conceito de número; ignora os métodos a que a Matemática recorreu para generalizar sucessivamente o conceito de número e as condições de unificação desse conceito nas generalizações e analogias que foram estabelecidas.

O aluno opera com números mas não tem o conceito de número!

O programa de Algebra do 6.° ano inclui as seguintes rubricas:

«Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultaneos, teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos.

Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função».

A estas rubricas segue-se esta outra: «Propriedades dos polinómios inteiros».

Mas no programa do 7.° ano surge desgarrado o conceito de derivada de uma função, perdido entre estas duas rubricas: «Problemas do 1.° e 2.° grau; discussão» e «Fórmulas da soma e da diferença de de dois ângulos».

Já tive ocasião de me referir na *Gazeta de Matemática* (N.° 43) à má localização do conceito de derivada de uma função, no programa de Matemática do 3.° ciclo, e também ao facto desse programa não pedir nenhuma das aplicações desse importantíssimo conceito.

Não vale a pena introduzir no programa o conceito de derivada de uma função sòmente para que o aluno aprenda a derivar funções constituidas por radicais e fracções empoleiradas umas nas outras, que a imaginação dos autores dos livros de exercícios, ou dos professores, possa constituir.

Se não é possível introduzir no programa algumas aplicações do conceito de derivada de uma função, é preferível que esse conceito seja suprimido. Por outro lado, há uma omissão no programa de Matemática do 3.° ciclo que afecta gravemente todos os alunos que terminam o curso dos liceus: Não há nenhuma referência ao cálculo aproximado das operações numéricas nem aos erros dos resultados operatórios.

É vulgar, na resolução de problemas de Matemática, em que intervenham medidas, os alunos apresentarem resultados sem nenhum significado, porque excedem — e em muito — os limites dos erros cometidos nos dados do problema.

Em Física é também vulgaríssimo os alunos apresentarem resultados com seis e mais casas decimais de aproximação, quando a 3.ª casa decimal é já incerta.

Medir e operar com medidas, sem a consciência dos erros cometidos, é medir mal. E é dificilmente justificável que a escola secundária, ensinando o aluno a medir as mais diversas grandezas, e em vários sistemas de unidades, não dê ao aluno o sentido justo da medição.

É, por isso, que surgem casos como este: Um número recente de uma categorizada revista científica portuguesa, com expansão no estrangeiro, insere um artigo em que há medidas estatísticas aproximadas a décimas, com erros prováveis aproximados a sete casas decimais!.

Pouco depois da guerra, em 1945, o importante hebdomadário londrino «*The Observer*» entrevistou,

* Vide *Gazeta de Matemática*, n.os 48 e 49.

por intermédio de um correspondente especial, Sir Edward Appleton, que durante a guerra ocupou o importante cargo de «Secretary of the Departament of Scientific and Industrial Research».

Vou transcrever alguns períodos da notável entrevista, inserta em «*The Observer*», onde a meu ver, a função da escola secundária é posta com justo relevo: Sir Edward is in favour of a good general education even for those who will later become scientific specialists.

He emphasises the dangers of too early specialisation and thinks the examination system should be adjusted to prevent this.

«It is wrong» he says «that schoolboys should be asked to answer easy questions about advanced science when they ought be asked difficult questions about elementary science.»

Devo transcrever mais alguns periodos dessa notável entrevista, para que se não julgue, com a transcrição que acaba de ser feita, que Appleton pretende diminuir a importância da especialialização: Sir Edward believes that the day of the lonely genius, working alone in his secluded laboratory, may be almost over: the future lies mainly with teams.

Com efeito, o radar, os anti-bióticos, os estudos da Física nuclear, etc: confirmam a opinião de Appleton acerca do trabalho de investigação científica por equipes.

Este ilustre professor e investigador, considerado actualmente dos mais notáveis homens de ciência, entende que a especialização é uma necessidade imperiosa imposta pelo enorme desenvolvimento da ciência, mas deve ter por base sólida cultura geral.

E é a escola secundária que deverá fornecer essa cultura geral.

Os programas da escola secundária têm que ser bem estudados e coordenados.

Os professores de todos os graus de ensino devem colaborar na organização dos programas da escola secundária. Em especial, a organização dos programas das disciplinas do 3.º ciclo precisa da colaboração dos professores do ensino superior. Trata-se da resolução de um alto problema científico que interessa a toda a mocidade do nosso país. Nenhum professor pode eximir-se a colaborar na resolução e discussão desse problema.

Indicadas as deficiências do actual programa de Matemática do 3.º ciclo, na minha opinião, apresentarei as directrizes gerais a que esse programa deverá obedecer. Julgo não esquecer que a característica da escola secundária, mesmo no 3.º ciclo, é essencialmente formativa, de carácter geral, e não de técnica.

É possível imaginar vários arranjos nas matérias que podem constituir o programa de Matemática do 3.º ciclo e eu manifesto a minha preferência por aquele que a seguir exponho e que fica submetido à apreciação de quem se interesse por estes assuntos.

No 6.º ano seria sòmente estudada Álgebra e Trigonometria.

No 7.º ano seria também sòmente estudada Álgebra e Aritmética Racional.

O actual programa de Álgebra do 6.º ano seria acrescido do conceito de derivada de uma função, colocado a seguir à rubrica do programa actual «Conceito de continuidade de uma função» e tendo como aplicação o estudo da variação das seguintes funções:

$$y = ax + b\ ;\ \ y = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}\,.$$

Ainda o actual programa de Álgebra do 6.º ano seria acrescido do estudo da função exponencial e dos logarítmos. (Matéria a deslocar do programa do 5.º ano. Veja-se *Gazeta de Matemática*, número 49).

No 7.º ano seria estudada a Álgebra que consta do actual programa e a Aritmética Racional, acrescida da teoria do número fraccionário, do número irracional e do cálculo das aproximações numéricas.

A propósito do estudo do número irracional e das dificuldades que o aluno encontra nesse estudo, R. Courant, que é um investigador e tratadista notável das ciências Matemáticas, diz o seguinte:

Some modern text books on mathematics repel many students by starting with a pedantically complete analysis of the real number system.

Mas eu considero que, de fazer uma completa análise do sistema de números reais, a não fazer nenhuma, há muitissimas situações intermediárias e é uma dessas situações intermediárias que preconizo para o programa de Matemática do 3.º ciclo, tanto mais que o estudo do número irracional permitiria ao aluno aplicar o conceito de limite, que estudou no 6.º ano, firmando e esclarecendo as suas ideias a respeito desse importantíssimo conceito.

Estes acrescentamentos ao programa de Matemática do 3.º ciclo torná-lo-iam mais homogéneo e, no arranjo final das matérias que o constituiriam, também mais, aliviado, porquanto a Aritmética Racional seria deslocada para o 7.º ano e a Geometria Analítica seria suprimida.

Poderá parecer descabida a supressão da Geometria Analítica, no programa do 3.º ciclo. Mas vejamos: No 1.º ano do Liceu, o aluno é iniciado na leitura e construção de gráficos cartesianos. No 2.º ano estuda a representação gráfica da proporcionalidade directa, aplicando-a á resolução de problemas simples. No 3.º, estuda a representação de um ponto num plano (em coordenadas cartesianas rectangulares) e representação gráfica de $y=ax$ e $y=ax+b$ em que a e b são valores numéricos. Ainda no 3.º ano, estuda a resolução gráfica da equação numérica do 1.º grau a uma incognita; de um sistema de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incognitas e desigualdades inteiras do 1.º grau a uma incógnita. No 7.º ano estuda a resolução gráfica da equação do 2.º grau e a representação gráfica do trinómio do 2.º grau.

Depois de tudo isto, o actual programa intercala o estudo da Trigonometria, seguindo-se depois, finalmente, a Geometria Analítica.

Leia-se, agora, o programa de Geometria Analítica e ver-se-á que é constituido por «easy questions about advanced science...», a que se refere o ilustre Appleton.

Mas se se quiser que seja dada aos alunos uma ideia da existência da Geometria Analítica, como ramo próprio das ciências matemáticas, bastará que as instruções que acompanhem o programa destinem uma ou duas lições para que o professor apresente uma síntese dos conhecimentos dos anos anteriores que os alunos já possuem desse ramo da Matemática.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS — Málaga — 1951

De 9 a 16 de Dezembro de 1951 realizou-se em Málaga o XIV Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências. Juntaram-se naquela cidade espanhola cerca de duzentos intelectuais espanhóis e portugueses, que apresentaram os resultados dos seus trabalhos de investigação e discutiram as matérias que os interessam nos vários ramos da ciência.

A Secção de Matemática reuniu-se sob a presidência do Prof. Alfonso Rey Pastor (Univ. de Madrid) e a vice-presidência do Prof. Diogo Pacheco de Amorim (Univ. de Coimbra), secretariados pelo Prof. Aldeanueva Salguero (Escuela de Peritos Industriales de Málaga). O discurso inaugural foi pronunciado pelo Prof. Almeida Costa (Univ. do Porto), que se ocupou do tema: «História dos domínios multiplicativos associativos».

Os trabalhos apresentados, que, por vezes, suscitaram atentas discussões, foram os seguintes:

1. «La tabulación numérica de ecuaciones», por Juan Garcia.
2. «O teorema de Pohlke e a sua generalização ao caso da projecção central», por Jayme Rios de Souza.
3. «Nuevos metodos nomográficos», por J. Belgrano.
4. «Sobre o conceito de posição», por Renato Pereira Coelho (que se deslocou subsidiado pela Sociedade Portuguesa de Matemática).
5. «Critérios para comparar estimadores», por Sixto Rios.
6. «Estimación de las reservas matemáticas por medio de muestras», por Juan Béjar (comunicação apresentada por Sixto Rios).
7. «Sobre la construcción de funciones continuas no derivables» por Rey Pastor.
8. «Esquemas indefinidos de Poisson», por Diogo Pacheco de Amorim.
9. «Sobre algunas funciones algebraicas relacionadas con la integración sistematica de diferenciales elementales», por Manuel Velasco Pando (comunicação apresentada por Rey Pastor).
10. «Algunos teoremas sobre las funcionales lineales». por San Juan (também apresentada por Rey Pastor).
11. «Modificación del test de Lawley para pequeñas muestras», por Alfonso Guiraum (comunicação lida por Sixto Rios).
12. «Sobre una generalización de las curvas de Pearson», por S. Navarro Sagristá (idem).
13. «Sobre os dois grupos de funções de conjunto de primeira classe e a axiomática dos espaços topológicos mais gerais», por Luís Albuquerque (representante da Sociedade Portuguesa de Matemática).
14. «Las matematicas en la mecanica cuantica», por António López Franco (lida pelo Prof. Iñiguez, vice-reitor da Univ. de Zaragoza).
15. «Sugerencia acerca de la construcción de aparatos para el calculo de integrales dobles y la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias», por J. Belgrano.

Na reunião final das direcções das Associações Espanhola e Portuguesa para o Progresso das Ciências foi resolvido que o próximo Congresso se realizasse em 1953, em Oviedo.

L. A.

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Promovido pelo Centro Belga de Investigações Matemáticas realizou-se, em Louvain, em Abril de 1951, um colóquio sobre Geometria Diferencial que reuniu um grupo de especialistas deste ramo da Geometria.

É o terceiro colóquio internacional organizado pelo C. B. I. M. e segue-se aos de Geometria Algébrica e de Topologia das variedades fibradas, que tiveram lugar em 1949 e 1950 e a que a *Gazeta de Matemática* (**43** e **48**) já se referiu.

As comunicações enviadas e conferências feitas foram reunidas em volume* podendo assim delas beneficiar um maior número de matemáticos.

Para dar uma indicação dos assuntos tratados, reproduzimos o índice da publicação:

Bompiani, E, *Topologie des éléments différentiels et quelques applications.*

Favard, J., *Sur quelques problèmes de couvercles.*

Terracini, A., *La notion d'incidence de plans «infiniments voisins».*

Schouten, J., A., *Sur les tenseurs de* V_n *aux directions principales* V_{n-1} *— normales.*

Vincensini, P., *Sur les réseaux et les congruences* (ω).

Haantjes, J., *Sur la géométrie infinitésimale des espaces métriques.*

Lichnerowicz, A., *Généralisations de la Géométrie kählérienne globale.*

Bompiani, E., *Géométries riemanniennes d'espèce supérieure.*

Hlavaty, V., *Géométrie différentielle de contact.*

Kuiper, N. H., *Sur les propriétés conformes des espaces d'Einstein.*

Simonart, F., *Le théorème fondamental de la géométrie textile.*

Van Bouchout, V., *Les lignes hexagonales dans les réseaux de surfaces.*

Backes, F., *La méthode du pentasphère oblique mobile et ses applications.*

Godeaux, L., *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée.*

Rozet, O., *Sur les congruences non* W *de droites.*

Debever, R., *Les espaces de l'électromagnétisme.*

* *Colloque de Géométrie Différentielle* — C. B. R. M., George Thone, Liège et Masson & Cie, Paris, 1951.

SOBRE OS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DA ESTATÍSTICA

No Laboratório de Engenharia Civil, M. O. P., foi realizado um curso sobre Instrumentos Matemáticos da Estatística que teve início em 21 de Janeiro e termo em 21 de Março. Foi constituído por 15 lições e regido pelo matemático da instituição.

O curso apoiou-se sobre um outro realizado no Laboratório em Maio e Junho de 1951 para o seu pessoal técnico e sobre trabalho realizado na previsão de comportamentos ligada a problemas de dimensionamento de estruturas e de traçado de especificações. Foi imediatamente motivado por necessidades reveladas no seguimento destes trabalhos; a extensão da possibilidade de frequência a funcionários das Direcções Gerais, nas Universidades, Institutos, etc., surgiu do sentimento da possível utilidade. A justeza do sentimento ficou patenteada pela larga inscrição e sobretudo pela frequência às lições e pelo interesse revelado nos períodos de questões que prolongaram cada exposição.

As lições assumiram a forma de tratamento de vários temas sem preocupação de ligação entre eles e, dentro de cada um, sem intuito de compendiação; o expositor visou muito deliberadamente conceitos e métodos — e não resultados. Em particular, só iniciou uma ou outra demonstração para esclarecer um conceito ou exemplificar um método suspendendo-a onde ou quando o seu fim parecia atingido.

Segue a lista dos temas com a indicação sumária dos números de sessões que cada consumiu e um breve sumário com uma ou outra indicação de método, alcance, ponto de vista, etc.

(I) *Introdução* (1). — Fez-se a justificação do método que iria ser utilizado nas exposições; em particular distinguiu-se o «papel da demonstração na matemática» do «papel da demonstração na exposição da matemática.» Criticou-se certo cepticismo superficial e espectacular que foi moda entre distintos cultores do Cálculo das Probabilidades e que induz o principiante (com os «paradoxos», por exemplo) em divagações extemporâneas e faz de cada um autor duma teoria da probabilidade. Desta maneira se procurou evidenciar o interesse duma axiomática das probabilidades como base capaz para o desenvolvimento do Cálculo das Probabilidades e, principalmente no curso, como introdução útil às meditações sobre a natureza do aleatório a que todo o usuário dedica necessàriamente algum tempo. Desta forma ficou colocado na sua perspectiva o tema Probabilidade e Medida.

(II) *Probabilidade e Medida* (4). — Introduzindo a distribuição uniforme no intervalo (0,1) e um mecanismo adequado, pôs-se o problema da probabilidade dum conjunto de pontos desse intervalo. Por exemplo, considerou-se demoradamente o conjunto ternário de Cantor e procurou-se a sua probabilidade no contexto indicado. A axiomática dos corpos elementares de probabilidade de Kolmogoroff foi o fio condutor que permitiu abandonar a possibilidade duma probabilidade que fosse um «número» por uma que fosse «extensão» e chegar à medida B pela crítica da medida J e à medida S pela generalização da medida L. A axiomática da medida P (Cramér) apareceu como solução do problema posto: a probabilidade é uma medida P.

O problema do valor médio pôs o do integral definido; primeiro à Cauchy, depois à Riemann – Jordan, à Borel e finalmente à Lebesgue – considerando sempre a distribuição uniforme em (0,1). Os integrais de Stieltjes correspondentes apareceram quando nos libertámos desta hipótese e suposemos uma distribuição da massa 1 definida pela sua cumulante, qualquer.

(III) *Distribuições* (4). — Este grupo de lições visou um objectivo duplo: procurou-se a familiaridade com as densidades e cumulantes das distribuições fundamentais e a facilidade no uso das tábuas que permitem o cálculo efectivo. Para tanto partiu-so das distribuições gama e beta (à maneira de Weatherburn, um pouco encurtada talvez) e estabeleceram-se os nexos com a normal, as do χ^2, de t, de z e F, binomial e de Poisson; desta maneira as «Tables of the Incomplete Γ-Function» e as «Tables of the Incomplete B – Function» de Karl Pearson tomaram o lugar central que lhes compete enquanto que pelo caminho ficavam a claro as transformações simples que das funções de Euler levam às densidades e cumulantes referidas. Exemplificou-se com uma estima de parâmetro e um ensaio de hipóteses.

(IV) *Funções Geradoras* (1). — O título e uma breve introdução procuraram avivar o convívio com estes úteis instrumentos e permitiram uma arrumação da função característica. Esta foi porém o centro de interesse; não tanto, de resto, como função geradora de momentos como pelo teorema da inversão apoiado no da característica da soma e nos dos limites.

(V) *A Lei Normal* (2). — Viu-se a chamada lei normal aparecer como um artifício de cálculo em Moivre (1733). Estabeleceu-se de novo como lei de erros que satisfaz a certas condições simples: as de Gauss, modernizadas. E finalmente, na posição de Laplace, como lei do erro resultante para certo tipo de composição dos erros elementares (também sujeitos a condições).

Esclareceu-se (Laplace-Liapounoff) a posição central que a lei de Laplace-Gauss ocupa na teoria das probabilidades e o domínio em que ela aparece em variadas circunstâncias como uma lei assintótica. Acentuou-se, por outro lado os riscos de uma aceitação por grosso da hipótese da normalidade (distribuição de Cauchy, distribuição dos valores extremos).

(VII) *Estatísticas da Distribuição quase Ignorada* (1). — Levantou-se os problemas da existência de distribuição e do tratamento de distribuições sobre as quais só podem afirmar-se, além da existência, propriedades muito gerais. Esclareceu-se com os teoremas fundamentais das estatísticas ordenadas as possibilidades e deu-se um panorama de resultados neste ramo recente e prometedor da estatística.

(VIII) *Estatísticas Ordenadas* (1). — Definiu-se o problema das distribuições exactas e das distribuições assintóticas de estatísticas ordenadas. Considerou-se primeiro o caso dos quantilhos para que se deu a distribuição exacta (conhecida a cumulante) e uma distribuição limite. Terminou-se com as estatísticas de ordem fixa (extremos e outras) pela exposição e crítica da solução de Fisher e Tippet e da de Gumbel.

Em fecho recordou-se que o curso não foi um episódio sem passado nem futuro no trabalho da instituição mas que, muito pelo contrário serviu de ponte obrigatória de uma para outra parte de trabalhos em progresso. Foi referida também a inevitabilidade da organização no nosso meio de certa actividade do tipo *seminário de matemáticas aplicadas* que preste à engenharia a assistência necessária.

NOTICIÁRIO

DOUTORAMENTO NA F. C. L.

Tiveram lugar, em Fevereiro de 1952, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, as provas para doutoramento em Ciências Matemáticas do assistente do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, José Ribeiro de Albuquerque, nosso querido colaborador.

A tese intitulada «Teoria dos conjuntos projectivos»[1] foi discutida pelo Prof. Doutor José Vicente Gonçalves. Os pontos afixados foram os seguintes: 1 — Formas quadráticas; transformações lineares e invariantes gerais; 2 — Funções simétricas (em geral); funções simétricas das raízes de um polinómio; 3 — Eliminação (polinómios de uma variável); 4 — Raízes imaginárias em equações (inteiras) reais; 5 — Teoremas de redutibilidade (equações de coeficientes inteiros); 6 — Estudo analítico das quádricas regradas; 7 — O problema da intersecção das superfícies em Geometria Descritiva; 8 — Figuras geradas por feixes de planos; 9 — Funções de variação limitada; 10 — As formas quadráticas fundamentais na teoria das superfícies; 11 — Equações lineares às derivadas parciais de 1.ª ordem; 12 — O problema fundamental do Cálculo das Variações.

Os interrogatórios, relativos aos pontos n.os 6 e 12, tirados à sorte, foram feitos, respectivamente, pelos Profs. Doutores J. V. Gonçalves e J. F. Ramos e Costa.

A *Gazeta de Matemática* felicita o Doutor J. Ribeiro de Albuquerque.

[1] *Revista da Faculdade de Ciências*, 2.ª série, A — Vol. 1, págs. 345 a 400, Lisboa, 1951.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MECANICA TEÓRICA E APLICADA

De 20 a 28 de Agosto deste ano realizar-se-á na Universidade de Istambul o 8.º Congresso Internacional de Mecânica Teórica e Aplicada. As comunicações apresentadas serão distribuídas por 5 secções: 1—Elasticidade, plasticidade e reologia; 2 — Mecânica dos fluidos (aerodinâmica e hidrodinâmica); 3 — Mecânica dos sólidos (balística, vibrações, atrito e lubrificação); 4 — Mecânica estatística, termodinâmica e propagação do calor; 5 — Matemáticas da Física e Mecânica e métodos de cálculo.

As línguas oficiais do Congresso são: inglês, francês, alemão e italiano.

A direcção do Secretariado é: P. O. Box 245 — Istambul — Turquia.

PRÉMIO

O «Instituto for the Unity of Science» concederá um prémio de $500 à melhor memória sobre o tema «Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy». Dois prémios adicionais de 200 dollars cada serão atribuídos aos dois outros melhores trabalhos. Trata-se duma competição internacional a que todos podem concorrer. Os trabalhos não devem conter mais de 25.000 palavras, podem ser escritos em inglês, francês, ou alemão e têm de ser apresentados antes de 1 de Janeiro de 1953. Para informações mais pormenorizadas dirigir-se a: Institute for the Unity of Science, American Academy of Arts and Sciences, 28, Newbury Street, Boston, 16, Mass. U. S. A.

M. Z.

(De Acta Mathematica» 87, — Uppsala, 1952)

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1951 — Ponto n.º 2.

3336—Demonstrar que, se os inteiros positivos a e b forem primos entre si, $a+b$ e a^2-ab+b^2 ou são primos entre si ou têm o máximo divisor comum 3. R: *Sabe-se que, se* a *e* b *são primos entre si,* a+b *e* ab *também são. Mas*

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab.$$

Vê-se então que todo o divisor comum a a^2-ab+b^2 *e* a+b *é divisor de* 3ab *e, portanto, só pode ser* 3 *(além de* 1*) visto* a+b *e* ab *serem primos entre si.*

3337 — Considere-se a sucessão dos números primos até p; seja a o produto de alguns desses números, b o produto dos outros; demonstrar que $a+b$ admite um divisor primo superior a p R: *Se* a+b *é primo, a proposição é evidente. Se* a+b *não é primo, admitirá um divisor primo* c *que não pode ser nenhum dos factores de* a *ou* b. *Na verdade, supondo* c *um dos factores de* a, *por ex., seria* $b=\dot{c}$ *(teorema fundamental da divisibilidade), o que é absurdo porque, nestas condições,* c *seria também um dos factores de* b *(se um número primo divide um produto de factores primos é igual a um deles).*

3338 — Demonstrar que $3\cdot 2^{3n+1}+7n-6$, onde n é inteiro positivo, é sempre divisível por 49.

N. B. — Escrevendo $f(n)=3\cdot 2^{3n+1}+7n-6$ calcular $f(1)$, formar a diferença $8f(n)-f(n+1)$ e proceder por indução completa. R:

$$f(1)=3\cdot 2^4+7\cdot 1-6=49$$

$$8f(n)-f(n+1)=2^3[3\cdot 2^{3n+1}+7n-6]-$$
$$-[3\cdot 2^{3n+4}+7(n+1)-6]=49n-49=\dot{49}.$$

Portanto, se $f(n)=\dot{49}$ *também* $f(n+1)=\dot{49}$, *o que demonstra a proposição por indução completa, visto estar verificado que* $f(1)=\dot{49}$.

3339 — Decompor de todos os modos possíveis 1164 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas de 13 e de 29 respectivamente. R: *Sendo* (x_1, y_1) *uma solução inteira positiva da equação* $13x+29y=1164$, *a correspondente solução do problema proposto é*

$$13x_1,\quad 29y_1.$$

3340 — Demonstrar que o produto dos n primeiros números ímpares é igual a $\frac{1}{2^n}C_n^{2n}P_n$, onde C_n^{2n} e P_n representam respectivamente o número de combinações de $2n$ objectos n a n e o número de permutações de n objectos. R:

$$\frac{1}{2^n}C_n^{2n}P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot n!=$$
$$=\frac{1}{2^n}(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)=$$
$$=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$$

atendendo a que $2n-2k=2(n-k)$.

3341 — Para que valores de m tem a equação

$$x^2 + 4x - 3 = m(x + 12 - m)$$

raízes reais e desiguais? R: *A equação dada é equivalente a*

$$x^2 + (4 - m)x + (m^2 - 12m - 3) = 0.$$

Deve ser $\Delta > 0$, *isto é*, $-3m^2 + 40m + 28 > 0$. *Vem* $-\frac{2}{3} < m < 14$.

Soluções dos n.os 3336 a 3341 de Laureano Barros

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1951 — Ponto n.º 2 — Outubro.

I

3342 — A soma dos números a, b e c é igual a 255 e o seu menor múltiplo comum é 1785. Sabe-se ainda que m. d. c. (a, b) = m. d. c. (a, c) = m. d. c. $(b, c) = 17$.

Calcule os números a, b e c. R: *Tem-se* $a = 17k$; $b = 17k'$; $c = 17k''$, *com* k, k' *e* k'' *primos entre si dois a dois.*

Substituindo nas relações dadas, fica: $k + k' + k'' = 255 : 17 = 15$; m. m. c. $(k, k', k'') = k \cdot k' \cdot k'' = 1785 : 17 = 105 = 3 \times 5 \times 7$. *Donde, por ex.*, $k = 3$, $k' = 5$, $k'' = 7$ *e* $a = 51$, $b = 85$, $c = 119$.

3343 — Demonstre que $n^3 + (n+2)^3$ é divisível por 4, qualquer que seja o inteiro n. R: $n^3 + (n+2)^3 = 2n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 2n^2(n+3) + 4$. *Considerando os casos* n *par e* n *ímpar logo se vê que a primeira parcela é também sempre divisível por* 4.

II

3344 — Calcule os valores inteiros e positivos de a e b que anulam a raíz da equação $a(x - 17) + 204 = 2b(5 - x)$. R: *A equação dada é equivalente a* $(a + 2b)x - (17a + 10b - 204) = 0$. *As condições a impor são:* *1)* $17a + 10b = 204$; *2)* $a + 2b \neq 0$. *A equação 1) tem uma só solução em números inteiros e positivos,* $a = 2$, $b = 11$, *que satisfaz também 2).*

3345 — Dado o trinómio $f(x) = px^2 - qx + 1$ deduza a relação que deve existir entre p e q para que o trinómio admita uma raíz superior e outra inferior a 1. R: *Deve ter-se* $p\,f(1) < 0$, *isto é* $p(p - q + 1) < 0$.

III

3346 — Determine os ângulos x positivos e inferiores a π radianos que tornam positiva a fracção

$$\frac{2\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x - 1}{\mathrm{sen}\, x - 1}.$$

R: *O denominador da fracção é não positivo; deve ser, pois:* $2\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x - 1 < 0$, *isto é*, $-1 < \mathrm{sen}\, x < 1/2$.

Donde, $0 \leqslant x < \pi/6$; $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$.

3347 — Mostre que se o triângulo ABC é rectângulo em A, se tem $\frac{\mathrm{sen}\, B + \mathrm{sen}\, C}{\cos B + \cos C} = \mathrm{sen}^2 A + \cos^2 A$.

R: *Se* $A = 90°$, $B = 90° - C$, *donde*:

$$\frac{\mathrm{sen}\, B + \mathrm{sen}\, C}{\cos B + \cos C} = \frac{\mathrm{sen}\, B + \cos B}{\cos B + \mathrm{sen}\, B} =$$

$$= 1 = \mathrm{sen}^2 A + \cos^2 A, \qquad \text{c. q. d.}$$

Soluções dos n.os 3342 a 3347 de Fernando S. David

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico e Faculdade de Engenharia do Porto — Ano de 1951 — Outubro.

3348 — Determinar m de maneira que a soma dos quadrados das raízes da equação

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

seja igual a um número N. A que se reduzem as raízes da equação dada para o menor valor de N? R: *Sendo* x_1 *e* x_2 *as raízes, teremos* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2m + 10 = N$, *donde* $m = 1 \pm \sqrt{N - 9}$.

Supondo que a segunda parte do problema se refere ao menor valor de N que torna reais os coeficientes da equação $(N = 9)$ *as raízes pedidas são* $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

3349 — Qual o número de triângulos que se podem obter tomando para vértices dez pontos num plano, sendo três deles colineares? R: $C_3^{10} - 1 = 119$.

3350 — Resolver a equação

$$x^4 - 12x^2 + 9 = 0$$

fazendo, se preciso, a transformação dum radical duplo na soma de dois radicais simples. R:

$$x = \pm\sqrt{6 \pm 3\sqrt{3}} = \pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

3351 — Que valor deve ter m para que o terceiro e o oitavo termos do desenvolvimento do binómio $\left(\frac{x}{\sqrt{3x}} - 2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^m$ sejam dois termos equidistantes dos extremos? Calcule então o valor desses terceiro e oitavo termos. R: $m - 2 = 7$, *donde* $m = 9$;

$$T_3 = \frac{16}{3\sqrt{3}}\, x^2\sqrt{x},\ T_8 = -1536\,\frac{\sqrt{x}}{x^3}.$$

3352 — Qual é o menor número inteiro que verifica a inequação:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x(x-1)(x+1)} > 0. \quad \text{R: } x = 6.$$

Soluções dos n.os 3348 a 3352 de Fernando S. David

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º Exame de frequência — 1949-50.

3353 — Discutir e resolver o sistema:

$$x-3y+z-4=0\,,\quad 2x-3y+2z+1=0\,,$$
$$-2x+y-3z-2=0\,,\quad -x+y-\alpha z-3=0\,.$$

3354 — Em que pontos $(x\,,y)$ tem a função

$$f(z)=\frac{1+i\,(z-1)}{2z-i}$$

um valor real? E um valor imaginário puro? Pode prever-se que as linhas obtidas têm um ponto comum? Qual e porquê?

3355 — Seja para a curva $x^2-y^2=1\,,\overline{PQ}$ o segmento de normal em P, entre P e o eixo das abcissas. Determinar e estudar a equação do lugar geométrico dos pontos médios de $\overline{PQ}$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência — 15-2-1952.

3356 — Diga o que entende por série convergente e por soma e resto duma tal série. Enuncie e demonstre o critério de convergência de d'Alembert e o respectivo corolário.

3357 — O que entende por classes contíguas de números racionais? Sendo X uma grandeza positiva e α um número positivo definido por duas classes contíguas H, K de números racionais positivos como se passa da grandeza X para a grandeza αX. Demonstre que dadas duas grandezas A e B positivas existe sempre um número positivo α tal que $A=\alpha B$.

3358 — Deduza a equação da circunferência de centro em $C\,(2{,}1)$ tangente à recta $y-2x-2=0$. Designando por A o ponto em que a recta é tangente à circunferência e por O a origem das coordenadas, escreva a equação do lugar geométrico dos vértices dos triângulos de base OA e de área igual à do triângulo OAC.

3359 — Sabendo que $\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{(\pi/10)^2}{2!}+\frac{(\pi/10)^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(\pi/10)^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ calcular $\cos\frac{\pi}{10}$ com êrro inferior a $0{,}01$.

3360 — Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt[3]{2x^3+x-1}}$. b) $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{1}{1+2^{\operatorname{tg}x}}$.

3361 — Facultativo — Represente gràficamente o conjunto dos pontos (x,y) que verificam a condição $(3y-xy>2)\cap(y=x)$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência.

3362 — Diga o que entende por série absolutamente convergente e demonstre que toda a série absolutamente convergente é convergente. Enuncie e demonstre um teorema relativo a séries de sinais alternados.

3363 — Defina soma de dois números positivos α e β. Demonstre que se for $\alpha=(A\,|\,A')$ e $\beta=(B\,|\,B')$, sendo $A\,,A'$ por um lado e $B\,,B'$ por outro pares de classes contíguas de números racionais, se tem: $\alpha+\beta=(A+B\,|\,A'+B')$.

3364 — Considere a parábola $y^2=6x$ e a recta $y=x+k$. a) Determine o valor de k para que a recta seja tangente à parábola e designe por P o correspondente ponto de tangência. b) Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos tais que o quadrado da sua distância a P seja igual à distância à recta $4x-3y+6=0$.

3365 — Calcule, a menos de $0{,}001$, a soma da série $\displaystyle\sum_0^\infty\frac{1}{5^n\,n!}$.

3366 — Calcular a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x(x-1)}}{x^2-2x+1}$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x(x-1)}}{x^2-2x+1}$.

3367 — Facultativo — Represente gràficamente o conjunto dos pontos (x, y) tais que $(x^2+y^2=1) \cap \cap (3x-4y>0)$.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência — Maio 1952.**

3368 — Definr os conceitos de máximo e mínimo locais e o de função regular num dado intervalo. Enuncie e demonstre o teorema de Rolle.

3369 — Defina o conceito de assíntota e deduza as fórmulas usuais para a determinação das assíntotas duma curva caso estas existam.

3370 — Estudar a função $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ e representá-la gràficamente.

3371 — Separar as raízes da equação $x^3-3x-1=0$ e determinar uma delas, a menos de 0,01.

3372 — Discutir o sistema $\begin{cases} x+6y+3z=1 \\ 4x+15y+pz=2 \\ 6x+3py+15z=8. \end{cases}$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 3 de Outubro de 1951.**

3373 — Estude e represente gràficamente a função $y = \dfrac{(a-x)^2}{a+x}$ $(a>0)$. R:

Domínio. $(-\infty, -a)$ *e* $(-a, +\infty)$; $\lim\limits_{x=-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{y=-a-0} y = -\infty$; $\lim\limits_{x=-a+0} x = +\infty$; $\lim\limits_{x=+\infty} y = +\infty$.

Continuidade. *É contínua em todos os pontos do domínio.*

Traços. *Os pontos* $(a, 0)$ *e* $(0, a)$.

Crescimento. $y = x - 3a + \dfrac{4a^2}{a+x}$ *e portanto:*

$y' = 1 - \dfrac{4a^2}{(a+x)^2}$ *que se anula quando* $4a^2 = (a+x)^2$ *isto é:* $x_1 = -3a$ *e* $x_2 = a$. *Função crescente em* $(-\infty, -3a)$; *decrescente em* $(-3a, a)$; *crescente em* $(a, +\infty)$.

Máximos e mínimos. $M(-3a, -8a)$ *e* $m(a, 0)$.

Concavidade. $y'' = \dfrac{8a^2}{(a+x)^3}$; $y''<0$ *em* $(-\infty, -a)$ *concavidade negativa;* $y''>0$ *em* $(-a, +\infty)$ *concavidade positiva. Não há inflexão em ponto algum do domínio.*

Assíntotas. *A recta de equação* $x+a=0$ *é assíntota; de* $y = x - 3a + \dfrac{4a^2}{a+x}$ *resulta outra assíntota de equação* $y = x - 3a$. *As assíntotas de uma curva algébrica, não são, evidentemente, em número superior ao grau da equação da curva (neste caso 2).*

A curva é uma hipérbole.

3374 — Determine a, b, c, d, e, f de tal modo que:

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 5x^2 + 2x + 1 \equiv a(x-2)^5 + b(x-2)^4 + c(x-2)^3 + d(x-2)^2 + e(x-2) + f$$

e aproveite o resultado para indicar o número de raízes de $f(x)$ superiores a 2. (Enuncie a regra que lhe permitiu indicar este número de raízes). R: *Forma-se a transformada em* $(x-2)$

	2	−5	0	−5	2	1
2		4	−2	−4	−18	−32
	2	−1	−2	−9	−16	|−31
2		4	6	8	−2	
	2	3	4	−1	|−18	
2		4	14	36		
	2	7	18	|35		
2		4	22			
	2	11	|40			
2		4				
	2	|15				

Temos portanto:

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 5x^2 + 2x + 1 = \\ = 2(x-2)^5 + 15(x-2)^4 + 40(x-2)^3 + \\ + 35(x-2)^2 - 18(x-2) - 31.$$

O número de raizes superiores a um número a *não excede o número de variações dos coeficientes da transformada em* $(x-a)$ *e, quando inferior é da mesma paridade.*

Há uma raiz superior a 2.

3375 — Utilize a sucessão de Sturm na contagem e separação das raízes de $x^4+x^3-3x^2+4x-2=0$. R: *Forme-se a sucessão de* Sturm *com o algoritmo conhecido*

$f(x)$	1	1	−3	4	−2
$f_1(x)$	4	3	−6	4	
	−1	6	−12	8	
	27	−54	36		
$f_2(x)$	3	−6	4		

É desnecessário prosseguir no algoritmo das divisões sucessivas, porque a terceira função mantem o sinal em $(-\infty, +\infty)$ *visto ter raízes imaginárias.*

Calculados os limites das raízes (pelo método de NEWTON*)* $L=1$ *e* $l=-3$*, teremos*:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$x^4+x^3-3x^2+4x-2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$4x^3+3x^2-6x+4$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3x^2-6x+4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
N.º de variações	2	2	1	1	1	0	0

Confrontando a primeira e última colunas, teremos para resultado da contagem, duas raízes reais; uma raiz no intervalo $(-3, -2)$ *outra em* $(0, 1)$. *Há quatro raízes, duas reais já separadas e duas complexas conjugadas.*

3376 — Quantas funções $y(x)$ define implicitamente a equação $f(x, y)=2x^2+(2-3y)x+y^2-2=0$ nas vizinhanças do ponto $x=1$. Enuncie o teorema de existência. Determine os três primeiros termos do desenvolvimento em série de alguma das funções $y(x)$, atrás definida, na vizinhança do ponto $x=1$. R: *Enunciado do teorema de existência. «Se a função* $f(x, y)$ *se anula no ponto* $P(a, b)$*, isto é:* $f(a, b)=0$*; se numa vizinhança de* $P(a, b)$ *a função é contínua como função de* x*; se numa vizinhança de* P *a função é contínua e monótona como função de* y*; é possível determinar uma vizinhança de* a*, tal que a cada* x *aí tomado, corresponde um e um só* y*, de tal modo que os pares assim associados anulam* $f(x, y)$*».*

Pode demonstrar-se ainda que, nas hipóteses do teorema enunciado a função $y(x)$ *é contínua em qualquer ponto* x *do seu domínio (a vizinhança de* a *que se determinou) e, por consequência, é representada no plano* xOy *por um arco de curva contínua passando por* $P(a,b)$.

Demonstra-se também que, nas hipóteses do teorema enunciado e supondo ainda que $f(x, y)$ *é diferenciável em* $P(a, b)$ *e com derivada* $f'_y(a, b) \neq 0, \infty$ *a função* $y(x)$ *é diferenciável no ponto* $x=a$*; admite pois aí uma derivada finita dada por* $y'(a)=-\dfrac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}$. *Geomètricamente, o arco de curva contínua que representa* $y(x)$ *admite uma tangente ordinária não paralela a* Oy*, no ponto* $P(a, b)$.

Se a derivada $f'_y(a,b)$ *é contínua no ponto* P*, além de finita não nula, o arco de curva que representa* $y(x)$*, é um arco de curva regular e sem tangente alguma paralela a* Oy*, em alguma vizinhança de* P.

Fortalecendo as hipóteses do teorema de existência, atrás enunciado, obtem-se: «se a função $f(x, y)$ *é nula no ponto* $P(a, b)$*; se* $f'_x(x, y)$ *é finita em cada ponto de uma vizinhança de* P*; se* $f'_y(x, y)$ *é finita, nunca nula e sempre do mesmo sinal em cada ponto de outra viziuhança de* P*: então* $f(x, y)=0$ *define uma e só uma função* $y(x)$ *na vizinhança de* $x=a$*».*

Fortalecendo ainda mais as hipóteses obtem-se finalmente um teorema de existência de uso corrente: «se $f(x, y)$ *é nula no ponto* $P(a, b)$*; se* $f'_x(x, y)$ *é contínua em* P*; se* $f'_y(x, y)$ *é contínua e não nula em* P*; então,* $f(x, y)=0$ *define uma e só uma função* $y(x)$ *em certa vizinhança de* $x=a$*».*

Para $x=1$ *a função* $f(x,y)=2x^2+(2-3y)x+y^2-2$ *é nula com* $y=1$ *e* $y=2$. *No ponto* $P(1,1)$ *é:* $f'_x=4x+2-3y$ *e* $f'_y=-3x+2y$ *manifestamente contínuas e com* $f'_y(1,1)=-1$. *Há pois uma função* $y_1(x)$ *definida implìcitamente na vizinhança de* $x=1$*, e que vai assumir valores vizinhos de* 1.

No ponto $P(1,2)$ *as derivadas parciais são contínuas e* $f'_y(1,2)=+1$*; há pois uma função* $y_2(x)$ *definida implìcitamente na vizinhança de* $x=1$*, e que vai assumir valores vizinhos de* 2.

O desenvolvimento da primeira função é:

$$y_1(x)=y_1(1)+(x-1)\,y'_1(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}\,y''_1(1)+\cdots$$

com $\quad y_1(1)=1; \quad y'_1(x)=-\dfrac{4x+2-3y}{-x+2y}$

donde $\quad y'_1(1)=3; \quad y''_1(x)=$

$$=\frac{(3x-2y)(4-3y')-(4x-2-3y)(3-2y')}{(3x-2y)^2}$$

donde $y''_1(1)=4$.

Portanto: $y(x)=1+3(x-1)+2(x-1)^2+\cdots$

Soluções dos n.os 3373 a 3376 do J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência ordinário — 23-2-1952.

I

3377 — Determinar a relação que deve existir entre os coeficientes a e b para que sejam reais todas as raízes da equação $\left(\dfrac{i-x}{i+x}\right)^n=a+bi$.

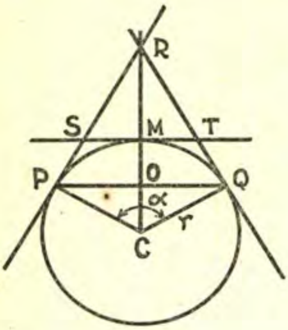
Resolver a equação, nessa hipótese, supondo conhecido o argumento α do complexo $a+bi$. R: *Supondo* x *real, tem-se que o módulo do complexo* $\dfrac{i-x}{i+x}$ *é igual à unidade. A relação entre* a *e* b *é, portanto,* $a^2+b^2=1$. *De* $a+bi=\cos\alpha+i\cdot\operatorname{sen}\alpha$*, vem*

$$\frac{i-x}{i+x}=\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha+2k\pi}{n}=$$
$$=\cos\beta+i\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Daqui tira-se:

$$x=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta+2k\pi}{2n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

3378 — Considere um arco de circunferência. Tire tangentes pelo seu ponto médio e pelas extremidades. Seja A a área do triângulo formado pela corda do arco e pelas tangentes nas extremidadades, e B a área do triângulo formado pelas três tangentes. Mostre que $\lim A/B=4$ quando o comprimento do arco tende para zero. R: *A figura mostra-nos que*



$$\frac{A}{B}=\frac{\overline{OR}^2}{\overline{MR}^2}$$

Mas

$$\overline{OR}=\overline{PO}\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=r\cdot \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\cdot \sec\frac{\alpha}{2}$$

e

$$\overline{MR}=\overline{CR}-r=$$

$$=2r\cdot \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{4}\cdot \sec\frac{\alpha}{2}.$$

Vê-se imediatamente que

$$\frac{A}{B}=\frac{\operatorname{sen}^4(\alpha/2)}{4\cdot \operatorname{sen}^4(\alpha/4)}$$

e daqui resulta

$$\lim_{\alpha=0}\frac{A}{B}=4.$$

3379 — Calcular a derivada da função

$$y=(\cos x)^{\frac{1}{\log\cos x}}\cdot(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\log\operatorname{sen} x}}+$$
$$+\operatorname{ch}\log x+\operatorname{sh}\log x-x.$$

Poder-se-ia prever o resultado obtido sem efectuar a derivação? R: *Repare-se que*

$$f(x)^{\frac{1}{\log f(x)}}=e$$

e que $\operatorname{ch}\log x+\operatorname{sh}\log x=x$. *Logo* $y=e^2$ *e a sua derivada é nula.*

II

3380 — Mostre que o recíproco dum complexo é igual ao cociente do seu conjugado pela norma comum. Deduza daqui que as potências do mesmo expoente, inteiro, de complexos conjugados são também complexos conjugados.

3381 — Diga se o teorema de Cauchy significará que uma função derivada, contínua num intervalo, toma sempre sinais contrários nos extremos, onde se supõe que a função primitiva tem valores iguais.

Verifique que o teorema de Rolle se pode considerar um caso particular do de Lagrange e que este, por sua vez, está incluido no desenvolvimento duma função pela fórmula de Taylor.

3382 — Estabeleça as propriedades mais importantes da função tangente hiperbólica e represente-a gràficamente. Escreva a sua função inversa sob a forma duma função logarítmica.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de frequência extraordinário — 29-2-1952.

I

3383 — Dado no plano de Cauchy o afixo dum complexo z, determinar o afixo dum complexo z', tal que $|z'-z|=a\cdot|z|$ e o cociente z'/z seja um imaginário puro (a — número real positivo). Discutir o problema para os diferentes valores de a e interpretá-lo geomètricamente. R: *A segunda condição obriga a ser* $\cos(\alpha'-\alpha)=0$, *ou seja,* $\alpha'=\pi/2+\alpha$ ou $\alpha'=3\pi/2+\alpha$.

Quanto à primeira condição, temos

$$a\cdot\rho=\sqrt{\rho'^2+\rho^2-2\rho\cdot\rho'\cdot\cos(\alpha'-\alpha)}\ \text{ e }\ \rho'=\rho\cdot\sqrt{a^2-1}.$$

Haverá 2 *soluções para* $a>1$, *uma solução para* $a=1$ *e nenhuma para* $a<1$.

3384 — Dada a função $y=f(x)$, admitindo derivada de 3.ª ordem contínua, calcular

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+3h)-3\cdot f(x+2h)+3\cdot f(x+h)-f(x)}{h^3}.$$

R: *Desenvolver* $f(x+3h)$, $f(x+2h)$ *e* $f(x+h)$ *pela fórmula de* Taylor, *para* $n=3$ *e com resto de* Lagrange.

Verifica-se imediatamente que o limite procurado é igual a $f'''(x)$.

3385 — Mostrar que a função

$$y=x^2\cdot\left(a\cdot\cos\frac{m}{x}+b\cdot\operatorname{sen}\frac{m}{x}\right)$$

satisfaz à equação

$$x^4\cdot y''-2x^3\cdot y'+(2x^2+m^2)\cdot y=0.$$

R: *Calcule-se*

$$y'=2x\cdot(a\cdot\cos m/x+b\cdot\operatorname{sen} m/x)+$$
$$+m\cdot(a\cdot\operatorname{sen} m/x-b\cdot\cos m/x)$$

e

$$y''=2\cdot(a\cdot\cos m/x+b\cdot\operatorname{sen} m/x)+$$
$$+2m/x\cdot(a\cdot\operatorname{sen} m/x-b\cdot\cos m/x)-$$
$$-m^2/x^2\cdot(a\cdot\cos m/x+b\cdot\operatorname{sen} m/x).$$

Substituindo na equação dada obtém-se uma identidade.

II

3386 — Demonstre que a soma das potências de expoente m das n raízes de índice n da unidade é igual a n se m é múltiplo de n e é nula se m não é múltiplo de n.

Qual será o valor daquela soma para as n raízes de índice n dum complexo?

3387 — Defina ordem dum infinitésimo. Que valores pode ela tomar? Prove que a ordem de $\beta=e^{-x}$ em relação a $\alpha=1/x$, infinitésimos quando x tende para infinito, é um infinitamente grande. Para isso, verifique primeiro que

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty .$$

3388 — Enuncie as propriedades mais importantes das funções inversas. A função potência transcendente, de expoente maior que a unidade, pode inverter-se? Caso afirmativo, faça um estudo sumário dessa função inversa e represente-a gràficamente.

Enunciados e soluções dos n.os 3377 a 3388 de J. H. Arandes

ERRATA — Exercício 3310, *Gazeta de Matemática*, 49, Outubro de 1951.

O Sr. Eng. Arandes assinala-nos uma incorrecção no exerc. 3310. A abscissa ξ do ponto variável P é dada pela conhecida relação:

$$\xi=\frac{x_B-r x_A}{1-r}=\frac{-2a-(-2)\cdot a}{1-(-2)}=0 .$$

Anàlogamente, para a ordenada, η, teríamos $\eta=-2a^3$. O lugar geométrico dos pontos P é pois o eixo 0η das ordenadas ($\xi=0$) e não uma circunferência.

M. Z.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência — 1949-50.**

3389 — Extremar a função

$$\varphi(x,y,z)=(p-x)(p-y)(p-z)$$

com $x+y+z=2p$.

3390 — Determinar as trajectórias ortogonais da família de rectas $y-ax+3a=2$.

3391 — Calcular o integral da função $\sqrt{a^2-x^2}$ no intervalo $(a, a\sqrt{3}/2)$.

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final de 1949-50.**

3392 — Extremar a função $xy\cdot(x+2y-3)$.

3393 — Resolver a equação diferencial:

$$y^{IV}-y'''-3y''+5y'-2y=1620(1+x^2)e^x .$$

3394 — Considerar a circunferência $x^2+y^2-8y+9=0$ e o sector circular limitado pelo eixo $0y$ e pelo segmento de recta de união do centro da circunferência com o ponto A em que esta curva intersecta a parte positiva do eixo $0x$.

Calcular a área deste sector.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **4.º Exercício de revisão — 1950-1951.**

3395 — Dada a linha $y=\log x$ determinar: a) Assíntotas e gráfico da linha; b) A equação da evoluta; c) A circunferência osculadora no ponto $x=\pi/4$; d) O comprimento do arco compreendido entre os pontos $x=0$ e $x=\pi/6$. R:

Assíntotas: $x=\pi/2+k\pi$, k *inteiro*.

Evoluta: $\begin{cases} X=x-\operatorname{tg} x \\ Y=\log\cos x-1 . \end{cases}$

Circunferência osculadora:

centro $(x_0=\pi/4-1,\ \ y_0=-\log 2/2-1)$

raio $R=\sqrt{2}$,

equação: $\left(X_1-\frac{\pi}{4}+1\right)^2+\left(Y_1+\frac{1}{2}\log 2+1\right)^2=2 .$

Comprimento do arco:

$$s=\int_0^{\pi/6}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx=$$

$$=\left[\log\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi/6}=\frac{1}{2}\log 3 .$$

3396 — Sendo $\rho=1+\operatorname{tg}\theta$ determinar: a) As equações das assíntotas; b) O gráfico; c) A área da região do 4.º quadrante limitada pela linha dada e pela linha $\rho=\cos\theta$. R: *A linha é simétrica com respeito à origem* $\rho(\theta)=\rho(\theta+\pi)$.

Assíntotas: $\rho=\infty$ *para* $\theta_0=\pi/2$

$$(S_t)_{\theta_0}=\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta+2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\right)_{\pi/2}=1 .$$

Uma assíntota: $\rho=\frac{1}{\cos\theta}$

Outra assíntota (pela simetria referida) $\rho=-\frac{1}{\cos\theta}$.

Área:

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0}(1+\mathrm{tg}^2\theta+2\,\mathrm{tg}\,\theta)\,d\theta=$$
$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left[\log 2-1\right].$$

3397 — Determinar as linhas para as quais o comprimento de arco entre um ponto fixo e um ponto corrente seja igual ao quadrado da ordenada desse ponto

$$\int_a^X\sqrt{1+y'^2}\,dx=y^2(X).$$

R:

Derivando em ordem a X *e elevando ao quadrado ambos os membros vem* $1+y'^2=4y^2y'^2$, *ou*

$$(1-\sqrt{4y^2-1}\;y')\,(1+\sqrt{4y^2-1}\;y')=0 \qquad (1)$$

que se desdobra em duas equações diferenciais das quais só integraremos uma

$$1-\sqrt{4y^2-1}\;y'=0\,. \qquad (2)$$

Separando variáveis e integrando vem

$$\int\sqrt{4y^2-1}\,dy=X+k\,.$$

Fazendo $2y=\mathrm{ch}\,t$ *vem*

$$\int\mathrm{sh}^2 t\,dt=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-t)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[2y\sqrt{4y^2-1}-\log\left(2y+\sqrt{4y^2-1}\right)\right].$$

O integral geral de (2) *é então*

$$2y\sqrt{4y^2-1}-\log\left(2y+\sqrt{4y^2-1}\right)- \qquad (3)$$
$$-2x+C=0\,.$$

O integral geral da outra equação referida e

$$-2y\sqrt{4y^2-1}+\log\left(2y+\sqrt{4y^2-1}\right)- \qquad (4)$$
$$-2x+C=0\,.$$

Multiplicando membro a membro (3) *e* (4) *obtem-se a equação das linhas pedidas.*

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 5.º Exercício de revisão — 1950-1951.

3398 — Calcular $I=\iint_D \rho\,d\rho\,d\theta$ sendo o domínio D limitado pelas linhas $\rho=1+\cos\theta$ e $\rho=2\cos\theta$. R:

$$I=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_{2\cos\theta}^{1+\cos\theta}\rho\,d\rho+$$
$$+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\,d\rho$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(1+\cos\theta)^2-4\cos^2\theta\right]d\theta+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta-2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[2\pi+\pi\right]-\pi=\frac{\pi}{2}\,.$$

3399 — Considerando a superfície S gerada pela rotação em torno do eixo dos xx do ramo onde $x>0$ da linha $x^2-y^2=1$, determinar: a) a área da zona desta superfície limitada pelo paralelo $x=\sqrt{2}$; b) o volume do sólido limitado pela superfície S e pelo plano do paralelo $x=2$. R:

a) $dA=2\pi y\,ds$, $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y'=x/y$

$A=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-1}\,dx$. *Fazendo* $\sqrt{2}\,x=\mathrm{ch}\,t$ *vem*

$$A=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{\arg\mathrm{ch}\sqrt{2}}^{\arg\mathrm{ch}\,2}\mathrm{sh}^2 t\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big[\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-t\Big]_{\arg\mathrm{ch}\sqrt{2}}^{\arg\mathrm{ch}\,2}=$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{3}-\arg\mathrm{ch}\,2-\sqrt{2}+\arg\mathrm{ch}\sqrt{2}\right]$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\log\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right].$$

b) $dV=\pi y^2\,dx$

$$V=\pi\int_1^2(x^2-1)\,dx=\frac{4}{3}\pi\,.$$

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 1.º exercício de revisão — 1951-52.

I

3400 — Calcular, a partir da definição, a derivada de $y=x^2\,\mathrm{tg}\,x$ para $x=\pi$. R:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(\pi+h)^2\,\mathrm{tg}(\pi+h)-\pi\,\mathrm{tg}\,\pi}{h}=$$
$$=\lim\,(\pi+h)^2\,\frac{\mathrm{tg}\,h}{h}=\pi^2\,.$$

3401 — Derivar $y=\sqrt[x]{\mathrm{ch}\log_{\mathrm{th}\,x}\cos x}$. R:

$$y'=\sqrt[x]{\mathrm{ch}\log_{\mathrm{th}\,x}\cos x}\left[-\frac{1}{x^2}\log\mathrm{ch}\log_{\mathrm{th}\,x}\cos x-\right.$$
$$-\frac{1}{x}\,\mathrm{th}\log_{\mathrm{th}\,x}\cos x\,\cdot$$
$$\left.\cdot\,\frac{\mathrm{tg}\,x\cdot\log\mathrm{th}\,x-\mathrm{coth}\,x\cdot(1-\mathrm{th}^2x)\log\cos x}{\log^2\mathrm{th}\,x}\right].$$

II

3402 — Determinar a ordem e a parte principal de $\beta = x - \operatorname{sen} x$ com respeito a $\alpha = 1 - \cos x$ para $x \to 0$. R:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta}{\alpha^n} = \lim \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^n} = \lim \frac{\frac{x^3}{3!}}{\left(\frac{x^2}{2!}\right)^n} = A .$$

Para $n = 3/2$ (*ordem de* β *com respeito a* α) *vem*

$$A = \lim \frac{x^3}{3!} \frac{2^{3/2}}{x^3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{3} \alpha^{3/2} + \varepsilon$$

ε — *infinitamente pequeno de ordem superior a* 3/2 *com respeito a* α.

III

3403 — Determinar os máximos e mínimos de $y = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)}$ e fazer a representação gráfica. R:

$$y' = \frac{4x+2}{x^2(1+x)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{zeros } x = -1/2 \\ \textit{Pontos de descontinuidade:} \\ \quad x = 0\,,\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$y''_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left[\frac{4}{x^2(1+x)^2}\right]_{-\frac{1}{2}} > 0 \quad \to x = -\frac{1}{2} \quad \textit{mínimo}.$$

Para valores suficientemente pequenos de $h > 0$ *vem*

$$\left.\begin{array}{l} y'_{(-h)} = \dfrac{2-4h}{+\cdots} > 0 \quad \textit{Crescente} \\ y'_{(h)} = \dfrac{2+4h}{+\cdots} > 0 \quad \textit{Crescente} \end{array}\right\} \textit{Crescente}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'_{(-1-h)} < 0 \quad \textit{Decrescente} \\ y'_{(-1+h)} < 0 \quad \textit{Decrescente} \end{array}\right\} \textit{Decrescente}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \pm 0 \ \to y = \mp \infty \\ x = -1 \pm 0 \to y = \pm \infty \\ x = \pm \infty \to y = 1 \end{array}\right\} \textit{Assímptotas} \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Para $-1 < x < 0 \to y \geqslant f\left(-\frac{1}{2}\right) = 9$

Para $x < -1$ ou $x > 0 \to y < 1$

Para $x = -2$ e e $x = 1 \to y = 0$.

IV

3404 — Calcular $\int \sqrt{2x^2 + 1}\, dx = I$. R: *Fazendo* $x = \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{2}}$ *vem*

$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \operatorname{ch}^2 t\, dt$. *Integrando por partes*

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arg \operatorname{sh} \sqrt{2}\,x\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{2}x + \sqrt{1+2x^2}\right)\right] + C.$$

3405 — Calcular $\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = J$. R: *Fazendo* $x = 2 \operatorname{ch} t$ *vem*

$$J = 4 \int \operatorname{sh}^2 t\, dt = 2 [\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t] + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \arg \operatorname{ch} \frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \log\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right) + K.$$

Outros problemas saídos:

3406 — Derivar $(\log_{\log x} x)^{\log x}$.

3407 — Calcular a derivada de $\operatorname{sh} x^2$ a partir da definição.

3408 — Desenvolver em série de Mac-Laurin $y = \operatorname{sen}^2 x$ e analisar o resto de Lagrange.

3409 — Determinar os máximos e mínimos de $y = x^2 e^{-x^2}$ e de $y = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$ e desenhar os respectivos gráficos.

3410 — Calcular: $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + 2x + 4}}\, dx$;

$$\int \frac{dx}{(1 + x + x^2)^2} \quad ; \quad \int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1 + x}\, dx .$$

Soluções dos n.os a 3395 a 3410 de Rogério Nunes

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **1.º exame de frequência — Março 1952.**

3411 — Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências de variável complexa tal que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$. Sabe se esta série é convergente para $z = e^{i + \log 2}$? Justifique a resposta.

3412 — Calcule duas das raízes da equação

$$z^6 - 5z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 1 = 0 .$$

3413 — Primitive as seguintes funções:

a) $\sqrt[4]{4x-4}\log(x-1)$.   b) $\dfrac{\operatorname{arcsen}(7x)}{\sqrt{1-49x^2}}$.

3414 — Calcule uma primitiva da função

$$\frac{(\cos x+1)^3\left(\frac{5}{2}-\operatorname{sen}x+\frac{11}{2}\cos x-14\operatorname{cotg}x+14\operatorname{cosec}x\right)}{(\cos x-1)\,(2+\operatorname{sen}x+2\cos x)^3}$$

Nota: dispensa-se o cálculo dos coeficientes relativos a uma das raízes e pede-se o resultado sob forma real.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **2.º exame de frequência — Maio 1952.**

3415 — Seja $f(x)=1-2x^2+x^3+\cdots$ e $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ que, para $x=0$, toma o valor 1. Escrever os quatro primeiros termos do desenvolvimento de $F(x)$ e os três primeiros termos do de $[F(x)]^2$ em série de potências de x.

3416 — Seja z a função de t e v definida pelas condições $z=x^2+y$, $x=t+u+v$, $y=f(t)$, $u=g(t)$. Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial v}$ sem efectuar substituição alguma.

3417 — Sendo V o vector $(x-y, x)$ e C o arco da parábola $y=x^2$ desde o ponto $(0,0)$ até ao ponto $(1,1)$, calcular $\int_C VdP$.

3418 — Calcular o volume limitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ e $z=1$.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — **1.º exame de frequência 1950-51. 1.ª chamada 20-1-951.**

3419 — Produto mixto de três vectores: definição e propriedades.

3420 — Sistemas de vectores equivalentes.

3421 — Centro de um sistema de vectores paralelos: definição e propriedades.

3422 — Movimento central: definição e propriedades. Importância da fórmula de Binet

$$\bar{a}=-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\,1/r}{dx^2}+\frac{1}{r}\right)\bar{m}.$$

3423 — Dado o plano $\pi\equiv P=O+\bar{e}_1-3\bar{e}_2+5\bar{e}_3+\lambda(2\bar{e}_1-\bar{e}_2+\bar{e}_3)+\mu(4\bar{e}_1+5\bar{e}_2+2\bar{e}_3)$ e a recta $r\equiv Q=O+3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3+\nu(\bar{e}_1-5\bar{e}_2+\bar{e}_3)$ escrever a equação vectorial do plano normal a π que passa pelas intersecções da recta r com os planos OXY e OYZ. R: *Se o plano* α —•— $\begin{cases}Q_{OXY}\\ Q_{OYZ}\end{cases}$, *sendo* Q_{OXY} e Q_{OYZ} *pontos da recta, o plano pedido* α —•— r.

Sendo $n \perp \pi$ *teremos* ∴ *a equação do plano* $\alpha\equiv M=O+\bar{d}+\zeta\bar{e}+\eta\bar{n}$ $\quad M=O+3\bar{e}_1+2\bar{e}_2+\bar{e}_3+\zeta(\bar{e}_1-5\bar{e}_2+\bar{e}_3)+\eta(-\bar{e}_1+2\bar{e}_3)$.

3424 — É dado no plano OXY o segmento $\overline{AB}$ tendo as duas extremidades sobre os eixos coordenados e fazendo com o sentido negativo de OX o ângulo α. Considere-se um sistema de 4 vectores $\bar{v}_1=-a\bar{e}_1$, $\bar{v}_2=-b\bar{e}_2$, $\bar{v}_3=h\bar{e}_2$, $\bar{v}_4=k\bar{e}_1$ aplicados: $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_3$ em A; $\bar{v}_2$ em C (ponto médio de $\overline{AB}$), $\bar{v}_4$ em $\bar{B}$.

Supondo dados os valores de a e b determinar os valores de h, k, e α para que este sistema seja equivalente a zero. R: *Para que o sistema seja equivalente a zero terá de ser* $\begin{cases}\bar{R}=0\\ \bar{G}=0\end{cases}$ *em relação a qualquer ponto do espaço.*

Como $\bar{R}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\bar{v}_4=(-a+k)\bar{e}_1+(h-b)\bar{e}_2$,

em relação ao ponto A *teremos* $\begin{cases}\bar{R}=0\\ \bar{G}_A=0\end{cases}$

$$\bar{G}_A=(C-A)\wedge\bar{v}_2+(B-A)\wedge\bar{v}_4$$

$$\bar{G}_A=\frac{B-A}{2}\wedge-b\bar{e}_2+(B-A)\wedge k\bar{e}_1.$$

Será então:

$$\begin{cases}(-a+k)\bar{e}_1+(h-b)\bar{e}_2=0 & k=a\\ \dfrac{B-A}{2}\wedge-b\bar{e}_2+(B-A)\wedge k\bar{e}_1=0 & h=b\end{cases}$$

$$\frac{B-A}{2}\wedge b\bar{e}_2=(B-A)\wedge k\bar{e}_1$$

$$\frac{b}{2}\cos\alpha=k\operatorname{sen}\alpha \qquad \alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{2k}.$$

Resposta: $h=b$ $\;k=a$ $\;\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{2k}$.

3425 — O ponto P descreve a elipse $\frac{p}{1+e\cos\varphi}$ com um movimento central em relação a um dos focos e sendo o módulo da sua velocidade quando passa no vértice mais próximo do foco igual a $1+e$. a) Determinar os módulos da velocidade e aceleração do ponto e a constante das áreas. b) A partir das componentes radial e transversa da velocidade, decompor este vector segundo as perpendiculares ao eixo maior da elipse e ao raio vector. c) Determinar o valor de todas as grandezas indicadas nas duas alíneas anteriores quando o ponto passa na perpendicular ao eixo maior tirada pelo foco. R: a) *Nas condições do enunciado, podemos utilizar as seguintes expressões:*

$\bar{c}=(P-O)\wedge\bar{v}$ *como* $(P-O)=\frac{p}{1+e}$ *e* $v=1+e$

obtém-se $c=\frac{p}{1+e}(1+e)\operatorname{sen}90^\circ=p$

$$v^2=c^2\left[\left(\frac{d\,1/r}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]$$

$$v^2=1+e^2+2e\cos\varphi \qquad v=\sqrt{1+2e\cos\varphi}$$

$$a=-\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2\,1/r}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right]$$

$$a=\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{p}.$$

b) *Designemos por* v_1 *e* v_2 *respectivamente as componentes da velocidade segundo as perpendiculares ao eixo maior e ao raio vector.*

Como $v_t=r\frac{d\varphi}{dt}$ *e* $v_r=\frac{dr}{dt}$ *teremos as seguintes relações*

$$v_1\operatorname{sen}\varphi=v_r \qquad v_1\cos\varphi+v_2=v_t.$$

Mas como $\frac{dr}{dt}=\frac{ce}{p}\operatorname{sen}\varphi$, $v_1=\frac{ce}{p}$

obtém-se

$$r\frac{d\varphi}{dt}=\frac{c}{p}(1+e\cos\varphi) \quad e \quad v_2=\frac{c}{p}.$$

c) *Neste caso* $p=90^\circ$ *e* $v=\sqrt{1+e^2}$, $a=\frac{1}{p}$, $c=p$, $v_1=e$, $v_2=1$.

Soluções dos n.os 3419 a 3425 de J. d'Oliveira Vicente

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência — 16-2-51.

3426 — É dado o campo de vectores

$$\dot{X}=5+z-2y$$
$$Y=2+2x+3z$$
$$Z=7-3y-x.$$

Será ele um campo de momentos? Anular-se-á nalgum ponto?

3427 — Conceitos e propriedades das funções harmónicas — Definição do problema de Dirichlet.

3428 — Legitimidade de utilização da série trigonométrica do seno e da série trigonométrica do coseno.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência extraordinário — 1951.

3429 — Determinar uma curva plana tal que o centro de gravidade da área limitada pelos eixos coordenados, pela curva e pela recta $X=x$, tenha por abcissa $x_1=\frac{ax}{a+x}$. R:

$$\frac{ax}{a+x}=\frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx}=\frac{x\int_0^x y\,dx-\int_0^x dx\int_0^x y\,dx}{\int_0^x y\,dx}$$

ou

$$(a+x)\int_0^x dx\int_0^x f(x)\,dx=x^2\int_0^x f(x)\,dx$$

derivando duas vezes vem

$$(a-3x)\,y=x^2y'$$
$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x^2}(a-3x)$$
$$\log y+3\log x=-\frac{a}{x}$$
$$y=\frac{c}{x^3}e^{-\frac{a}{x}}.$$

3430 — Função de Green. Sua utilização na resolução do problema de Dirichlet.

3431 — Componentes da velocidade e da aceleração dum ponto em coordenadas gerais. — Comparar as componentes da aceleração com os primeiros membros das equações das geodésicas, em cálculo absoluto. E concluir dessa comparação que a grandeza da aceleração, sobre uma geodésica, é $\frac{d^2s}{dt^2}$.

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame de frequência — Julho de 1951.

3432 — Integrar as equações do movimento dum sólido com um ponto fixo, no caso em que o ponto fixo é o centro de gravidade do sólido e o elipsoide central de inércia é de revolução. R: *As equações de* Euler *reduzem-se a equações diferenciais de coeficientes constantes cujos integrais são imediatos.*

3433 — a) Princípio de HAMILTON da mecânica einsteineana; b) Verifique que as transformações especiais de LORENTZ formam um grupo.

3434 — a) Classifique os movimentos dum fluido perfeito; b) Num movimento irrotacional, que propriedade deve ter o potencial das velocidades para que a velocicade seja um rotor?

Quais as consequências? R: *Se for* $v = \text{grad}\,\varphi = \text{rot}\,\alpha$ *será* $\text{div grad}\,\varphi = \text{lap}\,\varphi = \text{div rot}\,\alpha = 0$. φ *e função harmónica.*

3435 — Seja $L\,(q_1, q_2, \cdots q_n, z_1, z_2, \cdots z_n, t)$ uma função qualquer dos seus argumentos, admitindo derivadas. E seja $\varphi = L + \sum_1^n \frac{\partial L}{\partial z_h}(q'_h - z_h)$.

Verifique que as equações de estacionaridade do integral 1) $\int_{t_0}^{t_1} \varphi\, dt$ se reduzem às equações de LAGRANGE da função L, com $z_h = q'_h$. R: *As equações de estacionaridade de* 1) *são*

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum \frac{\partial^2 L}{\partial z_h\, \partial q_i}(q'_h - z_h) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z_i} = 0$$

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial L}{\partial z_i} + \sum \frac{\partial^2 L}{\partial z_h\, \partial z_i}(q'_h - z_h) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0\,;$$

para $z_h = q'_h$ a) *reduz-se ao sistema de* LAGRANGE *e* b) *verifica-se identicamente.*

Soluções dos n.os 3429 a 3435 de J. Gaspar Teixeira

PROBLEMAS

No n.º 49, a Redacção da G. M. anunciou abrir, a partir do presente n.º, duas secções permanentes:

1 — Inquérito aos Leitores.

2 — Concurso de Problemas.

E, desde então, se pedia a todos os Leitores o auxílio de comunicarem à Redacção as suas impressões sobre a orientação actual e futuros melhoramentos a introduzir na nossa Revista — que essas impressões venham sob todas as formas, oral ou escrita, de todos os lados, Continente, Ilhas, Ultramar ou Estrangeiro, e de todos os sectores matemáticos, principiantes, alunos de cursos médios e superiores e professores de Matemática.

Particularmente se dizia: «Mais do que nunca se torna necessário que esses professores apontem qual o caminho a seguir, quais as modificações a fazer na nossa Revista».

Em resposta a este esboço de inquérito, a Redacção recebeu até a data da composição do presente n.º a opinião de dois leitores: JMF de Lisboa e LM dos Açores.

Este facto levanta um novo problema à orientação da *Gazeta*: o do esclarecimento perante os Leitores dos objectivos da Revista:

1 — A G. M. não tem quaisquer intuitos lucrativos; os anúncios não são pagos, os autores dos artigos publicados não recebem um «centavo», quase todos os colaboradores pagam as respectivas assinaturas.

2 — A G. M. «pretende ser um instrumento de trabalho e um guia» para todos os estudiosos de Matemática. Este facto exige uma perfeita e íntima colaboração entre os seus Leitores e Redactores, por forma que estes possam, efectivamente, imprimir a mais útil orientação. Em resumo: A G. M. vive exclusivamente dos seus Leitores e para os seus Leitores; *é necessário pois que sejam estes,* através da Redacção, *os verdadeiros orientadores da Revista.*

E este, na realidade, o problema fundamental da G. M.: resolvido, estarão implicitamente solucionados os restantes, incluindo o da grave situação financeira.

A Redacção agradece reconhecida as duas cartas recebidas em resposta ao inquérito iniciado e *pede insistentemente* a atenção dos Leitores para a necessidade do desenvolvimento do mesmo inquérito.

Serão apresentados à apreciação dos leitores resumos das sugestões recebidas.

Inicia-se no presente n.º o Concurso de Problemas anunciado no n.º 49, cujo regulamento é o seguinte:

Regulamento do Concurso de Problemas

1 — É aberto um concurso, entre os leitores da G. M., de problemas propostos pela Redacção, dividido em 3 secções: *a)* Elementar, *b)* Média e *c)* Superior.

2 — Cada solucionista poderá concorrer a uma ou a todas as secções.

3 — O Concurso, em cada secção, consistirá na resolução de seis problemas publicados em números sucessivos da G. M., dois em cada número.

4 — As soluções devem ser apresentadas até ao fim do trimestre a que respeita o número da G. M. em que saíram os problemas, afim de serem publicadas as melhores no mais próximo número em que for possível (em geral no segundo número posterior à publicação do problema).

5 — As soluções deverão ser apresentadas em folhas

soltas e escritas de um só lado e cada folha só conterá um problema, e indicará o nome do solucionista.

a) Os símbolos deverão ser escritos à mão.

b) Os desenhos deverão ser apresentados em folhas separadas e cobertos a tinta da China, com indicação do problema a que se referem e o nome do autor da solução.

6 — Serão atribuídos os seguintes prémios ao melhor solucionista que, em cada secção apresentar um mínimo de 5 soluções certas:

Secção elementar — 1 assinatura dum ano da G. M. e 1 exemplar dos *Conceitos Fundamentais de Matemática* por Bento de Jesus Caraça.

Secção média — 1 exemplar do Vol 1, fascs. 1 e 2 da *Álgebra Moderna* por L. van der Waerden e 1 exemplar do Vol. I do *Boletim da S. P. M.*

Secção superior — um exemplar do *Integral de Riemann* por Ruy Luís Gomes e 1 exemplar do último volume publicado da *Portugaliae Mathematica.*

Problemas propostos

Secção Elementar:

3436 — Existe um só triângulo em que os três lados e uma altura são números inteiros consecutivos. Determine um tal triângulo.

3437 — Mostrar que não há base de sistema de numeração na qual um número de três algarismos iguais seja o cubo desse algarismo, isto é, $\overline{aaa}=a^3$.

Secção Média:

3438 — Demonstrar que $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3439 — Determinar o lugar geométrico do centro de uma circunferência variável que passa por um ponto fixo e que corta uma recta fixa segundo um ângulo constante.

Secção Superior:

3440 — Determinar a região de convergência da série $1+r\cos z+r^2\cos 2z+\cdots$.

3441 — Mostrar que uma homografia que conserva a recta no infinito do plano $x0y$ (eixos cartesianos rectangulares) conserva ainda o centro de gravidade de toda a área homogénea S contida no mesmo plano $x0y$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

92 — LESPINARD, V. et PERNET, R. — **Arithmétique,** Classe de Mathématiques Elémentaires (et Technique), 2.ª éd., Lib. André Desvigne, Lyon.

Trata-se de um manual destinado a estudantes dos cursos preparatórios das Escolas Superiores.

Nesses cursos, os programas de Aritmética são sensìvelmente os mesmos, em Portugal e França, pelo que se torna útil a professores e estudantes portugueses o conhecimento de livros como este. Da sua leitura e do confronto consequente com os nossos livros congéneres devem resultar, em geral, alguns ensinamentos.

Embora, no prefácio, os Autores se refiram à simplicidade de uma construção axiomática da Aritmética e tudo pareça indicar que vão fazer uma exposição desse tipo, da leitura do livro conclui-se que é totalmente diferente a orientação seguida. Esta é a vulgarmente utilizada nos livros elementares de Aritmética; trata-se, no entanto, de uma exposição clara e, de forma geral, precisa (dentro do quadro utilizado).

Excepcionalmente, os autores dão um desenvolvimento pouco usual a um ou outro ponto (por ex., a divisão de números naturais) e renovam, num ou noutro capítulo, a exposição. De forma particular, referimo-nos à teoria da divisibilidade que é exposta, neste livro, com base no conceito de congruência. Tanto entre nós como em França, só há pouco, em *livros elementares*, começou a ser utilizado este processo.

Só excepcionalmente, também, aparecem aspectos grosseiros como o seguinte:

Definido produto de um número a por um número b como soma de b números iguais a a: $a\times b=a+a+\cdots+a$ (b vezes) (1) concluem os autores que $a\times 0=0$ «porque no 2.º membro da igualdade (1) não figura nenhum número a».

Os exercícios propostos, embora pouco numerosos, constituem uma colectânea interessante quer pela variedade quer pelo nível (superior, em geral, ao encontrado nos nossos livros didáticos, mesmo em livros de exercícios). Só por isso valerá a pena ser consultado pelos nossos estudantes, embora conheçamos outros compêndios franceses da «Classe de Mathématiques», em que a extensão e variedade dos problemas propostos é incomparàvelmente maior (por ex., Arithmétique de Brachet et Dumarqué).

Laureano Barros

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará três números em 1952

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1952 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-à, á composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1952 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282