GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIII N.° 52 AGOSTO 1952

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XIII — N.º 52 **GAZETA DE MATEMÁTICA** AGOSTO — 1952

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Guido Castelnuovo

por José Sebastião e Silva

No dia 27 de Abril de 1952 perdeu a Itália uma das suas mais venerandas figuras de cientista e perdeu a Matemática um dos seus mais valiosos cultores — Guido Castelnuovo, o eminente geómetra que, em cerca de 87 anos, deu ao mundo um raro exemplo de vida nobremente vivida.

Guido Castelnuovo nasceu em Veneza em 14 de Agosto de 1865. De seu pai, Enrico Castelnuovo, escritor e romancista de talento, herdou o temperamento artístico.

Desde muito cedo manifestou inclinação para as matemáticas, e um hábil professor, Faifofer, no Liceu Foscarini de Veneza, soube descobrir e avivar essa tendência do jovem Guido.

Aos 21 anos formou-se na Universidade de Pádua sob a orientação de Giuseppe Veronese, um dos mais brilhantes discípulos de Cremona. Logo em seguida foi para Turim como assistente de D'Ovidio e travou ali conhecimento com Corrado Segre, geómetra de eleição, que exerceu influência profunda e decisiva sobre a evolução científica de Castelnuovo [1].

Em 1891, apenas com 26 anos e já notabilizado pelos seus trabalhos, é nomeado Professor da Cadeira de Geometria Analítica e Projectiva da Universidade de Roma. Nesse lugar se manterá ininterruptamente até 1935, ano em que atinge o limite de idade.

Pouco depois da vinda de Castelnuovo para Roma, deu-se um facto que viria a ter as mais felizes repercussões na ciência italiana. Federigo Enriques, então rapaz de 21 anos, concluída a sua formatura na Escola Normal Superior de Pisa, e já evidenciado com alguns trabalhos de investigação em geometria projectiva hiperespacial, veio para Roma em Novembro de 1892 como estudante de aperfeiçoamento, afim de iniciar as suas pesquisas no campo da Geometria Algébrica. Era este um novo ramo da Geometria, que tinha por objecto o estudo das propriedades invariantes a respeito das transformações birracionais. Estava então em Roma Luigi Cremona, o grande mestre que foi em Itália o pioneiro da Geometria Algébrica com a descoberta das transformações birracionais, também chamadas transformações cremonianas, e à volta de quem se formara um verdadeiro enxame de de estudiosos, animados pelo fervor de explorar as novas sendas de investigação.

Castelnuovo e Enriques encontraram-se nesse período. Teve então início uma sólida camaradagem que havia de prolongar-se por toda a vida e a que veio dar maior consistência o matrimónio de Castelnuovo com Elbina Enriques, irmã de Federigo. Naquele ano de 1892 já Castelnuovo era homem célebre por algumas suas memórias em que se ocupa das propriedades invariantes a respeito das transformações birracionais das superfícies [1] e que ficaram como pilares da nova teoria, hoje conhecida por «Geometria sobre uma superfície». Em longos, intermináveis passeios pelas ruas de Roma (no tempo em que eram calmas e silenciosas as ruas das grandes cidades) Castelnuovo expôs ao companheiro os mais recentes resultados obtidos no novo campo e indicou-lhe as questões que continuavam abertas. Decorridos poucos meses, com fulgor genial, Enriques levantava um outro pilar da mesma teoria, escrevendo uma memória que foi publicada em 1893.

E assim Castelnuovo, iniciando o amigo, aclarava ele mesmo as suas ideias e criava estímulos mais fortes à própria actividade criadora. Dos seus passeios com Segre em Turim se disse que tinha nascido então uma nova Geometria. Dos seus passeios com

(1) C. Segre era apenas dois anos mais velho do que Castelnuovo e veio a ser, como este, uma das figuras mais representativas da escola geométrica italiana.

(1) Deve, no entanto, especificar-se que os primeiros importantes trabalhos de Castelnuovo se referem à reconstrução da teoria das séries lineares sobre as curvas (Geometria sobre uma curva) com base na geometria numerativa.

Enriques se veio a dizer que vários progressos decisivos da Geometria Algébrica foram feitos nas ruas de Roma.

Em 1894, Enriques vai para a Universidade de Bologna, donde só 28 anos depois é transferido para Roma; mas de nenhum modo este afastamento veio afrouxar a sua cooperação com Castelnuovo.

Sobre a base constituída pelas concepções algébricas e analíticas vindas da Alemanha (Riemann, Brill, Noether, Klein, etc.), os dois cunhados geómetras desenvolvem, no decorrer de anos calmos e laboriosos, a sua obra monumental, que há de conduzi-los à glória.

«Mai tanta collaborazione familiare fu così fruttuosa» — disse Francesco Severi na alocução proferida pela rádio no dia seguinte ao do falecimento de Castelnuovo.

Mas a eles se veio juntar, com uma diferença de poucos anos, esse outro astro da escola geométrica italiana — Francesco Severi — no momento em que novas ideias e novos métodos eram introduzidos em Geometria Algébrica com o afluxo da contribuição matemática francesa (Poincaré, Picard, Painlevé, etc.). Assim como não é possível dissociar os nomes de Enriques e Castelnuovo no domínio da produção científica, assim também é inevitável nomear Severi quando se fala dos primeiros (¹). Qualquer dos três é colocado entre os fundadores e os mais insignes cultores da Geometria Algébrica.

Hoje, com a moderna orientação abstrata da Álgebra e da Topologia, a Geometria Algébrica envereda por uma via morosa de consolidação e de aperfeiçoamento lógico; mas é a eles, é à intuição prodigiosa dos geómetras italianos, que se deve grande parte das conquistas essenciais.

Castelnuovo e Enriques tiveram em Roma por companheiros dilectos dois outros grandes matemáticos que embora em campos diversos, contribuiram igualmente para a glória da ciência italiana: Vito Volterra e Tullio Levi-Civita. Enriques e Levi-Civita residiam ambos no n.º 50 de Via Sardegna. No escritório de Castelnuovo destacavam-se os retratos de Volterra e de Levi-Civita: figura austera a do primeiro, homem intransigente e combativo, de antes quebrar que torcer; sorridente e comunicativo o segundo, alma pura, de transparente bondade idealista.

*

Não é meu propósito descrever aqui, nem sequer sumáriamente, a obra de Castelnuovo: para tanto me falecem, além do mais, oportunidade e competência. Sobre a contribuição italiana à geometria das superfícies pode consultar-se o artigo da Enciclopédia Alemã das Ciências Matemáticas, redigido por Castelnuovo e Enriques em 1914, ou o segundo volume da «Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes» de Picard, ou ainda qualquer das obras de Enriques sobre o assunto. Por ocasião do jubiléu de Castelnuovo, foram publicadas as suas «Memorie scelte». (¹)

Mas não posso deixar de me referir a outros aspectos fundamentais da personalidade científica de Castelnuovo. Digna do máximo relevo é a sua actividade pròpriamente pedagógica. São bem conhecidas nos nossos meios universitários as suas «Lezioni di Geometria Analítica» que serviram de modelo à fusão dos ensinos da Geometria Analítica e da Geometria Projectiva, operada em toda a Itália; e também o seu tratado de Cálculo das Probabilidades, que desde logo se tornou clássico. A Castelnuovo se devem preciosas contribuições esclarecedoras ao método dos momentos de Tchebitcheff e ao método estatístico que informa a Mecânica Atómica e Nuclear dos nossos dias.

Notável ainda o seu livrinho sobre a Teoria da Relatividade — «Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein» — em que se reflectem as preocupações filosóficas do último seu período.

Além da cadeira de Geometria Analítica e Projectiva de que era professor, Castelnuovo regeu ainda, em épocas diversas, cursos de Geometria Superior, de Cálculo das Probabilidades e de Matemáticas Complementares. Em todos estes campos a sua actuação é igualmente luminosa e fecunda. Do êxito das suas lições de Cálculo das Probabilidades resulta a fundação de Institutos de Ciências Demográficas e Actuariais, que adquirem fama no estrangeiro. E é ainda graças às suas diligências que vinga a ideia de criar uma cadeira de Física Teórica para o jovem Enrico Fermi. A sua fina intuição, que o levava a descobrir as recônditas belezas do mundo geométrico, também lhe serviu para entrever a vocação dum grande físico, hoje conhecido em todo o mundo.

Precisamente, um dos aspectos que mais impressionam em Castelnuovo é a sua elasticidade de espírito, a agilidade com que passa das locubrações mais abstractas aos assuntos de ordem técnica e prática. Bastaria citar a este respeito as suas contribuições em matéria de seguros e de actuariado. Mas deve ainda evocar-se o particular interesse que sempre lhe

(¹) Em 1907, Enriques e Severi alcançam o prémio Bordin da Academia das Ciências de Paris com uma memória sobre as superfícies hiperelípticas, que é considerada como uma das obras primas da literatura matemática italiana deste século.

(¹) Podem ler-se ainda a notícia necrológica dada pelo geómetra R. Garnier nos «Comptes Rendus» da Academia das Ciências de Paris, de 4 de Junho, e o artigo de F. Conforto sobre F. Enriques, nos «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», serie V, vol. VI (1947).

mereceram as questões de ensino, mesmo as do ensino elementar, porque — e é este um traço bem curioso da sua personalidade — mostrava um tacto especial para os pontos delicados das questões didácticas, quási como se delas tivesse uma experiência directa.

*

Em 1938 CASTELNUOVO é atingido pelas duras leis raciais. Durante esse período doloroso, que se prolonga por seis anos e em que ele arrosta o perigo com serenidade estoica, organisa Cursos Universitários de Matemática para jovens hebreus, aos quais é vedada a frequência das Universidades Italianas, e consegue que os respectivos diplomas sejam validados pela Universidade de Friburgo, na Suiça. No período da ocupação alemã, que vai de 8 de Setembro de 1943 a 4 de Junho de 1944, enquanto a população romana se definha e segue ansiosa a lenta evolução das tropas aliadas na frente de Cassino e na de Anzio e Nettuno, CASTELNUOVO mantém-se na «Cidade Aberta», hospedado com nome falso em casa de alunos.

Mas terminada a guerra, melhores dias lhe estão reservados. Desde logo eleito Presidente da renascida Academia dos «Lincei» (da qual o último presidente tinha sido VOLTERRA), ele dedica o melhor dos seus cuidados à principal academia italiana, a que dá uma estrutura francamente estimuladora da actividade de investigação. É também nomeado Comissário Geral no Conselho Nacional de Investigação, Presidente da delegação italiana à UNESCO e da Sociedade Europeia de Cultura.

Mas também é chamado a intervir nos destinos da Nação. Em 1948 é escolhido como um dos cinco senadores em vida eleitos pelos seus méritos excepcionais.

E agora, na última quadra da existência, sem mesmo repousar da longa caminhada, volta-se de novo para o que foi o *leit-motiv* da sua vida, fonte inexaurível de harmonias feiticeiras: a Geometria Algébrica; e consegue resolver um problema que há muito o absorvia, relativo ao número dos módulos duma superfície irregular.

O seu último acto público foi a mensagem dirigida à Assembleia Geral Constituinte da União Matemática Internacional que se realizou em Roma em Março deste ano. A mensagem foi lida no início dos trabalhas pelo Prof. E. BOMPIANI (1). CASTELNUOVO estava retido em casa, enfermo de grave hepatite.

*

Homem acolhedor, modesto, de olhar tranquilo e arguto, levemente irónico, recebia todos, grandes e pequenos, com a mesma afabilidade, o mesmo desejo de ser útil, a mesma decidida vontade de socorrer e de encorajar.

Sobretudo a serenidade — a calma contemplação dos homens e dos factos, como se os visse dum outro mundo em que tudo é claro e objectivo — era a nota que mais se fazia sentir a quem dele se abeirava pela primeira vez. E assim, também, a magnanimidade, a largueza de vistas com que encarava até o maior inimigo; disto se apercebeu, e ficou impressionado, o embaixador alemão em Roma VON BRENTANO que estreitou com ele relações de sincera amizade.

O homem de ciência na sua expressão mais elevada — pondo as alegrias do espírito acima dos interesses materiais, devotado a um ideal sem deixar de ser humano, profundo no seu campo especulativo e contudo senhor duma apurada cultura e de fina sensibilidade artística — encontrou em GUIDO CASTELNUOVO uma esplêndida realização. É com homens desta envergadura que se mantem, perene e criadora, a tradição científica na pátria de GALILEU.

Nota — Para a elaboração deste artigo fui largamente coadjuvado pela Prof.ª EMMA CASTELNUOVO, a quem deixo aqui expressa a minha viva gratidão. A última oportunidade que tive de ver reunidos CASTELNUOVO e ENRIQUES foi em 1946, quando, no Liceu Tasso de Roma, assistiam a uma conferência da Prof.ª EMMA CASTELNUOVO, filha dum e sobrinha do outro. Dessa conferência démos uma tradução no n.º 33 da Gazeta de Matemática. ENRIQUES faleceu pouco tempo depois, em 14 de Junho de 1946.

(1) Transcrita adiánte em «Movimento Científico».

*Problèmes de dépouillements — IV**

Triangles imités du triangle arithmétique de Pascal

par Pierre Dufresne

Pour l'étude des problèmes de dépouillements traités dans le premier chapitre nous avons utilisé des lemmes qui ont servi de bases à nos démonstrations.

Ce sont ces mêmes lemmes qui nous permettent d'établir des triangles (ou des tableaux) imités du triangle arithmétique de PASCAL.

Il est possible de fondre les énoncés de tous les lemmes dans un énoncé très général.

Rappellons d'abord comment ont été posés nos problèmes de dépouillements.

* Continuação dos n.ºs 44-45, 46 e 47.

On a supposé donné le nombre total des bulletins θ qui ont été déposés lors d'une élection et la répartition de ces θ bulletins entre les différents candidats $A, B \cdots N$. On a supposé que le dépouillement serait effectué bulletin par bulletin ce qui permet d'obtenir $(\theta-1)$ résultats partiels et le résultat complet.

Et puis on a posé une condition, ou un ensemble de conditions, toujours les mêmes pour un même problème auxquelles devaient satisfaire non seulement le résultat complet mais encore chacun des $(\theta-1)$ résultats partiels.

Nous avons appelé dépouillements favorables — un dépouillement peut être considéré comme amalgame de $(\theta-1)$ résultats partiels et du résultat complet — les dépouillements qui satisfaisaient depuis le premier jusqu' après le dernier bulletin sorti aux conditions posées.

Et le problème a consisté à calculer le nombre des dépouillements favorables ou plutôt d'établir une formule qui donnât ce nombre.

Nous avons d'abord rapproché les conditions imposées et le résultat final obligatoirement connu. Et nous avons dit et c'est en cela que résident tous les lemmes. «Ou le résultat final, et nous le connaissons à l'avance, vérifie les conditions imposées ou il ne les vérifie pas. S'il ne les vérifie pas c'est qu'il n'y a pas de dépouillement favorable. S'il les vérifie c'est la preuve que ce ne sera pas le dernier bulletin dépouillé qui pourra empêcher un dépouillement d'être favorable. Et par suite le nombre des dépouillements favorables possibles des θ bulletins est la somme de tous les dépouillements favorables différents possibles des mêmes bulletins moins un — le bulletin retranché appartenant à n'importe quelle famille».

Ce lemme qui nous a permis d'établir des formules va nous permettre maintenant de calculer de proche en proche les nombres des dépouillements favorables pour des valeurs croissantes de θ.

Lorsque le problème posé ne met en jeu que deux candidats il sera facile d'établir des tableaux à double entrée donnant les nombres de dépouillements favorables en fonction des valeurs de a et de b ou de θ et de a ou encore de θ e de b.

Nous avons vu que les lemmes ne sont applicables que pour des ensembles de valeurs de a, de b et de θ, qui ne sont pas incompatibles avec les conditions énoncées. Il y aura lieu de séparer nettement les cases qui correspondent à des ensembles de valeurs vérifiant les conditions de celles qui correspondent à des ensembles incompatibles. Les premières seules seront remplies. Soit à déterminer le nombre ou les nombres «générateurs». Lorsque $\theta=1$ on peut avoir soit $a=1$ et $b=0$ soit $b=1$ et $a=0$; dans les deux cas un seul dépouillement possible. On inscrira donc le chiffre 1 dans chacune des deux cases $(a=1,\ b=0)$ et $(b=1,\ a=0)$ ou au moins dans celle de ces deux cases qui n'est pas «incompatible». Si les deux cases étaient incompatibles il est clair qu'il ne pourrait jamais y avoir de dépouillement favorable.

Nous présenterons deux modèles de tableau : le premier établi en fonction de θ et de b les valeurs de θ étant croissantes vers le bas et celles de b étant croissantes vers la droite. Le nombre à inscrire dans une case «compatible» est la somme de deux nombres inscrits sur la ligne supérieure le premier directement au dessus, le second dans la colonne immédiatement à gauche. Le deuxième établi en fonction de a et de b les valeurs de a étant croissantes vers la droite et les valeurs de b étant croissantes vers le haut. Le nombre à inscrire dans une case «compatible» est la somme de deux nombres inscrits l'un dans la même colonne mais sur la ligne inférieure, l'autre sur la même ligne mais dans la case à gauche.

Lorsque les problèmes posés concernent un plus grand nombre de candidats la représentation par des tableaux n'est plus aussi aisée. Dans le cas de trois candidats on peut utiliser une suite de tableaux chacun correspondant à une valeur déterminée de c. Le nombre à inscrire dans une case du tableau est la somme de trois nombres qui correspondent respectivement à des valeurs de a, de b, et de c diminuée d'une unité. Les deux premiers nombres se trouvent immédiatement sur le même tableau le troisième sur le tableau précédent.

$\theta \backslash b$	0	1	2	3
1	1			
2	1			
3	1			
4	1			
5	1			
6	1			
7	1	1		
8	1	2		
9	1	3	2	
10	1	4	5	
11	1	5	9	5

Tableau donnant en fonction de θ et de b *les valeurs de:*

$$N_{(a,\,b)\,[A>B+4]}$$

On rappelle que si $a \geqslant b+4$

$$N_{(a,\,b)\,[A>B+4]} = \frac{a-b-4}{a+b-4}\ \frac{(a+b-4)\,!}{(a-4)\,!\ b\,!}$$

(si $b=0$ quelle que soit la valeur de a il a toujours un dépouillement favorable).

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1				
6	1	1			
7	1	2			
8	1	3	2		
9	1	4	5		
10	1	5	9	5	
11	1	6	14	14	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B+3]}$$

On rappelle que si $a \geqslant b+3$

$$N_{(a,b)[A>B+3]} = \frac{a-b-3}{a+b-3}\,\frac{(a+b-3)\,!}{(a-3)\,!\,b\,!}$$

(si $b=0$ quelle que soit la valeur de a il y a toujours un dépouillement favorable).

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1	1				
4	1	2				
5	1	3	2			
6	1	4	5			
7	1	5	9	5		
8	1	6	14	14		
9	1	7	20	28	14	
10	1	8	27	48	42	
11	1	9	35	75	90	42

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B]}\,.$$

On rappelle que:

si $a \geqslant b$

$$N_{(a,b)[A>B]} = \frac{a-b}{a+b}\,\frac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!}\,.$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1				
3	1				
4	1				
5	1	1			
6	1	2			
7	1	3	2		
8	1	4	5		
9	1	5	9	5	
10	1	6	14	14	
11	1	7	20	28	14

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B+2]}$$

On rappelle que: si $a \geqslant b+2$

$$N_{(a,b)[A>B+2]} = \frac{a-b-2}{a+b-2}\,\frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!}$$

(si $b=0$ il y a toujours un dépouillement favorable quelle que soit la valeur de a).

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	1	1					
3	1	2					
4	1	3	2				
5	1	4	5				
6	1	5	9	5			
7	1	6	14	14			
8	1	7	20	28	14		
9	1	8	27	48	42		
10	1	9	35	75	90	42	
11	1	10	44	110	165	132	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A\geq B]}\,.$$

On rappelle que:

Si $b=0$

$$N_{(a,b)[A\geq B]} = \frac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!} = 1$$

si $\left|\begin{array}{l} b \geqslant 1 \\ \text{et} \\ a > b-1 \end{array}\right.$

$$N_{(a,b)[A\geq B]} = \frac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!} - \frac{(a+b)\,!}{(a+1)\,!\,(b-1)\,!}\,.$$

$\theta \backslash b$	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1					
3	1					
4	1	1				
5	1	2				
6	1	3	2			
7	1	4	5			
8	1	5	9	5		
9	1	6	14	14		
10	1	7	20	28	14	
11	1	8	27	48	42	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B+1]}\,.$$

On rappelle que:

si $a \geqslant b+1$

$$N_{(a,b)[A>B+1]} = \frac{a-b-1}{a+b-1}\,\frac{(a+b-1)\,!}{(a-1)\,!\,b\,!}$$

(si $b=0$ il y a toujours un dépouillement favorable quelle que soit la valeur de a).

Remarque. Les deux formules ci dessus peuvent être condensées en une seule:

Si $b=0$ ou si $\left|\begin{array}{l} b \geqslant 1 \\ a > b-1 \end{array}\right.$

$$N_{(a,b)[A\geq B]} = \frac{a-b+1}{a+1}\,\frac{(a+b)\,!}{a\,!\,b\,!}\,.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	2				
4	1	4	5				
5	1	5	9	5			
6	1	6	14	14			
7	1	7	20	28	14		
8	1	8	27	48	42		
9	1	9	35	75	90	42	
10	1	10	44	110	165	132	
11	1	11	54	154	275	297	132

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-2]} =$$

On rappelle que:

Si $b \leqslant 1$

$$N_{(a,b)[A>B-2]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

et $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 2 \\ a > b-2 \end{array} \right.$ si

$$N_{(a,b)[A>B-2]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+2)!\,(b-2)!}.$$

Remarque. Les deux formules ci dessus peuvent être condensées en une seule:

Si $b \leqslant 1$ ou si $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 2 \\ a > b-2 \end{array} \right.$

$$N_{(a,b)[A>B-2]} = \frac{(a+b+1)(a-b+2)}{(a+1)(a+2)} \, \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3					
4	1	4	6	3				
5	1	5	10	9				
6	1	6	15	19	9			
7	1	7	21	34	28			
8	1	8	28	55	62	28		
9	1	9	36	83	127	90		
10	1	10	45	119	200	207	90	
11	1	11	55	164	319	407	297	

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-3]}.$$

On rappelle que:

Si $b \leqslant 2$

$$N_{(a,b)[A>B-3]} = \frac{(a+b)}{a!\,b!}$$

Si $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 3 \\ a > b-3 \end{array} \right.$

$$N_{(a,b)[A>B-3]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+3)!\,(b-3)!}.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4				
5	1	5	10	10	4			
6	1	6	15	20	14			
7	1	7	21	35	34	14		
8	1	8	28	56	69	48		
9	1	9	36	84	125	117	48	
10	1	10	45	120	209	242	165	
11	1	11	55	165	329	451	407	165

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-4]}$$

On rappelle que

Si $b \leqslant 3$

$$N_{(a,b)[A>B-4]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}.$$

Si $\left| \begin{array}{l} b \geqslant 4 \\ a > b-4 \end{array} \right.$

$$N_{(a,b)[A>B-4]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+4)!\,(b-4)!}.$$

θ \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5			
6	1	6	15	20	15	5		
7	1	7	21	35	35	20		
8	1	8	28	56	70	55	20	
9	1	9	36	84	126	125	75	
10	1	10	45	120	210	251	200	75
11	1	11	55	165	330	461	451	275

Tableau donnant en fonction de θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)[A>B-5]}$$

On rappelle que Si $b \leqslant 4$

$$N_{(a,b)[A>B-5]} = \frac{a!\,b!}{(a+b)!}.$$

Si $b \geqslant 5$

$a > b-5$

$$N_{(a,b)[A>B-5]} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!} - \frac{(a+b)!}{(a+5)!\,(b-5)!}.$$

(continua)

PEDAGOGIA

AINDA O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 1.º CICLO

por ***Maria Teodora Alves***

O meu primeiro artigo sobre *«O programa de Matemática da actual reforma do ensino liceal»*, referente ao 1.º ciclo, é inserto no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*, de Julho de 1951, teve a honra de sugerir ao Sr. Dr. Abreu Faria, ilustre professor do liceu, em serviço no Colégio Militar, longas e valiosas considerações expostas no n.º 122 da revista *Labor*, de Maio de 1952, sob o título, *«Dizei uma só palavra... e o «meu» programa será conexo»*.

Pede-me o ilustre professor desculpa por apresentar opiniões divergentes daquelas que eu expus n.º 48 da *Gazeta de Matemática.* Ora, tendo eu afirmado, no meu artigo, que «exposta a minha opinião sobre as deficiências do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma, resta-me indicar as alterações a introduzir, sujeitando-as à crítica de quem se interesse pelo assunto,» estava o Sr. Dr. FARIA, ou quem quer que desejasse criticá-las, dispensado, para as criticar, de pedir desculpa. Mas é uma amabilidade que fico devendo à gentileza do ilustre professor, juntamente com outras que, embora eu reconheça serem imerecidas, me sinto na obrigação de agradecer.

Vejamos como o Sr. Dr. FARIA entende que deverá ser organizado o programa de uma disciplina do curriculum.

Depois de perguntar, *Por que razão as sucessivas reformas que se têm levado a efeito nestes últimos anos, no ensino liceal, não têm servido nem a gregos nem a troianos?»* diz o seguinte: *Na resposta a esta pergunta — que se nos afigura crucial no problema do ensino — duas hipóteses apenas se nos apresentam viáveis: — seguir o caminho empírico da improvização de um programa ainda que fortemente baseado na larga experiência e profundo saber de alguns professores, ou o caminho da experimentação pedagógica, feita na escola, com métodos adequados, com o tempo necessário à confirmação ou rejeição das hipóteses postas à lógica da criança, que não é evidentemente a lógica dos adultos.*

O primeiro é o caminho intuitivo, o segundo é o científico.

A importância de tal facto reconhece-a a própria reforma actual ao criar um Instituto de Investigação Pedagógica, organismo da mais alta importância na organização e orientação da vida educativa de uma nação. Será deste organismo que o Estado poderá esperar a palavra de ordem, digamos, proba, científica, que o habilite a promulgar uma reforma verdadeira e útil à Nação».

Muito bem!

Vejamos agora como o Sr. Dr. FARIA que, no seu artigo inserto na *Labor*, declara ter sido um dos colaboradores, da comissão organizadora, do programa de Matemática do 1.º ciclo, informa que a comissão trabalhou: «*Trabalhou-se no caminho da intuição e eis portanto a razão fundamental da minha contrariedade, ao ver-me arrastado para um trabalho de antemão condenado ao insucesso, por não assentar em bases científicas».*

....

«*... Trabalhou-se em condições excepcionais: No tempo, porque houvemos que substituir alguns anos de experimentação pedagógica por escassos meses de meditação e estudo teórico, no espaço, porque tivemos de substituir a escola, o verdadeiro laboratório onde devem ter lugar as complicadas reações entre alunos, programas e métodos, pelo gabinete onde reagem apenas os nossos pensamentos com as doutrinas dos filósofos da educação.»*

Como prestou o Sr. Dr. FARIA a sua colaboração à comissão organizadora dos programas do 1.º ciclo?

Ele próprio dá a resposta a esta pergunta: ... *procurei conjugar os meus fracos conhecimentos pedagógicos com a minha já regular experiência.*

Mas porque eu, que considerei o programa de Matemática do 1.º ciclo desconexo e descompensado na distribuição da matéria pelos dois anos do ciclo, propus, no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*, algumas correcções, o Sr. Dr. FARIA, chamando *programa* às correcções propostas por mim, observa: «*De resto, o programa que a articulista propõe em sua substituição ou qualquer outro organizado em circunstâncias idênticas, não passa de um programa que em boa verdade poderemos classificar do «tira aqui» e do «acrescenta além», programa aleatório e sobretudo inadaptável às realidades da escola!*

Um programa onde apenas conta a análise combinatória!».

Para melhor entendimento desta observação do Sr. Dr. FARIA comparemos o programa de Matemática do 1.º ciclo da actual Reforma com o do 1.º ciclo da Reforma de 1936.

A divisibilidade por 2, 3, 5 e por qualquer potência de 10; o m. d. c. e m. m. c. de vários números; os números primos; as operações com números fraccionários e redução a dízima que pertenciam ao programa do 1.º ano da reforma de 1936 aparecem no programa do 2.º ano da reforma de 1948 (a actual).

A raíz quadrada e o sistema métrico decimal e os números complexos que pertenciam ao programa do 2.º ano da Reforma de 1936 aparecem no programa do 1.º ano da Reforma de 1948.

A comissão organizadora do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma, com a colaboração do Sr. Dr. FARIA, para constituir o programa que apresentou, fez saltitar as rubricas do programa de 1936 de um ano para o outro.

Quem foi que organizou um programa de Matemática para o 1.º ciclo, alheando-se do método científico, para recorrer ao impressionismo da sua experiência pessoal e das suas leituras, um programa que «poderemos classificar do «tira aqui» e do «acrescenta além» e «onde apenas conta a análise combinatória»?

Mais uma vez se confirma o velho rifão popular: É mais fácil ver o argueiro no olho do visinho...

O que é ainda mais curioso é que, tanto o Sr. Dr. FARIA, que colaborou com a comissão organizadora do programa de Matemática do 1.º ciclo, e eu que o critiquei no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*, estamos de pleno acordo acerca das graves dificências desse programa.

O Sr. Dr. FARIA até repudia o programa em que colaborou com estas severas palavras: «*O tão desejado programa coerente, harmonioso, sem contradições, numa palavra adaptado às capacidades dos alunos — foi apenas uma pura ilusão!*

O programa de Matemática do 1.º ciclo da actual Reforma do ensino liceal, não poderia sofrer maior condenação: O repudio de um dos colaboradores da comissão que o organizou!

Eu creio ter sido muito mais generosa para com o programa de Matemática do 1.º ciclo, pois pretendi enformá-lo em melhor compensação, propondo algumas correções, sem o condenar em bloco.

Vejamos agora a consistência das observações do Sr. Dr. FARIA ao meu artigo do n.º 48 da *Gazeta de Matemática*.

Para ter oportunidade de produzir longas considerações, corrige a minha afirmação de que «No ensino há dois aspectos distintos a considerar:

«Os conceitos e a sua ordenação lógica; a técnica do cálculo e as suas aplicações», do modo seguinte: *As considerações expendidas no preâmbulo deste artigo permitem-me chegar já á conclusão de que a ideia defendida na primeira proposição é incompleta. Ela deveria considerar-se assim: — Os conceitos e a sua ordenação lógica e psicológica.*

Simplesmente, o ilustre professor não se lembrou de que, antes daquela minha afirmação, eu citara esta frase do eminente DECROLY: «Les programmes ont été inspirés par des hommes très savants dans leur spécialité, mais trop peu préoccupés de la Psycologie, pour eux l'enfant est accessoire», como poderá ler-se no n.º 48 da *Gazeta de Matemática*. A correcção foi, pois, feita para ter oportunidade de produzir judiciosas observações sobre psicologia, dando a impressão de que me eram estranhas...

Como o programa de Matemática do 1.º ano se refere a medições de comprimentos, de superfícies, de volumes, de capacidades e de massa, que são depois tomadas como centro de interesse de vários estudos e, como não se pode medir sem que se escolha um sistema de unidades e, mesmo que seja escolhido sòmente o sistema métrico decimal, o problema de mudança de unidade surge necessàriamente, eu critiquei as «Observações ao programa» por não se referirem a este importante problema.

O Sr. Dr. FARIA produziu a este respeito também longas considerações, entendendo que só no 2.º ano, depois do estudo da proporcionalidade inversa, os alunos poderão compreender o problema de mudança de unidade e, para justificar a sua afirmativa, enuncia concretamente um problema de mudança de unidade e conclue assim: «*Trata-se nìtidamente de um problema de proporcionalidade inversa e, consequentemente, é ainda um problema a tratar posteriormente à proporcionalidade directa.*

Eu vou também enunciar concretamente um problema, para mostrar, ao contrário do ilustre professor, que os alunos podem ser iniciados no problema de mudança de unidade, independentemente do conceito de proporcionalidade inversa.

Mandando desenhar aos alunos, numa folha de papel quadriculado do próprio caderno diário, um quadrado de lado igual a 12 lados da quadrícula podem ser postas aos alunos questões como estas, por exemplo:

Qual é a área do quadrado desenhado, tomando por unidade de área:

a) O quadrado de lado igual a um lado da quadrícula.

b) O quadrado de lado igual a 3 lados da quadrícula.

c) O rectângulo cujos lados consecutivos são respectivamente iguais a 3 e a 4 lados da quadrícula.

São problemas de mudança de unidade resolvidos por simples contagem e que podem, depois, ser resolvidos pela operação divisão;

Se o professor mandar construir, aos alunos, cubos de cartolina com 3 ou 4 centímetros de aresta, disporá de uma colecção de cubos que lhe permitirá formar cubos e paralelipípedos rectângulos, por sobreposição conveniente dos cubos construídos, e poderá apresentar aos alunos problemas de mudança de unidade que se resolvem por simples contagem e que, depois, serão resolvidos pela operação divisão.

Anàlogamente com a medição de comprimentos.

Estes problemas de mudança de unidade são resolvidos no plano concreto do 1.º dos estádios, a que se refere o Sr. Dr. FARIA no seu artigo da *Labor*, e que, embora não o tenha dito, foram extraídos de «*Le raisonnement mathemátique de l'adolescent*» por L. JOHANNOT, segundo creio.

Quando os alunos estudarem o conceito de número fraccionário e o de razão, os mesmos problemas, e ainda outros serão sucessivamente resolvidos por outra ordem de considerações.

É o domínio de «The three kinds of problems».

Ou entende o Sr. Dr. FARIA que o problema de mudança de unidade deverá ser ensinado aos alunos num só jacto? É certo que estamos na época do avião de jacto...

O aluno que seja ensinado a medir superfícies sem o entendimento do problema de mudança de unidade é conduzido a esta regra muito corriqueira em que foram iniciados na instrução primária e que continuarão durante o seu curso do liceu a recitar assim:

A área do quadrado é lado vezes lado. Regra esta que persisto em chamar... triste regra, como a da dança da vírgula, na multiplicação ou divisão por uma potência de 10.

Tentará o Sr. Dr. FAIRA explicar a necessidade da recitação desta regra como tentou explicar a da dança da vírgula?

Eu concordo plenamente com o Sr. Dr. FARIA, quando lamenta os professores que só sabem usar de uma metodologia na sua vida profissional.

Mas mais lamento os professores que, acerca de uma dada questão de ensino, não possuem nenhuma.

Servindo-me da imagem sugestiva que o Sr. Dr. FARIA apresentou, direi que esses professores estão na situação daqueles beligerantes que, no momento decisivo da batalha, não dispõem de nenhum avião... Lutam às cegas.

Apesar da longa e substanciosa argumentação do Sr. Dr. FARIA, continuo firmemente convencida de que a omissão de referências ao problema de mudança de unidade é uma grave omissão das «Observações ao programa».

É certo que o Sr. Dr. FARIA acha de somenos importância a existência de «Observações ao programa». Parece-me que até as condena. E nisso julgo que é original. Todos os programas de Matemática que conheço, de escolas estrangeiras, vêm acompanhados de minuciosos esclarecimentos, não sòmente para limitar a sua interpretação, mas ainda para a coordenação das suas rubricas e metodologia. Além disso, ainda os organismos oficiais e as sociedades científicas, por intermédio das suas revistas, ou publicações próprias, esclarecem e aconselham os professores no modo de orientar o ensino.

Cito por exemplo a magnífica colecção com o título: «The teaching of......in schools», com referência a Álgebra, Geometria, Trigonometria e Cálculo, organizada pela «Mathematical Association» de Inglaterra. São pequenos e magníficos relatórios, em que são dados conselhos aos professores para a orientação do ensino.

Porque o programa se refere a proporcionalidade sem que faça qualquer referência à razão de duas grandezas, inferi que se pretendia tomar, para definição de grandezas proporcionais, uma definição que não fosse baseada no conceito de razão. Por exemplo, esta definição:

Duas classes de grandezas homogénêas finitas dizem-se proporcionais se:

a) Aos estados iguais de uma das grandezas correspondem estados iguais da outra grandeza

b) À soma dos estados quaisquer de uma das grandezas corresponde a soma dos estados correspondentes da outra.

Demonstra-se, e é muito fácil fazê-lo, que esta definição de grandezas proporcionais é equivalente à definição de grandezas proporcionais, estabelecida recorrendo ao conceito da razão de duas grandezas.

É à definição que eu acabei de citar que se refere o meu comentário:

«É certo que se pode definir a proporcionalidade independente do conceito de razão. Do ponto de vista lógico não há reparos a fazer, mas do ponto de vista pedagógico é erro tão grosseiro que suponho, ninguém defenderá».

Talvez porque não citei aquela definição e o Sr. Dr. FARIA não se lembrou da sua existência, atribue-me outros intuitos, produz longas considerações e pede-me amàvelmente licença para servir-se das minhas palavras e exprimir exactamente a opinião contrária à minha.

Depois deste meu esclarecimento fica o Sr. Dr. FARIA autorizado a fazê-lo...

Devo dizer que estou plenamente convencida de que não aproveita a autorização que lhe concedo... e concordará comigo.

O meu artigo do n.º 48 da *Gazeta de Matemática* teve a honra de sugerir longas e valiosas considerações ao Sr. Dr. FARIA, mas não teve a honra de ser lido com atenção!

Há ainda uma pequena observação a fazer às considerações do Sr. Dr. FARIA sobre a proporcionalidade definida pela razão de duas grandezas:

Razão de dois números e razão de duas grandezas são conceitos distintos, e para estabelecer a proporcionalidade de duas grandezas, baseada no conceito de razão, há que estabelecer os dois conceitos e o Sr. Dr. FARIA apenas se refere a um deles.

Julgo que vem a propósito esta pergunta:

Por que motivo foram omitidos, no programa de Matemática do 1.º ciclo os conceitos de razão de dois números e razão de duas grandezas, quando um dos colaboradores da comissão organizadora é de opinião que o conceito de proporcionalidade deve ser baseado no conceito de razão?

O longo artigo do Sr. Dr. FARIA na *Labor* termina por indicar as condições a que deverá satisfazer um programa. É uma espécie de decreto com 10 artigos. Devo dizer que não concordo com todos os artigos desse novo decálogo, mas lamento que o Sr. Dr. FARIA não os fizesse acatar pela comissão organizadora do programa, com a qual colaborou.

Quanto a «The three kinds of problems» não há que lhes adaptar qualquer programa, nem que oficializá-los. Em qualquer programa que verse a operação divisão o conceito de número fraccionário e o conceito de razão, «The there kinds of problems» adaptam-se a esse programa e oficializam-se por si próprios, ao menos para aqueles professores que cuidam da formação mental dos alunos em vez de cuidarem do seu adestramento.

HARRY WHEAT, em «*A theory of instruction for the middle grades*», refere-se a «The three kinds of problems».

Endende o Sr. Dr. FARIA que deve generalizá-los a 4,5, etc. problemas. Está no seu direito.

WHEAT enuncia-os de um modo geral, afim de incluir o caso da divisão de números inteiros, conceito de número fraccionário e de razão de dois números.

Entende o Sr. Dr. FARIA que deve enunciá-los apenas no caso particular dos números fraccionários. Continua a exercer um direito que ninguém lhe pode contestar.

Há ainda uma afirmação que o Sr. Dr. FARIA faz e que, por muito repetida, constitue um lugar comum, com o sabor ao refervido chá de TOLENTINO:

Não há maus programas, havendo bons professores.

É evidente que o programa de uma disciplina escolar não possue as virtudes de um amuleto; não actua por si próprio. Precisa da interpretação e orientação do professor.

Mas esta afirmação tinha toda a validade quando o professor se podia mover à vontade dentro do programa, dando-o parcial ou totalmente e com a orientação que quizesse e, tudo dependendo, depois, da sua exclusiva apreciação.

Mas, quando um programa é tornado taxativo, devendo ser cumprido integralmente, acatando-se até a ordem das suas rubricas, num ensino dirigido a 40 alunos e que gravita em torno de um exame de resultados apreciados em percentagens, a maior parte das vezes extrapoladas, eu permito-me perguntar, se um programa nestas condições não é um factor da máxima importância e decisivo na vida escolar, quer de alunos, quer de professores?

Não respondo à pergunta, nem faço quaisquer comentários por motivos óbvios, mas peço ao Sr. Dr. FARIA que, de acordo com a sua recta intenção, dê a si próprio a resposta à pergunta que eu formulei.

ANTOLOGIA

BOURBAKI E A SUA INFLUÊNCIA*

por L. Schwarz

BOURBAKI é um grupo de uma dezena de matemáticos, fundado pouco antes da guerra, que se propõe, pela publicação regular de livros, estudar as «estruturas» fundamentais das matemáticas.

BOURBAKI não se ocupa de problemas particulares, reservados aos especialistas, mas exclusivamente daqueles que são de ordem geral, e servem de fundamento às matemáticas, exagerando talvez um pouco, dos problemas que todo o matemático deveria conhecer. Os métodos são muito abstractos, a álgebra e a topologia desempenham aí um papel essencial, de resto aquele que lhes compete normalmente. Cada teoria é dissecada de tal maneira que ela se exprime numa sucessão de teoremas, proposições e corolários com demonstrações muito curtas, cada uma das quais é uma consequência quase imediata da precedente. O papel destes livros é pois, sobretudo, pedagógico; a maior parte dos resultados não são novos, embora expressos em geral por forma original. É certo que estes livros, e o espírito «bourbaquista» em geral, comportam um certo perigo: o exagero escolástico, a «hiperaxiomatização» e a «hipergeneralização», o estilo exageradamente abstracto. Foi sem dúvida o que afastou ao princípio muitos matemáticos; actualmente porém o exito de BOURBAKI é considerável, sobretudo junto da nova geração, que aprende muitas vezes as teorias mais importantes pelos livros de BOURBAKI.

É no fundo possível classificar os espíritos científicos em duas categorias (com todo o arbitrário que comporta qualquer classificação): os espíritos finos (esprits fins) e os espíritos gerais (esprits généraux), não sendo nenhuma destas categorias de modo algum superior à outra. Os espíritos finos interessam-se por questões precisas, geralmente difíceis, necessitando grandes meios; interessam-lhes mais os resultados que as demonstrações, os problemas mais que os métodos; estes problemas, muitas vezes demasiado particulares, são geralmente originais e tratados em todos os seus pormenores. Os espíritos gerais interessam-se sobretudo pelas teorias gerais, que tentam simplificar ao máximo, tendo de certo modo aversão às «dificuldades» de que os espíritos finos gostam; as demonstrações interessam-lhes

* Transcrição de *Les mathématiques en France pendant et après la guerre*, conferência do Prof. L. SCWARZ, da Universidade de Nancy, feita no 2.º Congresso Canadiano de Matemática, em Vancouver, 1949.

Sobre a actividade do grupo BOURBAKI vide *Gazeta de Matemática*, n.os 39, 40 e 48. N. R.

muitas vezes mais que os problemas de que procuram sobretudo descobrir o porquê. Cada uma das duas categorias tem representantes de élite; cada uma tem os seus excessos, como o espírito fino que passará anos a procurar problemas quase insolúveis e de interesse nulo, ou o espírito geral que fará no vazio teorias evidentes e sem aplicações. São estes excessos e provàvelmente a natureza humana que fazem com que, muitas vezes, os matemáticos de uma categoria tenham tendência a desprezar os da outra (os espíritos gerais censurarão os espíritos finos por fazerem trabalhos inúteis e demasiado particulares, os espíritos finos censurarão os espíritos gerais por não terem introduzido ideias novas). O desenvolvimento duma teoria matemática é em geral o seguinte: são em primeiro lugar os espíritos finos que introduzem uma questão nova, e tratam-na, em geral, por métodos novos, portanto difíceis e imperfeitamente elaborados; são os pioneiros que desbravam um terreno virgem e formulam os grandes problemas. A sua tenacidade impede-os de ser detidos pelas numerosas dificuldades da emprêsa, enquanto que os espíritos gerais gostam mais das belas teorias bem construidas; sem os espíritos finos não se creariam teorias novas. Mas uma vez realizada essa obra, é preciso melhorá-la, destacar o principal, as grandes ideias directrizes, que farão da teoria inicial, complicada e incompleta, uma ciência assimilável ao maior número, que entrará no domínio corrente.

Certas ideias iniciais dos creadores aparecerão como inutilmente complicadas e serão regeitadas. Fixam-se os conhecimentos, métodos e resultados, os únicos úteis para o futuro. Sem esta obra de organização nenhum progresso seria possível; as novas gerações não poderiam aproveitar as conquistas das que as precederam. Os espíritos gerais realizam obra mais pedagógica do que realmente creadora, mas tão indispensável e difícil como a outra.

Só quando esta fase é atingida é que espíritos hipergeneralizadores fazem generalizações abstractas que não trazem nada de novo, ou que espíritos hiperfinos tratam de problemas que a ciência ultrapassou, e só esta parte do trabalho de uns ou de outros fica à margem do progresso e conserva-se estéril.

Observemos que para os espíritos finos uma grande tenacidade é necessária para resolver questões árduas com meios potentes; os espíritos gerais serão mais preguiçosos mas terão maior sentido estético, e geralmente contornarão as dificuldades, prontos até a mudar os próprios enunciados dos problemas.

Bourbaki é pois caracterizado pelo espírito geral. Todos os seus membros, apesar de diferenças consideráveis de concepção matemática, têm isto de comum: são espíritos gerais.

A redacção de um livro de Bourbaki faz-se da seguinte maneira. Reunem-se em congressos periòdicamente (3 ou 4 vezes por ano; na Páscoa o grande congresso dura 15 dias, os outros só 8). Estes congressos comportam um trabalho intensivo, de cerca de 6 a 8 horas diárias. O primeiro redactor de uma teoria é encarregado de um simples relatório de 15 a 30 páginas, contendo o essencial da questão, a ordem dos diferentes ramos, e as notações. Este relatório é lido e discutido num congresso; geralmente muito criticado, tomam-se decisões e uma redacção «estado 1» é confiada a um outro redactor. Ela será lida e discutida ponto por ponto num congresso ulterior. Aí tomam-se novas decisões, e um outro redactor será designado para um «estado 2» num congresso ulterior. É em geral depois de 4, 5, 6 estados sucessivos que um livro atinge o estado definitivo e será entregue à impressão sob a assinatura de Bourbaki.

Pertencer a Bourbaki exige portanto o não ter um excesso de amor-próprio; as ideias pessoais de um membro ou doutro não figurarão com o seu nome na redacção final, e sobretudo as suas redacções terão sido copiosamente criticadas, por vezes demolidas em congressos. Isto exige evidentemente uma grande camaradagem, preparada pela fraternidade da Escola Normal, e acompanhada duma intensa atmosfera de «canular» (pratical joke) que introduz um grande à vontade no ambiente sério dos congressos, em que as discussões são por vezes muito vivas.

A origem do nome Bourbaki perde-se na noite dos tempos e poderá servir de tema aos historiadores do futuro. A própria pessoa de Bourbaki é um mistério impenetrável; tem acontecido que aparece em certas sessões excepcionais, que se tome uma refeição com ele, mas geralmente a sua presença manifesta-se sobretudo no plano espiritual.

As publicações Bourbaki * são até hoje (Hermann, Paris):

Livro I — *Teoria dos conjuntos.*
  Fascículo de resultados.

Livro 2 — *Algebra.*
  Capítulo 1: Estruturas algébricas.
  Capítulo 2: Algebra linear (Exposição completa da teoria elementar dos espaços vectoriais e dos módulos).
  Capítulo 3: Algebra multilinear (Exposição das formas multilineares, tensores, algebra exterior de Grassmann, sem utilizar coordenadas).
  Capítulo 4: Polinómios e fracções racionais.
  Capítulo 5: Corpos comutativos (teoria de Galois)

* Lista actualizada.

Capítulo 6: Grupos e corpos ordenados.
Capítulo 7: Módulos sobre os anéis principais.

Livro 3 — *Topologia geral.*

Capítulo 1: Estruturas topológicas.
Capítulo 2: Estruturas uniformes.
Capítulo 3: Grupos topológicos.
Capítulo 4: Números reais.
Capítulo 5: Grupos a um parâmetro.
Capítulo 6: Espaços numéricos e espaços projectivos.
Capítulo 7: Os grupos aditivos R^n.
Capítulo 8: Números complexos.
Capítulo 9: Utilização dos números reais em Topologia geral.
Capítulo 10: Espaços funcionais; dicionário.

Livro 4 — *Funções duma variável real.*

Capítulo 1: Derivadas.
Capítulo 2: Primitivas e integrais.
Capítulo 3: Funções elementares.
Capítulo 4: Equações diferenciais.
Capítulo 5: Estudo local das funções.
Capítulo 6: Desenvolvimentos taylorianos generalizados; fórmula somatória de Euler-Maclaurin.
Capítulo 7: A função gama.

Livro 6 — *Integração.*

Capítulo 1: Desigualdades de convexidade.
Capítulo 2: Espaços de Riesz.
Capítulo 3: Medidas em espaços localmente compactos.
Capítulo 4: Prolongamento duma medida. Espaços L^p

Os livros de Bourbaki conquistaram a jóvem geração matemática da França; mas a sua influência não se limita a isso. Um seminário Bourbaki tem lugar sob a sua égide três vezes por ano em Paris, para estudar as memórias novas do ano (cada vez três dias, só de tarde, duas sessões cada tarde; quer dizer seis sessões por seminário, dezoito por ano) Os auditores são numerosos, vindos de todos os pontos de França e até da Bélgica.

Trad. de Ruy Luís Gomes

SOBRE AS ORIGENS DA TOPOLOGIA

por J. G. Crowther

...Ùltimamente, os cultores da Matemática Pura têm manifestado interesse nas investigações de Maxwell e Tait em Topologia. Esta é a ciência da Análise Posicional, ou *Analysis Situs,* em que os conceitos de proximidade e vizinhança são mais importantes que os de extensão e forma. Leibnitz previu a importância da topologia mas foi incapaz de fornecer qualquer contribuição, dada a dificuldade, na época, do próprio método. As primeiras contribuições vieram de Euler e Gauss. As propriedades dos corpos e das superfícies conexas, como nós em cordas, dependem de princípios topológicos. Tait interessou-se por propriedades de nós, e Maxwell na sua teoria do electromagnetismo foi levado a considerar certas superfícies conexas. O desenvolvimento da topologia, hoje um dos ramos da matemática contemporânea, foi iniciada por Poincaré que publicou alguns dos seus mais importantes artigos em Londres, em homenagem, como se afirma, às investigações topológicas de Maxwell e Tait...

Extraído de *Bristish Scientists of the Nineteenth Century* — Vol. II, pág. 362.
Trad. de J. G. Teixeira.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL

Nos dias 6, 7 e 8 de Março último teve lugar em Roma a Assembleia Geral Constituinte da União Matemática Internacional. Os objectivos deste organismo são, como vem especificado nos respectivos Estatutos: *a)* promover a cooperação internacional em matemática; *b)* apoiar e facilitar os Congressos Internacionais de Matemáticos e outras reuniões ou conferências científicas internacionais; *c)* encorajar e socorrer outras actividades matemáticas internacionais susceptíveis de contribuir para o desenvolvimento da ciência matemática sob qualquer das suas formas: pura, aplicada e pedagógica. Para a obtenção destes fins a U. M. I. é explicitamente mas não exclusivamente autorizada a: *a)* aderir ao I. C. S. U. (International Council of Scientific Unions); *b)* organizar reuniões e conferências matemáticas internacionais; *c)* empreender ou subvencionar a publicação e a distribuição de material científico no domínio das matemáticas, contanto que as respectivas despezas sejam incluídas numa determinada conta reservada a «despezas especiais»; *d)* empreender actividades matemáticas de carácter internacional ou prestar auxílio e conselho a outras organizações internacionais que participem em tais actividades, contanto que as respectivas despezas sejam incluídas na referida conta das «despezas especiais»; *e*) promover e facilitar as trocas internacionais de matemáticos e de estudantes de matemática, para fins científicos; *f*) publicar e difundir informações relativas à organização e às actividades da União.

Como vem ainda especificado nos Estatutos, a adesão dum país à U. M. I. efectua-se por intermédio dum organismo nacional aderente, que pode ser a sua academia principal, uma sociedade matemática nacional, o seu conselho nacional de investigações científicas ou qualquer outra instituição nacional ou associação de instituições nacionais, ou ainda um órgão apropriado do seu governo. Em qualquer caso, o organismo nacional aderente deve constituir uma comissão nacional para a matemática e a sua adesão à U. M. I. não pode tornar-se efectiva sem que a composição da comissão tenha sido levada ao conhecimento da Assembleia Geral e reconhecida por ela.

Após a primeira Assembleia Geral realizada em Roma, eram em número de 22 os membros da U. M. I.: Alemanha, Argentina, Austrália, Austria, Bélgica, Canadá, Cuba, Dinamarca, Espanha, Estados Unidos, Finlândia, França, Grã-Bretanha, Grécia, Holanda, Itália, Japão, Noruega, Paquistão, Perú, Suiça, Jugoslávia. Desses 22 países, 18 enviaram delegações à Assembleia, geralmente constituídas por alguns dos seus professores mais categorizados.

Dois países que, até à data, ainda não aderiram à U. M. I.—a Polónia e Portugal—enviaram observadores à Assembleia Geral.

Participavam ainda na Assembleia um delegado da UNESCO e um outro do ICSU.

Os trabalhos da Assembleia, que se distribuiram pelas manhãs e pelas tardes de 6, 7 e 8 de Março, realizaram-se no Palácio da Farnesina, a convite da Academia dos «Lincei», e foram inaugurados com uma mensagem do Presidente da Academia, Prof. Guido Castelnuovo, lida pelo Prof. Enrico Bompiani, estando o Prof. Castelnuovo impedido de comparecer por motivo de doença. Nos trabalhos da Assembleia tratou-se, entre outros, dos seguintes assuntos:

1.º — Admissão de quatro países como membros da União (Argentina, Paquistão, Espanha, Jugoslavia).

2.º — Constituição de várias comissões com as seguintes finalidades:

a) Estudar a possibilidade de criação dum guia ou índice geral de matemáticos e de organizações matemáticas.

b) Estudar os métodos de facilitar a disseminação da ciência matemática mediante várias formas de publicação.

c) Estudar os vários aspectos do problema de sumariação e crítica de artigos de matemática, consultando, para esse efeito, as várias organizações actualmente empenhadas nesse trabalho (Mathematical Reviews, Zentralblatt, etc.) e, em particular, estudando maneiras de promover mais íntima cooperação entre essas organizações.

d) Estudar todos os métodos de facilitar o intercâmbio de matemáticos, tanto professores como estudantes, entre as várias nações.

e) Considerar a possibilidade de preparar uma compilação de símbolos matemáticos com as definições em cinco línguas (inglês, francês, alemão, italiano e russo).

(Todas estas comissões devem apresentar um relatório ao Comité Executivo ou à Assembleia Geral na sua próxima sessão ordinária).

3.º — Nomeação duma nova comissão para o ensino matemático, integrada na U. M. I., em substituição da «Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique», de que era Secretário Geral o Prof. H. Fehr. (Numa carta apresentada à Assembleia, o Prof. Fehr oferecia a demissão da referida Comissão, sugerindo que a obra desta fosse continuada pela U. M. I. e oferecendo ao mesmo tempo os seus préstimos à nova Comissão).

4.º — Eleição do Comité Executivo, que ficou constituído como segue:

Presidente: Prof. E. M. H. Stone
1.º Vice-Presidente: Prof. E. Borel
2.º Vice-Presidente: Prof. E. Kamke
Secretário: Prof. E. Bompiani
Outros Membros: Prof.s W. D. Hodge, S. Iyanaga e B. Jessen.

5.º — Eleição do Presidente (substituído, na sua ausência, pelo Secretário) e do Prof. Borel, para membros do Comité Executivo do ICSU, tornando-se a eleição efectiva, se, e quando, a União fôr reconhecida como aderente ao ICSU.

6.º — Emendas várias ao projecto dos Estatutos. Reconhecimento dos textos inglês e francês como igualmente providos de autoridade.

7.º — Questões financeiras.

Entre as decisões tomadas, parece digna de relêvo pelas consequências que poderá ter no futuro da U. M. I., a seguinte disposição, introduzida nos Estatutos (Artigo 13), em virtude duma proposta italiana:

Prevendo um eventual acréscimo da União, o Comité Executivo terá o poder, em qualquer época anterior à segunda sessão ordinária da Assembleia Geral, e por uma decisão tomada sobre a maioria de dois terços, de elevar o número dos seus membros de 7 a 9 pela adição simultânea dum terceiro Vice-Presidente e dum quarto membro eleito, contanto que o Comité proceda logo em seguida a uma votação por correspondência para designar os titulares dos postos assim criados. Na hipótese dum aumento do número de membros do Comité Executivo, de acordo com esta disposição, as eleições para os postos assim criados seriam feitas segundo as normas aplicáveis aos postos similares, por ocasião da segunda sessão ordinária da Assembleia Geral.

De acordo com o Artigo 19 dos Estatutos, o domicílio legal da União é o gabinete do Secretário. Por isso, neste momento, a sede da U. M. I. encontra-se no edifício do Instituto Matemático da Universidade de Roma. Toda a correspondência deve ser dirigida para o Secretário, Prof. Enrico Bompiani.

Os trabalhos da Assembleia Geral Constituinte da U. M. I. decorreram numa atmosfera de excelente cordialidade e recíproco entendimento. A Academia dos «Lincei», a União Matemática Italiana e em particular o Prof. E Bompiani, prestaram aos participantes na Assembleia um óptimo acolhimento, criando-lhes um ambiente deveras aprazível, que deixou em todos a melhor recordação dos momentos ali passados.

J. S. e Silva

MENSAGEM DO PROF. G. CASTELNUOVO À ASSEMBLEIA GERAL CONSTITUINTE DA UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL

Signori,

dolente che una indisposizione mi impedisca di assistere alla seduta inaugurale del convegno, vi porgo col presente messaggio il cordiale saluto dell'Accademia dei Lincei, lieta di accogliervi in questa villa che le appartiene. Io spero che le mirabili proporzioni della sala ove si svolgeranno i vostri lavori, ispireranno ad essi quel senso della misura che tanto peso ha nelle discussioni di temi, ove intervengono anche delicati problemi internazionali.

Non è la prima volta che l'Accademia dei Lincei riunisce nel suo seno matematici di tutto il mondo. Nel 1908 l'Accademia accolse nel vicino palazzo Corsini, che è la sua sede, il IV Congresso Internazionale dei Matematici. Ed io, che di quel Congresso ero il Segretario generale, ebbi la fortuna di poter allora avvicinare scienziati insigni quali Poincaré, Picard, Darboux, Mittag-Leffler, Giorgio Darwin, Newcomb e tanti altri di cui per brevità devo tacere i nomi. Erano presenti anche tutti i nostri Maestri, purtroppo oggi scomparsi, Dini, Bianchi, Corrado Segre insieme a Vito Volterra, Tullio Levi-Civita, Federico Enriques le cui morti recenti ci lasciarono un gran vuoto.

Se vi ricordo tutti questi grandi nomi è perchè ad essi vi ispiriate nelle risoluzioni che starete per prendere. Succede talvolta che giovani, ansiosi di aprire nuove vie alla scienza, rivolgano i loro sguardi soltanto all'avvenire e lascino in ombra le glorie del passato. Consentite a me, giunto ormai al termine della vita, di farvi presente che le istituzioni veramente solide e durature riposano sulla tradizione. Resiste all'uragano l'albero che ha radici profonde nella terra, mentre l'arbusto le cui radici sono alla superficie viene abbattuto dalla prima burrasca.

Io auguro a nome mio e dell'Accademia che vi ospita, che queste vostre riunioni si concludano con la creazione di una Unione perenne tra i matematici delle principali Nazioni, la quale permetta facili e frequenti contatti tra colleghi di vari paesi, tenga al corrente l'uno dei progressi compiuti dall'altro e permetta così un progresso più rapido della nostra scienza.

Con questo augurio vi invito a iniziare i vostri lavori.

NOTICIÁRIO

UNIÃO MATEMÁTICA ITALIANA

Realizando-se em Roma nos dias 6, 7 e 8 de Março a Assembleia Geral Constituinte da União Matemática Internacional, a União Matemática Italiana aproveitou esta oportunidade para organizar um grupo de conferências com a participação de algumas das individualidades que assistiram à Assembleia. As conferências realizaram-se nos dias 10 e 11 de Março conforme o seguinte programa:

10 de Março

H. Cartan — A propos d'une extension du théorème des chaînes de syzygies de Hilbert.

M. Stone — Linearity and order in functional analysis.

R. Caccioppoli — Funzioni analitiche; famiglie normali e teoremi di Picard, Landau, Schottky: una generalizzazione qualitativa.

K. Knopp—Folgenräume und Limitierungsverfahren.

Skolem—Remarks on the Diophantine equation $ax^2+by^2+cz^2=0$.

11 de Março

W. D. Hodge — Structure problems on complex manifolds.

W. Gröbner — Alcune applicazioni della teoria degli ideali alla geometria algebrica.

K. Kunugi — Sur quelques points de l'analyse mathématique.

B. Jessen — Recent work in analysis in Danmark

(DIRICHLET series; almost periodic functions; infinitely differentiable functions).

C. KURATOWSKI — Sur le problème du prolongement des fonctions continues en Topologie.

Estas conferências tiveram lugar no Instituto Matemático e fôram pretexto para se reunirem em Roma muitas das figuras mais representativas do meio matemático italiano.

J. S. e Silva

3.º CONGRESSO AUSTRÍACO DE MATEMÁTICOS

A Sociedade Matemática Austríaca convida os matemáticos de todos os países a participarem nesta reunião que terá lugar em Salzburg, de 9 a 14 de Setembro de 1952. O congresso compreenderá as seguintes secções: Análise, Geometria e Topologia, Álgebra e Teoria dos Números, Matemáticas Aplicadas, e História e Filosofia. Os resumos das comunicações apresentadas serão publicados nos *Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.*

M. Z.

COLÓQUIO DE LÓGICA MATEMÁTICA

Por solicitação das Sociedades internacionais de Lógica Simbólica e Filosofia das Ciências, a Faculdade das Ciências de Paris promoveu um «Colóquio de Lógica Matemática» que teve lugar no «Instituto Henri Poincaré», de 25 a 30 de Agosto de 1952. Nele tomaram parte:

F. GONSETH (Zürich), FEYS (Louvain), JOHANSSON (Oslo), BETH (Amsterdam), VAN DANTZIG (Amsterdam) GUITEL (Paris), SUBLET (Trey sur Payerne, Suissa), VUYSJE (Amsterdam), KREISEL (Reading, Inglaterra), FRAISSE (Alger), ROBINSON (Toronto), LORENSEN (Bonn), BOCHENSKI (Friburgo, Suissa), KUREPA (Zagreb, Iugoslávia), HEYTING (Amsterdam), MEYER (Enschede, Países-Baixos), WOODGER (Londres), REICHENBACH (Los Angeles), DESTOUCHES (Paris), CHÂTELET (Paris), BODIOU (Marseille), CURRY (Pensilvânia), RIGUET (Londres), ROSE (Ulverston, Inglaterra), BORGERS (Louvain), DOPP (Louvain,) CARACCIOLO (Turim), BRUINS (Amsterdam), DOCKS (Bruxelas), BRITSCHWAYR (München), FÉVRIER (Paris), FISCHER (Amsterdam), GREENWOOD (Quebec), KOYRE (Paris), LEROY (Paris), PERELMANN (Bruxelas), PROCA (Paris), LUIZ FREIRE (Recife, Brasil).

Os mais variados e relevantes assuntos de Lógica Matemática e Filosofia das Ciências, os desta última relacionados aos da primeira, foram apresentados ao plenário do Colóquio e nele amplamente debatidos.

Serão os trabalhos do Colóquio publicados, sob forma sintética, no «Journal of Symbolic Logic».

Foram apresentadas as comunicações:

FEYS — Présentation du problème des applications de la Logique Mathématique.

JOHANSSON — Symboles logiques dans l'enseignement des théories déductives.

BETH — La Logique et le fondement des mathématiques.

KREISEL — Applications of mathematical logic to various branches of mathematics.

FRAISSE — Sur les rapports entre la théorie des relations et la sémantique au sens de A. TARSKI.

ROBINSON — L'application de la logique formelle aux mathématiques.

LORENZEN — Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis.

CHATELET — Logique mathématique dans la géométrie grecque.

HEYTING — Logique et intuitionnisme.

MEYER — L'autonomie de la physique vis-à-vis de l'ontologie.

FREIRE (LUIZ) — Des rapports entre le langage et les mathématiques.

REICHENBACK — Les fondaments logiques de la théorie des quanta.

FÉVRIER — Sur la logique des propositions expérimentales.

DESTOUCHES — La Logique et les théories physiques.

BODIOU — Dificulté d'utisation du formalisme quantique à la topologie d'un treillis non modulaire de propositions. Possibilité de son utilisation à la modification du concept de «corpuscule localisé».

WOODGER — Problems arising from the application of mathematical logic to biology.

CURRI — The logic of Program composition.

SUBLET — Essai de formalisation complète du raisonnement mathématique sur la base de trois opérations.

KUREPA — Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de ZERMELO.

Temas postos em discussão:

I. A quelles conditions un système doit satisfaire pour être appelé:

1.º) un sistéme de l'arithmétique

2.º) » » » l'analyse.

II. A quelles conditions une fonction de nombres réels peut être dite effectivement calculable.

III. Discussion générale sur la logique et les mathématiques.

IV. Discussion générale sur la logique et la physiqre.

L. Freire

PRÉMIO NACIONAL GOMES TEIXEIRA

Afirmou a *Gazeta de Matemática* no n.º 50, publicado em homenagem ao grande matemático português, que o prémio GOMES TEIXEIRA, havia sido uma única vez atribuído até à data a um estudante das nossas escolas superiores. Era falsa a nossa afirmação e temos, ao corrigi-la, a grande satisfação de comunicar aos leitores da *Gazeta de Matemática* e de sermos, talvez, os primeiros a tornar pública a notícia, de que foi premiado também, por trabalho apresentado em 1947, o então aluno da Faculdade de Ciências de Lisboa, Sr. FERNANDO ROLDÃO DIAS AGUDO.

Lastimamos porém não se ter dado há mais a publicidade devida a tão importante acontecimento da vida universitária portuguesa e admiramo-nos bastante por este facto ter passado desapercebido do nosso, infelizmente tão restricto, meio matemático.

Sinceras e vivas felicitações ao Sr. Dr. F. R. DIAS AGUDO pela honra merecida e também os nossos melhores agradecimentos por ter acedido ao pedido da Redacção da *Gazeta de Matemática* para a publicação nesta revista do trabalho premiado, que se intitula «Sobre um teorema de KAKEYA» e que aparecerá num dos próximos números.

M. Z.

PRÉMIO INTERNACIONAL G. FUBINI

A União Matemática Italiana, em homenagem ao ilustre matemático Prof. GUIDO FUBINI, criou um prémio internacional que será atribuído ao autor de trabalhos publicados de Janeiro de 1946 a Dezembro de 1952 reconhecidos como contribuição importante ao progresso da Geometria Diferencial.

O prémio é indivisível e a quantia atribuída em liras italianas é equivalente a 550 gr. de ouro.

A Comissão deliberadora é composta pelos Profs.: S. BOCHNER, da Universidade de Princeton, C. EHRESMANN, da Universidade de Strasburgo e A. TERRACINI, da Universidade de Turim.

Caso a Comissão entenda não poder atribuir o prémio às investigações no domínio da Geometria Diferencial, conferi-lo-á a trabalhos da teoria das funções automorfas ou teorias relacionadas.

M. Z.

PROF. DR. RENATO PEREIRA COELHO

Em 2 e 3 de Junho de 1952, no Instituto Superior de Agronomia, realizaram-se provas de concurso para professor extraordinário do 3.º grupo (Matemática e Cálculo).

Foi concorrente único o assistente da mesma escola Dr. RENATO PEREIRA COELHO. A lição, criticada pelo Prof. Dr. BEDA NETO, da Universidade de Coimbra, versou sobre «Secções planas das superfícies de revolução. Caso particular da esfera».

A dissertação apresentada intitulava-se «Estudos sobre a regularidade dos espaços topológicos» e dela foi arguente o professor do Instituto, Doutor JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA.

Ao candidato aprovado apresenta a *Gazeta de Matemática* vivas felicitações.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Ensino Liceal — Ano de 1952 — Exame do 3.º ciclo — 1.ª chamada.

ATENÇÃO — Se não souber resolver qualquer alínea duma questão, não deixe de tentar as seguintes. A resposta a cada uma delas não depende das anteriores.
As respostas só são válidas com as respectivas justificações.

3442 — O polinómio $P(x)=x^3-x^2+4x-4$ admite a raiz $x=1$.

Determine as outras duas raízes deste polinómio. R: *Como* $P(x)$ *é divisível por* $x-1$, *será* $P(x)=(x-1)(x^2+4)$. *Os outros zeros do polinómio são as raízes da equação* $x^2+4=0$ *ou seja* $x=\pm 2i$.

3443 — Os vértices dum triângulo são os pontos $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(3,-4)$. Escreva a equação da recta que passa por A e é paralela ao lado BC.

R: *A equação da recta que passa pelos pontos* B *e* C *é* $(x-5)/(5-3)=(y-0)/(0+4)$ *ou seja* $y=2x-10$ *e portanto a recta que lhe é paralela e que passa pela origem (ponto* A) *é* $y=2x$.

3444 — *a*) Estude as variações de sinal da função: $y=\frac{1}{2}(1-x)(x+3)$ no intervalo $(-\infty,+\infty)$.

b) Calcule a inclinação da tangente à parábola definida pela função anterior, no ponto de abcissa $x=0$. *c*) Determine o valor de h de modo que a recta $y=-2x+h$ seja secante àquela parábola. R: *A função pode escrever-se sob a forma*

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)(x+3);$$

como os zeros do polinómio do segundo membro são

$x' = 1$ $x'' = -3$, *e em virtude das propriedades do trinómio do 2.º grau, temos:*

a) *quando* $x \to -\infty$ $y \to -\infty$
» $-\infty < x < -3$ $y < 0$
» $-3 < x < 1$ $y > 0$
» $1 < x < +\infty$ $y < 0$
» $x \to +\infty$ $y \to -\infty$

b) *Como* $y' = -x - 1$ *o coeficiente angular da tangente no ponto de abcissa* 0 *é* -1 *e a tangente forma um angulo de 135.º com a parte positiva do eixo dos* xx.

c) *As abcsissas dos pontos de encontro da recta* $y = -2x + h$ *com a parábola* $y = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ *são as raízes da equação* $-2x + h = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ *ou seja as da equação* $x^2 - 2x + 2h - 3 = 0$.

Para que a recta seja secante à parábola é necessário que tenha dois pontos distintos de comum com a parábola e portanto que aquela equação tenha duas raízes reais e distintas o que se obtem determinando h *de modo que o descriminante seja positivo, isto é, que*

$$1 - (2h - 3) > 0 \quad \textit{donde} \quad h < 2.$$

3445 — *a*) Se for:

$$x = \cos\alpha + \cos 2\alpha$$
$$y = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha$$

prove que $x^2 + y^2 = 2 + 2\cos\alpha$.

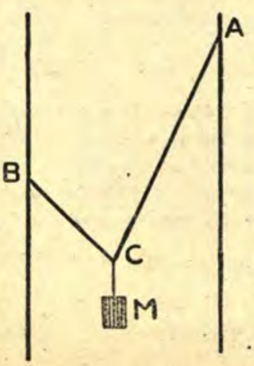
b) Resolva a equação: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$. R:

a) *Tem-se* $x^2 + y^2 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha + 2[\cos\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)] = 2 + 2\cos\alpha$.

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$ *é equivalente a* $\operatorname{sen} x(1 + \cos x) = 0$ *donde* $\operatorname{sen} x = 0$ *ou* $x = k\pi$, *e* $\cos x = -1/2$ *ou seja* $x = k\pi + (-1)^k 2\pi/3$.

3446 — Um fio está preso a dois postes pelas suas extremidades A e B. Em C fixou-se uma massa M que mantém tensos os segmentos AC e BC.

Sabendo que AC e BC medem respectivamente 20 e 12,6 metros e que a distância entre os pontos A e B é 18 metros, determine a medida do ângulo ACB. (Empregue logaritmos). R: *Como se sabe* $\operatorname{tag} C/2 = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ *onde* a, b *e* c *são as medidas dos lados e* p *o semi-perímetro. Assim teremos*



$\log \operatorname{tag} C/2 = [\log(p-a) + \log(p-b) + \operatorname{colg} p + \operatorname{colg}(p-c)] : 2 = (\log 12{,}7 + \log 5{,}3 + \operatorname{colg} 25{,}3 + \operatorname{colg} 7{,}3) : 2 = (1{,}10380 + 0{,}72428 + \bar{2}{,}59688 + \bar{1}{,}13668) : 2 = \bar{1}{,}78082$

e daqui $C/2 = 31°\,7'\,10''$ *e portanto* $C = 62°\,14'\,20''$.

3447 — *a*) Determine o número N, inferior a 84, que satisfaz às seguintes condições: m. d. c. $(N, 84) = 12$, m. m. c. $(N, 132) = 396$.

b) Calcule o resto da divisão por 5 de 84^{15}.

a) *Pela 1.ª parte do enunciado couclui-se que* $N = 12n < 84$, *logo como* n *é um inteiro só pode ter os valores* $0, 1, 2, 3, 4, 5$ *e* 6. *Pela segunda parte deve ser* $Nm = 396$ *ou* $12nm = 396$ *donde* $mn = 33$ *ou* $mn = 3.11$ *e conclui-se que* $n = 3$ *e* $N = 12.3 = 36$. *A solução* $n = 1$, $m = 33$ *não serve por ser m. m. c.* $(12, 132) \neq 396$.

b) *Como* 4 *é o resto da divisão de* 84 *por* 5, *o resto pedido é igual ao resto da divisão de* 4^{15} *por* 5. *Além disso* 4^2 *dá de resto* 1 *quando dividido por* 5, *e o mesmo sucede, portanto, com* $4^{14} = (4^2)^7$, *e daqui se conclue ser* 4 *o resto da divisão de* 84^{15} *por* 5.

Nota — *Esta última questão resolvia-se mais ràpidamente por meio de congruências, notando que* $84 \equiv 4$ (mod 5) *e que portanto* $84^{15} \equiv 4^{15}$ (mod 5); *além disso por ser* $4^2 \equiv 1$ (mod 5) *seria* $84^{15} \equiv 4^{15} \equiv (4^1)^7 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4$ (mod 5).

Soluções dos n.os 3442 a 3447 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1952 — 9 de Agosto.

I

3448 — Supondo que os inteiros a, b, x e y satisfazem às condições:

$$\text{m. d. c.}(a, b) = \text{m. d. c.}(b, x) = \text{m. d. c.}(a, y) = 1$$

demonstre que os inteiros $ax + by$ e ab são primos entre si. R: *Demonstremos por redução ao absurdo. Seja* d *um factor primo comum aos inteiros* $ax + by$ *e* ab. *Se* d, *primo, divide* ab *com* a *e* b *primos entre si, por hipótese, divide um dos seus factores. Seja* $a = \dot{d}$. *Então será* $ax = \dot{d}$ *e, por ser* $ax + by = \dot{d}$, *como supuzemos terá que ser tambem* $by = \dot{d}$ *o que é absurdo visto que sendo* b *e* y *primos com* a, *por hipótese, não admitem divisor algum de* a. (*Raciocínio análogo se tivéssemos suposto* $b = \dot{d}$).

3449 — Calcule o resto da divisão por 7 de 18^{1000}. R: *Por ser* $18^{1000} = (\dot{7} + 4)^{1000} = \dot{7} + 4^{1000} = \dot{7} + 4 \cdot 4^{999} = \dot{7} + 4 \cdot 2^{1998} = \dot{7} + 4 \cdot (2^3)^{666} = \dot{7} + 4 \cdot (\dot{7} + 1) = \dot{7} + 4$, *o resto pedido é* 4.

II

3450 – Defina combinações simples de n elementos k a k e verifique a seguinte identidade

$$k\cdot C_k^n = n\cdot C_{k-1}^{n-1} \qquad (n \geqslant k)\,.$$

R: *Com efeito, é*

$$k\cdot C_k^n = k\cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

e

$$n\cdot C_{k-1}^{n-1} = n\cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\,,$$

com $n \geqslant k \geqslant 1$.

3451 – Dado o trinómio $f(x) = x^2 - 2x + k^2 + k$ determine k de modo que o trinómio seja maior do que $\frac{1}{2}$, *seja qual for o valor real atribuído a* x.

R: *Terá que ser* $f(x) - 1/2 > 0$ *qualquer que seja* $\underline{x}$ *real. Por ser positivo o coeficiente do termo em* x^2 *bastará que se tenha* $\Delta = 6 - 4k^2 - 4k < 0$ *ou* $-(1+\sqrt{7})/2 < k < (-1+\sqrt{7})/2$.

III

3452 – Verifique a seguinte identidade

$$\mathrm{cotg}\,(x+y) = \frac{\mathrm{cotg}\,x\cdot \mathrm{cotg}\,y - 1}{\mathrm{cotg}\,x + \mathrm{cotg}\,y}\,.$$

R: *Se em*

$$\mathrm{cotg}\,(x+y) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,(x+y)} = \frac{1 - \mathrm{tg}\,x\cdot \mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}$$

substituirmos $\mathrm{tg}\,x$ *por* $\frac{1}{\mathrm{ctg}\,x}$ *e* $\mathrm{tg}\,y$ *por* $\frac{1}{\mathrm{cotg}\,y}$, *fica provada a identidade.*

3453 – Calcule os ângulos positivos e inferiores a 360° que satisfazem à igualdade

$$\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0\,.$$

R: *A equação proposta é equivalente a* $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{tg}\,3x = 0$ *ou* $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{tg}\,(-3x)$ *donde* $x + \frac{\pi}{3} = n\pi - 3x$ *ou* $x = \frac{(3n-1)\pi}{12}$ (n *inteiro*). *As soluções pedidas são as que correspondem aos valores inteiros de* $1 \leqslant n \leqslant 8$ *e que são:* $\pi/6$, $5\pi/12$, $2\pi/3$, $11\pi/12$, $7\pi/6$, $17\pi/12$, $5\pi/3$ *e* $23\pi/12$.

Soluções dos n.os 3448 a 3453 de Orlando M. Rodrigues

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico e Faculdade de Engenharia do Porto – Ano de 1952 – 9 de Agôsto.

3454 – Resolva a equação

$$x - \frac{5(x-1)^2}{6} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + 1$$

determinando os valores das incógnitas expressos em números decimais com a aproximação até milésimas. R: *A forma canónica da equação dada é* $11x^2 - 36x + 26 = 0$. *As raízes são* 2,196 *e* 1,076.

3455 – Determine a ordem do termo que não contém x do desenvolvimento de $(x + 1/x^2)^{21}$ sem fazer este desenvolvimento. Determine a seguir o valor daquele termo. R: *O termo de ordem* $p+1$ *é*

$$T_{p+1} = \binom{21}{p}\frac{1}{x^{2p}}\,x^{21-p} = \binom{21}{p}x^{21-3p}.$$

Deverá ser $21 - 3p = 0$, $p = 7$. *O termo pedido, que é o oitavo, é* $T_8 = \binom{21}{7}$.

3456 – Simplifique a fracção

$$\frac{x^2 - x + (x-1)\sqrt{2}}{x^2 - 2x - (x+1)\sqrt{2}}\,.$$

R: *Os zeros do numerador são* 1 *e* $-\sqrt{2}$. *Nenhum dos zeros do numerador anula o denominador, pelo que a fracção é irreductível.*

3457 – Diga qual o maior número de circunferências que podem ser determinadas por 15 pontos complanos onde há 5 que estão sobre a mesma circunferência. R: *Supondo que não há qualquer grupo de* 3 *pontos colineares, será*

$$\binom{15}{3} - \binom{5}{3} + 1\,.$$

3458 – Determine os valores de m para os quais a equação $2(m-1)x^2 - (m^2 - 28)x - 7m^2 = 0$ tem uma raíz positiva e outra negativa sendo aquela a maior em valor absoluto. R: *Representando por* P *e* S, *respectivamente, o produto e a soma das raízes teremos* $P < 0$ *e* $S > 0$. *Isto é:* $\frac{7m^2}{2(1-m)} < 0$ *e* $\frac{m^2-28}{2(m-1)} > 0$ *donde* $m > \sqrt{28}$.

Soluções dos n.os 3454 a 3458 de Laureano Barros

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 1951-52.

3459 — Provar que a função $y=x^3$ para $x\leqslant 2$ e $y=+\sqrt{1+x}$ para $x>2$ tem extremo no ponto $x=2$.

3460 — Calcular a primitiva da função

$$y=(5x+2)/\sqrt{3x^2-x-1}.$$

R: $$\frac{5}{3}\sqrt{3x^2-x-1}+\frac{17}{6\sqrt{3}}\log\left|\frac{x-1/6}{\sqrt{13/36}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(\frac{x-1/6}{\sqrt{13/36}}\right)^2-1}\,\right|.$$

3461 — Calcular o $\lim\left[\left(3n^2+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\right]$ quando $n\to\infty$. R: $-3/2$.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência, 1951-52.

3462 — Dada a cónica de equação $x^2+4xy-3y^2-2x=0$ determinar a direcção com que é conjugado o diâmetro $5x-11y+1=0$. R: *É a direcção* $m=-3$.

3463 — Determinar os planos tangentes à esfera $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ que são perpendiculares à recta definida pelos pontos $P(1,-2,3)$ e $Q(2,1,4)$. R: $x+3y+z+1\pm\sqrt{66}=0$.

3464 — Discutir e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=4\\ x+5y-2z=1\\ 5x+14y-3z=\alpha. \end{cases}$$

R: *O sistema é incompatível para* $\alpha\neq 7$. *Para* $\alpha=7$ *é compatível e indeterminado com as soluções*

$$x=-\frac{13}{11}p+\frac{21}{11},\quad y=\frac{7}{11}p-\frac{2}{11}\quad e\quad z=p.$$

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — 1951-52.

3465 — Achar a primitiva da função

$$f(x)=\frac{3x-1}{(x^2+4)(x^2+9)}.$$

R:

$$\frac{3}{10}\log\frac{x^2+4}{x^2+9}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}.$$

3466 — Escrever as equações dos planos que contêm o eixo Oy e são tangentes à esfera de equação $x^2+y^2+z^2-8z+15=0$. R: $z=\pm\sqrt{15}x$.

3467 — Calcular os máximos e mínimos da função $f(x)=a^2\operatorname{sen}^2x+b^2\cos^2x$ (com $a>b$). R: *Mínimo* $m=b^2$ *nos pontos* $x=k\pi$; *Máximo* $M=a^2$ *para* $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Soluções dos n.os 3460 a 3467 de L. M. de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — 1.º exame de frequência — 15 de Março de 1952.

3468 — Determine a equação geral das circunferências que são tangentes à circunferência de equação $2x^2+2y^2=1$ e cujos centros se encontram na recta $y=2x$. Fixe uma das circunferências e escreva a equação da tangente comum. R: *Seja* $C(\alpha,2\alpha)$ *o centro da circunferência. A equação procurada é:* $(x-\alpha)^2+(y-2\alpha)^2=\left[\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2}\pm1/\sqrt{2}\right]^2=5\alpha^2\pm 2\sqrt{5/2}\,\alpha+1/2$.

Esta equação para $\alpha=0$ *conduz à circunferência dada. Qualquer dos dois trinómios do segundo membro tem descriminante nulo, portanto há dois valores de* α *que conduzem a circunferências de raio nulo.*

Fora desses três valores de α, *aquela equação responde ao problema. As tangentes comuns são as rectas perpendiculares à recta dada e passando pelos pontos de encontro dela com a circunferência dada.*

3469 — Inverta a função $x=\operatorname{sen}y$ por forma a conseguir uma inversa unívoca. Estude a continuidade dessa função inversa, inclusivamente nos pontos em que a derivada é infinita. Exprima por logarítmos a inversa da função $y=\operatorname{sh}x$. R: *Encontram-se inversas unívocas da função* $x=\operatorname{sen}y$ *nos intervalos* $(-\pi/2,\pi/2)$ *ou* $(0,\pi/2)$ *ou* $(\pi/2,3\pi/2)$ *por exemplo, ou em qualquer intervalo* (y_1,y_2) *onde não se encontrem dois* y y *que exprimam, em radianos, arcos com os mesmos senos.*

Se $x=f(y)$ *é contínua no ponto* $b=\varphi(a)$, *tem-*

-se $|f(y) - f(b)| < \delta$ *quando for* $|y - b| < \varepsilon$ *e portanto para* $|y - b| < \delta' < \varepsilon$.

Então, dado $\delta' < \varepsilon$ *tem-se* $|y - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| < \delta'$ *se for* $|f(y) - f(b)| = |x - a| < \delta$; *a inversa de uma função contínua é contínua.*

Por outro lado a inversa de $x = \operatorname{sen} y$ *é* $y = \operatorname{arc\,sen} x$, *em qualquer dos intervalos considerados, por exemplo,* $(-\pi/2, \pi/2)$. *Em qualquer ponto interior a função* $x = \operatorname{sen} y$ *tem derivada não nula, logo a função* $y = \operatorname{arc\,sen} x$ *tem derivada finita e é pois contínua. Para* $y = \pm\pi/2$ *a derivada de* $x = \operatorname{sen} y$ *é nula, logo em tais pontos a função* $y = \operatorname{arc\,sen} x$ *tem derivada infinita; estudemos então nestes pontos a continuidade da função. Pela continuidade de* $\operatorname{sen} y$, *teremos* $|\operatorname{sen} y \mp 1| < \delta$ *quando for* $|y \mp \pi/2| < \varepsilon$; *portanto, dado* $\delta' < \varepsilon$ *será.* $|\operatorname{arc\,sen} x \mp \pi/2| < \delta'$ *quando* $|x \pm 1| < \delta$.

3470 — Escreva a fórmula de Taylor da função $f(x)$ na vizinhança do ponto a. Defina série de Taylor da mesma função, relativa ao ponto a. Indique uma condição para que a soma desta série seja $f(x)$. Prove a necessidade e a suficiência. Enuncie uma condição apenas suficiente e prove a suficiência. Desenvolva 3^x nas vizinhanças de $x = -1$. Em que pontos pode calcular a função aproveitando este desenvolvimento? R: *Aproveitando o desenvolvimento de* $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots$ *válido qualquer que seja* y; *teremos, atendendo a que* $3^x = e^{x \log 3}$, *o desenvolvimento desejado:* $3^x = 1 + x\log 3 + \frac{x^2 \log^2 3}{2!} + \cdots$.

Esta série permite calcular 3^x *em todo o campo real.*

3471 — Demonstre o teorema de Lagrange, para a função $f(x)$ regular em (a, b) e prove que $f(x)$ é pròpriamente crescente no intervalo, se $f'(x) > 0$. E se for $f'(x) \geqslant 0$? R: *Tem-se, depois de demonstrado o teorema de* Lagrange, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_3)$ *quaisquer que sejam* $x_1 < x_2$ *tomados no intervalo* (a, b) *e sendo* $x_1 < x_3 < x_2$. *Supondo* $f'(x) \geqslant 0$ *(nunca nula) no intervalo* (a, b) *vem a fracção* $\geqslant 0$ *(nunca nula) e os seus termos do mesmo sinal (o numerador nunca nulo). Logo, para* $x_1 < x_2$ *será* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ *(ou sempre* $f(x_1) < f(x_2)$).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 14 de Março de 1952.

3472 — Determine a equação da tangente $-r-$ à curva $y = x - \operatorname{sen} \pi x/4$ no ponto de abcissa $x = 2$. Deduza a equação da família das circunferências de centro no eixo OY e tangente à recta $-r-$. Em particular, ache as equações daquelas circunferências, da família, de raio igual a 2. R: *A equação da tangente no ponto* $(2, 1)$ *é* $y - x + 1 = 0$. *Sendo* $C(o, c)$ *o centro da circunferencia, a distância de* C *a* r *vem a ser* $\frac{c+1}{\sqrt{2}}$. *A equação procurada é:* $x^2 + (y-c)^2 = (c+1)^2/2$. *Para o raio* 2 *virá* $(c+1)^2/2 = 4$, *donde* $c = -1 \pm \sqrt{8}$. *As equações das circunferências pedidas são pois:* $x^2 + (y + 1 \mp \sqrt{8})^2 = 4$.

3473 — Se $|a_n|$ tem limite finito, mostre que o conjunto dos números a_n é limitado.

Determine o intervalo de convergência absoluta da série de termo geral $a_n x^n$. Enuncie uma condição necessária e suficiente de convergência desta série num ponto. Indique um intervalo de convergência uniforme da mesma série e prove a afirmação.

Em que pontos a soma da série é uma função contínua? Enuncie o teorema em que fundamenta a resposta.

Dada a série $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ determine, justificando, o intervalo $(0, a)$ de maior amplitude, de convergência uniforme. R: *Seja* A *o limite finito de* $|a_n|$; *fixado* $\varepsilon > 0$, *só um número finito de números* a_n *ficarão fora do intervalo* $(-A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. *Se os números* a_n *fora daquele intervalo são em número finito, há um menor que todos, seja* α, *e um maior que todos, seja* Λ. *Dos dois números* α *e* Λ *um pelo menos tem maior valor absoluto; seja* β *esse valor absoluto. Então, todos os números* a_n *caiem no intervalo fechado* $[-A-\varepsilon-\beta, A+\varepsilon+\beta]$. *Como*

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{|x|^n}{2^n} =$$

$$= \frac{|x|}{2} \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{n[(n+1)^2+1]} = \frac{|x|}{2},$$

o intervalo de convergência absoluta é dado por $\frac{|x|}{2} < 1$ *e portanto,* $-2 < x < 2$. *Mas a série* $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ *é alternada decrescente, convergente, e pelo teorema de* Abel, *a série proposta é uniformemente convergente no intervalo (máximo)* $(0,2)$.

3474 — Defina função contínua num ponto $-c-$ interior ao domínio.

Se a função $f(x)$ é limitada no intervalo (a, b) e num ponto interior desse intervalo tem uma descontinuidade, estude aí a oscilação. Justifique.

Prove que se $f(x)$ é contínua no conjunto limitado e fechado $-X-$ ela é limitada em X.

Determine os extremantes da função $f(x) = (x-2)^2 \cdot x^3$. R: *Com* x *no intervalo* (a, b) *é* $l \leqslant f(x) \leqslant L$. *Seja* c *interior a* (a, b) *e ponto de descontinuidade. Dada uma* $I(c, \varepsilon)$ *sejam* $L(c, \varepsilon)$ *e* $l(c, \varepsilon)$ *os limites próprios ou impróprios de* $f(x)$ *com* x *em* $I(c, \varepsilon)$. *Tendendo* ε *para zero, existem, próprios ou impróprios, os limites* $\bar{f}(c) = \lim_{\varepsilon=0} L(c, \varepsilon)$ *e* $\underline{f}(c) = \lim_{\varepsilon=0} l(c, \varepsilon)$.

Como c *é interior a* (a, b), *para* ε *suficientemente pequeno* $I(c, \varepsilon)$ *está inteiramente contida em* (a, b) *e portanto:* $l \leqslant \underline{f}(c) < \bar{f}(c) \leqslant L$.

Então, $\omega(c) = \bar{f}(c) - \underline{f}(c)$ *é finita.*

De $f(x) = (x-2)^2 x^3$ *vem:* $f'(x) = 2(x-2)x^3 + 3(x-2)^2 x^2 = x^2(x-2)(5x-6) = 5x^2\left(x - \frac{6}{5}\right)(x-2)$.

São extremantes os valores $x_1 = \frac{6}{5}$ *e* $x_2 = 2$.

São extremos os valores

$$f(x_1) = \text{Máximo} \quad e \quad f(x_2) = \text{mínimo}.$$

Trata-se de extremos locais.

3475 — Supondo que a recta $y = mx + p$ é assíntota da curva $y = f(x)$, prove que $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ onde $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. Nas condições anteriores qual o $\lim_{x=\infty} \varphi'(x)$? Porquê? Como determina a posição daquela curva em relação à assíntota nas vizinhanças do infinito? R: *A primeira parte resulta imediatamente da definição de assíntota. Sendo assim, temos* $\varphi(x) = f(x) - mx - p$ *donde* $\varphi'(x) = f'(x) - m$. *Mas como* $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} f'(x) = m$ *então será* $\lim_{x=\infty} \varphi'(x) = 0$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º Exame freq. — 30 de Junho de 1952.**

3476 — Defina zero inteiro de $f(x)$. Dada a função $f(x) = (x-a)^2 \psi(x)$ que condições deve impor à função $\psi(x)$ para que a seja zero duplo?

Prove que nessas condições a é zero duplo.

Se a é zero triplo de $f'(x)$ indique, justificando, o número de variações perdidas por $F'(x)$ (sucessão de Fourier de $f'(x)$) quando x passa por a.

Utilize a sucessão de Rolle na separação das raízes de $x^4 - 6x^2 + 8x + 4 = 0$. R: $f(x)$ *tem* a *por zero simples se e só se:* $f(a) = 0$ *e* $f'(a) \neq 0, \infty$. $f(x)$ *tem* a *por zero duplo se e só se:* $f(a) = f'(a) = 0$ *e* $f''(a) \neq 0, \infty$, *e assim sucessivamente, de modo que:* a *é zero inteiro de* $f(x)$ *se e só se* $f(a) = 0$ *e alguma derivada da função é diferente de zero e infinito para* $x = a$.

Para que a *seja zero duplo de* $f(x) = (x-a)^2 \psi(x)$ *é suficiente que:*

1.º) $\psi(x)$ *diferente de zero e infinito para* $x = a$, *porque então* $f(a) = 0$.

2.º) $(x-a)\psi(x)$ *seja contínua para* $x = a$, *porque então, de* $\frac{f(x)}{x-a} = (x-a)\psi(x)$ *resulta* $f'(a) = 0$.

3.º) $(x-a)\psi(x)$ *tenha derivada finita para* $x = a$, *porque de* $f(x) = (x-a)[(x-a)\psi(x)]$ *derivando vem* $\frac{f'(x)}{x-a} = \psi(x) + [(x-a)\psi(x)]'$ *o que dá* $f''(a) \neq 0, \infty$.

Tem-se $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x+2)(x-1)^2$; *à sucessão* $-\infty, -2, 1, +\infty$ *corresponde a succssão de Rolle* $f(-\infty)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(+\infty)$ *com os seguintes sinais:* $+, -, +, +$; *como* $f(-3) > 0$ *conclui-se com os teors. de Rolle e Cauchy que há uma raiz real em* $(-3, -2)$ *e outra em* $(-2, 1)$; *as outras duas são complexas (conjugadas).*

3477 — Demonstre que $f(x, y)$ é contínua nos pontos onde seja diferenciável. Se $f(x, y)$ é diferenciável em $P(a, b)$ e se nesse ponto $f(x, y) - C$ é nula, mas $f'_y(x, y) > 0$, prove que $f(x, y) = C$ define uma e só uma função $y(x)$ nas vizinhanças de $x = a$.

Dada $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ que figuras representa no plano e no espaço esta equação? Determine o grau de homogeneidade de $f(x, y)$ e decomponha-a em soma de quadrados. R: *Faça-se* $F(x, y) = f(x, y) - C$ *e será* $F'_x = f'_x$, $F'_y = f'_y$. *As funções* $f(x, y)$ *e* $F(x, y)$ *são diferenciáveis em* P, *logo com derivadas finitas* em P, *sendo ainda* $F(a, b) = 0$ *e* $F'_y(a, b) > 0$. *Então, as funções parciais tiradas de* F *são contínuas, por terem derivadas, e uma é monótona, por ser positiva a respectiva derivada.*

São as condições do teorema de existência; a unicidade resulta do facto da função parcial em y *ser pròpriamente crescente, pois que a sua derivada é não nula em certa vizinhança de* P, *e se deve, para isso, supor contínua em* P.

A equação $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ *representa, no plano, uma curva de segunda ordem, porque é do segundo grau; representa no espaço uma superfície de segunda ordem.*

O grau de homogeneidade de $f(x, y)$ *é* 2:

$$f(xt, yt) = t^2 f(x, y).$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + 2x\left(\frac{3}{2}y\right) + 2y^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2.$$

Fazendo a mudança de eixos $X = x + \frac{3}{2}y$, $Y = \frac{1}{2}y$, *resulta para equação das figuras* $X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y) = 0$.

No plano: duas rectas concorrentes na origem. No espaço dois planos passando por $\overline{OZ}$.

4378 — Demonstre que se um polinómio $P(z)$ de grau efectivo $n \geqslant 1$ tem uma raíz, tem precisamente n raízes e deduza as fórmulas de Girard.

Utilize a teoria da eliminação para determinar a condição necessária e suficiente de existência de raíz dupla na equação $x^3+px+q=0$. R: *Eliminando* x *entre* x^3+px+q *e a derivada* $3x^2+p$ *vem o determinante*

$$\begin{vmatrix} & 1 & 3 & & \\ 1 & 0 & 0 & 3 & \\ 0 & p & p & 0 & 3 \\ p & q & & p & 0 \\ q & & & & p \end{vmatrix}$$

que deverá ser igualado a zero.

Para abaixamento de ordem temos:

$$\begin{array}{r|llll} 3 & 0 & p & (0) & \\ & 1 & 0 & p & q \\ \hline \lambda_1 = -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2}{3}p & q & \\ \lambda_3 = -\dfrac{2}{q}p & 0 & q & -\dfrac{2}{q}p^2 & \end{array}$$

Portanto:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}p & q \\ q & -\dfrac{2}{q}p^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{27}p^3 - q^2 = 0 \quad ou$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0\,.$$

3479 — Enuncie o teorema de Rouché e deduza a regra de Cramer para a resolução de sistemas.

Qual a condição para que o sistema

$$\begin{cases} a_{ik}\,x_k = 0 & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ (k = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

tenha, pelo menos, uma solução não nula.

Sirva-se dessa condição para resolver o seguinte problema:

Determine a equação do plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralelo às rectas de equações

$$\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c}$$

e

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}\,.$$

R: *A equação do plano que passa pelo ponto, e as condições de paralelismo, dão o sistema*

$$\begin{cases} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \\ Aa + Bb + Cc = 0 \\ Aa' + Bb' + Cc' = 0 \end{cases}$$

de equações lineares e homogéneas em A, B, C. *Para que haja solução não nula deverá ser (e basta)*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

que é a equação do plano.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final — 21 de Julho de 1952.**

3480 — Exprima a função $P(x) = 4x^3 - 15x^2 + 16x + 8$ sob a forma $\alpha x(x-1)(x-2) + \beta x(x-1) + \gamma x + \delta$ onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são coeficientes constantes. R: *Da relação* $P(x) = \alpha x(x-1)(x-2) + \beta x(x-1) + \gamma x + \delta$ *se vê que* δ, γ *e* β *são respectivamente: o resto da divisão de* P(x) *por* x; *o resto da divisão por* $x-1$, *do cociente da divisão anterior; o resto da divisão por* $x-2$, *do cociente da divisão anterior. Então, a regra de* RUFFINI, *dá*

$$\delta = 8\,, \quad \gamma = 5 \quad e \quad \beta = -3\,.$$

$$P(x) = 4x(x-1)(x-2) - 3x(x-1) + 5x + 8\,.$$

3481 — Duma função interpoladora $f(x)$, são conhecidas as seguintes diferenças finitas

$$\begin{array}{ll} \Delta^0 f(0) = 2 & \Delta^0 f(1) = 2 \\ \Delta^1 f(0) = 0 & \Delta^1 f(1) = -6 \\ \Delta^2 f(0) = -6 & \Delta^2 f(1) = -18 \\ \Delta^3 f(0) = -12 = & \Delta^3 f(1) = -12\,. \end{array}$$

Deduza a respectiva tabela de diferenças, os valores $f(4)$ e $f(-1)$ e determine por último a interpoladora. R: *A tabela de diferenças pode reconstituir-se fàcilmente*.

$$\begin{array}{ccccc} x & \Delta^0 f & \Delta^1 f & \Delta^2 f & \Delta^3 f \\ 0 & 2 & & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 2 & & -6 & \\ & & -6 & & -12 \\ 2 & -4 & & -18 & \\ & & -24 & & \\ 3 & -28 & & & \end{array}$$

Prolongando a tabela vem

$$f(4) = -82 \qquad f(-1) = 8\,.$$

A interpoladora de GREGORY-NEWTON *é*

$$f(x)=2-6\frac{x(x-1)}{2!}-12\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=$$
$$=2-3x(x-1)-2x(x-1)(x-2)=$$
$$=-2x^3+3x^2-x+2\,.$$

3482 — Mostre que a equação $x^3-y^3-2xy+2=0$ define uma só função $y=\varphi(x)$ no intervalo $0\leqslant x<+\infty$. Determine a equação da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, da tangente à curva $y=\varphi(x)$ no ponto $(1,1)$.

R: *A equação* $y^3+2xy-2-x^3=0$ *é de 3.º grau em* y *e, com* x *nulo ou positivo, pela regra de* DESCARTES, *apresenta sempre uma só variação e não tem mais que uma raiz real* $y(x)$ $(x\geqslant 0)$. *As derivadas parciais do polinómio,* $f'_x(x,y)=-3x^2+2y$, $f'_y(x,y)=3y^2+2x$, *são finitas e não nulas para* $x>0$, *e também em* $x=0$ *porque então é* $y\neq 0$. *Isto basta para afirmar que tal equação define uma função* $y(x)$ *no intervalo* $0\leqslant x<+\infty$, *e uma ùnicamente.*

A equação da tangente à curva $y=\varphi(x)$ *no ponto* $(1,1)$ *é* $y=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$.

A equação da superfície de revolução: $y^2+z^2=\left(\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}\right)^2$.

Soluções dos n.os 3468 a 3482 de J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência ordinário — 7 de Julho de 1952.

I

3483 — Estudar e representar gràficamente a função definida por $y\cdot(3x-1)+\frac{3}{x^2}\cdot(3x-1)=8$. R:

A função pode escrever-se

$$y=\frac{8}{3x-1}-\frac{3}{x^2}=\frac{8x^2-9x+3}{x^2\cdot(3x-1)}\,.$$

A curva representativa de $y(x)$ *não corta o eixo dos* xx *a distância finita e*

$$y(+\infty)=+0\quad;\quad y(-\infty)=-0\,.$$

Assíntotas paralelas aos eixos:

$$x=0;\ x=1/3;\ y=0\,.$$

Descontinuidades:

$$y(+0)=y(-0)=-\infty$$
$$y(1/3+0)=+\infty;\quad y(1/3-0)=-\infty\,.$$

Máximos e mínimos:

$$y'=\frac{-24}{(3x-1)^2}+\frac{6}{x^3}=\frac{-24x^3+54x^2-36x+6}{x^3\cdot(3x-1)^2}$$

$$y'=0\to 4x^3-9x^2+6x-1=0\to x_1=x_2=1\ \text{ e }\ x_3=1/4\,.$$

Mas temos

$$y'(1+0)<0\,;\quad y'(1-0)<0$$
$$y'(1/4+0)<0\,;\quad y'(1/4-0)>0\ \text{Máximo}\,.$$

No ponto 1 *não há estacionaridade.*

Pontos de inflexão:

$$y''=\frac{144}{(3x-1)^3}-\frac{18}{x^4}=18\cdot\frac{8x^4-27x^3+27x^2-9x+1}{x^4\cdot(3x-1)^3}$$

$y''=0\to x_1=1$ *e fica* $8x^3-19x^2+8x-1=0$.

A última equação tem a raiz real $x_2\cong 1{,}89$ *e as outras duas são imaginárias. Além disso,*

$$y''(1+0)<0\,;\qquad y''(1-0)>0\quad\text{Inflexão}$$
$$y''(x_2+0)>0\,;\qquad y''(x_2-0)<0\quad\text{Inflexão}$$

3484 — Mostrar que a série

$$\frac{a}{b}+2\cdot\frac{a\cdot(a+1)}{b\cdot(b+1)}+3\cdot\frac{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)}{b\cdot(b+1)\cdot(b+2)}+\cdots$$

onde $a,b>0$, é convergente para $b>a+2$. R:

O termo de ordem n *escreve-se*

$$u_n=n\cdot\frac{a\cdot(a+1)\cdots(a+n-1)}{b\cdot(b+1)\cdots(b+n-1)}\,.$$

Aplicando o critério de DUHAMEL:

$$\lim_{n=\infty} n\cdot\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=b-a-1\,.$$

A série é pois convergente para $b-a-1>1$ *ou seja* $b>a+2$.

3485 — Escrever a equação da parábola que admite como tangente no ponto $(0,-1)$ a recta $3x+5y+5=0$ e que tem como diâmetro conjugado com o eixo dos xx a recta $2x+4y+1=0$. Estabelecer a equação normal da parábola. R: *A parábola tem por equação*

$$2x^2+8xy+8y^2+2x+6y-2=0\,.$$

A equação normal ou canónica da parábola é

$$Y^2=\frac{\sqrt{5}}{25}X\,.$$

II

3486 — O critério de KUMMER afirma o seguinte: «Seja a_n uma função positiva de n. A série de termos positivos, Σu_n, é convergente se o limite

$$\lim_{n=\infty}\left(a_n\cdot\frac{u_n}{n_{n+1}}-a_{n+1}\right)=L$$

for positivo; a série é divergente se aquele limite for negativo e, além disso, for divergente a série que tem $1/a_n$ como termo geral».

Nestas condições, verifique que para $a_n = 1$ se obtém o critério de d'ALEMBERT e para $a_n = n$ o de DUHAMEL.

3487 — Enuncie algumas propriedades dos determinantes adjuntos. Considere o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} .$$

Se forem A, D e F os complementos algébricos de a, d e f mostre que aqueles têm o mesmo sinal quando $\Delta = 0$.

3488 — Diga em que consiste o problema da eliminação algébrica e mostre, baseando-se nele, como pode realizar-se o cálculo das raízes imaginárias duma equação algébrica inteira de coeficientes inteiros.

3489 — Defina focos duma cónica e indique como pode fazer-se a sua determinação. Como exemplo, ache os focos da parábola $y^2 = 2\,px$.

Sabendo que as directrizes duma cónica são as polares dos focos em relação à cónica, determine as directrizes da parábola acima.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência extraordinário — 10 de Julho de 1952.

I

3490 — Estudar e representar gràficamente a função $y(x)$ definida por

$$y^2 = (a^2 - x^2) \cdot (x^2 - b^2)^2 \qquad (a > b > 0) .$$

R: *A função pode escrever-se*

$$y = \pm (x^2 - b^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} .$$

O domínio da função é: $-a \leqslant x \leqslant a$.

Pontos de encontro com os eixos:

$$x = 0 , \quad y = \pm a \cdot b^2$$
$$y = 0 , \quad x = \pm a \quad e \quad x = \pm b .$$

A curva representativa é simétrica em relação aos dois eixos coordenados e à origem.

Máximos e mínimos:

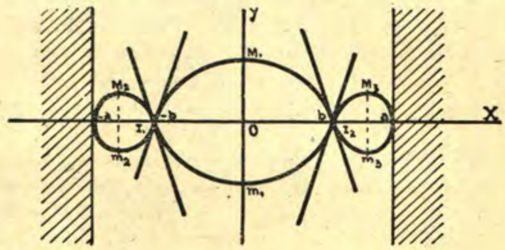
$$y' = \frac{x \cdot (2\,a^2 + b^2) - 3\,x^3}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$y' = 0 \rightarrow x = 0 \quad e \quad x = \pm \sqrt{(2\,a^2 + b^2)/3} ,$$

$$(b < \sqrt{(2\,a^2 + b^2)/3} < a) .$$

Valores da função nos pontos de estacionaridade:

$$y = \pm a\,b^2 \quad e \quad y = \pm \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} (a^2 - b^2)^{3/2} .$$



Nos pontos $x = \pm b$ *temos duas tangentes distintas:*

$$y' = \pm 2\,b \cdot (a^2 - b^2)^{1/2} .$$

Nota: *Há três máximos:* M_1, M_2 *e* M_3. *Há três mínimos:* m_1, m_2 *e* m_3. *Há 2 pontos de inflexão para cada ramo:* I_1 *e* I_2.

3491 — Achar os valores reais de λ para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + (\lambda - 1) \cdot z = 0 \\ \lambda \cdot y + z = 0 \\ \lambda^2 \cdot x + z = 0 \end{cases}$$

tem soluções não nulas. R: *A condição para a existência de soluções não nulas é*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^3 - \lambda^4 = 0 .$$

Uma das soluções e $\lambda = 0$ *e obtém-se* $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$. *Esta equação tem apenas uma raiz real positiva* $\lambda \cong 1{,}47$. *Para* $\lambda = 0$, *o sistema tem soluções não nulas do tipo* $x = z = 0$ *e* y qualquer.

3492 — O ponto P, afixo do complexo $z = x + i \cdot y$, descreve, no plano de CAUCHY, uma circunferência com centro no ponto $C\,(2, 0)$ e raio $R = 1$.

a) Deduzir a equação da cónica descrita no mesmo plano pelo afixo P_1 do complexo $z_1 = (2 + i) \cdot z$, indicar o seu género e determinar o centro. Escrever a equação reduzida da cónica, tomando o centro para origem das coordenadas. *b*) Fazem-se passar pela origem rectas perpendiculares aos segmentos PP_1. Qual deve ser o complexo z para que a perpendicular correspondente passe pelo vértice da parábola $a \cdot x^2 - 2\,a \cdot x - y + a - 1 = 0$? R: *As coordenadas de* P_1 *são:* $x_1 = 2x - y$; $y_1 = x + 2y$.

Eliminando x *e* y *entre as três equações*

$$(1)\qquad \begin{cases} (x-2)^2+y^2=1 \\ 2x-y=x_1 \\ x+2y=y_1 \end{cases}$$

obtêm-se a equação da cónica descrita por P_1:

$$x_1^2+y_1^2-8x_1-4y_1+15=0\,.$$

Trata-se duma circunferência com centro em $C_1\,(4\,,2)$ *e raio* $R_1=\sqrt{5}$. *A equação reduzida da cónica é pois* $X^2+Y^2=5$.

O coeficiente angular das rectas definidas por P *e* P_1 *é*

$$m=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x+y}{x-y}\,.$$

As perpendiculares a PP_1 *passando pela origem têm por equação:*

$$(2)\qquad Y=\frac{y-x}{x+y}\,X\,.$$

Como se trata duma parábola do eixo vertical, o vértice corresponde ao ponto de estacionaridade da função $y=a\,x^2-2\,ax+a-1$ *ou seja,* $V\,(1\,,-1)$ *Das condições do enunciado e das equações* (1) *e* (2) *resultam as soluções:* $z'=1$ e $z''=3$.

II

3493 — Indique alguns processos indirectos de desenvolvimento duma função em série inteira. Como exemplo, estabeleça o desenvolvimento de

$$\log\frac{1+x}{1-x}$$

e diga como poderia utilizar este desenvolvimento para o cálculo do log 10 com um erro inferior a um valor dado.

3494 — Definição e propriedades do produto matricial. Caso particular do produto duma matriz pela sua inversa. Aplicação aos sistemas de equações lineares.

3495 — Defina transformada duma equação algébrica e indique os tipos mais importantes de transformações. Aponte as principais aplicações das transformadas na resolução numérica das equações algébricas inteiras.

3496 — Defina directrizes duma cónica e diga como se podem determinar. Como aplicação, ache as directrizes das cónicas com centro, definidas pelas suas equações normais.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 29 de Julho de 1952.

I

3497 — A função $y(x)$ é definida implicitamente pela equação

$$F\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+y+1}{x+2y+1}\,,\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x+2y+1}{2x+y+1}\right)=0\,.$$

Calcular $\dfrac{dy}{dx}$, mostrando que é independente da função F. R:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}}$$

onde

$$u=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+y+1}{x+2y+1}$$

$$v=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2y+1}{2x+y+1}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3y+1}{(x+2y+1)^2+(2x+y+1)^2}$$

Atendendo às expressões de u *e* v *reconhece-se imediatamente que*

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3x+1}{(x+2y+1)^2+(2x+y+1)^2}$$

Tem-se, portanto,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y+1}{3x+1}\,.$$

3498 — Deduzir a equação do plano que passa pela recta: $x=z$, $y=3$, e corta, segundo uma circunferência de raio 3, a esfera

$$x^2+y^2+z^2-4x+2z-11=0\,.$$

R: *A equação do plano é da forma:* $x-z+\lambda\cdot(y-3)=0$. *A condição imposta ao plano deste feixe obriga a ser*

$$\lambda=\frac{9\pm\sqrt{91}}{2}\,.$$

II

3499 — Enuncie as principais propriedades das equações binómias, escritas sob a forma normal, e deduza daquelas o caminho a seguir para a resolução das equações.

3500 — Defina função limitada num intervalo e indique as suas propriedades fundamentais.

3501 — Diga o que é uma série absolutamente convergente e aponte algumas das suas propriedades características, incluindo as que se referem a operações sobre elas praticadas.

3502 — Dependência linear; propriedades relativas a determinantes e matrizes.

3503 — Equações duma recta no espaço: diferentes aspectos que podem tomar, sua relação e discussão.

Enunciados e soluções dos n.os 3483 a 3503 de J. H. Arandes.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 1.º exame de frequência, 1951-52.

3504 — Primitivar a função $f(x)=\dfrac{\log(x+a)}{bx+ab}+$ $+\operatorname{sen} x \operatorname{sh} x$.

R: $\dfrac{1}{2b}[\log(x+a)]^2+\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x \operatorname{ch} x-\cos x \operatorname{sh} x)$.

3505 — Determinar os quatro primeiros termos não nulos do desenvolvimento da função $f(x)=\dfrac{x}{2+e^x}$ em série de potências de x.

R: $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{1}{54}x^3+\dfrac{1}{162}x^4+\cdots$.

3506 — Determinar a envolvente e o lugar dos pontos singulares da família de curvas de equação $(y-1)^2=e^{\alpha x}-\alpha x$. R: *A envolvente é constituída pelas rectas* $y=0$ *e* $y=2$.

3507 — Em que direcções emergentes da origem é nula a derivada direccional da função $f(x,y)=$ $=x^2+y^2-x+\sqrt{3}\,y$. R: *As direcções pedidas definem com o eixo* Ox *os ângulos* $n\pi+\pi/6$ (n *inteiro*).

3508 — Demonstre que nos pontos da superfície regular e fechada $F(x,y,z)=0$ em que é máxima ou mínima a soma das coordenadas, o plano tangente faz ângulos iguais com os eixos coordenados. R: *A função a extremar é* $f(x,y,z)=x+y+z$, *com a condição* $F(x,y,z)=0$. *Sendo* λ *um parâmetro, é* $\Phi(x,y,z)=(x+y+z)-\lambda F(x,y,z)$, *cujas derivadas são nulas nos pontos extremantes:* $1-\lambda F'_x=0$, $1-\lambda F'_y=0$, $1-\lambda F'_z=0$. *Qualquer que seja* λ, *verifica-se que são iguais os coeficientes* $F'_x=F'_y=F'_z=\dfrac{1}{\lambda}$ *do plano tangente naqueles pontos, como queríamos.*

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — 1951-52.

3509 — Calcular $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

3510 — Determinar a área da região limitada pela semi recta $x>1$, $y=0$, pela curva $y=1/(x^2+x)$ e pela recta $x=1$. R: $\log 2$.

3511 — Sabendo que o integral geral de $xy''-y'=0$ é $y=c_1x^2+c_2$, determinar o integral de $xy''-y'=$ $=x^2\log x$.

R. $$y=\left(\frac{1}{2}x\log x-\frac{1}{2}x+k_1\right)x^2+$$
$$+\left(-\frac{x^3}{6}\log x+\frac{x^3}{18}+k_2\right).$$

Soluções dos n.os 3504 a 3511 de L. M. de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º Exame de frequência — Fevereiro de 1951.

3512 — Demonstre que $\vec{A}\wedge\vec{B}/\vec{C}=(\alpha\wedge\beta/\gamma)^4$ sabendo que

$$\vec{A}=(\alpha\wedge\beta)\wedge(\beta\wedge\gamma)$$
$$\vec{B}=(\beta\wedge\gamma)\wedge(\gamma\wedge\alpha)$$
$$\vec{C}=(\gamma\wedge\alpha)\wedge(\alpha\wedge\beta).$$

R: *Efectuando o cálculo dos produtos quádruplos vem:*

$$\vec{A}\wedge\vec{B}/\vec{C}=[(\alpha\wedge\beta/\gamma)\beta-(\alpha\wedge\beta/\beta)\gamma]\wedge$$
$$\wedge[(\beta\wedge\gamma/\alpha)\gamma-(\beta\wedge\gamma/\gamma)\alpha]/[(\gamma\wedge\alpha/\beta)\alpha-(\gamma\wedge\alpha/\alpha)\beta]=$$
$$=[(\alpha\wedge\beta/\gamma)\beta]\wedge[(\alpha\wedge\beta/\gamma)\gamma]/[(\alpha\wedge\beta/\gamma)\alpha]=$$
$$=(\alpha\wedge\beta/\gamma)^4.$$

3513 — Dada a função $z=xe^{y+x\operatorname{sen} y}$, calcule: a) grad z, b) div grad z, c) rot grad z e d) Lap z.

R: a) $\operatorname{grad} z=(1+x\operatorname{sen} y)\dfrac{z}{x}I+(1+x\cos y)\,z\,J$.

b) $\operatorname{div}\operatorname{grad} z=e^{y+x\operatorname{sen} y}\operatorname{sen} y\,(2+x\operatorname{sen} y-x^2)+$ $+x\,e^{y+x\operatorname{sen} y}(1+x\cos y)^2$, c) rot grad z *é sempre igual a zero,* d) $\operatorname{Lap} z=\operatorname{div}\operatorname{grad} z$.

3514 — Calcular $I=\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}+\sqrt{(1+x)^3}}$.

R: *Faça-se* $x=\cos 2t$ *e* $t=\pi/4+z$. *Vem:*

$$I=\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\frac{\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z}{\cos z(\cos^2 z+3\operatorname{sen}^2 z)}dz \text{ e fazendo } \operatorname{sen} z=y$$

$$I=\int_{-\sqrt{2}/2}^{+\sqrt{2}/2}\frac{1-2y^2}{(1-y^2)(1+2y^2)}dy=$$
$$=2\int_0^{+\sqrt{2}/2}\frac{1-2y^2}{(1-y^2)(1+2y^2)}dy=$$
$$=2\left[\frac{1}{6}\log\frac{1-y}{1+y}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,y\right]_0^{\sqrt{2}/2}=$$
$$=\frac{1}{3}\log(3-2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

3515 — Calcule por aproximação o integral da função $\dfrac{1}{2+3x^2/4}$ entre -1 e $+1$, pela regra de SIMPSON, dividindo o intervalo em 6 partes. R:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{2+3x^2/4}\approx\frac{2}{18}\left[\frac{4}{11}+\frac{4}{11}+2\left(\frac{12}{25}+\frac{12}{25}\right)+\right.$$

$$\left.+4\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)\right]=\frac{15.546}{17.325}.$$

3516 — Demonstre que

$$\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int_0^{\pi/2}f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta.$$

R:
$$\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\times 2(b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(b-a)\,\mathrm{sen}^2\theta\,(b-a)\cos^2\theta}}=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta.$$

3517 — Utilize o resultado anterior no cálculo dos integrais:

$$\text{a)}\quad I=\int_a^b\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,x\,dx\quad\text{e}$$

$$\text{b)}\quad I'=\int_a^b\sqrt{\frac{b^2-x^2}{x^2-a^2}}\,x\,dx.$$

R: *Para* a) *é* $f(x)=x(b-x)$ e

$$I=2\int_0^{\pi/2}f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta=\frac{b^2-3a^2+2ab}{8}\pi.$$

Para b) *faça-se* $x^2=y$. *Vem*

$$I'=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\sqrt{\frac{b^2-y}{y-a^2}}\,dy=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{b^2-y}{\sqrt{(b^2-y)(y-a^2)}}\,dy=$$

$$=\int_0^{\pi/2}[b^2-(a^2\cos^2\theta+b^2\,\mathrm{sen}^2\theta)]\,d\theta=\frac{b^2-a^2}{4}\cdot\pi.$$

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — **Exame final — Outubro de 1951.**

3518 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x)=\int_0^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x^2}\,dy.$$

R:

$$f'(x)=\int_0^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\frac{-2yx}{x^4+y^2}\,dy+\frac{\pi x}{3\sqrt{3}}=\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\log\frac{4}{3}\right)x$$

$f'(x)=0\rightarrow x=0$ *e* $f''(0)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}-\log\dfrac{4}{3}>0$. *Trata-se pois de um mínimo.*

3519 — Seja A o ponto de encontro com OX da ordenada de um ponto P da curva C. A distância do ponto A à tangente em P é $\overline{AM}=a$. Supondo a constante, achar a equação da curva. R: *A equação é* $\dfrac{a}{y}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+y'^2}}$ *resolúvel em* y *ou em* $y'=p$.

$$p=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}\rightarrow x=\pm a\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}=$$

$$=\pm a\,\mathrm{arcosh}\,\frac{y}{a}+C$$

donde

$$y=a\cosh\frac{x-C}{a}.$$

3520 — Dada a curva definida por

$$\begin{cases}y^2+z^2=4\\ \mathrm{sen}\,x=y/2\end{cases}$$

escrever as suas equações paramétricas em função do arco s e determinar as coordenadas do centro de curvatura no ponto $P(0,0,2)$. R:

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{5}\,dx=\sqrt{5}\,x.$$

Logo $\quad x=\dfrac{s}{\sqrt{5}}\quad y=2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{s}{\sqrt{5}}\quad z^2=4\cos^2\dfrac{s}{\sqrt{5}}.$

As coordenadas do centro de curvatura são:

$$X=\rho^2\frac{d^2x}{ds^2}=0,\quad Y=\rho^2\frac{d^2y}{ds^2}=0$$

$$Z=2+\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}=2-\left(\pm\frac{5}{2}\right).$$

Soluções dos n.os 3512 a 3520 de M. A. S. Madureira

I. S. C. E. F. — ANÁLISE INFINITESIMAL — **1.º Exame de frequência — 1952.**

3521 — Calcular $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^5\,dx}{(1+x^4)^2}$.

3522 — Calcular:

a) $\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}\wedge\mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r^3}$, *b)* $\mathrm{Lap}\,r^3$, *c)* $\mathrm{rot}\,r\alpha$, com

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad\text{e}\quad\alpha=xI+xyJ+xyzK.$$

3523 — Calcular a derivada de:

$$F(a)=\int_0^\pi\frac{dx}{a-\mathrm{sen}\,x}$$

e deduzir o valor do integral

$$\int_0^\pi\frac{dx}{(2-\mathrm{sen}\,x)^2}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — 30-6-52.

3524 — Dada a curva

$$y^4 - y^2 + (x-a)^2 = 0$$

determinar: *a*) os máximos e mínimos; *b*) os pontos múltiplos; *c*) o raio de curvatura referente ao ponto $x=a$ $y=1$; *d*) a envolvente da família de curvas de parâmetro a; *e*) a área compreendida entre o ramo de ordenadas positivas mais elevadas, o eixo dos XX e as rectas $x=-1/2$ e $x=1/2$ quando o parâmetro $a=0$; *f*) outros elementos complementares, e representar a curva na hipótese de ser $a=0$.

3525 — Calcular o integral triplo

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

sendo V o volume do sólido limitado pelo cilindro $(x-1)^2+y^2=1$, pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ (ramo superior) e pelo plano $x+y+z=2$.

3526 — Determinar as curvas para as quais o raio de curvatura é igual ao comprimento da normal.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — Exame final — Novembro de 1951.

3527 — Determinar a envolvente da família de rectas $x+ay+3a^2+a^3=0$ (a é um parâmetro arbitrário). (Convém usar equações paramétricas).

3528 — Calcular os máximos e mínimos da função

$$z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$$

3529 — Integrar a equação

$$x^2 y' = -x^2 y^2 + axy - a$$

sabendo que $y = \dfrac{1}{x}$ é um integral particular.

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de frequência — Fevereiro de 1952.

3530 — a) Diga que propriedades caracterizam o vector $\alpha(P)$ e o escalar $u(P)$, quando for

$$1) \qquad \operatorname{rot}\alpha = \operatorname{grad} u \qquad P(x,y,z)$$

b) — Mostre que $\Delta\alpha$ é um gradiente. c) Mostre que $(\operatorname{grad} u)^2$ é uma divergência. d) Mostre que α é harmónico se for um rotor.

3531 — Veja se se verifica a condição necessária e suficiente para que o polinómio de matrizes

$$P(A) = 2A^3 + 3A^2 + E \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenha a raiz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3532 — Veja que é aplicável ao integral

$$F(a) = \int_{\frac{1}{2}}^{a^2} a^x (x^2+a^2)\,dx \qquad \left(a^2 > \frac{1}{2}\right)$$

a regra da derivação paramétrica e verifique, sobre a derivada, se $F(a)$ é máxima ou mínima para $a=1$.

3533 — Classifique os seguintes conjuntos como espaços algébricos, justificando a classificação:

1.º O conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n, de elementos numéricos.

2.º O conjunto de todas as matrizes unitárias de ordem n, de elementos numéricos.

3.º O conjunto de todas as matrizes hermíticas de ordem n, de elementos numéricos.

4.º O conjunto dos polinómios reais de variável real.

5.º O conjunto das funções reais de variável real.

I. S. T. — Cálculo — 2.º exame de frequência — 23-6-1952.

3534 — Determinar as superfícies tais que todas as suas normais encontram a recta $X=0$, $Y=Z$.

3535 — Verifique que $y^2 = ax^2$ é um integral da equação $p^2x - 2py + ax = 0$; e diga se é *particular* ou *singular*. De quantas maneiras pode fazê-lo?

3536 — É dado o sistema

$$1) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

que tem uma solução no ponto $(a_1, a_2, \cdots a_n, b_1, b_2, \cdots b_n)$. Supõe-se que, numa vizinhança desse ponto, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ e $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, 2 \cdots n)$ existem e são contínuas, sendo diferente de zero o Jacobiano $\dfrac{\partial(f_1 f_2 \cdots f_n)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}$.

Como se sabe, o sistema 1) define nesse caso, $y_1, y_2, \cdots y_n$ como funções implícitas de $x_1, x_2, \cdots x_n$, contínuas e admitindo derivadas.

Diga quando é possível afirmar que essas funções $y_1, y_2, \cdots y_n$ *são independentes*, sem as tornar explícitas.

3537 — Averiguar que a função

$$z = \log \frac{xy^2}{(x-1)^2(y-2)}$$

não tem máximos nem mínimos.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência, 7-II-52.

3538 — Achar as geodésicas da superfície: $x=u$, $y=2v$, $z=u^2+1$.

3539 — Resolver a equação integral

$$\varphi(s) - \mu \int_0^1 t(1+s)\,\varphi(t)\,dt = s\,.$$

3540 — Examine as condições para que seja indeterminada a função $z=z(x,y)$ que torna estacionário o integral duplo $\iint_A f(x,y,z,p,q)\,dx\,dy$, e cujos valores são conhecidos sobre o contorno da área A. Diga qual é o significado geométrico dessa indeterminação. Verifique que essa indeterminação não pode dar-se quando a função $z(x,y)$ for harmónica em A.

3541 — Mostre que o teorema da inversão do cálculo diferencial $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right.$ quando forem contínuas$\left.\right)$ nem sempre subsiste para as segundas derivadas covariantes dum vector (X_i), em cálculo absoluto.

3542 — Numa variedade a três dimensões, escreva a expressão do produto mixto de três vectores, em coordenadas gerais. Será um trivector?

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame de frequência — 9 de Julho de 1952.

3543 — Um ponto pesado move-se, sem atrito, sobre o paraboloide $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$, sendo o semi-eixo OZ positivo dirigido segundo a vertical ascendente.

Mostre que, na origem dos eixos, que é uma posição de equilíbrio, esse equilíbrio é *estável* quando a e b forem ambos positivos. R: *As equações do movimento são*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda ax,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda by,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \lambda - mg,$$

e as condições de estacionaridade da função de forças $-\lambda ax=0$, $\lambda by=0$, $\lambda=mg$; *então a função de forças é máxima no ponto* $(0,0,0)$ *se* $a,b>0$ *e mínima no caso contrário.*

3544 — Mostre que, se o movimento dum fluido perfeito é rotacional e o vector turbilhão Ω é harmónico, o movimento fluido cuja velocidade é $V_1 = \operatorname{rot}\Omega$ é um movimento irrotacional. Sendo $V = uI + vJ + \omega K$, com $u = y^2+z^2$, $v = x^2+z^2$ e $\omega = x^2+y^2$, a velocidade do primeiro movimento, verifique que Ω é harmónico e determine o potencial das velocidades do segundo movimento. R: *Se* $\Omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} V \neq 0$ *e* $\Delta\Omega = 0$ *é* $V_1 = \operatorname{rot}\Omega = \operatorname{grad}\operatorname{div} V$ *e* $\operatorname{rot} V_1 = 0$. *Aplicação: Se* $\Omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} V = (y-z)I + (z-x)J + (x-y)K$, $\Delta\Omega = 0$, $V_1 = \operatorname{rot}\Omega = -2(I+J+K) = -\operatorname{grad} U$ *e* $U = 2(x+y+z)$.

3545 — Sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do espaço tridimensional, são dados dois campos $F(P)$ e $\alpha(P)$, dos quais o primeiro é o momento do segundo em relação á origem dos eixos coordenados. *a*) Mostre que o campo $F(P)$ não é conservativo quando $\alpha(P)$ é constante. *b*) Fazendo $\alpha(P) = XI + YJ + ZK$ e sendo X independente de x, Y independente de y e Z independente de z, procure determinar $\alpha(P)$ de modo que $F(P)$ seja conservativo. R: *Se* $\alpha(P) = AI + BJ + CK$, $F(P) = (yC - zB)I + (zA - xC)J + (xB - yA)K$ *e* $\operatorname{rot} F = 2(-AI + BJ - CK) \neq 0$.

b) *Se* $\alpha(P) = XI + YJ + ZK$ *devemos ter*

$$\begin{vmatrix} I & J & K \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (yZ - zY) & (zX - xZ) & (xY - yX) \end{vmatrix} = 0$$

ou $2X + y\dfrac{\partial X}{\partial y} + z\dfrac{\partial X}{\partial z} = 0\cdots$ *relação satisfeita por* $X = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$. *Então*

$$\alpha(P) = \left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)I + \left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)J + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)K.$$

3546 — *a*) Verifique no caso duma translacção paralela a Oy_1, que a transformação de Lorentz deixa invariante a forma

1) $$dy^2 = dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2\,.$$

b) Mudando os sinais de alguns termos, quais são as formas resultantes de 1) que ficam invariantes para a mesma transformação de Lorentz? *c*) Caracterize as matrizes de Lorentz e verifique que elas formam um grupo.

Soluções dos n.os 3543 a 3545 de J. Gaspar Teixeira.

I. S. T. — Mecânica Racional — **Exame final (teórico) — Outubro de 1951.**

3547 — É dado um sistema holónomo conservativo e de ligações independentes do tempo, sendo F_i a força activa aplicada ao ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2 \cdots n)$. Supõe-se que a função de forças U é homogénea de grau -2, em relação às coordenadas dos pontos P_i.

Deduzir do teorema de Cerrutti para os viriais, $\frac{d^2 I}{d t^2} = V + 2T$, que o momento de inércia I, em relação à origem dos eixos, é uma função quadrática do tempo:

$$I = a t^2 + b t + c \qquad (a, b, c \text{ constantes}).$$

3548 — É dada uma força $F(X, Y, Z)$ função apenas das coordenadas do ponto $P(x, y, z)$ sobre o qual actua. Mostrar que, para que exista uma superfície fixa sobre a qual o ponto P está em equilíbrio em todas as posições, é necessário e suficiente que $X dx + Y dy + Z dz = 0$ seja completamente integrável.

3549 — Seja ω o vector velocidade angular, no movimento dum sólido com um ponto fixo. Mostrar que a aceleração dum ponto qualquer do sólido é a soma de dois vectores: 1.º A velocidade que teria o ponto se a velocidade angular fosse $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$; 2.º A aceleração que teria o ponto se a velocidade angular ω fosse constante.

I. S. T. — Mecânica Racional — **Exame final (prático) — Outubro de 1951.**

3550 — Um ponto $M(x, y)$ é obrigado a mover-se, sem atrito, sobre a parábola $y^2 = 2px$, e é atraído pelo ponto $A(p, p/2)$ do plano da curva com uma força F, cuja grandeza é função só da distância $\overline{MA} = r$. Mostrar que há uma posição de equilíbrio que é independente da grandeza da força.

3551 — *a*) Mostre que o cóne de revolução homogéneo, limitado pela superfície cónica $x^2 + y^2 = 5z^2$ e de altura $h = 3$, tem pontos focais de inércia. *b*) Determine esses pontos e verifique se as respectivas esferas de inércia se intersectam. (Eixos rectangulares).

3552 — Dado o campo de vectores

$$\vec{\alpha} \begin{cases} X = a + bx + cy + dz \\ Y = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z \\ Z = a_2 + b_2 x + c_2 y + + d_2 z \end{cases}$$

onde a_i, b_i, c_i, d_i são constantes, será possível determinar essas constantes de modo tal que o campo $\vec{\alpha}$ seja um campo de momentos? Discussão.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar:

3553 — Se na fracção $\frac{16}{64}$ cortarmos no numerador e no denominador o número 6, obtemos, por meio de uma operação incorrecta, um resultado correcto.

Determinar um par de números de dois algarismos (no sistema de base 8), gosando da mesma propriedade.

3554 — Seja $[ABCD]$ um trapésio rectângulo de base paralelos $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = 3a$. Seja $\overline{AD} = a$ o lado perpendicular às bases e consideremos um ponto M sobre o lado $\overline{BC}$. Sejam V_1 e V_2 os volumes dos sólidos gerados pela rotação, de amplitude 2π, do quadrilátero convexo $[ABMD]$ em em torno, respectivamente, de $\overline{AB}$ e de $\overline{AD}$. Determinar a posição de M de modo que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{13}{22}$.

Secção Média:

3555 — Representemos por $I(x)$ o maior inteiro contido em x e por $M(x)$ a mantissa de x, isto é $M(x) = x - I(x)$. Demonstrar que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x} \right) = 1$$

se o número de parcelas que figura dentro do parentesis for $I(x)$.

3556 — Estudar as descontinuidades da função definida no intervalo $(-\pi, +\pi)$ pela expressão $y = tg^2 \frac{1}{x}$.

Secção Superior:

3557 — A velocidade dum ponto P tem duas componentes, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, de igual módulo, v; a primeira é constante, a segunda perpendicular, em cada instante, ao vector de posição de P, em relação a uma origem O. Estudar o movimento de P.

3558 — Sejam $r_1, r_2 \cdots r_n$ os zeros *simples* do polinómio $f(z)$ de grau n; provar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{f'(r_i)} = 0$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

93 — HASSE, HELMUT und KLOBE, WALTER — **Aufgabensammlung zur höheren Algebra**, zweite, verbesserte und vermehrte Auflage; Sammlung Göschen, Band 1082, Walter de Gruyter & C.°, Berlin, 1952.

Esta 2.ª edição «melhorada e aumentada» é a do livro companheiro de *Höheren Algebra*, I e II, do 1.° autor, revisto no Boletim Bibliográfico da *Gazeta de Matemática* n.° 49 — uma revisão que inclui comentários de natureza geral que se aplicam também ao presente volume.

As diferenças que notamos ao comparar com a edição anterior não são muito sensíveis: alguns exercícios foram substituidos, algumas indicações para os resolver foram substituidas ou melhoradas, e acrescentaram-se duas páginas de um útil índice de nomes e de assuntos.

Para os que não conhecem este livrinho de algibeira de exercícios (não de exercícios de algibeira!) mencionamos que contem umas seis centenas de questões ordenadas tal como as correspondentes ideias dos dois volumes de texto, cada uma delas imediatamente seguida de indicações para a solução. Trata-se de verdadeiros exercícios; trata-se de dar ao estudioso, e de uma maneira organizada, oportunidades bastantes para que ele possa, por si próprio, esclarecer, controlar, completar as ideias, os resultados e as estruturas das teorias que encontra na leitura do texto, para que ele participe de uma maneira activa, esforçada, eficaz, na formação da sua cultura matemática; e aprenda como aprender.

Mas o que é especialmente notável nesta obra é o número das questões e é o nivel delas, sobretudo das que se referem aos últimos capítulos do texto: excedem nitidamente o que encontramos nos textos mais modernos (e em certo sentido mais completos) de Álgebra. Por isto é uma obra preciosa não só para os leitores de *Höhere Algebra*; e é, provàvelmente, indispensável a uma preparação bem orientada de qualquer algebrista. O seu uso nas nossas Universidades, a sua divulgação entre os nossos estudantes de Matemática afiguram-se-nos altamente recomendáveis. Acreditemos que ao nosso país faltam uma estrutura económica e social, um desenvolvimento técnico que, de uma maneira natural, suportem e fomentem as Ciências puras e o ensino no nível que atingem em obras como esta de colecções estrangeiras tão acessíveis como a colecção Göschen; mas não esqueçamos, nem por um momento, que os nossos jovens devem, como todos os outros, ter o direito, inalienável, a oportunidades de acesso às Ciências puras no seu mais alto nível.

Hugo Ribeiro (Univ. of Nebraska, U. S. A.)

94 — CASTRO, F. M. DE OLIVEIRA — **Ondas em Linhas de Transmissão** — Rio de Janeiro, 1949.

Se bem que os problemas que conduzem a equações às derivadas parciais possam ser consideradas como extensão de problemas que conduzem a equações diferenciais ordinárias, a teoria geral das primeiras equações não se apresenta como uma generalização da teoria geral das segundas. Há uma diferença fundamental entre as duas teorias.

Assim, por exemplo, dentro das conhecidas condições de existência (Cauchy-Lipschitz), uma equação diferencial ordinária de ordem n possue um integral que assume, com as suas $(n-1)$ primeiras derivadas, valores dados para um dado valor da variável.

Não há teorema análogo para as equações às derivadas parciais, e se apenas considerarmos as equações de 2.ª ordem, por exemplo

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+U=O,$$

$$R,S,T,U\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

as propriedades da equação e do respectivo integral dependem da circunstância de o discriminante $\Delta = S^2-RT$ ser negativo (equação do tipo elíptico), nulo (parabólico) ou positivo (hiperbólico).

Para a determinação (quando possível) do integral relativo a um domínio, de uma equação do tipo elíptico, basta conhecer os valores da função a determinar sobre o contorno desse domínio (Problema de Dirichlet); para uma equação do tipo hiperbólico, o conhecimento do integral $z(x,y)$ e das respectivas derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ao longo dum arco rectificável (método de Riemann); se a equação é do tipo parabólico, basta conhecer o integral sobre um determinado arco de curva.

Os integrais das equações do tipo elíptico são determinados em relação a um domínio dado; a existência dos integrais das equações dos tipos hiperbólico ou parabólico é assegurada apenas localmente, na vizinhança do arco sobre o qual se fixam os dados.

Assim, a determinação do estado de equilíbrio dum continuo bi-dimensional conduz-nos a uma equação do tipo elíptico; se o contínuo é uni-dimensional e o meio é dotado de inércia a equação respectiva é do tipo hiperbólico; se o meio é desprovido de inércia, a equação é do tipo parabólico.

Na «Dissertação apresentada à Congregação de Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil» — *Ondas em Linhas de Transmissão* — o A. pretende fundamentalmente «tornar mais conhecidos alguns resultados obtidos em 1930 por A. Korn, sobre a aplicação do método de Riemann, ao estudo da propagação de ondas em linhas de transmissão».

Partindo de uma interpretação elementar das leis da circulação do vector campo eléctrico, e da conservação da carga eléctrica, estabelece o A. o sistema de equações diferenciais que conduz à equação dos telegrafistas.

Esta equação pode ser do tipo hiperbólico — se o circuito tem indução e capacidade —, ou parabólico — caso sejam nulas, ou a indução ou a capacidade.

O A. em eguida aplica à equação de propagação por ondas amortecidas a fórmula generalizada de Green, extendida por Hadamard à equação geral do tipo hiperbólico — fórmula essa que representa, na integração das equações lineares de movimentos ondulatórios unidimensionais, o mesmo papel que a fórmula de Green na integração da equação de Laplace.

Antes de enunciar e estudar o Problema de Korn, refere-se ainda à função de Riemann que desempenha na integração da equação de ondas amortecidas papel semelhante ao da função de Green na integração da equação de Laplace.

O Problema de Korn, enuncia-se: Determinar a solução regular da equação geral dos telegrafistas no quadrante $x>0$, $t>0$ com as condições $V(x,0)=0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{t=0}=0$ para $x\geqslant 0$ e $V(0,t)=F(t)$ para $t>0$.

Para a sua resolução segue-se de perto o método de Riemann-Volterra, aplicação do método das imagens de Thompson na resolução de problemas de Física Matemática com certas condições limites.

Nesta exposição, clara e bem ordenada, encontrarão os engenheiros electrotécnicos exemplo de como o estudo teórico das equações às derivadas parciais tem interesse fundamental em problemas de técnica.

É pena que a mesma exposição não seja mais ilustrada com considerações de ordem física e técnica, o que permitiria uma melhor compreensão de outros fenómenos, não abrangidos alías no objectivo deste trabalho, como os de absorpção nas vizinhanças de superfícies de separação de meios tridimensionais.

José Gaspar Teixeira

Nos próximos números *Gazeta de Matemática* publicará:

Matemática Pura e Matemática Aplicada, por A. Pereira Gomes

Forjar Matemática para Engenheiros, por T. von Kármán

Sobre um teorema de Kakeya, por F. R. Dias Agudo

Problèmes de dépouillements — V, por Pierre Dufresne

além das habituais secções, Pedagogia, Movimento Científico, Antologia, Problemas, Boletim Bibliográfico, pontos dos exames de aptidão às Escolas Superiores e dos exames de frequência e finais de Matemáticas Gerais, Cálculo Infinitesimal, Mecânica Racional, etc.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará três números em 1952

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1952 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.^{os} 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.^{os} 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1952 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.^{os} 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.^{os} 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.º 51	17$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282