# GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIV **N.° 54** ABRIL 1953


SUMÁRIO




DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

# GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Tel. 55282 — Lisboa-N.







TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c — LISBOA - N. — Telef. 55 282

ANO XIV – N.º 54 **GAZETA DE MATEMÁTICA** ABRIL – 1953

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES PRINCIPAIS: *J. Gaspar Teixeira e J. da Silva Paulo*

REDACTOR ADJUNTO: *J. Morgado*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — Telef. 55282 — LISBOA-N

# *Discussion d'un résultat de Tsien pour la détermination d'un «convergent». Choix de la distribution de vitesses sur l'axe* (*)

*par* **A. Pereira Gomes**

Un problème qui se présente en Mécanique des Fluides, d'un intérêt immédiat pour les applications est celui du dessin d'un cone de contraction pour le passage de l'air, ou d'un autre fluide, qui est couramment designé par «convergent».

Dans ses lignes générales, ce problème peut être réduit à celui de trouver une fonction potentiel ou une fonction de courant de façon à satisfaire certaines conditions, notamment que la vitesse à la paroi soit monotonément croissante.

Considérons un écoulement incompressible de révolution autour d'un axe $0x$, défini par la fonction de courant $\psi(x,r)$. Le contour du convergent aura pour équation $\psi(x,r)=C$, $C$ étant une constante convenablement choisie.

Dans son étude «On the design of the contraction cone for a wind tunnel» (1), H. S. Tsien obtient, des expressions des composantes de la vitesse d'un écoulement incompressible de révolution autour d'un axe $0x$, à partir de la distribution de vitesses sur l'axe. Il en déduit ensuite la fonction de courant $\psi(x,r)$ relative à cet écoulement.

Soient $u(x,r)$ et $v(x,r)$ les composantes de la vitesse $w(x,r)$ de l'écoulement, respectivement, suivant l'axe $0x$ et l'axe $0r$ (orthogonal à $0x$); et posons sur $0x$:

$$(1) \qquad u(x,0)=f(x),$$

$$(2) \qquad v(x,0)=0.$$

Le mouvement étant irrotationnel, nous avons en dehors de l'axe:

$$(3) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial r}=0;$$

faisant intervenir l'équation de continuité, nous avons encore

$$(4) \qquad \frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0.$$

On en déduit, pour $r=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}=0$. *Donc,* u (x, r) *est une fonction paire de* r et nous pouvons écrire

$$(5) \qquad u(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} f_{2n}(x),$$

où $f_{2n}(x)$ est une fonction à déterminer.

De même, $v(x,r)$ étant une fonction impaire de $r$, comme on vérifie aisément, nous posons

$$(6) \qquad v(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{\;n+1} g_{2n+1}(x),$$

où $g_{2n+1}$ est une fonction à déterminer.

En tenant compte de $(1),(2),(3),(4),(5),(6)$, il n'est pas dífficile d'obtenir des relations de récurrence qui donnent $f_{2n}$ et $g_{2n+1}$ en fonction de $f(x)$ et de ses derivées. H. S. Tsien arrive ainsi aux expressions

(*) L'étude qui fait l'objet de cette Note a été accomplie à l'Institut de Mécanique des Fluides de Marseille, en Mars 1952, pendant un séjour que nous avons fait dans cet Institut, comme Attaché de Recherches du Centre National de la Recherche Scientifique. Nous remercions M. J. Valensi, Directeur de l'Institut, pour les éléments bibliografiques qu'il a eu la gentillesse de mettre à notre disposition.

(1) Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 10 n.º 2, 1943 p. 68-70.

$$
(7)\qquad \begin{cases} u(x,r) = f(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot f^{(2n)}(x) \cdot r^{2n} \\[2ex] v(x,r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n}{2^{2n}(n!)^2} \cdot f^{(2n-1)}(x) \cdot r^{2n-1} . \end{cases}
$$

La fonction de courant étant donnée par la formule $\psi(x,r) = \int_0^r r \cdot u(x,r)\, dr$, on en déduit

$$
(8)\qquad \psi(x,r) = \frac{1}{2} f(x) \cdot r^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} f^{(2n-1)}(x) \cdot r^{2(n+1)} .
$$

L'équation du contour du «convergent» est celle d'une ligne de courant $\psi(x,r) = C$, le long de laquelle la vitesse est toujours croissante, mais au dela de laquelle cette propriété cesse d'être vérifiée. La constante $C$ sera donc choisie d'après cette condition et $\psi(x,r)$ est définie par (8).

La forme du contour dépend du choix de la fonction initiale $f(x)$, qui doit être monotonément croissante. Tsien fait la construction du convergent, en prenant une distribution de vitesses sur l'axe $f(x) = a + b \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, avec $a = 0{,}55$, $b = 0{,}90/\sqrt{2\pi}$. Suivant la même méthode, B. Szczeniowski [1] a fait le calcul pour la fonction $f(x) = a + b\, th\, c\, x$, où $a, b, c$ sont des constantes.

Dans le mémoire de Tsien le choix de la fonction $f(x)$ est laissé complètement arbitraire, aucun rapport n'étant prévu entre cette fonction et la forme désirée pour le convergent, notamment pour obtenir une pente nulle à l'entrée et à la sortie.

En réalité il n'est pas difficile de pousser plus loin l'analyse de Tsien et d'établir un critère relativement général pour le choix de la fonction $f(x)$, de façon à satisfaire cette condition et, en même temps, à simplifier le calcul. C'est ce que nous allons faire par la suite.

Les expressions de $u$ et $v$ données par Tsien rappellent l'expression générale des fonctions de Bessel

$$
J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{n+2k}}{2^{n+2k}\, k!\, (n+k)!}
$$

et, en effet, on voit sans peine que si la fonction $f(x)$ vérifie les conditions

$$
(9)\qquad \begin{cases} f^{(2n)}(x) = \alpha^{2n} A(x), & n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ f^{(2n-1)}(x) = \beta^{2n-1} B(x), & n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}
$$

les formules (7) deviennent

$$
(7')\qquad \begin{cases} u(x,r) = A(x)\, J_0(\alpha r) \\ v(x,r) = -B(x)\, J_1(\beta r) \end{cases}
$$

avec

$$
\beta^2 = \alpha^2 ,
$$

$\alpha$ et $\beta$ pouvant être des nombres réels ou imaginaires purs, pourvu que dans ce dernier cas $i\, B(x)$ soit réel.

Les fonctions qui vérifient les conditions (9) ne sont autres que les solutions de l'équation $f''(x) = \alpha^2 f(x)$, dont la solution générale est: $f(x) = a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x}$.

Nous pouvons même supposer que la première égalité de (9) n'est satisfaite que pour $n = 1, 2, \cdots$. L'équation $f'''(x) = \alpha^2 f'(x)$ donne alors la solution $f(x) = a_0 + a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x}$.

On a donc, en général:

$$
(7'')\qquad \begin{cases} u(x,r) = a_0 + (a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x})\, J_0(\alpha r) \\ v(x,r) = -(a\, e^{\alpha x} - b\, e^{-\alpha x})\, J_1(\alpha r) \end{cases}
$$

$a_0, a, b$ étant des constantes arbitraires.

On en déduit:

$$
(8'')\qquad \psi(x,r) = \frac{a_0}{2} r^2 + \frac{r}{\alpha} (a\, e^{\alpha x} + b\, e^{-\alpha x})\, J_1(\alpha r) ;
$$

en effet, $\frac{d}{dr}(r\, J_1(r)) = r\, J_0(r)$, donc $\frac{d}{dr}(r\, J_1(\alpha r)) = \alpha\, r\, J_0(\alpha r)$, d'où $\int r\, J_0(\alpha r)\, dr = \frac{1}{\alpha} r\, J_1(\alpha r)$; ceci, remplacé dans la formule $\psi(x,r) = \int u\, r\, dr$, amène bien à l'expression (8'').

Il s'agit maintenant de faire un choix approprié des constantes, pour le résultat qu'on a en vue.

Comme $\psi(x,r) = C$ doit définir une fonction $r = R(x)$, décroissant dans l'intervalle correspondant à la longueur du «convergent», mettons $(0, \lambda)$, et stationnaire aux extrémités de cet intervalle, nous devons avoir:

$$
(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dx} < 0 , \quad 0 < x < \lambda \\[2ex] \dfrac{dr}{dx} = 0 , \quad x = 0 \text{ et } x = \lambda . \end{cases}
$$

Mais, le long de $\psi(x,r) = C$, nous avons

$$
(11)\qquad \frac{dr}{dx} = - \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial r}} = \frac{v}{u}
$$

---

(1) Construction for a wind tunnel, Journ. Aero. Sci. vol. 10, n.° 8, 1943, ARC 7316.

par conséquent, doit être

(12) $$\begin{cases} v<0\ ,\ 0<x<\lambda\ ,\ r=R(x) \\ v=0\ ,\ x=0 \text{ et } x=\lambda\ ,\ r=R(x), \end{cases}$$

puisque, par hypothèse,

(13) $$u>0\ ,\ 0\leqslant x\leqslant\lambda\,.$$

La condition $(v)_{x=0}=0$ peut être satisfaite en posant dans les équations $(7'')$,

(14) $$b=a;$$

La condition $(v)_{x=\lambda}=0$ devient alors $(e^{\alpha\lambda}-e^{-\alpha\lambda})\cdot\cdot J_1(\alpha R(\lambda))=0$ et est satisfaite par $\alpha$ tel que $e^{\alpha\lambda}=e^{-\alpha\lambda}$ ou $e^{2\alpha\lambda}=1$.

On en déduit:

(15) $$\alpha=i\frac{k}{\lambda}\pi,\quad k=1,2,3,\cdots,$$

la solution $\alpha=0$, correspondant à $k=0$, étant à rejeter.

Le système $(7'')$ devient donc

$(7''')$ $$\begin{cases} u(x,r)=a_0+2a\cos\frac{k}{\lambda}\pi x\cdot I_0\left(\frac{k}{\lambda}\pi r\right) \\ v(x,r)=2a\sin\frac{k}{\lambda}\pi x\cdot I_1\left(\frac{k}{\lambda}\pi r\right) \end{cases}$$

où, comme d'habitude, $I_n(z)=i^{-n}J_n(iz)$ représente la fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce.

La condition $(v)_{0<x<\lambda}<0$ exige maintenant

(16) $$k=1$$

(17) $$a<0$$

car $I_1(z)\geqslant 0$ pour $z\geqslant 0$. (16) assure, en même temps, la monotonie de la fonction $f(x)=u(x,0)$.

Il ne reste qu'á imposer la condition $u>0,\ 0\leqslant x\leqslant\lambda$ par un choix approprié des coefficients $a<0$ et $a_0>0$ (puisque $I_0(z)\geqslant 0$ pour $z\geqslant 0$).

Il faudra que: $a_0>-2a\cos\frac{\pi}{\lambda}x\cdot I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right)$ pour $0\leqslant x\leqslant\lambda,\ r=R(x)$. La valeur maxima du second membre est atteinte pour $x=0, r=R(0)$, car $\cos\frac{\pi}{\lambda}x$ et $R(x)$ sont des fonctions décroissantes de $x$, et $I_0(z)$ est une fonction croissante de $z$; donc, il suffit que $a_0>-2a I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)$

ou $a_0=-2ah-2aI_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)$, avec $h>0$.

Posons $-2a=a_1$, donc

(18) $$a_0=a_1\left[h+I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)\right]$$

On aura finalement

(19) $$f(x)=a_1\left[h+I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)-\cos\frac{\pi}{\lambda}x\right]$$

et

$(7^{IV})$ $$\begin{cases} u(x,r)=a_1\left[h+I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)-\right. \\ \qquad\left.-\cos\frac{\pi}{\lambda}x\cdot I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right)\right] \\ v(x,r)=-a_1\sin\frac{\pi}{\lambda}x\cdot I_1\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right) \end{cases}$$

avec $a_1>0, h>0$ arbitraires.

La fonction de courant est alors

$(8^{IV})$ $$\psi(x,r)=\frac{a_1}{2}\left[h+I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)\right]r^2-$$
$$-\frac{\lambda}{\pi}a_1\cos\frac{\pi}{\lambda}x\cdot r\cdot I_1\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right)$$

Nous pouvons disposer des deux coefficients arbitraires de façon à assurer certaines caractéristiques pour le «convergent», par exemple, une ouverture de sortie avec un rayon donné.

Il est à remarquer que $a_1h$ représente la vitesse $u(0,R(0))$ au point $(0,R(0))$, à l'entrée sur le contour, et $a_1\left[h+I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)-1\right]$ représente la vitesse $u(0,0)$, a l'entrée sur l'axe; la différence de ces deux vitesses est $a_1\left[I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)-1\right]$. Il convient donc de prendre le rapport $\left[I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)-\right.$ $\left.-1\right]/h$ aussi petit que possible, pour que la vitesse d'entrée soit aussi uniforme que possible [3].

D'autre part, si on peut affirmer, à priori, que $u(x,r)$ donnée par $(7^{IV})$ est monotonément croissante, le long de

---

[3] On voit apparaître ici l'influence de la longueur $\lambda$ et du rayon d'entrée $R(0)$, sur la non uniformité de la répartition de vitesses d'entrée. Pour la sortie, la différence des vitesses sur l'axe et sur le contour est $a_1\left[1-I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(\lambda)\right)\right]$. Donc, le rapport de la vitesse de sortie et de la vitesse d'entrée est, en module, égal à $\dfrac{I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(\lambda)\right)-1}{I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}R(0)\right)-1}<1$. C'est à dire que la non uniformité de la répartition de vitesses à la sortie est moins accentuée qu'à l'entrée. Cette remarque a de l'intérêt pour le problème du convergent avec un corps à l'ouverture de sortie. Voir: A. Pereira Gomes, «*Determination d'un convergent ayant un corps à l'ouverture de sortie*», Port. Math. vol. 12, (1953), p. 49-56.

$\psi(x,r)=C$, on ne peut rien dire sur le comportement de la fonction $w=\sqrt{u^2+v^2}$. En effet, la fonction $r=R(x)$ définie par $\psi(x,r)=C$ étant décroissante, le produit $\cos\frac{\pi}{\lambda}x\cdot I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right)$ est décroissant pour $0<x<\lambda$ donc $u(x,r)$ est croissante. Mais les fonctions $\sin\frac{\pi}{\lambda}x$ et $I_1\left(\frac{\pi}{\lambda}R(x)\right)$ sont l'une croissante, l'autre décroissante pour $0<x<\lambda$ et, sans connaître la fonction $R(x)$, on ne peut rien deduire sur le comportement du produit, c'est à dire de $v(x,r)$.

Nous avons supposé, au début de cette analyse, que $f(x)=a_0+f_1(x)$ où $f_1(x)$ satisfaisait aux conditions (9), et cette hypothèse nous a conduit à la solution $f(x)=a_0-a_1\cos\frac{\pi}{\lambda}x$, $a_0>0, a_1>0$, si l'on cherche un «convergent» avec une entrée et une sortie paralléles à l'axe.

Mais nous pouvons élargir cette hypothèse et supposer que $f(x)$ est de la forme $f(x)=a_0+\sum_{p=1}^{N}f_p(x)$ où les $f_p(x)$ sont des fonctions qui satisfont les conditions (9), pour $p=1,2,\cdots,N$.

On aura das ce cas

$$f(x)=a_0+\sum_{p=1}^{N}a_p e^{\alpha_p x}+b_p e^{-\alpha_p x} \tag{20}$$

et on voit sans peine que $u$ et $v$ prennent la forme

$$\begin{cases} u(x,r)=a_0+\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p x}+b_p e^{-\alpha_p x})\,J_0(\alpha_p r) \\ v(x,r)=-\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p x}-b_p e^{-\alpha_p x})\,J_1(\alpha_p r) \end{cases} \tag{21}$$

On en déduit:

$$\psi(x,r)=\frac{a_0}{2}r^2+\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p x}+ b_p e^{-\alpha_p x})\frac{r}{\alpha_p}J_1(\alpha_p r) \tag{22}$$

Si nous voulons un «convergent» avec une entrée et une sortie parallèles à l'axe, nous imposons $v(0,R(0))=v(\lambda,R(\lambda))=0$, par conséquent

$$\sum_{p=1}^{N}(a_p-b_p)\,J_1(\alpha_p R(0))=0 \tag{23}$$

$$\sum_{p=1}^{N}(a_p e^{\alpha_p\lambda}-b_p e^{-\alpha_p\lambda})\,J_1(\alpha_p R(\lambda))=0 \tag{24}$$

La première de ces équations peut être satisfaite si l'on pose

$$b_p=a_p\,,\ p=1,2,\cdots,N \tag{25}$$

et la seconde devient alors:

$$\sum_{p=1}^{N}a_p(e^{\alpha_p\lambda}-e^{-\alpha_p\lambda})\,J_1(\alpha_p R(\lambda))=0\ ;$$

cette égalité peut être satisfaite en supposant

$$e^{\alpha_p\lambda}-e^{-\alpha_p\lambda}=0,\ \text{pour}\ p=1,2,\cdots,N, \tag{26}$$

ce qui nous amène à

$$\alpha_p=i\frac{k_p}{\lambda}\pi \tag{27}$$

où $k_p$ est un entier arbitraire $\neq 0$, pour $p=1,2\cdots,N$.

Dans ces conditions, on a:

$$\begin{cases} u(x,r)=a_0+\sum_{p=1}^{N}2\,a_p\cos\frac{k_p}{\lambda}\pi x\cdot I_0\left(\frac{k_p}{\lambda}\pi r\right) \\ v(x,r)=\sum_{p=1}^{N}2\,a_p\sin\frac{k_p}{\lambda}\pi x\cdot I_1\left(\frac{k_p}{\lambda}\pi r\right) \end{cases} \tag{21'}$$

$$\psi(x,r)=\frac{a_0}{2}r^2+\sum_{p=1}^{N}2\,a_p\frac{\lambda}{k_p\pi}\cos\frac{k_p\pi}{\lambda}x\cdot I_1\left(\frac{k_p}{\lambda}\pi r\right)\cdot r \tag{22'}$$

La solution $a_p=b_p$, $p=1,2,\cdots N$ et $\alpha_p=i\,k_p\frac{\pi}{\lambda}$ que nous venons de considérer équivaut à mettre $v(0,r)=v(\lambda,r)=0$ pour tout $r$. Ceci correspond à prendre un potentiel $\phi(x,r)$ tel que $\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{x=0}=0$ et $\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{x=\lambda}=0$, c'est à dire, constant pour $x=0$ et $x=\lambda$. C'est la solution déduite directement par Thwaites [4].

Mais cette solution n'est pas unique. Nous pouvons satisfaire aux conditions (23) et (24) par d'autres hypothèses que (25) et (26), en faisant $v(0,r)=0$ et $v(\lambda,r)=0$ pour des valeurs particulières de $r$, correspondantes aux dimensions du convergent. Nous serons ainsi amenés à d'autres expressions de $u(x,r)$, $v(x,r)$ et $\psi(x,r)$ qui permettent d'utiliser les fonctions de Bessel $J_0(z)$ et $J_1(z)$ dans le calcul numérique.

---

[4] «*On the design of contractions for wind tunnels*», Aeronautical Research Council, R. & M. n.º 2278, 1946.

# Nota a "Uma demonstração por indução finita" (*)

por Gustavo de Castro

**1.** A história das matemáticas está cheia de claros indícios do movimento colectivo *de arrastamento* que traz o grande progresso e alimenta de energia os trabalhos individuais. Sem ignorar a importância dos colaboradores mais extraordinários nesse progresso, tem de reconhecer-se que coisa de maior inércia é responsável pelo avanço ininterrupto.

Um dos claros indícios desse arrastamento a que se fez referência é o acumular de resultados, o esfusiar de soluções, que estugam o passo na via de solução de certo problema numa dada época.

Ora, o último número da *G. M.* veio mostrar mais uma vez como o mesmo é surpreendentemente verdade até na *pequena* história das matemáticas. Na *pequena* história das matemáticas dum pequeno país.

Há um tempo a esta parte alguns trabalhadores duma instituição onde se faz investigação aplicada vêm ponderando a nossa extraordinària carência em matemáticas *aplicadas* e procurando imaginar possibilidades de solução... e eis que o Doutor Pereira Gomes abre o problema na *G. M.*. Antes de mais acentue-se a habilidade e a prudência com que o problema foi aberto; como P. G. se limita às questões mais ingénuas para que todos possamos partir do início; como nos fornece a todos com a tradução de Kármán uma base de onde começar. Primeira coincidência.

A segunda coincidência é a publicação no mesmo número da *G. M.* duma nota de Silva Lobo. A coincidência reside aqui em que ela se presta admiràvelmente para que se aborde um pequeno ponto ligado ao debate geral. É a este pequeno ponto que se limita esta minha nota.

**2.** O ponto aparenta-se ao das «*sound functions*» as *funções sãs ou sólidas* — as *functions honnêtes* de Borel — e à observação que faz aos matemáticos o *Engenheiro* de Kármán de que «*gastais muito tempo e muito engenho para mostrar a existência de soluções... evidente... por razões óbvias de natureza física*».

É que certos problemas de matemática pura são problemas de matemática aplicada e neste aspecto às vezes tão imediatos que se lhe conhecem um bom par de soluções. Pondo-se o problema ao matemático puro pode ele, se não se informar disso, realizar um esforço na sua resolução em certa medida escusado.

Acentuemos que um tal facto se não pode evitar sempre; maior esforço tem às vezes o matemático em certificar-se que já há solução do que em arranjar uma. E acrescente-se que é às vezes muito útil um novo esfôrço pela introdução ou rodagem dum bom método; pela iluminação de certos ângulos do problema.

Acontece porém que em certos casos se poderia evitar o arrombar de porta aberta *se não fosse a errada orientação que exagera, até já no ensino secundário, a separação entre as matemáticas puras e as matemáticas aplicadas*. No caso que nos interessa não se entende como se possa fazer a análise combinatória e o binómio de Newton sem recurso a problemas simples de probabilidades a não ser perdendo um material sugestivo e uma boa ocasião para introduzir o *aleatório*, em troca duns exemplos um tanto ridículos. Não se entende como se podem pôr problemas sobre números do triângulo de Pascal sem a tentativa de os traduzir em termos de urnas de duas espécies.

**3.** Sejam então as $n$ extracções sucessivas com reposição duma urna $U(p,q)$ de duas espécies, com $pN$ bolas vermelhas e $qN$ bolas azuis. A repetição $X$ de bolas vermelhas é uma bernoulliana $-p,n$:

$$Pr\,(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Os seus dois primeiros momentos são

$$E\,(X)=\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \quad \text{e} \quad E\,(X^2)=\sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x q^{n-x}.$$

Pondo $p=q=1/2$

$$\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}=2^n E\,(X) \quad \text{e} \quad \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}=2^n E\,(X^2).$$

Como ninguém ignora

$$E\,(X)=np \quad \text{e} \quad E\,(X^2)=np\,[1+(n-1)\,p]$$

o que, para $p=q=1/2$, conduz a

$$\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}=2^{n-1}n \quad \text{e} \quad \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}=2^{n-2}n(n+1).$$

**4.** Recordam-se dois métodos, no fundo equivalentes, para se obter os dois primeiros momentos de binomial.

(*) *Gazeta de Matemática*, N.º 53, pg. 13-15, 1952.

**4.1.** Tem-se

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=$$

$$=np\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^x q^{n-1-x}=np\,(p+q)^{n-1}=np\,.$$

E analogamente

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{n}[x(x-1)+x]\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=$$

$$=n(n-1)\,p^2\sum_{n=0}^{n-2}\binom{n-2}{x}p^x q^{n-2-x}+$$

$$+\,np\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^x q^{n-1-x}=$$

$$=n(n-1)\,p^2+np=np\,[1+(n-1)\,p]\,.$$

**4.2.** Recorrendo à função geradora (*)

$$P(s)=(q+ps)^n$$

tem-se

$$E(X)=P'(1)\qquad E(X^2)=P'(1)+P''(1)\,.$$

Ora

$$P'(s)=np\,(q+ps)^{n-1}$$

$$P''(s)=n(n-1)\,p^2\,(q+ps)^{n-2}$$

de onde os resultados que se pretendiam.

(*) Veja-se (Feller, 50): *An Introduction to Probability Theory*... p. 212. Chapman & Hall. London.

**5.** Ainda de outro modo, servindo-nos dos indicadores $X_i$ das sucessivas extracções

$$E(X_i)=p\quad E(X_i-p)^2=pq$$

o que dá

$$E(X)=\sum E(X_i)=np$$

$$E(X-np)^2=\sum E(X_i-p)^2=npq$$

e

$$E(X^2)=E(X-np)^2+[E(X)]^2=$$

$$=npq+n^2p^2=np\,[1+(n-1)\,p]\,.$$

**6.** Também se não deve esquecer a fórmula de Romanovsky para os momentos *à média* duma bernoulliana:

$$\mu_{k+1}=pq\left(\frac{d\,\mu_k}{dp}+nk\,\mu_{k-1}\right),$$

com $\mu_0=1$ e $\mu_1=0$.

Não dispensa o conhecimento de $E(X)=np$, mas abre o caminho para o cálculo de

$$\sum_{x=0}^{n}x^k\binom{n}{x}=E(X^k)=\sum_{0}^{k}\binom{k}{i}\mu_{k-i}\,[E(x)]^i\,.$$

Ainda pelos momentos factoriais (como em **4.1**) se consegue o mesmo (**).

**7.** Esta nota não diminui o interesse da de Silva Lobo onde se visa claramente o meritório fim de adextrar os cultores das Matemáticas Elementares num excelente método. Possa ela mostrar um pequeno aspecto das desvantagens da partilha da Matemática em duas irmãs estranhas, de costas uma para a outra.

(**) Veja-se, por exemplo, (Kendall, 47): *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, Caps. 3 e 5.

# *Correccion al articulo «sobre pares de figuras convexas»* (*)

por *M. A. Santaló*

El Prof. L. M. Blumenthal ha tenido la amabilidad de hacernos notar que la generalización del teorema de Helly que creiamos haber dado en el articulo citado, no es correcta, ni puede existir una generalización del mismo tipo, como prueba el siguiente interesante contra-ejemplo debido al Prof. Motzkin.

Consideremos el caso de pares de segmentos sobre una recta. Considerando los mismos como bases de rectângulos del plano, o como ejes de cilindros de revolución en cualquier espacio, se comprende que el ejemplo vale para un espacio de dimensión cualquiera.

Sean los $N+1$ pares de segmentos siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $S_1=$ | intervalo | $(-2,-1)+$ | intervalo | $(1,N)$ |
| $S_2=$ | » | $(1,N-1)+$ | » | $(N+1-\varepsilon,N+1+\varepsilon)$ |
| $S_3=$ | » | $(1,N-2)+$ | » | $(N,N+1)$ |
| $S_4=$ | » | $(1,N-3)+$ | » | $(N-1,N+1)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $S_N=$ | » | $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)+$ | » | $(3,N+1)$ |
| $S_{N+1}=$ | » | $(2,N+1)+$ | » | $(N+2,N+3)$. |

Es inmediato comprobar que cada $N$ de estos pares de segmentos tienen punto común sin que sin embargo exista punto común a todos los $N+1$.

El error de la demostración que creiamos haber dado está en el Lema II, el cual es evidentemente falso.

(*) *Gazeta de Matemática*, N.º 50, pp. 7-10, 1951.

# Alguns teoremas sobre limites de sucessões

por *M. A. Fernandes Costa*

A *Gazeta de Matemática*, «jornal dos estudantes das escolas superiores», prestará a estes um bom serviço sempre que possa facilitar-lhes o estudo de algum capítulo importante das Matemáticas.

Eis por que julgamos de interesse reunir aqui alguns resultados da teoria dos limites, fundamental na Análise moderna. Basta recordar que a teoria das sucessões está na base da doutrina das séries e que estas surgem a cada passo nas matemáticas aplicadas.

Neste artigo encontram-se, além de observações várias sobre técnica de cálculo, alguns teoremas que, embora pouco divulgados, são extremamente úteis e fáceis de apreender.

## 1. Sucessões monótonas.

Começamos por dar vários exemplos de como se pode tirar partido do conhecido

Teorema I — *É convergente toda a sucessão monótona limitada (superiormente quando crescente, inferiormente quando decrescente); uma sucessão monótona não limitada tende para o infinito* (1).

*Exemplo 1.*

A sucessão de t. g. $\sqrt[n]{a}\ (a>1)$ é monótona decrescente e $\sqrt[n]{a}>1$ para todos os valores de $n$; por consequência $\sqrt[n]{a}\to l \geqq 1$. Mas, se fosse $l>1$, ter-se-ia $a>l^n$ para todos os valores de $n$, o que é absurdo, visto que $l^n\to\infty$. Deverá pois ser $l=1$. De modo análogo se provaria que $\sqrt[n]{a}\to 1$ com $0<a<1$.

*Exemplo 2.*

Considere-se a sucessão em que cada termo está ligado ao anterior pela relação

$$x_{n+1}=\sqrt{k+x_n}; \qquad (k>0)$$

designando por $\xi$ a raíz positiva da equação $x^2=x+k$ e supondo $x_1<\xi$, tem-se $x_1^2-x_1-k<0$, donde $x_2^2=x_1+k>x_1^2$ e $x_2=\sqrt{x_1+k}<\sqrt{\xi+k}=\xi$.

Anàlogamente, se for $x_n<\xi$, $x_{n+1}^2-x_n^2=-(x_n^2-x_n-k)>0$ e $x_{n+1}=\sqrt{k+x_n}<\sqrt{k+\xi}=\xi$; é portanto $x_{n+1}>x_n$ e $x_{n+1}<\xi$, isto é, a sucessão é crescente e limitada. E, por ser $\lim x_{n+1}=\lim x_n$, a sucessão converge para $\xi=(1+\sqrt{4k+1})/2$.

Semelhantemente se provaria que, quando $x_1>\xi$, a sucessão é decrescente e tende também para $\xi$.

Por exemplo, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=2$, visto ser aqui $x_1=\sqrt{2}$ e $k=2$.

*Exemplo 3.*

Seja a sucessão definida pela lei de recorrência
$y_{n+1}=a+by_n/(ay_n+b) \qquad (y_1=a>0\,,\,b>0)$.

Mostremos que ela é crescente. De facto, a diferença $y_{n+1}-y_n=-\dfrac{a}{ay_n+b}(y_n^2-ay_n-b)$ tem sinal contrário ao do trinómio entre parênteses. Ora, feitos os cálculos, verifica-se que $y_n^2-ay_n-b=\left(\dfrac{b}{ay_n+b}\right)^2(y_{n-1}^2-ay_{n-1}-b)$; aquele trinómio tem pois o sinal de $y_1^2-ay_1-b=-b<0$.

A sucessão será portanto convergente ou tenderá para $+\infty$. Se existir limite finito $y$, este será forçosamente raíz da equação $y=a+by/(ay+b)$. Como esta admite soluções reais, a raíz positiva $\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4ab})$ é o limite da sucessão dada.

*Exemplo 4.*

Sendo $a>0$, $b>0$ e fazendo

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2}(a+b) \\ b_1=\sqrt{ab} \end{cases} \quad \text{e, em geral,} \quad \begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}) \\ b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\,, \end{cases}$$

mostrar que $a_n$ e $b_n$ tendem monòtonamente para um mesmo limite (*média aritmo-geométrica* de $a$ e $b$).

De $a_n-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})-\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{b_{n-1}})^2>0$ deduz-se $a_n>b_n$. Ora é fácil provar que, sendo $u<v$, se tem $u<\dfrac{1}{2}(u+v)<v$ e $u<\sqrt{uv}<v$. Daqui resulta $\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})<a_{n-1}$ e

(1) Para a demonstração veja-se, por ex., J. V. Gonçalves, *Curso de Álgebra Superior*, 2.ª ed. vol. I, pg. 56.

$b_{n-1} < \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$, ou seja $a_n < a_{n-1}$ e $b_n > b_{n-1}$. Quer dizer, $a_n$ é decrescente e $b_n$ crescente; e, por ser $a_n > b_n$, a primeira sucessão é limitada inferiormente e a segunda limitada superiormente. Logo, ambas são convergentes: $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$, satisfazendo $\alpha$ e $\beta$ às condições $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\beta = \sqrt{\alpha\beta}$, de qualquer das quais se deduz ser $\alpha = \beta$.

Dão-se a seguir alguns teoremas que constituem útil complemento do teorema I.

TEOREMA II — *Se, para* $n \geqslant n_0$, *for* $u_n > 0$ *e* $u_{n+1} \geqslant \lambda u_n$ $(\lambda > 1)$, *então* $u_n \to +\infty$.

Com efeito,

$$u_n \geqslant \lambda\, u_{n-1} \geqslant \lambda^2 u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda^{n-n_0} u_{n_0},$$

e $\lambda^{n-n_0} \to +\infty$.

COROLÁRIO — *Sendo* $u_n > 0$ *e* $\lim u_{n+1} / u_n = l > 1$, $u_n \to +\infty$.

Porque, a partir de certa ordem, $u_{n+1} / u_n > l - \varepsilon > 1$.

TEOREMA III — *Sendo, para* $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant \mu |u_n|$ $(0 < \mu < 1)$, *então* $u_n \to 0$.

Demonstração análoga à anterior.

COROLÁRIO — *Se* $\lim u_{n+1} / u_n = l$, *com* $-1 < l < 1$, *então* $u_n \to 0$.

*Exemplo 5.*

Considere-se a sucessão $u_n = n^r x^n$ $(x \neq 0)$, onde $r$ é um inteiro qualquer.

Como $u_{n+1} / u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r x \to x$, $u_n \to +\infty$ se $x > 1$ e $u_n \to 0$ se $0 < x < 1$. Se $x = 1$, $u_n \to +\infty$. Supondo agora $x < 0$, idêntico critério mostra que $|u_n| = n^r |x|^n$ tende para $+\infty$ se $|x| \geqslant 1$ e para zero se $|x| < 1$. A sucessão é pois oscilante infinita se $x \leqslant -1$ e converge para zero se $-1 < x < 0$.

*Exemplo 6.*

Para a sucessão $u_n = x^n / n!$ tem-se $u_{n+1} / u_n = x / (n+1) \to 0$, e o corol. do teor. III mostra logo que $u_n \to 0$ qualquer que seja $x$.

*Exemplo 7.*

$u_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$. Se $m$ for inteiro, $u_n = 0$ para $n > m$ e $\lim u_n = 0$. Não sendo $m$ inteiro, $u_{n+1} / u_n = x(m-n) / (n+1) \to -x$ e portanto é ainda $\lim u_n = 0$ se $|x| < 1$.

## 2. Sucessão enquadrada.

Recorre-se frequentemente ao teorema seguinte para esclarecer a natureza duma sucessão:

TEOREMA IV — *Se* $v_n$ *e* $w_n$ *tenderem para o mesmo limite (finito, ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$*) e, de certa ordem em diante,* $u_n$ *estiver compreendido entre* $v_n$ *e* $w_n$, *tenderá* $u_n$ *para o mesmo limite.*

Com efeito, convergindo $v_n$ e $w_n$ para o mesmo limite $v$, ter-se-á $|v_n - v| < \delta$ para $n > p$ e $|w_n - v| < \delta$ para $n > q$; e, se $u_n$ estiver compreendido entre $v_n$ e $w_n$ para $n > m$, é óbvio que também $|u_n - v| < \delta$ a partir da maior das ordens $m$, $p$ e $q$.

A demonstração é análoga se $v_n$ e $w_n$ tendem conjuntamente para $+\infty$ ou $-\infty$. No primeiro caso, por ex., virá $v_n > \Delta$ e $w_n > \Delta$ para $n > p$ e $n > q$, respectivamente; e se $u_n$ se achar enquadrado por $v_n$ e $w_n$ a partir da ordem $m$, será $u_n > \Delta$ quando $n$ exceda a maior daquelas ordens.

*Exemplo 8.*

O resultado anterior é imediatamente aplicável à sucessão de t. g.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}},$$

pois $(2n+1) / \sqrt{n^2+2n+1} < u_n < (2n+1) / \sqrt{n^2+1}$; e cada uma das sucessões entre as quais $u_n$ fica enquadrada tende para 2.

*Exemplo 9.*

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}$$

Por ser $n / \sqrt{n(n+1)} > v_n > n / \sqrt{(2n-1)2n}$, tenderá $v_n$ para um limite entre 1 e $\frac{1}{2}$. Com efeito, $n / \sqrt{n(n+1)} \to 1$, $n / \sqrt{(2n-1)2n} \to 1/2$ e $v_n$ é decrescente, visto que

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} = \frac{\sqrt{4(2n+1)} - \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)2n}} > 0,$$

como fàcilmente se verifica.

*Exemplo 10.*

Seja a sucessão de t. g. $v_n = \sqrt[n]{u_n}$, onde $u_n \to a > 0$. Provemos que $v_n \to 1$. Com efeito, a partir de certa ordem, $a-\delta < u_n < a+\delta$, e portanto $\sqrt[n]{a-\delta} \lesseqgtr u_n \lesseqgtr \sqrt[n]{a+\delta}$, conforme $a \gtreqless 1$; ora, como se viu no Ex. 1, cada uma das sucessões enquadrantes tende para 1. Trata-se pois duma generalização do resultado $\sqrt[n]{a} \to 1$.

*Exemplo 11.*

$u_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)} \to 0$ porque, para $n \geqslant 3$, $u_n < \frac{3}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}$ (pois $\frac{2n+1}{3n-1} < \frac{9}{10}$ para $n > 3$).

### 3. Alguns limites relacionados com o número $e$

É fundamental o seguinte teorema, que constitui a um tempo generalização dos conhecidos teoremas sobre o limite da potência e o limite da exponencial.

Teorema V — *Se* $u_n \to u > 0$ *e* $v_n \to v$, *então* $u_n^{v_n} \to u^v$.

Com efeito, $\lim u_n^{v_n} = \lim b^{\log_b u_n^{v_n}} = \lim b^{v_n \log_b u_n} = b^{v \log_b u} = b^{\log_b u^v} = u^v$.

Claro que, sendo $u$ finito e $v_n \to \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, $u_n^{v_n} \to \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$; se $u_n \to \infty$, também $u_n^{v_n} \to \infty$, desde que $v_n$ não tenda para zero ou $-\infty$, etc.

Há, porém, muitos casos que o teorema não esclarece, como seja o de

$$\lim (1 + 1/n)^n = e = 2{,}71828 \cdots$$

É sabido que $(1+1/n)^n$ se aproxima do seu limite por valores crescentes ([1]), circunstância de que muitas vezes se pode lançar mão:

*Exemplo 12.*

$\sqrt[n]{n} \to 1$. Com efeito, a sucessão é decrescente, pois $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ implica $(n+1)^n < n^{n+1}$, ou seja $(1+1/n)^n < n$; e esta condição verifica-se necessàriamente para $n \geqslant 3$, visto que $(1+1/n)^n$ tende crescentemente para $e < 3$. Como $\sqrt[n]{n} > 1$, deverá existir um limite $l \geqslant 1$. Ora, se fosse $l > 1$, ter-se-ia $n > l^n$, condição que se não pode verificar para valores de $n$ suficientemente grandes, visto que $l^n/n \to +\infty$ (II).

([1]) Ibid., pág. 57.

Um procedimento semelhante ao adoptado na demonstração de V permite resolver com facilidade muitas questões relativas a limites.

Por exemplo, se $u_n \to a > 0$, $\log_b u_n$ tende para o valor finito $\log_b a$, e $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim b^{\frac{1}{n}\log_b u_n} = b^0 = 1$ como se viu no Ex. 10. Outro exemplo:

*Exemplo 13.*

$$u_n = (n+1)^{1/\log n} \to e, \text{ visto que } \log u_n = \frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log n + [\log(n+1) - \log n]}{\log n} = 1 + \frac{\log(1+1/n)}{\log n} \to 1.$$

Adiante se encontrarão mais exemplos desta técnica.

Teorema VI — *Se* $u_n \to 0$, $v_n \to \infty$ *e* $u_n v_n \to l$, *tem-se* $(1+u_n)^{v_n} \to e^l$.

De facto, pode escrever-se

$$(1 + u_n)^{v_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{1/u_n}\right)^{1/u_n}\right]^{u_n v_n}$$

e, como $1/u_n \to \infty$, sabe-se ([1]) que $\left(1+\frac{1}{1/u_n}\right)^{1/u_n} \to e$. Em vista de V, tem-se portanto $\lim (1+u_n)^{v_n} = e^{\lim u_n v_n} = e^l$.

Evidentemente, se $u_n v_n \to +\infty$, $(1+u_n)^{v_n} \to \infty$; quando $u_n v_n \to -\infty$, $(1+u_n)^{v_n} \to 0$.

Corolário — *Se* $x_n \to x$ *e* $u_n \to \infty$, $\lim (1+x_n/u_n)^{u_n} = e^x$.

É uma generalização da célebre fórmula de João Bernoulli.

*Exemplo 14.*

$$\lim (1+1/n)^{n^k} = \begin{cases} e & \text{se } k = 1 \\ 1 & \text{se } k < 1 \\ +\infty & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

*Exemplo 15.*

$(1-1/n^2)^n \to e^0 = 1$

*Exemplo 16.*

$\lim (1+1/\log n)^{\log(n+1)} = e^{\lim \log(n+1)/\log n} = e^1$ (Ex. 13)

*Exemplo 17.*

$\lim u_n (a^{1/u_n} - 1) = \log a$, com $|u_n| \to \infty$.

Com efeito, pondo $x_n = u_n (a^{1/u_n} - 1)$, basta notar que $(1+x_n/u_n)^{u_n} = a$, donde $e^{\lim x_n} = a$, ou seja $\lim x_n = \log a$.

Em particular, $\log a = \lim n (\sqrt[n]{a} - 1)$.

([1]) Ibid., pág. 70.

É interessante verificar algumas propriedades dos logaritmos a partir desta igualdade. Por ex.,

$$\log (1/a) = \lim n\,(\sqrt[n]{1/a} - 1) = \lim -n\,(\sqrt[n]{a} - 1) :$$
$$: \lim \sqrt[n]{a} = -\log a ;$$
$$\log 1 = \lim n\,(\sqrt[n]{1} - 1) = 0 ;$$
$$\log ab = \lim [n\,(\sqrt[n]{a} - 1)\sqrt[n]{b} + n\,(\sqrt[n]{b} - 1)] = \log a + \log b ; \text{ etc.}$$

*Exemplo 18.*

Calcular o limite de $u_n = n \log \frac{1}{2}(1 + x^{1/n})$.

$u_n = \log \left[1 + \frac{1}{2}(x^{1/n} - 1)\right]^n$. Por sua vez,

$$\left[1 + \frac{1}{2}(x^{1/n} - 1)\right]^n \to e^{\lim \frac{1}{2} n (x^{1/n} - 1)} = e^{\frac{1}{2}\log x} = x^{1/2}.$$

Portanto, $\lim u_n = \frac{1}{2} \log x$.

Vamos agora esclarecer alguns casos que o teorema V deixa obscuros.

Teorema VII — *Se* $u_n \to +\infty$ *e* $v_n \to 0$, $u_n^{v_n} \to 1$ *caso* $u_n v_n$ *se conserve limitado.*

Com efeito, tem-se então

$$\log u_n^{v_n} = v_n \log u_n = u_n v_n \cdot \frac{\log u_n}{u_n} \to 0 ,$$

visto que $\log u_n / u_n \to 0$ [1].

*Exemplo 19.*

Para a sucessão de t. g. $a_n = (\sqrt{n})^{\log(1 - 2/n)}$ vem :

$$\log a_n = \log (1 - 2/n) \cdot \frac{1}{3} \log n = \frac{1}{3} \log (1 - 2/n)^{\log n} \to$$
$$\to \frac{1}{3} \log e^0 = 0 .$$

Evitava-se este cálculo notando que $u_n v_n = \log (1 - 2/n)^{n^{1/3}} \to \log e^{\lim 2/n^{2/3}} = 0$; $u_n v_n$ é pois limitado e a sucessão $a_n$ está nas condições do teor. anterior.

Recorde-se também a sucessão do Ex. 13.

Teorema VIII — *Se* $u_n \to +0$ *e* $v_n \to 0$, $u_n^{v_n} \to 1$ *desde que* $v_n/u_n$ *seja limitado.*

Na verdade, $\log u_n^{v_n} = \frac{v_n}{u_n}(u_n \cdot \log u_n) \to 0$ [1].

*Exemplo 20.*

$$\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)^{k/n} \to 1 .$$

[1] «Tendendo para o infinito ou tendendo para zero, os números evoluem mais ràpidamente que qualquer potência dos respectivos logaritmos» — ibid., pág. 72.

Teorema IX — *Se* $u_n \to 1$ *e* $v_n \to \infty$, $u_n^{v_n}$ *é convergente se o for* $(u_n - 1)\,v_n$.

De facto, $(u_n - 1) \to 0$ e $\lim [1 + (u_n - 1)]^{v_n} = e^{\lim (u_n - 1) v_n}$ (VI). Claro que, se $(u_n - 1)\,v_n \to +\infty$, também $u_n^{v_n} \to +\infty$; mas, quando $(u_n - 1)\,v_n \to -\infty$, $u_n^{v_n} \to 0$.

*Exemplo 21.*

Na sucessão de t. g. $[\log (n+1)/\log n]^n$, tem-se

$$(u_n - 1)\,v_n = \frac{\log (n+1) - \log n}{\log n} \cdot n =$$
$$= \log (1 + 1/n)^n / \log n \to 0 ,$$

e portanto $\lim\ [\log (n+1) / \log n]^n = e^0 = 1$.

## 4. Alguns teoremas particulares.

Este parágrafo é consagrado a alguns teoremas de grande utilidade prática. Embora, por comodidade, aqui se apresentem num encadeado lógico, fazendo fundamentalmente depender a demonstração de cada um deles da demonstração dos precedentes, faz-se notar que qualquer das proposições mencionadas pode ser provada independentemente, a partir da própria definição de limite.

Teorema X — *Convergindo* $a_n$ *para* $a$, *também* $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s_n$ *converge para o mesmo limite.*

Pondo $a_n = a + \varepsilon_n$ $(\varepsilon_n \to 0)$, o teorema fica demonstrado desde que se prove que $E_n = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) \to 0$. Ora, dado $\delta$ arbitràriamente pequeno, existirá uma ordem $p$ para além da qual $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\delta$; e, fazendo $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| = K$, vem

$$|E_n| \leq \frac{1}{n}|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_p| + \frac{1}{n}(|\varepsilon_{p+1}| + \cdots + |\varepsilon_n|)$$
$$\leq \frac{K}{n} + \frac{1}{n}(|\varepsilon_{p+1}| + \cdots + |\varepsilon_n|)$$
$$< K/n + \delta\,(n - p)/2n < K/n + \delta/2 <$$
$$< \delta/2 + \delta/2 = \delta ,$$

para $n$ superior ao maior dos números $p$ e $2K/\delta$; q. e. d.

*Exemplo 22.*

$$\lim (1 + 1/2 + \cdots 1/n)/n = \lim 1/n = 0 .$$

Note-se, de passagem, que este resultado permite concluir (VII)

$$\sqrt[n]{1 + 1/2 + \cdots + 1/n} \to 1 .$$

Deixa-se assim ver quão útil pode ser a associação destes diferentes teoremas no cálculo de limites.

*Exemplo 23.*

$$\lim \frac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}) =$$
$$= \lim \sqrt[n]{n} = 1 \,. \quad \text{(Ex. 12)}$$

Observe-se que a recíproca de X nem sempre é verdadeira; pode $s_n$ convergir sem que $a_n$ tenha limite: por ex., com $a_n = \frac{1}{2}[1-(-1)^n]$, $s_n \to \frac{1}{2}$.

Pode também demonstrar-se, de forma análoga, que $s_n \to + \infty$ quando $a_n \to +\infty$: nesta hipótese, uma ordem $q$ existirá a partir da qual $a_n > \Delta$, por maior que seja $\Delta$. Então, $s_n > \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_q)+\Delta(n-q)/n$. Fazendo $n \to \infty$, o 2.º membro tende para $\Delta$; o limite de $s_n$ só pode pois ser $+\infty$, porque é forçosamente superior a $\Delta$ e este é arbitràriamente grande.

O teorema é portanto verdadeiro quer seja $a$ finito ou infinito.

Teorema XI — *Se* $b_n \to b$, *tambem* $r_n = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \to b$ ($b$ *finito ou* $+\infty$).

Pois que $\log r_n = \frac{1}{n}(\log b_1 + \log b_2 + \cdots + \log b_n) \to \log b$ (X).

Teorema XII — *Se* $c_n - c_{n-1} \to A$, *também* $c_n/n \to A$ ($A$ *finito ou infinito*).

De facto, pondo $c_n - c_{n-1} = a_n$, vem $c_n = a_1 + \cdots + a$ e o teorema reduz-se a X.

Teorema XIII — *Se* $u_n / u_{n-1} \to B$, *também* $\sqrt[n]{u_n} \to B$ ($B > 0$, *finito ou infinito*).

Com efeito, $\log u_n - \log u_{n-1} \to \log B$, e portanto $(\log u_n)/n = \log \sqrt[n]{u_n} \to \log B$.

Podia também ter-se recorrido a XI, notando que

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_1 \frac{u_2}{u_1}\frac{u_3}{u_2}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}} = \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} \,.$$

Este teorema, cuja recíproca (tal como a dos anteriores) pode não se verificar, é dos de mais larga aplicação.

*Exemplo 24.*

$$\lim \sqrt[n]{n^k} = \lim (n+1)^k / n^k = 1 \qquad \text{(cf. Ex. 12)}.$$

*Exemplo 25.*

$$\lim \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n} / n = \lim \sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)/n^n} =$$
$$= \lim (2n+1)(2n+2)\, n^n / (n+1)^{n+2} =$$
$$= \lim (2n+1)(2n+2)/(n+1)^2 \cdot$$
$$\cdot \lim n^n/(n+1)^n = 4/e \,.$$

*Exemplo 26.*

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}} =$$
$$= \lim \sqrt[n]{\operatorname{tg}\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \to 1\right)$$
$$= \lim \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}\log\frac{n+2}{n+1} : \left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \lim \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\operatorname{tg}\frac{1}{n}} \cdot \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = 1$$

Teorema XIV — *Se* $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} \to C$, *também* $\frac{u_n}{v_n} \to C$ ($u_n, v_n \to \infty$).

Quando $(u_{n+1}-u_n)$ e $(v_{n+1}-v_n)$ convirjam, o teorema resulta imediatamente de XII. No entanto, para abranger todos os casos, há que fazer uma demonstração directa.

Supondo $C$ finito, uma ordem $m$ existirá a partir da qual

$$C - \delta < (u_{p+1}-u_p) / (v_{p+1}-v_p) < C + \delta \,,$$

ou seja

$$(v_{p+1}-v_p)(C-\delta) < u_{p+1}-u_p < (C+\delta)(v_{p+1}-v_p) \,;$$

dando a $p$ os valores $m, m+1, \cdots, n-1$ e somando, vem

$$(v_n - v_m)(C-\delta) < u_n - u_m < (C+\delta)(v_n - v_m) \,,$$

donde

$$u_m / v_n + (1 - v_m/v_n)(C-\delta) < u_n / v_n <$$
$$< (C+\delta)(1 - v_m/v_n) + u_m/v_n \,.$$

Ora, quando $n$ aumenta indefinidamente, $v_n \to \infty$, $u_m/v_n \to 0$, $v_m/v_n \to 0$; $u_n/v_n$ tem pois o seu limite compreendido entre $C-\delta$ e $C+\delta$. Por ser $\delta$ arbitrário, fica demonstrada a tese.

A justificação é análoga no caso de limite infinito.

*Exemplo 27.*

$$\lim (1^k + 2^k + \cdots + n^k) / n^{k+1} =$$
$$= \lim (n+1)^k / [(n+1)^{k+1} - n^{k+1}] =$$
$$= \lim \frac{n^k + kn^{k-1} + \cdots}{(k+1)\,n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1} \qquad (k > 0) \,.$$

*Exemplo 28.*

$$\lim \sqrt[n]{\log n!} = \lim \frac{\log (n+1)!}{\log n!} \qquad \text{(XIII)}$$

$$= \lim \frac{\log(n+1) + \log n + \cdots + \log 2}{\log n + \cdots + \log 2} =$$

$$= \lim \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \text{ (XIV)} = 1 . \quad \text{(cf. Ex. 13)}$$

TEOREMA XV — *Sendo* $b_n \geqslant 0$, $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \to \infty$ e $A_n \to \alpha$, *então*

$$lim \frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots + b_n A_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \alpha .$$

Com efeito, como $\sum_1^n b_i A_i \to \infty$, está-se na hipótese do teorema precedente, e

$$\lim \frac{\sum b_i A_i}{\sum b_i} = \lim \frac{\sum_1^{n+1} b_i A_i - \sum_1^n b_i A_i}{\sum_1^{n+1} b_i - \sum_1^n b_i} =$$

$$= \lim \frac{b_{n+1} A_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim A_{n+1} = \alpha .$$

*Exemplo 29.*

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \cdots + \operatorname{sen} \frac{\theta}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim \theta \frac{\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} (\theta/2)}{\theta/2} + \cdots + \frac{1}{n} \frac{\operatorname{sen} (\theta/n)}{\theta/n}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} =$$

$$= \theta \, . \, \lim \frac{\operatorname{sen} (\theta/n)}{\theta/n} = \theta \, .$$

*Exemplo 30.*

$$\lim \frac{1}{n^2} \left[ 1^2 \operatorname{sen} \theta + 2^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \cdots + n^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right] =$$

$$= \lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{k} =$$

$$= \lim \frac{\theta}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \frac{\sum_1^n k \frac{\operatorname{sen} (\theta/k)}{\theta/k}}{\sum_1^n k} =$$

$$= \frac{\theta}{2} \lim \frac{\operatorname{sen} (\theta/n)}{\theta/n} = \frac{\theta}{2} .$$

TEOREMA XVI - *Se* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ *e* $\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \to \lambda$, *também* $\frac{a_n}{b_n} \to \lambda$.

A demonstração é análoga à de XIV. Em vista da hipótese, a partir de certa ordem $m$ ter-se-á $(b_p - b_{p+1})(\lambda - \delta) < a_p - a_{p+1} < (\lambda + \delta)(b_p - b_{p+1})$; somando a estas as correspondentes desigualdades para $p+1, p+2, \cdots, n-1$, obtém-se $(b_p - b_n)(\lambda - \delta) < a_p - a_n < (\lambda + \delta)(b_p - b_n)$, ou seja

$$a_n/b_p + (1 - b_n/b_p)(\lambda - \delta) < a_p/b_p <$$
$$< (\lambda + \delta)(1 + b_n/b_p) + a_n/b_p ,$$

condição que deve verificar-se qualquer que seja $n$. Fazendo então $n \to \infty$, vem $\lambda - \delta < a_p/b_p < \lambda + \delta$. A partir da ordem $m$, $a_p/b_p$ acha-se pois compreendido entre $\lambda - \delta$ e $\lambda + \delta$, e por isso $a_p/b_p \to \lambda$, q. e. d.

TEOREMA XVII — *Se* $a_n \to a$ *e* $b_n \to b$,

$$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \to ab$$

$$e \quad \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \to ab .$$

A primeira parte do teorema resulta imediatamente de X.

Quanto à segunda sucessão, pondo $a_n = a + \varepsilon_n$ o termo geral escreve-se

$$a \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} + \frac{\varepsilon_1 b_n + \varepsilon_2 b_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n b_1}{n} .$$

Ora o primeiro termo tende para $ab$ (X) e o segundo, cujo módulo é inferior a $\frac{1}{n} \{ |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n| \} \times$ máx. $|b_i|$, tende para zero.

*Exemplo 31*

Dadas as somas $a_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ e $b_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, e calculados os valores $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1$ e $c_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, é fácil verificar que $c_n = u_1 b_n + u_2 b_{n-1} + \cdots + u_n b_1 = v_1 a_n + v_2 a_{n-1} + \cdots + v_n a_1$ e $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

Daqui resulta que, se as series $\sum u_n$ e $\sum v_n$ forem convergentes $(u_n \to u, v_n \to v)$, então $(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)/n \to uv$ (XVII). Por conseguinte, se $\sum w_n$ for convergente, a sua soma $w = \lim w_n$ é, em vista de X, igual a $uv$ (teorema de ABEL).

## EXERCÍCIOS

1. Mostrar que $a^n/n^k \to +\infty$ se $a > 1$ e que $b^n n^k \to 0$ se $|b| < 1$.

2. Estudar, para os diferentes valores de $x$, as sucessões

$$[(1-x^2)/(1+x^2)]^n\,,\quad (x^n-n)/(x^n+n)\,,$$
$$(x^n+n)/(x^{n-1}+2n)\,,\quad (x-x^{2n+1})/(1+x^{2n+2})\,.$$

**3.** A sucessão definida por $u_{n+1}=2\,(1+u_n)/(3+u_n)$ é monótona: crescente se $u_1<1$ e decrescente se $u_1>1$; o limite é 1.

**4.** Se $u_{n+1}=k/(1+u_n)$, com $k>0$ e $u_1>0$, são monótonas as sucessões $u_1, u_3, u_5, \cdots$ e $u_2, u_4, u_6, \cdots$ (uma crescente e a outra decrescente); e ambas tendem para a raiz positiva da equação $u^2+u=k$.

**5.** Dada a sucessão definida por $u_1=h$, $u_{n+1}=u_n^2+k$, sendo $0<k<\dfrac{1}{4}$ e $h$ um número compreendido entre as raízes $\alpha$ e $\beta$ da equação $u^2-u+k=0$, provar que $\alpha<u_{n+1}<u_n<\beta$ e determinar $\lim u_n$.

**6.** Sendo $u_1=\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{A}{u}\right)$, $u_2=\dfrac{1}{2}\left(u_1+\dfrac{A}{u_1}\right), \cdots$ $(u>0,\ A>0)$, provar que $\lim u_n=\sqrt{A}$ [verificar que $\dfrac{u_n-\sqrt{A}}{u_n+\sqrt{A}}=\left(\dfrac{u-\sqrt{A}}{u+\sqrt{A}}\right)^{2^n}$].

**7.** Dada a sucessão definida por $u_1=a+b, \cdots, u_n=a+b-ab/u_{n-1}$ $(a>b>0)$, mostrar que $u_n=(a^{n+1}-b^{n+1})/(a^n-b^n)$ e determinar $\lim u_n$. Discutir o caso $a=b>0$.

**8.** Determinar o limite das sucessões de t. g.

$$[n/(3n+1])^{\sqrt[n]{n}}\,,\quad n\cdot\log[(3n+2)/(3n-2)]\,,$$
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{(\log n)^n/n!}\,,\quad \frac{(n+1)\log n-n\log(n+1)}{\log n}\,,$$
$$[(2\mathrm{n})!/2^{2n}(n!)^2]^k\,,\quad [1+1/n(\log n)^h]^{-n^k}$$

**9.** Verificar que

$$\sqrt[n]{n!}\to\infty\,,\quad n/\log n!\to 0\,,\quad \frac{n}{n+1}\,\frac{\log(n+1)}{\log n}\to 1\,,$$
$$n^k\Big/\binom{n}{k}\to k!\,,\quad \log\log n/\log n\to 0\,,$$
$$n\cdot\log\log n/(\log n)^k\to\infty\,,\quad (n+1)/\sqrt[n]{n!}\to e\,,$$
$$(\log n)^n/n!\to 0\,,\quad n^{\log(1+1/n)}\to 1\,,\quad \sqrt[n]{(2n)!/(n!)^2}\to 4\,,$$
$$\sqrt[n]{n!}\,/\,n\to 1/e\,,\quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{(2n)!/n!}\to 4/e\,,$$
$$\frac{1}{n}\,[(n^2+1^2)\,(n^2+2^2)^2\cdots(n^2+n^2)^n]^{1/n^2}\to 2\,/\sqrt{e}\,,$$
$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\to\frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{n}\left\{\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}\to a^2+a+\frac{1}{3}\,,$$
$$n!/n^n\to 0\,,\quad n\left\{1-\sqrt{(1-a/n)\,(1-b/n)}\right\}\to(a+b)/2\,,$$
$$1/n^2+1/(n+1)^2+\cdots+1/(2n)^2\to 0\,,\quad 1/\sqrt{n}+1/\sqrt{n+1}+\cdots+1/\sqrt{2n}\to\infty\,,\quad 1/\sqrt{n^2+1}+\cdots+1/\sqrt{n^2+n}\to 1\,.$$

**10.** Determinar os limites quando $n\to\infty$ das sucessões de termos gerais

$$(1+1/2^k+\cdots+1/n^k)/n^k\,,\quad (1+2^?+\cdots+n^?)/n^3\,,$$
$$\sqrt[m]{(n+a_1)\cdots(n+a_m)}-n\,,$$
$$\prod_{k=2}^{n}(k^3-1)/(k^3+1)\,,\quad \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+k/n^2}-1\right),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+k^2/n^3}-1\right),\quad \left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\sqrt[n]{a_i}}{k}\right)^k,$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^k\quad(0<\alpha<1)$$

**11.** Sendo $y_n=x_n-ax_{n-1}$, com $y_0=x_0$ e $|a|<1$, exprimir $x_n$ em $y_n$ e provar que, quando $y_n\to y$, $x_n\to y/(1-a)$.

**12.** Mostrar que a sucessão

$$\sqrt{2}\,,\sqrt{2\sqrt{2}}\,,\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,,\cdots$$

é convergente e determinar o seu limite.

**13.** Sendo $p\,(n)$ o número de factores primos distintos de $n$, provar que $p\,(n)/n\to 0$.

**14.** Provar que $n!\,(a/n)^n$ tende para zero ou $\infty$ conforme $a$ é inferior ou superior a $e$.

**15.** Se $a>b>0$, $\sqrt[n]{a^n+b^n}\to a$. Generalizar, provando que $\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\to$ máx. $a_i$.

**16.** Sendo $a, b>0$, $\dfrac{1}{2}\,(a^{1/n}+b^{1/n})\to\sqrt{ab}$.

**17.** Se $x_n\to 0$, $\log(1+x_n)/x_n\to 1$.

**18.** Se $x_n\to 0$, $(e^{x_n}-1)/x_n\to 1$. (Fazer, por ex., $e^{x_n}=1+1/u_n$, com $u_n\to\infty$).

**19.** Se $y_n\to 0$, $z_n=[(1+y_n)^k-1]/y_n\to k$. (Como $(1+y_n)^k=e^{k\log(1+y_n)}$, vem $z_n=k\,\dfrac{\log(1+y_n)}{y_n}\,\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$, com $x_n=k\log(1+y_n)\to 0)$.

**20.** Provar que, sendo $a_n=\dfrac{1}{n\,(\log n)^{1+\alpha}}$ e $l_n=n\log n$, se tem

$$l_n\,\frac{a_n}{a_{n+1}}-l_{n+1}\to\alpha\,.$$

**21.** Se $a>1$, a sucessão $x_1=a$, $x_2=a^{x_1}, \cdots, x_n=a^{x_{n-1}}, \cdots$ é convergente quando $a\leqslant e^{1/e}$.

# *Problèmes de dépouillements — V**

## Triangles imités du triangle arithmétique de Pascal

par **Pierre Dufresne**

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-3\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-3\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a-2,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-1\end{array}\right.$$

et que si

$$a\geqslant b+1 \quad \text{et} \quad b\geqslant a-3$$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-3\end{array}\right.=\frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!}$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!}+\frac{(a+b-2)\,!}{a\,!\,(b-2)\,!}-\frac{(a+b-2)\,!}{(a+1)!(b-3)\,!}+\cdots$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-3)\,!\,(b+1)\,!}+\frac{(a+b-2)\,!}{(a-4)\,!\,(b+2)\,!}-$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-5)\,!\,(b+3)\,!}+\cdots$$

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | | | | | |
| 4 | | 1 | | | | |
| 5 | | 1 | | | | |
| 6 | | | 1 | | | |
| 7 | | | 1 | | | |
| 8 | | | | 1 | | |
| 9 | | | | 1 | | |
| 10 | | | | | 1 | |
| 11 | | | | | 1 | |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-4\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-4\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a-2,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-2\end{array}\right.$$

et que si

$$a\geqslant b+1 \quad \text{et} \quad b\geqslant a-4$$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-4\end{array}\right.=\frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!}$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!}+\frac{(a+b-2)\,!}{(a+1)\,!\,(b-3)\,!}-$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a+2)\,!\,(b-4)\,!}+\cdots$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-4)\,!\,(b+2)\,!}+\frac{(a+b-2)\,!}{(a-5)\,!\,(b+3)\,!}-$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-7)\,!\,(b+5)\,!}+\cdots$$

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 1 | | | |
| 5 | | 2 | | | |
| 6 | | 2 | 2 | | |
| 7 | | | 4 | | |
| 8 | | | 4 | 4 | |
| 9 | | | | 8 | |
| 10 | | | | 8 | 8 |
| 11 | | | | | 16 |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-5\end{array}\right.$$

On rappelle que si $a>1$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-5\end{array}\right.=$$

$$=N_{(a-2,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-3\end{array}\right.$$

et que si

$$a\geqslant b+1 \quad \text{et} \quad b\geqslant a-5$$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B+1\\ B>A-5\end{array}\right.=\frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)!\,b\,!}$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!}+\frac{(a+b-2)\,!}{(a+2)\,!\,(b-4)\,!}$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a+3)\,!\,(b-5)\,!}+\cdots$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-5)\,!\,(b+3)\,!}+\frac{(a+b-2)\,!}{(a-6)\,!\,(b+4)\,!}$$

$$-\frac{(a+b-2)\,!}{(a-9)\,!\,(b+7)\,!}+\cdots$$

* Conclusão do artigo publicado nos n.os 44, 45, 46, 47 e 52 da G. M.

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 2 | | | |
| 6 | | 3 | 2 | | |
| 7 | | 3 | 5 | | |
| 8 | | | 8 | 5 | |
| 9 | | | 8 | 13 | |
| 10 | | | | 21 | 13 |
| 11 | | | | 21 | 34 |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-6 \end{array} \right.$$

On rappelle que si $a > 1$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-6 \end{array} \right. = N_{(a-2\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B-1 \\ B > A-4 \end{array} \right.$$

et que si

$a > b+1$ et $b \geqslant a-6$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-6 \end{array} \right. = \frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a+3)\,!\,(b-5)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a+4)\,!\,(b-6)\,!} + \cdots - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-6)\,!\,(b+4)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a-7)\,!\,(b+5)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-11)\,!\,(b+9)\,!} -$$

---

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | | | | |
| 6 | 1 | 3 | 2 | | | |
| 7 | | 4 | 5 | | | |
| 8 | | 4 | 9 | 5 | | |
| 9 | | | 11 | 14 | | |
| 10 | | | 13 | 27 | 14 | |
| 11 | | | | 40 | 41 | |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-7 \end{array} \right.$$

On rappelle que si $a > 1$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-7 \end{array} \right. = N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B-1 \\ B > A-5 \end{array} \right.$$

et que si

$a \geqslant b+1$ et $b \geqslant a-7$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-7 \end{array} \right. = \frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a+4)!\,\,(b-6)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a+5)\,!\,(b-7)!} + \cdots - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-7)\,!\,(b+5)\,!} + \frac{(a+b-2)}{(a-8)\,!\,(b+6)!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-13)\,!\,b+11)!} + \cdots$$

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 2 | | | | |
| 6 | 1 | 3 | 2 | | | |
| 7 | 1 | 4 | 5 | | | |
| 8 | | 5 | 9 | 5 | | |
| 9 | | 5 | 14 | 14 | | |
| 10 | | | 19 | 28 | 14 | |
| 11 | | | 19 | 47 | 42 | |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-8 \end{array} \right.$$

On rappelle que si $a > 1$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-8 \end{array} \right. = N_{(a-2\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B-1 \\ B > A-6 \end{array} \right.$$

et si $a \geqslant b+1$ et $b \geqslant a-8$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B+1 \\ B > A-8 \end{array} \right. = \frac{(a+b-2)\,!}{(a-2)\,!\,b\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-1)\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a+5)\,!\,(b-7)\,!} - \frac{(a+b-2)!}{(a+6)\,!\,(a-8)\,!} + \cdots - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-8)\,!\,(b+6)\,!} + \frac{(a+b-2)\,!}{(a-9)\,!\,(b+7)\,!} - \frac{(a+b-2)\,!}{(a-15)\,!\,(b+13)\,!} + \cdots$$

---

| $\theta \backslash b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | | | | | | |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |

*Tableau donnant en fonction de* $\theta$ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B \\ B > A-2 \end{array} \right.$$

On rappelle que:

si $a \geqslant b \geqslant a-2$

$$N_{(a\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B \\ B > A-2 \end{array} \right. = N_{(a-1\,,\,b)} \left| \begin{array}{l} A > B-1 \\ B > A-1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{(a+b-1)\,!}{(a-1)\,!\,b\,!} - \frac{(a+b-1)\,!}{a\,!\,(b-1)\,!} + \frac{(a+b-1)\,!}{(a+1)\,!\,(b-2)\,!} - \frac{(a+b-1)\,!}{(a+2)\,!\,(b-3)\,!} + \cdots - \frac{(a+b-1)}{(a-2)!\,(b+1)\,!} + \frac{(a+b-1)\,!}{(a-3)\,!\,(b+2)\,!} - \frac{(a+b-1)\,!}{(a-4)\,!\,(b+3)\,!} + \cdots.$$

| θ \ t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | | 1 | | | | |
| 4 | | 1 | | | | |
| 5 | | | 1 | | | |
| 6 | | | 1 | | | |
| 7 | | | | 1 | | |
| 8 | | | | 1 | | |
| 9 | | | | | 1 | |
| 10 | | | | | 1 | |
| 11 | | | | | | 1 |

*Tableau donnant en fonction de* θ *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\ B>A-3\end{array}\right.$$

On rappelle que

si $a \geqslant b \geqslant a-3$

$$N_{(a,b)}\left|\begin{array}{l}A>B\\ B>A-3\end{array}\right. =$$

$$= N_{(a-1,b)}\left|\begin{array}{l}A>B-1\\ B>A-2\end{array}\right.$$

$$= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\,b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!} + \frac{(a+b-1)!}{(a+2)!\,(b-3)!} -$$

$$- \frac{(a+b-1)!}{(a+3)!\,(b-4)!} + \cdots - \frac{(a+b-1)!}{(a-3)!\,(b+2)!} +$$

$$+ \frac{(a+b-1)!}{(a-4)!\,(b+3)!} - \frac{(a+b-1)!}{(a-6)!\,(b+5)!}.$$

*Tableau donnant en fonction de* a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=0$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

devient:

$$N_{(a,b,0)}\,[A>B>C] = \frac{a-b}{a+b}\;\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

| b \ a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | 1430 |
| 7 | | | | | | | | | 429 | 1430 |
| 6 | | | | | | | | 132 | 429 | 1001 |
| 5 | | | | | | | 42 | 132 | 297 | 572 |
| 4 | | | | | | 14 | 42 | 90 | 165 | 275 |
| 3 | | | | | 5 | 14 | 28 | 48 | 75 | 110 |
| 2 | | | | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 |
| 1 | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

*Tableau donnant en fonction de* a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=1$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\;\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

devient:

$$N_{(a,b,1)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{b-1}{b+1}\;\frac{(a+b+1)!}{a!\,b!\,1!}$$

| b \ a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | 16.016 |
| 7 | | | | | | | | | 4.004 | 14.586 |
| 6 | | | | | | | | 990 | 3.375 | 9.152 |
| 5 | | | | | | | 240 | 858 | 2.156 | 4.576 |
| 4 | | | | | | 56 | 198 | 486 | 1.001 | 1.848 |
| 3 | | | | | 12 | 42 | 100 | 198 | 350 | 572 |
| 2 | | | | 2 | 7 | 16 | 30 | 50 | 77 | 112 |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | |

*Tableau donnant en fonction de* a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=2$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a,b,c)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{b-c}{b+c}\;\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$$

devient:

$$N_{(a,b,2)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a-2}{a+2}\cdot\frac{b-2}{b+2}\;\frac{(a+b+2)!}{a!\,b!\,2!}$$

| b \ a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | 93.366 |
| 7 | | | | | | | | | 19.448 | 77.350 |
| 6 | | | | | | | | 3.850 | 15.444 | 43.316 |
| 5 | | | | | | | 702 | 2.860 | 8.019 | 18.720 |
| 4 | | | | | | 110 | 462 | 1.300 | 3.003 | 6.125 |
| 3 | | | | | 12 | 54 | 154 | 352 | 702 | 1.274 |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | |

*Tableau donnant en fonction de* a *et de* b *les valeurs de:*

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C]$$

pour $c=3$ dans ce cas particulier la formule

$$N_{(a\,,\,b\,,\,c)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{b-c}{b+c}\, \frac{(a+b+c)\,!}{a\,!\,b\,!\,c\,!}$$

devient:

$$N_{(a\,,\,b\,,\,3)}\,[A>B>C] =$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a-3}{a+3} \cdot \frac{b-3}{b+3}\, \frac{(a+b+3)\,!}{a\,!\,b\,!\,3\,!}$$

| b/a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | 370.500 |
| 7 | | | | | | | | | 63.648 | 277.134 |
| 6 | | | | | | | | 9.856 | 44.200 | 136.136 |
| 5 | | | | | | | 1.274 | 6.006 | 18.900 | 48.620 |
| 4 | | | | | | 110 | 572 | 1.872 | 4.875 | 11.000 |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | |

# A teoria das distribuições

«Há mais de 50 anos que o engenheiro Heaviside estabeleceu as suas regras de cálculo simbólico, numa audaciosa memória onde cálculos matemáticos, deficientemente justificados, são utilizados para a solução de problemas de física. Este cálculo simbólico, ou operacional, não deixou de se desenvolver desde então e serve de base aos estudos teóricos dos electricistas. Os engenheiros utilizam-no sistemàticamente, cada um dentro da sua concepção pessoal, com a consciência mais ou menos tranquila; tornou-se uma técnica «que não é rigorosa mas que dá bons resultados». Depois da introdução por Dirac da famosa função $\delta(x)$, que seria nula em todos os pontos, excepto para $x=0$, e seria infinita para $x=0$, por forma que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = +1$, as fórmulas de cálculo simbólico tornaram-se ainda mais inaceitáveis para o espírito de rigor dos matemáticos. Escrever que a função de Heaviside $Y(x)$, igual a 0 para $x<0$ e a 1 para $x \geq 0$, tem por derivada a função de Dirac $\delta(x)$ cuja própria definição é matemàticamente contraditória, e falar de derivadas $\delta'(x)\,,\,\delta''(x)\,,\cdots$ desta função destituída de existência real, é ultrapassar os limites que nos são permitidos. Como explicar o sucesso destes métodos? Quando uma tal situação contraditória se apresenta, é bem raro que dela não resulte uma nova teoria matemática que justifique, sob forma modificada, a linguagem dos físicos; há nessa mesma situação, uma fonte importante de progresso das matemáticas e da física...

Generalizámos a noção de função, primeiramente pela noção de medida, depois pela de distribuição. $\delta$ será uma medida e não uma função, $\delta'$ uma distribuição e não uma medida. Há já mesmo muito tempo que os teóricos do potencial magnético utilizam os *doublets* ou dípolos, os folhetos ou dupla camada, etc...; mas são todos seres diferentes, de definição aliás duvidosa, sem ligação alguma com as do cálculo simbólico dos electricistas...».

Assim inicia Laurent Schwartz, um dos mais jovens e valorosos matemáticos da actualidade, a sua bela obra em dois volumes, *Théorie des Distributions* [1].

A Redacção da G. M., interessada, ao máximo, em dar realização ao seu objectivo fundamental, ser efectivamente um «jornal dos estudantes de matemática das escolas superiores», «convertendo-se num instrumento de trabalho de reconhecida utilidade», pretende apresentar brevemente aos seus Leitores uma série de artigos de introdução à Teoria das Distribuições.

Tais artigos *devem dirigir-se ao tipo médio de estudante dos dois últimos anos das nossas Universidades*, isto é, *devem pressupor da parte dos seus leitores apenas conhecimentos rudimentares de Análise infinitésimal.* Um problema grave do nosso ensino reside na existência de uma juventude estudiosa que, salvo raríssimas excepções, se encontra a dois passos da vida prática, apenas com as perspectivas adquiridas através duma «sebenta», ou, mais discretamente, de «folhas».

Regosijar-nos-íamos se, como complemento do estudo de tal série de artigos, alguns dos nossos jovens universitários sentissem interesse no prosseguimento e aplicações dum tão recente ramo das matemáticas como o da Teoria das Distribuições.

J. G. T.

---

[1] Hermann & Cie., Editeurs, Paris

# CONSULTÓRIO

Com este número a G. M. inicia uma nova secção na qual serão dadas respostas às perguntas que nos forem dirigidas pelos nossos leitores. Procuraremos sempre que os assuntos sejam tratados por especialistas, com o desenvolvimento necessário, de modo a que a resposta constitua um verdadeiro esclarecimento do assunto.

Pretende-se, deste modo fazer com que a *Gazeta* se torne um elemento útil aos seus leitores e sirva as suas necessidades e preocupações. Esta secção visa, pois, um maior contacto com os leitores cujas perguntas nos indicarão as suas dificuldades, os pontos que mais necessitam ser esclarecidos.

Para os assuntos de maior interesse ou que careçam de um amplo desenvolvimento, as respostas serão dadas em artigos especiais, fora mesmo da secção.

### O que é uma axiomática?

O conceito de axiomática é dos que mais têm evoluído ao longo dos séculos. Distinguiremos aqui duas formas sucessivas de tal conceito: a forma clássica e a forma moderna.

O conceito clássico de axiomática é o que se encontra implícito na teoria das ciências dedutivas, segundo Aristóteles: A designação *ciência dedutiva* aplica-se então a todo o sistema $S$ de *termos* e de *proposições àcerca desses termos*, que se sucedem indefinidamente uns aos outros de tal modo que:

*a*) Toda a proposição que seja ou venha a ser demonstrada a partir de proposições de $S$ pertencerá ainda a $S$.

*b*) Existe em $S$ um número finito de termos (chamados *termos primitivos*), que não podem ser definidos lògicamente, e a partir dos quais se definem todos os restantes termos de $S$ (chamados *termos derivados*).

*c*) Existe em $S$ um número finito de proposições (*os postulados ou axiomas* *), que não se demonstram lògicamente e das quais se deduzem todas as outras proposições de $S$ (*os teoremas*).

Pressupõe-se, além disso, que o sistema $S$ de termos e de proposições diz respeito a *um, e um só, domínio de seres*, cuja existência é postulada. Os termos primitivos corresponderiam a dados da intuição — a conceitos psicològicamente elementares, de apreensão imediata. Anàlogamente, os axiomas proviriam da intuição e teriam assim um carácter de evidência, que permitiria aceitá-los como verdadeiros, sem mais explicações.

Modêlo perfeito e mesmo único, de ciência dedutiva era então a Geometria de Euclides.

A axiomática duma ciência dedutiva seria, naturalmente, o conjunto dos seus axiomas. Uma primeira *nuance*, uma primeira tendência no sentido da evolução do conceito de axiomática, manifesta-se ao ser reconhecida uma certa arbitrariedade na escolha dos termos que hão de figurar como primitivos e das proposições que devem aceitar-se como postulados. Mas o que provoca decididamente a passagem à nova forma do conceito é o aparecimento sensacional das geometrias não-euclideanas, no século passado, com incalculáveis repercussões em todos os sectores do pensamento.

Para dar uma primeira idea do que se entende hoje por «axiomática» começarei por tomar como exemplo a seguinte definição de «conjunto ordenado»:

«Chama-se *conjunto ordenado* todo o conjunto $U$ não vazio no qual esteja definida uma relação binária que designaremos pelo símbolo «$\prec$» (ler: «precede» ou «é anterior a»), de modo que resultem verificadas as seguintes condições:

I. *Dados dois elementos* $x, y$ *de* $U$, *é sempre verificada uma, e uma só, das três hipóteses*:

$$x \prec y, \quad x = y, \quad y \prec x$$

II. *Todas as vezes que, dados três elementos* $x, y, z$ *de* $U$, *se tiver* $x \prec y$ *e* $y \prec z$, *será tambem* $x \prec z$».

(Costuma exprimir-se a condição I, dizendo que a relação $\prec$ é *tricotómica* e a condição II, dizendo que a relação $\prec$ é *transitiva*).

Estamos em presença duma *definição axiomática*; porém, não haja equívocos: o que se define aqui não é o termo «$\prec$» (termo primitivo), mas sim a classe dos conjuntos ordenados ou, o que é equivalente, o conceito de relação de ordem. As condições I, II são os *axiomas* da definição: proposições que envolvem o termo indeterminado «$\prec$» (sinónimo de «precede») e lhe fixam, por assim dizer, os limites da variabilidade, de maneira implícita. Na verdade, o símbolo «$\prec$» pode ser interpretado de infinitos modos diversos, até dentro dum mesmo conjunto $U$. Por exemplo o conjunto de todas as palavras duma língua é um conjunto ordenado, se adoptarmos o conhecido critério de ordenação alfabética; são ainda conjuntos ordenados o conjunto $R$ dos números reais ou o conjunto $N$ dos números naturais, quando o termo

* Antecipamos aqui um pouco o ponto de vista moderno, segundo o qual não há que fazer distinção entre «postulado» e «axioma».

«precede» significa «menor que». Mas não resultará ordenado o conjunto dos números complexos, se adoptarmos por exemplo o seguinte critério:

$a+bi \prec c+di$, se, e só se, $a<c, b<d$ ($a, b, c, d$ números reais; $i^2=-1$), visto não ser então verificada a condição I; porém tal conjunto pode ser ordenado, definindo dum outro modo a relação $\prec$.

Os conjuntos ordenados constituem as chamadas *realizações* da axiomática considerada. Dados dois conjuntos ordenados $U$, $U'$, e designando por $\prec, \prec'$ as respectivas relações de ordem, diz-se que tais conjuntos ordenados são *isomorfos* (ou, em terminologia mais específica: *semelhantes*), quando, entre os elementos $x, y, \cdots$ de $U$ e os elementos $x', y' \cdots$ de $U'$ se pode estabeler uma correspondência biunívoca $x \rightleftarrows x'$, $y \rightleftarrows y'$, $\cdots$, de tal modo que se tenha

$$x \prec y, \quad \text{se, e só se,} \quad x' \prec' y',$$

quaisquer que sejam os elementos $x, y$ de $U$ considerados.

Por exemplo, o conjunto $P$ dos números positivos e o conjunto $R$ dos números reais, com a habitual noção de «menor que», são conjuntos ordenados isomorfos, porque entre os elementos de $P$ e os de $R$ se pode estabelecer a correspondência biunívoca

$$x \rightleftarrows x' = \log x,$$

que *respeita nos dois sentidos* a relação de ordem. Mas o conjunto ordenado $R$ dos números reais não é isomorfo ao conjunto ordenado $N$ dos números naturais: para o reconhecer, basta observar que, dados dois elementos $x, y$ de $R$ tais que $x<y$, existe sempre, pelo menos um outro elemento $z$ de $R$ tal que $x<z<y$; ora esta propriedade não se verifica em $N$.

Diz-se que dois conjuntos ordenados têm o mesmo *tipo de ordem*, quando são isomorfos. Também se dirá neste caso que representam a mesma *solução* da axiomática dos conjuntos ordenados. O facto de existir *pelo menos* uma solução desta axiomática traduz-se dizendo que a axiomática é *compatível* (ou *possível*); o facto de existirem várias soluções (isto é, várias realizações da mesma, *não isomorfas entre si*), exprime-se dizendo que a axiomática *não é categórica*.

Mas nós podemos restringir o domínio das soluções da axiomática, ampliando-a com axiomas *independentes dos primeiros*, isto é, com novas condições que não sejam consequências lógicas de I e II. Por exemplo imponhamos à relação $\prec$ esta outra condição:

III. *Para todo o subconjunto* X *de* U *não vazio existe um elemento* y *de* X *tal que, qualquer que seja o elemento* x *de* X, *se tem* y = x *ou* y $\prec$ x (o que se exprime dizendo que todo o subconjunto $X$ de $U$ não vazio tem um *primeiro* elemento).

Dizem-se *bem ordenados* os conjuntos ordenados que verificam esta condição suplementar. As realizações da axiomática I, II, III são pois os conjuntos bem ordenados.

O conjunto dos números naturais, com a usual relação $<$, é um conjunto bem ordenado. Mas já não o é o conjunto dos números reais: basta observar que, por exemplo o conjunto dos números reais maiores que 1 não tem primeiro elemento; o próprio conjunto $R$ não tem primeiro elemento. Estes simples exemplos provam que o axioma III é independente dos axiomas I, II.

Porém, há conjuntos bem ordenados que não são isomorfos à sucessão dos números naturais. Exemplo: o conjunto dos números

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \cdots, 1, 2, \cdots, m, \cdots$$

ordenados com a habitual relação «menor que». Mas introduzamos este novo axioma:

IV. *Para todo o elemento* x *de* U *que não seja o primeiro*, existe um elemento imediamente anterior a* x, *isto é um elemento* y *de* U *anterior a* x *e tal que, qualquer que seja o elemento* z *de* U *menor que* x, *se tem* z = y *ou* z $\prec$ y.

É fácil ver que, no último exemplo citado, não se verifica a condição IV, porquanto o elemento 1, que não é ali o *primeiro*, não tem antecessor (isto é, elemento imediatamente anterior).

Todavia, a adjunção do axioma IV ainda não conduziu a uma axiomática categórica: são realizações da nova axiomática, não só a sucessão dos números naturais, como ainda todo o conjunto ordenado *finito*.

A categoricidade pode ser atingida com a adjunção dum último axioma, que exclue os conjuntos ordenados finitos:

V. *Para todo o elemento* x *de* U *existe um elemento* y *de* U *tal que* x $\prec$ y (o que se exprime dizendo que não existe em $U$ um *último* elemento).

Com efeito, a axiomática I, II, III, IV, V admite uma única *solução*, constituída por infinitas *realizações* isomorfas à sucessão dos números naturais. *Podemos pois dizer que se trata duma axiomática dos números naturais, com a seguinte reserva: a sucessão dos números naturais fica apenas definida a menos dum isomorfismo.* Na verdade há infinitos conjuntos ordenados, isomorfos a este: a sucessão dos números pares, a sucessão dos números primos, etc. etc. *O que fica na realidade definido é o tipo de ordem de tais conjuntos ordenados.*

---

* O termo «primeiro» define-se fàcilmente a partir do termo «precede», conforme está indicada na condição III.

Note-se que a mais conhecida axiomática dos números naturais não é esta, mas sim a de Peano, em que se toma para primitivo o termo «sucessor de», a partir do qual se define depois o termo «menor que» (enquanto nesta se define «sucessor de» a partir de «menor que») .

———

Mas até agora apenas apresentei exemplos de axiomáticas. Sobre a maneira de chegar a uma concepção geral das axiomaticas no sentido moderno, limitar-me-ei a muito breves e esquemáticas indicações.

Chamarei *estrutura matemática* a todo o conjunto $U$ *(domínio de indivíduos* ou *universo lógico)*, sobre o qual sejam designadas como *primitivas* certas entidades $\alpha, \beta, \cdots$. Estas entidades podem ser: *indivíduos* (elementos de $U$), *classes* (subconjuntos de $U$, famílias de subconjuntos de $U$, etc.) ou *relações* (definidas em $U$ ou em conjuntos construidos a partir de $U$) *.

No exemplo dos conjuntos ordenados há uma só entidade primitiva que é uma *relação binária*. Mas a Matemática apresenta-nos ainda, a cada passo, *relações ternárias*, *relações quaternárias*, etc. (um dos grandes progressos da lógica moderna a respeito da lógica clássica é precisamente o de fazer um estudo sistemático das relações, em pé de igualdade com as classes). Por exemplo, sejam $X, Y, Z$ pontos de variáveis do espaço ordinário e consideremos a expressão

«$X$, $Y$ e $Z$ estão em linha recta»

Trata-se manifestamente, duma *propriedade relativa,* que se verifica para determinados *ternos* de pontos e não se verifica para outros (não terá sentido quando aplicada a pares de pontos, e menos ainda quando aplicada a pontos, individualmente). Diremos então, que a expressão considerada define uma *relação ternária* entre pontos; designando tal relação pelo símbolo $Rt$, convenciona-se escrever a mesma expressão, abreviadamente, tal como segue :

$$Rt\,(X, Y, Z)\,.$$

Anàlogamente, se escrevermos $Tr\,(X, Y, Z)$ como abreviatura da expressão «$X$ está situado entre $Y$ e $Z$», será $Tr$ o simbolo duma relação ternária *distinta* de $Rt$ (há ternos *ordenados* que verificam $Rt$ sem verificar $Tr$); se escrevermos $Eq\,(X, Y, U, V)$ como abreviatura da expressão «a distância de $X$ a $Y$ é igual à distância de $U$ a $V$» será $Eq$ o simbolo duma *relação quaternária*; etc. As relações $Rt$, $Tr$ e $Eq$ são as entidades tomadas para primitivas em algumas axiomáticas da Geometria euclideana (note-se porém que é possível definir $Rt$ e $Tr$ por meio de $Eq$) .

Postas estas considerações preliminares, poderemos dizer que uma axiomática é um conjunto de condições

$$\begin{array}{l} P_1\,(\alpha, \beta, \cdots) \\ P_2\,(\alpha, \beta, \cdots) \\ P_3\,(\alpha, \beta, \cdots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

impostas a certos *simbolos indeterminados* $\alpha, \beta, \cdots$, representativos de entidades definidas sobre um conjunto fundamental $U$, *igualmente indeterminado.* Os símbolos de $\alpha, \beta, \cdots$ serão os *termos primitivos* e as condições impostas a $\alpha, \beta, \cdots$ os axiomas da axiomática em questão,

*Realização* da axiomática será toda a estrutura matemática $[U', \alpha', \beta', \cdots]$ que a verifique, isto é, tal que, substituindo $U$ por $U'$, $\alpha$ por $\alpha'$, $\beta$ por $\beta'$, $\cdots$, todos os axiomas se convertam em proposições verdadeiras. A axiomática dir-se-á *compatível* se admitir pelo menos uma realização.

O conceito de «realizações isomorfas» pode ainda ser definido no caso geral, tal como segue: Dadas duas estruturas $[U_1, \alpha_1, \beta_1, \cdots]$ e $[U_2, \gamma_2, \beta_2, \cdots]$, diremos que estas estruturas são *isomorfas*, relativamente à ordem por que são nomeados os entes primitivos, quando fôr possível aplicar biunìvocamente $U_1$ sobre $U_2$, de modo que $\alpha_1$ se converta em $\alpha_2$, $\beta_1$ em $\beta_2$, etc.*

Daqui decorrem imediatamente os conceitos de «solução» e de «categoricidade» duma axiomática.

O conceito de «axiomática categórica» é o legítimo descendente do conceito clássico de axiomática, tal como o delineamos no início destas considerações. Mas que imensa distância os separa ! Que profunda divergência de pontos de vista !

Agora os termos primitivos já não designam seres bem determinados, dos quais «temos um conhecimento intuitivo imediato»; agora os termos primitivos são simplesmente *indeterminadas,* semelhantes às incógnitas ou variáveis dum sistema de equações.

———

* Também se podem apresentar estruturas matemáticas com mais de um domínio de indivíduos, mas a redução ao caso de um só domínio é sempre possível, que mais não seja considerada a reunião dos primeiros.

* O sentido da palavra «converter» aqui empregada não carece de explicações quando se trata de indivíduos (elementos de $U_1$ $U_2$); Se $\alpha_1$ for uma classe, diremos que $\alpha_1$ se converte em $\alpha_2$, quando $\alpha_2$ fôr a classe dos elementos de $U_2$ correspondentes aos elementos de $\alpha_1$; se $\alpha_1$ for uma relação binária, diremos que $\alpha_1$ se converte em $\alpha_2$, quando $\alpha_2$ for a a relação binária verificada pelos pares ordenados de elementos de $U_2$ correspondentes aos pares ordenados de elementos de $U_1$ que verificam $\alpha_1$; e assim por diante.

E os axiomas estão bem longe de ser aquelas «verdades de tal modo intuitivas, de tal modo elementares, que se nos tornam evidentes»: agora são apenas *condições*, verificadas por certas estruturas, não verificadas por outras. Por sua vez, os *teoremas* relativos à axiomática serão todas aquelas condições *implicadas* pelos axiomas (isto é, que resultam automàticamente verificadas desde que o sejam todos os axiomas).

*O que interessa fundamentalmente é que a axiomática seja compatível, isto é, que exista pelo menos uma sua realização.* Mas aqui levanta-se um problema em que só muito superficialmente posso tocar: *Como averiguar se uma dada axiomática é ou não compatível?*

Quando se trata, por exemplo, duma axiomática de Geometria euclideana, formulada com os termos primitivos $Rt$, $Tr$ e $Eq$, pode obter-se uma realização da axiomatica, do seguinte modo: Chamemos *pontos* aos termos ordenados de números reais, tais como $(0, -1, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0, -1)$, etc. e façamos ainda as seguintes convenções: dados três pontos $X=(x_1, x_2, x_3)$, $Y=(y_1, y_2, y_3)$ e $Z=(z_1, z_2, z_3)$, diremos que «$X, Y, Z$ estão em linha recta» quando as diferenças

$$x_1 - z_1, \quad x_2 - z_2, \quad x_3 - z_3$$

forem ordenadamente proporcionais* às diferenças

$$y_1 - z_1, \quad y_2 - z_2, \quad y_3 - z_3;$$

diremos que «$Z$ está situado entre $X$ e $Y$», quando verificada a hipótese anterior, a constante de proporcionalidade é um determinado número negativo; finalmente, dado um quarto ponto $U=(u_1, u_2, u_3)$ diremos que «a distância de $X$ a $Y$ é igual à distâcia de $Z$ a $U$» quando se tiver

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2=(z_1-u_1)^2+ \\ +(z_2-u_2)^2+(z_3-u_3)^2$$

Pois bém, é facil reconhecer que o conjuto $R^3$ de todos os ternos ordenados de número reais, com as relações $Rt$, $Tr$ e $Eq$ assim definidas, constitui uma estrutura matemática $[R^3, Rt, Tr, Eq]$ que *satisfaz à referida axiomática da Geometria euclideana***. Esta axiomática será pois compatível, *desde que se admita a existência da totalidade dos números reais*. Suponhamos por sua vez provada a existência do conjunto $R$, desde que se admita a existência do conjunto $N$ dos números naturais. Mas existe o conjunto $N$? Por outras palavras:

*É compatível a axiomática dos números naturais?*

HILBERT e os lógicos do sua escola tentaram provar a compatibilidade de certas axiomáticas dos números naturais (ampliadas com axiomas da lógica formal), demonstrando que tais axiomáticas *não são contraditórias*. («Existência» e «não-contradição» são termos inicialmente assumidos como equivalentes, de acordo com a frase célebre de POINCARÉ: «Em Matemática, *existir* significa *ser isento de contradição*»).

O objectivo ideal do programa hilbertiano pode considerar-se inatingível, sobretudo após os resultados sensacionais de GÖDEL, cuja descrição está fora do âmbito deste apontamento. Mas o impulso que tal programa deu às investigações lógicas foi uma recompensa generosa do esforço dispendido. Graças a esse impulso, o mecanismo lógico do pensamento matemático foi dissecado com profundidade e agudeza extremas, fazendo uso do instrumento mais adequado a esse fim: a lógica simbólica. Deu-se início a uma *teoria da definição* e a uma *teoria da demonstração*, que tomam o lugar da lógica formal de ARISTÓTELES e se encontram hoje em pleno desenvolvimento, com repercussões filosóficas e um alargamento de perspectivas que chegam a causar vertigens.

E mais não ouso dizer sobre questões de tal envergadura*.

### Quais as vantagens dos métodos axiomáticos?

A resposta depende, naturalmente, do conceito de axiomática em questão. Se nos reportarmos ao conceito clássico de axiomática, a pergunta parece equivalente a esta outra: «Quais são, em geral, as vantagens das ciências dedutivas, como por exemplo a Geometria de EUCLIDES, a Mecânica de NEWTON ou a Termodinâmica de CLAUSIUS? «Na verdade, basta ter presente a definição de «ciência dedutiva», para se reconhecer que ciência dedutiva não há onde não houver axiomática. *Racionalizar* uma ciência, isto é, torná-la dedutiva (o que, a ser possível, se costuma interpretar como investidura no grau de perfeição máxima) o mesmo é que *axiomatizar* essa ciência. Verdadeiramente, a Geometria de EUCLIDES só foi totalmente racionalizada no século passado, porque só então foi dada uma sua axiomática completa, como é a que figura nos «Grundlagen der Geometrie», de HILBERT. Porém, os arquitectos do edifício

* Aqui o termo «proporcionais» é tomado no sentido com que costuma ser aplicado em geometria analítica, ao enunciar a condição de colinearidade de três pontos dados.

** Prova-se fàcilmente que uma tal axiomática é categórica. Quanto ao problema de saber se o modêlo euclideano se ajusta bem ou não a descrever a realidade empírica, isso não compete pròpriamente ao matemático, mas antes ao físico e ao filósofo.

* A melhor maneira de estar ao corrente sobre o que se passa neste campo é consultar «The Journal of Symbolic Logic».

euclideano foram sem dúvida os antigos, que deixaram traçadas as linhas mestras da edificação, mesmo no que se refere aos fundamentos.

Axiomatizar é necessidade imperiosa, desde que se faça qualquer tentativa séria de construção racional. Porque se eu quero demonstrar uma proposição admitindo como verdadeiras outras proposições, que, por sua vez, foram demonstradas a partir de outras ainda, e assim por diante (ou antes, *para trás*...), tem de de haver por força um termo deste processo; de contrário, estou condenado a uma *regressão ao infinito*, por natureza inconcludente — ou, pior ainda, a um *círculo vicioso*. E o mesmo se diga a respeito das definições. Não me hei-de esquecer de uns apontamentos de Física que me vieram em tempos às mãos, no qual figuravam, uma após a outra, estas duas *definições:*

*Corpo* — é toda a porção limitada de matéria.

*Matéria* — é aquilo de que os corpos são formados.

O autor, se não era um ironista, não se pode dizer que fosse um hábil prestidigitador de ideias, como tantos que por aí andam, a deitar poeira em olhos de incautos.

Se passarmos porém ao conceito moderno de axiomática, as vantagens são de outra ordem, *principalmente no que se refere às axiomáticas não categóricas*. Basta lembrar que são deste tipo as axiomáticas dos conceitos de grupo, de anel, de corpo, de espaço vectorial, de espaço topológico, de espaço métrico, de espaço vectorial topológico, de espaço normado, de anel topológico, de grupo ordenado, de conjunto parcialmente ordenado, de reticulado, de álgebra de BOOLE, etc. etc.. Neste sentido, o método axiomático (ou, como também se diz, *formal* ou *abstracto*) é a principal característica das matemáticas modernas. Cada teoria *formal* engloba, com a indeterminação dos seus termos primitivos inúmeras *possibilidades de concretização:* — inúmeras teorias *específicas* que se podem desenrolar nos mais variados ramos do saber. As teorias formais constituem deste modo, sistemas de raciocínios, mecanismos mentais, construídos uma vez por todas e prontos a serem utilizados em bloco, na primeira ocasião.

Uma das vantagens deste método é, como se vê desde logo, uma considerável economia de pensamento, evitando a repetição de raciocínios análogos em campos diversos, com terminologia e notações diversas.

Mas há também aquela aproximação de ramos distintos da Matemática sob uma teoria comum, que tem sido sempre uma fonte de estímulos fecundos.

Com esta nova orientação, a Matemática ganha muito, certamente, em rigor lógico e em valor estético; e, embora haja quem diga que se afasta assim da intuição criadora, a verdade é que se torna mais apta a penetrar no âmago das questões, por um maior poder de esquematização e de separação entre o que é acidental e o que é essencial.

É preciso acrescentar que a Matemática moderna utiliza ainda, frutuosamente, certas axiomáticas categóricas, que não encontram directa interpretação intuitiva no mundo empírico Tal é, por exemplo. a axiomática do espaço hilbertiano — espaço com infinitas dimensões, dotado duma geometria muito semelhante à do espaço euclideano ordinário. Trata-se duma axiomática, que admite infinitas realizações, todas isomorfas entre si: as mais usadas são aquelas em que os pontos se apresentam, ou como sucessões infinitas de números (tais que a série dos respectivos quadrados seja convergente), ou como classes de funções de quadrado somável. Estes dois tipos de realização correspondem às duas orientações diversas que se podem seguir na estruturação matemática da Mecânica quântica — a da «Mecânica matricial» de HEISENBERG-BORN-JORDAN e a da «Mecânica ondulatória» de SCHRÖDINGER — cuja equivalência formal induziu VON NEUMANN a estabelecer a respectiva axiomática unificadora *.

## Todas as ciências dedutivas devem ser axiomatizadas?

Creio que já respondi em parte a esta questão. A resposta pode formular-se nos seguintes termos:

*Atendendo à própria definição de ciência dedutiva no sentido aristotélico, uma ciência que não estiver axiomatizada não é dedutiva* **.

Naturalmente, há nesta resposta um certo extremismo que convém mitigar. Por exemplo, seria contrário a todo o bom-senso pretender ensinar nos liceus uma Geometria *cem-por-cento dedutiva*. O ensino da Geometria elementar como se admite hoje correntemente em pedagogia, deve começar por ter um carácter intuitivo—experimental, com a preocupação de conduzir o aluno, a pouco e pouco, ao pensamento racional. O contacto com as primeiras formas de demonstração — com aquela possibilidade de provar rigorosamente leis geométricas *não evidentes*, sem fazer

---

* VON NEUMANN chama «espaço de HILBERT» à primeira das realizações consideradas e «espaço de HILBERT abstracto» ao tipo das estruturas isomorfas à primeira, isto é, àquilo que, segundo a nossa terminologia, é a *solução* (única) da axiomática do espaço hilbertiano.

** Quando se trata, por exemplo, da teoria do espaço hilbertiano, ou bem se considera tal teoria como um capítulo da teoria dos números reais, ou bem se considera como teoria *autónoma*, e então precisará de ser axiomatizada. Por sua vez, a teoria dos números reais, se não for considerada como fazendo parte da aritmética dos inteiros (ou da teoria das grandezas contínuas), precisará de ser axiomatizada. *Em última análise*, uma axiomática deverá sempre existir.

verificações experimentais, mas apenas admitindo verdades elementares *evidentes* e desenvolvendo raciocínios — é um momento grandioso, de súbita e luminosa revelação, comparável ao momento histórico em que o espírito grego descobre o racionalismo — em que a razão toma conhecimento de si mesma. A partir de então, o ensino deve encaminhar-se ràpidamente do intuitivo para o racional, embora, no curso dos liceus não seja possível a racionalização completa. *Deveria contudo aludir-se então à possibilidade de lá chegar, mediante uma axiomática conveniente.*

Não pretendo com isto insinuar que, no ensino superior, o racional deve substituir por completo o intituivo (o que mesmo, de resto, seria metafìsicamente impossível). Muito pelo contrário, tanto na teoria como na prática do ensino, o ideal que me norteia é: *conciliar o máximo de racionalidade com o máximo de intuitividade.*

No ensino superior, pode e deve fazer-se um largo emprego dos métodos axiomáticos; mas perderá sentido e vitalidade o ensino que não se apoiar em sólidas intuições, criadas pelos problemas reais que ao ser humano se levantam, nesta árdua luta pela existência à superfície da Terra.

NOTA — Tenho o dever de lembrar que a introdução dos modernos métodos axiomáticos em Portugal se deve ao Professor António Aniceto Monteiro, cuja acção no domínio das matemáticas, entre nós, foi notòriamente profunda e renovadora, apesar de se ter desenvolvido num período infelizmente tão breve. É sobretudo na perspectiva do tempo (apenas são passados uns dez anos), que o alcance da sua obra pode ser devidamente apreciado. O que há de essencial nas ideas acima explanadas, dele o recebi, transmitido com o cunho da sua personalidade, com aquele fervor comunicativo que o situa, fundamentalmente, no campo da actividade científica pura e desinteressada.

José Sebastião e Silva

# MOVIMENTO CIENTÍFICO

## CONTRIBUIÇÃO LATINO-AMERICANA AO PROGRESSO CIENTÍFICO

O Centro de Cooperação Cientifica da Unesco para a America Latina publicou recentemente um fascículo da série *Latin American Contribution to Scientific Progress* dedicado à Matemática. Este fascículo, único no género, constitue um guia às contribuições mais importantes, anteriores a 1951, a esse ramo da ciência.

A sua preparação foi confiada ao matemático espanhol DR. LUIZ A. SANTALÓ, que se encontra radicado na Argentina há vários anos, contando também com a colaboração dos DRS. GODOFREDO GARCIA (do Perú), RAFAEL LAGUARDIA (do Uruguai), e MÁRIO O. GONZÁLEZ (de Cuba). Das 32 páginas do texto, 4 são dedicados a aspectos comuns aos países latino-americanos, 15 à Argentina, 3 ao Brasil, 2 a Cuba, 2 ao México, 3 ao Peru, 3 ao Uruguai e 3 conjuntamente ao Chile, Venezuela, Porto Rico e Paraguai. As pessoas e instituições que desejem obter um exemplar desse fascículo devem se dirigir ao referido Centro, Bulevar Artigas 1320, Montevideu. O Centro de Cooperação da Unesco pretende suplementar o presente fascículo com outros, publicados de dois em dois anos e relativos aos periodos em questão.

L. Nachbin

A Redacção da *G. M.* aproveita a oportunidade para apresentar a tradução do capítulo referente ao Brasil, que nos dá ideia da natureza desta publicação da Unesco, ao mesmo tempo que fornece elementos acerca do trabalho dos matemáticos brasileiros e da acção do professor DR. ANTÓNIO MONTEIRO durante a sua estadia no Brasil.

*

* *

Há no Brasil duas escolas de matemáticas: uma em S. Paulo outra no Rio de Janeiro. A primeira recebeu o seu inicial impulso dos matemáticos italianos contratados e, mais tarde, do francês ANDRÉ WEIL e do norteamericano O. ZARISKI, entre outros; ela publica o *Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo.* No Rio de Janeiro, a Fundação G. Vargas iniciou, em 1942, a publicação da excelente Summa Brasiliensis Mathematicae e em 1948, publicou sob a direcção de A. MONTEIRO numa série de monografias intitulada *Notas de Matemáticas*, importante colecção sobre diversos tópicos das matemáticas modernas de carácter não meramente exposicional, mas onde cada capítulo contém, também, contribuições originais ao assunto desenvolvido. Outro jornal brasileiro, duma natureza mais geral, mas onde se encontram muitos trabalhos de matemática, são os *Annaes da Academia Brasileira de Ciências.*

Nos últimos anos, o trabalho do português A. MONTEIRO exerceu uma influência fundamental na escola do Rio. Aparte os seus primeiros trabalhos, os publicados por MONTEIRO depois da sua chegada ao Brasil (1945) devem ser considerados como produção Latino-Americana. É além disso pertinente a menção aqui dos seus trabalhos sobre filtros e ideais, *Notas de Matemáticas,* N.os 2 e 5, sobre a aritmética dos números primos, *C. R. Acad. Sci.*, Paris 1947, e em geral na aritmética dos espaços topológicos, que são uma contribuição de singular significado no campo da topologia geral.

Um brilhante discípulo de MONTEIRO é L. NACHBIN, um jóvem expoente da moderna matemática no Brasil, autor de numerosos trabalhos sobre topologia geral, álgebras de BOOLE e análise funcional. Escreveu, entre outros, os seguintes artigos: «Combinação de Topologias» e «Espaços vectoriais topológicos», *Notas de Matemáticas,* N.os 1 e 4 (1948), «On linear Expansions» *Summa Brasil. Math.*, 1946, «Une proprieté caractéristique des algèbres Booliennes» *Port. Math.* 1947, três comunicações intituladas «Sur les espaces uniformes ordonnés» *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1948, «Sur les algèbres denses des fonctions differentiables sur une variété» *C. R. Acad. Sci.*, Paris 1949, «A characterization of the normed vector ordered Spaces of continuous Functions over a compact Space» *American Journal of Mathematics*, 1949.

No campo da teoria dos conjuntos, espaços abstractos e funções reais deve mencionar-se o livro de Lelio I. Gama, Introdução à Teoria dos Conjuntos e vários artigos originais e comunicações: «Sur l'additivité du contigent» *C. R. Acad. Sci.*, Paris 1938. «Sur l'additivité de l'accumulatif» *C. R. Acad. Sci.*, Paris 1938, «Limites d'ensemble dans les espaces abstraits» *Summa Brasil. Math.*, 1947, «Sobre uma integral imprópria» *An. Acad. Bras. Ci.*, 1941, contribuindo para um problema discutido por B. LEVI e B. GROSS e «Notion de proximité et espaces à structure spheroidal» *Amer. J. Math.*, 1945.

São também no campo das funções reais os trabalhos de M. MATOS PEIXOTO particularmente aqueles que dizem respeito a noção de «convexidade» nos quais põe em evidência a importância e aplicações desta noção dando, também, diferentes generalizações da mesma: «Convexidade das curvas» *Notas de Matemática*, N.º 6, 1948, «On the Existence of Derivatives of generalized convex Functions» *Summa Brasil. Math.*, 1948, «Generalized convex Functions and second order differential Inequalities» *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949.

Outro representante da Escola do Rio é J. ABDELHAY com o seu trabalho sobre «Reticulados vectoriais» *Notas de Matemáticas*, N.º 3, 1948.

Um notável trabalho tem sido realizado por OMAR CATUNDA na Escola de S. Paulo no campo da Teoria das Funções e cálculo das variações: Sui sistemi di equazioni alle variazioni totali in più funzionali incogniti» *Atti della reale Accademia d'Italia*, 1941, «Sobre uma modificação da fórmula de CAUCHY» *Summa Brasil. Math.*, 1944.

C. DA SILVA DIAS tem desenvolvido trabalhos de investigações sobre a teoria das funções analíticas e sobre a teoria dos grupos e espaços topológicos: «Sobre el concepto de funcional analitico» *An. Acad. Bras. Ci.*, 1943, «Aplicaciones de la teoria de los funcionales analiticos al estudio de la solución de las ecuaciones diferenciales de orden infinito», *An. Acad. Bras. Ci.*, 1943. F. FURQUIM DE ALMEIDA tem trabalhado em análise algébrica e outros campos: «Sobre una fórmula de Cipolla» *Summa Brasil. Math.*, 1946.

# NOTICIÁRIO

## UNIVERSIDADE DO RECIFE

Mais um Amigo que a vida nos leva para longes terras.

O Dr. Manuel Augusto Zaluar Nunes foi contratado professor catedrático para a cadeira de *Geometria Analítica,* da Faculdade de Ciencias e Letras, e para a cadeira de *Cálculo das Probabilidades — Teoria dos Erros — Aplicações* (curso do 2.º ano), da Faculdade de Engenharia, da Universidade do Recife.

A «G. M.» congratula-se pelo facto, na medida em que ele representa a justa consagração de um valor que à causa do desenvolvimento dos estudos da matemática tem dedicado o seu melhor esforço.

Esse esforço é bem patente no seu trabalho na «*Gazeta de Matemática*», e na «*Portugaliae Mathematica*» o qual garantiu, quase desde o inicío, a continuidade destas publicações; trabalho ingrato, sem brilho, mas tão útil e necessário que, podemos mesmo dizer, sem ele, de há muito que quer a «*Gazeta*» quer a «*Portugaliae*», teriam deixado de se publicar.

A «*Gazeta*», sentindo bastante a falta do seu mais esforçado trabalhador conta, no entanto, com a sua necessária colaboração e espera que o seu exemplo seja estimulo que nos auxilie a vencer as dificuldades inevitáveis em publicações desta natureza. Só o seu afastamento de Portugal, que nos enche de tristesa, nos obriga a tomar a tarefa que o Dr. Manuel Zaluar conseguiu sempre levar a termo com animo que desejamos bem, não nos faleça a nós.

*

* *

Outro Amigo e colaborador da Gazeta igualmente contratado para professor catedrático das mesmas Faculdades da Universidade do Recife, é o Dr. Alfredo Pereira Gomes que, desde há anos, trabalhava em França como Attaché de Recherches du Centre National de la Recherche Scientifique.

Na Faculdade de Ciências e Letras vai reger a Cadeira de *Análise de Matemática* I, e na Faculdade de Engenharia a cadeira de *Calculo Infinitesimal* (cadeira do 1.º ano).

A «G. M.», regosija-se com o facto que atesta suficientemente o valor do Dr. Pereira Gomes como investigador e professor, e deseja-lhe, no seu novo cargo, as maiores felicidades.

## CONGRESSOS E CONCURSOS

Como foi resolvido no último congresso de Màlaga de 1951, o próximo Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências celebrar-se-á de 27 de Setembro a 4 de Outubro do corrente ano na cidade de Oviedo. A Sociedade Portuguesa de Matemática enviou aos seus associados uma circular solicitando a apresentação de trabalhos para a participação na referida reunião. M. Z.

---

A General Reinsurance Company Ltd. of Amsterdam, no sentido de dar incentivo ao estudo do Tratado de Resseguro conhecido por Excess of Loss estabeleceu uma competição onde serão concedidos prémios aos autores das três melhores contribuições ao problema da tarifação, sob o ponto de vista actuarial ou estatístico.

Para particularidades e condições poderão os interessados escrever para:

«General Reinsurance Company Ltd. — Competition Secretary—388, Herengracht—Amsterdam-Holanda».

---

Em 1954 realisa-se em Madrid o XIV o Congresso Internacional dos Actuários. Segundo informação do Instituto dos Actuários Portugueses, damos a seguir indicação de alguns temas que ali poderão vir a ser discutidos:

*a)* Condições que devem concorrer num risco para se tornar segurável.

*b)* Sobre os problemas actuáriais do resseguro, em particular do que respeita ao Ramo Vida.

*c)* Sobre os meios de obter o equilíbrio financeiro do organismo segurador (privado, público, etc).

*d)* Inquérito documentário sobre o ensino actuarial nos diversos países representados no Comité Permanente dos Congressos Internacianais de Actuários.

## ACTIVIDADES DO INSTITUTO DOS ACTUÁRIOS PORTUGUESES

Foi criado neste Instituto um Núcleo de Estudos de Cálculo das Probabilidades e Estatística Matemática que se propõe promover uma actualização de conhecimentos sobre alguns problemas fundamentais e estimular, na medida do possível, uma comparticipação nacional na sua investigação. Adopta de começo como forma de actividade a exposição histórica e crítica das contribuições fundamentais para o avanço dos problemas, seguida de troca de esclarecimentos e discussão.

Iniciou-se o estudo do problema das «Leis dos Grandes Números» com algumas exposições do Dr. Gustavo de Castro que se prolongarão. O Prof. Sebastião e Silva fez uma exposição sobre «Axiomáticas». Prevê-se o tratamento duma axiomática do Cálculo das Probabilidades e uma introdução ao estudo dos Processos Estocásticos, visando as aplicações actuariais.

## MANIAC

Um grupo de matemáticos e engenheiros electrotécnicos dirigidos por John von Neumann idealizou e construiu um cérebro electrónico, o *MANIAC* (Analisador matemático, integrador numérico e calculador), capaz de realizar em meia hora càlculos complicados que o seu antecessor ENIAC (Integrador e calculador numérico, electrónico), leva um dia a efectuar. Tem ainda a vantagem de um tamanho pequeno e peso reduzido. Foi construido pelo laboratório de Los Alamos, Universidade de Berkeley (Califórnia, U. S. A.).

## INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE S. PAULO

O professor Cândido Lima da Silva Dias, do Instituto da Engenharia de S. Paulo, projectou a criação de um Instituto de Matemáticas, a formação de uma biblioteca especializada, publicação de livros e revistas, contrato de especialistas estrangeiros, introdução de um regime de bolsas para estudantes e de investigadores «full-time». A ideia central é a de um instituto destinado exclusivamente à investigação matemática pura, de grande interesse para os invetigadores de física, estatística, aerodinâmica e outros ramos de matemática aplicada. E salienta que já existem institutos similares, nomeadamente: Institut for Advanced Study, Princeton (U. S. A.); Colégio de França, Paris; Instituto de Alta Matemática, Roma; Istituto de Matemáticas, Rosário (Argentina).

## CENTRO INTERNACIONAL DE CÁLCULO MECÂNICO

No dia 6 de Dezembro fundaram as Nações Unidas, por iniciativa da Unesco, um Centro Internacional de Cálculo, cuja sede é em Roma.

Este Centro tem três funções principais: investigação, educação e serviço de consulta e cálculo.

Para isso criará e manterá um ou mais laboratórios de diferentes tipos de máquinas de calcular; dirigirá investigações relacionadas com a utilização e aperfeiçoamento dos meios de cálculo; fomentará a colaboração entre os institutos de cálculo de todo o mundo, coordenando os seus trabalhos e estimulando as suas actividades; elaborará um programa de estudo, no plano internacional, de problemas de ciência pura vinculados com o cálculo; assegurará a publicação e distribuição dos resultados das suas investigações e a de outros trabalhos de carácter análogo; procurará formar especialistas; procurará assegurar o funcionamento de um serviço de consultas e instituirá e manterá um serviço de cálculo.

NOTA — *As últimas três notícias foram transcritas da «Revista de la Sociedad Cubana de Ciências Físicas y Matemáticas», Vol. 3, N.º 1, Janeiro de 1953 — HABANA.* (R. L. G.)

# MATEMÁTICAS ELEMENTARES

## PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

**Ensino Liceal — Ano de 1952 — Exame do 3.º ciclo — Prova escrita de Matemática — 2.ª época.**

**ATENÇÃO — Se não souber resolver qualquer alínea duma questão, não deixe de tentar as seguintes. A resposta a cada uma delas não depende das anteriores.**
**As respostas só são válidas com as respectivas justificações.**

**3611** — Dados os pontos $A(4, -1)$ e $B(2, -5)$ determine: *a*) A equação da recta que passa por $A$ e é perpendicular a $AB$.

*b*) A equação da circunferência cujo diâmetro é o segmento $AB$ definido pelos dois pontos dados.

R: *A equação da recta* AB *é dada pela equação* $(y+1):(-1+5)=(x-4):(4-2)$ *ou seja* $y=2x-9$; *a recta que lhe é perpendicular e passa pelo ponto* A *será* $y+1=-1/2\,(x-4)$.

b) *O centro da circunferência tem de coordenadas* $x=(4+2):2=3$ *e* $y=(-1-5):2=-3$. *O raio da circunferência é dado por* $r={}^1/_2\sqrt{(4-2)^2+(-1+5)^2}=$ $={}^1/_2\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$. *A equação pedida é por isso* $(y+3)^2+(x-3)^2=5$.

**3612** — Determine $R$ de modo que o polinómio $P(x)=2x^4+6x^3-2kx+3k$ admita a raiz $x=-2$.

R: *Para isso deverá ser* $2\times16-6\times8+4k+3k=0$ *ou* $7k-16=0$ e $k=16/7$.

**3613** — Considere a equação $(2c-1)x^2-2(c+1)x+1=0$ em que $c$ é um parâmetro real. *a*) Justifique que, para qualquer valor de $c$, as raízes da equação são reais e diferentes. *b*) Determine $c$ de modo que o número $-1$ fique compreendido no intervalo das raízes da mesma equação.

R: a) *Como* $\Delta=(c+1)^2-(2c-1)=c^2+2$ *é sempre positivo as raízes da equação são reais e diferentes para qualquer valor de* c. *Note-se no entanto que para o valor* $c={}^1/_2$ *a equação não é do 2.º grau, mas sucede que quando* c *tende para* ${}^1/_2$, *uma das raízes tende para* $\infty$ *e a outra para* ${}^1/_3$.

b) *Quando o coeficiente de* $x^2$ *é positivo, isto é, quando* $c>{}^1/_2$ *o trinómio tomará para* $x=-1$ *o sinal contrário ao do coeficiente de* $x^2$, *isto é, deverá ser negativo, quer dizer* $(2c-1)+2(c+1)+1<0$ *ou seja* $4c+$ $+2<0$ *ou* $c<-\dfrac{1}{2}$, *incompatível com* $c>{}^1/_2$. *Quando for* $c<{}^1/_2$ *deverá ser* $c>-{}^1/_2$; *isto é, deve ser* $-{}^1/_2<c<{}^1/_2$.

**3614** — Dois números, cada um dos quais menores que 100, tem respectivamente *oito* e *doze* divisores. Determine esses números sabendo que o seu *m. d. c.* é 20.

R: *Como* m. d. c. *é* $20=2.^2 5$, *dois e cinco são os factores primos comuns aos dois números. Assim* $a=$ $=2^m 5.^n p$ *e* $b=2.^r 5^s q$ *onde* r *e* m *são iguais ou maiores que dois. Tendo* a *oito divisores, e por ser* $8=2.\,2.\,2=4.\,2$, *vê-se fàcilmente que* 1º) a *só tem dois factores primos portanto* 2 *e* 5; 2º) *que o expoente de* 5 *não pode ser* 3 *por ser* $a<100$, *logo* $a=2.^3 5=40$.

*Como o número de divisores de* b *é* $12=3.4=2.6=$ $=2.2.3$ *vê-se também que* b *deve ter três factores primos que o expoente de* 2 *é* 2 *e que o expoente dos outros é* 1. *Nestas condições o terceiro factor só pode ser* 3, *visto ser ainda* $b<100$. *Logo é* $b=2.^2 3.5=60$.

**3615** — *a*) Calcule os arcos positivos e inferiores a $2\pi$ radianos, soluções da equação $sen\,2x=-\sqrt{3}/2$.

*b*) Determine $f'(x)$ sabendo que $f(x)=(sen\,x+$ $+\cos x):sen\,x$. Simplifique o resulto.

*c*) Do ponto $P$ conduziram-se tangentes, $PA$ e $PB$ à circunferência de centro $C$. Sabendo que o ângulo $APB$ mede $75°\,45'$ e que o segmento $PA$, compreendido entre $P$ e o ponto de tangência $A$, mede 437,80 metros, determine o raio da circunferência. Resolva por logaritmos e indique o resultado, aproximando a menos de 1 centímetro.

R: a) *Os arcos inferiores a* $2\pi$ *cujo* seno *é* $-\sqrt{3}/2$ *são os arcos* $4\pi/3$ *e* $5\pi/3$, *quer dizer* $2x=4\pi/3$ *ou* $x=2\pi/3$ *e* $2x=5\pi/3$ *ou* $x=5\pi/6$.

b) $f'(x)=[(\cos x-\text{sen}\,x)\,\text{sen}\,x-\cos x\,(\text{sen}\,x+$ $+\cos x)]:\text{sen}^2 x=[-\text{sen}^2 x-\cos^2 x]:\text{sen}^2 x=-$ $-1/\text{sen}^2 x=-\text{cosec}^2 x$.

c) *o ângulo* APO *mede* $(75°\,45'):2=37°\,52'\,30''$. *No triângulo rectângulo em* A, [AOP], $\overline{AO}$, *que é um cateto, é o raio da circunferência. Assim será* $\overline{AO}=$ $=\overline{AP}\,\text{tg}\,(A\hat{P}B:2)$ *isto é,* $\overline{AO}=437,80\times\text{tg}\,37°\,52'\,30''$ *e* $\log\overline{AO}=\log 437,80+\log\text{tg}\,37°\,52'\,30''=2,64128+$ $+\bar{1},89086=2,53214$ *daqui se conclue ser* $\overline{AO}=$ $=340,54$ m.

**Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas, e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1952 — Ponto n.º 2.**

**3616** — Provar que a soma de três números impares (positivos) consecutivos nunca é um número primo. R: *Sejam* $2n-1$, $2n+1$ e $2n+3$ *os três números impares consecutivos; a sua soma é* $6n+3=\dot{3}$ *que não é, por isso, um número primo.*

**3617** — Determinar o número inteiro compreendido entre 900 e 1000 que dividido por 7 dê resto 4 e dividido por 13 dê resto 11. R: *Seja* $900<N<1000$. *Pelas condições do enunciado é* $N\equiv 7n+4=13r+11$ *ou seja* $7n-13r=7$, *equação cujas soluções gerais, em números inteiros, são dadas por* $n=1+13m$ *e* $r=7m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Daqui resulta* $N=91m+$ $+11$ *e das duas primeiras desigualdades obtem-se* $m>9$ *e* $m<10\frac{79}{91}$, *isto é,* $m=10$ *e* $N=921$.

**3618** — Se dois números inteiros tiverem o máximo divisor comum $d$ e o menor múltiplo comum $m$ e se um deles for $a$, quanto vale o outro? Enuncie e demonstre o teorema que justifica a resposta. R: *Vale* $(m\,d):a$, *porque o produto de dois números é igual ao produto do seu m. d. c. pelo seu m. m. c.*

**3619** — Determinar o valor de $n$ para o qual o número de arranjos de $n+1$ objectos 4 a 4 é igual a 36 vezes o número de combinações de $n$ objectos 2 a 2. R: $(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)=36\,n\,(n-1):2$, *equação equivalente a* $n^2-n-20=0$ *da qual só serve a solução positiva* $n=5$.

**3620** — Determinar o parâmetro $m$ da equação $16x^4-4mx^2+m-1=0$ de modo que as raízes estejam em progressão aritmética. R: *As raízes da equação são* $\pm 1/2$ *e* $\pm 1/2\sqrt{m-1}$. *Dado que há dois pares de números simétricos, que devem ser reais, a escolha do primeiro termo da progressão determina a dos restantes, tendo em conta que existem, desde logo, iguais as diferenças* $(1/2)-(1/2\sqrt{m-1})$ *e* $(-1/2\sqrt{m-1})-(-1/2)$. *Assim se o primeiro termo for* $-1/2$ *o segundo será* $-1/2\sqrt{m-1}$, *o terceiro* $+1/2\sqrt{m-1}$ *e o quarto,* $+\frac{1}{2}$. *A razão, neste caso, será* $r=-1/2\sqrt{m-1}+1/2$ *ou* $r=+1/2\sqrt{m-1}+1/2\sqrt{m-1}$ *donde é* $1/2(1-\sqrt{m-1})=$ $=\sqrt{m-1}$, *e daqui resulta* $m=10/9$. *Obteriamos o mesmo valor de* m *se o primeiro termo fosse* $+\frac{1}{2}$ *e o segundo* $+1/2\sqrt{m-1}$. *Se o primeiro termo for* $-1/2\sqrt{m-1}$ *e o segundo* $-1/2$, *será* $r=-\frac{1}{2}(1-$ $-\sqrt{m-1})$ *ou* $r=1/2-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ *e daqui* $1-$ $-\sqrt{m-1}=-2$ *e portanto* $m=10$. *Se considerássemos* $+1/2\sqrt{m-1}$ *como primeiro termo obteriamos o mesmo valor para* m.

**3621** — Se a equação $ax^2+bx+c=0$, de coeficientes reais, tem a raiz $\alpha+\beta i$, onde $\alpha$ e $\beta$ são reais $\beta\neq 0$ e $i=\sqrt{-1}$, qual é a outra raiz? Enuncie e demonstre o teorema que justifica a resposta. R: *A outra raiz é* $\alpha-\beta i$. *Porque se a outra raiz for* $u+vi$ *como a soma das raízes* $(\alpha+\beta i)+(u+vi)=$ $=(\alpha+u)+(\beta+v)\,i$ *é um número real* $-b/a$, *terá que ser* $\beta+v=0$ *ou seja* $v=-\beta$. *Por outro lado como o produto* $(\alpha+\beta i)\,(u-\beta i)=(\alpha u+\beta^2)+(u-\alpha)\,\beta i$ *é também um número real* $c/a$, *deverá ser* $u-\alpha=0$, *pois* $\beta\neq 0$, *e então é* $u=\alpha$.

Enunciados dos n.os 3611 a 3621 de J. Silva Paulo.

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

## MATEMÁTICAS GERAIS E COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

**I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 4 de Outubro de 1952.**

I

**3622** — Dada a função $y=(x-1)\,e^{\frac{1}{x-1}}$ para $x\neq 1$ e $y=0$ para $x=1$, estude a sua continuidade em $x=1$. Determine os seus extremos e a equação da tangente à curva no infinito. R: *Pondo* $x=1-h$ *vem* $y(1-h)=-h\cdot e^{-\frac{1}{h}}$ *donde* $y(1-0)=0$; *pondo* $x=1+h$ *vem* $y(1+h)=he^{\frac{1}{h}}=\frac{e^{1/h}}{1/h}$ *donde* $y(1+0)=$ $=\infty$. *A função é descontinua no ponto* $x=1$, *mas continua à esquerda; a descontinuidade é de primeira espécie e a oscilação é visivelmente igual a* 1.

*A derivada* $y'=e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\frac{x-2}{x-1}$ *é negativa com* x *no intervalo aberto* (1,2) *e positiva fora do intervalo fechado* (1,2). *Portanto função crescente em* $(-\infty,1)$, *decrescente em* (1,2) *e crescente em* $(2,\infty)$. *Há um mínimo em* $x=2$ *de valor* e.

*A equação da tangente no ponto* $M(x,y)$ *pode escrever-se:*

$$Y=\left[e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\frac{x-2}{x-1}\right]X+\left[y-x\frac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}\right]$$

*e, fazendo com que* M *descreva qualquer dos ramos infinitos que a curva possui no 1.º e 3.º quadrantes obtemos como posição limite daquela recta* $Y=X$.

II

**3623** — Desenvolva em série de potências de $\frac{1}{x}$ a seguinte função racional $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ e determine o respectivo intervalo de convergência. R: *Pondo* $z=\frac{1}{x}$ *vem* $\frac{z^2}{1-z^2}=z^2(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots)=$ $=\sum_0^\infty z^{2n+2}$ *e então teremos* $\frac{1}{x^2-1}=\sum_0^\infty\frac{1}{x^{2n+2}}$, *válido para* $|z|=\frac{1}{|x|}<1$ *ou* $|x|>1$.

III

**3624** — Defina determinante característico e, dado o sistema

$$\begin{cases} x-y+z=3\\ 2x-3y-3z=0\\ 3x-y-4z=4\\ ax+by-9z=-2\\ ax+3by+5z=8\end{cases}$$

calcule $a$ e $b$ de forma que este sistema seja compatível.

Determine a solução do sistema. R: *Tomemos a matriz dos coeficientes*

$$\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\\ 3 & -1 & -4\\ a & b & -9\\ a & 3b & 5\end{matrix}\right\|$$

*Chama-se determinante principal a um qualquer determinante de ordem máxima, não nulo, tirado desta matriz*

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=17$$

*São determinantes característicos aqueles que se obtem de* $\Delta_p$ *orlando com os coeficientes duma equação não principal, dispostos em linha, e os termos independentes, dispostos em coluna.*

$$\Delta C_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -3 & 0\\ 3 & -1 & -4 & 4\\ a & b & -9 & -2\end{vmatrix}=51a+17b-119$$

$$\Delta C_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -3 & 0\\ 3 & -1 & -4 & 4\\ a & 3b & 5 & 8\end{vmatrix}=51a+51b-51$$

*Para que as equações sejam compatíveis deverão ser nulos os característicos*

$$\begin{cases} 3a+b-4=0\\ a+b-1=0\end{cases}\quad \text{ou}\ \begin{cases} b=-2\\ a=3\end{cases}$$

*A solução determina-se com a regra de* CRAMER

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{17} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{17} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{17} = 1$$

Enunciados e solução dos n.os 3622 a 3624 de J. R. Albuquerque

**I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência ordinário — 13 de Março de 1953.**

I

**3625** — Calcular:

$$\lim_{x=0} (\cos\ x)^{\frac{1}{x^2}}$$

**3626** — Estudar e representar gràficamente a função:

$$y = \cos\,(3 \cdot \mathrm{arc\ sen}\, x)$$

**3627** — A função

$$w = \frac{a+bz}{c+dz}$$

toma os valores

$$-\frac{i}{2}\,;\,\frac{3-4i}{5}\,;\,-2i$$

respectivamente, para $z=0$, $z=1$ e $z=\infty$.

Mostrar que o afixo de $w=u+iv$ descreve a circunferência de raio 1, com centro na origem dos eixos $(u^2+v^2=1)$, quando o afixo de $z=x+iy$ descreve a mesma circunferência $(x^2+y^2=1)$.

II

**3628** — Estude a representação geométrica da potenciação e da radiciação de números complexos.

Averigue em que condições o afixo da potência de expoente $n$ dum número complexo poderá coincidir com o afixo de uma das determinações da raiz de índice $n$ do mesmo complexo.

**3629** — Estabeleça os conceitos de limites e de derivadas laterais. Considere as duas funções

$$y = \frac{|\,x\,|}{x} \quad \text{e} \quad y = |\,x\,|$$

no intervalo $(-a\,,a)$. Ser-lhes-ão, nesse intervalo, aplicáveis, respectivamente, os teoremas de CAUCHY e de ROLLE? Justifique.

**3630** — Defina função composta, de uma só variável final, e deduza a regra de derivação correspondente.

Considere a função $z=f(u\,,v)$, com

$$\begin{cases} u = g\,(x\,,y) \\ v = h\,(x\,,y) \end{cases}$$

e, por analogia, deduza as regras de derivação de $z$ em ordem a $x$ e a $y$.

**I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência extraordinário — 14 de Março de 1953.**

I

**3631** — Determinar a ordem do infinitésimo $y=1-\cos x-x^2/2$ em relação a $x$.

**3632** — Estudar e representar gràficamente a função: $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$ $(a>b>0)$.

**3633** — Dada a função $w = \dfrac{z+i}{iz+1}$ determine os pontos $(x,y)$ para os quais ela toma, respectivamente, valores reais e valores imaginários puros.

Qual é o afixo de $z$ cujo transformado é a origem dos eixos no plano dos $uv$? $(w=u+iv;\ z=x+iy)$.

II

**3634** — Defina representação conforme e relacione este conceito com o de analiticidade de uma função.

Verifique que a função $w=\mathrm{sen}\, z$ é analítica e calcule a sua derivada.

Sendo $z=x+iy$, determine as curvas transformadas dos eixos $xx$ e dos $yy$.

**3635** — Diga o que entende por função monotónica num intervalo e se é sempre possível a sua inversão.

Verifique, pelo teorema de LAGRANGE, que se uma função tem derivada de sinal constante em todos os pontos de um intervalo, então ela é monotónica nesse intervalo.

**3636** — Estabeleça o conceito de derivada para uma função de duas variáveis.

Como aplicação, considere uma função $z=f(u)$, onde $u=x+g(y)$, e verifique que, se $f$ e $g$ forem duas funções deriváveis, se tem:

$$\frac{\partial z}{\delta x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Enunciados dos n.os 3625 a 3636 de J. H. Arandes.

**I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame ordinário — 13 de Março de 1953 — Parte teórica.**

**3637** — Considere o grupo $R$ dos números inteiros, no qual a operação de grupo é a soma ordinária. Considere o grupo $\mathfrak{C}$ dos complexos da forma $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot (1+i)^n$, onde $n$ é inteiro, e no qual a operação do grupo é o produto. Dado $n$, estude a correspondência $n \to \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot (1+i)^n$. Diga se se trata dum homomorfismo. No caso afirmativo, diga qual é o invariante $\mathfrak{N}$, em $R$, tal que $\mathfrak{C} \simeq R/\mathfrak{N}$.

**3638** — Considere os dois vectores que ligam a origem das coordenadas aos dois pontos $(4, -2, -4)$ e $(6, -3, 1)$. Mostre que os dois vectores são linearmente independentes.

**3639** — Suponha que a sucessão $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ de números reais tende para um limite $z_0$. Mostre que a sucessão dos seus valores absolutos tende para o limite $|z_0|$.

**3640** — Tome o plano $OAB$, cujo traço $OA$, no plano $Oxy$, é a bissectriz do ângulo recto $xOy$; depois, tome a bissectriz $OB$ do ângulo recto $AOz$. Quais são as coordenadas do ponto do infinito da recta $OB$?

**3641** — Demonstre a continuidade, para todo o valor de $x$, da função $\operatorname{sen}(2x+5)$.

**3642** — Considere um conjunto $\mathfrak{C}$ de números limitado inferiormente. O número $\alpha$, limite inferior principal de $\mathfrak{C}$, define-se como limite inferior dos números $\eta$, tais que há uma infinidade de números de $\mathfrak{C}$ inferiores a $\eta$. Demonstre que $\alpha$ também se pode definir como o limite superior dos números $\xi$, tais que há apenas um número finito de números de $\mathfrak{C}$ inferiores a $\xi$.

**I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame extraordinário — 19 de Março de 1953 — Parte teórica.**

**3643** — $\mathfrak{G}$ é um grupo e $\mathfrak{G}'_1$ e $\mathfrak{G}'_1$ são dois sub-grupos tais que $\mathfrak{G}'_1$ é invariante em em $\mathfrak{G}_1$. Seja $\mathfrak{H}$ um sub grupo de $\mathfrak{G}$. Prove:

a) $\mathfrak{H}'_1 = \mathfrak{G}'_1 \cap \mathfrak{H}$ é invariante em $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$;

b) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}'_1$ é isomorfo a um sub-grupo de $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'_2$.

**3644** — Tome a sucessão de imaginários $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$. Diz-se que ela tende para um limite $z_0$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir $N$ tal que

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \text{ quando } n > N.$$

Suponha $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ números reais tendendo para $a_0$; depois suponha $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ números reais tendendo para $b_0$. Demonstre que a sucessão $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \cdots, a_n + ib_n, \cdots$ tende para o limite $a_0 + ib_0$.

**3645** — Tome no plano $y=1$ a recta $R$ que é bissectriz do ângulo $PAQ$, inclinada de 45° sobre o plano $xy$. Diga quais são as coordenadas do seu ponto no infinito.

**3646** — Verifique que a função $f(x, y) = \dfrac{y^2 x^2}{x^2 + y^3}$ é uma função contínua de $x$, quando o ponto $(x, y)$ se aproxima do ponto $(0, 0)$, percorrendo uma recta que passa pela origem. A continuidade subsiste, ainda que o ponto $(x, y)$ se mova sobre o eixo $Ox$, continuando a aproximar-se da origem das coordenadas.

**3647** — Considere um conjunto $C$ de números, limitado, superiormente. O número $\bar{\alpha}$ limite superior preciso de Cauchy (limite principal de $C$) define-se como o limite superior dos números $\eta$, tais que há uma infinidade de números de $C$ superiores a $\eta$. Demonstre que $\bar{\alpha}$ também pode ser definido como o limite inferior (ínfimo) dos números $\xi$, tais que há apenas um número finito de números de $C$ superiores a $\xi$.

**F. C. L. — Complementos de Álgebra — 26 de Fevereiro de 1953.**

**3648** — Suponha $\{\mathfrak{G} = \mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{G}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{G}_i \supseteq \mathfrak{G}_{i+1} = (1)\}$ uma série normal de $\mathfrak{G}$. Se $\mathfrak{H}$ é um sub-grupo de $\mathfrak{G}$, mostre que $\{\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_1 \supseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i \supseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i+1} = (1)\}$ é uma série normal de $\mathfrak{H}$. Em seguida, prove que os factores da segunda série normal são isomorfos a sub-grupos dos factores da 1.ª série.

**3649** — Suponha $\mathfrak{S}$ um anel com elemento um. Considere $\mathfrak{S}$ como um grupo abeliano com os seguintes operadores: os elementos de $\mathfrak{S}$, aplicados à direita de $\mathfrak{S}$. Veja como pode definir os endomorfirmos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}$.

**3650** — $\mathfrak{S}$ é um anel com elemento um, gerado pelos seus ideais direitos simples. Prove que $\mathfrak{S}$ é uma soma directa dum número finito de ideais direitos simples.

Enunciados dos n.os 3637 a 3650 de A. Almeida Costa

N. R. — Por falta de espaço só no próximo número serão publicadas as soluções dos n.os 3625 a 3636, bem como os enunciados e soluções de pontos de outras disciplinas. Deste facto pedimos desculpa aos nossos Leitores e Colaboradores.

*A Redacção*

# PROBLEMAS

## Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

**3651** — Se no $\Delta[ABC]$, $\sphericalangle A = 2 . \sphericalangle B$, então $a^2 = b(b+c)$.

**3652** — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x^4y^2 + 16x^3y + 16x^2 = 4y^2 - 4xy^3 + x^2y^4 + 3x^2y^2 \\ 2x^2y + 4x + 2y - xy^2 = xy \end{cases}$$

Secção Média

**3653** — Seja $B$ o ponto, distinto da origem, em que a recta $y = x \operatorname{tg} \alpha$ encontra a curva $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, e seja $A$ o ponto, também distinto da origem, onde o eixo dos $xx$ encontra a mesma curva. Mostre que $\overline{AB} = 10 \operatorname{sen} \alpha$.

**3654** — Seja $f(x)$ um polinómio racionalmente irreductível e $\alpha$ uma raiz complexa da equação $f(x)=0$. Seja $g(x)$ um polinómio de coeficientes racionais tal que $g(\alpha) \neq 0$. Mostrar que existe um polinómio $h(x)$, de coeficientes racionais e grau menor do que o de $f(x)$ tal que $g(\alpha) \cdot h(\alpha) = 1$.

SECÇÃO SUPERIOR

**3655** — Seja $F=R(\sqrt{2})$ o corpo que se obtem por adjunção de $\sqrt{2}$ ao corpo $R$ dos números racionais, isto é, o corpo cujos elementos são todas as funções racionais de $\sqrt{2}$ com coeficientes em $R$. Mostre que todos os inteiros do corpo $F$ são da forma $a+b\sqrt{2}$ onde $a$ e $b$ são inteiros de $R$. (Note que se chama inteiro do corpo quadrático $F$ toda a raiz duma equação quadrática $x^2+a_1x+a_2=0$ onde $a_1$ e $a_2$ são inteiros do corpo $R$).

**3656** — Provar que a transformação

$$Y = \log\left(\frac{1}{y} \operatorname{sen} x\right) \qquad X = y \operatorname{cotg} x$$

é uma transformação de contacto.

## Resolução dos problemas do concurso propostos no n.º 52

**3553** — Apresentou a solução completa o Sr. José Machado Gil a qual se publica:

Segundo o enunciado, terá de ser, na base 8, $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{a}{c}$ ou $\overline{ab} \cdot c = a \cdot \overline{bc}_{(8)}$. Donde $(a \cdot 8 + b)c = (b \cdot 8 + c) a_{(10)}$ e $ac \cdot 8 + bc = ab \cdot 8 + ac$ (I) ou $ac = bc + 8g$ (II). Substituido em (I) $ac$ pelo seu valor, vem $ac = ab + g$. Consequentemente $ab + g = bc + 8g$ ou $b(a-c) = 7g$, indicação de que 7 divide um dos factores do primeiro membro.

Para $b=7$ vem $a-c=g$ e (II) dá $ac=8a-c$ ou

$$a = \frac{c}{8-c}$$

No máximo é $c=7$ e consequentemente $a=7$; para $c=6$ vem $a=3$; para $c=4$ vem $a=1$. Temos assim as soluções do problema: $\dfrac{37}{76}$ e $\dfrac{17}{74}$. Únicas, porque não pode ser $b=\dot{7}$, nem $a-c=\dot{7}$, quando a base é 8 e $c \neq 0$. Exclui as soluções com $a=b=c$ como parece que pretende o enunciado.

Apresentou solução incompleta o Sr. J. Vinha Novais.

**3554** — Apresentaram soluções certas os Srs. J. Vinha Novais e J. Machado Gil; publica-se a solução deste último.

Traço por $B$ e por $M$ respectivamente $\overline{BO}$ e $\overline{MA'}$ paralelos a $\overline{AD}$. Sejam $O$ o ponto de intersecção de $\overline{BO}$ com a paralela a $\overline{CD}$, que passa por $M$; e $A'$ o ponto de intersecção de $\overline{MA'}$ com $\overline{AB}$; e $O'$ o ponto de intersecção de $\overline{MO}$ com $\overline{AD}$.

Represento $\overline{BO} = h$ e $\overline{MO} = d$. É $d=2h$ e $V_2$ a soma dos volumes gerados por $[O'MBA]$ e por $[O'DM]$

$$V_2 = \frac{1}{3} h\left[\pi a^2 + \pi(a+2h)^2 + \sqrt{\pi^2 a^2 (a+2h_1)^2}\right] + \\ + \frac{1}{3}(a-h)\pi(a+2h)^2$$

Por outro lado $V_1$ é a diferença entre o volume gerado por $[ADMA']$ e o gerado por $[BMA']$

$$V_1 = \frac{1}{3}(a+2h)\left[\pi a^2 + \pi h^2 + \sqrt{\pi^2 a^2 h^2}\right] - \frac{1}{3}\pi h^2\, 2h$$

Donde

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(a+2h)(a^2+h^2+ah) - 2h^3}{h\left[a^2+(a+2h)^2+a(a+2h)\right]+(a-h)(a+2h)^2} = \frac{13}{22}$$

$$\frac{a^2+3h^2+3ah}{a^2+6h^2+6ah} = \frac{13}{22}$$

e

$$4h^2 + 4ah - 3a^2 = 0$$

com as raízes $\dfrac{-3a}{2}$ e $\dfrac{a}{2}$.

É solução do problema $h = \dfrac{a}{2}$, ou, o que é o mesmo, $M$ é extremo da mediana do trapézio.

**3555** — Apresentaram soluções os Sr. J. Machado Gil e J. Vinha Novais; publica-se a solução deste último.

É condição necessária e suficiente para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{x}\right)=1$ que $\left|\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{x}\right)-1\right|$ seja um infinitamente pequeno.

Ora,

$$\left|\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}\right)-1\right| = \left|\frac{I(x)}{x}-1\right| = \\ = \left|\frac{M(x)}{x}\right| = \frac{|M(x)|}{|x|}$$

e como $|M(x)| < 1$, será

$$\frac{|M(x)|}{|x|} < \frac{1}{|x|}$$

e

$$\frac{|M(x)|}{|x|} < \delta \ (\delta \text{ arbitrário}) \text{ para } x > \frac{1}{\delta}$$

o que demonstra ser $\dfrac{|M(x)|}{|x|}$ um infinitamente pequeno.

**3556** — Enviaram soluções correctas os Srs. J. Vinha Novais e J. Machado Gil; publicamos a solução deste último.

Nos pontos onde é $\frac{1}{x} \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $\neq \pm \infty$, com $n$ inteiro, positivo ou negativo, a função

$$y = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x} = \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{x}$$

é contínua, por ser o produto de duas funções contínuas nesses pontos. Para $x = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, vem $y = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = +\infty$ e $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + 0\right) = +\infty$ e $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - 0\right) = +\infty$. Estes pontos são de continuidade imprópria. Para $x=0$, é $\frac{1}{x} = \pm\infty$ e $\overline{y(+0)} = +\infty, \underline{y(+0)} = 0$ e $\overline{y(-0)} = +\infty, \underline{y(-0)} = 0$. Este ponto é de descontinuidade infinita de 2.ª espécie.

O Sr. Vinha Novais ainda nota que a «origem é ponto de acumulação do conjunto $x = \frac{2}{(2k \pm 1)\pi}$».

**3557** — Não foram recebidas soluções deste problema

A aceleração do ponto será devida apenas à variação da direcção da componente variável da velocidade; normal, portanto, a essa direcção. O movimento é pois central, de centro $0$: $|a| = v\frac{d\theta}{dt}$, $[P(\rho, \theta)]$, ou, exprimindo na constante das áreas, $|a| = v\frac{c}{\rho^2} = \frac{k}{\rho^2}$. A fórmula de Binet permite determinar imediatamente a equação da trajectória:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c}{v(\cos\theta + 1)} \quad \text{(cónica)}$$

**3558** — Não foram recebidas soluções deste problema.

Basta observar que, sendo $\frac{r_i}{f'(r_i)}$ o resíduo de $\frac{z}{f(z)}$ no ponto $r_i$, é $\int_\gamma \frac{z}{f(z)} d = 0$, em que $\gamma$ representa um contorno à Jordan envolvendo globalmente todos os pontos $r_i$.

# BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

**Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.**

**99** — HAO WANG, et M^c NAUGHTON, ROBERT — **Les sistemes axiomatiques de la théorie des ensembles** — Gauthier-Villars — Paris — 1953.

É este o IV volume da Collection de Logique Mathématique — Série A, dirigida por M^me Destouches — Février. Os autores são, o primeiro, professor da Universidade de Harvard e o segundo da Universidade de Ohio, e ambos tem dado a sua contribuição para o estudo das questões que o livro aborda. O livro dá, principalmente, uma panorâmica do estado actual da Teoria dos Conjuntos expondo os diversos sistemas de axiomas propostos para a sua construção. É particularmente útil aos que se querem iniciar no estudo axiomatico da teoria dos conjuntos e nos métodos de investigação usados neste capítulo da matemática. A rica e abundante bibliografia que termina o livro permite ao estudioso procurar as demonstrações e o desenvolvimento de qualquer parte dos assuntos abordados sintèticamente neste livro, dado o seu reduzido número de páginas (cerca de 50). Nos dois últimos capítulos, em especial, os autores chegam ao limite do conhecimento actual sobre a matéria (consistência e força dos diversos sistemas). Para se ter um ideia dos assuntos tratados damos os títulos dos diversos capítulos da obra.

I — Cantor e a teoria dos conjuntos, de um ponto de vista ingénuo.

II — Teoria dos tipos.

III — A teoria dos conjuntos de Zermelo.

IV — A teoria dos Conjuntos de Von Neumann-Bernays.

V — Os Sistemas da Teoria dos Conjuntos de Quine.

VI — Algumas Teorias dos Conjuntos mais fracas.

VII — A força dos Sistemas.

Bibliografia.

J. S. P.

# GAZETA DE MATEMÁTICA

**Três números publicados em 1952**

**Número avulso: 17 escudos e 50 centavos**

**Assinatura relativa a 1953 (3 números) 40 escudos**

## PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

## 2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

## CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1953 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

## ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

## NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

| | |
|---|---|
| N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto) | 40$00 |
| N.os 12 e 15 a 49, cada número. . . . . . . | 12$50 |
| N.º 50 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 60$00 |
| N.os 51 e 52, cada número . . . . . . . . . | 17$50 |

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

---

**ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»**

**concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais**

**PREÇO ESC. 17$50**

---

**DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:**
**EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO**

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282