GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XV N.° 59 DEZEMBRO 1954

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa - N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA - N. — Telef. 771943

ANO XV – N.º 59 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO – 1954

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 771943 — LISBOA-N.

Teoria dos espaços localmente convexos e suas aplicações à Análise

por ***Gottfried Köthe***

(Excerto da conferência proferida na Academia das Ciências de Lisboa em 6-V-54 e publicada pela Biblioteca dos Altos Estudos, em tradução de **Jaime Campos Ferreira**).

A Análise funcional conta actualmente cerca de 60 anos de existência. A ideia de considerar as funções como elementos de um espaço com um número infinito de dimensões e de encarar os operadores integrais e diferenciais como transformações de um tal espaço num outro, desenvolveu-se com bastante lentidão, de maneira que só nos nossos dias se alcançou uma teoria com generalidade suficiente para conter, como casos particulares, todos os espaços funcionais de que há necessidade na Análise.

A primeira teoria célebre da Análise funcional, a das equações integrais de Fredholm, não saía do campo das funções contínuas num intervalo $I=[a,b]$ – o espaço $C(I)$, como hoje é designado. Foi Hilbert quem reconheceu que o espaço adequado à teoria das equações integrais é o espaço L^2, das funções mensuráveis de quadrado somável, espaço que recebeu o nome desse matemático.

A teoria dos espaços de Hilbert desenvolveu-se ràpidamente, tornando-se um instrumento muito potente na Análise. Hoje está pràticamente acabada e sai do quadro da teoria geral dos espaços funcionais. Vale a pena mencionar o seu interesse actual na Física teórica, onde fornece a base matemática para a física do átomo.

Durante muito tempo a teoria geral dos espaços funcionais lineares viveu à sombra da teoria dos espaços de Hilbert. De facto, além dos espaços L^p das funções de p-ésima potência integrável, considerados por F. Riesz, e dos próprios espaços de Hilbert, pouco mais se conhecia na altura em que S. Banach (por volta de 1920) fundou a teoria dos espaços normados, que hoje se designam por espaços de Banach quando são completos. Esta teoria, de uma grande simplicidade, contém teoremas de profundo alcance na Análise. O seu teorema central será talvez o de Hahn-Banach, sobre o prolongamento dos funcionais lineares contínuos de um subespaço ao espaço inteiro.

Quanto a aplicações da teoria dos espaços normados, podem citar-se as que foram realizadas pela escola polaca sobre as séries ortogonais e os métodos de somação de séries divergentes; convirá também lembrar que o teorema de Schauder e Leray sobre a existência de pontos fixos de certas transformações não lineares, talvez o maior sucesso de toda a teoria, fornece como casos particulares teoremas de existência relativos a equações às derivadas parciais não lineares bastante complicadas.

Mas já Banach sentia que a noção de espaço normado era muito pouco geral. Se considerarmos, por exemplo, o espaço $C(R)$ das funções contínuas sobre toda a recta real, com a topologia natural da convergência uniforme sobre os intervalos finitos, já não teremos um espaço normado, mas um espaço (F) – ou de Fréchet – que é ainda metrisável, mas de uma maneira um pouco artificial. Banach generalizou alguns dos seus teoremas aos espaços (F), mas não obteve uma teoria completa. A dificuldade residia na circunstância de o espaço dual, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre um espaço (F), não ser já um espaço (F), o que impossibilitava a aplicação dos métodos da teoria de Banach. Convirá observar que o espaço dual de $C(R)$ é o espaço de certas medidas sobre a recta, certamente digno de lugar numa teoria geral dos espaços lineares.

Outro ponto que vale a pena referir é que uma parte central da Análise, a teoria das funções analíticas, era pràticamente inacessível aos métodos de BANACH: o mais simples dos espaços que aqui se podem considerar, o das funções holomorfas num conjunto aberto do plano complexo, é já um espaço (F) não normável.

Também o espaço das funções reais indefinidamente deriváveis num intervalo $[a, b]$ é um espaço (F) não normável.

Impunha-se então desenvolver uma teoria, que fosse por um lado bastante geral para abranger todos os espaços de grande interesse na Análise, por outro não tão geral que excluísse a possibilidade de obter teoremas profundos. Ao encontro desta necessidade é que surge a teoria dos espaços localmente convexos que só nos últimos cinco anos alcançou a sua forma talvez definitiva.

Em lugar de se dar uma norma $\|\chi\|$ sobre um espaço linear E (como no caso dos espaços normados), supõe-se dada uma classe $\{p_\alpha(\chi)\}$ de seminormas, e introduz-se uma topologia $\mathfrak{T}$ definindo as vizinhanças da origem a partir dos conjuntos $\mathfrak{U}_{\alpha,\varepsilon}$ de todos os $\chi \in E$ tais que $p_\alpha(\chi) < \varepsilon$. Se a topologia $\mathfrak{T}$ for separada, o espaço obtido diz-se localmente convexo.

O que torna esta teoria mais difícil do que a dos espaços de BANACH é a necessidade de empregar os instrumentos da moderna topologia geral, espaços uniformes, filtros, etc., em vez dos métodos mais simples que são suficientes nos espaços métricos. Todavia deve notar-se que, mesmo no caso dos espaços de BANACH, os teoremas sobre a convergência fraca exigem na verdade os instrumentos topológicos, porque a convergência fraca é a noção de convergência da topologia fraca, a qual não é metrisável. Desta forma têm os métodos modernos contribuído também para esclarecer e ampliar a teoria clássica de BANACH.

Indicarei agora, apenas em traços largos, o desenvolvimento da teoria geral dos espaços localmente convexos.

A noção de espaço localmente convexo e os primeiros teoremas sobre estes espaços foram estabelecidos por J. VON NEUMANN em 1935. Em 1938, J. WEHAUSEN suprime uma hipótese supérflua de numerabilidade da definição de VON NEUMANN. Mas a teoria geral mantém-se pouco desenvolvida até 1942, ano em que, num trabalho de J. DIEUDONNÉ sobre a teoria de BANACH, aparece a noção de dualidade fraca, bem como as demonstrações de alguns teoremas relativos à topologia fraca. O trabalho de DIEUDONNÉ vem generalizar certos resultados que O. TOEPLITZ e eu próprio tínhamos obtido desde 1934, sobre uma classe especial de espaços (a que demos o nome de espaços perfeitos) cujos elementos são sucessões de números complexos. Os espaços perfeitos são bastante manejáveis, fornecem fáceis exemplos e contra-exemplos, e por esta razão a respectiva teoria poude dar algum estímulo ao desenvolvimento da teoria geral.

Mas o referido trabalho de DIEUDONNÉ não marca ainda o verdadeiro início da fase definitiva.

Só em 1949 aparece uma memória de DIEUDONNÉ e L. SCHWARTZ intitulada «La dualité dans les espaces (F) et $(L\,F)$», que contém toda a aparelhagem de noções topológicas e de métodos gerais de que a teoria viria a servir-se. Neste trabalho utilizam-se os resultados profundos sobre os espaços localmente convexos que G. W. MACKEY obteve, sob forma predominantemente algébrica, em 1945 e 1946. E é então principalmente o jovem matemático A. GROTHENDIECK (tem sòmente 25 anos de idade), quem desenvolve a teoria geral dos espaços localmente convexos em vários trabalhos, alguns ainda não publicados.

Não tentarei fazer aqui um esboço do conteúdo da teoria geral, bastará mencionar que se conhecem hoje muito bem os duais dos espaços (F), sobretudo por obra de DIEUDONNÉ, SCHWARTZ e GROTHENDIECK, e que se sabe com precisão quais os espaços localmente convexos em que são verdadeiros os teoremas centrais da teoria de BANACH.

Falarei agora das aplicações.

Foi a necessidade de uma definição precisa do conceito de distribuição que conduziu DIEUDONNÉ e SCHWARTZ ao seu trabalho sobre os espaços (F) e $(L\,F)$. A noção de distribuição, sensacional descoberta de SCHWARTZ, que veio alargar e unificar de uma forma surpreendente a análise real clássica, não pode definir-se precisamente sem a teoria dos espaços localmente convexos. Os espaços de que se necessita não são já mesmo espaços (F), mas limites indutivos de sucessões de espaços (F), chamados espaços $(L\,F)$.

A definição de distribuição dada por SCHWARTZ é a seguinte: uma distribuição sobre a recta é um funcional linear contínuo sobre o espaço $\mathfrak{D}$ (espaço do tipo $(L\,F)$), constituído pelas funções indefinidamente deriváveis com suporte compacto sobre a recta.

Se se pretende seguir o desenvolvimento da teoria das distribuições e das suas aplicações aos diversos ramos da Análise, sente-se a necessidade de conhecer a teoria dos espaços localmente convexos, ou pelo menos algumas partes não muito elementares desta teoria.

Outro campo de aplicações é constituído pela teoria da integração sobre os espaços localmente compactos, generalização das teorias da integração e da medida, que obteve recentemente, no livro de BOURBAKI sobre a integração, uma forma baseada nos espaços localmente convexos. As medidas sobre um espaço localmente compacto K são também definidas como elementos do espaço dual de certo espaço de funções contínuas sobre K.

Passemos a um terceiro campo de aplicações, a teoria das funções analíticas, que como já disse, se manteve inacessível aos métodos de BANACH. Em 1937, O. TOEPLITZ reconheceu que certos espaços de funções analíticas, por exemplo o das funções inteiras, eram espaços perfeitos. TOEPLITZ conseguiu demonstrar vários teoremas clássicos da teoria das funções inteiras com os métodos gerais dos espaços perfeitos, e reconhecer a dualidade entre o espaço das funções inteiras e o das funções analíticas na origem.

Por outro lado, existia desde 1930 uma teoria bastante desenvolvida dos funcionais analíticos, de L. FANTAPPIÈ e da sua escola. Afastados das noções da escola de BANACH, os fundamentos desta teoria não eram de forma alguma simples.

E assim, embora há muito se sentisse a necessidade de englobá-la numa teoria mais geral, é só em 1946 que J. SEBASTIÃO E SILVA consegue dar à teoria de FANTAPPIÈ uma nova base, na qual, introduzindo o espaço $\mathfrak{F}(C)$ das funções localmente analíticas sobre um compacto C, permite demonstrar que, na sua maior parte, ela cabe no quadro da teoria dos espaços localmente convexos.

Note-se que os espaços $\mathfrak{F}(C)$, cuja importância na análise complexa é evidente, não são também espaços (F), mas limites indutivos de espaços de BANACH. Nova ilustração do facto de que a generalidade das noções da teoria moderna era imposta já pelos exemplos mais clássicos.

A estes resultados de J. SILVA liga-se toda uma série de trabalhos cujo objectivo é o estudo dos espaços $\mathfrak{F}(C)$ e de outros espaços mais gerais de funções analíticas que tomam valores num espaço localmente convexo qualquer. Citarei junto do nome de J. SILVA os de L. NACHBIN [15], SILVA DIAS [2], GROTHENDIECK [7], TILLMANN [20] e o meu próprio [10] (1). Creio bem que nesta direcção será possível obter ainda muitos resultados de grande interesse.

Para não ficar exclusivamente em generalidades, vou tentar dar-vos uma impressão mais precisa sobre um problema que estudei no meu trabalho relativo às distribuições de fronteira («Randverteilungen») das funções analíticas. Escolho essa questão, não só por ser acessível mesmo aos não especialistas da teoria dos espaços localmente convexos, como também porque espero que as noções que nela intervêm serão úteis na análise clássica.

(1) Os números entre colchetes referem-se à Bibliografia, que se encontra no final. (N. da R.).

Seja $f(z)$ uma função holomorfa para $|z|<1$. O problema do comportamento de $f(z)$ quando z se aproxima da circunferência $K\equiv(|z|=1)$ é um problema antigo. Sabe-se que há casos em que $f(z)$ é ainda analítica sobre K, ou pelo menos contínua. Mas existem também funções de fronteira que pertencem só a um espaço L^p, isto é, que são apenas funções de p-ésima potência integrável à LEBESGUE. E, na maior parte dos casos, não existe mesmo nenhuma função definida sobre K que possa ser considerada como prolongamento por continuidade de $f(z)$ à fronteira, porque esta função se torna demasiado patológica quando z se aproxima de K.

Tudo isto é pouco claro, e talvez pareça impossível integrar estes casos divergentes num quadro onde se organizem de uma maneira simples. Pois, como vamos ver, a teoria dos espaços localmente convexos vem permitir uma tal organização e até de uma forma bastante directa.

Observe-se primeiro que as funções $\chi(z)$, analíticas sobre a circunferência K (e portanto sobre um conjunto aberto contendo essa circunferência) constituem um espaço localmente convexo $A(K)$, caso particular dos espaços $\mathfrak{F}(C)$ introduzidos por J. SILVA.

Como se vê imediatamente, as funções $\chi(z)$ de $A(K)$ são precisamente as que admitem um desenvolvimento de LAURENT da forma

$$\chi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\xi_n z^n,$$

com os coeficientes ξ_n sujeitos à única condição de existir um número natural $k>1$ e um número positivo M tais que

$$|\xi_{|n|}|\leqslant M\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \qquad n=0,1,2,\cdots$$

Poderemos então representar $\chi(z)$ pelo vector $\varphi=(\xi_n)$, e o espaço perfeito $\mathfrak{A}(K)$, constituído por todos os vectores φ, será topològicamente isomorfo a $A(K)$.

Designemos por $A(K)'$ o espaço dual de $A(K)$, isto é o espaço cujos elementos são os funcionais lineares contínuos sobre $A(K)$. Não darei agora a definição exacta da topologia de $A(K)$ que é um pouco complicada; mas indico a seguir um teorema sobre os espaços perfeitos que fornece uma representação bastante simples dos elementos dos $A(K)'$:

Todos os funcionais lineares contínuos $u(\varphi)$ sobre um espaço perfeito E podem representar-se como vectores $u=(\nu_n)$, em que os ν_n devem submeter-se à condição única de que o produto escalar $u\varphi=\sum\nu_n\xi_n$ seja absolutamente convergente para todo o $\varphi\in E$; nestas condições ter-se-á $u(\varphi)=u\varphi$ para todo o φ de E e todo o u pertencente ao dual de E.

Um cálculo elementar evidencia que o espaço $A(K)'$ é isomorfo ao espaço perfeito $\mathfrak{A}(K)'$ de todos vectores $u = (\nu_n)$ tais que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{|n|} |\nu_n| < \infty \qquad k = 2, 3, \cdots.$$

Obtivemos assim uma concretização dos funcionais lineares contínuos $u \in A(K)'$ que fazem corresponder um número complexo a cada função $\chi(z)$ analítica sobre K. Mas também poderemos agora considerar um tal $u \in A(K)'$ como uma espécie de função generalizada sobre K, num passo semelhante ao que se dá para introduzir as noções de medida ou de distribuição sobre K. Como se sabe, estas são também funcionais que têm um valor não em cada ponto de K, mas sim em cada função contínua sobre K no primeiro caso, e em cada função indefinidamente derivável sobre K no segundo.

Segundo este ponto de vista, chamo aos elementos de $A(K)'$ distribuições de fronteira sobre K. E são precisamente estas distribuições que permitem resolver o nosso problema sobre as singularidades de fronteira de uma função $f(z)$, analítica para $|z| < 1$. Com efeito, o teorema seguinte vem esclarecer toda a questão:

Quando $\rho \to 1$, as funções $f(\rho z)$ — funções analíticas sobre K para $0 < \rho < 1$ — consideradas como distribuições de fronteira sobre K, convergem no sentido da topologia de $A(K)'$, para um elemento $u \in A(K)'$.

Esta distribuição u será então o limite de $f(z)$, quando nos aproximarmos de K sobre circunferências concêntricas e interiores a K.

Por meio da nossa representação dos elementos de $A(K)$ e de $A(K)'$ como vectores pode precisar-se a convergência referida da seguinte maneira:

Se u_ρ são os vectores que representam os $f(\rho z)$ considerados como distribuições de fronteira, e se u é o respectivo limite, a convergência dos $f(\rho z)$ para u exprime-se pela convergência no sentido usual dos produtos $u_\rho \varphi$ para $u \varphi$, para todo o $\varphi \in \mathfrak{A}(K)$.

A convergência em questão é, porém, muito fraca; no caso geral não terá sentido pôr a questão da convergência dos $f(\rho z)$, se nos limitarmos a um sector do círculo $|z| < 1$.

Mas é possível que a distribuição de fronteira de uma função $f(z)$ possa prolongar-se num funcional linear contínuo sobre um espaço mais vasto do que $A(K)$, por exemplo sobre o espaço L^2, de Hilbert. E então a convergência dos $f(\rho z)$ para a distribuição u, que será também um elemento de L^2, tornar-se-á mais forte, passando a coincidir com a convergência no sentido do espaço de Hilbert.

Vemos assim como um caso à primeira vista um tanto estranho entra na nossa teoria geral.

Esta teoria dá agora a possibilidade de classificar as funções $f(z)$, holomorfas no interior de K, a partir dos espaços localmente convexos a que pertencem as suas distribuições de fronteira, facultando um novo método para precisar o tipo de singularidades que uma tal função admite sobre a circunferência K. Trata-se porém de uma classificação global, visto que se tem de considerar toda essa circunferência e não só uma parte dela.

Vejamos agora um outro ponto: sabe-se já que, a cada função $f(z)$, holomorfa para $|z| < 1$, corresponde uma distribuição de fronteira. Pergunta-se agora: serão alcançados desta maneira todos os elementos de $A(K)'$?

A resposta é negativa, mas pode afirmar-se que toda a distribuição de fronteira é a soma de duas outras, das quais uma é o limite de uma função f_1 holomorfa no interior de K e a outra o limite de uma função f_2 holomorfa no exterior de K e nula no ponto infinito.

Este resultado dá uma justificação para o nome «distribuição de fronteira» que se adoptou; o par (f_1, f_2) (que pode chamar-se uma função localmente analítica no complemento de K em relação à esfera de Riemann) tem um elemento de $A(K)'$ como sua distribuição de fronteira e, reciprocamente, todo o elemento de $A(K)'$ é a distribuição de fronteira de alguma função localmente analítica no complementar de K.

A teoria das distribuições de fronteira tem relações bastante íntimas com a das distribuições de Schwartz, que aliás me serviu de modelo.

Vê-se imediatamente que o espaço $E(K)$, constituído pelas funções indefinidamente deriváveis sobre K, contém o espaço $A(K)$, o qual é denso naquele; nestas condições toda a distribuição de Schwartz sobre K é uma distribuição de fronteira.

Surge agora naturalmente uma questão bastante interessante: quais serão as funções analíticas no interior de K que admitem, como singularidades na fronteira, distribuições de Schwartz?

A resposta é muito simples: são precisamente as funções de crescimento lento, isto é, as funções $f(z)$ para as quais existe um número natural k e uma constante N tais que

$$|f(z)| \leqslant \frac{N}{\delta^k(z)} \qquad \text{para } |z| < 1,$$

representando por $\delta(z)$ a distância de z a K. Assim, as distribuições de Schwartz sobre K apresentam-se, de certo modo, como generalização do conceito de polo, enquanto as distribuições de carácter mais irregular dariam uma generalização do conceito de ponto singular essencial.

E, reciprocamente, toda a distribuição de SCHWARTZ d sobre K é soma de duas outras, d_1 e d_2, que são distribuições de fronteira de duas funções de crescimento lento f_1 e f_2, sendo f_1 holomorfa no interior de K e f_2 holomorfa no exterior de K e nula no infinito.

Obtém-se assim uma correspondência biunívoca entre as distribuições de SCHWARTZ sobre K e as funções $(f_1(z), f_2(z))$ holomorfas em $\Omega\text{-}K$ e de crescimento lento. E esta correspondência é mesmo um isomorfismo algébrico do espaço $E(K)'$ das distribuições de SCHWARTZ sobre o espaço $P(\Omega\text{-}K)$ das funções localmente analíticas no complementar de K, o que significa que poderemos identificar as distribuições de SCHWARTZ com pares de funções analíticas.

Eis um ponto de vista que permite encarar muito concretamente as distribuições, não parecendo já tão singular a circunstância de que toda a distribuição sobre K seja indefinidamente diferenciável.

Se pensarmos agora em substituir K por uma recta g passando pela origem do plano complexo, a situação torna-se muito mais complicada: há distribuições de SCHWARTZ sobre g que não são distribuições de fronteira de nenhum par de funções analíticas. As relações precisas entre os dois tipos de distribuições não são conhecidas neste caso, a sua determinação constitui um interessante problema ainda não resolvido

Terá talvez interesse referir ainda que os resultados que obtive têm também uma certa importância para a teoria das séries de FOURIER.

SCHWARTZ demonstrou que uma série de FOURIER $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ tem por soma uma distribuição, se existe um número natural k e um $M>0$ tais que

$$|a_n| \leqslant M\,|n|^k \qquad n=\pm 1, \pm 2, \cdots.$$

No entanto, pela minha teoria, pode dar-se um sentido à soma de uma série de FOURIER, ainda quando os respectivos coeficientes satisfaçam às condições mais fracas:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right)^{|n|} |a_n| < \infty \qquad k=2, 3, \cdots.$$

A soma de uma tal série de FOURIER é um funcional linear sobre o espaço das funções periódicas analíticas sobre a recta.

Devo porém terminar.

Espero ter conseguido mostrar-vos que a teoria dos espaços localmente convexos, aparentemente tão abstracta, tem aplicações bastante concretas na Análise clássica, e que o estudo detalhado desses espaços abrirá novos campos de investigação na Análise funcional.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *XIII*, Act. sci. et ind. **1175** (1952).

[2] C. L. DA SILVA DIAS, Tese de Concurso, São Paulo, (1951).

[3] J. DIEUDONNÉ, Ann. Ecole Norm. Sup. **59** (1942), 107-139.

[4] J. DIEUDONNÉ e L. SCHWARTZ, Ann. Inst. Fourier, **1** (1949), 61-101.

[5] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces (F) et (DF). Summa Brasiliensis Math.

[6] A. GROTHENDIECK, Ann. Inst. Fourier, **4** (1952), 73-112.

[7] A. GROTHENDIECK, Journ. reine angew. Math., **192** (1953), 36-64, 77-94.

[8] G. KÖTHE, Math. Zeitschrift **51** (1948), 317-345.

[9] G. KÖTHE, Math. Nachrichten Berlin **4** (1951), 70-80.

[10] G. KÖTHE, Journ. reine angew. Math., **191** (1953), 30-49.

[11] G. KÖTHE, Math. Zeitschrift **57** (1952), 13-33.

[12] G. KÖTHE e O. TOEPLITZ, Journ. reine angew. Math. **171** (1934), 193-226.

[13] G. W. MACKEY, Trans. Am. Math. Soc. **57** (1945), 155-207.

[14] G. W. MACKEY, Trans. Am. Math. Soc. **60** (1946), 520-537.

[15] L. NACHBIN, Rev. de la Un. Mat. Argentina **12** (1947), 129-150.

[16] J. VON NEUMANN, Tans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), 1-20.

[17] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Act. sci. et industr. **1091, 1122** (1950/1).

[18] J. SEBASTIÃO E SILVA, Portug. Math. **9** (1950), 1-130.

[19] J. SEBASTIÃO E SILVA, Portug. Math. **12** (1953), 1-46.

[20] H. G. TILLMANN, Math. Zeitschrift **59** (1953), 61-83.

[21] O. TOEPLITZ, Comm. Math. Helvetici **23** (1949), 222-242.

[22] J. V. WEHAUSEN, Duke Math. Journ. **1** (1938), 157-169.

Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions

par **J. Sebastião e Silva**

(Extrait d'un mémoire à paraître dans «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa»)

Introduction

«[...] ce n'est qu'en donnant droit de cité à des éléments formels que plusieurs branches de l'Analyse ont pu avancer». (V. Volterra, *Leçons sur la composition*)

Le fait que toutes les fonctions ne soient pas dérivables est à l'origine d'une grande partie des complications que l'on trouve dans l'analyse réelle. La critique des fondements, entreprise surtout vers la fin du siècle XIX, a conduit à une délimitation précise entre ce qui *est permis* et ce qui *est défendu*. Mais le perfectionnement logique a entravé en quelque sorte l'imagination créatrice, et ce sont les «esprits indisciplinés» — surtout des physiciens, insoucieux de la rigueur mathématique et orientés plutôt vers la nature des questions concrètes – qui ont contribué, d'une façon plus efficace, à l'élargissement des cadres. Le calcul symbolique des électriciens, la mécanique ondulatoire, etc. ont introduit des êtres bizarres (comme la fonction δ de Dirac et ses dérivées), dont la définition mathématique était dénuée de sens, mais qui, tout de même, servaient de base à des méthodes fructueuses. «Quand une telle situation contradictoire se présente» dit M. L. Schwartz dans l'introduction de son ouvrage [17] (1) «il est bien rare qu'il n'en résulte une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens; il y a même là une source importante de progrès des mathématiques et de la physique».

La théorie des distributions de Schwartz n'a pas permis seulement de donner une justification complète à ces procédés audacieux: elle englobe et précise, en même temps, des conceptions hétérogènes qui poussaient, d'une façon plus ou moins affirmée, souvent incorrecte, dans plusieurs domaines des mathématiques: théorie des équations aux dérivées partielles, théorie de la série et de l'intégrale de Fourier, topologie algébrique, etc. (voir [17], introduction). Elle s'impose donc comme une nécessité historique, et c'est ce qui explique, en partie, son rápide succès, surtout parmi la jeune génération.

La notion de distribution généralise la notion de fonction, comme, par exemple, la notion de nombre complexe généralise celle de nombre réel. Il s'agit là de phénomènes très semblables. Lorsqu'une opération est impossible en certains cas, il y a une tendance naturelle à enfreindre l'ordre établi, en continuant à opérer formellement, suivant des règles de calcul qui sont valables (parfois avec des restrictions) dans le domaine classique. Cela peut ne conduire à rien d'autre qu'à des erreurs ou des contradictions; mais, quelques fois, on parvient de cette manière à un ordre nouveau — plus riche et plus harmonieux.

Pour construire une théorie des nombres réels ou des nombres complexes, on peut suivre plusieurs orientations: il y a pour cela des méthodes synthétiques, des méthodes analytiques et des méthodes axiomatiques.

Pour construire sa théorie des distributions, M. Schwartz a choisi le point de vue fonctionnel (que l'on pourrait aussi nommer synthétique): il présente les distributions comme fonctionnelles linéaires continues dans certains espaces de fonctions indéfiniment dérivables. Mais, en vérité, les premières tentatives pour créer une théorie des distributions suivent l'orientation formelle ou axiomatique, d'une façon plus ou moins consciente. A propos des méthodes de Bochner dans l'étude de l'intégrale de Fourier, où «l'introduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée», Schwartz observe (loc. cit.): «Les «distributions» de Bochner sont, au fond, définies comme dérivées de fonctions continues n'ayant pas nécessairement de dérivée usuelle; notre théorème XXI du chapitre III exprime justement qu'une distribution est, localement, une dérivée d'une fonction continue. Il nous paraît bien préférable d'avoir cette propriété plutôt comme théorème que comme définition (à cause de l'indétermination de l'ordre de dérivation et de la fonction continue, sourtout pour plusieurs variables)».

Eh bien, nous nous proposons de donner ici une définition du concept de distribution, au moyen d'un système d'axiomes, qui revient à concevoir une distribution, au point de vue local, précisément comme une «dérivée formelle» d'une fonction continue. On verra par la suite comment il est possible d'obvier à l'inconvénient de l'indétermination, signalé par M. Schwartz. On réussit alors, il nous semble, à rendre

(1) Les numéros entre crochets se rapportent à la Bibliographie, qui se trouve à la fin de cet article.

plus accessibles les fondements de la théorie et on obtient une méthode plus directe pour s'attaquer à plusieurs problèmes.

Il faut remarquer que la possibilité d'une construction directe, purement formelle, de la théorie des distributions avait déjà été indiquée par M. H. König dans sa Thèse, [14]. Toutefois ce travail, tout en étant décisif, n'est pas encore définitif, dans cette ligne de recherches qu'il a ouverte d'une façon remarquable. En effet, M. König ne donne pas une vraie axiomatique des espaces de distributions (c'est-à-dire, un ensemble d'axiomes définissant ces espaces à moins d'un isomorphisme), bien qu'il ait déjà tous les éléments pour le faire: il construit, pour chaque ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, une structure formelle munie de notions de «somme», «dérivées» et «limites de suites» et il démontre que cette structure est isomorphe à l'espace des distributions dans Ω. D'autre part, l'étude topologique de ces espaces n'est pas encore approfondie dans [14], ce qui ne permet pas de voir la possibilité de refaire entièrement la théorie des distributions, d'aprés ce point de vue.

Notre idée initiale a été indépendante de celle de König, mais il faut bien dire que la lecture de son travail nous a influencé en plusieurs points; d'ailleurs, bien que nos méthodes soient différentes, la source en est la même: elles sont directement suggérées par l'oeuvre de M. Schwartz. En vérité, on ne fait que renverser l'ordre logique établi dans [17], en choisissant pour points de départ certaines propositions qui, dans cet ouvrage, se présentent comme des théorèmes, des résultats: M. König s'est inspiré au th. XXX, tandis que nous avons choisi le th. XXI (déjà cité) et le principe du recollement des morceaux (th. IV).

Le principe heuristique qui nous a guidé dans les recherches est celui de la conservation des règles de calcul. Soient $f, g, \cdots$ des symboles de fonctions continues de n variables réelles, définies dans un intervalle Q de $\mathbf{R}^n$; si l'on se tient à la définition habituelle de dérivée, les expressions $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots$ n'auront pas de sens en général. Mais on trouve une situation analogue à propos de l'expression $\sqrt{a}$, qui n'a pas de sens, dans le domaine réel, pour $a < 0$; et on sait que, si l'on opère sur les expressions de ce type suivant les régles usuelles (avec quelques modifications en ce qui concerne les radicaux), on n'arrive jamais à une contradiction: c'est là l'origine du concept de nombre complexe.

De même, on peut opérer sur les dérivées formelles suivant certaines règles («la dérivée d'une somme est la somme des dérivées», «il est permis d'intervertir l'ordre des dérivations», etc.), sans jamais se heurter à une contradiction. Seulement, pour que ce cacul puisse être utile, il faut choisir une définition convenable d'égalité pour les dérivées formelles (ou mieux, d'équivalence, pour les expressions considérées). D'abord, on doit rappeler que, pour chaque fonction continue f et chaque indice i, il existe une infinité de fonctions F telles $f = D_{x_i} F$ (au sens usuel), deux d'entre elles différant toujours d'une fonction indépendante de x_i. Alors, si l'on a, par exemple, deux symboles de derivation D_{x_i}, D_{x_k}, avec $i \neq k$, et deux fonctions continues f, g, il sera toujours possible de trouver deux fonctions F, G, telles que l'on puisse écrire, formellement, $D_{x_i} f = D_{x_i} D_{x_k} F$, $D_{x_k} g = D_{x_i} D_{x_k} G$. En raisonnant de la sorte, on s'aperçoit que, en général, deux dérivées formelles peuvent toujours être ramenées à la forme de dérivées avec un même symbole composé de dérivation. (On observe un fait semblable avec les fractions numériques: deux nombres rationnels peuvent toujours être représentés par des fractions avec un dénominateur commun. Cette analogie n'est pas accidentale: elle nous a fourni les premières intuitions décisives; nous avons pris pour modèle la théorie analytique des nombres rationnels). Considérons le symbole composé de dérivation $D^{\mathbf{p}} = D_{x_1}^{p_1} D_{x_2}^{p_2} \cdots D_{x_n}^{p_n}$. Si l'on veut que les règles usuelles soient conservées, on devra considérer $D^{\mathbf{p}} f = D^{\mathbf{p}} g$, si (et seulement si) $D^{\mathbf{p}}(f-g) = 0$. On est donc ramené à fixer, pour chaque n-uple $\mathbf{p}$ d'entiers, l'ensemble des fonctions continues Θ vérifiant $D^{\mathbf{p}} \Theta = 0$. Il n'est pas difficile de voir que cet ensemble [que nous désignons par $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$] *doit contenir* toutes les fonctions de la forme (1.1) (§ 1, n.º 1); d'autre part, il est naturel de se borner à ces fonctions[1]. Avec le choix des ensembles $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$ le critère d'égalité pour les dérivées formelles reste fixé et l'on obtient les premières distributions dans l'intervalle Q de $\mathbf{R}^n$, sous la forme de classes d'équivalence d'expressions du type considéré [2].

Mais il faut que les distributions ressemblent le plus possible aux fonctions — spécialement aux fonctions indéfiniment dérivables. On définit une fonction dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, en faisant correspondre un nombre à chaque point $\mathbf{x}$ de Ω. Cela n'est plus possible, en général, pour les distributions. Mais on peut se demander ce que doit devenir une distribution T dans un voisinage $V_{\mathbf{x}}$ de chaque point $\mathbf{x}$ de

(1) Voir la note qui se trouve après la Bibliographie.

(2) Cette définition d'égalité ne figure pas d'une façon explicite, dans l'ouvrage de Schwartz. Les ensembles de fonctions que nous désignons ici par les notations $\hat{N}(D^{\mathbf{p}})$ jouent déjà un rôle essentiel dans la Thèse de König.

son domaine Q — c'est-à-dire, ce que l'on doit entendre par *restriction* de T à un intervalle $Q^* \subset Q$. Or, il est déjà possible de définir, d'une façon assez naturelle, un concept de restriction d'une distribution, en exigeant que certaines règles soient conservées, spécialement celle-ci: «La restriction d'une dérivée D^p est la dérivée D^p de la restriction». Et finalement, pour rapprocher le concept de distribution de celui de fonction on est porté à introduire la règle suivante, que M. SCHWARTZ a nommé suggestivement le *principe du recollement des morceaux:* «On définit une distribution T dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, lorsqu'on fait correspondre, à chaque point $\mathbf{x}$ de Ω, une distribution $T_{\mathbf{x}}$ définie dans un voisinage $V_{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$, de façon que ces distributions coïncident dans les parties communes de leurs domaines; la restriction de T à $V_{\mathbf{x}}$ sera $T_{\mathbf{x}}$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$». Mais alors une distribution dans Ω ne sera plus, en géneral, une dérivée d'une fonction continue dans Ω! Seulement dans un voisinage convenable de chaque point de Ω on laissera subsister cette propriété.

Voilà, en peu de lignes, la génèse de l'axiomatique que nous présentons au n.° 14 et que l'on pourra lire tout de suite, sans préparation. Il est à souligner que, dans cette axiomatique, on n'a employé aucune structure topologique des espaces de distributions. Pour définir le concept de distribution on n'a besoin que de considérations algébriques

Il s'agit là, tout d'abord, d'un problème d'extension algébrique, que l'on est induit à poser et à résoudre sous une forme très générale, suivant les méthodes de l'algèbre abstraite. Cela explique l'orientation que nous avons choisie, le caractère abstrait des considérations des n.°s 1, 2, 5 et 7. Nous aurions pu rendre beaucoup plus légère la rédaction du § 1 (et d'une partie du § 2), si nous avions renoncé a cette généralité. Mais nous avons préféré cette orientation, d'une part, parce que nous l'avions suivie effectivement dans nos recherches, et d'autre part, parce qu'on ne sait jamais si d'autres applications ne seront pas possibles.

Le résultat central est le théorème 1, qui, en particulier, sert à justifier le calcul des dérivées formelles que nous avons esquissé ci-dessus (distributions d'ordre fini). Ensuite, le besoin de définir la notion de restriction nous a conduit, dans le même ordre d'idées, au théorème général d'homomorphisme (th .2). La notion de limite projective algébrique de groupes (n.° 7) a été introduite pour définir la notion de distribution d'ordre arbitraire (fini ou infini), dans un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$. Enfin, la notion de produit multiplicatif est définie au n.° 9 d'une façon formelle, d'après les idées de KÖNIG dans [14].

Dans le § 2 nous étudions le problème de l'introduction de topologies convenables dans les espaces de distributions et nous obtenons des resultats qui nous semblent essentiellement nouveaux. M. SCHWARTZ avait introduit, dans l'espace $(\mathfrak{D}')$ des distributions dans $\mathbf{R}^n$, la topologie forte par rapport à l'espace $(\mathfrak{D})$, des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, dont $(\mathfrak{D}')$ est le dual; il ne s'est pas préoccupé de définir cette topologie *directement*, sans recourir à l'espace $(\mathfrak{D})$. Mais dans [17] il donne des critères directs pour les limites des suites et une caractérisation des ensembles bornés dans $(\mathfrak{D}')$. Avec ces ressources et quelques résultats contenus dans le mémoire [10] de DIEUDONNÉ-SCHWARTZ (prop. 14 et th. 5) il ne manquait plus rien pour la définition directe de cette topologie, si ce n'est le concept général de limite inductive d'espaces localement convexes, qui a été considéré seulement plus tard.

Pour introduire et étudier la topologie des espaces de distributions, nous utilisons un résultat (th 7) que nous avions déjà signalé dans [20], à propos de certains espaces fonctionnels analytiques, très semblables aux espaces de distributions $\mathfrak{C}_\omega(\Delta)$ ici considérés. Le th. 7, avec le théorème de ASCOLI sur les familles de fonction équicontinues, nous donne la clef de la question topologique dans les espaces de distributions.

En particulier, nous montrons (n.° 20) que la considération des limites de suites est suffisante pour déterminer la topologie de ces espaces (prop. 18 et son corollaire). Cette remarque nous semble assez importante, puisque, pour les applications, on pourra se borner à la notion de limite d'une suite, plus accessible aux techniciens que celle d'un filtre convergent quelconque, employée par M. SCHWARTZ.

Enfin, dans le § 3, nous cherchons les espaces duals topologiques des espaces de distributions et nous retrouvons les espaces de fonctions indéfiniment dérivables d'où M. SCHWARTZ est parti pour construire sa théorie. À cet effet, nous employons des méthodes parfaitement analogues à celles que nous avions déjà suivies dans notre systématisation de la théorie des fonctionnelles analytiques (voir [19]) et qui peuvent également servir pour la recherche des applications linéaires continues d'un espace de distributions dans un espace localement convexe quelconque. Cette recherche est en rapport direct avec l'étude des *noyaux distributions* (voir [18]) et, en particulier, avec le concept de *produit de composition*. Nous indiquons aux 21, 22 et 25 les premiers résultats dans cette direction. Il s'agit essentiellement de caractérier certaines fonctions indéfiniment dérivables, à valeurs dans un espace fonctionnel donné. Avec cette orientation, l'analogie entre la théorie des distributions et la théorie des fonctionnelles analytiques se révèle très étroite, plus encore que l'on pourrait l'imaginer après les travaux [15], [16], [13], [22] et [23], de Köthe, Grothendieck, Silva Dias et Tillmann.

Mais il y a plusieurs classes importantes de distributions (distributions à support compact, distributions bornées, distributions tempérées, etc.), comme il y a plusieurs classes de fonctions (fonctions continues, fonctions à carré sommable, etc.). Et, pour chacune de ces classes de distributions (comme pour chacune de ces classes de fonctions), il existe une structure topologique, spécialement indiquée. Il s'agirait donc, maintenant, de faire l'étude *directe* de ces espaces particuliers de distributions, dont M. Schwartz a fait des applications profondes. Nous nous bornons à esquisser cette étude pour les espaces de distributions à support compact (n.º 26).

Il reste aussi à examiner le cas des distributions dans une variété indéfiniment différentiable quelconque. Nous croyons que dans ce cas on devra faire un usage plus étendu du principe du recollement des morceaux, avec les méthodes de la topologie algébrique.

Nous tenons à remercier ici vivement Monsieur G. Köthe de l'aide précieuse qu'il a bien voulu nous prêter, soit en nous faisant connaître la Thèse de König après que nous avons obtenu nos premiers résultats, soit en nous renseignant sur plusieurs points de la théorie des espaces localement convexes, soit encore en acceptant de faire la revision critique de notre manuscrit qui a pu être amélioré en plusieurs points après ses remarques, surtout dans l'analyse logique du n.º 11.

Nous tenons aussi à remercier vivement Monsieur L. Schwartz des renseignements et des conseils éclairés qu'il a été bien aimable de nous donner. C'est lui qui, dans une lettre, nous a suggéré le «recollement des morceaux» comme moyen pour gagner les distributions d'ordre infini en partant des distributions d'ordre fini. Nous avions essayé de le faire par complétion topologique, ce qui est possible, mais moins naturel.

. . . .

. . . .

[§ 1, n.º 14] Définition axiomatique du concept de distribution dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Nous sommes parvenus au point de pouvoir formuler une axiomatique des distributions, en termes de «fonctions continues», «domaine de existence», «restriction», «addition» et «dérivations». L'universe logique, pour cette axiomatique, sera l'ensemble de toutes les distributions définies dans des ouverts Ω de $\mathbf{R}^n$. Notre axiomatique se compose des 8 axiomes suivants :

Axiome 1 — *Toute fonction complexe, définie et continue dans un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *est une distribution.*

Axiome 2 — *À chaque distribution* T *correspond un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$, *nommé le* **domaine d'existence** *(ou seulement le* **domaine***) de* T, *de façon que, si* T *est une fonction continue, le domaine de* T *est le domaine d'existence de cette fonction au sens usuel.*

Axiome 3 — *Il existe une opération, nommée addition, qui, à chaque couple de distributions* T_1, T_2, *à domaine* Ω *commun, fait correspondre une distribution de domaine* Ω, *nommée la* **somme de** T_1 **avec** T_2 *et notée* T_1+T_2 *de façon que, si* T_1 *et* T_2 *sont des fonctions continues,* T_1+T_2 *est la somme de ces fonctions au sens usuel.*

Axiome 4 — *À chaque distribution* T *de domaine* Ω *et à chaque indice* $i=1,2,\cdots,n$, *correspond une distribution de domaine* Ω, *nommée la* **dérivée partielle de** T **par rapport à** x_i *et notée* $D_{x_i}T$ *de façon que:* I) *si* T *est une fonction qui admet dérivée partielle par rapport à* x_i, *continue dans* Ω *(au sens usuel),* $D_{x_i}T$ *coïncide avec cette dérivée;* II) *si* T *et* U *sont deux distributions à domaine commun, on a* $D_{x_i}(T+U)=$ $=D_{x_i}T+D_{x_i}U$, *pour* $i=1,\cdots,n$; III) $D_{x_i}D_{x_k}T=$ $=D_{x_k}D_{x_i}T$, *quels que soient la distribution* T *et les indices* i, k.

Axiome 5 — *À chaque distribution* T *de domaine* Ω *et à chaque ouvert* $\Omega_1\subset\Omega$, *correspond une distribution* T_{Ω_1} *de domaine* Ω_1, *nommée la* **restriction de T à** Ω_1, *de façon que:* I) *si* T *est une fonction continue,* T_{Ω_1} *est la restriction de cette fonction à* Ω_1, *au sens usuel;* II) *si* Ω_2 *est une partie ouverte de* Ω_1, *on a* $(T_{\Omega_1})_{\Omega_2}=T_{\Omega_2}$, *pour toute distribution* T *de domaine* Ω; III) $(T+U)_{\Omega_1}=T_{\Omega_1}+U_{\Omega_1}$, *pour tout couple de distributions* T, U *de domaine* Ω; IV) $(D_{x_i}T)_{\Omega_1}=$ $=D_{x_i}T_{\Omega_1}$ *quels que soient la distribution* T *dans* Ω *et l'indice* i.

Axiome 6 — (Principe du recollement des morceaux) *Si, étant donné un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$, *on fait correspondre, à chaque* $x\in\Omega$, *un voisinage ouvert* Ω_x *de* x *et une distribution* T_x *de domaine* Ω_x, *de façon que, si les voisinages* Ω_x, Ω_y *de deux points* x, y *de* Ω *ont une intersection non vide, les restrictions de* T_x *et* T_y *à* $\Omega_x\cap\Omega_y$ *coïncident, alors il existe une (et seulement une) distribution* T *de domaine* Ω, *dont la restriction à* Ω_x *est* T_x, *quel que soit* $x\in\Omega$.

Conventions — Si p est une n-uple quelconque $(p_1,\cdots,p_n)$ de *nombres entiers non négatifs*, nous posons $D^{\mathsf{p}} = D_{x_1}^{p_1} \cdots D_{x_n}^{p_n}$, où $D_{x_i}^{p_i}$ désigne la p_i-ième puissance de l'opérateur D_{x_i} $(i=1,\cdots,n)$. Étant donnés $\mathsf{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ et $\mathsf{q}=(q_1,\cdots,q_n)$, on écrit $\mathsf{p}\leqslant\mathsf{q}$ comme abréviation de $p_1\leqslant q_1,\cdots,p_n\leqslant q_n$. Nous disons qu'une distribution T est *indépendante* de x_i si sa dérivée $D_{x_i}T$ est nulle $(i=1,\cdots,n)$.

Axiome 7 — *Pour toute distribution* T *et tout intervalle* Q *de* R^n, *ouvert et borné, dont l'adhérence est contenue dans le domaine de* T, *il existe une fonction* f(x) *définie et continue dans* Q, *et une* n-*uple* p, *tels que* $\mathrm{T}=\mathrm{D}^{\mathsf{p}}\,\mathrm{f}$.

Axiome 8 — *Si* T *est une distribution indépendante de* x_i *ayant pour domaine un intervalle* Q *de* R^n *et si l'on a* $\mathrm{T}=\mathrm{D}^{\mathsf{p}}\,\mathrm{f}$, f *étant une fonction définie et continue dans* Q *et* p *une n-uple d'entiers, il existe une autre n-uple* $\dot{\mathsf{p}}\leqslant\mathsf{p}$ *et une fonction* $\dot{\mathrm{f}}$ *continue dans* Q, *indépendante de* x_i *au sens usuel, telles que* $\mathrm{T}=\mathrm{D}^{\dot{\mathsf{p}}}\dot{\mathrm{f}}$ $(\mathrm{i}=1,\cdots,\mathrm{n})$.

L'analyse développée dans tous les n.^{os} précédents nous permet d'établir que cette axiomatique est *compatible* et *catégorique*; c'est-à-dire: *a*) elle admet au moins une réalisation; *b*) deux réalisations de cette axiomatique sont nécessairement isomorphes.

....

....

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integral*, Leipzig (1932).

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Act. Scient. Ind., n.^{os} 846–1141, Hermann, Paris (1951).

[3] ——, *Topologie générale*, chapitres I–II, Act. Scient. Ind., n.^{os} 858 — 1142, Hermann, Paris (1934).

[4] ——, *Topologie générale*, chapitre IX Act. Scient. Ind., n.° 1045, Hermann, Paris (1948).

[5] ——, *Topologie générale*, chapitre X, Act. Scient. Ind., n.° 1045, Hermann, Paris (1949).

[6] ——, *Algèbre*, chapitre II, Act. Scient. Ind., n.° 1032, Hermann, Paris (1947).

[7] ——, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I – II, Act. Scient. Ind., n.° 1189, Hermann, Paris (1953).

[8] ——, *Intégration*, chapitres I–IV, Act. Scient. Ind., n.° 1175, Hermann, Paris (1952).

[9] J. Dieudonné, *Recent developments in the theory of locally convex vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 59 (1953), pp. 495-512.

[10] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* (*F*) *et* (*LF*), Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 1 (1949), pp. 61-101 (1950).

[11] R. L. Gomes, *Integral de Lebesgue-Stieltjes*, Junta de Investigação Matemática, Porto (1952).

[12] A. Grothendieck, *Sur les espaces* (*F*) *et* (*DF*), à paraître dans Summa Bras. Math.

[13] ——, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math., vol. 192 (1953), pp. 35-64 et 77-95.

[14] H. König, *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. Schwartz*, Math. Nachrichten, vol. 9 (1953), pp. 129-148.

[15] G. Köthe, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. Reine Angew. Math., vol. 191 (1953) pp. 29-49.

[16] ——, *Die Randverteilungen analytischer Funktionen*, Math. Zeitschr., vol. 57 (1952), pp. 13-33.

[17] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, I, II, Act. Scient. Ind., n.° 1091, Hermann, Paris (1950).

[18] ——, *Théorie des noyaux*, Proc. Int. Cong. Math. 1950, pp. 220-230.

[19] J. Sebastião e Silva, *As funções analíticas e a análise funcional*, Thèse, 1948 (Port. Math. 1950).

[20] ——, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Port. Math. vol. 12 (1953), pp. 1-46.

[21] ——, *Su certi spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, à paraître dans Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma.

[22] C. da Silva Dias, *Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação na teoria dos espaços funcionais analíticos*, Thèse, Univ. São Paulo (1951).

[23] H. — G. Tillmann, *Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen*, Math. Zeitschr., vol. 59, pp. 61-83 (1953).

[24] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques*, Act. Scient. Ind., n.° 869, Hermann, Paris, (1940).

———

Note — Pour chaque n-uple $\mathsf{p}=(p_1,\cdots,p_n)$ d'entiers, l'ensemble $\hat{N}(D^{\mathsf{p}})$, dont il est question dans l'introduction (lorsqu'il s'agit de définir l'égalité de deux dérivées formelles), est constitué par les fonctions Θ de la forme

$$\Theta(\mathrm{x}) = \sum_{\nu=0}^{p_1-1} x_1^{\nu}\gamma_{1,\nu}(\mathrm{x}) + \sum_{\nu=0}^{p_2-1} x_2^{\nu} p_{2,\nu}(\mathrm{x}) + \cdots + \sum_{\nu=0}^{p_n-1} x_n^{\nu} p_{n,\nu}(\mathrm{x}),$$

où $\gamma_{i,\nu}(\mathrm{x})$ est une fonction continue indépendante de x_i $(i=1,\cdots,n,\ \nu=0,1,\cdots,p_i-1)$. L'axiome 8 permet d'établir que ces fonctions sont toutes les solutions possibles de l'équation $D^{\mathsf{p}}\,T=0$, lorsque l'inconnue est une fonction continue.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL — ADESÃO DE PORTUGAL

Nos dias 31 de Agosto e 1 de Setembro, precedendo imediatamente o Congresso Internacional de Matemáticos que, como aqui noticiámos, se realizou em Amsterdam de 2 a 10 de Setembro de 1954, teve lugar em Haia a segunda Assembleia Geral da União Matemática Internacional.

Uma das primeiras decisões desta Assembleia foi a admissão de Portugal na U. M. I., solicitada pelo Instituto de Alta Cultura, organismo nacional aderente. Era delegado português à Assembleia o Prof. José Vicente Gonçalves, que representava o referido organismo aderente. A proposta de adesão de Portugal foi aprovada por unanimidade. O nosso País tornar-se-á membro regular da União logo que sejam comunicados ao Secretariado os nomes da Comissão Nacional de Matemáticos. (Esta Comissão acaba de ser organizada pelo I. A. C., ficando constituída pelos Professores A. Peixoto de Queirós, J. Vicente Gonçalves e D. Pacheco de Amorim, respectivamente das Faculdades de Ciências, do Porto, de Lisboa e Coimbra, e ainda pelo autor desta notícia, do Instituto Superior de Agronomia).

Vem a propósito recordar que, em Março de 1952, correspondendo a um convite que lhe foi dirigido pela comissão organizadora U. M. I., a Sociedade Portuguesa de Matemática, coadjuvada pela Junta de Investigação Matemática do Porto, tomou a iniciativa de enviar a Roma, como observador junto da Assembleia Geral Constituinte, o autor desta notícia, tendo nessa iniciativa recebido o apoio do I. A. C.. Deu-se agora a solução justa a um problema que não podia deixar de merecer a atenção de todos os que se interessam pelo progresso das matemáticas em Portugal. Para um país como o nosso que, pela sua posição geográfica, tende a isolar-se do movimento científico internacional, são de todo salutares as possibilidades de intercâmbio que vem abrir-lhe tal decisão.

Juntamente com Portugal foram admitidos como membros da U. M. I. o Brasil e a Islândia, todos no grupo I. Ascende actualmente a 30 o número de países que são membros da União.

Nesta assembleia foi eleito o novo Comité executivo da U. M. I., que ficou assim constituído:

Presidente: H. Hopf; 1.º Vice-Presidente: A. Denjoy; 2.º Vice-Presidente: W. V. D. Hodge; Secretário: E. Bompiani; Membros eleitos: K. Chandrasekaran, J. F. Koksma, S. Mac Lane.

Foram ainda eleitas Comissões para: Publicações Matemáticas, Intercâmbio de Matemáticos, Directório Mundial de Matemáticos e Ensino Matemático.

Dentre as várias decisões importantes tomadas nesta Assembleia, destacaremos ainda as que se referem à organização de colóquios:

«Um colóquio é considerado como reunião dum número limitado de participantes convidados, que são ou peritos ou jóvens cientistas prometedores, que trabalhem num domínio actual de investigações matemáticas. Esta definição não exclui a presença dum fraco número de alguns outros auditores, interessados nos assuntos tratados».

«[···] A participação financeira da União é exclusivamente reservada às despesas de viagem e de instalação dos convidados».

«[···] Para o estabelecimento do programa dos anos futuros, o Comité executivo deverá ter em conta o interesse dos diversos assuntos no estado actual da ciência, das investigações efectuadas nos países em que tiver lugar o colóquio e dos colóquios realizados nos anos precedentes. O Comité executivo assegurará um «roulement» entre as diversas regiões geográficas, onde reina uma actividade matemática, e entre os diversos ramos da ciência. [···]».

É de salientar que o último Congresso Internacional de Matemáticos foi já promovido e apoiado em parte pela U. M. I..

J. Sebastião e Silva

COLÓQUIO DE MENDOZA

A *Universidad Nacional de Cuyo* e o *Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina* promoveram, de 21 a 25 de Julho de 1954, em Mendoza, Argentina, um colóquio latino-americano, o segundo da série dedicada a *Algunos problemas matemáticos que se estan estudiando en Latino América.* A organização desse colóquio esteve a cargo dos Profs. A. Monteiro e M. Cotlar, membros do *Instituto de Matemática* que a referida Universidade criou recentemente em Mendoza, e dos Drs. A. Establier, L. Mattsson e O. Dodera, do Centro da Unesco. O primeiro colóquio no género foi realizado em Dezembro de 1951, em Punta del Este, Uruguai, sob os auspícios do *Instituto de Matemática e Estadística,* de Montevideu, e do mesmo Centro da Unesco. Prevê-se a realização do terceiro colóquio da série, em época a ser estabelecida, no México. A exemplo de Punta del Este, o colóquio de Mendoza teve lugar nos arredores desta cidade, no aprazível hotel balneário de Villavicencio. O último dia do colóquio foi dedicado a discussão de problemas de interesse comum, tais como publicações, intercâmbio de matemáticos e reuniões latino-americanas. A comparação entre os colóquios de Punta del Este e de Mendoza deixou aos seus participantes uma sensação de progresso apreciável havido no ambiente matemático latino-americano desde 1951, especialmente na Argentina, no México, no Brasil e na Colômbia, nesta ordem aproximadamente. O colóquio de Mendoza contou com o concurso dos seguintes matemáticos ligados, na época, a instituições latino-americanas: G. Dedebant (França), A. Grothendieck (França), J. Horvath (Hungria), E. Lammel (Alemanha), A. Monteiro (Portugal) e G. Mostow (Estados Unidos). As comunicações apresentadas, que farão parte de um volume a ser editado pelo Centro da Unesco, foram as seguintes:

21 de Julho.

J. Rey Pastor (Argentina): *La matemática moderna en Latino América* (Conferência de abertura).

22 de Julho.

L. Santaló (Argentina): *Cuestiones sobre Geometria Diferencial afin de superficies.*

L. Nachbin (Brasil): *Alguns problemas sobre espaços vectoriais topológicos.*

A. Calderón (Argentina): *Funciones analiticas multiformes de transformadas de* Fourier (em colaboração com R. Arens).

A. González Domínguez (Argentina): *Sobre ciertas integrales divergentes de la Electrodinâmica Cuántica.*

J. Horvath (Colômbia): *Transformadas de Hilbert de distribuciones.*

M. Cotlar (Argentina): *Problemas de los momentos y operadores hermitianos.*

23 de Julho.

G. Garcia (Perú): *Forma absoluta de la transformacion de las ecuaciones de la Dinámica en un espacio curvo de n-dimensiones.*

E. Zarantonello (Argentina): *Hidrodinâmica y recientes avances en la teoria de fronteras libres.*

M. O. González (Cuba): *Desarollo de las funciones de* Legendre *en términos de polinomios de* Legendre *y aplicaciones.*

A. Monteiro (Argentina): *Aritmética dos filtros e espaços topológicos.*

A. Grothendieck (Brasil): *Théorie des produits tensoriels topologiques.*

J. Adem (México): *Operaciones algebráicas en Topologia y algunas aplicaciones a problemas geométricos.*

24 de Julho.

E. Lammel (Argentina): *Sobre algunas generalizaciones de la teoria de funciones de variable compleja.*

P. Pi Calleja (Argentina): *Ecuaciones funcionales de la teoria de magnitudes.*

G. Dedebant (Argentina): *Sobre una nueva definición de la función aleatoria y su teorema ergódico.*

G. Mostow (Brasil): *Reductive subgroups of algebraic* Lie *groups.*

C. Klimovsky (Argentina): *Problemas relativos a la definición de verdad lógica en los sistemas semánticos y sintácticos.*

A. Calderón (Argentina): *Integrales singulares* (Conferência de encerramento).

L. Nachbin

I SEMANA DA MATEMÁTICA

Realizou-se de 15 a 22 de Novembro de 1954 a «I Semana da Matemática» na Faculdade de Ciências de Lisboa. Organizada pela Associação de Estudantes desta Faculdade, a «Semana» tinha como objectivos:

1. Divulgar entre os estudantes da Faculdade o gosto pelo estudo da matemática, facilitando-lhes um contacto directo com revistas, livros e temas de Matemática.

2. Levar ao seu conhecimento uma notícia tão desenvolvida quanto possível do movimento matemático português antigo e contemporâneo.

Com esta finalidade esteve aberta na Sede da Associação uma exposição durante toda a semana.

Do programa há a registar as seguintes realizações:

Dia 15 às 18 h. — Conferência pelo Dr. Gustavo de Castro sobre «O ofício de Matemático».

Dia 17 às 18 h. — Sessão de filmes de carácter pedagógico sobre assuntos de matemática elementar.

Dia 19 às 18 h. — Conferência pelo Dr. João de Freitas Branco sobre «A matemática, base da arte musical».

Dia 20 às 18 h. — Conferência pelo Dr. João Santos Guerreiro sobre «Números reais».

Há ainda a acrescentar a publicação dum número especial da revista «Ciência» dedicado exclusivamente a assuntos matemáticos em que colaboram alguns dos mais representativos matemáticos portuguêses contemporâneos.

Todas estas realizações foram acompanhadas com bastante interesse por alunos, licenciados, professores e outras pessoas interessadas nos problemas da matemática.

A realização desta «Semana de Matemática» foi possível devido à colaboração tanto de alguns professores como dos organismos seguintes: Gazeta de Matemática, Portugaliae Matemática e Junta de Investigação Matemática do Porto (este último contribuiu com um subsidio de 1.000$00). M. J. V.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de Frequência, 1952-53.

3826 — Calcular k de modo que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \\ 3x + ky + 2z = 0 \end{cases}$$

tenha soluções não nulas, e determinar essas soluções.

R: $k = 3/13$. *Soluções:* $x = -7C/9$, $y = 13C/9$ *e* $z = C$, *com* C *qualquer.*

3827 — Estudar e representar gràficamente a função

$$y = 1/(x^2 - x - 2).$$

R: *Pontos de descontinuidade* $x = -1$ *e* $x = 2$, *em que* y *se torna infinita com mudança de sinal* ($y > 0$ *para* $x < -1$, *e* $x > 2$; *e* $y < 0$ *para* $-1 < x < 2$). *A função tem um máximo* $M = -4/9$ *para* $x = 1/2$. *Não há pontos de inflexão, e além das duas já indicadas há ainda a assintota* $y = 0$.

3828 — Calcular a área limitada pela curva $y = 1/+\sqrt{x}$, pelos eixos coordenados e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

R: $2\sqrt{b} - \dfrac{1}{a}$.

3829 — Demonstrar o teorema de Lagrange.

3830 — Demonstrar a regra para a derivação de um determinante de terceira ordem, quando os seus elementos são funções de uma variável x.

Soluções dos n.os 3826 a 3828 de L. M. de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência — 8 de Abril de 1954

3831 — Dadas as circunferências $C_1)\ (x-\alpha)^2 + (y-2)^2 = 5$ e $C_2)\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = R^2$ resolva os seguintes problemas:

a) Determine α e R por forma que a recta $Y = \dfrac{X}{2}$ seja tangente comum a C_1 e C_2. Determine também as coordenadas dos pontos de tangência.

b) Sendo $R = \sqrt{5}$, determine α por forma que C_1 e C_2 sejam tangentes exteriormente. Escreva a equação da tangente comum no ponto de contacto de C_1 e C_2.

R: *As distâncias dos centros à recta, iguais aos respectivos raios:* $R^2 = \left(\dfrac{-4+1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{9}{5}$, $R = +\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $\left(\dfrac{4-\alpha}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5$, $4 - \alpha = \pm 5$.

Como os raios são iguais e as circunferências tangentes exteriormente, a distância entre os centros é igual à soma dos raios $(\alpha+1)^2 + 16 = (2\sqrt{5})^2 = 20$, $(\alpha+1)^2 = 4$ $\alpha + 1 = \pm 2$.

A recta que une os centros tem a equação $\dfrac{Y-2}{4} = \dfrac{X-\alpha}{\alpha+1} = \dfrac{X \mp 2 + 1}{\pm 2}$ *e o seu coeficiente angular é* $\pm\dfrac{4}{2} = \pm 2$.

Sendo os raios iguais as circunferências têm contacto no ponto médio do segmento que une os centros: $\xi = \dfrac{\alpha+1}{2}$

$\eta = \dfrac{4}{2} = 2$ *ou* $\xi = \dfrac{\mp 2 - 1 + 1}{2} = \pm 1$, $\eta = 2$.

A equação da tangente: $Y - 2 = \mp \dfrac{1}{2}(X \mp 1)$.

3832 — Defina conjunto fechado. Pode ser fechado o conjunto (u_n) dos valores dos termos duma sucessão? Porquê?

Prove que todo o ponto de acumulação de (u_n) é limite de subsucessões da sucessão u_n. Se na sucessão u_n não há termo indefinidamente repetido e o conjunto (u_n) tem um ponto de acumulação c, menor do que todos os outros, que é c em relação à sucessão u_n, e também em relação ao conjunto dos pontos de acumulação de (u_n)? Poderá haver um número infinito de termos u_n inferiores a $\underline{\lim}\, u_n$? e inferiores a $K < \underline{\lim}\, u_n$? justifique as suas respostas.

Sendo $u_n = \dfrac{e^{1+\frac{1}{n}} - e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}$ e $v_n = 1 - \sqrt[n]{\log n}$ calcular $\lim\limits_{n=\infty} u_n$, $\lim\limits_{n=\infty} v_n$; escolher α por forma que o conjunto $[u_n, v_n, 0, 1]$ seja fechado.

R: *Todo o ponto de acumulação de* (u_n) *é sub-limite de* u_n; *portanto* c *sendo o menor dos pontos de acumulação é um sub-limite, e é o menor dos sub-limites, porque não pode haver outro sub-limite menor, por não haver termo indefinidamente repetido.*

Em relação ao conjunto dos pontos de acumulação de

(u_n), c *é o minimo (limite inferior de* WEIERSTRASS *que pertence ao conjunto).*

$$\frac{e\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1}=\frac{e\left(1+\frac{\xi_n}{n}-1\right)}{1+\frac{\gamma_n}{n}-1}=e\,\frac{\xi_n}{\gamma_n};$$

$$\lim_{n=\infty} u_n=e\cdot\frac{\lim\limits_{n=\infty}\xi_n}{\lim\limits_{n=\infty}\gamma_n}=e\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}=\frac{\log n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}=1+$$

$$+\frac{\xi_n}{n\log n}\quad com\ \lim_{n=\infty}\xi_n=1.$$

Ora, se $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tem limite* $(u_n>0)$ *também* $\sqrt[n]{u_n}$ *tem limite que é igual; resulta pois* $\lim\limits_{n=\infty} v_n=0$.

Para que o conjunto $[u_n, v_n, 0, 1]$ *contenha* $\frac{e}{\alpha}$ *deverá ser* $\alpha=e$.

3833 — Sendo $\sum a_n$ uma série de termos positivos, onde $a_n \to 0$, prove que a divergência de $\sum a_n^2$ implica a divergência de $\sum a_n$; a convergência de $\sum a_n^2$ implica a convergência de $\sum a_n\sqrt{\frac{a_n}{n}}$.

Prove que associando termos consecutivos numa série convergente, se obtém uma série ainda convergente e com a mesma soma. Verifique a proposição associando dois a dois os termos de $\sum\limits_0^\infty(-1)^n\frac{1}{n+1}$. Considerando a mesma série, altere-se a ordem dos termos do seguinte modo $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+$ $+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-$ $\frac{1}{2(2n+2)}+\cdots$; some-se, em seguida, cada termo positivo com o termo negativo seguinte, obtendo-se $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$. Mostre que se manteve a convergência mas que se alterou a soma. Justifique este resultado, enunciando os princípios teóricos que julgue necessários.

R: *Como* $a_n \to 0$, *a partir de certa ordem teremos*

$$1>a_n>a_n^2>a_n^3>\frac{a_n^3}{n}>\sqrt{\frac{a_n^3}{n}}.$$

Na série $\sum\limits_0^\infty(-1)^n\frac{1}{n+1}$ *temos:* $S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-$ $-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ *e na série* $\sum\limits_1^\infty\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, *que se obtem da anterior associando-lhe os termos dois a dois, temos* $\sigma_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$.

Vê-se que é $S_{2n}=\sigma_n$, *e portanto se existe* $\lim\limits_{n=\infty}S_{2n}=S$ *também existe* $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n$, *e este limite é igual ao primeiro.*

A série donde se partiu é convergente: $\sum\limits_0^\infty(-1)^n\frac{1}{n+1}$; *a série a que se chegou depois de efectuar as transformações indicadas, é:* $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=$ $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_0^\infty(-1)^n\frac{1}{n+1}$; *logo, conservou-se visìvelmente a convergência, mas alterou-se a soma.*

3834 — Seja $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, $f(a)=0$, uma função contínua no intervalo (a, b). Se $\varphi(a+0)=$ $=+\infty$, $\varphi(x)$ admitir derivada finita para todos os pontos de (a, b) e $\varphi(b)=\varphi'_e(b)=0$, prove que $f(x)$ tem derivada de a a b e que essa derivada passa por todos os valores positivos.

Sendo $F(x)=(x-c)\,\theta(x)$, com $\theta(x)$ contínua em $x=c$, qual deve ser o valor $\theta(c)$ para que $|F(x)|$ tenha derivada em $x=c$? No caso em que não existe derivada, indique os valores das derivadas laterais de $|F(x)|$ em $x=c$.

Defina em $x=0$ a função $g(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+x+1}$ de forma que ela fique contínua nesse ponto. A função é contínua no conjunto fechado $(0, +\infty)$? Porquê?

Calcule $g'_d(0)$ e $g'_e(0)$. Há derivada no ponto $x=0$?

R: $f(x)$ *é continua em* (a, b) *e por ser* $f'(x)=$ $=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$ *vê-se que* $f'(x)$ *existe finita em* (a, b); $f(x)$ *é uma função regular em* (a, b).

É $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\varphi(x)$ *e quando* x *tende para* a *por valores maiores, vem:* $f'_d(a)=+\infty$. *Podemos escrever* $f'_e(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'_e(x)$ *o que dá:* $f'_e(b)=0$.

A derivada duma função regular não passa dum valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

Temos $\frac{|F(x)|-|F(c)|}{x-c}=\frac{|x-c|\cdot|\theta(x)|}{x-c}$ *visto que, por ser* $\theta(x)$ *contínua no ponto* $x=c$, *vem* $F(c)=0$.

Calculando os limites laterais desta fracção obtemos

$\pm|\theta(c)|$ *e temos assim os valores das derivadas laterais. Para haver derivada no ponto* c *deverá ser* $\theta(c)=0$.

Dividindo ambos os membros de $g(x)$ *por* $e^{\frac{1}{x}}$, *vem:* $\lim_{x=0} g(x)=1$, *faça-se pois* $g(0)=1$ *para a função ficar contínua.*

A função é contínua no intervalo fechado $(0,+\infty)$ *porque, já se definiu com continuidade para* $x=0$, *é contínua em todos os pontos interiores, e é contínua para* $x=+\infty$, *porque existe finito o* $\lim_{x=\infty} g(x)=0$.

Visto que $g(0)=1$, *vem:* $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=$

$= -\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+x+1}$ *e então é:* $g'_e(0)=-1$, $g'_d(0)=0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 15 de Outubro de 1953.**

3835 — Determine a constante k por forma que a função $y=x^2 . e^{-x}+k$ tenha 2 por valor mínimo e determine as assíntotas da sua imagem.

Desenvolva depois a função em série inteira na vizinhança do ponto $x=1$.

R: *A derivada é* $y'=-x(x-2)e^{-x}$.

x		0		2	
y	↘	$=2$ m	↗	M	↘
y'	—	0	+	0	—

$k=2$ *porque para* $x=0$ *deverá ser* $y=2$. *O mínimo é absoluto visto que* $\lim_{x=+\infty} x^2 e^{-x}+2=2$.

Para desenvolver em série faça-se

$$y=2+e^{-1}[e^{-(x-1)}+2(x-1)e^{-(x-1)}+(x-1)^2e^{-(x-1)}].$$

Ora de $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

vem $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

donde $e^{-(x-1)}=1-(x-1)+\dfrac{(x-1)^2}{2!}-\dfrac{(x-1)^3}{3!}+$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n!}+\cdots$$

$$2(x-1)e^{-(x-1)}=2(x-1)-2(x-1)^2+2\frac{(x-1)^3}{2!}-$$

$$-2\frac{(x-1)^4}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}.2\frac{(x-1)^n}{(n-1)!}+\cdots$$

$$(x-1)^2e^{-(x-1)}=(x-1)^2-(x-1)^3+\frac{(x-1)^4}{2!}-$$

$$\frac{(x-1)^5}{3!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\cdots.$$

Portanto

$$y=2+e^{-1}\left[1+(x-1)+(x-1)^2\left(\frac{1}{2!}-1\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right)\right].$$

3836 — Determine a parábola cúbica que para $x=0,1,2,3$ assume os valores $y=1,6,21,52$ respectivamente. Empregue a condensação de matrizes.

R: *A parábola procurada é* $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3$ *e as condições dão*

$$\begin{cases} 1=A \\ 6=A+B+C+D \\ 21=A+2B+4C+8D \\ 52=A+3B+9C+27D \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} A=1 \\ B+C+D=5 \\ 2B+4C+8D=20 \\ 3B+9C+27D=51 \end{cases}$$

Condensando a matriz do sistema vem sucessivamente

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 20 \\ 3 & 9 & 27 & 51 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 6 & 24 & 36 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Temos pois o sistema equivalente

$$\begin{cases} A=1 \\ B+C+D=5 \\ C+3D=5 \\ D=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=2 \\ D=1 \end{cases}$$

e a parábola vem $y=1+2x+2x^2+x^3$

3837 — Deduza as equações da recta r que passa pelo ponto $z=t$ do eixo $\overline{OZ}$ e vai apoiar-se sobre as duas rectas

$$r_1\begin{cases} x=z-4 \\ y=2z+1 \end{cases} \qquad r_2\left\{\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{1}\right..$$

Ache o lugar geométrico dos pontos médios do segmento que nessa recta determinam o eixo e a recta r_1.

Escreva a equação carteziana da projecção ortogonal sobre o plano XOY daquele lugar geométrico.

R: *O ponto* $(0,0,t)$ *e a recta* r_1 *definem um plano* π_1 *que contém a recta* r. *O ponto* $(0,0,t)$ *e a recta* r_2 *definem um plano* π_2 *que também contém* r. *As equações de* r *serão pois as equações de* π_1 *e* π_2 *consideradas simultâneamente.*

Para achar a equação do plano π_1, *considere-se a equação do feixe dos planos que contêm* r_1

$$(x - z + 4) + \lambda_1 (y - 2z - 1) = 0$$

e determine-se aquele que contém o ponto $(0, 0, t)$, *isto é:*

$$-t + 4 + \lambda_1(-2t - 1) = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{4-t}{2t+1}$$

$$\pi_1 \equiv x - z + 4 + \frac{4-t}{2t+1}(y - 2z - 1) = 0.$$

Precisamente do mesmo modo obtínhamos a equação do plano $\pi_2 \equiv x - 3z + 1 + \dfrac{1-3t}{4t-3}(y - 4z + 3) = 0$.

Procuramos o ponto de encontro das rectas

$$r_1 \begin{cases} x = z - 4 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

e

$$r \begin{cases} x - z + 4 + \dfrac{4-t}{2t+1}(y - 2z - 1) = 0 \\ x - 3z + 1 + \dfrac{1-3t}{4t-3}(y - 4z + 3) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de três destas quatro equações, temos depois de eliminar x *entre a 1.ª, 3.ª e 4.ª,*

$$\begin{cases} y - 2z - 1 = 0 \\ (1 - 3t)\,y + (2 + 4t)\,z + 12 - 21t = 0 \end{cases}$$

donde

$$x = z - 4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 21t-12 & 2+4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1-3t & 2+4t \end{vmatrix}} = \frac{23t - 11}{2 - t} \qquad z = \frac{24t - 13}{2(2-t)}.$$

As coordenadas do ponto de encontro de r *com* r_1 *são:*

$$x = \frac{16t - 29}{2(2-t)} \qquad y = \frac{23t - 11}{2 - t} \qquad z = \frac{24t - 13}{2(2-t)}$$

e as coordenadas do ponto médio

$$X = \frac{16t - 29}{4(2-t)} \quad Y = \frac{23t - 11}{2(2-t)} \quad Z = \frac{-2t^2 + 28t - 13}{4(2-t)}.$$

Estas são também as equações paramétricas do lugar geométrico. A projecção ortogonal sobre XOY *desta curva, tem por equações paramétricas*

$$X = \frac{16t - 29}{4(2-t)} \qquad Y = \frac{23t - 11}{2(2-t)}.$$

Eliminando o parâmetro t *obtém-se a equação carteziana; da primeira vem* $t = \dfrac{8X + 29}{4(X + 4)}$ *que substituida na segunda conduz a* $140X - 6Y + 491 = 0$. *A projecção é uma recta.*

Soluções do n.º 3831 a 3837 de J. R. Albuquerque

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — 2.º Exame de Frequência — 15 de Maio de 1951.

Ponto n.º 1

3838 — Dada uma superfície cónica $[\gamma]$, definida pelo vértice V e pela directriz circular existente em ν_0, e dado um ponto P, conduzir por P duas tangentes à superfície, sendo uma de nível e fazendo outra um ângulo de 60º com a primeira. Indicar os pontos de contacto.

3839 — Seja $\overline{AB}$ um segmento de 4 cm, paralelo a LT, de cota e afastamento iguais a 5 cm; e $\overline{CD}$ um segmento vertical de 5 cm, complano com $\overline{AB}$ e tal que os dois segmentos se cortam ao meio.

a) Que nome tem a superfície gerada pela elipse de eixos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ quando roda em torno de CD?

b) Qual a envolvente da família de planos tangentes à superfície que fazem um ângulo de 60º com ν_0 e tocam a superfície em pontos acima do equador?

c) Determine o plano da família anterior que passa por um ponto dado.

3840 — Definido um hiperbolóide de revolução de uma folha pelo eixo vertical e uma geratriz, e dada uma recta r, determinar um plano π—•—r que corte o hiperbolóide segundo uma parábola. Indicar a direcção do eixo da secção. Apresenta alguma particularidade o plano tangente ao hiperbolóide paralelo a π?

3841 — Dados 3 pontos A'_3, B'_4, C'_5, determinar o centro da circunferência que por êles passa, e o ponto de encontro, com a circunferência, da recta do seu plano que passa por A e faz com ν_0 um ângulo de 45º. Resolução no sistema de projecções cotadas.

F. C. L. — Geometria Descritiva — 2.º Exame de Frequência — 22 de Maio de 1951.

Ponto n.º 2

3842 — Dada uma superfície cónica $[\gamma]$, definida pelo vértice V e pela directriz circular existente em ν_0, e dado um ponto P conduzir por P uma tangente a $[\gamma]$ que diste d cm da projectante vertical do vértice. Indicar o ponto de contacto.

3843 — Definida uma superfície cónica $[\gamma]$ pelo vértice V e pela directriz circular existente em φ_0, e dada uma recta r:

a) escolher um plano $\alpha -\bullet- r$ que produza em $[\gamma]$ uma secção hiperbólica;
b) determinar o centro da hipérbole.
c) determinar um ponto da secção em que a tangente seja horizontal.

3844 — Definido um hiperbolóide de revolução de uma folha pelo eixo vertical e uma geratriz, conduzir-lhe planos tangentes passando por uma recta dada.

3845 — Dado um plano $\alpha \equiv n_3 \cdot P_6$, determinar uma recta do plano α que faça um ângulo dado com ν_0 e diste 2 cm do ponto P. Resolução no sistema de projecções cotadas.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência — 29 de Janeiro de 1952.**

Ponto n.º 1

3846 — Dada a projecção vertical de um triângulo, a projecção horizontal de um dos vértices e a intersecção do plano do triângulo com o segundo bissector, determinar:

a) a projecção horizontal do triângulo;
b) os traços do seu plano;
c) o lugar geométrico dos pontos deste plano de cota igual ao afastamento.

3847 — Dadas duas rectas concorrentes $r -\bullet- \beta_{1,3}$ e $s -\bullet- \beta_{2,4}$, determinar as bissectrizes dos ângulos que elas formam, e os pontos de cota c que estão a igual distância das rectas dadas.

3848 — Conduza por $M(0,0,0)$ uma recta de φ_0 que forme um ângulo de 45° com LT e considere o plano α definido pelo ponto $P(3,2,1)$ e pela recta anterior. Seja R um segundo ponto do plano de abcissa 6 e cota 3. Determinar as projecções do quadrado do plano α de diagonal PR e o vértice da pirâmide regular de aresta lateral igual a 3 e cuja base é o referido quadrado.

3849 — É dado um triângulo $[ABC]$ sobre φ_0. Determine uma direcção d tal que o triângulo $[ABC]$ projectado sobre ν_0, segundo d, dê origem a um triângulo equilátero.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência — 5 de Fevereiro de 1952.**

Ponto n.º 2

3850 — Dado um plano α definido por 3 pontos $A(0,2,0)$, $B(1,0,2)$ e $C(3/2,1,3/2)$ e β, definido por uma recta de maior inclinação, determinar:

a) os traços do plano β.
b) a intersecção dos dois planos.
c) o ponto da intersecção de cota igual ao afastamento e o ponto da mesma recta de cota e afastamento simétricos.

3851 — Dados os pontos $A -\bullet- \beta_{1,3}$, $B -\bullet- \beta_{2,4}$ e C qualquer, determinar:

a) o ângulo $A\hat{C}B$.
b) a projecção vertical de um ponto M, de que se conhece M^1, sabendo que o ponto está a igual distância de A e B.

3852 — Dados os pontos $A(0,4,2)$, $B(3,6,3)$ e $C(5,5,1)$, determinar o centro da esfera que por eles passe e cujo raio é igual a 4.

3853 — Dado um trapésio $[ABCO]$, determinar o centro, o eixo e as rectas limites de uma homologia que transforme o trapézio num quadrado de lado dado.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º Exame de Frequência — 20 de Maio de 1952.**

Ponto n.º 1

3854 — Para resolver no sistema de projecções cotadas:

Dadas duas rectas p e q e um ponto P, determinar $r \begin{cases} -\bullet- P \\ \perp p \\ \perp q \end{cases}$ e o ângulo de r com ν_0. Unidade para as cotas: 2 cm.

3855 — Definida uma superfície cónica pelo vértice e pela directriz existente em φ_0, conduzir por um ponto dado P uma tangente à superfície de projecção paralelas e indicar a distância de P ao ponto de contacto da tangente com a superfície.

3856 — Seja $\overline{AB}$ um segmento paralelo a LT, de comprimento 5 cm e $\overline{CD}$ um segmento de 4 cm, perpendicular a ν_0, e tal que os dois segmentos se cortam ao meio. Tomando $\overline{CD}$ para eixo transverso e $\overline{AB}$, para eixo imaginário de uma hipérbole $[h]$, qual a superfície $[\varepsilon]$ gerada por $[h]$ quando roda em torno do eixo vertical? Existe alguma recta que gere a mesma superfície? Definir pelo vértice e por uma directriz o cone assintótico da superfície (se existir). Qual o plano polar de $O \equiv AB \cdot CD$ em relação à superfície? Determinar um dos planos tangentes a $[\varepsilon]$ que fazem um ângulo de 45° com ν_0 e passam por um ponto dado.

3857 — Seja $[c]$ uma circunferência de φ_0 e $[\varepsilon]$ um hiperbolóide de revolução de uma folha definido pelo eixo vertical e por uma geratriz. Considerando um plano assintótico α do hiperbolóide cujo traço horizontal forme com LT um ângulo de 45°, determinar o vértice de uma superfície cónica de directriz [c] que seja cortada por α segundo uma hipérbole. Indicar as assintotas da secção e um ponto de tangente horizontal e determinar os vértices e focos da projecção vertical da hipérbole.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame Final — 24 de Junho de 1952.**

Ponto n.º 1

3858 — Seja $[\alpha]$ uma superfície cónica de vértice $V(0,1,1)$ e cuja directriz é uma circunferência existente em ν_0, de centro $C(-1,2,0)$ e raio 1. Tomando uma élipse de ν_0, de centro $E(3,3,0)$ e semi-eixos 1 e 2, para directriz de uma segunda superfície cónica $[\beta]$, escolha um vértice para esta superfície por forma que na interseção de $[\alpha]$ com $[\beta]$ haja dois ramos hiperbólicos e um parabólico, e indique a assintota de um dos ramos hiperbólicos.

3859 — Definido um hiperbolóide por $d_1 \perp \nu_0, d_2 \| \varphi_0$ e d_3, determine uma 4.ª geratriz d_4 do mesmo sistema, e defina, pelos traços, o plano tangente à superfície que passa por um ponto dado e contém a geratriz d_4. Indique o ponto de contacto.

3860 — Definido um parabolóide hiperbólico, por duas directrizes e φ_0 como plano director, determine as assíntotas da secção feita por um plano $\perp \nu_0$.

3861 — Dado uma recta $r \| \beta_{24}$ e uma superfície cónica definida pelo vértice e pela directriz circular em ν_0, conduza um plano tangente à superfície paralelo a r. Determine o ângulo que faz com φ_0 o plano obtido e os pontos do plano equidistantes de ν_0 e φ_0.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame Final — 30 de Junho de 1952.**

Ponto n.º 2

3862 — Seja $[\alpha]$ uma superfície cónica de vértice $V(0,1,2)$ e que tem por directriz uma circunferência existente em ν_0, de centro $C(2,{}^3/_2,0)$ e raio 1. Tomando $g \| \beta_{24}$ para direcção das geratrizes de uma superfície cilíndrica $[\beta]$, escolha em φ_0 uma directriz para esta superfície por forma que se verifique um duplo beijamento na intersecção de $[\alpha]$ com $[\beta]$. Indique os pontos duplos da intersecção e determine as tangentes num dêles.

3863 — Definido um hiperbolóide por 3 directrizes $d_1 \perp \nu_0$, $d_2 \| \varphi_0$ e d_3, determine o centro da superfície e o parâmetro da geratriz $g \perp \nu_0$.

3864 — Mostre, a partir da fórmula de Charles, como varia o plano tangente ao longo de uma geratriz de uma superfície empenada. Exemplifique para o caso do parabolóide hiperbólico isósceles definido por 2 directriz e φ_0 como plano director, considerando os planos tangentes em pontos de uma geratriz de frente.

3865 — Dada uma esfera de centro C e raio r, conduza-lhe um plano tangente por um ponto exterior de modo que o ponto de contacto tenha uma cota dada. Conduza por P uma recta do plano obtido que faça um ângulo dado com as frontais do plano.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência — 29 de Janeiro de 1953.**

Ponto n.º 4

3866 — Dados os planos $\alpha \equiv P \cdot r \, (r' \equiv r'')$ e β, definido por uma recta de maior inclinação, determinar:

a) a intersecção dos dois planos.

b) os pontos de α a igual distância de ν_0 e φ_0.

c) os pontos de β tais que cota + afastamento $= K$ (constante).

3867 — Para resolver em geometria cotada: Dada uma recta $r \left\{ \begin{array}{l} -\bullet- Q'_5 \\ \nu_0 = 30^\circ \end{array} \right.$ e um ponto P'_3, obter sobre r dois pontos M e N a uma distância dada de P e determinar o lugar geométrico dos vértices de todos os triângulos do plano $P \cdot r$ que têm por base $\overline{MN}$ e área dupla da do triângulo $[PMN]$. Unidade para as cotas: 1 cm.

3868 — Seja α um plano definido pelos pontos $M(0,0,0)$, $A(1,2,-2)$ e $P(3,1,1)$. Determinar as projecções do triângulo equilátero de vértice em P e com um dos lados sobre MA e o centro da esfera que passa pelos vértices do triângulo e pelo ponto $R(6,1,1)$.

3869 — Considere os pontos $S(0,0,5)$, $A(0,4,0)$, $B(-1,5,0)$, $C({}^1/_2,7,0)$, $D(2,4,0)$ e $P(3,6,3)$. Colocando em S um foco luminoso e supondo transparentes os planos de projecção, conduzir por P um plano onde o quadrilátero opaco $[ABCD]$ produza uma sombra com a forma de um paralelogramo. Defina a sombra pelas suas projecções. Como determinava um segundo plano onde a sombra fôsse um paralelogramo de área dada?

3870 — Para resolver em geometria cotada: — Dada uma superfície cilíndrica de directriz circular existente em ν_0 e de geratriz com declive igual a 100 °/₀, conduzir por um ponto dado duas tangentes à superfície sendo uma de nível e fazendo a outra um ângulo de K^0 com a primeira. Indicar os pontos de contacto. Unidade para as cotas: 2 cm.

3871 — Dado um elipsóide de revolução de eixo vertical $[\varepsilon]$ e uma recta de nível n, seja $\mathcal{F}$ a família de planos tangentes a $[\varepsilon]$ paralelos a n. Que nome se dá ao lugar geométrico dos pontos de contacto dos planos de $\mathcal{F}$? E ao plano que contém esse lugar geométrico? Determine um plano da família $\mathcal{F}$ que passe por um ponto dado.

3872 — Demonstrar que a intersecção de duas quádricas de revolução, com um plano equatorial comum se projecta ortogonalmente sobre este plano (ou qualquer plano paralelo) segundo uma circunferência. Aplicar o resultado à determinação dos pontos de encontro de uma recta com um elipsóide alongado de revolução.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.° Exame de Frequência — 20 de Maio de 1953.**

Ponto n.° 4

3873 — De uma superfície cónica de 2.ª ordem conhecem-se 5 geratrizes, uma das quais de nível e outra de frente.

a) Determinar o género da directriz da superfície em ν_0.

b) Conduzir por P (dado) um plano que seccione a superfície segundo uma hipérbole de que sejam direcções assintóticas as geratrizes de nível e de frente dadas.

c) Determinar as assíntotas da secção e indicar como se podem obter os eixos, vértices e focos da sua projecção vertical.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitésimal — **2.° Exame de Frequência — 1952-53.**

3874 — Determinar as trajectórias ortogonais da família de curvas $y^2+y=kx$.

R: $4x^2+2(y^2+y)-\log(1+2y)=C$.

3875 — Determinar a curva integral da equação

$$(x+1)\,y\,y''+(x+1)\,y'^2=y\,y'$$

que contem os pontos $A(0,0)$ e $B(-1,1)$.

R: *Trata-se de uma equação de* Liouville *que tem por integral geral* $y^2=C(x^2+2x)+2C'$. *A curva integral que contem os pontos dados corresponde aos valores* $C'=0$ *e* $C=-1$ *das constantes.*

3876 — Determine a área da região limitada pelas curvas $y=\log x$, $x=0$, $y=0$ e $y=1$.

R: $e-1$.

3877 — Mostre como se pode integrar a equação $y'=f(y/x)$.

3878 — Demonstre o teorema de Du Bois Reymond.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — **1.° exame de frequência extraordinário prático — 19-3-954.**

I

3879 — Calcular $\displaystyle\int\frac{x^2-2x+1}{x^3(x^4-1)(x+1)^2}\,dx$.

R: $$\int\frac{x^2-2x+1}{x^3(x^4-1)(x+1)^2}\,dx=\int\frac{x-1}{x^3(x+1)^3(x^2+1)}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2x^2}-\frac{4}{x}-12\log x-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{7}{2(x+1)}+$$
$$+14\log(x+1)+\frac{3}{20}\log(x^2+1)+\frac{1}{10}\operatorname{arctg}x+K.$$

II

3880 — Determinar uma fórmula de recorrência para o cálculo de $I_{m,n}=\displaystyle\int\frac{(a+x)^m}{(a^2+x^2)^n}\,dx$ $\quad m>0, n>0$ e inteiros.

Calcular em particular:

$$a)\int(a+x)^m\,dx\qquad b)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\qquad c)\int\frac{a+x}{(a^2+x^2)^3}\,dx.$$

R: $$I_{m,n}=\int\frac{(a+x)^{m-2}(a+x)^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx=$$
$$=\int\frac{(a+x)^{m-2}(a^2+x^2)+2ax(a+x)^{m-2}}{(a^2+x^2)^n}\,dx=$$
$$=I_{m-2,n-1}+a\int\frac{(a+x)^{m-2}x}{(a^2+x^2)^n}\,dx=I_{m-2,n-1}-$$
$$-\frac{a(a+x)^{m-2}}{(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}}+\frac{a(m-2)}{n-1}I_{m-3,n-1}+C$$

a) $$\int(a+x)^m\,dx=\frac{(a+x)^{m+1}}{m+1}+C$$

b) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{2x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}$$

c) $$\int \frac{a+x}{(a^2+x^2)^3}\,dx = a\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(a^2+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^3}\,dx - \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} -$$
$$- \frac{1}{2a}\int \frac{2x^2\,dx}{(a^2+x^2)^3} - \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^3(a^2+x^2)} - \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} - \frac{1}{2a}\left(\frac{(a^2+x^2)^{-2}}{-2}x + \frac{1}{2}\int (a^2+x^2)^{-2}\,dx\right) = \frac{1}{2a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^3(a^2+x^2)} -$$
$$- \frac{1}{4(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{4a(a^2+x^2)^2} - \frac{1}{8a^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{x}{8a^3(a^2+x^2)}.$$

III

3881 — Determinar a condição de existência de $I = \int_0^\infty \frac{x^m-1}{x^n-1}\,dx$ com $m, n > 0$ inteiros e calcular este integral para $m=2, n=4$ e para $m=1, n=4$.

R: *A condição de existência é* $m < n+1$.

Para $m=2, n=4$ *vem:*

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^4-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Para $m=1, n=4$ *vem:*

$$I = \int_0^\infty \frac{x-1}{x^4-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\operatorname{artg} x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º Exame de frequência extraordinário (teórico) — 20-3-954.

I

3882 — *a*) Sendo $P(x, y, z)$ um ponto variável e $P_1(a, b, c)$ um ponto fixo, determine uma função escalar u, só da variável x, que satisfaça à equação

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{(P-P_1)^2}{(P_1-O)^2} = \operatorname{grad} u/(P-P_1)$$

sendo O a origem dos eixos. (coordenadas cartesianas ortogonais).

b) Discussão — Em que domínio existem funções reais $u(x)$ satisfazendo à condição dada?

R: a) *A equação dada equivale a*

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{du}{dx} I/[(x-a)I + (y-b)J + (z-c)K]$$ *ou ainda* $$\frac{6}{a^2+b^2+c^2} = \frac{du}{dx}(x-a)$$

$$du = \frac{6\,dx}{(a^2+b^2+c^2)(x-a)}$$

$$u = \frac{6}{a^2+b^2+c^2}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{6\log(x-a)}{a^2+b^2+c^2} + C.$$

b) *O domínio terá de ser evidentemente* $(a, +\infty)$.

II

3883 — Verifique:

1.º) Que o teorema de Peano não é aplicável ao sistema:

$$\begin{cases} y_1 = 3x^2 + 2x^3 \\ y_2 = x^2 + x^3 \\ y_3 = 4x^2 + 3x^3 \quad \text{no intervalo } (-a, a). \end{cases}$$

2.º) Que as funções são linearmente dependentes, qualquer que seja x.

Que conclusão deve tirar-se destes dois factos?

R: 1.º) *O Wronskiano do sistema é*

$$W = \begin{vmatrix} 3x^2+2x^3 & x^2+x^3 & 4x^2+3x^3 \\ 6x+6x^2 & 2x+3x^2 & 8x+9x^2 \\ 6+12x & 2+6x & 8+18x \end{vmatrix}$$

e como os complementos algébricos da última linha são todos nulos em $x=0$, *ponto interior* $a(-a, a)$, *não se pode aplicar o teorema de Peano.*

2.º) *Existe um teorema que diz: «Se um sistema de funções for linearmente dependente o Wronskiano das funções é identicamente nulo».*

Ora é evidente que $W=0$ *para qualquer valor* x *(a terceira coluna é a soma das duas primeiras) e então está verificado que as funções são linearmente dependentes.*

Destes dois factos conclue-se que embora o teorema de Peano *não seja aplicável às funções dadas elas são linearmente dependentes. O teorema de* Peano *e o teorema enunciado em 2.º) não são proposições recíprocas.*

III

3884 — Como se sabe, demonstra-se a existência do integral de Stieltjes $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ quando $f(x)$

for contínua e $F(x)$ de variações limitada em (a, b). Veja se sabe definir um integral de STIELTJES $\int_b^a f(x)\,dF(x)$ que será finito sem que a função $F(x)$ seja de variação limitada.

IV

3885 — Verifique que $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$ sendo $f(r)$ uma função escalar da distância r do ponto variável $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ do espaço n-dimensional à origem $O(0, 0, \cdots 0)$. Supõe-se, bem entendido, que existem as derivadas $f'(r)$ e $f''(r)$ (coordenadas cartesianas ortogonais).

R: $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ *e como:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \dfrac{df}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x_k} = f'(r)\dfrac{x_k}{r} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \dfrac{f''(r)}{r^2} x_k^2 + f'(r)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{x_k^2}{r^3}\right) \end{cases}$$

vem: $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{f''(r)}{r^2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$

$$= f''(r) + \frac{n f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r} = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r).$$

I. S. C. E. F. — ANÁLISE INFINITÉSIMAL — 2.º Exame de frequência teórico (ordinário) 14-6-54

I

3886 — *a*) Verifique que a equação $yz\,dx - xz\,dy - y^2\,dz = 0$ é completamente integrável.

b) Sabido que $F = \frac{x}{y} - \log z = C$ é integral da equação, verifique que $\lambda = \frac{1}{y^2 z}$ é factor integrante.

II

3887 — Verifique que a equação $yq^2 + xp = z$ é integrável por dualidade e integre-a.

III

3888 — Sendo $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ um ponto do espaço n-dimensional, diga como se extende o conceito de $\int_V f(P)\,dV$ quando:

a) $f(P)$ se torna infinita em V um número finito de vezes; b) $f(P)$ se torna infinita em V um número infinito de vezes; c) o domínio V é ilimitado.

Mostrar que $\iint_A \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dx\,dy$ é divergente quando A é o primeiro quadrante.

IV

3889 — Seja $U(x, y) = \text{Const.}$ a equação geral duma família de curvas planas Γ num sistema de eixos rectângulares. Qual é a condição necessária e suficiente a que deve satisfazer $U(x, y)$ para que as curvas que cortam as curvas Γ sob um ângulo constante α sejam representadas, qualquer que seja α, por uma equação da forma $U(x, y) + V(x, y)\operatorname{tg}\alpha = C$ onde $V(x, y)$ é independente de α e C designa uma constante arbitrária.

Explicar o resultado por meio da teoria das funções analíticas duma variável complexa.

V

3890 — Analise os casos de indeterminação, nos problemas do cálculo das variações, relativos:

1.º) ao integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$;

2.º) ao integral duplo $\iint_A f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$.

I. S. C. E. F. — ANÁLISE INFINITESIMAL — 2.º exame de frequência teórico (extraordinário) — 3-6-954.

I

3891 — Se $v = f(u)$ é uma função que admite as derivadas $f'(u)$ e $f''(u)$ sendo u uma função homogénea de grau n das variáveis x e y mostrar que:

$$x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} =$$
$$= n(n-1)\,u f'(u) + n^2 u^2 f''(u)$$

II

3892 — As fórmulas de RIEMANN e OSTROGRADSKI no cálculo de áreas planas e de volumes.

III

3893 — Considere a função de variável complexa $w = \operatorname{arctg} z$ $(z = x + iy)$.

1.º) Pôr esta função na forma $P(x,y) + i(Qx,y)$ onde P e Q representam funções reais das variáveis reais x e y.

2.º) Definir as curvas representadas em coordenadas rectangulares pelas equações $P =$ constante, $Q =$ constante.

3.º) Achar o ângulo segundo o qual uma curva da primeira família corta a outra da segunda família.

IV

3894 — Encontrar as expressões gerais das duas funções $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ tais que as duas equações: $dz = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy$

$$dz = 2\,[P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy]$$

sejam uma e outra completamente integráveis. Encontrar a expressão geral das funções $\lambda(x,y,z)$ tais que a equação:

$$dz = \lambda(x,y,z)\,[P(x,y,z)\,dx + Q(x,z,z)\,dy]$$

seja também completamente integrável.

V

3895 — No problema de cálculo das variações respeitante ao integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\,dx$ a função $y(x)$ é dada pela equação diferencial 1) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$.

Provar que: *a)* a equação 1) é de segunda ordem se $F(x,y,y',y'') = y'' f(x,y,y') + g(x,y,y')$. *b)* a equação 1) reduz-se a uma identidade quando $F(x,y,y',y'') = y''\frac{\partial \varphi}{\partial y'} + y'\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ onde φ é função de x, y, y'.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — Exame final — Época de Julho — 16-7-954.

I

3896 — Se $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \varphi(X,Y,Z)$, onde $X = x_2 x_6 - x_3 x_5$, $Y = x_3 x_4 - x_1 x_6$, $Z = x_1 x_5 - x_2 x_4$, mostrar que:

a) $x_1 F'_{x_4} + x_2 F'_{x_5} + x_3 F'_{x_6} = 0$

b) $x_4 F'_{x_1} + x_5 F'_{x_2} + x_6 F'_{x_3} = 0$.

Demonstrar ainda que, sendo F homogénea de grau n em x_1, x_2, x_3, φ é também homogénea de grau n em X, Y, Z e F homogénea de grau n em x_4, x_5, x_6.

R: a) $x_1 F'_{x_4} + x_2 F'_{x_5} + x_3 F'_{x_6} = x_1(\varphi'_Y x_3 - \varphi'_Z x_2) + x_2(-\varphi'_X x_3 + \varphi'_Z x_1) + x_3(\varphi'_X x_2 - \varphi'_Y x_1) = 0$.

b) $x_4 F'_{x_1} + x_5 F'_{x_2} + x_6 F'_{x_3} = x_4(-\varphi'_Y x_6 + \varphi'_Z x_5) + x_5(\varphi'_X x_6 - \varphi'_Z x_4) + x_6(-\varphi'_X x_5 + \varphi_Y x_4) = 0$.

Sendo F *homogénea de grau* n *em* x_1, x_2, x_3, *tem-se, segundo o teorema de* Euler: (1) $x_1 F'_{x_1} + x_2 F'_{x_2} + x_3 F'_{x_3} = n\,F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = n\,\varphi(X,Y,Z)$.

Ora $x_1 F'_{x_1} + x_2 F'_{x_2} + x_3 F'_{x_3} = x_1(-\varphi'_Y x_6 + \varphi'_Z x_5) + x_2(\varphi'_X x_6 - \varphi'_Z x_4) + x_3(-\varphi'_X x_5 + \varphi'_Y x_4) = (x_2 x_6 - x_3 x_5)\varphi'_X + (x_3 x_4 - x_1 x_6)\varphi'_Y + (x_1 x_5 - x_2 x_4)\varphi'_Z = X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z$ *e a igualdade* (1) *dá imediatamente:*

$$X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z = n\,\varphi(X,Y,Z), \quad \text{c. q. d.}$$

Para demonstrar que F *é homogénea de grau* n *em* x_4, x_5, x_6, *basta notar que:*

$$\begin{aligned} x_4 F'_{x_4} + x_5 F'_{x_5} + x_6 F'_{x_6} &= x_4(\varphi'_X x_3 - \varphi'_Z x_2) + x_5(-\varphi'_X x_3 + \varphi'_Z x_1) + x_6(\varphi'_X x_2 - \varphi'_Y x_1) = \\ &= (x_2 x_6 - x_3 x_5)\varphi'_X + (x_3 x_4 - x_1 x_6)\varphi'_Y + (x_1 x_5 - x_2 x_4)\varphi'_Z = X\varphi'_X + Y\varphi'_Y + Z\varphi'_Z = \\ &= n\,\varphi(X,Y,Z) = n\,F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \end{aligned}$$

o que mostra que F *é homogénea de grau* n em x_4, x_5, x_6.

II

3897 — Sendo Γ uma curva plana, considerem-se as circunferências de raio r cujos centros estão em Γ. Determinar a envolvente desta família de circunferências e provar que ela é constituida por duas curvas paralelas a Γ à distância r.

R: *Sendo* $y = f(x)$ *a curva* Γ *a família de circunferências de raio* r *cujos centros estão em* Γ *é* $f(x,y,c) = (x-c)^2 + [y - f(c)]^2 - r^2 = 0$ *e para achar a envolvente tem de se eliminar* c *entre as equações:*

$$\begin{cases} f(x,y,c) = 0 \\ f'_c(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (x-c)^2 + [y - f(c)]^2 - r^2 = 0 \\ -2(x-c) - 2[y - f(c)]\,f'(c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + [y - f(c)]^2 - r^2 = 0 \\ x = c - [y - f(c)]\,f'(c) \end{cases}$$

A envolvente é, pois, em equações paramétricas:

$$\begin{cases} y = f(c) \pm \dfrac{r}{\sqrt{[f'(c)]^2 + 1}} \\ x = c \mp \dfrac{r\,f'(c)}{\sqrt{[f'(c)]^2 + 1}} \end{cases}$$

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dc}}{\frac{dx}{dc}} = f'(c)$, *como fàcilmente se pode verificar, fica provado que a envolvente é constituida por duas curvas paralelas a* Γ.

III

3898 — Dada a equação linear:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$$

tome-se uma nova variável independente t ligada a x pela relação $t = \varphi(x)$ e a equação (1) é substituída pela nova equação linear :

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + q_1(t)\,y = 0 .$$

Encontrar a condição a que devem satisfazer os coeficientes p e q da equação (1) para que seja possível escolher a função φ de modo que a equação (2) tenha os seus coeficientes constantes.

Supondo $p = \frac{2}{x}$, encontrar a expressão geral de $q(x)$ e o integral geral da equação (1) correspondente.

R: *Tem-se* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\varphi'(x)$ *e* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2 + \frac{dy}{dt}\varphi''$ *e substituindo estes valores em* (1) *obtém-se a equação* $\varphi'^2\frac{d^2y}{dt^2} + (p\varphi' + \varphi'')\frac{dy}{dt} q y = 0$ *e para que ela se reduza à forma* (2) *terá de ser:*

$$\begin{cases} p\varphi' + \varphi'' = a\varphi'^2 \\ q = b\varphi'^2 \end{cases}.$$

Derivando em ordem a x *a segunda equação, obtém-se o sistema de 3 equações* $\begin{cases} p\varphi' + \varphi'' = a\varphi'^2 \\ q = b\varphi'^2 \\ q' = 2b\varphi'\varphi'' \end{cases}$ *e eliminando* φ' *e* φ'' *vem* $\frac{1}{q}\left(p + \frac{q'}{2q}\right) = C$ *que é a relação procurada.*

Sendo $p = \frac{2}{x}$ *e, substituindo na relação já deduzida, obtém-se:* $\frac{2}{x} + \frac{q'}{2q} = \pm\sqrt{\lambda q}$ $(\lambda = \text{const.})$ *equação diferencial que se pode linearizar fazendo* $\pm\sqrt{\lambda q} = \frac{\lambda}{u}$.

A equação linear é $2u - xu' = \lambda x$ *que integrada dá* $u = \lambda x + \mu x^2$ *e portanto* $q = \frac{k\alpha^2}{x^2(x+\alpha)^2}$ $(\alpha, k$ *constante*$)$.

A equação (1) *é então* $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{k\alpha^2}{x^2(x+\alpha)^2}y = 0$ *e, fazendo a mudança de variáveis* $t = \log\frac{x}{x+\alpha}$, *obtém-se* $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ky = 0$ *que se integra pelos métodos já conhecidos.*

Soluções dos n.os 3879 e 3898 de Fernando de Jesus

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — Pontos de frequência do ano de 1953/54.

3899 — Mostrar que todo o grupo abeliano finito é resolúvel (admite uma série normal de factores abelianos).

3900 — Se um anel $\mathfrak{S}$ tem um número finito de geradores, prove que $\mathfrak{S}^2$ também tem um número finito de geradores. Quais? Generalize o resultado.

3901 — Mostre que um anel simples que é anel zero, isto é, tal que $\mathfrak{S}^2 = (0)$, é um grupo finito.

3902 — Seja $\mathfrak{M}$ um módulo — Ω. Determine a expressão geral do grupo gerado por x. Note que tal grupo com cada elemento contém os resultados das aplicações dos operadores de Ω, por ser sub-módulo admissível.

3903 — Sejam $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, dois anéis de características $\gamma_{\mathfrak{B}}$ e $\gamma_{\mathfrak{A}}$. Prove que $\gamma_{\mathfrak{B}} \leq \gamma_{\mathfrak{A}}$.

Mostre que todo o anel $\mathfrak{B}$ se pode mergulhar no anel $\mathfrak{A}$, com unidade, e tal que $\gamma_{\mathfrak{B}} = \gamma_{\mathfrak{A}}$.

3904 — Seja $\mathfrak{S}$ um anel simples que não é anel zero $(\mathfrak{S}^2 \neq (0))$. Mostre que o centro $\mathfrak{z} \neq (0)$ é um corpo.

3905 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel totalmente redutível. Mostre que

a) Se $\mathfrak{a}$ é um ideal bilateral de $\mathfrak{A}$ então $\mathfrak{a}$ como anel, é totalmente redutível.

b) Se $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}^{**}$, forem os radicais de $\mathfrak{a}$, então $\mathfrak{a}$ pode-se escrever

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R} + \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^* + \mathfrak{b}^*$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^{**} + \mathfrak{b}^{**}$$

em que $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{b}^{**}$, são aneis cujos radicais $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{R}^{**}$ São nulos.

3906 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel comutativo. Prove que o radical $\mathfrak{R}$ é a intersecção dos ideais bilaterais $\mathfrak{b}$ tais que $\mathfrak{A}/\mathfrak{b}$ tem radical $\mathfrak{R} = 0$.

3907 — Considere o determinante

$$\Delta = \det|\Sigma\, a_{ij}\, b_{jk}|$$

como função dos vectores

$$\mathfrak{a}_i = |a_{i1}, \cdots a_{in}| \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

admitindo que os b_{jk} são constantes. Tendo em conta que Δ verifica 2 propriedades características dos determinantes há uma proposição que permite deduzir a regra do produto de determinantes. Diga quais são as propriedades verificadas e deduza que efectivamente se tem

$$\Delta = |a_{ij}| \cdot |b_{jk}| .$$

3908 — Seja $\mathfrak{M}$ um módulo — Ω onde Ω é um corpo satisfazendo à condição de cadeia ascendente. Sabendo-se que o elemento unidade do corpo actua como o automorfismo identidade $(x1 = x)$ demonstre

a) que se $\mathfrak{M}$ for simples é $\mathfrak{M} = v\,\Omega$ em que $v \neq 0$ é arbitrário e $v \in \mathfrak{M}$

b) que se não é simples, é soma directa dum número finito de módulos simples.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3909 — Provar que

$$(1+\sqrt{3})^n = 6\,(1+\sqrt{3})^{n-2} + 4\,(1+\sqrt{3})^{n-3}$$

3910 — Considere um triângulo equilátero $[A_1, B_1, C_1]$ de área $\mathcal{A}$. Inscrito no triângulo anterior um novo triângulo equilátero $[A_2, B_2, C_2]$ tal que os seus lados sejam respectivamente perpendiculares aos do anterior. Do mesmo modo e indefinidamente triângulos equiláteros, inscritos nos sucessivos triângulos que se vão obtendo por aquele processo.

Calcule o limite da soma das áreas dos triângulos quando o número destes tende para ∞.

Secção Média

3911 — Demonstrar que

$$\frac{d^n(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \operatorname{arc\,cot} x).$$

3912 — Demonstrar que a correspondência $a + b\sqrt{3} \longleftrightarrow a + b\sqrt{5}$ (a e b racionais) não é um isomorfismo, e provar que não pode existir nenhum isomorfismo entre os corpos $R(\sqrt{3})$ e $R(\sqrt{5})$.

Resoluções dos problemas do concurso, propostos no n.º 56

Apresentou soluções correctas dos n.ºˢ 3730, 3731 e 3732, que se publicam, o Snr. Fernando de Jesus.

3730

R: *Como* $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ *virá* $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x =$

$= \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} > 0$ *e também é evidente que* $\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} < 2$ *donde se conclui que* $0 \leqslant \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x < 2$ *o que mostra que é impossível a dupla desigualdade proposta.*

3731

R: *Como* $p = \overline{OP} \cos\alpha$ *e* $p = 2\cos A$ *vem*

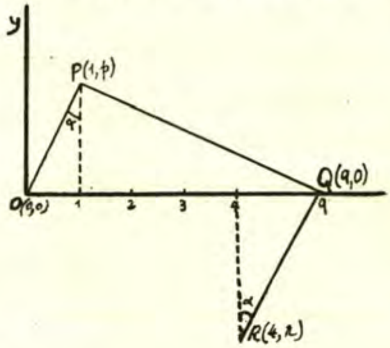
$$\cos\alpha = \frac{2\cos A}{\overline{OP}} = \frac{2\cos A}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{2\cos A}{\sqrt{1+4\cos^2 A}} .$$

Conclui-se também que $\overline{QR} = \dfrac{q-4}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{q-4}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$

$= \dfrac{q-4}{\sqrt{1-\dfrac{4\cos^2 A}{1+4\cos^2 A}}} = \dfrac{q-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1+4\cos^2 A}}}$. *Então*

$r = \overline{QR}\cos\alpha = \dfrac{q-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1+4\cos^2 A}}}\;\dfrac{2\cos A}{\sqrt{1+4\cos^2 A}} =$

$= 2\cos A\,(q-4)$ *e como* $q = 1 + p^2 = 1 + 4\cos^2 A$ *vem* $r = 2\cos A\,(4\cos^2 A - 3) = 2\cos 3A$ *c. q. d.*



3732

R: *Sendo* $x = n$ *(inteiro) e substituindo este valor na função dada vem* $y = n^2 + (2n+1)(n-n) = n^2$ *que é o mesmo valor que se obtém fazendo* $x = n$ *em* $y = x^2$.

Considerando os inteiros consecutivos n *e* $n+1$ *e sendo* $X = n + \theta$ $(0 < \theta < 1)$ *vem para valor correspondente da função:* $Y = n^2 + (2n+1)\,\theta$.

Ora a equação da recta que passa pelos pontos (n, n^2) $[(n+1), (n+1)^2]$ *pertencentes a* $y = x^2$ *é* $Y - n^2 = (2n+1)(X-n)$ *e fazendo* $X = n+\theta$ *vem* $Y = n^2 + (2n+1)\,\theta$.

Fica assim demonstrado que a representação gráfica da equação é uma poligonal inscrita na parábola $y = x^2$ *cujos vertices correspondem aos valores inteiros da variável independente.*

3733 — Não foram apresentadas soluções.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor: **Gauthier-Villars, Paris**

A. Denjoy — *L'Énumération transfinie.* III — *Études complémentaires sur l'ordination.*
IV — *Notes sur les sujects controversés.*

A. Denjoy — *Mémoire sur la Dérivation et son calcul inverse.*

A. Einstein — *L'Ether et la Théorie de la Relativité — La Géométrie et l'Experience.*

A. Einstein — *La Théorie de la Relativité Restreinte et Générale. La Relativité et le problème de l'espace.*

G. Julia — *Cours de Géométrie Infinitésimale* — Fasc. I.

Mémorial des Sciences Mathématiques

Fasc. CXXIV — Karl Menger — *Géométrie générale.*
CXXV — W. J. Trjitzinsky — *Les Problèmes de Totalisation se rattachant aux Laplaciens non sommables.*
CXXVI — P. Lévy — *Le Mouvement Brownien.*

Traité de Théorie des Fonctions

Tome I — H. Milloux — *Principes. Méthodes Générales* — Fasc. I.

Collection de Logique Mathématique — Série A.

V. — *Applications Scientifiques de la Logique Mathématique.*

Cahiers Scientifiques

Fasc. XXI — D. Jacotin, Lesieur, Croisot — *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnees et des treillis géometriques.*

Collection de Monographies sur la Theorie des Fonctions

Emile Borel — *Les nombres inaccessibles.*

Editor: **Presses Universitaires de France**

André Delachet — *La Resistence des Matériaux.*

Monographies des Probabilités

Fasc I — P. Lévy — *Théorie de l'addition des Variables Aléatoires* (2ème Édition).

Les Grands Problèmes des Sciences

I. — L. de Broglie — *La Physique Quantique restera-t-elle indéterministe?*

Editor: **Librairie Vuibert, Paris**

G. Bouligand — *Mécanique Rationnelle — Cours et problémes résolus.*

R Gouyon — *Le Problème de Mécanique Rationnelle a l'Agrégation.*

A. Monjallon — *Introduction a la Méthode Statistique.*

Editores: **Georges Thone, Liège — Masson et Cie, Paris.**

Prémier Colloque sur les Équations aux Dérivées Partielles.
Colloque sur les Fonctions de Plusieurs Variables.

Editor: **Walter de Gruyter & Co., Berlin**

F. Böhm — *Versicherungsmathematik II.*

G. Kowalewski — *Einführung in die Determinanten theorie.*

Hofmann — *Geschichte des Mathematik* — 1 Teil.

G. Holeisel — *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Editor: **Verlag für Angewandte Wissenschaften, Wiesbaden.**

Helmut Hasse — *Mathemathik als Wissenschaft, Kunst und Macht.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Três números publicados em 1953

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1955 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.^{os} 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.^{os} 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1955 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.^{os} 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40\$00
N.^{os} 12 e 15 a 49, cada número	12\$50
N.º 50	60\$00
N.^{os} 51 a 59, cada número.	17\$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17\$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Lisboa-N — Telef. 771943