GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XV N.° 60-61 JULHO 1955

SUMÁRIO

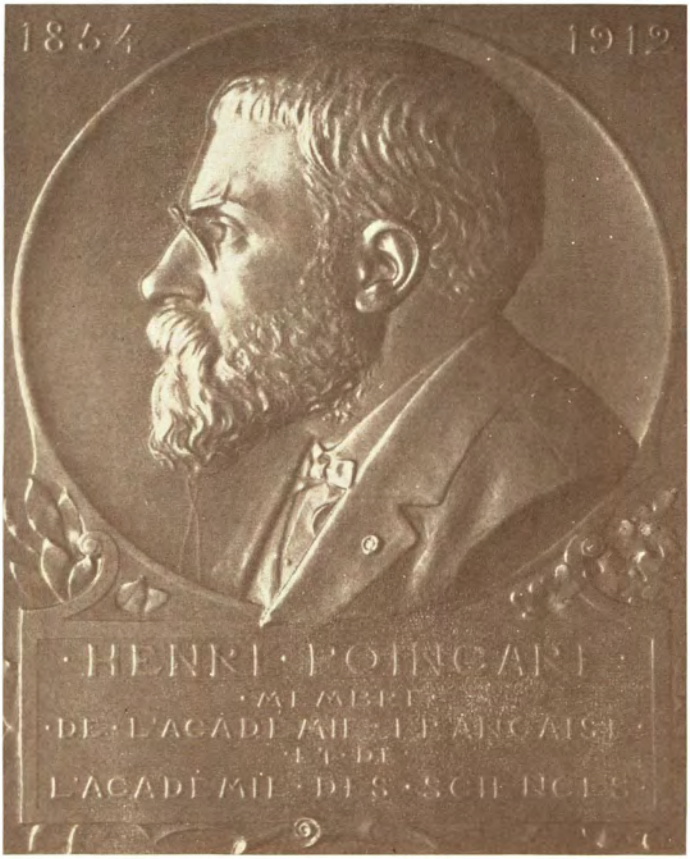
DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Telefone 771943 — LISBOA-N.



Medalhão da Homenagem da Academia das Ciências de França, em 1912, a

HENRI POINCARÉ

ANO XVI — N.º 60-61 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO — 1955

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 771943 — LISBOA-N.

No primeiro centenário do nascimento de Henri Poincaré

*por **Ruy Luís Gomes***

Em 24 de Setembro de 1904, realizou POINCARÉ, perante o Congresso Internacional de Artes e Ciências, reunido em St. Louis, uma conferência(1) intitulada «O estado actual e o futuro de Física Matemática», que as ulteriores e surpreendentes aquisições da Ciência não conseguiram desactualizar, antes consagraram como modêlo de síntese histórica e poder de previsão.

Por esse motivo, ao receber um convite para participar na elaboração deste número de homenagem ao *«main» Matemático Francês da segunda metade do século XIX*(2), surgiu-me logo a ideia de a tomar para tema central, não pròpriamente de um artigo mas apenas de um comentário.

Mas — perguntará o leitor — será legítimo isolar de toda a sua obra, que abrange a teoria do potencial, luz, electricidade, calor, capilaridade, electromagnetismo, hidrodinâmica, termodinâmica, probabilidade e ainda os problemas filosóficos do infinito e do contínuo, precisamente uma conferência sobre «... o futuro da Física Matemática», quando para nós contemporâneos da era atómica, esse futuro está já cinquenta anos para trás, e cinquenta anos no decorrer dos quais se operou uma verdadeira revolução em muitas das nossas concepções sobre o universo?

O próprio POINCARÉ preveniu o seu auditório, de 1904, que não esperasse uma profecia à «sensation», nem sequer um *prognóstico*... E sentem-se os seus cuidados, de se manter sempre no terreno menos traiçoeiro de um simples diagnóstico, que, afinal, para felicidade dos seus ouvintes e nossa ainda mais, o seu génio transpôs a cada passo.

Tivesse ele, no entanto, rompido abertamente com todas essas limitações, tivesse ele conseguido errar e a nossa admiração, ao comemorarmos este centenário, seria ainda maior, se acaso isso é possível, pois os erros dos grandes homens são por vezes mais fecundos que os seus acertos, como tem sido salientado a propósito de alguns dos maiores. A impressão que se colhe, *hoje*, da leitura dessa conferência desfaz, porém, imediatamente todas as dúvidas ou pequenas preven-

(1) Foi publicada na íntegra, pela primeira vez, em *La Revue des Ideés*, Paris, Nov. 15 1904, p. 801.818 e suponho que ainda não foi referida no nosso País. A ser assim, mais se nos impõe o dever de aproveitar esta oportunidade para a tornar acessível aos estudantes das nossas Universidades; é o que faremos utilizando a fotocópia existente na J. I. M.

(2) Palavras de D. J. STRUIK, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1948, p. 278.

ções que a nossa preocupação, *de sermos do nosso tempo,* teimasse em formular.

Com efeito, ultrapassando tudo aquilo que já não-será possível aceitar sem alterações, está o admirável estudo crítico da origem e evolução da Física Matemática, desde o paradigma Newtoniano — *fase das forças centrais* — até ao aparecimento das concepções de MAXWELL — *fase dos grandes princípios:* princípio de MAYER ou da conservação da energia, princípio de LAVOISIER ou da conservação da massa, princípio da igualdade de acção e reacção ou princípio de NEWTON, princípio da CARNOT ou da degradação da energia, princípio de menor acção e ainda princípio da relatividade (1).

Está ainda na clarividência com que, já em plena crise pré-relativista, na viragem do século XIX para o século XX, se firmou na convicção de que, a pesar de tudo..., a última batalha seria ganha pela Física-Matemática dos princípios.

Está também na lucidês com que, reflectindo sobre o fracasso, uma após outra, de todas as tentativas para medir a velocidade *absoluta* da Terra, foi até ao ponto de acrescentar aos princípios clássicos, *o princípio de relatividade* (2) «as leis dos fenómenos físicos devem ser as mesmas, seja para um observador fixo, seja para um observador animado de um movimento de translação uniforme; de sorte que nós não temos e nem podemos ter nenhum meio de discernir se somos, sim ou não, arrastados por um semelhante movimento».

Ora, segundo este enunciado, *o princípio de relatividade* engloba não só as leis dos fenómenos do movimento dos corpos em particular as que se referem à *inércia*, como ainda as da *propagação da luz,* nomeadamente naquele aspecto em que exprimem que a sua forma *não depende da velocidade da respectiva fonte* (1).

Por isso mesmo, pode dizer-se, sem receio de paradoxo, EINSTEIN construiu a *Relatividade* sobre um duplo *absoluto:* o da acelaração dos corpos materiais e o da propagação da luz (expressa geomètricamente no cone de luz); enquanto que GALILEU e NEWTON apenas consideravam o *absoluto-aceleração.* Regressando, porém, ao texto de POINCARÉ, desejamos salientar que há nele ainda uma alusão bem clara a uma *nova mecânica:* «Talvez devamos construir uma nova mecânica, que apenas entrevemos, na qual, crescendo a inércia com a velocidade, a velocidade da luz tornar-se-ia um limite intransponível».

E tanto basta para se apreciar, cinquenta anos depois, o alcance e a justeza das palavras proféticas do grande Físico-Matemático! Um ponto há, no entanto, em que POINCARÉ se deteve e não indicou, em termos assim explícitos, o sentido da solução — e esse ponto é o que diz respeito à *gravitação.*

Efectivamente, só EINSTEIN deu uma explicação satisfatória do fenómeno da gravitação, baseando-se, para isso, na equivalência entre a massa da inércia e a massa gravítica; equivalência que, como facto experimental, era já conhecida de NEWTON.

Mas essa explicação surgiu (já depois da morte da POINCARÉ) no decorrer dos anos de 1913 e 1914, quando EINSTEIN formulou a *Relatividade Geral,* associando a gravitação à inércia e estabelecendo que a matéria presente no universo é afinal a determinante dos fenómenos da gravitação-inércia e também do espaço e do tempo acessíveis à observação e experiência.

(1) POINCARÉ refere estes seis princípios.

(2) E. WHITTAKER, no 2.º vol. da sua documentadíssima *História das Teorias do Eter e Electricidade*, ed. Thomas Nelson and Sons Ltd, Edinburgh, 1953, salienta devidamente este resultado do *penetrante e original espírito* de POINCARÉ (p. 30, 31, Cap. II, *A Teoria da Relatividade de* POINCARÉ *e* LORENTZ).

(1) Traduz-se isto dizendo, quase como regra, que a velocidade da luz é constante. Mas é uma maneira errada de interpretar os factos, como tem sido posto em relevo por H. WEYL.

E só muito depois (1), em 1949-1950, lhe foi possível, com a colaboração de outros físicos teóricos, dar toda a relevância ao carácter *não-linear* das equações da gravitação, demonstrando que, por força disso, elas nos dão *também* os movimentos das massas potenciantes (e não apenas a estrutura do espaço e do tempo). É que essas equações não são *compatíveis* senão para *certos* movimentos dessas massas.

Poincaré pressentiu, porém, o problema, como ressalta destas suas interrogações:

«Eis-nos então em face dum problema que eu me limito a pôr. Se não há massa constante, que acontece à lei de Newton»?

«A massa tem dois aspectos, é ao mesmo tempo um coeficiente de inércia e uma massa gravítica (*attirante*) entrando como factor na atracção newtoniana. Se o coeficiente da inércia não é constante, a massa gravítica poderá sê-lo»?

«Eis o problema».

E se é certo que a resposta satisfatória a estas interrogações pertence a Einsten, formulá-las é já um título de glória para Poincaré, embora não seja senão uma das muitas manifestações do seu extraordinário poder criador!

(1) Consultar Scheidegger, *Gravitational Motion*, Rev. Mod. Phys. Vol. 25, No. 2, 1953.

L'Etat actuel et l'avenir de la Physique Mathématique (*)

par Henri Poincaré

Quel est l'état actuel de la Physique Mathématique? Quels sont les problèmes qu'elle est amenée à se poser? Quel est son avenir? Son orientation est-elle sur le point de se modifier? Le but et les méthodes de cette science vont-ils apparaître dans dix ans à nos successeurs immédiats sous le même jour qu'à nous-mêmes; ou au contraire allons-nous assister à une transformation profonde? Telles sont les questions que nous sommes forcés de soulever, en abordant aujourd'hui notre enquête.

S'il est facile de les poser, il est difficile d'y répondre. Si nous nous sentions tentés de risquer un pronostic, nous résisterions aisément à cette tentation en songeant à toutes les sottises qu'auraient dites les savants les plus éminents d'il y a cent ans, si on leur avait demandé ce que serait la Science au XIX^e siècle. Ils auraient cru être hardis dans leurs prédictions, et combien, après l'événement, nous les trouverions timides. N'attendez donc de moi aucune prophétie.

Mais si, comme tous les médecins prudents, je répugne à donner un pronostic, je ne puis pourtant me dispenser d'un petit diagnostic; eh bien, oui, il y a des indices d'une crise sérieuse, comme si nous devions nous attendre à une transformation prochaine. Ne soyons pas toutefois trop inquiets. Nous sommes assurés que la malade n'en mourra pas et même nous pouvons espérer que cette crise sera salutaire, car l'histoire du passé semble nous le garantir. Cette crise en effet n'est pas la première et il importe, pour la comprendre, de se rappeler celles qui l'ont précédée. Pardonnez-moi un court historique.

La Physique Mathématique, nous le savons, est née de la Mécanique céleste qui l'a engendrée à la fin du XVIII^e sciècle, au moment où elle venait elle-même d'atteindre son complet développement. Dans ses premières années surtout, l'enfant ressemblait à sa mère d'une manière frappante.

L'Univers astronomique est formé de masses, très grandes sans doute, mais séparées par des distances tellement immenses qu'elles ne nous apparaissent que comme des points matériels; ces points s'attirent en raison in-

(*) Extraído do original publicado em *La Revue des Idées*, Paris, Nov. 1904.

verse du carré des distances et cette attraction est la seule force qui influe sur leurs mouvements. Mais si nos sens étaient assez subtils pour nous montrer tous les détails des corps qu'étudie le physicien, le spectacle que nous y découvririons différerait à peine de celui que contemple l'astronome. Là aussi nous verrions des points matériels séparés les uns des autres par des intervalles énormes par rapport à leurs dimensions et décrivant des orbites suivant des lois régulières. Ces astres infiniment petits, ce sont les atomes. Comme les astres proprement dits, ils s'attirent ou se repoussent, et cette attraction ou cette répulsion, dirigée suivant la droite qui les joint, ne dépend que de la distance. La loi suivant laquelle cette force varie en fonction de la distance n'est peut-être pas la loi de Newton, mais c'est une loi analogue; au lieu de l'exposant — 2, nous avons probablement un exposant différent, et c'est de ce changement d'exposant que sort tout la diversité des phénomènes physiques, la variété des qualités et des sensations, tout le monde coloré et sonore qui nous entoure, toute la Nature en un mot.

Telle est la conception primitive dans toute sa pureté. Il ne reste plus qu'à chercher dans les différents cas quelle valeur il convient de donner à cet exposant afin de rendre compte de tous les faits. C'est sur ce modèle que Laplace par exemple a construit sa belle théorie de la Capillarité; il ne la regarde que comme un cas particulier de l'attraction, ou, comme il dit, de la pesanteur universelle, et personne ne s'étonne de la trouver au milieu de l'un des cinq volumes de la Mécanique Céleste. Plus récemment, Briot croit avoir pénétré le dernier secret de l'Optique quand il a démontré que les atomes d'éther s'attirent en raison inverse de la 6e puissance de la distance; et Maxwell, Maxwell lui-même, ne dit-il pas quelque part que les atomes de gaz se repoussent en raison inverse de la 5e puissance de la distance. Nous avons l'exposant — 6, ou — 5 au lieu de l'exposant — 2, mais c'est toujours un exposant.

Parmi les théories de cette époque, une seule fait exception, celle de Fourier; il y a bien des atomes, agissant à distance l'un sur l'autre; ils s'envoient mutuellement de la chaleur, mais ils ne s'attirent pas, ils ne bougent pas. A ce point de vue, la théorie de Fourier devait apparaître aux yeux de ses contemporains, à ceux de Fourier lui-même, comme imparfaite et provisoire.

Cette conception n'était pas sans grandeur; elle était séduisant, et beaucoup d'entre nous n'y ont pas définitivement renoncé; ils savent qu'on n'atteindra les éléments ultimes des choses qu'en débrouillant patiemment l'écheveau compliqué que nous donnent nos sens; qu'il faut avancer pas à pas en ne négligeant aucun intermédiaire, que nos pères ont eu tort de vouloir brûler les étapes, mais ils croient que quand on arrivera à ces éléments ultimes, on y retrouvera la simplicité majestueuse de la Mécanique Céleste.

Cette conception n'a pas non plus été inutile; elle nous a rendu un service inappréciable, puisqu'elle a contribué à préciser en nous la notion fondamentale de la loi physique. Je m'explique; comment les anciens comprenaient-ils la Loi? C'était pour eux une harmonie interne, statique pour ainsi dire et immuable; ou bien c'était comme un modèle que la nature s'efforçait d'imiter. Une loi, pour nous, ce n'est plus cela du tout; c'est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.

Voilà la forme idéale de la loi physique; eh bien, c'est la loi de Newton qui l'a revêtue la première. Si ensuite on a acclimaté cette forme en physique, c'est précisément en copiant autant que possible cette loi de Newton, c'est en imitant la Mécanique Céleste.

Néanmoins, il est arrivé un jour où la conception des forces centrales n'a plus paru suffisante, et c'est la première de ces crises dont je vous parlais tout à l'heure.

Que fit-on alors? On renonça à pénétrer dans le détail de la structure de l'univers, à isoler les pièces de ce vaste mécanisme, à analyser une à une les forces qui les mettent en branle et on se contenta de pendre pour guides certains principes généraux qui ont précisément pour objet de nous dispenser de cette étude minutieuse. Comment cela? Supposons que nous ayons en face de nous une machine quelconque; le rouage initial et le rouage final sont seuls apparents, mais les transmissions, les rouages intermédiaires par lesquels le mouvement se communique de l'un à l'autre sont cachés à l'intérieur et échappent à notre vue; nous ignorons si la communication se fait par des engrenages ou par des courroies, par des bielles ou par d'autres dispositifs. Dirons-nous qu'il nous est impossible de rien comprendre à cette machine tant qu'on ne nous permettra pas de la démonter? Vous savez bien que non et que le principe de la conservation de l'énergie suffit pour nous fixer sur le point le plus intéressant; nous constatons aisément que la roue finale tourne dix fois moins vite que la roue initiale, puisque ces deux roues sont visibles; nous pouvons en conclure qu'un couple appliqué à la première fera équilibre à un couple dix fois plus grand appliqué à la la seconde. Point n'est besoin pour cela de pénétrer le mécanisme de cet équilibre et de savoir comment les forces se compenseront à l'intérienr de la machine; c'est assez de s'assurer que cette compensation ne peut pas ne pas se produire.

Eh bien, en présence de l'univers, le principe de la conservation de l'énergie peut nous rendre le même service. C'est aussi une machine, beaucoup plus compliquée que toutes celles de l'industrie, et dont presque toutes les parties nous sont profondément cachées; mais en observant le mouvement de celles que nous pouvons voir, nous pouvons, en nous aidant de ce principe, tirer des conclusions qui resteront vraies quels que soient les détails du mécanisme invisible qui les anime.

Le principe de la conservation de l'énergie, ou principe de MAYER, est certainement le plus important, mais ce n'est pas le seul, il y en a d'autres dont nous pouvons tirer le même parti. Ce sont:

Le principe de CARNOT, ou principe de la dégration de l'énergie.

Le principe de NEWTON, ou principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Le principe de la relativité, d'après lequel les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes, soit pour un observateur fixe, soit pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme; de sorte que nous n'avons et ne pouvons avoir aucun moyen de discerner si nous sommes, oui ou non, emportés dans un pareil mouvement.

Le principe de la conservation de la masse ou principe de LAVOISIER.

J'ajouterai le principe de moindre action.

L'application de ces cinq ou six principes généraux aux différents phénoménes physiques suffit pour nous en apprendre ce que nous pouvons raisonnablement espérer en connaître. Le plus remarquable exemple de cette nouvelle Physique Mathématique est sans contredit la théorie électromagnétique de la Lumière de MAXWELL. Qu'est-ce que l'éther, comment sont disposées ses molecules, s'attirent-elles ou se repoussent-elles? nous n'en savons rien; mais nous savons que ce milieu transmet à la fois les pertubartions optiques et les perturbations eléctriques; nous savons que cette transmission doit se faire conformément aux principes généraux de la Mécanique et cela nous suffit pour établir les équations du champ électromagnétique.

Ces principes sont des résultats d'expériences fortement généralisés; mais ils semblent emprunter à leur généralité même un degré éminent de certitude. Plus ils sont généraux, en effet, plus on a fréquemment l'occasion de les contrôler et les vérifications, en se multipliant, en prenant les formes les plus variées et les plus inattendues, finissent par ne plus laisser de place au doute.

Telle est la seconde phase de l'histore de la Physique Mathématique et nous n'en sommes pas encore sortis. Dirons-nous que la première a été inutile, que pendant cinquante ans la science avait fait fausse route et qu'il n'y a plus qu'à oublier tant d'efforts accumulés qu'une conception vicieuse condamnait d'avance à l'insuccès? Pas le moins du monde. Croyez-vous que la seconde phase aurait pu exister sans la première? L'hypothèse des forces centrales contenait tous les principes; elle les entraînait comme des conséquences necéssaires; elle entraînait et la conservation de l'énergie, et celle des masses, et l'égalité de l'action et de la réaction, et la loi de moindre action, qui apparaissaient, il est vrai, non comme des vérités expérimentales, mais comme des théorèmes; et dont l'énoncé avait en même temps je ne sais quoi de plus précis et de moins général que sous leur forme actuelle.

C'est la Physique Mathématique de nos pères qui nous a familiarisés peu à peu avec ces divers principes, qui nous a habitués à les reconnaître sous les différents vêtements dont ils se déguisent. On les a comparés aux données de l'expérience on a vu comment il fallait en modifier l'énoncé pour les adapter à ces données; par là on les a èlargis et consolidés. On a été conduit ainsi à les regarder comme des vérités expérimentales; la conception des forces centrales devenait alors un soutien inutile, ou plutôt une gêne, puisqu'elle faisait participer les principes de son caractère hypothétique.

Les cadres ne se sont donc pas brisés, parce qu'ils étaient élastiques; mais ils se sont élargis; nos pères, qui les avaient établis, n'avaient pas travaillé en vain; et nous reconnaissons dans la science d'aujourd'hui les traits généraux de l'esquisse qu'ils avaient tracée.

Allons-nous entrer maintenant dans une troisième phase? Sommes-nous à la veille d'une seconde crise? Ces principes sur lesquels nous avons tout bâti vont-ils s'écrouler à leur tour? Depuis quelque temps, on peut se le demander.

En m'entendant parler ainsi, vous pensez sans doute au radium, ce grand révolutionnaire des temps présents, et en effet je vais y revenir tout à l'heure; mais il y a autre chose; ce n'est pas seulement la conservation de l'énergie qui est une cause; tous les autres principes sont également en danger, comme nous allons le voir en les passant successivement en revue.

Commençons par le principe de Carnot. C'est le seul qui ne se présente pas comme une conséquence immédiate de l'ypothèse des forces centrales; bien mieux, il semble sinon contredire directement cette hypothèse, du moins ne pas se concilier avec elle sans un certain effort. Si les phénomènes physiques étaient dus exclusivement aux mouvements d'atomes dont les attractions mutuelles ne dépendraient que de la distance, il semble que tous ces phénomènes devraient être réversibles; si toutes les vitesses initiales étaient renversées, ces atomes toujours soumis aux mêmes forces devraient parcourir leurs trajectoires en sens contraire, de même que la terre décrirait dans le sens rétrograde cette même orbite elliptique qu'elle décrit dans le sens direct, si les conditions initiales de son mouvement avaient été renversées. A ce compte, si un phénomène physique est possible, le phénomène inverse doit l'être également et on doit pouvoir remonter le cours du temps. Or, il n'en est pas ainsi dans la Nature, et c'est précisément ce que le principe de Carnot nous enseigne, la chaleur peut passer du corps chaud sur le corps froid, et il est impossible ensuite de lui faire reprendre le chemin inverse et de rétablir des différences de température qui se sont effacées. Le mouvement peut être intégralement dissipé et transformé en chaleur par le frottement; la transformation contraire ne pourra jamais se faire que d'une manière partielle.

On s'est efforcé de concilier cette apparente contradiction. Si le monde tend vers l'uniformité, ce n'est pas parce que ses parties ultimes, d'abord dissemblables, tendent à devenir de moins en moins différentes, c'est parce que, se déplaçant au hasard, elles finissent par se mélanger. Pour un oeil qui distinguerait tous les éléments, la variété resterait toujours aussi grande; chaque grain de cette poussière conserve son originalité et ne se modèle pas sur ses voisins; mais comme le mélange devient de plus en plus intime, nos sens grossiers n'aperçoivent plus que l'uniformité. Voilà porquoi, par example, les températures tendent à se niveler sans qu'il soit possible de revenir en arrière.

Qu'une goutte de vin tombe dans un verre d'eau: quelle que soit la loi du mouvement interne du liquide, nous le verrons bientôt se colorer d'une teinte rosée uniforme et à partir de ce moment on aura beau agiter le vase, le vin et l'eau ne paraîtront plus pouvoir se séparer. Ainsi voici quel serait le type du phénomène physique irréversible: cacher un grain d'orge dans un tas de blé, c'est facile; l'y retrouver ensuite et l'en faire sortir, c'est pratiquement impossible. Tout cela, MAXWELL et BOLTZMANN l'ont expliqué, mais celui qui l'a vu le plus nettement, dans un livre trop peu lu parce qu'il est un peu difficile à lire, c'est Gibbs, dans ses principes élémentaires de Mécanique Statique.

Pour ceux qui se placent à ce point de vue, le principe de CARNOT n'est qu'un principe imparfait, une sorte de concession à l'infirmité de nos sens; c'est parce que nos yeux sont trop grossiers que nous ne distinguons pas les éléments du mélange; c'est parce que nos mains sont trop grossières que nous ne savons pas les forcer à se séparer; le démon imaginaire de MAXWELL, qui peut trier les molécules une à une, saurait bien contraindre le monde à revenir en arrière. Y peut-il revenir de lui-même, cela n'est pas impossible, cela n'est qu'infiniment peu probable; il y a des chances pour que nous attendions longtemps le concours des circonstances qui permettraient une rétrogradation; mais, tôt ou tard, elles se réaliseront, après des années dont il faudrait des millions de chiffres pour écrir le nombre. Ces réserves, cependant, restaient toutes théoriques, elles n'étaient pas bien inquiétantes et le principe de CARNOT conservait toute sa valeur pratique. Mais voici que la scène change. Le biologiste, armé de son microscope, a remarqué il y a longtemps dans ses préparations des mouvements désordonnés des petites particules en suspension; c'est le mouvement brownien. Il a cru d'abord que c'était un phénomène vital, mais il a vu bientôt que les corps inanimés ne dansaient pas avec moins d'ardeur que les autres; il a alors passé la main aux physiciens. Malheureusement, les physiciens se sont longtemps désintéressés de cette question; on concentre de la lumière pour éclairer la préparation microscopique, pensaient-ils; la lumière ne va pas sans chaleur, de là des inégalités de température et dans le liquide des courants intérieurs qui produisent les mouvements dont on nous parle.

M. GOUY eut l'idée d'y regarder de plus près et il vit, ou crut voir, que cette explication est insoutenable, que les mouvements deviennent d'autant plus vifs que les particules sont plus petites, mais qu'ils ne sont pas inflnencés par le mode d'éclairage. Si alors ces mouvements ne cessent pas, ou plutôt renaissent sans cesse, sans rien emprunter à une source extérieure d'énergie, que devons-nous croire? Nous ne devons pas, sans dout renoncer pour cela à la conservation de l'énergie, mais nous voyons sous nos yeux tantôt le mouvement se transformer en chaleur par le frottement, tantôt la chaleur se changer inversement en mouvement, et cela sans que rien ne se perde, quisque le mouvement dure toujours. C'est le contraire du principe de CARNOT. S'il en est ainsi, pour voir le monde revenir en arrière, nous n'avons plus besoin de l'oeil infiniment subtil du démon de MAXWELL, notre microscope nous suffit. Les corps trop gros, ceux qui ont, par exemple, un dixième de millimètre, sont heurtés de tous les côtés par les atomes en mouvement, mais ils ne bougent pas parce que ces chocs sont très nombreux et que la loi du hasard veut qu'ils se compensent; mais les particules plus petites reçoivent trop peu de chocs pour que cette compensation se fasse à coup sûr et sont incessamment ballottées. Et voilà déjà l'un de nos principes en péril.

Venons au principe de relativité; celui-là non seulement est confirmé par l'expérience quotidienne, non seulement il est une conséquence nécessaire de l'hypothèse des forces centrales, mais il s'impose à notre bons sens d'une façon irrésistible; et pourtant lui aussi est battu en brèche. Supposons deux corps électrisés; bien qu'ils nous semblent en repos, ils sont l'un et l'autre entraînés par le mouvement de la Terre; une charge électrique en mouvement, ROWLAND nous l'a appris, équivaut à un courant; ces deux corps chargés équivaudront donc à deux courants parallèles et de même sens et ces deux courants devront s'attirer. En mesurant cette atraction, nous mesurerons la vitesse de la Terre; non pas sa vitesse par rapport au Soleil ou aux Etoiles fixes, mais sa vitesse absolue.

Je sais bien ce qu'on va dire, ce n'est pas sa vitesse absolue que l'on mesure, c'est sa vitesse par rapport à l'éther. Que cela est peu satisfaisant! Ne voit-on pas que du principe ainsi compris on ne pourra plus rien tirer? Il ne pourrait plus rien nous apprendre justement parce qu'il ne craindrait plus aucun démenti. Si nous parvenons à mesurer quelque chose, nous serons toujours libres de dire que ce n'est pas la vitesse absolue, et si ce n'est pas la vitesse par rapport à l'éther, cela pourra toujours être la vitesse par rapport à quelque nouveau fluide inconnu dont nous remplirions l'espace.

Aussi bien l'expérience s'est chargée de ruiner cette interprétation du principe de relativité; toutes les tentatives pour mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther ont abouti à des résultats négatifs. Cette fois la physique expérimentale a été plus fidèle au principe de la Physique Mathématique; les théoriciens en auraient fait bon marché afin de mettre en concordance leurs autres vues générales; mais l'expérience s'est obstinée à le confirmer. On a varié les moyens, enfin MICHELSON a poussé la précision jusqu'à ses dernières limites; rien n'y a fait. C'est précisément pour expliquer cette obstination que les mathématiciens sont forcés aujourd'hui de deployer toute leur ingéniosité.

Leur tâche n'était pas facile, et si LORENTZ s'en est tiré, ce n'est qu'en accumulant les hypothèses.

L'idée la plus ingénieuse a été celle du temps local. Imaginons deux observateurs qui veulent régler leurs montres par des signaux optiques; ils échangent des signaux, mais comme ils savent que la transmission de la lumière n'est pas instantanée, ils prennent soin de les croiser. Quand la station B aperçoit le signal de la station A, son horloge ne doit pas marquer la même heure que celle de la station A au moment de l'émission du signal, mais cette heure augmentée d'une constant représentant la durée de la transmission. Supposons, par exemple, que la station A envoie son signal quand son horloge marque l'heure zéro, et que la station B l'aperçoive quand son horloge marque l'heure t. Les horloges sont réglées si le retard égal à t représente la durée de la transmission, et pour la vérifier la station B expédie à son tour un signal quand son horloge marque zéro, la station A doit alors l'apercevoir quand son horloge marque t. Les montres sont alors réglées.

Et en effet elles marquent la même heure au même instant physique, mais à une condition, c'est que les deux stations soient fixes. Dans le cas contraire, la durée de la transmission ne sera pas la même dans les deux sens, puisque la station A par exemple marche au devant de la perturbation optique émanée de B, tandis que la station B fuit devant la perturbation émanée de A. Les montres réglées de la sorte ne marqueront donc pas le temps vrai, elles marqueront ce qu'on peut appeler le temps local, de sorte que l'une d'elles retardera sur l'autre. Peu importe, puisque nous n'avons aucun moyen de nous en apercevoir. Tous les phénomènes qui se produiront en A par exemple seront en retard, mais tous le seront également, et l'observateur ne s'en apercevra pas puisque sa montre retarde; ainsi, comme le veut le principe de relativité, il n'aura aucun moyen de savoir s'il est en repos ou en mouvement absolu.

Cela malheureusement ne suffit pas, et il faut des hypothèses complémentaires; il faut admettre que les corps en mouvement subissent une contraction uniforme dans le sens du mouvement. L'un des diamètres de la Terre par exemple est raccourci de $\frac{1}{200000000}$ par suite du mouvement de notre planète, tandis que l'autre diamètre conserve sa longueur normale. Ainsi se trouvent compensées les dernières petites différences. Et puis il y a encore l'hypothèse sur les forces. Les forces, quelle que soit leur origine, la pesanteur comme l'élasticité, seraient réduites dans une certaine proportion, dans un monde animé d'une translation uniforme, ou plutôt c'est ce qui arriverait pour les composantes perpendiculaires à la translation; les composantes parallèles ne changeraient pas. Reprenons alors notre exemple de deux corps électrisés; ces corps se repoussent, mais en même temps, si tout est entraîné dans une translation uniforme, ils équivalent à deux courants parallèles et de même sens qui s'attirent.

Cette attraction électrodynamique se retranche donc de la répulsion électrostatique et la répulsion totale est plus faible que si les deux corps étaient en repos. Mais comme, pour mesurer cette répulsion, nous devons l'équilibrer par une autre force, et que toutes ces autres forces sont réduites dans la même proportion, nous ne nous apercevons de rien. Tout semble ainsi arrangé, mais tous les doutes sont-ils dissipés? Qu'arriverait-il si on pouvait communiquer par des signaux qui ne seraient plus lumineux et dont la vitesse de propagation différerait de celle de la lumière? Si après avoir réglé les montres par le procédé optique, on voulait vérifier le réglage à l'aide de ces nouveaux signaux, on constaterait des divergences qui mettraient en évidence la translation commune des deux stations. Et de pareils signaux sont-ils inconcevables, si l'on admet avec LAPLACE que la gravitation universelle se transmet un million de fois plus vite que la lumière?

Ainsi le principe de relativité a été dans ces derniers temps vaillamment défendu, mais l'énergie même de la défense prouve combien l'attaque était sérieuse.

Parlons maintenant du principe de NEWTON, sur l'égalité de l'action et de la réaction. Celui-ci est intimement lié au précédent et il semble bien que la chute de l'un entraînerait celle de l'autre. Aussi ne devons-nous pas nous étonner de retrouver ici les mêmes difficultés.

Les phénomènes électriques, pense-t-on, sont dus aux déplacements de petites particules chargées appelées électrons et plongées dans le milieu que nous nommons éther. Les mouvements de ces électrons produisent des perturbations dans l'éther avoisinant; ces perturbations se propagent dans tous les sens avec la vitesse dela lumière, et à leur tour d'autres électrons, primitivement en repos, se trouvent ébranlés quand la perturbation atteint les parties de l'éther qui les touchent. Les électrons agissent donc les uns sur les autres, mais cette action n'est pas directe, elle se fait par l'intermédiaire de l'éther. Dans ces conditions peut-il y avoir compensation entre l'action et la réaction, du moins pour un observateur qui ne tiendrait compte que des mouvements de la matière, c'est-à-dire des électrons, et qui ignorerait ceux de l'éther qu'il ne peut pas voir? Evidemment non. Quand même la compensation serait exacte elle ne saurait être simultanée. La perturbation se propage avec une vitesse finie, elle n'atteint donc le second électron que quand le premier est depuis longtemps rentré dans le repos. Ce second électron subira donc, avec un retard, l'action du premier, mais certainement à ce moment il ne réagira pas sur lui puisqu'autour de ce premier électron rien ne bouge plus.

L'analyse des faits va nous permettre de préciser davantage. Imaginons, par exemple, un excitateur de HERTZ comme ceux que l'on emploie en télégraphie sans fil; il envoie de l'énergie dans tous les sens; mais nous pouvons le munir d'un miroir parabolique, comme l'a fait HERTZ avec ses plus petits excitateurs, afin de renvoyer toute l'énergie produite dans une seule direction. Qu'arrive-t-il alors, d'après la théorie? c'est que l'appareil va reculer, comme s'il était un canon et si l'énergie qu'il a projetée était un boulet, et cela est contraire au principe de NEWTON, puisque notre projectile ici n'a pas de masse, ce n'est pas de la matière, c'est de l'énergie. Il en est encore de même d'ailleurs avec un phare pourvu d'un réflecteur puisque la lumière n'est autre chose qu'une perturbation du champ électromagnetique. Ce phare devra reculer comme si la lumière qu'il envoie était un projectile. Quelle est la force qui doit produire ce recul? c'est ce qu'on a appelé la pression MAXWELL-BARTHOLDI; elle est très petite et on a eu bien du mal à la mettre en évidence avec les radiomètres les plus sensibles; mais il suffit qu'elle existe.

Si toute l'énergie issue de notre excitateur va tomber sur un récepteur, celui-ci se comportera comme s'il avait reçu un choc mécanique, qui représentera en un sens la compensation du recul de l'excitateur; la réaction sera égale à l'action, mais elle ne sera pas simultanée, le récepteur avancera, mais pas au moment où l'excitateur reculera. Si l'énergie se propage indéfiniment sans rencontrer de récepteur, la compensation ne se fera jamais.

Dira-t-on que l'espace qui sépare l'excitateur du récepteur et que la perturbation doit parcourir pour aller de l'un à l'autre n'est pas vide, qu'il est rempli non seulement d'éther, mais d'air ou même, dans les espaces interplanétaires, de quelque fluide subtil, mais encore pondérable; que cette matière subit le choc comme le récepteur au moment où l'énergie l'atteint et recule à son tour quand la perturbation la quitte? Cela sauverait le principe de NEWTON, mais cela n'est pas vrai; si l'énergie en se propageant restait toujours attachée à quelque substratum matériel, la matière en mouvement entraînerait la lumière avec elle et FIZEAU a démontré qu'il n'en est rien, au moins pour l'air c'est ce que MICHELSON et MORLEY ont confirmé depuis. On peut supposer aussi que les mouvements de la matière proprement dite sont exactement compensés par ceux de l'éther, mais cela nous amènerait aux mêmes réflexions que que tout à l'heure. Le principe ainsi entendu pourra tout expliquer, puisque, quels que soient les mouvements visibles, on aura toujours la faculté d'imaginer des mouvements hypothétiques qui les compensent. Mais s'il peut tout expliquer, c'est qu'il ne nous permet de rien prévoir, il ne nous permet pas de choisir entre les différentes hypothèses possibles, puisqu'il explique tout d'avance. Il devient donc inutile.

Et puis les suppositions qu'il faudrait faire sur les mouvements de l'éther ne sont pas très satisfaisantes. Si les charges électriques doublent, il serait naturel d'imaginer que les vitesses des divers atomes d'éther doublent aussi, et, pour la compensation, il faut que la vitesse moyenne de l'éther quadruple.

C'est pourquoi j'ai longtemps pensé que ces conséquences de la théorie, contraires au principe de NEWTON, finiraient un jour par être abandonnées et pourtant les expériences récentes sur les mouvements des électrons issus du radium semblent plutôt les confirmer.

J'arrive au principe de LAVOISIER sur la conservation des masses. Certes, c'en est un auquel on ne saurait toucher sans ébranler la mécanique. Et maintenant certaines personnes pensent qu'il ne nous paraît vrai que parce qu'on ne considère en mécanique que des vitesses modérées, mais qu'il cesserait de l'être pour des corps animés de vitesses comparables à celle de la lumière. Or, ces vitesses, on croit maintenant les avoir réalisées; les rayons cathodiques et ceux du radium seraient formés de particules très petites ou d'électrons qui se déplaceraient avec des vitesses, plus petites sans doute que celle de la lumière, mais qui en seraient le dixième ou le tiers.

Ces rayons peuvent être déviés soit par un champ électrique, soit par un champ magnétique et on peut, en comparant ces déviations, mesurer à la fois la vitesse des électrons et leur masse (ou plutôt le rapport de leur masse à leur charge). Mais quand on a vu que ces vitesses se rapprochaient de celle de la lumière, on s'est avisé qu'une correction était nécessaire. Ces molécules, étant électrisées, ne peuvent se déplacer sans ébranler l'éther; pour les mettre en mouvement, il faut triompher d'une double inertie, de celle de la molécule elle-même et de celle de l'éther. La masse totale ou apparente que l'on mesure se compose donc de deux parties: la masse réelle ou mécanique de la molécule, et la masse électrodynamique représentant l'inertie de l'éther.

Les calculs d'Abraham et les expériences de KAUFFMAN ont alors montré que la masse mécanique proprement dite est nulle et que la masse des électrons, ou au moins des électrons négatifs, est d'origine exclusivement électro-dynamique. Voilà qui nous force á changer la définition de la masse; nous ne pouvons plus distinguer la masse mécanique et la masse électro-dynamique, parce qu'alors la première s'évanouirait; il n'y a pas d'autre masse que l'inertie éléctro-dynamique; mais dans ce cas la masse ne peut plus être constante, elle augmente avec la vitesse; et même, elle dépend de la direction, et un corps animé d'une vitesse notable n' opposera pas la même inertie aux forces qui tendent à le dévier de sa route, et à celles qui tendent à accélérer ou à retarder se marche.

Il y a bien encore une ressource: les éléments ultimes des corps sont des électrons, les uns chargés négativement, les autres chargés positivement. Les électrons négatifs n'ont pas de masse, c'est entendu; mais les électrons positifs, d'aprés le peu qu'on en sait, semblent beaucoup plus gros. Peut-être, ont-ils, outre leur masse électro-dynamique, une vraie masse mécanique. La véritable masse d'un corps, ce serait alors la somme des masses mécaniques de ses électrons positifs, les éléctrons négatifs ne compteraient pas; la masse ainsi définie pourrait encore être constante.

Hélas! cette ressource aussi nous échappe. Rappelons-nous ce que nous avons dit au sujet du principe de relativité et des efforts faits pour la sauver. Et ce n'est pas seullement un principe qu'il s'agit de sauver, ce sont les résultats indubitables des expériences de MICHELSON. Eh bien, ainsi que nous l'avons vu plus haut, pour rendre compte de ces résultats, LORENTZ a été obligé de supposer que toutes les forces, quelle que soit leur origine, étaient réduites dans la même proportion dans un milieu animé d'une translation uniforme ; ce n'est pas assez, il ne suffit pas que cela ait lieu pour les forces réelles, il faut encore qu'il en soit de même pour les forces d'inertie ; il faut donc, dit-il, que *les masses de toutes les particules soient influencées par une translation au même degré que les masses électro-magnétiques des électrons.*

Ainsi les masses mécaniques doivent varier d'après les mêmes lois que les masses eléctrodynamiques ; elles ne peuvent donc pas être constantes.

Ai-je besoin de faire observer que la chute du principe de LAVOISIER entraîne celle du principe de NEWTON. Ce dernier signifie que le centre de gravité d'un système isolé se meut en ligne droite ; mais s'il n'y a plus de masse constante, il n'y a plus de centre de gravité, on ne sait même plus ce que c'est. C'est pourquoi j'ai dit plus haut que les expériences sur les rayons cathodiques avaient paru justifier les doutes de LORENTZ au sujet du principe de NEWTON.

De tous ces résultats, s'ils se confirmaient, sortirait une mécanique entièrement nouvelle qui serait surtout caractérisée par ce fait qu'aucune vitesse ne pourrait dépasser celle de la lumière [1] pas plus qu'aucune température ne peut tomber au-dessous du zéro absolu. Pour un observateur, entraîné lui-même dans une translation dont il ne se doute pas, aucune vitesse apparente ne pourrait non plus dépasser celle de la lumière ; et ce serait là une contradiction, si l'on ne se rappelait que cet observateur ne se servirait pas des mêmes horloges qu'un observateur fixe, mais bien d'horloges marquant le «temps local».

Nous voici alors en face d'une question que je me borne à poser. S'il n'y a plus de masse, que devient la loi de NEWTON?

[1] Car les corps opposeraint une inertie croissante aux causes qui tendraient à accélérer leur mouvement; et cette inertie deviendrait infinie quand on approcherait de la vitesse de la lumière.

La masse a deux aspects, c'est à la fois un coefficient d'inertie et une masse attirante comme facteur dans l'attraction newtonienne. Si le coefficient d'inertie n'est pas constant, la masse attirante pourra-t-elle l'être ? Voilà la question.

Du moins le principe de la conservation de l'énergie nous restait encore et celui-là paraissait plus solide. Vous rappellerai-je comment il fut à son tour jeté en discrédit ? L'événement a fait plus de bruit que les précédents et il est dans toutes les mémoires. Dès les premiers travaux de Becquerel et surtout quand les CURIE eurent découvert le radium, on vit que tout corps radioactif était une source inépuisable de radiation. Son activité semblait subsister sans altération à travers les mois et les années. C'était déjà là une entorse aux principes ; ces radiations, c'était en effet de l'énergie, et de ce même morceau de radium, il en sortait et il en sortait toujours. Mais ces quantités d'energie étaient trop faibles pour être mesurées ; du moins on le croyait et on ne s'en inquiétait pas trop.

La scène changea quand CURIE s'avisa de mettre le radium dans un calorimètre ; on vit alors que la quantité de chaleur incessamment créée était très notable.

Les explications proposées furent nombreuses ; mais en pareille matière on ne peut pas dire qu'abondance de biens ne nuit pas ; tant que l'une d'elles n'aura pas triomphé des autres, nous ne pourrons pas être sûrs qu'aucune d'entre elles soit bonne. Depuis quelque temps toutefois, une de ces explications semble prendre le dessus et on peut raisonnablement espérer que nous tenons la clef du mystère.

Sir W. RAMSAY a cherché à montrer que le radium se transforme, qu'il renferme une provision d'énergie énorme, mais non inépuisable. La transformation du radium produirait alors un million de fois plus de chaleur que toutes les transformations connues ; le radium s'épuiserait en 1250 ans ; c'est bien court, mais vous voyez que nous sommes du moins certains d'être fixes sur ce point d'ici quelques centaines d'années. En attendant nos doutes subsistent.

Au milieu de tant de ruines, que reste-t-il debout? Le principe de moindre action est intact jusqu'ici, et LARMOR paraît croire qu'il survivra longtemps aux autes ; il est en effet plus vague et plus général encore.

En présence de cette débâcle générale des principes, quelle attitude va prende la Physique Mathématique ? Et d'abord, avant de trop s'émouvoir, il convient de se demander si tout cela est bien vrai. Toutes ces dérogations aux principes, on ne les rencontre que dans les infiniment petits ; il faut le microscope pour voir le mouvement brownien ; les électrons sont bien légers ; le radium est bien rare et on n'en a jamais que quelques milligrammes à la fois ; et alors on peut se demander si, à côté de l'infiniment petit qu'on a vu, il n'y avait pas un autre infiniment petit qu'on ne voyait pas et qui faisait contre-poids au premier.

Il y a donc là une question préjudicielle, et à ce qu'il semble l'expérience seule peut la résoudre. Nous n'aurions donc qu'à passer la main aux expérimentateurs, et en attendant qu'il aient tranché définitivement le débat, à ne pas nous préoccuper de ces inquiétants problèmes, et à continuer tranquillement notre oeuvre comme si les principes étaient encore incontestés. Certes nous avons beaucoup à faire sans sortir du domaine où on peut les appliquer en tout sûreté ; nous avons de quoi employer notre activité pendant cette période de doutes.

Et pourtant ces doutes, est-il bien vrai que nous ne puissions rien faire pour en débarrasser la science ? Il faut bien le dire, ce n'est pas seulement la physique expérimentale qui les a fait naître, la physique mathématique y a bien contribué pour sa part. Ce sont les expérimentateurs qui ont vu le radium dégager de l'énergie, mais ce sont les théoriciens qui ont mis en évidence toutes les difficultés soulevées par la propagation de la lumière à travers un milieu en mouvement, sans eux il est probable qu'on ne s'en serait pas avisé. Eh bien, alors, s'ils ont fait de leur mieux pour nous mettre dans l'embarras, il convient aussi qu'ils nous aident à en sortir.

Il faut qu'ils soumettent à la critique toutes ces vues nouvelles que je viens d'esquisser devant vous, et qu'ils n'abandonnent les principes qu'après avoir fait un effort loyal pour les sauver. Que peuvent-ils faire dans ce sens? C'est ce que je vais chercher à expliquer.

Parmi les problèmes les plus intéressants de la Physique Mathématique, il convient de faire une place à part à ceux qui se rapportent à la théorie cinétique des gaz.

On a déjà beaucoup fait pour les résoudre mais il reste encore beaucoup à faire. Cette théorie est un éternel paradoxe. Nous avons la réversibilité dans les prémisses et l'irreversibilité dans les conclusions ; et entre les deux un abîme ; les considérations statistiques la loi des grands nombres suffisent-elles pour le combler ? Bien des points restent encore obscurs sur lesquels il faudra revenir et sans doute à plusieurs reprises. En les éclaircissant on comprendra mieux le sens du principe de CARNOT, et sa place dans l'ensemble de la dynamique et on sera mieux armé pour interpréter convenablement la curieuse expérience de GOUY dont je parlais plus haut.

Ne devrions-nous pas aussi nous efforcer d'obtenir une théorie plus satisfaisante de l'électrodynamique des corps en mouvement ? C'est là surtout, je l'ai suffisamment montré plus haut, que les difficultés s'accumulent ; on a beau entasser les hypothèses, on ne peut satisfaire à tous les principes à la fois ; on n'a pu réussir jusqu'ici à sauvegarder les uns qu'à la condition de sacrifier les autres ; mais tout espoir d'obtenir de meilleurs résultats n'est pas encore perdu. Prenons donc la théorie de LORENTZ, retournons-la dans tous les sens ; modifions-la peu à peu, et tout s'arrangera peut-être.

Ainsi au lieu de supposer que les corps en mouvement subissent une contraction dans le sens du mouvement et que cette contraction est la même quelle que soit la nature de ces corps et les forces auxquelles ils sont d'ailleurs soumis, ne pourrait-on pas faire une hypothèse plus simple et plus naturelle? On pourrait imaginer, par exemple, que c'est l'éther qui se modifie quand il se trouve en mouvement relatif par rapport au milieu matériel qui le pénètre, que, quand il est ainsi modifié, il ne transmet plus les perturbations avec la même vitesse dans tous les sens. Il transmettrait plus rapidement celles qui se propageraient parallèlement au mouvement du milieu, sont dans le même sens, soit en sens contraire, et moins rapidement celles qui se propageraient perpendiculairement. Les surfaces d'onde ne seraient plus des sphéres, mais des ellipsoïdes et on pourrait se passer de cette extraordinaire contraction de tous les corps.

Je ne cite cela qu'à titre d'exemple, car les modifications que l'on pourrait essayer seraient évidemment susceptibles de varier à l'infini.

Il est possible aussi que l'astronomie nous fournisse un jour des données sur ce point; c'est elle, en somme, qui a soulevé la question en nous faisant connaître le phénomène de l'aberration de la lumière. Si on fait brutalement la théorie de l'aberration, on arrive à un résultat bien curieux. Les positions apparentes des étoiles diffèrent de leurs positions réelles, à cause du mouvement de la Terre, et comme ce mouvement est variable, ces positions apparentes varient. La position réelle nous ne pouvons la connaître, mais nous pouvons observer les variations de la position apparente. Les observations de l'aberration nous montrent donc non le mouvement de la Terre, mais les variations de ce mouvement, elles ne peuvent par conséquent nous renseigner sur le mouvement absolu de la Terre.

C'est du moins ce qui est vrai en première approximation, mais il n'en serait plus de même si on pouvait apprécier les millièmes de seconde. On verrait alors que l'amplitude de l'oscillation dépend non seulement de la variation du mouvement, variation qui est bien connue, puisque c'est le mouvement de notre globe sur son orbite elliptique, mais de la valeur moyenne de ce mouvement de sorte que la constante de l'aberration ne serait plus pas tout à fait la même pour toutes les Etoiles, et que les différences nous feraient connaître le mouvement obsolu de la Terre dans l'espace.

Ce serait là, sous une autre forme, la ruine du principe de relativité. Nous sommes loin, il est vrai, d'apprécier le millième de seconde, mais après tout, disent quelques personnes, la vitesse absolue totale de la Terre est peut-être beaucoup plus grande que sa vitesse relative par rapport au Soleil; si elle était par exemple de 300 kilomètres par seconde au lieu de 30, cela suffirait pour que le phénomène devînt observable.

Je crois qu'en raisonnant ainsi on admet une théorie trop simpliste de l'aberration; Michelson nous a montré, je vous l'ai dit, que les procédés physiques sont impuissants à mettre en évidence le mouvement absolu; je suis persuadé qu'il en sera de même des procédés astronomiques quelque loin que l'on pousse la précision.

Quoi qu'il en soit, les données que l'Astronomie nous fournira dans ce sens seront un jour précieuses pour le physicien. En attendant, je crois que les théoriciens, se rappelant l'expérience de Michelson, peuvent escompter un résultat négatif, et qu'ils feraient oeuvre utile en construisant une théorie de l'aberration qui en rendrait compte d'avance.

Mais revenons sur la terre; là aussi nous pouvons aider les expérimentateurs. Nous pouvons par exemple préparer le terrain en étudiant à fond la dynamique des électrons; non pas, bien entendu, en partant d'une hypothèse unique, mais en multipliant les hypothèses autant que possible; ce sera ensuite aux physiens à utiliser notre travail pour chercher l'expérience cruciale qui doit décider entre elles.

Cette dynamique des électrous peut être abordée par bien des côtés, mais parmi les chemins qui y conduisent, il y en a un qui a été quelque peu négligé, et c'est pourtant un de ceux qui nous promet le plus de surprises. Ce sont les mouvements des électrons qui produisent les raies des spectres d'émission; ce qui le prouve, c'est le phénomène de Zeeman; dans un corps incandescent, ce qui vibre est sensible à l'aimant, donc électrisé. C'est là un premier point très important, mais on n'est pas entré plus avant; pourquoi les raies du spectre sont-elles distribuées d'après une loi régulière? Ces lois ont été étudiées par les expérimentateurs dans leurs moindres détails; elles sont très précises et relativement simples. La première étude de ces distributions fait songer aux harmoniques que l'on rencontre en acoustique; mais la différence est grande; non seulement les nombres de vibrations ne sont pas les multiples successifs d'un même nombre; mais nous ne retrouvons même rien d'analogue aux racines de ces équations transcendantes auxquelles nous conduisent tant de problèmes de Physique Mathématique: celui des vibrations d'un corps élastique de forme quelconque, celui des oscillations hertziennes dans un excitateur de forme quelconque, le problème de Fourier pour le refroidissement d'un corps solide.

Les lois sont plus simples, mais elles sont de toute autre nature et pour ne citer qu'une de ces différences, pour les harmoniques d'ordre élevé le nombre des vibrations tend vers une limite finie, au lieu de croître indéfiniment.

De cela on n'a pas encore rendu compte, et je crois que c'est là un des plus importants secrets de la nature. Lindemann a fait une louable tentative, mais à mon avis sans succès; cette tentative, il faudrait la renouveler. Nous pénétrerons ainsi pour ainsi dire dans l'intimité de la matière. Et au point de vue particulier qui nous occupe aujourd'hui, quand nous saurons pourquoi les vibrations des corps incandescents diffèrent ainsi des vibrations élastiques odinaires, pourquoi les électrons ne se comportent pas comme la matière qui nous est familière, nous comprendrons mieux la dynamique des électrons et il nous sera peut-être plus facile de la concilier avec les principes.

Supposons maintenant que tous ces efforts échouent, et, tout compte fait, je ne le crois pas; que faudra-t-il faire? Faudra-t-il chercher à raccommoder les principes ébréchés en donnant ce que nous autres Français nous appelons un coup de pouce? Cela est évidemment toujours possible et je ne retire rien de ce que j'ai dit autrefois. N'avez-vous pas écrit, pourriez-vous me dire si vous vouliez me chercher querelle, n'avez-vous pas écrit que les principes, quoique d'origine expérimentale, sont maintenant hors des atteintes de l'expérience parce qu'ils sont devenus des conventions? Et maintenant vous venez nous dire que les conquêtes les plus récentes de l'expérience mettent ces principes en danger.

Eh bien, j'avais raison autrefois et je n'ai pas tort aujourd'hui. J'avais raison autrefois et ce qui se passe maintenant en est une preuve nouvelle. Prenons par exemple l'expérience calorimétrique de Curie sur le radium. Est-il possible de la concilier avec le principe de la conservation de l'énergie? On l'a tenté de bien des manières; mais il y en a une entre autres que je voudrais vous faire remarquer; ce n'est pas l'explication qui tend aujourd'hui à prévaloir, mais c'est une de celles qui ont été proposées. On a supposé que le radium n'était qu'un intermédiaire, qu'il ne faisait qu'emmagasiner des radiations de nature inconnue qui sillonnaient l'espace dans tous les sens, en tranversant tous les corps, sauf le radium, sans être altérées par ce passage et sans exercer sur eux aucune action. Le radium seul leur prendrait un peu de leur énergie et il nous la rendrait ensuite sous diverses formes.

Quelle explication avantageuse et combien elle est commode ! D'abord elle est invérifiable et par là même irréfutable. Ensuite elle peut servir pour rendre compte de n'importe quelle dérogation au principe de Mayer ; elle répond d'avance non seulement à l'objection de Curie, mais à toutes les objections que les expérimentateurs futurs pourraient accumuler. Cette énergie nouvelle et inconnue pourra servir à tout.

C'est bien ce que j'avais dit, et avec cela on nous montre bien que notre principe est hors des atteintes de l'expérience.

Et après, qu'avons-nous gagné à ce coup de pouce ? Le principe est intact, mais à quoi désormais peut-il servir ? Il nous permettait de prévoir que dans telle ou telle circonstance nous pouvions compter sur telle quantité totale d'énergie ; il nous limitait ; mais maintenant qu'on met à notre disposition cette provision indéfinie d'énergie nouvelle, nous ne sommes plus limités par rien ; et, comme je l'avais écrit aussi, si un principe cesse d'être fécond, l'expérience, sans le contredire directement, l'aura cependant condamné.

Ce n'est donc pas cela qu'il faudrait faire nous devrions rebâtir à neuf. Si l'on était acculé à cette nécessité, nous pourrions d'ailleurs nous en consoler. Il ne faudrait pas en conclure que la science ne peut faire qu'un travail de Pénélope, qu'elle ne peut élever que des constructions éphémères qu'elle est bientôt forcée de démolir de fond en comble de ses propres mains.

Comme je vous l'ai dit, nous avons déjà passé par une crise semblable. Je vous ai montré que, dans la seconde physique mathématique, celle des principes, on retrouve les traces de la première, celle des forces centrales ; il en sera encore de même si nous devons en connaître une troisième. Tel l'animal qui mue, qui brise sa carapace trop étroite et s'en fait une plus jeune ; sous son enveloppe nouvelle, on reconnaîtra aisément les traits essentiels de l'organisme qui ont subsisté.

Dans quel sens allons-nous nous étendre, nous ne pouvons le prévoir ; peut-être est-ce la théorie cinétique des gaz qui va prendre du développement et servir de modèle aux autres. Alors les faits qui d'abord nous apparaissaient comme simples ne seraient plus que les résultantes d'un très grand nombre de faits élémentaires que les lois seules du hasard feraient concourir à un même but. La loi physique alors pendrait un aspect entièrement nouveau ; ce ne serait plus seulement une équation différentielle, elle pendrait le caractère d'une loi statistique.

Peut-être aussi devrons-nous construire toute une mécanique nouvelle que nous ne faisons qu'entrevoir, où, l'inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable. La mécanique vulgaire, plus simple, resterait une première approximation puisqu'elle serait vraie pour les vitesses qui ne seraient pas très grandes, de sorte qu'on retrouverait encore l'ancienne dynamique sous la nouvelle. Nous n'aurions pas à regretter d'avoir cru aux principes, et même, comme les vitesses trop grandes pour les anciennes formules ne seraient jamais qu'exceptionnelles, le plus sûr dans la pratique serait encore de faire comme si on continuait à y croire. Ils sont si utiles qu'il faudrait leur conserver une place. Vouloir les exclure tout à fait, ce serait se priver d'une arme précieuse. Je me hâte de dire, pour terminer, que nous n'en sommes pas là et que rien ne prouve encore qu'ils ne sortiront pas de la lutte victorieux et intacts.

A lei dinâmica do electrão livre

por José Gaspar Teixeira

No seu notável artigo «L'Etat actuel et l'avenir de la Physique Mathématique (1)», H. POINCARÉ refere-se a duas fases distintas desta disciplina: «La Physique Mathematique est née de la Mécanique céleste qui l'a engendrée à la fin du XVIII^e siècle, au moment où elle venait elle-même d'atteindre son complet développement», e desenvolveu-se, consequentemente, com base na concepção de força central: na mecânica — a lei de NEWTON —, na electrostática — a lei de COULOMB — na magnetostática — a lei de DALLA BELLA — (2), referem-se a forças (centrais) proporcionais ao inverso do quadrado da distância.

«Néanmoins, il est arrivé un jour où la conception des forces centrales n'a plus paru suffisante, et c'est la première crise» da Física Matemática. Entrou-se então «dans la seconde Physique Mathématique, celle des principes» caracterizada pela circunstância de todos os seus resultados se poderem deduzir de seis princípios fundamentais:

O princípio de MAYER — conservação da energia;

O princípio de LAVOISIER — conservação da massa;

O princípio de CARNOT — degradação da energia;

O princípio de NEWTON — igualdade de acção e reacção;

O princípio de Relatividade — covariância das equações;

O princípio de Menor Acção.

«Dans la seconde Physique Mathématique, on retrouve les traces de la première, celles des forces centrales; il en sera encore de même si nous devons en connaître une troisième». Mas «la loi physique alors prendrait un aspect entièrement nouveau; ce ne serait plus seulement une équation différentielle, elle prendrait le caractère d'une loi statistique».

Assim escrevia H. POINCARÉ em 1904.

Na realidade, o progresso de técnicas iniciadas por POLZUNOV, PETROV, LODYGIN, POPOV, ZALESOV (1) e outros, associado ao aparecimento de grande número de novos problemas em todos os ramos da física criavam as condições em que se fez a passagem da «segunda» para a «terceira» física matemática.

Nesta, como se sabe, já não são válidos alguns dos princípios fundamentais anteriores, e a lei física toma, na realidade, duas formas particulares — a de lei dinâmica e a de lei estatística.

---

(1) Vide pág. 3 do presente número da *Gazeta de Matemática*.

(2) JOÃO ANTÓNIO DALLA BELLA, primeiro director do Gabinete de Física da Universidade de Coimbra criado pelo MARQUES DE POMBAL, em 1782 — 3 anos antes de COULOMB — descobriu com o «famoso Iman... presente do Imperador da China... a D. JOÃO V» a lei das acções magnéticas. Cf. Comunicação apresentada pelo Prof. MÁRIO SILVA em 1938 à Academia das Ciências de Lisboa.

(1) POLZUNOV, V.V. PETROV, A. N. LODYGIN, A. S. POPOV, e ZALESOV precederam respectivamente WATT, DAVY, EDISON, MARCONI, e PARSONS nas descobertas da máquina a vapor (1765), arco eléctrico (1803), lâmpada eléctrica (1873), emissão de sinais de rádio a distância (1895) e turbina de vapor. Cf. ERIC ASHBY — *Scientist in Rússia* — Pelican books.

Terletski (¹) em 1950 considerando ùnicamente as questões fundamentais de princípio da física estatística geral apresenta a tese de que na base de toda a teoria física estatística «il y a un micro-modèle dynamique et des hypothèses statistiques, qui ne sont pas déduites des lois dynamiques, mais déterminées par la façon de séparer l'object de la théorie de son entourage». É à luz destas ideias que Terletski considera os princípios fundamentais duma teoria estatística única dos processos de não-equilíbrio, e o problema dos fundamentos da mecânica estatística.

Na concepção da lei dinâmica «on retrouve les traces de la seconde physique mathématique», pois que no sentido restrito da mecânica(²), por exemplo, ela exprime a possibilidade de representar todo o movimento dum sistema de pontos materiais por um conjunto de linhas do universo que são completamente determinadas pelas equações do movimento e respectivas condições iniciais.

Terletski conclue, no seu trabalho:

«...nous avons des raisons suffisantes pour considérer que la théorie des processus élémentaires doit satisfaire aux conditions générales suivantes:

1. La théorie doit s'appuyer sur des représentations définies de l'espace et du temps réels.
2. La théorie doit admetre la possibilité de la représentation complète de tout le mouvement dans son ensemble au moyen de grandeurs liées à l'espace et au temps. L'appareil mathématique de la théorie doit permettre de calculer tous les mouvements possibles.
3. Les lois du mouvement doivent être symétriques par rapport au temps.
4. Si l'on sépare une partie d'un système physique, le principe généralisé de l'égalité de l'action et de réaction doit être vérifié.
5. La théorie doit contenir des lois de conservation, reflétant la conservation de la matière et du mouvement.
6. Les systèmes isolés doivent satisfaire un certain principe de relativité.

Sans doute, la formulation des conditions énumérées n'est pas absolue et pourrait être complétée ou restreinte, à la suite du développement ultérieur de la physique, mais elle nous semble correspondre à l'état actuel de la science».

No exemplo seguinte (¹) propomo-nos apresentar um esquema concreto de lei dinâmica elementar a que daremos o nome de *Lei dinâmica do electrão livre*.

Admitamos que se verificam as hipóteses seguintes:

1 — A teoria desenvolve-se na variedade quadri-dimensional do *espaço tempo de* Minkowski; as transformações de coordenadas admissíveis são portanto as do *Grupo de* Lorentz que conservam invariante a distância

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 .$$

2 — Na variedade *espaço-tempo,* considera-se definido um quadri-vector potencial

$$\Omega\,(A_x\,,A_y\,,A_z\,,i\,\Psi)\,.$$

3 — Em relação a determinado referencial admissível, Σ, a distribuição da matéria faz-se de acordo com as duas densidades próprias

$$\mu(X,Y,Z,T) = m\,\delta\,(X-x\,,Y-y\,,Z-z\,,T-t)$$
$$\rho(X,Y,Z,T) = e\,\delta\,(X-x\,,Y-y\,,Z-z\,,T-t)$$

(¹) Cf. *Lois Dynamiques et Statistiques de la Physique.*

(²) No sentido mais lato, as equações de movimento podem ser as equações de Maxwell, a equação de propagação do calor, etc..

(¹) Extraído da admirável obra — *The Classical Theory of Fields* da autoria dos cientistas L. Landau e Z. Lifshitz.

em que $\partial(X, Y, Z, T)$ é a *medida de* DIRAC definida em Σ.

4—As equações do movimento podem resumir-se na expressão

$$A) \qquad \partial S = 0,$$

invariante em face do grupo de LORENTZ, que traduz a estacionaridade da função

$$S = \int_A^B \left[-\mu\, c\, ds + \frac{\rho}{c}(\Omega, d\mathrm{r}) \right]$$

$$r^2 = \sum_\alpha (dx^\alpha)^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

ao longo de *qualquer* percurso entre *dois quaisquer* pontos A e B da variedade.

Comecemos por notar que a condição 3 equivale a considerar *localizada* em $P(x, y, z, t)$ de Σ uma *partícula de massa* m *e carga* e; este facto permite que $A)$ tome a forma

$$\partial \int_A^B \left(-m\, c\, ds + \frac{e}{c}(\Omega, d\mathrm{r}) \right) = 0,$$

sendo agora o integral tomado entre *dois pontos quaisquer* A e B de uma linha de universo da variedade.

Desenvolvendo os cálculos, temos sucessivamente (índices mudos)

$$\begin{aligned} \partial S &= \int_A^B \left[-m\, c\, \partial\, ds + \frac{e}{c}\, \partial\, (\Omega_\alpha\, dx^\alpha) \right] = \\ &= \int_A^B \left[mc\, \frac{dx^\alpha \cdot \partial\, dx^\alpha}{ds} + \frac{e}{c}(\Omega_\alpha \cdot \partial\, dx^\alpha) + \right. \\ &\left. + \frac{e}{c}(\partial\, \Omega_\alpha \cdot dx^\alpha) \right] = \int_A^B \left[mc\, \frac{dx^\alpha \cdot d\, \partial\, x^\alpha}{ds} + \right. \\ &\left. + \frac{e}{c}(\Omega_\alpha \cdot d\, \partial\, x^\alpha) + \frac{e}{c}(\partial\, \Omega_\alpha \cdot dx^\alpha) \right] = \\ &= \left[\left(m\, c\, u^\alpha + \frac{e}{c}\, \Omega_\alpha \right) \partial\, x^\alpha \right]_A^B + \\ &+ \int_A^B \left(-m\, c\, du^\alpha \cdot \partial\, x^\alpha - \frac{e}{c}\, d\, \Omega_\alpha \cdot \partial\, x^\alpha + \right. \\ &\left. + \frac{e}{c}\, \partial\, \Omega_\alpha \cdot dx^\alpha \right) = 0. \end{aligned}$$

Por um lado o 1.º termo é nulo; por outro, como

$$d\, \Omega_\alpha = \frac{\partial\, \Omega_\alpha}{\partial\, x^\beta}\, dx^\beta \qquad \partial\, \Omega_\alpha = \frac{\partial\, \Omega_\alpha}{\partial\, x^\beta}\, \partial\, x^\beta$$

e

$$du^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}\, ds \qquad dx^\alpha = u^\alpha\, ds$$

vem

$$\begin{aligned} \partial S = \int_A^B \Bigg(&- m\, c\, \frac{du^\alpha}{ds} + \\ &+ \frac{e}{c} \left(\frac{\partial\, \Omega_\beta}{\partial\, x^\alpha} - \frac{\partial\, \Omega_\alpha}{\partial\, x^\beta} \right) u^\beta \Bigg)\, \partial\, x^\alpha\, ds = 0, \end{aligned}$$

donde, dada a arbitrariedade de $\partial\, x^\alpha$, é

$$\text{I)} \qquad m\, c\, \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{e}{c}\, F_{\alpha\beta}\, u^\beta$$

em que $F_{\alpha\beta}$ é o tensor electromagnético associado ao quadri-vector Ω, isto é, como se sabe

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -i E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -i E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -i E_z \\ i E_x & i E_y & i E_z & 0 \end{pmatrix}.$$

As equações I), que desdobradas nas suas componentes tomam a forma

$$\text{II)} \begin{cases} a) \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{m\, v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e\left(\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \\ b) \ \dfrac{d}{dt}\dfrac{m\, c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e(\mathbf{E}, \mathbf{v}), \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(v_x, v_y, v_z, i\, c)$$

representam a «acção de campo electromagnético estacionário sobre uma partícula carregada(¹)»; neste facto se baseia a justificação do nome atribuído à lei dinâmica em estudo.

A expressão $A)$ traduz, efectivamente, o

(¹) P. G. BERGMANN — *Introduction to the theory of Relativity*, pag. 135.

princípio da menor acção, e a lagrangeana respectiva, como

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\Big(-m\,c\,ds+\frac{e}{c}(A_x\,dx^1+A_y\,dx^2+$$
$$+A_z\,dx^3-c\,\psi\,dt)\Big)=\int_{t_1}^{t_2}\Big(-m\,c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+$$
$$+\frac{e}{c}(A_x v_x+A_y v_y+A_z v_z)-e\,\psi\Big)\,dt\,,$$

pois que

$$ds=c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}\,,$$

é

$$L=-\,m\,c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}(A_x v_x+$$
$$+A_y v_y+A_z v_z)-e\,\psi\,.$$

Tomemos (1) como coordenadas generalizadas as três variáveis espaciais da nossa variedade, x, y, z; os respectivos momentos conjugados são

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\qquad p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\qquad p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

ou

$$p_x=\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\,\frac{A_x}{c}\qquad p_y=\cdots\qquad p_z=\cdots\,,$$

componentes do vector do espaço vulgar da mecânica clássica — momento generalizado —

$$\mathbf{P}=\frac{m\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\,.$$

A função de Hamilton é, por definição:

$$H(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=\sum_{x,y,z}p_x\dot{x}-L$$

ou, como fàcilmente se vê,

$$H=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\,\Psi$$

ou ainda

$$H=\sqrt{m^2c^4+c^2\Big(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\Big)^2}+e\,\Psi\ (2)\,.$$

(1) Cf. E. Bloch — *L'ancienne et la nouvelle théorie des Quanta* — chap. XI.

(2) A hamiltoneana costuma exprimir-se em termos do momento conjugado.

Se o campo electromagnético é estacionário, há conservação de energia e esta coincide com a função de Hamilton,

$$E=\frac{m\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\,\Psi$$

ou

$$E=\sqrt{m^2c^4+c^2\Big(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\Big)^2}+e\,\Psi\,.$$

Além disso, a energia de uma partícula carregada depende apenas do potencial escalar, isto é, do vector tridimencional vulgar campo eléctrico

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\Psi\,;$$

noutros têrmos, o vector campo magnético

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

não contribui para o trabalho da partícula.

Notemos finalmente que as três componentes p_x, p_y, p_z do vector momento generalizado, $\mathbf{P}$, associadas à quantidade $\frac{iE}{c}$ constituem as quatro componentes dum quadri-vector — o vector impulsão do Universo, $\mathbf{I}$: este quadri-vector reune num só ser matemático as noções de energia e momento generalizado (quantidade de movimento no caso simples de partícula material) que estavam separadas na física clássica.

Na Lei dinâmica do electrão livre verificam-se assim os princípios fundamentais seguintes:

1 — Princípio da Menor Acção;

2 — Princípio da Relatividade;

3 — Princípio da Conservação da Impulsão.

Em qualquer dos casos particulares simples *a*) $\rho=0$, ou o que é o mesmo, $e=0$; ou *b*) $F_{\alpha\beta}=0$, ou o que é o mesmo, $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{H}=0$ num mesmo referencial admissível, se está no domínio da pura mecânica racional — caso da partícula material livre.

A função lagrangeana é com efeito,

$$\mathsf{L} = -m\,c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}\,,$$

os momentos conjugados são as componentes do vector *quantidade de movimento*

1) $$\mathbf{p} = \frac{m\,\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e a hamiltoneana, continuando a coincidir com a energia, reduz-se a

2) $$\mathsf{H} = \mathsf{E} = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Por outro lado, de 1) e 2) tira-se a relação importante

3) $$\mathbf{v} = \mathbf{p}\,\frac{c^2}{E}\,.$$

O quadri-vector impulsão do universo simplifica-se também e é

$$\mathsf{I}^2 = \mathbf{p}^2 - \frac{\mathsf{E}^2}{c^2} = -\,m^2\,c^2$$

donde

4) $$\frac{\mathsf{E}^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2\,c^2$$

ou

$$\mathsf{E} = \mathsf{H} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2\,c^2}$$

expressão preferível a 2).

Por outro lado, a equação A) dá-nos

$$\partial\,\mathsf{S} = -\,m\,c\int_A^B ds = 0$$

donde

$$-\,m\,c\int_A^B \frac{du^\alpha}{ds}\,\partial\,x^\alpha\,ds = 0$$

com $(\partial\,x^\alpha)_A = (\partial\,x^\beta)_B = 0$. Então as equações da trajectória são[1]

$$\frac{du^\alpha}{ds} = 0$$

[1] Na variedade espaço-tempo.

ou sejam, as equações paramétricas duma recta do espaço-tempo.

Suponhamos agora que num referencial admissível Σ se anulam identicamente as componentes espaciais do quadri-vector potencial

$$\Omega(0\,,0\,,0\,i\,\Psi)\,.$$

Neste caso, diz-se que o electrão está, na subvariedade *espaço vulgar* de Σ sob a acção do campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\Psi\,.$$

Não se prejudica a generalidade do problema admitindo que é, nessa sub-variedade,

$$E_x = E\,, E_y = 0\,, E_z = 0$$

e que a velocidade vulgar existe, no instante $t = 0$, no plano $x\,o\,y$.

As equações espaciais $\mathrm{II}_{a)}$) são então

$$\frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t} = e\,\mathbf{E}$$

ou

$$p_x = e\,E\,t \qquad p_y = p_0 \qquad p_z = 0\,,$$

admitindo que $p_x = 0$ quando $t = 0$.

O movimento do electrão é plano.

Por outro lado, a equação 4) toma a forma

$$\mathsf{E} = c\sqrt{m^2\,c^2 + p_0^2 + e^2\,E^2\,t^2} = \\ = \sqrt{\mathsf{E}_0^2 + c^2\,e^2\,E^2\,t^2},$$

e por 3)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2}{\mathsf{E}}\,p_x = \frac{c^2\,e\,E\,t}{\mathsf{E}} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2}{\mathsf{E}}\,p_y = \frac{c^2\,p_0}{\mathsf{E}}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0\,.$$

Mas a energia cinética E varia ao longo da trajectória; então

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2\,e\,E\,t}{\sqrt{\mathsf{E}_0^2 + c^2\,e^2\,\mathsf{E}^2\,t^2}} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2\,p_0}{\sqrt{\mathsf{E}_0^2 + c^2\,e^2\,\mathsf{E}^2\,t^2}}$$

donde

$$x = \frac{1}{e\,E}\sqrt{\mathsf{E}_0^2 + (c\,e\,\mathsf{E}\,t)^2} \quad y = \frac{p_0\,c}{e\,E}\ \mathrm{arcsnh}\,\frac{c\,e\,E\,t}{\mathsf{E}_0}$$

e a trajectória é uma catenária

$$x = \frac{\mathsf{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEy}{p_0 c}.$$

Se for $v << c$, um desenvolvimento em série dá

$$x = \frac{eE}{2 m v_0^2} y^2 \qquad (\mathsf{E}_0 = m c^2 , p_0 = m v_0)$$

equação duma parábola.

No referencial admissível Σ em que o quadri-vector potencial se reduz a

$$\Omega (A_x , A_y , A_z , 0)$$

o electrão está, na sub-variedade *espaço vulgar* correspondente, sob a acção do campo magnético

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Se for mesmo $A_x = -H_y \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$, $\mathbf{H}$ tem a direcção de oz e as equações espaciais de II) são

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}.$$

3) ainda permite escrever

$$\frac{\mathsf{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}$$

pois a energia E é constante num campo magnético. Conclue-se então que

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad \left(\omega = \frac{ecH}{\mathsf{E}}\right)$$

donde

$$\frac{d}{dt}(v_x + i v_y) = -i\omega (v_x + i v_y)$$

$$v_x + i v_y = v_0 e^{-i(\omega t + \alpha)} \qquad v_z = \text{const}$$

e

$$x = x_0 + r \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \quad y = y_0 + r \cos (\omega t + \alpha)$$

$$z = z_0 + v_{0z} t$$

com

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 \mathsf{E}}{ecH} = \frac{c p_{xy}}{eH} \text{ [1]}.$$

A trajectória é pois uma hélice cilíndrica de raio r e passo $v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi c p_z}{eH}$ [2].

A velocidade da partícula é constante; constante a sua projecção sobre xoy e constante ao longo de oz. Se $v_{0z} = 0$, a trajectória é uma circunferência.

---

[1] (p_{xy} proj. de p sobre xoy).
[2] (p_z proj. do p sobre $0z$).

Os vectores próprios comuns a operadores lineares quase-permutáveis

por ***J. Joaquim Dionísio***

Apresentamos nesta nota uma demonstração que nos parece nova de uma proposição que se relaciona com o teorema de Frobenius sobre os valores próprios de uma composição racional de matrizes permutáveis duas a duas.

Teorema. *Sejam* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_m$ m *operadores lineares quase-permutáveis no espaço linear* R_n *a* n *dimensões. Designem* $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m$ *os respectivos números de valores próprios distintos e tome-se*

$$\mathrm{r} = \text{máx} \{ \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \cdots, \mathrm{r}_m \}.$$

Os m *operadores admitem vectores próprios comuns linearmente independentes em número pelo menos igual a* r.

Basearemos a demonstração em dois lemas.

LEMA 1. *Se dois operadores* A *e* B *são permutáveis, cada um deles é reduzido pelas variedades próprias do outro.*

Dem. Designe V uma variedade própria de A e seja λ o correspondente valor próprio. Tem-se $Ax = \lambda x$ para todo o vector $x \in V$ e portanto $ABx = BAx = \lambda Bx$, do que se infere $Bx \in V$, $BV \subset V$. Esta inclusão significa que a variedade própria V de A é invariante para B.

LEMA 2. [*] *Se os operadores* $A_1, A_2, \cdots, A_m$ *são quase-permutáveis, os permutadores*

$$B_{ij} = A_i A_j - A_j A_i \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, m).$$

são nilpotentes.

Dem. Sabe-se que $tr(AB - BA) = tr\,AB - tr\,BA = 0$; o traço de cada operador B_{ij} é por conseguinte nulo. E o mesmo acontece a qualquer das suas potências, em virtude da quase-permutabilidade dos A_i:

$$A_i B_{jl} = B_{jl} A_i \qquad (i, j, l = 1, 2, \cdots, m).$$

Temos com efeito, tomando p inteiro e superior à unidade,

$$B_{ij}^p = B_{ij}^{p-1}(A_i A_j - A_j A_i) = A_i (B_{ij}^{p-1} A_j) - (B_{ij}^{p-1} A_j) A_i$$

donde

$$tr\, B_{ij}^p = 0 \qquad (p = 1, 2, \cdots).$$

Ora os coeficientes do polinómio característico de qualquer operador A exprimem se por intermédio das fórmulas de BOCHER como combinações lineares dos traços $tr\,A$, $tr\,A^2, \cdots$, $tr\,A^n$. Anulando-se todos estes traços, A admite portanto apenas valores próprios nulos: é nilpotente. É o caso dos B_{ij}.

Demonstração do Teorema no caso de os A_i *serem permutáveis.* Assentamo-la no Lema 1 e na seguinte evidente proposição: qualquer operador é reduzido pela intersecção de um certo número de variedades caso o seja por cada uma destas.

Representemos por $V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{ir_i}$ as r_i variedades próprias de A_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ e suponhamos que é $r = r_1$. Fixemos i num dos inteiros $1, 2, \cdots, r$. A variedade V_{1i} reduz A_2, logo é não vazia uma pelo menos das intersecções $V_{1i} \cap V_{2j}$ $(j = 1, 2, \cdots, r_2)$. Fixemos j num dos inteiros que dão intersecção não vazia. Porque $V_{1i} \cap V_{2j}$ reduz A_3, é não vazia uma pelo menos das intersecções $V_{1i} \cap V_{2j} \cap V_{3l}$ $(l = 1, 2, \cdots, r_3)$. Prosseguindo do mesmo modo, obteremos um certo número de subespaços não vazios

$$V_{1i} \cap V_{2j} \cap V_{3l} \cap \cdots \cap V_{mt} \tag{1}$$

para o valor inicial fixado a i e para certos sistemas de valores dos índices $j, l, \cdots, t$.

Ora, vectores situados em diferentes subespaços (1) são linearmente independentes, por isso que pertencem a distintas variedades próprias de um pelo menos dos operadores. Esta conclusão estabelece o teorema, no caso particular em que os A_i permutam, ao fazer variar i de 1 a $r = r_1$.

Demonstração do Teorema no caso geral. Da permutabilidade dos A_i com os B_{jl} decorre a permutabilidade dos B_{ij} dois a dois e por esta razão é não vazia a intersecção V dos espaços nulos dos operadores B_{ij} (mostra o Lema 2 que não existem outras variedades próprias dos B_{ij}).

E da permutabilidade de A_i com os B_{jl} resulta ainda não ser vazia a intersecção V'_{ij} de V com qualquer variedade própria V_{ij} de A_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

Os subespaços V'_{ij} reduzem os m operadores A_l.

Na verdade, para $x \in V'_{ij}$ é $B_{il}x = 0$ e $A_i x = \lambda_{ij} x$ (λ_{ij} valor próprio de A_i para a variedade própria V_{ij}), donde

$$A_i A_l x = A_l A_i x = \lambda_{ij} A_l x,$$

[*] DRAZIN, DUNGEY e GRUENBERG, *Some theorems on commutative matrices*, J. of the London Math. Soc., 26 (1951).

donde se tira $A_l x \in V_{ij}$. E também $A_l x \in V$, por ser

$$B_{pq} A_l x = A_l B_{pq} x = 0 .$$

Logo, $x \in V'_{ij}$ implica $A_l x \in V'_{ij}$, quer dizer,

$$A_l V'_{ij} \subset V'_{ij}$$

$$(l=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,r_i)$$

Posto isto, torna-se aplicável ao caso presente a demonstração do caso particular antes considerado — desde que se considerem as variedades V'_{ij} em lugar das variedades V_{ij}.

Conjuntos finitos (*)

por **José Ribeiro Albuquerque**

É de toda a conveniência que as palavras *finito* e *infinito* sejam empregadas com propriedade.

São conceitos de uso corrente em Matemática, sobretudo em Análise.

As pessoas que por força de circunstâncias são obrigadas a fazer frequente uso destes termos, por exemplo os estudantes, não encontram fàcilmente quem lhes forneça os significados claros e precisos, limpos de tudo o que de impróprio e confuso se disse e ficou ligado a esses termos.

Nos cursos, em geral, começa-se a exposição mais adiante e supõe-se que os alunos já conhecem com suficiente nitidez essas noções.

Os outros conceitos que se apresentam então, ficam sèriamente prejudicados sem um esclarecimento prévio.

Procura-se neste trabalho pôr ao alcance do leitor, o suficiente para que possa, sem perturbação, prosseguir os estudos correntes de Matemática, e também o meio de levar mais longe, se o quiser fazer, o trabalho imprescindível de clarificação

Começaremos, para isso, por estudar o conceito de *correspondência*.

1. Correspondência biunívoca

O conceito de *correspondência* não é um conceito primitivo e pode reduzir-se ao conceito primitivo de conjunto. A possibilidade de uma tal redução confere ao conceito de *correspondência* o carácter de conceito derivado da teoria geral dos conjuntos.

Indica-se a seguir uma maneira de fazer essa redução.

Definição 1. Dados dois conjuntos A e B, sub-conjuntos dum mesmo conjunto fundamental 1, um conjunto P tal que:

1.º). $Z \in P$ se e só se $Z \equiv (A \times Z) + (B \times Z)$,

2.º). Se $X_1 \in A \times Z$ e $X_2 \in A \times Z$ então $X_1 \equiv X_2$,

3.º). Se $Y_1 \in B \times Z$ e $Y_2 \in B \times Z$ então $Y_1 \equiv Y_2$,

4.º). Se $Z_1 \in P$ e $Z_2 \in P$ então $A \times Z_1 \times Z_2 \equiv 0$,

5.º). Se $Z_1 \in P$ e $Z_2 \in P$ então $B \times Z_1 \times Z_2 \equiv 0$,

6.º). Se $X \in A$ (ou $X \in B$) existe um $Z \in P$ tal que $X \in Z$.

É um conjunto P que *estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de* A e B.

Observações: Os conjuntos Z e P são sub-conjuntos do conjunto fundamental 1; as somas e produtos são relativos ao conjunto fundamental. O conjunto P é portanto um conjunto de sub-conjuntos de 1, isto é, $P \subset 2^1$.

As condições 1.º), 2.º) e 3.º) definem um *par;* um conjunto P que verifique apenas as condições 1.º), 2.º) e 3.º), estabelece uma *correspondência* entre os elementos de A e B.

Um conjunto que verifique as condições 1.º), 2.º), 3.º) e 4.º) (ou 1.º), 2.º), 3.º) e 5.º)) estabelece uma *correspondência unívoca* entre os elementos de A e B (ou de B e A). Uma correspondência *biunívoca* é unívoca nos dois sentidos.

Com a condição 6.º) a correspondência biunívoca é *completa.*

Com o termo derivado *correspondência biunívoca* define-se um outro termo derivado: trata-se duma relação binária, *é equivalente a,* estabelecida entre os sub-conjuntos do conjunto fundamental.

Definição 2. Dados dois conjuntos A e B sub-conjuntos dum mesmo conjunto fundamental 1, diremos que A *é equivalente a* B e escreveremos simbòlicamente $A \sim B$ se, e só se, existe um conjunto P que estabeleça uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e B.

(*) Este artigo difere na composição dos restantes, por ter sido inicialmente destinado ao n.º 59 da *Gazeta de Matemática.*

Pode estabelecer-se o seguinte:

Teorema 1. *A relação binária* **é equivalente** *e é uma relação* **determinada, reflexiva, simétrica** e **transitiva**. *Quaisquer que sejam*, A, B, C

1.º. $A \sim B$ *ou* $A \nsim B$ *(determinação)*.

2.º. $A \sim A$ *(reflexividade)*.

3.º. *se* $A \sim B$ *então* $B \sim A$ *(simetria)*.

4.º. *se* $A \sim B$ *e* $B \sim C$ *então* $A \sim C$ *(transitividade)*.

$A \nsim B$ significa que: *A é equivalente a B*, é falso. O teorema demonstra-se partindo das cinco primeiras condições da definição 1; a reflexidade, a simetria e a transitividade demonstram-se qualquer que seja o sentido atribuído à palavra *existe* empregada na definição 2. A determinação fica assim dependente do sentido da palavra existe, mas se considerarmos uma existência não contraditória a relação $\sim$ é determinada.

2. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos

Os conceitos de finito e de infinito são antagónicos e têm sido formados pela Humanidade através de um *processus* lento e prolongado.

Nas origens deste *processus* está muito provàvelmente uma operação mecânica, a operação de *tomar* os objectos mediante uma escolha entre os inumeráveis objectos circunstantes. Esta operação mecânica teria passado depois gradualmente e insensìvelmente a operação mental, num daqueles saltos qualitativos que do conhecimento emocional ou sensorial faz passar ao conhecimento racional.

A repetição de tantas experiências com objectos de *natureza diversa* teria levado fatalmente à formação do conceito primitivíssimo de número natural pequeno (dígito) e, pouco a pouco, mediante saltos bruscos, relâmpagos de inteligência na mente primitiva dos experimentadores, teria nascido, sem que se possa precisar como ou quando, o conceito de *conjunto finito* ao qual teria seguido o conceito de *número finito*.

Mas, irresistìvelmente e de modo inseparável, ao lado da colecção finita ficava a imensidade dos outros objectos; o conceito de conjunto infinito alimentou assim o seu antagónico, e dele se foi igualmente formando.

Este processo de formação dos conceitos antagónicos é interminável e, no presente caso do par *finito-infinito* estamos bem longe duma conclusão.

A existência de uma teoria dos números transfinitos [1], teoria recentemente nascida e ainda em plena formação, prova como se procura conhecer o infinito por meio do finito.

(1) Veja-se mais longe o sentido da palavra *transnfiito*.

Por outro lado o finito estuda-se por meio do infinito. Citemos para esclarecimento esta passagem de Waclaw Sierpinski:

«*Il importe de signaler l'inclination d'esprit humain de se servir d'***infinité** *pour examiner la* **finité**. *Par exemple, le* **Calcul infinitésimal** *a été inventé pour nous faciliter la recherche d'objects finis; pour calculer le volume d'un corps nous le décomposons en Calcul integral en une infinité de parties infiniment petites et cela nous rend le problème plus facile!* «*Es muss auch dem menschlichen Verstand das Prädicat* «*unendlich*» *in gewissen Rücksichten zugastanden werden*» *dit Cantor* [1].»

Entre as propriedades dos conjuntos infinitos figuram muitas que não são verificadas pelos conjuntos finitos; tomar uma delas para definição de conjunto infinito e, a partir dessa definição, fazer a teoria dos conjuntos infinitos, foi o método formal de estudo seguido por R. Dedekind [2].

O mesmo método formal é adoptado por muitos outros autores, partindo alguns duma definição de conjunto finito.

Este método, todavia, levanta uma questão muito importante da teoria dos conjuntos; trata-se de um problema que foi enunciado claramente por H. Lebesgue, nos seguintes termos:

«*Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas demontrée*» [3].

Uma vez escolhida uma definição de conjunto finito, cada conjunto infinito é um conjunto *não-finito*. Do mesmo modo, dada uma definição de infinito, cada conjunto finito é um conjunto *não-infinito*.

É depois de adoptar a definição de conjunto infinito dada por Dedekind que Sierpinski chama *transfinitos* os números cardinais dos conjuntos infinitos.

Em todos os casos faltou sempre provar que: um conjunto infinito é não-finito, um conjunto finito é não-infinito.

Tomemos a seguinte definição de conjunto infinito:

Definição 3. Um sub-conjunto A do conjunto fundamental 1 será chamado um *conjunto infinito* se, e só se, para qualquer $X \varepsilon 1-A$ se tem: $A \sim A+(X)$.

Com o símbolo (X) representa-se um conjunto com um único elemento: $X \varepsilon (X)$ e se $Y \varepsilon 1$ e $Y \varepsilon (X)$ então $Y \equiv X$.

(1) W. Sierpinski – Leçons sur les nombres transfinis — pag. 53.

(2) Ricardo (Júlio Guilherme) Dedekind — Was sind und was sollen die Zahlen, § 5.64.

(3) No final duma carta de Henri Lebesgue a E'mile Borel: ver. E. Borel — Leçons sur la Théorie des Fonctions, pag. 159.

A definição de conjunto infinito que acabámos de dar coincide com a definição dada por Dedekind em «*Was sind und was sollen die Zahlen*» *(Braunschweig, 1888)*; a definição de Dedekind era a seguinte: *um conjunto é infinito se, e só se, tem a mesma potência de uma das suas partes alíquotas.*

Um conjunto A infinito no sentido da Definição 3 é manifestamente infinito no sentido de Dedekind.

Recìprocamente, seja A um conjunto infinito no sentido de Dedekind; será então $A \sim B$ com $B \subset A$. Seja $X \varepsilon A - B$ e então teremos $B \subset [B + (X)] \subset A$ e se $A \sim B$ será também $B \sim [B + (X)]$ e portanto o conjunto B e consequentemente o conjunto A são infinitos no sentido da Definição 3.

Os conjuntos infinitos cuja teoria foi desenvolvida por Dedekind são os mesmos que os da classe aqui determinada por esta definição.

Ponhamos agora a seguinte:

Definição 4. Um sub-conjunto A do conjunto fundamental 1 será chamado *conjunto finito* se, e só se, para qualquer $X \varepsilon 1 - A$ se tem: $A \not\sim A + (X)$.

É quasi evidente que as duas classes de conjuntos aqui fixadas com as definições 3 e 4, são complementares dentro de 2^1.

Mas, a evidência é o carácter de que se revestem as proposições depois de demonstradas, e então demonstraremos um teorema

Teorema 2. *Para que*

1) *Cada conjunto* $A \subset 1$ *não-finito seja um conjunto infinito é necessário e suficiente que:*

2) *Dados dois conjuntos* A *e* $A + (X)$ *com* $X \varepsilon 1 - A$, *uma e uma só das relações* $A \sim A + (X)$ *e* $A \not\sim A + (X)$ *tenha lugar.*

Demonstração.

Suponhamos 1) falsa; então existe um conjunto $A \subset 1$ *não-finito* que é *não-infinito;* mas se A é não-finito não se tem $A \not\sim A + (X)$, $X \varepsilon 1 - A$ e se A é não-infinito não se tem $A \sim A + (X)$, $X \varepsilon 1 - A$.

Portanto, existem os conjuntos A e $A + (X)$ com $X \varepsilon 1 - A$ tais que nenhuma das relações $A \sim A + (X)$ e $A \not\sim A + (X)$ tem lugar; mas então também 2) é falsa.

Suponhamos 2) falsa; não se podem verificar simultâneamente para o mesmo par de conjuntos as duas relações $\sim$ e $\not\sim$ e portanto existem os conjuntos $A \subset 1$ e $A + (X)$ com $X \varepsilon 1 - A$ tais que: não se tem $A \sim A + (X)$ com $X \varepsilon 1 - A$ e então A é não-infinito (Def. 3), não se tem $A \not\sim A + (X)$ com $X \varepsilon 1 - A$ e então A é não-finito (Def. 4). Portanto a 1) é falsa. Assim fica demonstrado o teorema.

Podemos então afirmar perante as definições 3 e 4, o seguinte

Teorema 3. *Cada conjunto* $A \subset 1$ *não-finito é um conjunto infinito, cada conjunto* $A \subset 1$ *não-infinito é um conjunto finito.*

Diversas definições de conjunto finito se conhecem hoje. As mais notáveis foram dadas por B. Russel (1), Zermelo (2), Sierpinski (3), Kuratowski (4), Tarski (5).

A definição ordinária de conjunto *finito* pode ser assim enunciada: *um conjunto é finito se, e só se, o número dos seus elementos se pode exprimir mediante um número natural* (supondo-se dada a noção de número natural).

Das definições citadas precedentemente a mais notável de todas é talvez a de Alfred Tarski. Na sua memória sobre *Ensembles finis*, memória que ele considera *sistematisante*, o autor apresenta a seguinte notável propriedade para definição de conjunto finito:

Def. A. Elemento irredutível duma classe K de conjuntos é cada conjunto A tal que; $A \varepsilon K$: se $B \subset A$ e $B \varepsilon K$ então $B \equiv A$.

Def. A'. Elemento saturado duma classe K de conjuntos é cada conjunto A tal que; $A \varepsilon K$: se $A \subset B$ e $B \varepsilon K$ então $A \equiv B$.

Cada uma destas duas noções dá origem a uma definição de conjunto finito.

Def. B. O conjunto A é finito se, e só se, cada classe não vazia K de seus sub-conjuntos admite pelo menos um elemento irredutível (ou saturado).

Para terminar estas notícias históricas digamos que muitas definições de conjunto finito se baseiam na noção de ordem e notemos ainda que Schoenflies considerava impossível a definição de número finito independente da noção de ordem.

3. Propriedades dos conjuntos finitos.

As definições 3 e 4 e o teorema que se lhes seguiu, esclarecem o problema de Lebesgue sobre a possibilidade de nomear um conjunto simultâneamente não-finito e não-infinito.

Os conjuntos infinitos no sentido da Definição 3 foram estudados já suficientemente (Dedekind, Sierpinski, etc.).

---

(1) Comptes rendus de la Soc. Math. de France, 22 Mars 1911, p. 30.

(2) Ueber die Grundlagen der Arithmetik (Atti del IV Cong. Intern. dei Mat., vol. II).

(3) L'axiome de Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles, Bull. de l'Ac. des Sciences de Cracovie, 1918, p. 106.

(4) Sur la notion de l'ensemble fini. Fund. Math, T. 1, p. 13.

(5) Sur les ensembles finis, Fund. Math., T. 6, pp. 45–95.

Retomemos a Definição 4, e estabeleçamos para esta classe de conjuntos as suas propriedades mais notáveis.

TEOREMA 4. *É finito cada conjunto* A *tal que:*

X ε A *e se* Y ε A *então* X ≡ Y. Para demonstrar basta considerar os conjuntos A e $B \equiv A+(X)$ com $X \varepsilon 1 - A$ e em seguida os conjuntos P verificando as condições 1.º), 2.º), 3.º), da Definição 1. Os conjuntos P nestas condições, conjuntos de pares de elementos, um de A outro de B, são ùnicamente dois e nenhum deles satisfaz as condições 4.º), 5.º) e 6.º). Então para os conjuntos A e B as condições da Definição 1 são incompatíveis, e portanto não existe um P que estabeleça uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e $A+(X)$.

Então, temos $A \nsim A+(X)$ com $X \varepsilon 1 - A$ e o conjunto A é finito.

TEOREMA 5. *Se* A *e* B *são finitos* A+B *é finito.*

Tem-se: $A \nsim A+(X)$ e $B \nsim B+(X)$ para $X \varepsilon 1 - (A+B)$. Mas como $A \sim A$ e portanto $A+B \nsim A+(B+(X))$, vem finalmente $A+B \nsim (A+B)+(X)$.

TEOREMA 6. *Se para cada* A ⊂ B *o conjunto* A *é finito, então* B *é finito.*

Temos $A \subset B$ e $B-A \subset B$; mas A e $B-A$ são finitos e pelo teorema precedente $A+(B-A)$ é finito.

Resultam os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1. *Se* A *é finito e* B *um conjunto qualquer,* A − B *é finito.*

COROLÁRIO 2. *Se* A *é finito e* B *um conjunto qualquer,* A ⋊ B *é finito.*

COROLÁRIO 3. *Se* B *é finito então, cada* A ⊂ B *é também finito.*

Seja, com efeito, $A \subset B$; então, $A+(B-A) \equiv B$ e também $B-(B-A) \equiv A$; mas, aplicando ao primeiro membro desta última o corolário 1, o que é possível porque B é finito, resulta imediatamente: A finito.

COROLÁRIO 4. *A condição necessária e suficiente para que* A *seja finito, é que seja finito todo e qualquer seu sub-conjunto.*

TEOREMA 7. *Princípio da indução completa para os conjuntos finitos. Se* A *é finito, então* A *pertence a toda a classe* K *de conjuntos que satisfaça as seguintes condições:*

1) *Se* X ε A *então* (X) ε K.
2) *Se* B ε K *e* X ε A *então* B + (X) ε K.

Demonstração.

Seja $X \varepsilon A$ e portanto devido a 1), temos $(X) \varepsilon K$. Representaremos com o símbolo **1** o cardinal do conjunto (X). Distinguiremos esse elemento $X \varepsilon A$ pondo $X \equiv X_1$ e portanto (X_1) é o conjunto cujo cardinal é **1**.

Seja um outro $X \varepsilon A$; então pela condição 2) temos $(X_1)+(X) \varepsilon K$. Introduzamos um novo símbolo para representar o cardinal do conjunto $(X_1)+(X)$; o símbolo introduzido é **2** e para distinguir aquele X dos restantes pomos $X \equiv X_2$ e portanto o cardinal do conjunto $(X_1)+(X_2)$ é **2**.

Continuando este processo de construção introduzimos assim os símbolos

$$\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \cdots, \mathbf{n}$$

e, se com este processo chegamos ao conjunto A, o teorema está demonstrado porque toda a classe K que verifique as condições 1) e 2) conterá evidentemente todos os conjuntos construidos.

Se, com este procedimento repetido indefinidamente, não se alcança o conjunto A, tomaremos o conjunto

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \cdots, X_n, \cdots$$

e designaremos por B o conjunto cujos elementos são

$$X_2, X_3, X_4, \cdots, X_n, \cdots$$

O conjunto P cujos elementos são os pares $[X_1, X_2]$, $[X_2, X_3]$, ⋯ estabelece uma correspondência biunívoca entre B e $B+(X_1)$; será pois

$$B \sim B+(X_1) \text{ com } X_1 \varepsilon A - B.$$

Mas é evidente $B \subset A$ e por consequência tanto B como A seriam infinitos contra a hipótese.

O conjunto A é alcançado com o processo de construção anterior e corresponde-lhe evidentemente um dos símbolos introduzidos: **1**, **2**, **3**, **4**, ⋯, **n**.

O conjunto A pertence a todas as classes K que verificam as condições 1) e 2), pois que qualquer classe nestas condições conterá todos os conjuntos construidos.

c.q.d.

Resultam do teorema os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1. *A cada conjunto* A *finito corresponde um e só um dos números cardinais* **1**, **2**, **3**, **4**, ⋯ **n** ⋯. *Além disso, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos dum qualquer conjunto finito e os primeiros números cardinais.*

COROLÁRIO 2. *Existe um conjunto que não é finito.* Com efeito tomemos o conjunto dos números cardinais introduzidos na demonstração do teorema: $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$. Representemos por B o conjunto cujos elementos são os cardinais $2, 3, 4, \cdots n, \cdots$; teremos a relação $B \sim B+(1)$ com $1 \notin B$. Então, o conjunto dos números cardinais é infinito no sentido da Definição 3.

Teorema 8. *Se* A *pertence a toda a classe* K *de conjuntos que satisfaz as condições* 1). *e* 2). *do teorema precedente, então* A *é finito.*

Com efeito, se A pertence a uma classe K que verifica as condições 1) e 2), então A pode ser alcançado mediante o processo de construção indicado na demonstração do teorema precedente e corresponde-lhe um dos números cardinais $1, 2, 3, 4, \cdots, n$. Resultará imediatamente que se tem a relação $A \nsim A+(X)$ com $X \notin A$ e portanto A é finito.

Derivam daqui os seguintes corolários:

Corolário 1. *Para que* A *seja finito é necessário e suficiente que* A *pertença a toda a classe* K *que verifique as condições* 1). *e* 2). *do teorema* 7.

Corolário 2. *Para que* A *seja finito é necessário e suficiente que* A *pertença a toda a classe* K *de conjuntos que verifique as condições:*

1) *Se* $X \in A$ *então* $(X) \in K$,

2) *Se* $B \in K$ *e* $C \in K$ *então* $B + C \in K$.

Este teorema demonstra-se sem dificuldade.

Muitas outras propriedades importantes dos conjuntos finitos se podem demonstrar sem grande dificuldade, mas com aquelas que aqui apresentamos consideramos a teoria já esboçada.

O cálculo das probabilidades e a teorização do comportamento económico(1)

por Gustavo de Castro

1. O Comportamento Económico.

Se o Cálculo das Probabilidades pôde passar por uma teoria dos jogos de azar, esta teoria dos jogos de azar pode descrever-se como uma *teoria do comportamento económico*. A concepção do Cálculo como uma teoria de comportamento tem, porém, que ser temperada pela concepção das realidades que nos afasta de extremos insensatos. A matemática não pode ser vista como produto do exercício gratuíto da inteligência nem como codificação de verdades absolutas que os génios desvendam, de maneira mais ou menos sobrenatural, para pautar as únicas condutas inteligentes; há que algures encontrar a vera efígie do que é a um tempo uma construção maravilhosa da inteligência e um apoio precioso da nossa acção sobre a natureza — tudo isto, mas só isto.

Veja-se a solene advertência de Borel: «*La science du Hasard ne saurait, plus que toute autre science, prétendre à régir nos actes; elle peut seulement, comme c'est le rôle de la science, faciliter la reflexion qui précède l'action chez tous les êtres raisonnables. Dans les ques-*

---

(1) Este escrito é a redacção da segunda de quatro palestras que, sob o título geral «*O Cálculo das Probabilidades. Palestras sobre os progressos duma disciplina por ocasião dum centenário*», foram realizadas na Administração-Geral dos Correios, Telégrafos e Telefones, em Janeiro-Fevereiro de 1955. Incluidas numa longa série de palestras profissionais daquela Administração, esta é publicada aqui por sua amável deferência.

tions compliquées, le bon sens a besoin d'être guidé par les résultats des calculs; les formules ne créent pas l'esprit de finesse, mais en facilitent l'usage.»

A decisão dum comportamento é efectivamente o ónus e o previlégio de quem conhece a substância das coisas, de quem tem a intimidade dos problemas: é a rota fixada por quem, debruçado sobre a carta, revive e absorve os pormenores, as circunstâncias significativas, valorizando-os convenientemente. No acto de decisão há que conjurar toda a possível informação, uma parte da qual analizada, cifrada matemàticamente; mas uma parte só. Aquele a quem cabe esta análise e estes cálculos — o matemático — raras vezes poderá dominar a parte que se não conta nem mede, embora se exprima; menos ainda a informação que se tem e se não sabe exprimir e a que nem se chega a saber que se tem. Informação que não vem revelada, mas duma docilidade do espírito em face da realidade; informação que é a impregnação do espírito paciente pela natureza das coisas. A experiência e até os pendores que fazem o matemático, e são só certa experiência e certos pendores, não substitui a experiência e os pendores que se exigem para a decisão. Adquirir uns e outros no mesmo domínio, sem que interfiram e sem que se prejudiquem, é uma tarefa de sucesso incerto, que parece de desaconselhar, embora seja indispensável no matemático o conhecimento do clima da administração e no administrador a inteligência do conteúdo, real valor e limitações, da contribuição da matemática.

É contanto a verdade que, quando uma parte da informação se pode já processar cientìficamente, a matemática é muitas vezes um auxiliar inestimável de que não seria avisado prescindir; como, de resto, muitos outros instrumentos de que o espírito se muniu para uma mais segura e poderosa perscrutação, tal o telescópio que empurra para mais longe a verdadeira noite, a do que se não conhece.

Uma vez por outra, até, toda a informação pertinente é a que o matemático domina e então toda a reflexão é matemática: a reflexão matemática pauta então, excepcionalmente, as decisões. É em situações ideais deste tipo que se exemplifica a utilização dos conceitos, dos instrumentos e das técnicas, e se adquire firmeza na utilização; a distância do modelo à realidade constitui uma preocupação diferente.

Assim o Cálculo das Probabilidades é a teoria de comportamento económico em certas situações em que um jogo de azar constitui um modelo satisfatório e sugestivo, embora ideal e sumário. Onde um jogador se move por razões que são identificáveis às de quem decide, de onde uma possibilidade de formulação de critérios de escolha. Em que há várias opções, entre valores que podem adquirir-se, eventualmente, com probabilidades de aquisição calculáveis.

É pois produto duma reflexão que tende a pautar resoluções pelo cálculo dos valores que podem adquirir-se, e das probabilidades da sua aquisição, seguido do confronto com os custos das diferentes opções; tudo dirigido por certos princípios.

Desculpando-nos dum exemplo que de tão sugestivo favorecerá indevidamente o expositor, consideremos a questão da exploração industrial da roleta. Ponha-se à decisão a questão de se é ou não «económico» ser-se banqueiro; se se pode ou não ser banqueiro quando se procura tirar rendimento dum capital e, no caso afirmativo, que rendimento se tira.

Supunhamos que J joga e' escudos no vermelho. A quantia e' pode ver-se como a entrada que J paga a B contra a obrigação assumida por este de lhe pagar $18\,e'$ escudos se saír o vermelho.

Observemos que os e' escudos de J terão valores diferentes ao longo do tempo: antes de apostados valem e'; depois de parada a bola valem $18e'$ ou 0, consoante o caso. E quando a bola está a andar, depois do «nada mais» e antes de parada?

Está a ver-se o interesse duma resposta a esta questão; se os e' escudos postos na mesa *valerem* e, a diferença e'-e é um um ganho do banqueiro, pelo menos num conveniente sentido. O conhecimento deste *ganho* será pelo menos um elemento valioso na supesagem da situação de que poderá sair uma *decisão de comportamento económico*.

Terão porém algum valor os e' escudos no lapso que estamos considerando? Parece poder afirmar-se que sim, e a seguinte situação esclarecerá o caso. Suponhamos que entro numa sala de jogo e encontro, fortemente apostado, um devedor antigo; suponhamos, por amor da discussão, que a minha presença provoca uma avalanche de consciência que o leva a propor-me que aceite a sua posição como prestação a deduzir da dívida, e que eu digo que sim.

Quanto devo abater à dívida? A resposta de que se abata o que a casa pagar não me é satisfatória quando em maré de sorte: eu sentiria que o meu devedor me tinha explorado a veia, obrigando-me ainda a cuidar das fichas; que os deuses não tinham afinal sido propícios a mim, porque eu era um tolo; perceberia mesmo que o devedor me não tinha passado posição nenhuma, o que tinha era feito de mim seu cobrador, etc. Pelo contrário, quando cheio de azar, diria o meu devedor que eu tinha jogado e perdido o dinheiro dele; que os deuses preferem os tipos simpáticos e ele nunca deveria ter mudado a mão; que, apesar de tudo, não merecia isto, etc.

Podemos até sondar a questão mais um pouco, numa situação afim mas diferente. Se o jogo fosse demorado, ou de duração incerta, poderia conceber-se que uma vez por outra um jogador apressado se dispusesse a vender a posição; esta circunstância, a ser frequente, poderia suscitar uma outra indústria, a dum segundo banqueiro que comprasse posições. Porque quantias e'' conviria a este segundo banqueiro comprar posições? A diferença e-e'', se conhecermos e, dará o seu ganho, em certo sentido.

Admitido pois o interesse em se conhecer, para fins convenientes, o valor e duma parada e', feita a um jogo de azar que principia, parece-nos importante que se reconheça que a sua definição é um problema de certo modo anterior ao Cálculo das Probabilidades, o qual se formou para o resolver com base em critérios que lhe são exteriores (embora este Cálculo tenha imposto e orientado a sua formulação).

Voltando [1] à carta de PASCAL a FERMAT, de 29 de Julho de 1654, vemos logo no começo que PASCAL tinha recebido na véspera uma carta de FERMAT com a solução de dois problemas; o dos *dados* e o das *partilhas,* ambos propostos pelo CAVALEIRO DE MÉRÉ a PASCAL. Em resposta escreve PASCAL: «*...vous avez trouvé les deux partis, des dés et des parties, dans la parfaite justesse... je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous...*»

Que problemas eram estes, o dos dados e o das partilhas? O dos dados é o que resolvemos atrás; o outro é um problema de partilha do bolo entre dois jogadores quando o jogo tem que desfazer-se antes dum fim. É, portanto, noutro ângulo, a questão que nos ocupa. Vejamos o problema de que se tratava: Dois jogadores J_1 e J_2 jogam um bolo de 64 pistolas que caberá ao primeiro que ganhar três jogadas, sendo as possibilidades de ganho em cada jogada iguais para ambos. O jogo tem que acabar quando J_1 está com duas jogadas ganhas e J_2 com uma; como devem partilhar o bolo? Trata-se

[1] Veja-se a primeira palestra: «*Da Navegação e do Comércio ao Cálculo das Probabilidades*», Memórias da Ordem dos Engenheiros, 99.

também, pois, duma questão de valores de posições num jogo de azar.

Um terceiro ângulo é o da *equidade* no jogo, o do problema do cálculo das paradas dos jogadores para que um jogo de azar seja um *jogo equitativo*. Se, num jogo, J_1 entra com e_1', que passa a valer e_1, e J_2 com e_2', que passa a valer e_2, de quanto devem ser as entradas para que $e_1 = e_2$. Ou o problema inverso: Dois jogadores lançam a moeda para saber quem fica com as posições de ambos (J_1 tinha apostado 2 num cavalo e 3 na primeira dúzia; J_2 tinha apostado 1 no vermelho, 4 numa quadra); será o jogo *equitativo*?

Fica, pois, posto um problema cuja solução poderá intervir em problemas de decisão: uma quantia que se aposta num jogo de azar muda de valor, ou pode mudar; x escudos apostados no vermelho à roleta podem não valer o mesmo que x escudos apostados nas menores de sete (contra o dôbro) no lançamento de dois dados. E valerão o mesmo que x escudos apostados num pleno da primeira roleta?

O que se quer é saber calcular o valor em cada caso.

2. O Princípio de Bernoulli.

Por estranho que à primeira vista pareça o Cálculo das Probabilidades não liquida a questão. Um dos bons ensinamentos que dele se colhem vem mesmo com o esclarecimento de que lhe não compete liquidar a questão. Mostra-nos para isso que vários princípios são possíveis e, analizando as consequências põe-nos em condições de optar em conhecimento de causa. De caminho vão-se separando distintos tipos de problemas e delimitando o domínio das matemáticas, o que não é tarefa inútil ou fácil (e o que torna a análise interessante para quem a faz, diga-se incidentalmente e um pouco como desculpa).

Procuremos caminhar para a solução do nosso problema pela introdução de umas definições. Recorde-se que as definições matemáticas criam seres de espírito, distintos dos seres reais dos quais são contrapartidas; mais ou menos fiéis na representação que constituem, não podem ser julgadas na comparação directa, que só pode ser terminante quando exclui, mas pela possibilidade que dêem duma teorização que, na estrutura geral e nas verificações da prática, se mostre satisfatória. Por isso convém qne os novos seres tenham novos nomes. Vejamos então.

Põe-se o problema de obter, relativamente a um ganho aleatório (de 100 contos com a probabilidade 1/10, por exemplo), um número que na descrição de JACOB BERNOULLI seja *a esperança de obtermos o melhor, temperada ou diminuída pelo receio do pior*. Seja a *attente* definida por HUYGENS, a que se chamou depois «esperança matemática» com alguma infelicidade; utilizaremos, com HUYGENS, o termo *expectação* para representar essa esperança que se define, no caso simples, como o produto da quantia a ganhar pela probabilidade do ganho ($100 \times 1/10 = 10$ contos, no caso do exemplo). Vejamos a definição com a generalidade de que precisamos.

Chama-se *expectação* duma posição num jogo de azar, num certo instante, à soma dos produtos que se obtêm multiplicando as probabilidades das possíveis cadeias de sucessos futuros pelos ganhos eventuais correspondentes; chama-se *valor actuarial duma entrada* à expectação da posição que com ela se compra; chama-se *valor actuarial duma quantia apostada* à soma dos valores actuariais das entradas em que se desdobra, no tempo e no espaço.

Postas estas definições diremos que o *princípio* de valorização, agora no sentido «económico», que os primeiros cultures das Probabilidades aceitaram implìcitamente, é o

1º PRINCÍPIO DE BERNOULLI: *o valor em numerário, numa época, duma quantia apos-*

tada num jogo de azar é o seu valor actuarial nessa época.

Observe-se que o «valor em numerário», a que o princípio se refere, pretende ser o que as palavras significam na linguagem comum das pessoas que têm capitais para investir; por isto se trata dum princípio, aceitável ou não: uma proposição híbrida relacionando um ser de pensamento com uma coisa, um ser de acção. Por isso é, como todos os princípios, susceptível de traçar regras de conduta se lhe juntarmos mais um princípio e um esclarecimento.

PRINCÍPIO DE ACÇÃO ECONÓMICA: *deve agir-se por forma a aumentar a fortuna em numerário.*

Esclarecimento: propõe-se então no princípio de BERNOULLI que o valor em numerário seja identificado com o valor actuarial, por forma a assentar-se no seguinte

2° PRINCÍPIO (DE ACÇÃO ECONÓMICA) DE BERNOULLI: *entre várias alternativas de acção económica, como valores actuariais conhecidos e tudo o resto igual, deve tomar-se a decisão que torne máxima a soma do valor em numerário que resta com o valor actuarial adquirido, da fortuna com a expectação actuais.*

Suponhamos para exemplo que, detentor duma fortuna de 100, confronto a compra (por 100) duma habilitação a 300 com a probabilidade $1/2$ com a compra (por 10) duma habilitação de 10.000 com a probabilidade de $1/2.000$. O princípio diz-me que devo preferir comprar a primeira a não comprar nada, mas não comprar nenhuma a comprar a segunda; as fortunas relativas aos três casos são as seguintes:

(*i*) Se não compro nada a fortuna é $f_1=0$;

(*ii*) Se compro a primeira habilitação,

$$f_2 = 100-100+\frac{300}{2}=150;$$

(*iii*) Se compro a segunda,

$$f_3 = 100-10+\frac{10.000}{2.000}=95.$$

Postas assim as coisas, será a ponderação das consequências da adopção das normas (como esta), em que este principio de acção se desdobra, que dirá se a teorização é ou não aceitável e delimitará o seu domínio de validade. Por essa ponderação ficarão definidas a traço grosso as fronteiras do domínio das situações concretas em que se aceitará decidir como estabelece o princípio. No exemplo que acabou de dar-se não é difícil imaginar casos em que o homem prudente decidiria contra as injunções da teoria; é pois de esperar que novas condições venham a introduzir-se por forma a conceder ao princípio a força que ainda se não devisa.

Assim, na linha da adopção do princípio de BERNOULLI, com o esclarecimento que se deu, virá a proposição das definições seguintes: um jogo de azar é equitativo para um jogador se a sua entrada é igual à expectação que compra; um jogo de azar em que o bolo é a soma das entradas é equitativo quando estas são inversamente proporcionais às probabilidades de ganho que compram; a partilha equitativa do bolo, num jogo de azar desfeito antes do fim, está em dar-se aos jogadores os valores actuariais das posiçõesque têm.

O que está a fazer-se é o desenvolvimento duma teorização; a utilização da palavra «equitativo» não deve fazer-nos esquecer que se trata aqui da definição dum novo termo «jogo equitativo». Não se exclui a possibilidade dum «jogo equitativo» ser desfavorável. Faça-se sòmente referência ao facto de que a definição de «jogo equitativo» não subtrai dificuldades às que possam provir dos princípios de BERNOULLI, como quando (por exemplo) se põe o problema da opção entre jogos equitativos. Estamos porém aqui mais interessados nos princípios, o que nos obriga a limitar os nossos casos àqueles em que existe uma e uma só opção que torna máxima a fortuna total, soma da fortuna e da expectação actuais.

(Continua no próximo número)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COMISSÃO INTERNACIONAL DO ENSINO MATEMÁTICO. SUB-COMISSÃO PORTUGUESA

A Comissão Internacional do Ensino Matemático foi criada em 1908 e esteve em função até ao começo da segunda guerra mundial. Em 1950 foi reconstituída e em 1952 passou a fazer parte da União Matemática Internacional.

Foi eleito Presidente de Honra da Comissão o Prof. Fehr, de Genebra, por toda a sua vida, como reconhecimento pelo interesse que sempre tem dedicado à causa do Ensino da Matemática e pelos serviços preciosos que tem prestado a esta causa.

Presentemente, a C. I. E. M. encontra-se em estado de transformação, por causa das novas eleições nos diversos países.

Cada organismo nacional aderente à União Matemática Internacional (em Portugal, o Instituto de Alta Cultura) pode criar, de acordo com a Comissão Nacional de Matemáticos, uma Sub-Comissão, destinada a manter ligação com a C. I. E. M. em todos os campos da sua actividade. O organismo aderente nomeia então dois membros da dita Sub-Comissão, como delegados junto da C. I. E. M.

No quadro da actividade da União Matemática Internacional, a C. I. E. M. é encarregada de estudar as questões relativas ao ensino matemático e científico e de tomar a iniciativa do programa de trabalhos adequados a fim de favorecer o desenvolvimento e o aperfeiçoamento do ensino da matemática em todos os níveis, e de levar o público a apreciar devidamente a importância de tal ensino.

As sub-comissões nacionais executam o trabalho fixado pelo Comité Executivo Internacional, segundo a sua própria iniciativa e os seus próprios interesses. Por outro lado, a Comissão Internacional baseia o seu trabalho sobre o das sub-comissões nacionais.

Em 1956 realiza-se uma reunião dos delegados das sub-comissões nacionais.

Quase todos os países aderentes à União Matemática Internacional nomearam já as respectivas Sub-Comissões do Ensino Matemático. A Sub-Comissão Portuguesa foi recentemente nomeada pelo Instituto de Alta Cultura, tendo como membros os professores: José Vicente Gonçalves, da Faculdade de Ciências de Lisboa; José Jorge Gonçalves Calado, do Liceu Pedro Nunes; José Sebastião e Silva, do Instituto Superior de Agronomia; José Duarte da Silva Paulo, do Liceu de Oeiras. O Instituto de Alta Cultura deliberou ainda designar o segundo e o terceiro dos referidos membros para delegados junto da C. I. E. M.

J. S. S.

PRIMEIRO CURSO LATINO AMERICANO DE APERFEIÇOAMENTO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES UNIVERSITÁRIOS

O Centro de Cooperación Científica de la Unesco para a América Latina tem em seu programa a organização de uma série de cursos de aperfeiçoamento em matérias científicas, destinados a professores das Universidades latino-americanas. O objectivo desses cursos é oferecer aos professores informações acerca dos progressos em sua especialidade, fazer uma revisão dos novos temas que devem ser incluidos na matéria, discutir os programas existentes em cada uma das Universidades e sugerir modificações.

Entre os cursos previstos para o ano de 1955, figurava um curso dedicado à Matemática, organizado em estreita colaboração com a Universidade Nacional de Cuyo, estando a cargo do *Instituto de Matemática* do Departamento de Investigações Científicas da mesma Universidade. Ao curso que se realizou de 23 de Fevereiro a 20 de Março compareceram 4 professores bolivianos, 4 chilenos, 4 peruanos e 1 urugaio, convidados pela Unesco. Os professores das Universidades argentinas e a autora desta notícia foram convidados pela Universidade de Cuyo que hospedou os participantes do curso. O Dr. Oscar Dodera participou do curso como representante da Unesco.

O programa do Primeiro Curso Latino Americano de aperfeiçoamento em Matemática para Professores Universitários compreendia 5 diferentes tipos de actividade a saber:

a) **Curso de aperfeiçoamento** sobre os seguintes assuntos:

I — *Teoria da medida e da integração*, a cargo do Prof. Mischa Cotlar do Instituto de Matemática da Universidade de Cuyo;

II — *Fundamentação da Matemática*, a cargo do Prof. Gregório Klimovsky do Instituto de Matemática da Universidade de Cuyo;

III — *Hidrodinâmica Matemática*, a cargo do Prof. Eduardo Zarantonello do Instituto de Matemática da Universidade de Cuyo;

VI — *Introdução às Algebras de Boole*, a cargo do Prof. António Monteiro da Faculdade de Engenharia de San Juan da Universidade de Cuyo;

V — *Problema da Metrização*, a cargo do Prof. Manuel Balanzat da Faculdade de Ciências da Educação da Universidade de Cuyo;

b) **Cursos especiais** versando sobre:

I — *Teoria dos conjuntos e aritmética transfinita*, a cargo do Prof. Jorge Bosch do Instituto de Matemática da Universidade de Cuyo;

II — *Teoria dos operadores hermitianos*, a cargo do Prof. Mischa Cotlar;

III — *Lógica Matemática*, a cargo do Prof. Gregório Klimovski;

IV — *Séries de tempo e processos estocásticos e estacionários*, a cargo do Prof. Fausto Toranzo da Universidade de Cuyo;

V — *Álgebra Moderna*, a cargo do Prof. Orlando Villamayor do Instituto de Matemática da Universidade de Cuyo;

VI — *Introdução às transformadas de Laplace*, a cargo do Prof. Dietrich Voelker da Universidade de Cuyo;

c) **Seminários** sobre os seguintes assuntos:

I — *Teoria de Galois*, a cargo do Prof. Orlando Villamayor;

II — *Topologia Combinatória*, a cargo do Prof. Jorge Boch;

III — *Geometria Projectiva sobre um corpo*, a cargo da Prof.ª Maria Laura Mousinho da Universidade do Brasil;

IV — *Fundamentação da Geometria*, a cargo do Prof. Carlos Grandjot da Universidade do Chile;

d) **Conferências** sobre temas das especialidades dos seguintes Professores: Mischa Cotlar, Carlos Grandjot, Pedro Pi Calleja e Ernesto Lammel;

e) **Colóquios** com o objectivo de discutir problemas relativos à pesquisa e ao ensino da Matemática nos países da América Latina. Nessas reuniões foram debatidos os seguintes assuntos:

I — Organização da pesquisa matemática nos diferentes países participantes do curso e balanço da situação actual;

II — Programas de ensino nas respectivas cátedras;

III — Sugestões para o ensino da Matemática nas Universidades.

M. L. Mousinho

COMEMORAÇÕES DO CENTENÁRIO DO NASCIMENTO DE HENRI POINCARÉ

Após o Congresso Internacional dos Matemáticos a 11 de Setembro de 1954, teve lugar em Haia uma reunião com o objectivo de pôr em evidência o desenvolvimento das ideias de H. Poincaré no domínio especial de cada um dos confereucistas. O programa da reunião foi o seguinte:

1. Abertura pelo Presidente do Comité do Centenário de Henri Poincaré, Gaston Julia.
2. A. Weil: Poincaré e a aritmética.
3. H. Frenmdenthal: Poincaré e a teoria das funções automorfas.
4. L. Schwartz: Poincaré e as equações diferenciais da física.
5. J. Lévy: Poincaré e a mecânica celeste.
6. P. Alexandrov: Poincaré e a topologia.
7. E. W. Beth: Poincaré e a filosofia.

M. Zaluar

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exame de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1954

Prova escrita de Matemática

I

3913 — Existem valores reais de x para os quais a soma

$$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$$

é negativa? Justifique a resposta.

R: $1+2/x+3/x^2<0$ *ou* $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2}<0$ *para o que é suficiente ser* $x^2+2x+3<0$ *cujas raízes são* $x=-1\pm\sqrt{2}\,i$.

Atendendo à natureza das raízes concluie-se, pois, não existirem valores de x *para os quais a soma proposta possa ser negativa.*

3914 — Com 10 soldados e 4 cabos quantas rondas se podem formar, sabendo que cada ronda é constituída por 7 soldados e 2 cabos?

R: *Trata-se de combinações visto que cada grupo deve diferir dos restantes num homem, pelo menos.*

O número de grupos formados com os soldados é dado por C_7^{10} *e o número de grupos formados com os cabos é dado por* C_2^4.

Cada grupo dos cabos pode ser associado a todos os grupos de soldados e vice-versa.

Ao todo serão, pois, $C_7^{10}\times C_2^4=120\times 6=720$ *rondas.*

II

3915 — Determine os ângulos x compreendidos entre 0 e 2π radianos que verificam a igualdade

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\operatorname{cotg} x$$

R: *Sendo* $\operatorname{tg}(x+\pi/5)=\operatorname{cotg} x$ *é* $\operatorname{tg}(x+\pi/5)=\operatorname{tg}(\pi/2-x)$ *cujos arcos estão relacionados pela expressão* $x+\pi/5=K\cdot\pi+\pi/2-x$ *onde* K *é um parâmetro que pode tomar valores inteiros no intervalo* $(-\infty,+\infty)$.

É, pois, $x=\pi\left(K/2+\dfrac{3}{20}\right)$.

Como $0<x<2\pi$, *teremos de considerar apenas os valores de* $K=0,1,2,3$ *para os quais resultam, respectivamente, as soluções* $x_1=\dfrac{3\pi}{20}$, $x_2=\dfrac{13\pi}{20}$, $x_3=\dfrac{23\pi}{20}$ *e* $x_4=\dfrac{33\pi}{20}$

3916 — Mostrar que das relações

$$x=a\cos\theta$$
$$y=b\operatorname{sen}\theta$$

se deduz

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

R: *Como* $x=a\cos\theta$; $y=b\operatorname{sen}\theta$ *é* $x/a=\cos\theta$; $y/b=\operatorname{sen}\theta$

Quadrando e somando, vem $x^2/a^2+y^2/b^2=\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta$ *ou* $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

III

3917 — Quais são os números que admitem 12 divisores e cujos factores primos são apenas 2 e 3? Justifique a resposta.

R: $12=2^2\times 3=4\cdot 3=2\cdot 6$

Para $12=4\cdot 3$ *vem* $N_1=2^3\cdot 3^2=72$ *e* $N_2=2^2\cdot 3^3=108$

Para $12=2\cdot 6$ *vem* $N_3=2\cdot 3^5=486$ *e* $N_4=2^5\cdot 3=96$

3918 — Demonstre que a soma $a^2+b^2+c^2$ em que a, b e c são três inteiros quaisquer não divisíveis por 3, é divisível por 3.

R: *Um número não divisível por* 3 *ou é da forma* $\dot{3}+1$ *ou é da forma* $\dot{3}+2$; *o seu quadrado é sempre* $\dot{3}+1$ *visto que* $(\dot{3}+1)^2=\dot{3}+\dot{3}+1=\dot{3}+1$ *e* $(\dot{3}+2)^2=\dot{3}+\dot{3}+4=\dot{3}+\dot{3}+\dot{3}+1=\dot{3}+1$.

Então a soma dos quadrados de três números nas condições propostas é sempre um múltiplo de 3 *visto que* $(\dot{3}+1)+(\dot{3}+1)+(\dot{3}+1)=\dot{3}+3=\dot{3}$

Exame de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1954

ARITMÉTICA

I

3919 — Provar que a soma de três números naturais ímpares consecutivos nunca é um número primo.

R: *Sejam* $2n+1$, $2n+3$ *e* $2n+5$ *os três números inteiros ímpares consecutivos. O número soma* $2n+1+2n+3+2n+5=6n+9$ *admite o divisor* 3, *além da unidade, do próprio número e de outros possíveis divisores.*

Não é, pois, número primo.

II

3920 — Calcular dois números, sabendo que a sua soma é 360 e que o seu máximo divisor comum é 15. Achar as diversas soluções do problema.

R: *Seja* $a+b=360$ *e* m. d. c. $(a,b)=15$

Fazendo $x=a/15$ *e* $y=b/15$ *ou* $x+y=360/15=24$ *e, como* m. d. c. $(x,y)=1$, *os valores possíveis de* x *e* y *serão* $x=1, y=23$; $x=5, y=19$; $x=7, y=17$; $x=11, y=13$.

Para $x=1$ *e* $y=23$ *é* $a=15$ *e* $b=345$
Para $x=5$ *e* $y=19$ *é* $a=75$ *e* $b=285$
Para $x=7$ *e* $y=17$ *é* $a=105$ *e* $b=255$
Para $x=11$ *e* $y=13$ *é* $a=165$ *e* $b=195$

III

3921 — Qual o resto da divisão de $a+b+c$ por 16, sabendo que os restos das divisões de a, b e c por 16 são 11, 9 e 15 respectivamente? Justificar.

R: *Quando dois números* A *e* B *divididos por um terceiro número* p *dão restos iguais diz-se que são* congruentes *em relação a* p *que se chama* módulo *da* congruência. $A \equiv B \pmod{p}$ (A *e* B *são congruentes de módulo* p)

Ensina-nos um teorema da Aritmética: «Dividindo vários números pelo mesmo divisor, a sua soma e a soma dos restos destas divisões são congruentes em relação ao divisor»

Assim, $(a+b+c)$ *e* $(11+9+15)$ *são congruentes em relação ao módulo* 16.

Por outras palavras, o resto da divisão de $(a+b+c)$ *por* 16 *é igual ao resto da divisão de* $(11+9+15)$ *por* 16.

Donde o resto $=3$

ÁLGEBRA

I

3922 — Calcular os três menores inteiros positivos que divididos por 38 dão o resto 14 e divididos por 46 dão o resto 2.

R: *Segundo o enunciado será* $38\cdot y+14=46x+2$ *ou* $23x-19y=16$ *cujas soluções podem obter-se das relações* $x=-8-19t$; $y=-10-23t$ *onde* -8 *e* -10 *representam um par de soluções inteiras, prèviamente determinadas.*

As três menores soluções inteiras e positivas serão correspondentes aos valores de $t=-1$; $t=-2$; $t=-3$.

Para $t=-1$ *é* $x=11$; $y=13$ *com a solução* $N_1=508$
Para $t=-2$ *é* $x=30$; $y=36$ *com a solução* $N_2=1382$
Para $t=-3$ *é* $x=49$; $y=59$ *com a solução* $N_3=2256$

II

3923 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2+2mx-2m+3=0$ sejam reais e de sinais contrários.

R: *Como* $a>0$ *é suficiente considerar* $c<0$, *isto é,* $-2m+3<0$, *donde* $m>3/2$

III

3924 — Os coeficientes do 4.º e do 6.º termos do desenvolvimento de $(1+x)^n$ estão entre si como 2 e 3. Determinar n e esses dois coeficientes.

R: $T_4=C_3^n\cdot a^3\cdot x^{n-3}$ *e* $T_6=C_5^n\cdot a^5\cdot x^{n-5}$

$C_3^n : C_5^n = 2/3$ *ou* $\dfrac{A_3^n}{3!} : \dfrac{A_5^n}{5!} = 2/3$; $(5!\,A_3^n):(3!\,A_5^n)=2/3$;

$[5\cdot 4\cdot(n-1)(n-2)] : [n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]=2/3$;

$\dfrac{20}{(n-3)\,(n-4)}=2/3$, *equação do 2.º grau com as raízes* $n_1=9$ *e* $n_2=-2$, *das quais só a primeira pode ser considerada.*

Donde $n=9$.

$C_3^9=\dfrac{A_3^9}{3!}=(9\cdot 8\cdot 7):(3\cdot 2\cdot 1)=84$ *e* $C_5^9=C_4^9=\dfrac{A_4^9}{4!}=$
$=(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6):(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=126$

Exame de aptidão para a frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ano de 1954

3925 — Para que valores de m a equação

$$\frac{1}{2}(m-2)\,x^2-(m-3)\,x+2m=0$$

tem as raízes reais e de sinais contrários?

R: *É suficiente que* $a \cdot c < o$, *isto é,* $\frac{1}{2}(m-2) \cdot 2m < o$ *ou* $m^2 - 2m < o$, *donde* $o < m < 2$.

3926 — Por que algarismo se deve substituir u para que o número $35u$ seja divisível por 6? Justifique a resposta.

R: *Afirma um Teorema de Aritmética: «Se um número é divisível por vários números primos entre si, dois a dois, é divisível pelo seu produto e recìprocamente».*

Assim o número $35u$ *será divisível simultâneamente por* 2 *e por* 3*: é* $u = \dot{2}$ *e* $3 + 5 + u = \dot{3}$ *ou seja* $u = \dot{2}$ *e* $u = \dot{3} + 1$ *donde se concluie que* u *só poderá tomar o valor* 4, *que é o único algarismo par que é igual a* $\dot{3} + 1$.

3927 — Como define combinações n a n de m objectos distintos? Tome 6 letras e escreva as combinações das mesmas tomadas 4 a 4, mostrando a sua lei de formação e verificando o seu número pela fórmula respectiva.

3928 — A soma de dois números é 176 e o seu m. m. c. é 840. Calcule os números

R: *Seja* $a + b = 176$ *e m. m. c.* $(a, b) = 840$. *Fazendo* $x = \frac{840}{a}$, $y = \frac{840}{b}$ *e substituindo os valores de* a *e de* b *na primeira relação obteremos* $\frac{840}{x} + \frac{840}{y} = 176$ *ou* $\frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{22}{105}$ *donde* $x + y = 22$ *e* $x \cdot y = 105$ *visto que a fracção* $\frac{x+y}{x \cdot y}$ *é irredutível* (x *e* y *são primos entre si*).

Como x *e* y *só poderão assumir os valores* 7 *e* 15, *respectivamente, as soluções serão* $a = 840/7 = 120$ *e* $b = 840/15 = 56$

3929 — Demonstre qual é o limite para que tende uma fracção qualquer quando se adiciona aos seus dois termos a mesma quantidade e se faz crescer esta indefinidamente.

R: *O problema, tal como está enunciado, poderá prestar-se a certas confusões e dificuldades visto que uma «fracção qualquer», sendo do tipo* x/y, *é função de duas variáveis e, nestas condições, a determinação do limite pedido é problema para além do âmbito das matemáticas elementares. Parece-nos que o A. desejará o limite, supondo constantes os termos da fracção.*

Seja a/b *uma fracção com* a *e* b *constantes e* n *a «quantidade» que se faz variar indefinidamente.*

Será $\lim_{n \to \infty} \frac{a+n}{b+n} = 1$ *visto que* $\left| 1 - \frac{a+n}{b+n} \right| = \left| \frac{a-b}{b+n} \right|$ *é infinitamente pequeno com* $n \to \infty$.

3930 — Resolva a equação

$$2\,tg^2 x - tg\,x - 1 = 0$$

determinando os valores de x com a aproximação de $1'$.

R: *Fazendo* $tg\,x = Z$, *a equação proposta toma o aspecto* $2Z^2 - Z - 1 = 0$, *com as raízes* $Z_1 = 1$ *e* $Z_2 = -\frac{1}{2}$.

As soluções das equações trigonométricas $Z_1 = tg\,x = 1$ *e* $Z_2 = tg\,x = -\frac{1}{2}$ *obter-se-ão, respectivamente, por meio das relações* $x = 180° \cdot K + 45°$ *e* $x = 180° \cdot K + 153° 27'$ *onde* $45°$ *e* $153° 27'$ *representam os menores arcos positivos, com a aproximação pedida, cujas tangentes são, respectivamente, iguais a* 1 *e a* $-\frac{1}{2}$

Soluções dos N.ºs 3913 a 3930 de M. J. Sousa Ventura

ADMISSÃO AO ESTÁGIO

Exame de admissão ao estágio do 8.º grupo no Liceu Normal de D. João III (Coimbra) — Ano de 1951.

I — Teoria da divisibilidade.

II — Poliedros, poliedros regulares, superfícies prismática e piramidal. Prisma, pirâmide e troncos respectivos.

3931 — A soma de dois números inteiros, a e b, é 1620. Calcule esses números sabendo que o seu máximo divisor comum admite 12 divisores.

R: *O problema é solucionado pelos seguintes valores para* a: 60, 90, 108, 120, 216, 240, 300, 420, 432, 450, 600, 630, 660, 750 *e* 780.

3932 — Calcular p e q sabendo que a fracção $\frac{x^2+px+q}{x}$ toma o valor mínimo a e o valor máximo b. Verificar a exactidão do resultado recorrendo ao Cálculo Infinitesimal.

R: *A primeira derivada de* $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x}$ *e* $f'(x) = 1 - q/x^2$, *anulando-se para* $x = \pm\sqrt{q}$ *(supõe-*

-se $q > 0)$; *sendo* $f''(x) = -2\,q/x^3$, *a função tem um máximo para* $+\sqrt{q}$ *com o valor* $b = p + 2\sqrt{q}$, *e um mínimo para* $-\sqrt{q}$ *com o valor* $a = p - 2\sqrt{q}$, *relações que dão* p *e* q *em função de* a *e* b .

3933 — Considere o triedro $Oxyz$, e as medidas das respectivas faces: $xOz = 90^o, yOz = 90^o$ e $xOy = 120^o$. Sobre as arestas Ox e Oy marque, respectivamente, os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento igual a K: $\overline{OA} = \overline{OB} = K$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{OC}$ que deve marcar-se sobre a aresta Oz, de modo que o triângulo ABC seja equilátero.

Considere agora o triedro $Ox'y'z'$, polar do triedro $Oxyz$. Marque sobre as arestas Ox' e Oy', respectivamente, os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ de comprimento igual K: $\overline{OM} = \overline{ON} = K$. Determine sobre Oz' a posição de um ponto P de modo que a área total do tetraedro $OMNP$ seja igual a $(4+\sqrt{3})\,K^2/4$.

R: *O triângulo* OAB *é isósceles, e visto que* $\sphericalangle O = 120^o$, *segue-se* $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 30^o$; *seja* $\overline{OD}$ *a perpendicular a* $\overline{AB}$ *conduzida por* O, *com* $\overline{AD} = K \cdot \cos 30^o = K \cdot \sqrt{3}/2$ *e, portanto,* $\overline{AB} = K \cdot \sqrt{3}$. *Como o ponto* C *deve ser tal que* ABC *saia equilátero, ter-se-à* $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = K \cdot \sqrt{3}$; *então do triângulo* OAC, *rectângulo em* O, *obtem-se* $\overline{OC} = K \cdot \sqrt{2}$. *Construindo o triedro polar do dado, verifica-se que os ângulos das suas faces são*: $x'Oy' = 60^o, x'Oz' = y'Oz' = 90^o$. *Sejam* $\overline{OM} = \overline{ON} = K$ *os segmentos dados sobre* Ox' *e* Oy', *e* $\overline{OP} = x$ *o valor do segmento a determinar sobre a outra aresta do triedo. No tetraedro* MNOP, *a face* OMN *é um triângulo equilátero de área* $\sqrt{3} \cdot K^2/4$; *as faces* OMP *e* ONP *são triângulos rectângulos de catetos* x *e* K, *portanto de área* $\frac{1}{2} K x$; *enfim, como* $\overline{MN} = K$ *(visto ser* OMN *equilátero) e* $\overline{MP}^2 = K^2 + x^2$ *(do triângulo rectângulo* MOP), *segue-se que a altura* $\overline{PQ}$ *do triângulo* MPN *é* $\overline{PQ} = \sqrt{3K^2 + 4x^2}/2$, *e o triângulo tem a área* $K \cdot \sqrt{3K^2 + 4x^2}/4$. *A área das faces do tetraedro é* $\sqrt{3} \cdot K^2/4 + K x + K \cdot \sqrt{3K^2 + 4x^2}/4 = (4+\sqrt{3}) \cdot K^2/4$ *donde se tira* $x = \overline{OP} = K/2$.

3934 — Calcule a medida do diedro do tetraedro regular com os recursos da trigonometria plana, e verifique a exactidão do resultado por meio da trigonometria esférica.

R: *Se* θ *é a medida do ângulo diedro pedido, a trigonometria plana conduz a* $\theta = 2 \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{2}$. *Pela trigonometria esférica chegar-se-ia a* $\theta = \operatorname{arc\,sec} 3$.

Exame de admissão ao estágio do 8.º grupo no Liceu Normal de D. João III (Coimbra) — Ano de 1952.

I — Inequações. Princípio de equivalência.

II — Homotetia e semelhança.

3935 — Sendo n um número inteiro, demonstre que a fracção resultante da adição $1/n + 1/(n+1) + 1/(n+2)$ gera uma dízima periódica mixta.

R: *A soma pode-se escrever*

$$\frac{A}{B} = \frac{(n+1)(n+2) + n(n+2) + n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

Em primeiro lugar notemos que dos três números inteiros $n, n+1$ *e* $n+2$ *ou é par* $n+1$ *(e nesse caso* 2 *divide* B *mas não divide* A) *ou são pares* n *e* $n+2$ *(e então* 4 *divide* B *e* 2 *divide* A). *Por outro lado, um e um só dos três números* $n, n+1$ *e* $n+2$ *é divisível por* 3, *e por isso* B *é divisível por* 3 *sem que o seja* A. *Assim* $A/B = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot A'/B'$, *ficando provada a afirmação do enunciado.*

3936 — Resolva a equação $32(x-a)^3 - 27x^2(x-2a) = 0$, sabendo que uma das raízes é um múltiplo inteiro de a.

R: *Sendo* n *inteiro e* $x_i\ (i = 1, 2, 3)$ *as raizes da equação, tem-se pelo enunciado* $x_1 = n a$. *Pelas relações de* Girard-Newton

$$5 \cdot \sum x = 42\,a\,;\ 5 \sum_{i \neq k} x_i \cdot x_k = 296\,a^2\,;\ 5\,x_1 x_2 x_3 = 32\,a^3$$

equações que, juntamente com $x_1 = n a$ *levam à determinação de* n *como raiz inteira de* $5n^3 - 42n^2 + 96n - 32 = 0$, *ou seja,* $n = 4$. *Eliminando na equação proposta a raiz* $x_1 = 4a$ *pela regra de* Rufini, *vem a equação do 2.º grau* $5x^2 - 22ax + 8a^2 = 0$, *com as raizes* $4a$ *e* $2/5\,a$. *A equação dada tem, pois, as raízes* $4a$ *(dupla) e* $2/5\,a$.

3937 — Numa circunferência de raio dado considere o diâmetro $\overline{AB}$ e uma corda que lhe é paralela, intersectando a circunferência em M e M' e o diâmetro perpendicular a $\overline{AB}$ em P. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto $R(x, y)$ de intersecção das rectas $\overline{AP}$ e $\overline{BM}$, quando a corda $\overline{MM'}$ se desloca paralelamente a $\overline{AB}$. Caracterize o lugar obtido.

R: *Tomando como eixos coordenados os dois diâmetros perpendiculares, seja* R *o raio da circunferência considerada, e* $y = m$ *(m é um parâmetro) a equação da recta* MM'; *o lugar geométrico procurado é o lugar dos pontos de intersecção das rectas* AP *e* BM' *de equações, respectivamente,* $Ry - Kx = KR$ *e* $(\sqrt{R^2 - K^2} - R)\,y - Kx = -KR$. *Eliminando* K *entre as duas equações obtem-se para equação do lugar* $3x^2 + y^2 - 2Rx = R^2$ *(elipse).*

3938 — Resolva o triângulo de que se conhece o lado a, sabendo que: 1.º) os lados b e c verificam a relação

$b + c = 2a$; 2.º) a área do rectângulo construído com os dois menores lados é m vezes a área do triângulo. Discussão. Aplicação ao caso de ser $a = 438\,m$ e $m = 3$.

R: *Seja* $b + c = 2a$, *e suponhamos que* b *é o menor dos lados do triângulo*: $b < a < c$. *A área do rectângulo referido é* $a \cdot b$; *e como a altura do triângulo para o lado* b *é* $a \cdot \operatorname{sen} C$, *a sua área exprime-se por* $a \cdot b \cdot \operatorname{sen} C/2$; *donde, em virtude da condição do enunciado,* $\operatorname{sen} C = 2/m$. *Tem, pois, de ser* $m \geqslant 2$.

Se $m = 2$, *o triângulo é rectângulo em* C, *com* $a \cdot b = 2$; *e desta relação, juntamente com* $a^2 + b^2 = c^2$ *e* $b + c = 2a$, *tiram-se os valores dos seus lados* $\left(a = 4\,b/3\,, c = 5\,b/3\right.$ *com* $\left. b = \sqrt{3}/\sqrt{2}\right)$, *obtendo-se em seguida os valores dos ângulos* $(A = \operatorname{arc\,sen} 4/5)$.

Se $m > 2$, *obtido* C *de* $\operatorname{sen} C = 2/m$, *da relação entre os lados e as somas dos ângulos opostos vem, calculando a soma* $b + c$, $2 \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C$; *mas sendo* $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A + C)$, *fica* $2 \operatorname{sen}(A + C) = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C$, *o que conduz a* $3 \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$, *que permite determinar* A, — *ficando o problema resolvido, pois se conhecem os três ângulos do triângulo e se sabe que* $(b + c)/2 \operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$. *Como* $a < c$ *segue-se que também* $A < C$ *ou seja* $\operatorname{tg} \frac{A}{2} < \operatorname{tg} \frac{C}{2}$; *assim, a relação* $3 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$ *conduz a* $\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} > \frac{1}{3}$ *e, como* $C \in (0, \pi)$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Deste modo conclui-se que tem de ser* $C \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$. *Excluido o caso de ser* $m = 2$, *já considerado, fica-nos* $\sqrt{3}/2 < \operatorname{sen} C = \frac{2}{m} < 1$ *e portanto* $m \in (2, 4/\sqrt{3})$, *ficando o problema com duas soluções para* m *neste intervalo.*

Soluções dos N.os 3931 a 3938 de L. Albuquerque

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência, 1954-55.**

3939 — Sejam $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \cdots$ números reais. Considere o conjunto dos pares (α, β) e defina nesse conjunto uma soma pela lei seguinte

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta').$$

Mostre que a correspondência $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha$, é um homomorfismo, e determine o seu núcleo.

3940 — Determine o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico finito.

3941 — Considere um plano oblíquo qualquer. Determine o seu traço no $\beta_{2,4}$ utilizando uma recta de perfil do plano.

3942 — Dadas 3 rectas não complanas duas a duas, mostre (construindo) que é possível haver uma recta paralela a uma delas e que encontra as outras duas.

3943 — Dadas 2 rectas, uma paralela ao $\beta_{2,4}$ e outra paralela ao $\beta_{1,3}$ construir por um ponto não pertencente a nenhuma das rectas dadas, uma recta paralela ao $\beta_{2,4}$ que as encontre.

Observação:

Resolver o problema sem recorrer à *LT*, no caso em que tiver solução.

Enunciar a condição necessária e suficiente para que o problema tenha solução.

F. C. C. — Geometria Descritiva — **2.º Exame frequência — 1953-54.**

Ponto n.º 1

3944 — Por um ponto de *L. T.* conduzir uma recta que faça ângulos de 40º com o plano vertical de projecção e com um plano vertical que define com aquele um diedro de 70º.

R: A recta é uma das arestas de um triedro, cujas faces medem 70º, 50º e 50º, sendo as outras duas arestas eixos dos dois planos.

3945 — Determinar os pontos de B_1 que distam 4^{cm} de *L. T.*

R: *São os pontos da intersecção de* B_1 *com uma superfície cilíndrica de revolução que tem* L. T. *por eixo e* 4^{cm} *por raio dum paralelo.*

3946 — Conduzir pela *L. T.* os planos que definem ângulos de 30º com uma horizontal inclinada 45º sobre o plano vertical de projecção.

R: *São os planos tangentes, conduzidas por* L. T. *a uma superfície cónica de revolução que tem a horizontal por eixo e 60º de abertura.*

Soluções dos N.os 3944 a 3946 de J. Farinha

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — 1.º Exame de Frequência — 1.ª chamada — 11 de Janeiro de 1955

Teoria

3947 — Defina operação de fração contínua e indique como tal operação se aplica ao desenvolvimento dos números reais e enuncie os teoremas que respeitam a tais desenvolvimentos, quer no caso dos números fraccionários, quer no caso dos números irracionais.

3948 — Defina conjunto complementar dum conjunto dado e justifique a classificação dos pontos de um conjunto que resulta das relações deste com o seu complementar. Defina fronteira de um conjunto e enuncie os teoremas que respeitam a tal conceito.

3949 — Defina números derivados, semi-derivadas e derivadas de uma função de uma só variável independente, num dos seus pontos.

Defina diferencial de uma tal função e escreva a sua expressão analítica e indique o significado geométrico da diferencial considerada.

Prática

3950 — Dada a quádrica

$$x^2+y^2+z^2-2\,y\,z+2\,z\,x-2\,x\,y+x-1=0$$

a) mostre que a superfície tem uma recta de centros a distância infinita;

b) determine o plano diametral conjugado com a direcção definida por $(1\,,3\,,5)$ e mostre que ele passa pela recta de centros;

c) classifique a quádrica e escreva a sua equação reduzida.

3951 — Dada a superfície

$$m^2\,(x^2+2\,a\,x+y^2)=z^2 \qquad (a \text{ e } m \text{ fixos})$$

a) indicar as suas direcções principais e verificar se há rectas que passem pela origem das coordenadas e pertençam à superfície;

b) determinar o lugar geométrico das circunferências:

$$\begin{cases} x^2+2\,a\,x+y^2=\mathrm{R}^2 \\ z=h \end{cases}$$

que se apoiam na recta

$$x=z-my=0\,;$$

c) em face dos resultados obtidos que pode dizer àcerca da superfície dada?

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — 2.ª Frequência — 2.ª chamada — 30 de Abril de 1955.

Prática

3952 — A partir da equação vectorial $C=P+\rho\,\vec{n}$ que dá o centro de curvatura de uma curva plana correspondente ao ponto P, mostre que

$$\frac{dc}{ds}=\frac{d\rho}{ds}\,\vec{n}$$

onde s é o arco da curva dada tomado a partir de um ponto P_0.

Conclua daí que a tangente à evoluta é normal à evolvente no ponto correspondente. O que acontece nos pontos em que ρ é máximo ou mínimo? Determine a evoluta da elipse

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

e estude a natureza dos pontos da evoluta que são centros de curvatura da elípse nos seus vértices.

3953 — Determine a menor distância da origem O à superfície

$$x^2+y^2+z^2-8\,x-8\,y-6\,z+24=0$$

e mostre que o ponto à menor distância se encontra numa normal à superfície passando por O.

3954 — Determine e estude os pontos singulares da curva

$$x^3+y^3=xy\,.$$

Qual a ordem do contacto da curva com a circunferência

$$x^2+y^2=y\,?$$

F. C. C. — Cálculo Infinitésimal — 2.º Exame de frequência — Maio de 1954.

Ponto 1

3955 — Determinar e caracterizar o integral geral e o integral singular da equação

$$2\,y^2\,(1+y'^2)=(x+yy')^2\,.$$

R: *As curvas do integral geral são as circunferências com centro sobre* Ox *e tangentes às rectas* $y=\pm x$, *que constituem o integral singular.*

3956 — Determinar as curvas integrais da equação

$$y'''+y'=2\,(1-\operatorname{sen}2\,x)+\cos x$$

que passam pela origem tangencialmente à recta $y = -x$.

R: *Integral geral*

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{x}{2} \cos x .$$

As condições dadas exigem $c_3 = -\frac{5}{3}, c_2 = \frac{1}{3} - c_1$.

3957 — Calcular $\frac{d^2 y}{d x^2}$ em função de $z, t, \frac{dz}{dt}$ e $\frac{d^2 z}{d t^2}$, sendo $\begin{cases} x = z + t e^t \\ y = z^2 - t^2 . \end{cases}$

R:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2z\frac{dz}{dt} - 2t}{\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2z\frac{d^2z}{dt^2} - 2\right]\left(\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t\right) -}{\left(\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t\right)^2}$$
$$\frac{-\left(\frac{d^2z}{dt^2} + 2e^t + t e^t\right)\left(2z\frac{dz}{dt} - 2t\right)}{\left(\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t\right)^2}$$

Ponto 2

3958 — Mostrar que as curvas integrais da equação diferencial

$$y y'^2 + 2 x y' - y = 0$$

constituem duas famílias de curvas ortogonais. Determiná-las e representá-las geomètricamente.

R: *Trata-se de uma equação do 2.º grau em* y', *em que o produto das raízes vale* -1. *O integral geral é a família de parábolas* $y^2 = \alpha^2 + 2\alpha x$.

3959 — Determinar a curva integral da equação

$$y'' + y' - \operatorname{sen} x = 0$$

que passa pelo ponto $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$ com tangente paralela a Ox.

R: *Integral geral:* $y = c_1 + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x)$.

As condições impostas exigem $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2} e^{\pi}$.

3960 — Calcular z''_{xy} em função de $u, v, w, w'_u, \cdots$, sendo $\begin{cases} u = y + z \\ v = y - z \\ w = x^2 - e^z . \end{cases}$

R: *Atendendo a que* $z = \frac{u - v}{2}, x = \left(w + e^{\frac{u-v}{2}}\right)^{1/2}$, *as equações*

$$w'_u z'_x - w'_v z'_x = 2x - e^z z'_x$$
$$w'_u (1 + z'_y) + w'_v (1 - z'_y) = -e^z z_y$$

dão z'_x *e* z'_y *em função de* u, v, w, w'_u, w'_v.

A equação

$$[w''_{u^2} (1 + z'_y) + w''_{uv} (1 - z'_y)] z'_x + w'_u z''_{xy} -$$
$$- [w''_{v^2} (1 - z'_y) + w''_{vu} (1 + z'_y)] z'_x - w'_v z''_{xy} =$$
$$= - e^z z'_x z'_y - e^z z''_{xy}$$

permite depois calcular z''_{xy} *em função de* $u, v, w, w'_u, \cdots$.

Soluções dos N.os 3955 e 3960 de J. Dionísio

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **Prova escrita do Exame Final — 1.ª época — 1.ª chamada — 1955.**

3961 — Desenvolva $\sqrt{1 - e^{-x}}$ em série de potências de e^{-x} e indique os valores de x para os quais a série é convergente. Com base neste resultado desenvolva em série o integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$$

e justifique o processo utilizado.

3962 — Calcule o integral de $x y^2$ no domínio limitado pelas curvas representativas das funções $\cos x$, $\cos 3x$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3963 — Determine o domínio de existência da função

$$\varphi(t) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x (x - 1)^t}$$

e calcule o valor exacto da função para $t = \frac{1}{2}$.

3964 — *a*) Resolva a equacão $y' = \sqrt{1 - y^2}$, sendo y função incógnita de x e diga em que consistem as linhas integrais da equação. *b*) Escreva o integral geral de $\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 - y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ e determine a superfície integral da equação que passa pela recta $x = 0$, $y = z$.

3965 — Calcule a probabilidade de que, tirando ao acaso três cartas dum baralho completo, com reposição após cada tiragem, as cartas sejam: *a*) as três de copas; *b*) duas de copas e uma de espadas; *c*) as três dum mesmo naipe; *d*) as três de naipes diferentes; *e*) não todas dum mesmo naipe.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probalidades — Prova escrita do Exame Final — 1.ª Época — 2.ª Chamada — 1955.

3966 — Determine o domínio de existência da função

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{x^t(1+3x^2)} dx$$

e calcule o valor da função para $t = 0$.

3967 — Calcule o integral da função

$$x^7 y^2 e^{-yz}$$

no domínio limitado pelas superfícies de equações $y = x^2$, $y = 2$, $z = 0$, $z = y$.

3968 — Verifique que o diferencial

$$\frac{y\,dx}{a-z} + \frac{x\,dy}{a-z} + \frac{x\,y\,dz}{(a-z)^2}$$

é exacto, e determine uma sua primitiva.

3969 — Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 3y + z \end{cases}$$

em que y, z são funções incógnitas de x.

3970 — Calcule a probabilidade de que, em três lançamentos sucessivos dum dado perfeito, a soma dos pontos obtidos seja:

a) não superior a 4;

b) não inferior a 17;

c) superior a 4 e inferior a 17.

Posto isto, calcule a probabilidade de que, em seis lançamentos sucessivos dum dado perfeito, a soma dos pontos obtidos, tanto nos três primeiros como nos três últimos lançamentos, seja superior a 4 e inferior a 17.

Enunciados dos N.os 3961 a 3970 de J. S. e Silva

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — Exame final — 14 de Outubro de 1954.

I

3971 — Considere a equação $f(x, y, z) = 2xz^2 + x^2y^2 - 2y - 3z = 0$ e prove que ela define uma função $z = \varphi(x, y)$ na vizinhança de $P(-1, 1, -1)$. Escreva até aos termos do 2.º grau, inclusivé, o desenvolvimento tayloriano da função $z = \varphi(x, y)$ segundo as potências de $(x+1)$ e $(y-1)$.

A função $z = \varphi(x, y)$ terá um extremo no ponto $(-1, 1)$? Justifique a resposta.

R: *Como* $f(-1, 1, -1) = 0$ *e* $f(x, y, z)$ *é contínua como função de* (x, y) *e* z *e* $f'_z(-1, 1, -1) \neq 0$, *existe uma vizinhança do ponto* $(-1, 1)$ *dentro da qual existe uma função* $z = \varphi(x, y)$ *que substituída na equação dada a transforma numa identidade*

$$z'_x(-1, 1) = -\frac{f'_x(-1, 1, -1)}{f'_z(-1, 1, -1)} = 0,$$

$$z'_y(-1, 1) = -\frac{f'_y(-1, 1, -1)}{f'_z(-1, 1, -1)} = 0,$$

$$z''_{x^2}(-1, 1) = -\frac{f''_{x^2}(-1, 1, -1)}{f'_z(-1, 1, -1)} = -2,$$

$$z''_{xy}(-1, 1) = -\frac{f''_{xy}(-1, 1, -1)}{f'_z(-1, 1, -1)} = 4 \quad e$$

$$z''_{y^2}(-1, 1) = -\frac{f''_{y^2}(-1, 1, -1)}{f'_z(-1, 1, -1)} = -2$$

e portanto o desenvolvimento tayloriano de $z(x, y)$ *é o seguinte:*

$$z(x, y) = z(-1, 1) + (x+1)\,z'_x(-1, 1) + (y-1)\,z'_y(-1, 1) + (x+1)^2 z''_{x^2}(-1, 1) + 2(x+1)(y-1)\,z''_{xy}(-1, 1) + (y-1)^2 z''_{y^2}(-1, 1) + R_3 = -1 - 2(x+1)^2 + 8(x+1)(y-1) - 2(y-1)^2 + R_3 .$$

Como o ponto $(-1, 1)$ *faz* $z'_x(-1, 1) = 0$ *e* $z'_y(-1, 1) = 0$ *teremos de analizar o sinal de* $s^2 - rt$ *para ver se existe um extremo. Ora* $s^2 - rt = 4^2 - (-2)(-2) > 0$ *e portanto não há extremo.*

II

3972 — *a*) Prove que $\int_A x^{2m-1} y^{2n-1}\,dx\,dy = \frac{\beta(m, n)}{4(m+n)} r^{2(m+n)}$, $m > 0$, $n > 0$ onde A é o quarto de círculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ situado no 1.º quadrante.

b) Sabe que em certas condições $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ com $a < c < b$. Enuncie e demonstre alguma proposição análoga para $\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$ sendo A o rectângulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

R: a) *Fazendo a mudança para coordenadas polares vem*

$$\iint_A x^{2m-1} y^{2n-1}\,dx\,dy = \int_0^r \rho^{2(m+n)-1}\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta \,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta \,d\theta = \frac{1}{2}\beta(m, n) \int_0^r \rho^{2(m+n)-1}\,d\rho = \frac{\beta(m, n)}{4(m+n)} r^{2(m+n)}.$$

b) *Sabemos que* $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ *quando* $f(x)$ *é contínua em* (a, b). *Vamos então demonstrar a seguinte proposição: «Se* $f(x, y)$ *é contínua em relação ao par de variáveis* (x, y) *no rectângulo* $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ *então:*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = (b-a)(d-c)\,f(\eta, \tau)$$

onde (η, τ) *é um ponto do rectângulo».*

Com efeito, sendo $f(x,y)$ *contínua em relação ao par de variáveis* (x,y) *também o é em relação a* x *e a* y *separadamente, e então* $\int_c^d f(x,y)\,dy = (d-c)\,f(x,\tau)$, *com* $c<\tau<d$, *e* $\int_a^b (d-c)\,f(x,\tau)\,dx = (d-c)(b-a)\,f(\eta,\tau)$ *com* $a<\eta<b$ *e o teorema está provado.*

III

3973 — Achar uma curva tal que se a normal num ponto M corta o eixo $0x$ num ponto P, o centro de curvatura C é simétrico de P em relação a M.

R: *A normal é* $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$ *ou seja* $X-x+y'(Y-y)=0$ *e as coordenadas de* P *são* $(x+yy',0)$. *Como* $\overline{CM}=\overline{MP}$ *conclui-se fàcilmente que* $yy''=1+y'^2$ *e esta equação pode escrever-se do seguinte modo* $yy'\frac{dy'}{dy}=1+y'^2$

$$\frac{dy}{y}=\frac{y'\,dy'}{1+y'^2};\ \log\frac{y}{C_1}=\log\sqrt{1+y'^2};\ y'=\frac{1}{C_1}\sqrt{y^2-C_1^2}\quad x=C_1\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}+C_2;\ x-C_2=C_1\operatorname{arcch}\frac{y}{C_1}$$

e finalmente $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$ *(catenária).*

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — Prova prática — 10 de Janeiro de 1955.

3974 — Determinar as equações dos planos tangentes à superfície $\frac{y^2}{4}+z^2=1$ paralelos à recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{2}$

R: *A superfície é um cilindro de geratrizes paralelas a* $\overrightarrow{0X}$; *o correspondente plano projectante da recta é:* $2y-3z-6=0$. *Os planos procurados deverão ter equações da forma* $2y-3z+c=0$. *Tudo se reduz a fazer com que o sistema*

$$\begin{cases}2y-3z+c=0\\ y^2+4z^2-4=0\end{cases}$$

tenha soluções reais iguais. A equação $25z^2-6cz+c^2-16=0$ *que resulta da eliminação de* y *deverá ter raízes reais iguais, e portanto:* $9c^2-25(c^2-16)=0$ *ou* $c=\pm5$. *As equações dos planos tangentes são:* $2y-3z\pm5=0$.

3975 — Escrever a expressão da derivada de ordem n da função: $f(x)=\frac{1}{x^2-1}\cdot\operatorname{sen}^2 x$

R: *Decompõe-se* $\frac{1}{x^2-1}$ *em soma de fracções simples* $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$ *e vem imediatamente:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

Como $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2x)=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x$, *temos fàcilmente:*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^2x)=2^{n-1}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

Empregue-se agora a fórmula de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}\cdot\operatorname{sen}^2x+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{(-1)^{n-p}}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n-p+1}-(x-1)^{n-p+1}}{(x^2-1)^{n-p+1}}\cdot2^{p-1}\cdot\operatorname{sen}\left(2x+\frac{(p-1)\pi}{2}\right)+\frac{1}{x^2-1}\cdot2^{n-1}\cdot\operatorname{sen}\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

3976 — Indicar como se racionalizam os integrais $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^6x\cdot\cos^2x}$; $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}-\sqrt{4-x}}$; $\int(2x^2+\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)^2dx$; $\int(x+2)^3[1+(x+2)^2]^{1/2}\,dx$ e resolver completamente dois deles.

R: *Para o primeiro integral, como os expoentes de* sen x *e* cos x *são da mesma paridade é possível exprimir a função integranda racionalmente em* tg x *com as fórmulas de fácil dedução*

$$\operatorname{sen}^2x=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}\qquad\cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}$$
$$\operatorname{sen}x\cos x=\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}.$$

Para o segundo integral, faz-se: $4-x=t^6$ *e vem:*

$$-6\int\frac{t^3\,dt}{1-t^2}.$$

Para o terceiro integral vem:

$$\int(2x^2+\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)^2dx=\frac{4}{5}x^5+4\int x^2\operatorname{arc}\operatorname{sen}x\,dx+\int\operatorname{arc}^2\operatorname{sen}x\,dx$$

e acha-se integrando por partes:

$$\int x^2 \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{3}\int x^2 \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

$$\int \operatorname{arc}^2 \operatorname{sen} x\, dx = x \cdot \operatorname{arc}^2 \operatorname{sen} x + 2\int \operatorname{arc\,sen} x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc}^2 \operatorname{sen} x + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,sen} x - 2x + C$$

valores a substituir em cima.

Finalmente, tem-se: $\int (x+2)^3 [1+(x+2)^2]^{1/2}\, d(x+2)$

e faz-se $1+(x+2)^2 = z^2$ *o que dá:* $d(x+2) = \frac{z}{x+2}\, dz$.

$$\int (z^2-1)\, z^2\, dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + C$$

$$\int (x+2)^3 [1+(x+2)^2]^{1/2}\, dx = \frac{1}{5}\, [1+(x+2)^2]^{5/2} - \frac{1}{3}[1+(x+2)^2]^{3/2} + C.$$

Enunciados e soluções dos n.os 3971 a 3976 de Fernando de Jesus

F. C. C. — Análise Superior — 2.º Exame de Frequência — 1952-53.

3977 — Desenvolver em série nas vizinhanças da origem a função $f(z) = 1/(2 \operatorname{sen} z - e^{iz})$, e indicar o raio do circulo de convergência.

R: $f(z) = -1 + (-2+i)\, z + \left(-\frac{7}{2} + 2i\right) z^2 + \cdots$.

O raio do circulo de convergência é

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \log^2 2}$$

3978 — Calcular $\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+4)\sqrt[3]{x-1}}\, dx$

R: $\frac{\pi}{\sqrt[6]{135}} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{3}$, *sendo* $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 2$

F. C. C. — Análise Superior — Alguns problemas dos exames de frequência e finais do ano lectivo 1953-54.

3979 — Integrar pelo método de Bertrand o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xz - z(x+y+z)\log(x+y+z)}{xz - x(x+y+z)\log(x+y+z)} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{yz - z(x+y+z)\log(x+y+z)}{yz - y(x+y+z)\log(x+y+z)} \end{cases}.$$

R: *O integral geral do sistema*

$$\frac{dx}{Q'_z - R'_y} = \frac{dy}{R'_x - P'_z} = \frac{dz}{P'_y - Q'_x},$$

que é neste caso

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

define as linhas de turbilhão

$$\begin{cases} \log(xyz) = c_1 \\ x+y+z = c_2. \end{cases}$$

Efectuada a mudança de variáveis

$$\begin{cases} \log(xyz) = u \\ x+y+z = v, \end{cases}$$

a equação diferencial total equivalente ao sistema proposto reduz-se a $v \log v\, du = dv$, *equação que integrada dá* $u = \log\log v + c$. *O resultado final será então* $x+y+z = e^{cxyz}$.

3980 — Integrar o sistema de Charpit-Lagrange e determinar um integral completo para a equação de derivadas parciais

$$p^2 + q^2 = 2(px + qy).$$

R: *Integral geral do sistema de* Charpit-Lagrange:

$$\begin{cases} p = \alpha q \\ 4z = p^2 + q^2 + \beta \\ 2px - p^2 = \gamma \\ 2qy - q^2 = \delta. \end{cases}$$

Integral completo:

$$z = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{2} x^2 + xy + \frac{y^2}{2\alpha}\right) + \beta.$$

3981 — Mostrar que as linhas assintóticas da superfície $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ se projectam sobre os planos $z = k$ segundo duas famílias de curvas ortogonais.

R: *As projecções referidas são as circunferências de centro na origem* $x^2 + y^2 = c$ *e as rectas que passam pela origem* $y = cx$.

3982 — Determinar as trajectórias ortogonais das superfícies integrais da equação

$$(x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy + 2\, dz = 0.$$

R: *Integre-se o sistema*

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{z},$$

o que dará

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha y \\ z = \beta e^{-\frac{1}{x+y}}. \end{cases}$$

3983 — Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento em série de MAC-LAURIN da função

$$f(z) = \frac{\cos z}{1 + ch\, z}.$$

Calcular o raio de convergência e os polos de $f(z)$ com a respectiva ordem.

R: $\quad f(z) = \frac{1}{2} - 3z^2 + \frac{73}{96} z^4 + \cdots$

Polos: $z = i(\pi + 2k\pi)$, $K = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, *duplos*.

Raio de convergência, π.

3984 — Calcular pelo método dos resíduos

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{(2-x)(x-1)^2}}\, dx .$$

R: $$\frac{5\sqrt[3]{3}\sqrt{4}\,\pi}{18}$$

3985 — Calcular pelo método dos resíduos

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{(2-x)(x-1)}}\, dx .$$

R: $\dfrac{\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{125}}{10}\,\pi\, sen\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\theta}{2}\right) \quad$ *com* $\theta = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{2}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

3986 — Calcular o integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-2}}\, dn$$

usando o método dos resíduos e verificar o resultado por meio do cálculo real.

R: $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi .$

Enunciados e soluções dos n.os 3977 a 3986 de J. Dionísio

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — 1.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 7 de Março de 1955.

I

3987 — Seja $\mathfrak{G}$ um grupo e $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ dois sub-grupos. Mostre que se $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$ é um sub-grupo, se tem

$$\mathfrak{h}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\mathfrak{h} \text{ e } \mathfrak{h}\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cup \mathfrak{g}.$$

II

3988 — Mostre que todo o módulo com um gerador é isomorfo de um módulo cociente dos inteiros.

III

3989 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel. Mostre que toda a potência $\mathfrak{A}^K$ de $\mathfrak{A}$ é um ideal bilateral.

IV

3990 — Prove que o anel dos elementos da forma $\{m + n\sqrt{2}\}$ em que m, n são inteiros tem algoritmo de divisão. Conclua por consequência, que é um domínio euclidiano.

V

3991 — Dado o domínio de integridade $\mathfrak{O}[x]$ em que

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{J}/(3),$$

diga quais são os polinómios irredutíveis do 1.º e 2.º graus.

Verifique depois que, para os referidos polinómios é, de facto, $b^2 - 4c \neq$ dum quadrado perfeito.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — 1.º exame de frequência — 1951.

3992 — Dados três pontos

$$P_1(a_1, b_1, c_1) \text{ de massa } m_1;$$
$$P_2(a_2, b_2, c_2) \text{ de massa } m_2;$$
$$P_3(a_3, b_3, c_2) \text{ de massa } m_3;$$

que relações devem existir entre as coordenadas dos pontos para que seja possível determinar as massas de modo tal que os eixos coordenados sejam eixos principais de inercia?

E se forem mais de três pontos?

3993 — Indeterminação nos problemas variacionais:
1.º — No caso do integral simples;
2.º — No caso do integral duplo.

3994 — Operações sobre tensores — grandeza dum vector e ângulo de dois vectores em cálculo absoluto —. Produto interno e produlo externo.

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame de frequência — 1951.**

3995 — Um ponto move-se sobre o eixo dos xx segundo a lei $x^2 = \frac{\lambda\, t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0\, t)^2$, sendo λ uma constante e x_0 e v_0 as condições iniciais.

Mostrar que a lei de forças é $F = \frac{m\,\lambda}{x^3}$, sendo m a massa do ponto.

3996 — Deduza as fórmulas de Lorentz e verifique a invariância da forma $ds^2 = c^2\, dt^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2$.

3997 — Equilíbrio duma funicular submetida à acção de forças centrais.

3998 — Verifique que as equações canónicas são as das características da equação às derivações parciais de Hamilton-Jacobi.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C L. — Cálculo das Probabilidades — **Prova extraordinária em 24 de Março de 1955.**

3999 — Dois jogadores A e B atiram alternadamente dois dados ao ar, começando A; A ganha o jogo se obtiver uma soma de 6 pontos antes de B ter obtido uma soma de 7 pontos; B ganha o jogo se obtiver uma soma de 7 pontos antes de A ter obtido uma soma de 6 pontos. Calcule a probabilidade que cada jogador tem de ganhar e a de empate, supondo

a) que o jogo é limitado a n partidas no máximo.

b) que o jogo prosegue até que um dos jogadores tenha ganho.

4000 — Uma urna contém 1 esfera branca e a pretas. Fazem-se extrações sucessivas de uma esfera sem reposição até ter-se extraído todas as esferas da urna. Determinar o valor médio do número de esferas pretas saídas antes de sair a branca e o valor médio do número de esferas pretas saídas depois de ter saído a branca. Diga, justificando, se não podia indicar imediatamente, antes de resolver o problema a que é igual a soma daqueles 2 valores médios.

4001 — Dois jogadores A e B jogam entre si um jogo composto de 300 partidas, cada uma das quais é equitativa. Em cada partida A tem a probabilidade p de ganhar 2 escudos e B a probabilidade $q = 1 - p$ de ganhar b escudos. Determinar o valor de p de modo que seja igual a 0,8427 a probabilidade de que nenhum dos jogadores ganhe mais de 60 escudos.

ASTRONOMIA

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — **1.ª Frequência — 1.ª chamada — 3 de Fevereiro de 1950.**

4002 — Calcular analítica e gràficamente as coordenadas equatoriais de Urano sabendo que as suas coordenadas eclípticas são $\begin{cases} \lambda = 158^\circ\, 18'\, 08'',5 \\ \beta = -\, 3^\circ\, 50'\, 49'',6 \end{cases}$ e que a obliquidade da eclíptica é $\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 24'',9$.

4003 — Calcular analítica e gràficamente o azimute e o ângulo horário da estrela α Piscis Australis (Fornalhaut) cujas coord. são $\begin{cases} \alpha = 22^h\, 53^m\, 49^s,780 \\ \delta = -\, 29^\circ\, 58'\, 00'',31 \end{cases}$ no momento do seu nascimento num lugar cuja latitude é $\varphi = 25^\circ\, 46'\, 15'',09$.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 13 de Fevereiro de 1950.**

4004 — Calcular analítica e gràficamente as coordenadas galácticas duma estrela cujas coordenadas equatoriais são $\begin{cases} \alpha = 14^h\, 20^m\, 30^s,5 \\ \delta = 38^\circ\, 43'\, 15'',8 \end{cases}$ sabendo que a origem de contagem das longitudes galácticas tem de ascensão recta $18^h\, 40^m\, 0^s,00$ e que o plano do equador galáctico faz um ângulo de $62^\circ\, 0'\, 0'',0$ com o plano do equador celeste.

4005 — Calcular analítica e gràficamente o ângulo horário e a distância zenital da estrela α Lyrae (Vega) cujas coordenadas são $\begin{cases} \alpha = 18^h\, 34^m\, 34^s,043 \\ \delta = 38^\circ\, 42'\, 56'',91 \end{cases}$ no instante em que corta o 1.º vertical Este dum lugar cuja latitude é $\varphi = -\, 40^\circ\, 40'\, 59'',98$.

Se estivesse a trabalhar com um teodolito neste local teria possibilidade de efectuar esta observação? Porquê?

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — **2.ª Frequência — 1.ª chamada — 11 de Maio de 1950.**

4006 — Na data de hoje, num lugar da terra de coordenadas $\begin{cases} \varphi = 29^\circ\, 56'\, 39'',45\ N \\ \lambda = 4^h\, 15^m\, 43^s,78\ E \end{cases}$ observou-se, no momento da sua passagem meridiana, a estrela α Scorpii (Antares) cujas coord. são $\begin{cases} \alpha = 16^h\,25^m\,09^s{,}908 \\ \delta = -26^h\,16'\,54'',90 \end{cases}$

Pretende-se determinar:

a) o tempo sideral, o tempo verdadeiro e o tempo legal no momento da observação.

b) o tempo sideral num local situado no meridiano médio do 6.º fuso a W de Greenwich.

c) o ângulo horário, o tempo sideral e o tempo médio num local cujas coordenadas são $\begin{cases} \varphi = +\,68^\circ\,47'\,19'',96 \\ \lambda = -\,10^h\,49^m\,27^s{,}18 \end{cases}$.

4007 — Num local de coordenadas $\begin{cases} \varphi = 53^\circ\,10'\,20'',84\,N \\ \lambda = 10^h\,33^m\,42^s{,}85\,W \end{cases}$ observou-se hoje o Sol, a leste do meridiano, tendo-se determinado para altura $h = 40^\circ\,58'\,47'',16$.

Sabendo-se que as coordenadas do Sol são $\begin{cases} \alpha = 3^h\,03^m\,39^s{,}95 \\ \delta = +17^\circ\,18'\,25'',4 \end{cases}$ pretende-se calcular o tempo verdadeiro nesse instante.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — 2.ª Frequência — 2.ª chamada — 26 de Maio de 1950

4008 — Observou-se às 11^h de tempo civil, num determinado lugar da terra, o Sol cujas coordenadas são $\begin{cases} \alpha = 8^h\,40^m\,48^s{,}82 \\ \delta = +\,18^\circ\,19'\,49'',4 \end{cases}$. Sabendo que a ascensão recta do Sol médio nesse instante é $\alpha_{\theta_m} = 8^h\,34^m\,33^s{,}56$ pretende-se calcular o tempo sideral e o tempo verdadeiro no momento da observação.

4009 — Num local de coord. $\begin{cases} \varphi = -\,30^\circ\,30'\,30'' \\ \lambda = 10^h\,15^m\,30^s{,}6\,E \end{cases}$ observou-se hoje uma estrela tendo-se determinado para seu azimute $A = 129^\circ\,49'\,50''$; as coordenadas da estrela são $\begin{cases} \alpha = 10^h\,15^m\,30^s{,}6 \\ \delta = 20^\circ\,25'\,04'' \end{cases}$.

Pretende-se determinar:

a) a distância zenital da estrela, o tempo sideral e o tempo verdadeiro no momento da observação.

b) o ângulo horário e o tempo legal num lugar de coordenadas $\begin{cases} \varphi = 66^\circ\,32'\,18'',9\,N \\ \lambda = 11^h\,54^m\,47^s{,}8\,W \end{cases}$.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — 1.ª Frequência — 1.ª chamada — 31 de Janeiro de 1955.

4010 — Uma estrela de coord. $\begin{cases} \alpha = 10^h\,34^m\,00^s{,}30 \\ \delta = -\,85^\circ\,44'\,50'',96 \end{cases}$ foi observada num lugar cujas coordenadas geográficas são $\begin{cases} \varphi = -\,22^\circ\,53'\,43'',96 \\ \lambda = +\,2^h\,52^m\,53^s{,}77 \end{cases}$.

Determinar:

a) a distância zenital quando a estrela passa no meridiano.

b) analítica e gràficamente o azimute, o ângulo horário e a distância zenital no momento da sua elongação E.

4011 — Determinar gràficamente as coordenadas equatoriais do planeta Neptuno cujas coordenadas eclípticas são $\begin{cases} \lambda = +\,166^\circ\,10' \\ \beta = +\,1^\circ\,03' \end{cases}$ sendo a obliquidade de eclíptica $\epsilon = 23^\circ\,27'$.

4012 — Duas estrelas de coordenadas (α_1, δ_1) e (α_2, δ_2) foram observadas num mesmo vertical nos instantes θ_1 e θ_2.

Determinar o azimute do vertical e a latitude do lugar de observação.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — 1.ª Frequência — 2.ª chamada — 7 de Fevereiro de 1955.

4013 — Determinar analítica e gràficamente o ângulo horário e a distância zenital duma estrela de coord. $\begin{cases} \alpha = 18^h\,43^m\,43^s{,}043 \\ \delta = +\,38^\circ\,24'\,56'',19 \end{cases}$ no instante em que corta o 1.º vertical Este dum lugar cuja latitude é $\varphi = -\,40^\circ\,04'\,59'',98$.

Calcular o tempo sideral nesse instante.

Se estivesse a trabalhar com um teodolito neste local teria possibilidade de efectuar esta observação? Porquê?

Determinar a distância zenital e o tempo sideral no momento das passagens meridianas.

4014 — Determinar gràficamente as coord. equatoriais duma estrela cujas coordenadas galácticas são $\begin{cases} g = -\,5^\circ\,20' \\ G = 129^\circ\,37' \end{cases}$. As coordenadas do polo norte galáctico são $\begin{cases} \alpha = 12^h\,40^m \\ \delta = +\,28^\circ\,00' \end{cases}$ e a origem de contagem das longitudes galácticas tem por coord. $\begin{cases} \alpha = 18^h\,40^m \\ \delta = 0^\circ\,0' \end{cases}$

4015 — Num lugar de latitude φ_N, duas estrelas $(\alpha_1; \delta_1)$ e (α_2, δ_2) são observadas num mesmo vertical (de azimute desconhecido) no mesmo instante. Determinar o tempo sideral local no instante da observação.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — Física Matemática — 1.º Exame de Frequência — Ano 1953-54.

4016 — Duas barras rígidas assentes em S e S' (referenciais em movimento relativista) experimentam ambas contracções. Explique o paradoxo aparente.

4017 — Fizeau realizou a seguinte experiência: Fez passar raios luminosos por tubos onde circulava água em velocidade constante v e mediu a velocidade da luz nesse trajecto, $\bar{c}$.

Sabendo que é n o índice de refracção da água e $\bar{c}_e = \frac{c}{n} + v$ o valor não relativista a esperar deduza o valor relativista $\bar{c}_r$ e encontre o que for obtido experimentalmente desprezando os termos de ordem de $\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$.

4018 — Defina comprimento duma barra (fixa em S') em S com o produto de velocidade do referencial S' em que assenta pelo tempo que medeia entre os 2 passagem dos extremos de barra pelo mesmo ponto P a S.

Deduza expressão da contracção dos comprimentos.

Enunciados dos N.os 4016 a 4018 de J. Tiago de Oliveira

F. C. C. — Física Matemática — 2.º Exame de Frequência — Ano de 1952-53.

4019 — Considere a equação $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ em que a e b são constantes.

a) Determine o integral geral.

b) Determine a superfície integral que contém a curva $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

c) Mostre que a equação dada é a equação de derivadas parciais das superfícies cilindricas.

R: *a*) $x - az = f(y - bz)$ *que:* c) *é a equação das superfícies cilindricas;* b) $1 - a^2 - (x - az)^2 - 2ax + 2a^2 z = b^2 + 2b(y - bz) + (y - bz)^2$.

4020 — Verificar se é aplicável o critério de Jordan relativo às séries de Fourier para a função

$$f(x) = \operatorname{sen} 1/x\,,\ f(0) = 0\,,\ \text{com } x \subset (-\pi, \pi)\,.$$

R: *A aplicação do critério de* Jordan *exige que a função seja de variação limitada. Na soma que define a variação total da função, cada parcela*

$$|\operatorname{sen} 1/x_{k+1} - \operatorname{sen} 1/x_k|$$

pode ter o valor 2 desde que se tome

$$x_{k+1} = \frac{1}{2j\pi + \pi/2} \quad e \quad x_k = \frac{1}{2j\pi - \pi/2}$$

com j *inteiro. Deste modo a função dada não é de variação limitada, e o critério de* Jordan *não é aplicável.*

4021 — Prove que o potencial definido pela calote da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$

de densidade $\mu = z$ e limitado pelo circulo de cota b tem, na origem, o valor πa^2. R: *O potencial é dado pelo integral de superfície* $\iint_S \frac{z\,dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *cujo valor é, de facto,* πa^2.

Soluções dos N.os 4019 a 4021 de J. Farinha

MECÂNICA CELESTE

F. C. C. — Mecânica Celeste — 1.º Exame de frequência.

Prova prática

4022 — Calcular com um erro inferior a 0,1″ a longitude de Júpiter na sua órbita, às 0^h *T. U.* de 15 de Abril de 1955, utilizando os elementos do planeta dados nas Efemérides deste ano.

R: $v = 121° 57' 44'',7$. Solução de J. Farinha

Prova teórica

4023 — Baseando-se na expressão do potencial duma camada esférica homogénea, demonstrar que esta atrai um ponto exterior como se a sua massa estivesse reunida no centro.

4024 — Das equações diferenciais dos movimentos do Sol e dos planetas relativamente a um sistema de referência inercial, deduzir as equações diferenciais dos movimentos dos planetas em volta do Sol.

4025 — Partindo das correspondentes fórmulas do movimento elíptico, deduzir as formulas que dão a posição dum cometa hiperbólico na sua órbita.