GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XVI N.° 62 DEZEMBRO 1955

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º–D.—Telefone 771943—LISBOA-N.

ANO XVI—N.º 62 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO—1955

EDITOR: *Gazeta de Matemátiac, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Os espaços métricos e a análise clássica: o método de ponto fixo

Com a publicação do artigo intitulado, *Os espaços métricos e a análise clássica: o método de ponto fixo*, pretende a «Gazeta de Matemática» criar uma secção onde, de maneira tanto quanto possível acessível e completa, sejam expostos certos temas de Matemática que entram no quadro das disciplinas professadas nas nossas Faculdades de Ciências embora, pela extensão dos programas dessas disciplinas, nem sempre nelas possam tomar o desenvolvimento adequado.

A idéia não é estranha aos objectivos que sempre nortearam a «Gazeta de Matemática», pois o leitor pode fàcilmente encontrar em números anteriores da revista trabalhos de M. Zaluar Nunes, A. Sá da Costa e vários outros colaboradores, escritos com essa orientação. Só é novo o projecto de assiduidade com que se pretendem publicar agora essas exposições, — e isso justifica, supomos, que se crie uma secção própria onde hão-de aparecer todos os trabalhos desta índole.

É claro que uma secção com estas características há-de ser dirigida sobretudo (ou exclusivamente) aos estudantes de Matemática das nossas Escolas Superiores. E para que ela, na verdade, lhes interesse, deligenciaremos fazer uma sistematização clara da matéria de cada artigo; oferecer meios de trabalho através duma bibliografia completa e escolhida; e, finalmente, chamar a atenção para problemas que com o assunto da exposição se prendem, dando também, quando for caso disso, algumas das suas aplicações. Este plano não impõe, entretanto, que se reproduzam demonstrações demasiadamente longas, tiradas de obras ou revistas de fácil consulta; em tais casos, será preferível remeter o leitor para esses escritos.

Não há dúvida que uma secção desta natureza vale na medida em que corresponde à curiosidade ou às necessidades dos seus leitores. Por isso, e independetemente dos artigos que estão previstos para serem publicados nos próximos números, e cujos títulos se indicarão mais abaixo, a «Gazeta de Matemática» prestará toda a atenção e procurará atender as sugestões que nesse sentido lhe comuniquem os seus leitores, considerando-as mesmo indispensáveis para garantir a vida da nova secção.

A seguir ao artigo acima citado, que foi propositadamente escrito por J. Dionísio, esperamos poder publicar os seguintes trabalhos: *Equações diferenciais totais e equações de derivadas parciais,* por J. Farinha e L. Albuquerque; *A álgebra abstracta e a teoria das matrizes*, por J. Dionísio; *Principais* *propriedades da transformação de Laplace*, por J. Farinha; *Teoremas fundamentais da teoria da aproximação*, por L. Albuquerque. Mas o enunciado do título destes artigos não significa, porém, que não possa ser dada a preferência a qualquer outro assunto que, de acordo com o que antes dissemos, nos seja sugerido pelos leitores da «Gazeta de Matemática».

L. Albuquerque, J. Dionísio e J. Farinha

---

§ 1. Espaços métricos.

Seja E um conjunto de elementos $x, y, z, \cdots$ em que se encontra definida uma relação de igualdade por virtude da qual dois elementos x e y ou são iguais, $x=y$, ou são diferentes, $x \neq y$, gozando o caso de igualdade das propriedades reflexiva $(x=x)$, simétrica ($x=y$ implica $y=x$) e transitiva ($x=y$ e $y=z$ implicam $x=z$).

Consideremos por exemplo o conjunto dos pontos $x, y, \cdots$ de um plano. Seja O um ponto determinado deste plano e digamos que é $x=y$ se e só se x e y são pontos de uma mesma circunferência de centro em O. Esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva e é por isso uma relação de igualdade.

A cada par ordenado (x, y) de elementos do conjunto E façamos corresponder um número real $\delta(x, y)$ nas seguintes condições:

δ_1) $\quad \delta(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

δ_2) $\quad \delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(y, z)$.

Dizemos então que $\delta(x, y)$ é a distância dos elementos ou *pontos* x e y e que E é um *espaço métrico*. δ_1 e δ_2 são propriedades conhecidas da distância de dois pontos em geometria (a segunda é a desigualdade triangular). São os *axiomas de distância* e destes decorrem ainda duas propriedades igualmente conhecidas:

δ_3) $\quad \delta(x, y) \geqslant 0$,

δ_4) $\quad \delta(x, y) = \delta(y, x)$.

Se em δ_2 fizermos $y=x$ vem $\delta(x, x) \leqq \leqq \delta(x, z) + \delta(x, z) = 2\,\delta(x, z)$ ou, por δ_1, $0 \leqq 2\,\delta(x, z)$ donde $\delta(x, z) \geqq 0$, que é δ_3 com z em lugar de y.

Para deduzir δ_4 ponha-se $z=x$ em δ_2; usando novamente δ_1 vem $\delta(x, y) \leqq \delta(y, x)$. Trocando x e y nesta desigualdade (o que é possível por serem x e y arbitrários) resulta $\delta(y, x) \leqq \delta(x, y)$. Tem-se portanto $\delta(x, y) \leqq \leqq \delta(y, x) \leqq \delta(x, y)$ o que exige $\delta(x, y) = = \delta(y, x)$.

No conjunto do exemplo de há pouco defina-se $\delta(x, y) =$ diferença (em valor absoluto) dos raios das circunferências de centro em O em que estão situados os pontos x e y. O leitor verificará que a função $\delta(x, y)$ assim definida é uma distância, isto é, que ela satisfaz os axiomas δ_1 e δ_2.

Consideremos uma sucessão $\{x_n\}$ de pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ de um espaço métrico E. Dado um número $\varepsilon > 0$ e arbitrário, pode acontecer que se tenha $\delta(x_m, x_n) < \varepsilon$ para além de uma certa ordem $N(\varepsilon)$, quer dizer, sempre que $m > N(\varepsilon)$ e $n > N(\varepsilon)$.

Dizemos então que a sucessão $\{x_n\}$ do espaço métrico E verifica a *condição de* CAUCHY.

Um caso particular importante de sucessões que verificam a condição de CAUCHY é o daquelas que admitem um limite. A sucessão $\{x_n\}$ tem um limite x, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ou $x_n \to x$, quando, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe uma ordem $N(\varepsilon)$ (dependente, como é natural, de ε) a partir da qual, $n > N(\varepsilon)$, se tem $\delta(x, x_n) < \varepsilon$.

Suponhamos que $\{x_n\}$ admite outro limite x'. É então $\delta(x', x_n) < \varepsilon$ a partir de outra ordem $N'(\varepsilon)$. Tomando N'' igual ao maior dos inteiros N e N', vem, usando δ_2, $\delta(x, x') \leqq \delta(x, x_n) + \delta(x', x_n) < 2\,\varepsilon$; mas

$\delta(x, x')$ é um número determinado, ao passo que ε é arbitràriamente pequeno, logo $\delta(x, x')=0$, donde, por $\delta_1, x=x'$. Concluímos que nenhuma sucessão pode ter mais que um limite.

Demonstremos o que dissemos atrás: que sucessão $\{x_n\}$ com limite x satisfaz a condição de CAUCHY. Tomando uma ordem $N(\varepsilon)$ tal que $\delta(x, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ para $n>N(\varepsilon)$, temos $\delta(x_m, x_n) \leq \delta(x_m, x)+\delta(x_n, x)<\varepsilon$ para $m>N(\varepsilon)$ e $n>N(\varepsilon)$.

Sucessão que satisfaça a condição de CAUCHY pode, porém, não admitir limite. É o que se passa no conjunto dos números racionais $x, y, \cdots$ metrizado com a distância $\delta(x, y)= =|x-y|$, sempre que a sucessão considerada tem limite e este é irracional. Mas já no caso dos números reais (com a mesma função de distância) admitir limite é o mesmo que satisfazer a condição de CAUCHY (teorema de CAUCHY-BOLZANO). Sempre que tal aconteça, dir-se-á do espaço E que é um espaço métrico *completo*.

§ 2. Exemplos de espaços métricos completos.

Vamos examinar neste parágrafo alguns exemplos de espaços métricos completos que adiante teremos necessidade de utilizar. Em cada caso indicamos a função de distância que se introduz, deixando ao leitor o cuidado de verificar que ela satisfaz os axiomas δ_1 e δ_2.

(1) *O espaço* K_n *das matrizes-colunas* $n \times 1$. As definições fundamentais relativas às matrizes-colunas

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \cdots$$

$(x_i, y_i, \cdots$ números reais) são as seguintes. Matriz nula, $x=0$, é aquela em que $x_1= =x_2=\cdots=x_n=0$. As matrizes x e y são iguais se e só se $x_i=y_i (i=1, \cdots, n)$. Soma $x+y$ das matrizes x e y é a nova matriz de elementos $x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n$. Produto αx do número real α pela matriz x é a matriz com os elementos $\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n$.

Mediante as definições anteriores as matrizes $n \times 1$ constituem um espaço linear. Introduzindo neste espaço a função de distância

$$\delta(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

obtemos um espaço métrico K_n.

A distância do ponto (matriz-coluna) x ao ponto zero (matriz nula) é, por definição, a *norma* $|x|$ de x: $|x|=\delta(x, 0)$.

É evidente que

$$\delta(x, y)=|x-y|$$

e que

$$|\alpha x-\alpha y|=|\alpha|\,|x-y|$$

(teorema de THALES em K_n se interpretarmos as matrizes-colunas como vectores).

K_n é um espaço métrico completo.

Se a sucessão

$$x^{(m)}=\begin{bmatrix} x_{m1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{mn} \end{bmatrix}$$

satisfaz a condição de CAUCHY $|x^{(m)}-x^{(p)}|<\varepsilon$, isto é, $\sum_{i=1}^{n}|x_{mi}-x_{pi}|<\varepsilon$ para $m>N(\varepsilon)$ e $p>N(\varepsilon)$, então cada uma das n sucessões de números reais $\{x_{mi}\} (i=1, \cdots, n)$ satisfaz a condição de CAUCHY e tem por isso limite: $x_i=\lim_{m \to \infty} x_{mi} (i=1, \cdots, n)$. Estes n limites x_i são as componentes de uma matriz-coluna x que é limite da sucessão $x^{(m)}$. Com efeito, é

$$|x-x^{(m)}|=\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{mi}|<\varepsilon$$

desde que $|x_i-x_{mi}|<\frac{\varepsilon}{n} (i=1, \cdots, n)$, o que se dá a partir de uma ordem conveniente $N(\varepsilon)$.

(2) *O espaço* m *das sucessões limitadas.* Uma sucessão de números reais $\{\xi_i\}$ diz-se limitada quando existe um número $M>0$ tal que $|\xi_i|<M (i=1,2,\cdots)$.

Designe m o conjunto das sucessões reais limitadas $x=\{\xi_i\}, y=\{\eta_i\}, \cdots$ e metrizemos este conjunto com a função de distância

$$\delta(x,y)=\sup_i |\xi_i-\eta_i|.$$

A distância $\delta(x,0)$ é, por definição, a *norma* $|x|$ da sucessão x: $|x|=\sup_i |\xi_i|$.

O espaço m é completo.

Seja $x^{(n)}=\{\xi_{ni}\}$ uma sucessão do espaço m (isto é, uma sucessão de sucessões limitadas de números reais: $\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1i}, \cdots$; ; $\xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2i}, \cdots$) e suponhamos que ela satisfaz a condição de CAUCHY

$$\delta(x^{(m)}, x^{(n)})=\sup_i |\xi_{mi}-\xi_{ni}|<\varepsilon,$$

para $m>N(\varepsilon)$ e $n>N(\varepsilon)$. Temos então

(*) $|\xi_{mi}-\xi_{ni}|<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots)$ para $m,n>N(\varepsilon)$,

logo a sucessão de números reais $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \cdots, \xi_{mi}, \cdots$ satisfaz a condição de CAUCHY. Admite portanto um limite ξ_i. E se fizermos $m\to\infty$ em (*), mantendo n fixo, vem

(**) $|\xi_i-\xi_{ni}|<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots)$ para $n>N(\varepsilon)$.

Com os limites ξ_i definimos uma sucessão $x=\{\xi_i\}$. Esta sucessão é limitada, quer dizer, $x \in m$. Na verdade, fixando $n>N(\varepsilon)$, resulta de (**)

$$||\xi_i|-|\xi_{ni}||\leqslant|\xi_i-\xi_{ni}|<\varepsilon,$$

donde

$$|\xi_i|<|\xi_{ni}|+\varepsilon<M_n+\varepsilon,$$

supondo

$$|\xi_{ni}|<M_n \quad (i=1,2,\cdots).$$

Só resta mostrar que se tem $x=\lim_{n\to\infty} x_n$. Mas é o que resulta de (**):

$$\delta(x, x^{(n)})=\sup_i |\xi_i-\xi_{ni}|\leqslant\varepsilon \text{ para } n>N(\varepsilon)$$

(3) *O espaço* C *das funções contínuas num conjunto fechado.* Seja t uma variável real com valores num conjunto fechado D e consideremos o conjunto das funções reais de t contínuas em D: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z= =z(t), \cdots$. Introduzindo a função de distância

$$\delta(x,y)=\sup_{t\in D}|x(t)-y(t)|$$

obtemos um novo espaço métrico C.

O espaço C é completo.

Com efeito, seja $\{x_m(t)\}$ uma sucessão de CAUCHY em C. Dado $\varepsilon>0$, existe uma ordem $N(\varepsilon)$ a partir da qual se tem

$$\delta(x_m(t), x_n(t))=\sup_{t\in D}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$$

e portanto

(*) $$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon \qquad (t\in D),$$

o que mostra que a sucessão de funções contínuas em $D, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), \cdots$, é uniformemente convergente em D. Existe pois (no sentido do Cálculo) $\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$, e a função $x(t)$ é contínua em D. Fazendo $m\to\infty$ em (*), com n fixo, vem

$$|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon,$$

logo (sendo $n>N(\varepsilon)$),

$$\delta(x(t), x_n(t))=\sup_{t\in D}|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon,$$

e isto mostra que a função $x=x(t)$ é no espaço C limite da sucessão $\{x_n(t)\}$.

§ 3. Teorema de Banach

A cada ponto x de um espaço métrico E façamos corresponder um e um só ponto x' do mesmo espaço. Fica assim definida uma função $x'=U(x)$ de domínio E e contradomínio em E, que se designa por *transformação* ou *operador* U no espaço E.

Diremos que U é um *operador de contracção* quando se tem

$$\delta(x', y')\leqslant q\,\delta(x,y) \text{ com } 0\leqslant q<1,$$

quaisquer que sejam $x\in E$ e $y\in E$.

TEOREMA DE BANACH. *Se* U *é um operador de contracção num espaço métrico completo* E , *existe um e um só ponto* $x^* \in E$ *tal que* $U(x^*) = x^*$.

Por outras palavras . todo o operador de contracção num espaço métrico completo possui um e um só *ponto fixo* x^* .

Dem. Tome-se um ponto x_0 arbitrário e construa-se a sucessão

(1) $x_1 = U(x_0)\,,\ x_2 = U(x_1)\,,\cdots,\ x_n = U(x_{n-1})\,,\cdots$

Vamos mostrar que é uma sucessão de CAUCHY. Em primeiro lugar verifiquemos por recorrência que é

(2) $$\delta(x_n, x_{n-1}) \leqslant q^{n-1}\,\delta(x_1, x_0)\,.$$

Para $n=1$, (2) é trivial. E partindo da veracidade de (2) deduzimos

$$\delta(x_{n+1}, x_n) = \delta[U(x_n), U(x_{n-1})] \leqslant \leqslant q\,\delta(x_n, x_{n-1}) \leqslant q^n\,\delta(x_1, x_0)\,,$$

que é (2) com $n+1$ em vez de n .

Em segundo lugar, resulta da desigualdade triangular (§ 1, δ_2) que, sendo $n > m$,

$$\delta(x_n, x_m) \leqslant \delta(x_n, x_{n-1}) + + \delta(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + \delta(x_{m+1}, x_m)\,,$$

donde, usando (2) ,

$$\delta(x_n, x_m) \leqslant (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m)\,\delta(x_1, x_0)\,.$$

Atendendo a que $0 \leqq q < 1$, temos $q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m \leqq \dfrac{q^m}{1-q}$,

logo

(3) $$\delta(x_n, x_m) \leqslant k\,\frac{q^m}{1-q} \quad \text{com} \quad k = \delta(x_1, x_0)\,.$$

Quando $m \to \infty$, o segundo membro de (3) tende para zero. Por consequência, a sucessão (1) satisfaz a condição de CAUCHY.

O ponto limite da sucessão (1), $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, que existe por ser E um espaço completo, é ponto fixo de U. Com efeito, temos

$$\delta[x_n, U(x^*)] \leqslant q\,\delta(x_{n-1}, x^*)\,,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \delta[x_n, U(x^*)] = 0\,,$$

quer dizer,

$$U(x^*) = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*\,.$$

Finalmente, se y^* é outro ponto fixo de U, temos

$$\delta(x^*, y^*) = \delta[U(x^*), U(y^*)] \leqslant q\,\delta(x^*, y^*)\,,$$

o que só é possível, por ser $q < 1$, se $\delta(x^*, y^*) = 0$ e portanto $x^* = y^*$: o ponto fixo é único.

Cálculo aproximado do ponto fixo.

Se na desigualdade (3) fizermos $n \to \infty$ e se trocarmos depois m por n obteremos

(4) $$\delta(x_n, x^*) \leqslant k\,\frac{q^n}{1-q}\,.$$

Esta desigualdade é importante. Com efeito, construamos a sucessão (1) a partir de um ponto arbitrário x_0. Se tomarmos x_n como aproximação do ponto fixo x^* o segundo membro de (4) dar-nos-á um limite excedente do erro cometido, avaliado este erro pela distância $\delta(x_n, x^*)$.

§ 4. Equações integrais lineares.

A equação funcional

(1) $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

em que $\varphi(x)$ representa a função desconhecida, é a *equação integral linear*. O termo livre $f(x)$ e o núcleo $K(x, t)$ supõem-se funções contínuas no intervalo $I = [a, b]$ e no rectângulo $R = [a \leqq x \leqq b\,,\, a \leqq t \leqq b]$, respectivamente.

TEOREMA. *A equação* (1) *admite uma e uma só solução contínua* $\varphi(x)$ *em* I *sempre que*

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}\,, \qquad M = \max_R |K(x, t)|\,.$$

Dem. No espaço métrico completo C das funções contínuas $\varphi(x), \psi(x), \cdots$ no intervalo I a transformação

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

define um operador $U(\varphi) = \psi$. Temos

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \left| \lambda \int_a^b K(x, t)\, [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\, dt \right|$$
$$\leqslant |\lambda|\, M \int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\, dt,$$

e por conseguinte

$$\delta[U(\varphi_1), U(\varphi_2)] = \delta(\psi_1, \psi_2) = \sup_{x \in I} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$$
$$\leqslant |\lambda|\, M(b-a) \sup_{t \in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$
$$= |\lambda|\, M(b-a)\, \delta(\varphi_1, \varphi_2)$$
$$= q\, \delta(\varphi_1, \varphi_2)$$

com $q = |\lambda|\, M(b-a)$. Se $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ é $q < 1$; U é um operador de contracção e admite por isso, em virtude do teorema de Banach, um ponto fixo $\varphi(x)$, função contínua em I. O teorema está provado.

Cálculo aproximado da solução.

Escolhido para ponto inicial em C a função identicamente nula $\varphi_0(x) = 0$, a sucessão

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, dt$$

converge uniformemente para a solução $\varphi(x)$. E tomando $\varphi_n(x)$ como aproximação de $\varphi(x)$ um limite excedente do erro cometido será dado pelo segundo membro da desigualdade

$$\sup_{x \in I} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant k \frac{q^n}{1-q}$$

onde $q = |\lambda|\, M(b-a)$ e $k = \max_{x \in I} |f(x)|$.

Exemplo. Considere a equação integral

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{120} \int_0^1 e^{xt}\, \varphi(t)\, dt.$$

Verifique que possui uma e uma só solução contínua $\varphi(x)$ no intervalo $[0, 1]$. Calcule a segunda iteração $\varphi_2(x)$ e mostre que ela dá a solução da equação com erro inferior a 10^{-3}.

(Continua no próximo número)

O cálculo das probabilidades e a teorização do comportamento económico

por **Gustavo de Castro**

(Continuação do N.º 60-61)

3. Resoluções.

Todas as questões que foram surgindo estão já resolvidas, ou vão ser resolvidas fàcilmente se sòmente admitirmos a teorização anterior. Assim a partilha das 64 pistolas devendo fazer-se segundo os valores actuariais das posições, segundo as expectações dos jogadores, bastará que se calcule a probabilidade que cada tem de ganhar (ou, em rigor, a probabilidade dum deles). O jogador que já tem dois pontos poderia ganhar em duas linhas de acontecimentos, ou na 1ª partida ou na 2ª (neste caso, se o outro jogador fosse ganhar a primeira partida e perder a segunda); a sua probabilidade de ganho, soma das que correspondem às duas modalidades, a segunda das quais é uma sucessão de acontecimentos, é:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

O jogador que tem um ponto só ganharia se fizesse as duas partidas consecutivas, e a sua probabilidade é

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(que se poderia obter como $1 - p_1$).

As expectações são portanto

$$e_1 = p_1\,S = \frac{3}{4} \cdot 64 = 48$$

$$e_2 = p_2\,S = \frac{1}{4} \cdot 64 = 16\ .$$

A solução de PASCAL é evidentemente menos clara, mas não deixa de ter interesse; primeiro porque é engenhosa e depois porque nos permitirá sentir a dificuldade dos primeiros passos, não se vá supor que as regras que vimos enunciando aparecem claras e explítas logo em PASCAL e FERMAT. Na verdade só lentamente foram aparecendo; a regra do produto das probabilidades, por exemplo, só aparece publicada por MOIVRE no século seguinte.

PASCAL, depois de observar que, se o jogador que tem um só ponto ganhasse a partida imediata, o bolo poderia ser então dividido ao meio — porque ambos passariam a estar (com dois pontos) em igualdade de circunstâncias — imagina o que tem dois pontos falando assim: «Por mim, estou sempre seguro de 32 pistolas; quanto às outras 32, talvez as ganhe e talvez não, e as chances são iguais. Dividamos pois igualmente estas 32 pistolas; e dá-me também as 32 de que estou seguro».

PASCAL, nem FERMAT, não apura o conceito de expectação, o que HUYGENS havia de conseguir no seu livro três anos mais tarde. Aqui, outra vez, CARDANO parece ter andado um século antes muito próximo da visão clara das coisas quando no capítulo 14 do seu *Liber de Ludo Aleae* dá a regra das paradas em jogos equitativos nestes termos: «*Existe pois uma regra geral, que é a seguinte: considere-se o total dos casos igualmente possíveis e o número dos que representam resultados favoráveis; compare-se este número com o dos restantes e façam-se as apostas nesta proporção para que se jogue equitativamente*».

Vejamos agora o valor duma posição de x no vermelho. Visto que a probabilidade de ganhar é 18/37 (18 vermelhos contra 18 negros mais o zero da banca), visto que com x no vermelho se ganha $2\,x$ (saindo o vermelho), então a expectação é

$$e = \frac{36}{37} \cdot x$$

A quebra é pois de 1/37 do que se arrisca e passa a constituir o lucro do banqueiro.

O jogador que aposta 2 num cavalo tem uma expectação de

$$\frac{2}{37} \cdot 36 = \frac{36}{37} \cdot 2$$

porque tem 2 números em 37 e recebe 18 vezes a parada, se ganhar. Se também aposta 3 numa dúzia tem ainda mais a expectação

$$\frac{12}{37} \cdot 9 = \frac{36}{37} \cdot 3\,,$$

o que dá à sua posição um valor actuarial que é 36/37 de todo o dinheiro que arriscou

$$\frac{36}{37} \cdot 2 + \frac{36}{37} \cdot 3 = \frac{36}{37} \cdot 5 \quad .$$

Do mesmo modo, um jogador que aposta 3 numa quadra tem daí uma expectação de

$$\frac{4}{37} \cdot 27 = \frac{36}{37} \cdot 3 \quad ;$$

e se também apostou 2 no vermelho a expectação total é

$$\frac{36}{37} \cdot 2 + \frac{36}{37} \cdot 3 = \frac{36}{37} \cdot 5\,,$$

os mesmos 35/36 do que apostou ao todo.

Vê-se pois nestes exemplos (e demonstra-se na generalidade mediante uma generalização óbvia das convenções anteriores) que, quando dois jogadores jogam à moeda as suas posições na roleta, o jogo é equitativo se estão apostadas iguais quantias. Qualquer sentimento de que isto não é aceitável deverá chamar a nossa atenção para o princípio de Bernoulli e a definição de jogo equitativo, e não sobre o Cálculo das Probabilidades; este tira aqui as consequências dos princípios que as pessoas aceitam e nada mais.

A probabilidade da menor de 7 no lançamento de dois dados é 15/36 e o valor actuarial de x escudos jogados nela (contra o dobro) é 30/36 dos x escudos; há portanto uma quebra de 1/6. Mais vale pois jogar na cor à roleta do que na menor com dois dados.

Quanto ao que vale mais, se apostar na cor se no pleno, ser ou não um jogador das grandes chances, considere-se (o que é sempre o mesmo com nova forma) que uma quantia jogada à roleta reduz-se a 36/37 do seu valor, qualquer que seja o jogo feito, para quem aceite o princípio de Bernoulli; quando se queira aceitar o princípio de Bernoulli é indiferente a combinação em que se faz uma aposta à roleta.

O quadro seguinte regista as apostas em que um capital é investido numa só parada e num jogo simples.

Prémios, probabilidades e expectações correspondentes a uma aposta simples de x escudos à roleta, conforme o jogo feito

Jogo	Prémio	Probabilidade	Expectação
pleno	$36x$	1/37	igual em todos os casos a $36/37 \cdot x$
cavalo	$18x$	2/37	
rua	$12x$	3/37	
quadra	$9x$	4/37	
linha	$6x$	6/37	
dúzia	$3x$	12/37	
coluna	$3x$	12/37	
maior—menor .	$2x$	18/37	
cor	$2x$	18/37	
par—ímpar . .	$2x$	18/37	
cavalo na dúzia.	$3/2\,x$	24/37	
cavalo na coluna	$3/2\,x$	24/37	

Observe-se que estes resultados são independentes da reserva do zero para a casa. É perfeitamente indiferente que o zero seja ou não reservado, se reserve outro número em vez dele ou se não reserve nenhum, enquanto forem 37 os casos possíveis e o prémio seja calculado multiplicando a parada pelo cociente de 36 pelo número de números que constituem a combinação em que se aposta.

Quando há desdobramento duma quantia em diversas paradas, a definição do valor actuarial da aposta e os resultados anteriores arrastam que seja sempre de 36/37 o factor de redução do valor facial ao valor actuarial, no instante a partir do qual se não podem fazer nem desfazer paradas, desde o «nada mais» até que a bola pare.

Tudo isto leva a considerar que um certo capital que se decidiu apostar à roleta, num ou mais jogos, numa ou mais paradas, qualquer que seja o sistema de jogo, ou sem sistema ao sabor da inspiração, tem um valor em numerário de 36/37 do seu valor nominal. Se o meu devedor tivesse, por extravagante disposição testamentária, que apostar um legado x, eu poderia aceitar o ganho aleatório das suas apostas como uma prestação de $36/37 \cdot x$ a abater à dívida; como disse Poisson «uma pessoa deve considerar uma expectação como um bem que é seu e incluí-la no inventário da fortuna própria».

É esta afirmação, propositadamente peremptória, que não seria aceitável como regra de conduta por muitas pessoas. Quero dizer que muitas pessoas não aceitariam a combinação anterior, ou no lugar do devedor ou no lugar do credor. Há quem pense que vale sempre mais um pássaro na mão do que dois a voar; há quem pense que quem não arrisca não petisca. Há reacções diferentes à realidade de que quem não apostou não perdeu nem ganhou; uns pensando no sossego de quem não perde, outros na alegria de quem ganha.

Uns creem na possibilidade dum sistema

de jogo susceptível de aumentar o valor aleatório do dinheiro que vão apostar, surpreendendo a incúria dos industriais ou os humores do Acaso. Outros acham que, nas suas circunstâncias, uma probabilidade de 1 para 1.000 de ganhar mil contos não é equivalente à probabilidade de 1 para 10 de ganhar dez contos, ou mesmo uma nota de conto na mão. Para outros ainda o jogo não é só um investimento mas um aspecto valioso do seu sistema de vida e preferem ou ganhar depressa ou perder devagar; e não entendem guiar-se por princípios abstractos que não olhem ao seu sistema de valores.

Postas assim as coisas, só os que querem surpreender o Acaso ou os industriais não tem razão, porque a roleta «se não tem consciência também não tem memória», e as coisas são efectivamente tão simples e tão claras que nenhum industrial se engana. Onde se ouviu que algum dono duma mesa de jogo explorasse outro sistema de jogo se não o que se funda na indiferença de todos os sistemas? Nem os industriais são incautos nem o Acaso perscrutável no caso individual.

4. A discussão do princípio de Bernoulli.

Como foi repetido, quando se precise de mais esclarecimentos porque nos pareça que as regras deduzidas nos não convenham, a nossa atenção deve recaír sobre o princípio de BERNOULLI, que deve ser entendido em si e julgado pelas suas consequências. Algumas das suas consequências são teòricamente previsíveis; destas nos vamos ocupar no seguimento.

Punhamos pois a questão: que promessas, que garantias arrasta a aceitação da estrutura teórica relativa ao domínio do aleatório e das normas de acção que lhe junta o princípio de BERNOULLI?

É aqui que o Cálculo das Probabilidades tem um novo surto para seguir o qual teremos que fazer algumas definições.

Chamemos *jogo de conta* um jogo de azar em que, pela sua definição, os jogadores se obrigam a um número certo N de partidas e aceitam que os pagamentos se façam pelo saldo final. Chamemos *jogo favorável a um jogador* um jogo de conta tal que, por fixação conveniente do número N de partidas, o jogador tem uma probabilidade igual ou maior que p_0 de ganhar uma fortuna igual ou maior que F_0, sendo estes valores prèviamente arbitrados por ele para o conveniente cálculo de N.

Isto quer dizer que, se um jogo me é favorável e eu pretendo ter uma probabilidade de 9.999 em 10.000 de ganhar 200 contos, é possível calcular o número de partidas que me garante o que pretendo, se as contas forem feitas no fim. Se aceitarmos pois, a que uma probabilidade de 9.999 em 10.000 pode ser uma certeza suficiente na situação em que decorre o jogo, posso eu ter a certeza (prática) de alcançar a fortuna que procuro entrando no jogo; posso desprezar a possibilidade de perder, por graves que sejam as consequências, desde que a consideração destas tenha intervido na fixação da certeza (prática) indispensável.

Quando duma urna com 9.999 bolas brancas e 1 preta, bem misturadas, eu afirmo que vou tirar a bola branca, faço uma afirmação cuja certeza prática é de 9.999 por 10.000. A fixação do número de partidas num jogo favorável pode dar-me a mesma certeza de obter o que quero, e o modelo da urna pode ajudar-me a fixar a certeza que exijo — tudo isto admitindo ser possível jogar o tal número de partidas.

Só resta ter uma regra para reconhecer os jogos favoráveis para o problema de viabilidade da exploração industrial estar resolvido, em princípio, visto que os jogos aceitáveis são evidentemente exploráveis industrialmente quando certos pormenores se possam resolver a contento, sobretudo os relativos à duração das partidas e portanto à previsão de rendimentos. A regra é dada pelo seguinte teorema:

Se num jogo de conta o valor actuarial da parada dum jogador é superior ao seu valor facial, se a expectação é superior à parada, o jogo é favorável ao jogador.

Esta proposição, consequência da lei dos grandes números que BERNOULLI estabeleceu, é a chave da discusão do princípio de BERNOULLI. É por força dela que a introdução do conceito de expectação se revela fecunda e é à luz dela que alguns dos celebrados paradoxos do Cálculo das Probabilidades se resolvem.

Estes paradoxos agrupam-se em torno de dois centros: para um lado os que fazem pesar a «utilidade», ou põem em causa a probabilidade como grau de convencimento, para outro os que fazem intervir problemas de «duração» e de «ruína». Assim, se num jogo favorável, o número de partidas que calculo para me garantir não pode realizar-se num lapso conveniente, tudo o que dissemos está prejudicado, e a vantagem que vem do jogo ser teòricamente favorável pode ser anulada por outras feições. Por outro lado, se num jogo em que a minha expectação é superior à parada eu pago no fim de cada partida, pode acontecer que seja considerável a probabilidade de que me arruíne antes de fazer valer a vantagem.

Ainda: quando só se tem dinheiro para comprar um pão nem sempre se está disposto a jogá-lo, num jogo aliás vantajoso, contra o preço dum Cadillac; e se só vou jogar uma partida, toda esta especulação tem de começar do princípio e é controverso que guarde um grande sentido, que seja razoável falar-se de probabilidade.

Voltando à «utilidade». Se, tendo 20 escudos, jogo 1 escudo contra 2 num jogo equitativo, é igualmente provável que perca o 20° escudo ou ganhe o 21°—ora estes escudos as mais das vezes não têm para mim o mesmo *valor* e o jogo não se me afigura equitativo. Se o mesmo acontece ao meu adversário não se vê como possam existir jogos equitativos.

Diz BERTRAND: «*Poisson vai longe demais. O homem que numa questão tem nove chances em dez de perder mas que, em caso de ganho, receberia um milhão, mentiria se dissesse que tem 100.000 francos. Um homem prudente recusar-se-ia a emprestar-lhe 500 sobre essa garantia. A sua expectação* vale *100.000 francos, mas verosìmilmente não encontrará comprador*».

Percebe-se pois que se introduzam os jogos de conta para afastar os problemas de ruína. Quando a grande fortuna do jogador diminua a probabilidade da ruína no sentido que indicámos ou quando certas precauções, limitando a velocidade do ganho, possam diminuir essa probabilidade para a duração que se prevê, pode a limitação ser afastada. Somos sempre porém de opinião que a teoria dos jogos de azar, que toma o conceito de expectação e o princípio de BERNOULLI como fulcro, supõe jogos suficientemente repetidos em que duma maneira ou doutra se minimiza a probabilidade de ruína; e jogos a dinheiro no sentido habitual. Os rios de tinta que continuam a correr sobre os méritos e deméritos, num sentido absoluto, do princípio de BERNOULLI secarão um dia da maneira do costume; pelo esclarecimento dos seus méritos e deméritos relativos às situações concretas que interesse teorizar.

O princípio de BERNOULLI continuará todavia a gizar as acções de quem quizer fazer fortuna ao jogo de azar desde que:

(*i*) as contas se façam no fim;

(*ii*) seja permitido e viável fixar o número de partidas;

(*iii*) se calcule esse número por forma a garantir, com certeza considerada suficiente (em face dos possíveis revezes), uma fortuna suficiente; uma e outra sendo números que se arbitram, uma probabilidade e um montante.

Como se vai ver com mais clareza na discussão do paradoxo de S. PETERSBURGO, não é razoável, *dum ponto de vista económico*, que alguém tenha dificuldade em apostar até a própria cabeça segundo o que estabelece o princípio de BERNOULLI nos casos que constituem o domínio deste princípio. Outro tanto poderá não acontecer fora deles, mas isso não deve espantar ninguém: a mesma sorte tem todos os princípios, que nunca dispensam o descernimento de quem os utiliza.

De resto, nem tudo são jogos de azar e o «ponto de vista económico» não é felizmente o único ponto de vista; sobre certos valores não se pode discorrer como sobre a moeda batida, eis o que nos lembra BERTRAND no caso que contrapõe ao paradoxo que iremos considerar.

«*Num problema mais célebre e mais grave o que estava em jogo era a vida humana. A inoculação era, antes da vacina, o melhor partido que se podia tomar contra a varíola, mas um inoculado em 200 morria das sequelas da operação. Alguns hesitavam; Daniel Bernoulli, geómetra impassível, calculava doutamente a vida média, encontrava-a acrescida de três anos e declarava silogisticamente a inoculação benfazeja. D'Alembert, sempre hostil à teoria do jogo que nunca compreendeu, repelia, com muita razão desta vez, a aplicação que se lhe queria dar: 'Suponhamos — dizia ele — que a vida média de um homem de trinta anos seja outros trinta anos, e que ele possa razoàvelmente esperar viver ainda trinta anos abandonando-se à natureza e deixando de se inocular. Suponho ainda que, submetendo-se à operação, a vida média seja de trinta e quatro anos... Não será patente que para julgar da vantagem da inoculação não bastará comparar a vida média de trinta e quatro anos à vida média de trinta, mas será necessário comparar o risco de 1 para 200, a que se expõem de morrer num mês pela inoculação, à vantagem longínqua de viver mais quatro anos ao fim de sessenta?'*

Argumenta-se mal para esgotar questões destas: suponhamos que se possa, com uma operação, aumentar a vida humana de quarenta anos em vez de quatro, com a condição de que uma morte imediata ameaça um quarto dos operados; com um quarto das vidas sacrificado para dobrar os três outros o lucro é grande. Quem o quererá colher? Que médico fará a operação? Quem se encarregará, aliciando para isso 4.000 habitantes robustos e saudáveis duma mesma comuna, de encomendar para o dia seguinte os 1.000 caixões? Que director de colégio ousaria anunciar a 50 mães, que decidido a duplicar a vida média dos seus 200 alunos, jogou por eles este jogo vantajoso em que os seus filhos perderam? Os pais mais prudentes aceitariam 1 chance em 200; nenhum, sobre a fé de nenhum cálculo, se exporia a 1 chance em 4».

5. O Paradoxo de S. Petersburgo.

Suponhamos o jogo seguinte. Um jogador J compra com uma entrada e' o direito a jogar uma partida com o banqueiro B. A partida consiste em sucessivos lançamentos duma moeda boa até que finalmente apareça uma face C («cara» ou «caravela», por exemplo). O banqueiro B no fim duma partida que teve n lançamentos paga 2^{n-1} escudos ao jogador J.

Assim, por exemplo, J paga 1.000 escudos a B como entrada. B lança a moeda e se sai C, logo à primeira, paga 1 escudo a J; se à primeira sai X («escudo» ou «cruz», por exemplo), B lança de novo a moeda e saindo agora C, à segunda, paga 2 escudos; se na 2ª como na 1ª sai X, B lança 3ª vez a moeda para pagar $2^2 = 4$ se finalmente sair C, ou continuar se não; se é à 4ª vez que sai C, então J recebe $2^3 = 8$ escudos. E assim por aí fora, indicando-se no quadro seguinte os ganhos de J conforme o número de lançamentos da partida e as probabilidades correspondentes para os primeiros casos.

Lançamentos	Ganhos	Probabilidades	Expectações
1	1	1/2	1/2
2	2	1/4	1/2
3	4	1/8	1/2
4	8	1/16	1/2
5	16	1/32	1/2
6	32	1/64	1/2
7	64	1/128	1/2
8	128	1/256	1/2
9	256	1/512	1/2
10	512	1/1024	1/2
11	1024	1/2048	1/2

Olhando para este quadro parece a algumas pessoas que se paga demais para jogar uma partida, visto que, para se não perder dinheiro, seria preciso que saíssem 10 cruzes seguidas, o que é uma série com a probabilidade de 1/1.000 (mais precisamente, 1/1.024). A pessoa que tendo 1.000 contos fosse jogar 1.000 partidas poderia temer ganhar 24 escudos numa delas e perder os restantes 999 contos, sem ter de que se queixar.

Também é verdade que saídas 10 cruzes e a moeda não tendo memória, poderiam sair mais algumas, e os ganhos serem então muito grandes. É o que se observa no quadro seguinte.

«Cruzes» além das primeiras 10	Probabilidades (supondo saídas as 10 primeiras)	Ganhos líquidos (em contos)
1	1/2	1
2	1/4	3
3	1/8	7
4	1/16	15
5	1/32	32
6	1/64	65
7	1/128	130
8	1/256	261
9	1/512	523
10	1/1024	1048

Vê-se pois que, com outra série de 10 cruzes,o jogador estaria seguro de ficar em casa e teria à sua frente a possibilidade dum bom ganho; de novo se dirá aqui que, tendo saído 20 cruzes, a probabilidade de mais uma é 1/2. Ora se saísse mais uma dobrava-se o capital inicial; e se saísse só mais uma (e porque não, chegados ali?) quadruplicava-se. Etc.

Em pouco os lucros tornam-se fabulosos: recorde-se como, segundo a lenda, o inventor do xadrês esgotou as possibilidades dum Xá inacreditàvelmente rico pedindo 1 grão de trigo na primeira casa do tabuleiro, 2 na segunda, 4 na terceira, e assim por aí fora — duplicando sempre. Outros tantos escudos, menos um só, deveria pagar o banqueiro se saíssem 64 «cruzes» antes da «cara».

Tudo isto supondo que o jogador tinha 1.000 contos para arriscar. A perspectiva seria menos brilhante para um jogador que só tivesse 100.

Parece então, dir-se-á, que chegou o momento de experimentar a «teoria matemática dos jogos de azar». O que diz ela que se faça?

Segundo o que vimos deverá calcular-se a expectação de J quando entra na partida; esta expectação, sendo a soma dos produtos das quantias que pode ganhar pelas probabilidades respectivas, produtos todos iguais a 1/2, é infinita portanto.

A interpretação deste resultado sempre pareceu evidente: a teoria dos jogos de azar indica a J que aceite jogar por qualquer preço — a sua expectação, infinita, fará com que o jogo lhe seja vantajoso, pois que compra por uma qualquer quantia uma fortuna sem limites.

O paradoxo está em que o senso comum se ergue contra a regra da Ciência: se esta nos diz que as pessoas devem comprar sempre a entrada, parece que nenhum homem prudente estará disposto a arriscar uma quantia elevada, a pagar a entrada por quantia de qualquer vulto. A verdade parece mentira e o sentimento do homem opõe-se à própria razão.

Este paradoxo estava destinado a uma enorme celebridade, não só pelo vigor com que aponta para a relatividade do princípio de Bernoulli, mas até por um ou outro pormenor, essencialmente insignificante, que destrai a análise do seu fim útil; certamente também porque sobrevindo, sugestivo, nos primeiros passos duma disciplina um tanto subtil (cuja legitimidade era posta em dúvida por espíritos, justamente famosos, mesmo em passagens mais elementares), não deixaria de avolumar as discussões. O inevitável D'ALEMBERT dele diria, em 1768, para sublinhar as incongruências dum Cálculo em que não acreditava: «*Conheço pelo menos cinco ou seis soluções nenhuma das quais está de acordo com as outras e das quais nenhuma me parece satisfatória*».

Para começar, vejamos a mais superficial das perplexidades, a que assaltaria o leitor menos conhecedor da história das matemáticas quando deparasse com o seguinte sumário, traçado descuidadamente por um matemático distraído: «O paradoxo de S. Petersburgo, em que assenta a mais popular das críticas ao princípio de BERNOULLI, deve a sua celebridade a BERNOULLI; já porém teria sido discutido por BERNOULLI e talvez mesmo por BERNOULLI».

O matemático distraído estaria, assaz justamente, a atribuir o princípio que nos ocupa a JACOB BERNOULLI (1654-1705), o mais velho da ilustre família de matemáticos suiços(³). É o autor do primeiro grande tratado, o «*Ars coniectandi*», tratado que publica postumamente, em 1713, o sobrinho NICOLAU BERNOULLI (1687-1759), onde aparece descoberta a lei dos grandes números. Estaria também a recordar-se da correspondência entre este NICOLAU e MONTMORT, onde se propõe vários jogos em que a expectação é a soma duma série; e a correspondência entre CRAMER e NICOLAU, em que CRAMER propõe duas explicações para o paradoxo. Estaria ainda a pensar que, dada a atenção devotada por NICOLAU à obra de seu tio JACOB, e à amplidão desta obra, não seria impossível que deste viesse tudo. Finalmente, reconheceria que é a DANIEL BERNOULLI, outro sobrinho de JACOB, e primo de NICOLAU, que se deve o alargamento da discussão com a publicação em 1738, nos *Comentarii Academiae Scientiaram Imperialis Petropolitanae*, da memória onde expõe a sua teoria da esperança moral que LAPLACE haveria de adoptar, com exclusão da expectação de HUYGENS. A teoria é aplicada à explicação do paradoxo que fica com o nome que o vincula à Academia de S. Petersburgo.

(³) Com igual justiça o atribuiria a HUYGENS ou a LEIBNIZ. Uma forma mais geral, cuja discussão prossegue acesamente em nossos dias, vem de JACOB BERNOULLI; para simplificar podemo-nos ficar por este.

Agora ao jogo. Uma circunstância que se tem analisado na esperança de se esclarecerem as coisas é a de ser infinita a expectação de J. Se a sua interpretação para quem queira obter do princípio de BERNOULLI uma regra para J não parece oferecer dificuldades, o mesmo não acontece quando se olha a questão do ponto de vista da solvência do banqueiro. Na realidade, uma expectação infinita para J significa que B assume compromissos para além das suas possibilidades; como o Xá da Pérsia não poude recompensar o inventor, assim o banqueiro deixará de poder pagar nos casos em que se realizaria a vantagem de J.

Suponhamos, por exemplo, que a fortuna de B é de um milhão de contos; o maior pagamento que B pode fazer será então de 2^{29} escudos, e o jogo que pode honestamente abrir não deve ter mais de 30 lançamentos e será, por exemplo, o seguinte: B lança 30 vezes um dado e paga a J a soma de 2^{n-1} escudos se a primeira «cara» aparece no lançamento n, e 2^{29} escudos se não aparecer «cara».

A expectação de J neste jogo é

$$\frac{1}{2}\underset{(30\text{ vezes})}{+\cdots+}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{30}}\times 2^{29}$$

e o jogo é-lhe desfavorável se a entrada for superior a 15$50.

Dir-se-á que o banqueiro não é suficientemente rico. Imaginêmo-lo pois com a fortuna de 100 milhões de contos, o que o coloca entre os homens mais ricos do planeta: em vez de ter de limitar o jogo a 30 lançamentos, poderá honestamente alargá-lo a 37; a expectação de J subirá de 15$50 para 19$00.

Estamos pois na mesma; o jogador que aceitasse pagar um conto de entrada seria muito imprudente. Suponhamos mesmo que J joga contra toda a humanidade e que cada um dos 2,4 biliões era tão rico como o banqueiro de há pouco; poderíamos então fixar para a partida um máximo de 68 lançamentos e a expectação de J seria quase de 40$00...e ficaria ainda muito longe do conto.

Vê-se pois que a insolvência do banqueiro é um aspecto essencial que interfere com o princípio de BERNOULLI; em vez porém de o invalidar só o enriquece com a evidenciação das condições que o validam.

Este resultado, contudo, embora concorra nas apreensões dos que não aceitavam jogar por um preço elevado, não justifica essas apreensões; estas provêm mais do tipo de considerações que fizemos no início em que pesa a improbabilidade de qualquer lucro, a previsão duma ruína sobrevindo antes de se poder verificar o improvável ganho e ainda, talvez, a lentidão do jogo que (mesmo excluída a hipótese da ruína) não deixa lugar a esperanças. O jogo parece inaceitável mesmo que por detrás do banqueiro estivessem todas as riquezas concebíveis; como observa BERTRAND, a dificuldade que vem da limitação da fortuna do banqueiro não é essencial: «*Quelle que soit la dette...la plume peut l'écrire, on réglera les comptes sur le papier; la théorie triomphera s'ils confirment ses prescriptions*».

Para arrumar definitivamente este aspecto nada nos impede de inventar um novo jogo que, guardando todo o essencial, se defenda daquele lado: J aposta com B uma quantia elevada que ganhará se, jogando o jogo de S. PETERSBURGO com uma entrada fictícia e (qualquer mas fixada), o seu ganho líquido fictício ultrapasse uma quantia Q (qualquer mas fixada).

Nestas condições o jogo é favorável a J no sentido que utilizámos atrás: impondo o número de partidas que vai jogar, J ficará seguro (com a segurança que quizer e para a qual calculou aquele número) de ganhar a aposta. O princípio de BERNOULLI deu-lhe a boa indicação; não há que pleitar o desinteresse como fez BERTRAND dizendo: «*La théorie pourtant est irréprochable; il n'est pas juste de lui opposer l'absurdité de ses conseils: elle n'en donne pas*».

Para nos convencermos do que fica dito, suponha-se que se vão fazer 2^N partidas. O nosso jogador «esperará» que em metade das partidas sai a «cara» logo à primeira, pois que é 1/2 a probabilidade de que isso aconteça; que em metade das restantes sai a «cara» à segunda, pela mesma razão; e em metade das outras, «cara» à terceira; etc. Por cada uma das primeiras receberá 1 escudo; por cada das segundas, 2; por cada das terceiras, 2^2: etc.; o que lhe dá um ganho esperado de 2^{N-1} em cada caso. O quadro seguinte ordena o que acaba de dizer-se.

Ordem da jogada em que aparece a «cara»	Número esperado das partidas correspondentes	Ganhos em cada partida	Ganho total esperado
1	2^{N-1}	1	2^{N-1}
2	2^{N-2}	2	2^{N-1}
3	2^{N-3}	2^2	2^{N-1}
...			
k	2^{N-k}	2^{k-1}	2^{N-1}
...			
$N-1$	$2^{N-(N-1)}$	2^{N-2}	2^{N-1}
N	2^{N-N}	2^{N-1}	2^{N-1}

O jogador espera então receber $2^{N-1}N$ e, tendo pago $2^N e$, o seu ganho líquido será

$$2^{N-1}N - 2^N e = 2^{N-1}(N-2e).$$

Trata-se dum ganho líquido esperado. Entende-se que se J fixar N por forma que

$$2^{N-1}(N-2e)=Q$$

a probabilidade dum ganho líquido inferior a Q ande à volta de $1/2$; entende-se, todavia, também que escolhendo o N suficientemente grande para que seja assaz grande a diferença

$$2^{N-1}(N-2e)-Q$$

se consiga que, a menos duma oscilação da amostragem assaz improvável, se tenha um ganho líquido superior a Q.

Restará ainda perguntar se o número de jogos indispensáveis não é demasiado grande? Em qualquer caso o ponto não é essencial; se a não aceitação do jogo vier daí, só haverá que explicitar essa razão e não criticar o princípio de Bernoulli. Este princípio de Bernoulli rege os casos em que a expectação é superior à entrada e os problemas de solvência do banqueiro, da ruína do jogador e da duração do jogo se supõem resolvidos; bem como quaisquer outros não essenciais, como é de rigor em ciência.

Tinhamos esperado que ao cabo desta jornada o paradoxo estivesse definitivamente arrumado e parece-nos que, pelo menos, alguma clareza se terá conseguido no que respeita o princípio de Bernoulli e o que se deve entender por uma teoria matemática de comportamento económico — de mistura com um pouco de Cálculo de Probabilidades. Não resta porém dúvida que a formulação do jogo de S. Petersburgo foi tão astuciosa que resta sempre um sentimento suspeito de que alguma coisa ficou por dizer. E ainda bem, para que não seque o prazer de se discorrer sobre estas coisas; porque nem só de pão vive o homem e até porque, na parte em que vive de pão, as matemáticas tem sido e continuarão a ser um excelente auxílio.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA — RIO DE JANEIRO

Actividades em 1954

Sob a orientação do matemático Dr. Lélio I. Gama, Director do IMPA e tendo a Dra. Maria Laura Mousinho como Secretário-Geral, o Instituto continuou suas actividades de pesquisa, tendo funcionado na sede do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, à Av. Wenceslau Braz, 71.

Conferências — O Prof. L. Collatz, do Technische Hochschule, Hannover, Alemanha, realizou no IMPA, em Maio de 1954, uma conferência sobre Matemática Aplicada subordinada ao tema «Métodos de Cálculo Numérico».

Prof. J. Horvath, da Universidade de Los Andes, Bogotá, Colômbia, fez uma conferência sobre «Teoria da Aproximação», no mês de Julho de 1954.

No mês de Outubro de 1954, o IMPA recebeu a visita do matemático francês Prof. A. Denjoy, do Instituto de França, Paris, que pronunciou entre nós, três conferências sobre o tema «Aplicações dos conjuntos perfeitos totalmente descontínuos à teoria das funções de variável real e complexa».

Cursos — O Prof. G. Mostow, da Johns Hopkins University, Baltimore, U. S. A., realizou no IMPA os seguintes cursos:

1. *Topologia Algébrica* (Março-Agosto de 1954).
2. *Álgebras de Lie* (Março-Agosto de 1954).

O Prof. A. Grothendieck, do Instituto Elie Cartan, Nancy, França, realizou, em São Paulo, sob os auspícios do IMPA, os seguintes cursos:

3. *Cálculo Diferencial nos espaços vectoriais topológicos* (Abril-Novembro de 1954).
4. *Grupos topológicos* (Abril-Setembro de 1954).
5. *Álgebra topológica* (Abril-Setembro de 1954).
6. *Espaços vectoriais topológicos* (Abril-Agosto de 1954, continuação do curso de 1953).

O Prof. M. Matos Peixoto realizou, no IMPA, o seguinte curso:

7. *Equações diferenciais* (Agosto-Dezembro de 1954).

Seminários — Foram realizados os seguintes seminários avançados e de estudos:

1. *Teoria dos «faisceux»*, por A. Grothendieck (em São Paulo, de Outubro a Novembro de 1954).
2. *Teoria métrica dos produtos tensoriais topológicos*, por A. Grothendiec (em São Paulo, de Maio a Setembro de 1954).
3. *Introdução às funções reais*, por M. L. Mousinho (de Maio a Novembro de 1954).
4. *Introdução às funções analíticas*, por L. Nachbin (de Agosto a Dezembro de 1954).
5. *Introdução à Álgebra Moderna,* por A. A. Feijó Barroso (de Agosto a Dezembro de 1954).

Trabalhos de pesquisa — O Dr. G. Mostow preparou os seguintes trabalhos:

1. *On covariant fiberings of Klein spaces* (a aparecer em American Journal of Mathematics).
2. *Some new decompositions of semi-simple Lie groups* (a aparecer em Memoirs of the American Mathematical Society).
3. *A note on the first main theorem of the theory of invariants* (a aparecer no American Journal of Mathematics).
4. *On reductive subgroups of algebraic Lie groups* (a aparecer no American Journal of Mathematics).
5. *Automorphisms of Lie algebras* (em colaboração com Armand Borel, a aparecer em Annals of Mathematics).

O Dr A. Grothendieck realizou os seguintes trabalhos:

1. *Produits tensoriels des espaces de* Banach (a aparecer no Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo).
2. *Sur Certaines classes de suites dans les espaces de* Banach *et le théorème de* Dvoretsky-Rogers (a aparecer no Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo).
3. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L.* (a aparecer no Canadian Journal of Mathematics).
4. *Théorèmes de finitude sur la cohomologie à coefficients dans un faisceau* (a aparecer nos Anais da Academia Brasileira de Ciências).

O Dr. L. Nachbin publicou os seguintes trabalhos:

1. *Topological vector spaces of continuous functions* (Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 40).
2. *Bornological spaces of continuous functions and cartesians products* (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 60).
3. *Closed algebras of analytic functions of one variable with an isolated singularity* (Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 60)

O Sr. P. Ribenboim, preparou os seguintes trabalhos:

1. *Anneaux normeaux réels à caractère fini* (a aparecer na Summa Brasiliensis Mathematicae).
2. *Sur la théorie des idéaux dans certains anneaux de type infinie* (a aparecer nos Anais da Academia Brasileira de Ciências).

Publicações — O IMPA editou em 1954, 2 fascículos das «Notas de Matemática», colecção publicada sob a orientação do Dr. L. Nachbin:

1. *Topologia dos Espaços Métricos*, por Élon Lages Lima.
2. *Curso de Topologia Geral,* por Saunders Mac Lane, tradução de J. Valadares.

Foram distribuidos pelo IMPA, em 1954, os seguintes fascículos do volume 4 da revista Summa Brasiliensis Mathematicae:

1. *Sur les générateurs des groupes classiques*, por J. Dieudonné
2. *The generalized radiation problem and the Euler-Poisson-Darboux equation*, por A. Weinstein.

Actividades diversas — O Centro de Cooperacion Científica de la Unesco para a América Latina e a Universidade Nacional de Cuyo, realizaram um colóquio latino-americano sobre *Alguns problemas matemáticos que estão sendo estudados na América Latina*, em Mendoza-Argentina, de 21 a 25 de Julho de 1954. Foram apresentadas as seguintes comunicações dos Professores do IMPA:

1. *Resultados da teoria dos espaços vectoriais topológicos*, por L. Nachbin.
2. *Reductive subgroups of algebraic groups*, por G. Mostow.
3. *Sur la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, por A. Grothendieck.

M. L. M.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos. — Ano de 1955.

Ponto N.º 1

ARITMÉTICA

4026 — Provar que, se um número primo p é a diferença entre os quadrados de dois números, estes dois números são $\frac{p-1}{2}$ e $\frac{p+1}{2}$.

R: *Sejam* a *e* b *dois inteiros cuja diferença de quadrados é igual a* p.

Então $a^2 - b^2 = p$ *ou* $(a+b)(a-b) = p$, *por hipótese. Como* p *é primo terá de ser* $a + b = p$ *e* $a - b = 1$, *relações que conduzem a* $a = \frac{p+1}{2}$ *e* $b = \frac{p-1}{2}$.

4027 — Determinar dois números naturais, sabendo que eles estão entre si como 56 e 72 e que o seu máximo divisor comum é 25.

R: $a/b = 56/72$ *ou* $a/b = 7/9$.

Segundo as hipóteses, a *e* b *serão equimúltiplos de* 7 *e* 9, *respectivamente, e ainda múltiplos de* 25.

$$a = (7 \cdot 25)^{\cdot} \quad e \quad b = (9 \cdot 25)^{\cdot}.$$

Dos infinitos valores que a *e* b *podem assumir, indicaremos os menores* $a = 175$ *e* $b = 225$.

4028 — Se 15 divide o produto $77\,n$, qual o resto da divisão de n por 15? Justificar a resposta.

R: *Dividindo* 15 *o produto* $77 \cdot n$ *e sendo primo com* 77 *terá de ser* $n = \dot{15}$: *— se um número divide um produto, divide necessàriamente um deles, pelo menos —. O resto da divisão de* n *por* 15 *é, pois, zero.*

ÁLGEBRA

4029 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2 + 2(m+1)\,x + 1 = 0$ sejam imaginárias.

R: *Será* $\Delta = (m+1)^2 - 1 < 0$; $m(m+2) < 0$, *donde* $-2 < m < 0$.

4030 — Decompor em factores do 1.º grau o polinómio $x^4 - 5x^2 + 4$.

R: $x^4 - 5x^2 + 4 \equiv (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$, *sendo* $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = +1$ *e* $x_4 = -2$ *as raizes da equação proposta.*

4031 — Desenvolver, simplificando o mais possível, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$.

R: $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \equiv (\sqrt{x})^7 - 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{x})^6 + 21 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot (\sqrt{x})^5 - 35 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 (\sqrt{x})^4 + 35 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 (\sqrt{x})^3 - 21 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 \cdot (\sqrt{x})^2 + 7 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 (\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7 \equiv (x^3 - x^{-4})\sqrt{x} + 7\,(x^{-3} - x^2)\sqrt{x} + 21\,(x - x^{-2})\sqrt{x} + 35\,(x^{-1} - 1)\sqrt{x}$.

Ponto N.º 2

ARITMÉTICA

4032 — Provar que, se a e b forem primos entre si, também $a+b$ e $a\,b$ são primos entre si.

R: *Seja* K $(\neq 1)$ *um factor primo que divida simultâneamente* $(a+b)$ *e* ab.

Sendo $ab = \dot{k}$, *ou é* $a = \dot{k}$ *ou é* $b = \dot{k}$.

Se é $a = \dot{k}$, *será também,* $b = \dot{k}$ *pois, por hipótese* $a + b = \dot{k}$. *Então* a *e* b *admitem um divisor* $k\ (\neq 1)$ *contra a condição inicial de ser* m. d. c. $(a, b) = 1$. *Concluiremos, pois, a não existência de um* $k \neq 1$ *divisor comum:* a *e* b *são primos entre si.*

4033 — Determinar dois números naturais, de todos os modos possíveis, sabendo que a sua soma é 228 e que, dividindo os dois números pelo seu máximo divisor comum, a soma dos quocientes obtidos é 12.

R: $a + b = 228$

Seja m. d. c $(a, b) = d$. *Fazendo* $a/d = x$ *e* $b/d = y$, *será* m. d. c $(x, y) = 1$ *e, como* $x + y = 12$, *teremos para* $x = 1, y = 11$, *para* $x = 5, y = 7$; *ou para* $x = 7, y = 5$, *para* $x = 11, y = 1$.

Ora $d \cdot x + d \cdot y = 228$; $(x+y) \cdot d = 228$; $12\,d = 228$ *e* $d = 19$. *Os possíveis valores de* x *e de* y, *darão, respectivamente, as soluções pretendidas*: $a = 19 \times 1 = 19$; $b = 19 \times 11 = 209$; $a = 19 \times 5 = 95$ *e* $b = 19 \times 7 = 133$ *e* $a = 19 \times 11 = 209$ *e* $b = 19 \times 1 = 19$.

4034 — Quais os números de três algarismos que são simultâneamente múltiplos de 13 e de 14? Justificar a resposta.

R: *Os números divisíveis, simultâneamente, por* 13 *e* 14 *serão múltiplos do seu* m. m. c.

É m. m. c. $(13, 14) = 182$ *e* $100 \leqslant 182\,n < 1000$ (n *inteiro*) *ou* $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Para $n = 1, 2, 3, 4$ *e* 5 *são* $182 \times 1 = 182$; $182 \times 2 = 364$; $182 \times 3 = 546$; $182 \times 4 = 728$ *e* $182 \times 5 = 910$ *as soluções pedidas.*

ALGEBRA

4035 — Determinar m de modo que as raízes da da equação

$$4x^2 - (m+1)\,x + m - 2 = 0$$

sejam reais e desiguais.

R: $\Delta > 0$ $\Delta = (m+1)^2 - 16\,(m-2) > 0$; $m^2 - 14\,m + 33 > 0$ *cujas raízes são* $x_1 = 11$ *e* $x_2 = 3$. *Então,* $m > 11$ *e* $m < 3$.

4036 — Decompor em factores do 1.º grau o polinómio $x^4 + 3x^2 - 4$.

R: $x^4 + 3x^2 - 4 \equiv (x + 2i)(x - 2i)(x+1)(x-1)$ *onde* $\pm 2i$ *e* ± 1 *são raízes da equação proposta.*

4037 — Desenvolver, simplicando o mais possível,

$$(x - y\sqrt{2})^5 - (x + y\sqrt{2})^5 .$$

R: $(x - y\sqrt{2})^5 - (x + y\sqrt{2})^5 = 10 \cdot \sqrt{2}\,x^4 y - 40\sqrt{2}\,x^2 y^3 - 4\sqrt{2}\,y^5$.

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ano de 1955.

Ponto N.º 1

4038 — Se a razão entre o número de arranjos de m objectos distintos 4 a 4 e o número de arranjos dos mesmos m objectos 3 a 3 é 12, quantos são os objectos?

R: *Sendo* $A_4^m : A_3^m = 12$ *é* $[m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)] : [m\,(m-1)(m-2)] = 12$, *donde* $m = 15$.

4039 — Que valores se poderão dar a m na equação

$$8x^2 - (m-1)\,x + m - 7 = 0$$

para que as raízes sejam reais e iguais?

R: $\Delta = 0$; $\Delta = (m-1)^2 - 32\,(m-7) = 0$; $m^2 - 34\,m + 225 = 0$ *cujas raízes são* $m_1 = 25$ *e* $m_2 = 9$

4040 — Sendo 120 o 4.º termo do desenvolvimento de

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$$

determine o termo seguinte sem fazer o desenvolvimento.

R: *A razão de dois termos consecutivos do desenvolvimento do binómio de* NEWTON $(x+a)^n$, *é, como fácilmente se pode verificar:* $T_{p+2} : T_{p+1} = [C_{p+1}^n\, a^{p+1} \cdot x^{n-(p+1)}] : [C_p^n\, a^p x^{n-p}] = \frac{n-p}{p+1} \cdot a \cdot x^{-1}$, *ou*

$$T_{p+2} = T_{p+1} \cdot \frac{n-p}{p+1} \cdot a \cdot x^{-1}.$$

Sendo $T_4 = 120$ *será* $T_5 = 120 \times \frac{10-3}{3+1} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^{-1} = 210 \cdot x^{-3}$.

Nota: *O 4.º termo do desenvolvimento de* $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ *é* $T_4 = 120 \cdot x$ *e não* $T_4 = 120$, *como se escreve no enunciado. Assim, será,* $T_5 = 120\,x \times \frac{10-3}{3+1} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^{-1} = 210 \cdot x^{-2}$.

4041 — Resolver a equação

$$36\,x^4 - 13\,x^2 + 1 = 0$$

R: *A substituição* $y = x^2$ *na equação* $36\,x^4 - 13\,x^2 + 1 = 0$ *dá a equação resolvente* $36\,y^2 - 13\,y + 1 = 0$ *com as raízes* $y_1 = \frac{1}{4}$ *e* $y_2 = \frac{1}{9}$.

Então $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$ *e* $x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$.

4042 — Classifique as funções. Dê um exemplo de uma função algébrica irracional.

4043 — Uma mulher está a pôr laranjas em dois cestos e verifica que tem um 30 e o outro tem 20, e ainda estão 15 laranjas fora dos cestos. Como deverá distribuir estas 15 pelos dois cestos para que se mantenha a proporção em que as laranjas neles estavam?

R: *É suficiente dividir* 15 *em partes directamente proporcionais a* 2 *e* 3 *visto ser a proporção em que os laranjas estão distribuídas. Então:* $x : 2 = (15 - x) : 3$, *donde* $x = 6$. R: *O cesto com* 20 *receberá mais* 6 *e o outro mais cesto* 9 *laranjas.*

Ponto N.º 2

4044 — Ache a expressão do desenvolvimento de

$$(1+x)^m + (1-x)^m$$

R: $(1+x)^m = 1 + m\,x + C_2^m\,x^2 + C_3^m\,x^3 + \cdots + m\,x^{m-1} + x^m$

$(1-x)^m = 1 - m\,x + C_2^m\,x^2 - C_3^m\,x^3 + \cdots \mp m\,x^{m-1} \pm x^m$

$$(1+x)^m + (1-x)^m =$$

$$= 2\left(1 + C_2^m\,x^2 + C_4^m\,x^4 + \cdots \begin{matrix} +x^m \\ +m\,x^{m-1} \end{matrix}\right) \begin{matrix} \rightarrow \textit{ se m for par} \\ \rightarrow \textit{ se m for ímpar.} \end{matrix}$$

Então $(1+x)^m + (1-x)^m = 2\sum_0^k C_{2k}^m\,x^{2k}$

$$\left(k = 0, 1, 2, \cdots \text{e}\ \frac{m}{2}\ \textit{sendo m par}\right)\ \text{e}$$

$$\left(k = 0, 1, 2, \cdots \text{e}\ \frac{m-1}{2}\ \textit{sendo m ímpar}\right).$$

4045 — Simplifique a fracção

$$\frac{2x^2 - 50}{x^2 - 11\,x + 30}$$

R: $\frac{2x^2 - 50}{x^2 - 11\,x + 30} = \frac{2\,(x+5)\,(x-5)}{(x-6)\,(x-3)} = \frac{2\,(x+5)}{(x-6)}$.

4046 — Sabe-se que a razão entre o número de arranjos de m objectos distintos n a n e o número de combinações desses m objectos n a n é 120, e que a razão entre o número de arranjos de $m-1$ desses objectos $n-1$ a $n-1$ e o número de combinações dos m objectos n a n é 2. Qual o número m de objectos?

R: $A_n^m : C_n^m = 120$; $A_n^m : (A_n^m / n!) = 120$, $n! = 120$ *e* $n = 5$. $A_{n-1}^{m-1} : C_n^m = 2$; $A_{n-1}^{m-1} : A_n^m / n! = 20$; $\{[(m-1)\cdots(m-n+1)]\cdot n!\} : [m(m-1)\cdots(m-n+1)] = 2$ *ou* $m = 60$.

4047 — Resolver a equação

$$\frac{m}{x} = \frac{x-1}{x-m}$$

e dizer para que valores de m as raízes são reais.

R: $\dfrac{m}{x} = \dfrac{x-1}{x-m}$; $x^2 - (1+m)\,x + m^2 = 0$.

Será $\Delta > 0$ $\Delta = (1+m)^2 - 4\,m^2 > 0$; $-3\,m^2 + 2\,m + 1\ 0 >$ *com as raízes* 1 *e* $-\dfrac{1}{3}$.

Será $-\dfrac{1}{3} < m < 1$.

4048 — O que entende por função inversa de uma função dada? Exemplifique.

4049 — Divida a importância de 200$00 por 3 pessoas de forma que a 1.ª receba mais 20$00 do que a 2.ª e esta menos 30$00 do que a 3.ª.

R: *Se a primeira recebe* x *a segunda recebe* $(x-20)$ *e* $(x+10)$ *a terceira.*

$$x + (x-20) + (x+10) = 200, \text{ donde } x = 70$$

A primeira recebe 70$00; a segunda 50$00 e a terceira 80$00.

Soluções dos n.os 4026 a 4049 de J. S. Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Milicianos — Prova prática — 13 de Dezembro de 1954.

4050 — Dada a função $f(x) = \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{1+x^2}$ resolva os seguintes problemas:

a) Desenvolva $f(x)$ em série e determine o seu intervalo de convergência.

b) Calcule $Pf(x)$.

R: a) *Como* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ integrando vem:

$f'(x) = \operatorname{arctg} x = K\pi + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$ e *integrando de novo, observando que* $f(o) = 0$:

$$f(x) = K\pi x + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \cdots .$$

A condição de convergência é $|x| < 1$

b) $Pf(x) = \dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\ x - \dfrac{1}{2}x\log(1+x^2) + C$.

4051 — Há valores racionais de λ para os quais o sistema:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= \lambda x \\ 2x + 4y + 2z &= \lambda y \\ x + 2y + 4z &= \lambda z \end{aligned}$$

tem soluções não nulas?

R: *Para o sistema homogéneo ter soluções não nulas* $\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 2 & 1 \\ 2 & (4-\lambda) & 2 \\ 1 & 2 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$ *o determinante deve ser nulo. Desenvolvendo o determinante e igualando a zero a expressão obtida obtém-se a equação* $(4-\lambda)^3 - 9(4-\lambda) + 8 = 0$ *que tem as raízes* $\lambda_1 = 1{,}62772$ $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 7{,}37228$. *Portanto o valor racional* $\lambda_2 = 3$ *é o único que satisfaz ao problema.*

4052 — Que superfície é representada por uma equação do tipo $f(x,z) = 0$? Qual será a expressão de $f(x,z) = 0$ se a superfície for de revolução? Deduza a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(a,b,c)$ e diga qual a posição que ele ocupa em relação aos eixos coordenados. Esse plano tem apenas um ponto de contacto com a superfície? Se ele for da forma $X = a$ a equação $f(x,z) = 0$ define alguma função $Z(x)$ na vinhança de $M(a,c)$ considerado no referencial $x0z$?

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência extraordinário — 1 de Abril de 1955.

4053 — Escreva a equação da hipérbole que passa pela origem e cujas assíntotas são as rectas $x = 1$ e $y = 1$. A hipérbole é equilátera? Porquê? Indique o valor da excentricidade, determine as coordenadas dos focos e as equações das directrizes.

Deduza a equação do diâmetro conjugado com a direcção m e conclua que $m + m' = 0$. (Utilize eixos coordenados rectângulares).

R: *Utilizando o sistema* $x'0'y'$ *onde os eixos são os assíntotas a equação é* $x'y' = k$ *e desfazendo a translacção é* $(x-1)(y-1)=1$ *ou* $xy = x+y$. *A hipérbole é equilátera porque as assíntotas são perpendiculares; a sua excentricidade é pois* $e = \sqrt{2}$. *Para determinar as coordenadas dos focos determine-se a intersecção de* $xy = x+y$ *com* $y = x$*: obtém-se os pontos* $O(0,0)$ *e* $A(2,2)$ *e* $\overline{0A} = 2a$ *ou* $a = \sqrt{2}$. *Como* $c = ae$, *vem* $c = 2$ *e por os focos estarem em* $y = x$ *virá* $F(1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2})$. *Como* $d = \frac{a}{e} = 1$ *vem* $y = -x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Considerando a corda $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ *onde* (x_0, y_0) *é o seu ponto médio virá* $(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) = x_0 + \alpha t + y_0 + \beta t$ *e, como o termo em* t *tem de ser nulo, virá* $x_0 m + y_0 - 1 - m = 0$ *onde* $m = \beta/\alpha$ *e a equação do diâmetro conjugado com* m *é* $mx + y - 1 - m = 0$ *cujo coeficiente angular é* $m' = -m$ *e daqui* $m + m' = 0$.

4054 — Conduza pelo ponto $P(1,1,1)$ uma recta que se apoie na recta $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 2 \end{cases}$ e seja paralela ao plano $x + y + z + 1 = 0$.

R: *A recta pedida será a intersecção do plano* $\pi \equiv 2x + y - 3z = 0$ *definido pelo ponto* $P(1,1,1)$ *e pela recta dada com o plano* $\pi' \equiv x + y + z - 3 = 0$ *conduzido por* $P(1,1,1)$ *paralelamente ao plano* $x + y + z + 1 = 0$.

4055 — *a*) Sejam u_n e v_n duas sucessões monótonas, a primeira crescente e a segunda decrescente, tais que $\lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = 0$. Mostre que é sempre $u_n \leqslant v_n$ e que um só número k satisfaz à condição $u_n \leqslant k \leqslant v_n$. Que é k em relação ao conjuntos u_n e v_n?

b) Quando se diz que a série S) é uniformemente convergente num conjunto X? Domonstre que a série $\sum a_n x^n$ é uniformemente convergente em $(0, a)$ quando convirja para $x = a$.

c) Prove que as séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\log n)^\beta}$ convergem se $\beta > 1$ e divergem se $\beta \leqslant 1$. O princípio geral que serviu de base à demonstração anterior pode também aplicar-se ao estabelecimento da convergência de $\sum \frac{1}{n^\beta}$ quando $\beta > 1$?

4056 — *a*) Defina função localmente limitada num conjunto X. Uma função contínua num conjunto fechado é localmente limitada nesse conjunto? Porquê?

b) Baseie-se no teorema de Cantor para concluir que se $f(x)$ é contínua no intervalo fechado (a, b) então este pode ser dividido num número finito de sub-intervalos em cada um dos quais a oscilação de $f(x)$ é menor do que um número positivo δ prèviamente escolhido.

4057 — *c*) Sendo $f(x)$ definida e crescente em (a, b) com um ponto de descontinuidade c interior a (a, b) índique o valor de $w(c)$.

Poder-se-á modificar a definição de $f(x)$ em $x = c$ por forma a torná-la contínua lateralmente nesse ponto? Porquê?

A função poderá tornar-se contínua em $x = c$?

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Frequência — Ordinário — 2 de Março de 1955.**

4058 — Considere a cónica de centro $P(1,1)$ onde $x = k + 1$ $(k > 0)$ é uma das directrizes e $F(2,1)$ o foco associado. Indique os valores de k para os quais a cónica é uma hipérbole e escreva as equações das assíntotas.

Para que valores de k a hipérbole é equilátera? Escreva neste caso a sua equação.

Mostre que o diâmetro conjugado da cónica (elipse ou hipérbole) com a direcção $k - 1$ é perpendícular à recta que passa por P e por $Q(2, k+1)$.

R: *Fazendo uma translacção de eixos tome-se a nova origem em* $P(1,1)$. *No novo sistema* $x'0y'$ *é* $F(1,0)$ *ou seja* $c = 1$ *e* $x = k + 1$ *é transformada em* $x' = k$.

Então as relações $\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} \\ d = \dfrac{a^2}{c} \end{cases}$ *dão imediatamente* $a^2 = k$ *e* $e = \frac{1}{\sqrt{k}}$. *Para que a cónica seja uma hipérbole é preciso que* $e > 1$ *ou* $0 < k < 1$. *As assíntotas sãa as rectas* $y - 1 = \pm \sqrt{\frac{1-k}{k}}(x-1)$. *A hipérbole é equilátera quando* $e = \sqrt{2}$ *ou* $k = \frac{1}{2}$ *e a sua equação será* $(x-1)^2 - (y-1)^2 = \frac{1}{2}$.

Considerando a hipérbole $\frac{x'^2}{k} - \frac{y'^2}{1-k} = 1$ *é* $m m' = \frac{1-k}{k}$ *e com* $m = k - 1$ *vem* $m' = -\frac{1}{k}$; *o coeficiente angular de* PQ *é* K *e por isso está verificada a perpendicularidade. Idêntico raciocínio se faz para a elipse*

4059 — Escreva a equação do plano π definido por $P(0, -1, 1)$ e $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$ Determine os cosenos directores de r e as equações da sua projecção sobre o plano $\pi' \equiv 2x + y - z + 1 = 0$. É π perpendicular a π'? Justifique.

Mostre que a recta perpendicular a r, conduzida no plano π' pelo seu traço é perpendicular à projecção de r sobre o mesmo plano.

R: *O feixe de planos que passa por* r *é* $(1+m)x-y+(1-m)z=0$ *e o que passa por* $P(0,-1,1)$ *é aquele em que* $m=2$ *ou seja* $\pi \equiv 3x-y-z=0$. *Determinados os parâmetros directores* $h=1, k=1, l=1$ *será* $\cos\alpha, \beta, \gamma = \dfrac{h, k, l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = \pm \dfrac{1, 2, 1}{\sqrt{6}}$.

Para determinar a projecção de r *sobre* π' *escreva-se o feixe de planos que passam por* $r: (1+m)x-y+(1-m)z=0$ *e escolha-se o que é perpendicular a* $\pi': x-y+z=0$. *A projecção será a recta* $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z+1=0. \end{cases}$ π *não é perpendicular a* π' *pois não se verifica a relação* $AA'+BB'+CC'=0$.

O traço de r *em* π' *determina-se resolvendo o sistema:*

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-z=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases} \quad \textit{que tem por solução} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3} \\ z=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

O feixe de planos que passam por π' *é* $A\left(x+\frac{1}{3}\right)+B\left(y+\frac{2}{3}\right)+C\left(z+\frac{1}{3}\right)=0$ *e o que é perpendicular a* r *é* $x+2y+z+2=0$. *A recta perpendicular a* r *conduzida em* π' *vem a ser então* $\begin{cases} x+2y+z+2=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ *cujos parâmetros directores são* $h_1=-9, k_1=12$ *e* $l_1=-12$. *Os parâmetros directores da projecção são* $h_2=0, k_2=3$ *e* $l_2=3$ *e como* $h_1h_2+k_1k_2+l_1l_2=0$ *as rectas são perpendiculares.*

4060 — *a*) Supondo limitado o conjunto dos distintos valores u_n, prove que o conjunto dos sublimites de u_n é fechado e o seu limite superior é $\overline{\lim}\, u_n$.

b) Enuncie a condição necessária e suficiente para a convergência de u_n e mostre que uma sucessão monótona limitada verifica essa condição.

c) Demonstre que sendo a_n uma sucessão monótona decrescente de números positivos e se A_n é limitada então $\Sigma A_n(a_n-a_{n+1})$ é absolutamente convergente.

4061 — Seja $f(x)$ definida e contínua no interior de (a, b). Supondo que se tem $|f(x')-f(x'')| \leqslant K|x'-x''|$, mostre que é possível definir a função em a e b por forma que fique contínua nesses pontos. Em que condições o primitivo campo de existência é transformado por $f(x)$ num conjunto fechado? A função verificava a desigualdade condicionada de CANTOR antes do prolongamento do campo de existência? Porquê?

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência (ordinário) — 30 de Junho de 1955.

4062 — *a*) Calcule a primitiva de $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}^2 x + \dfrac{3x+1}{x(x^2-1)} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

b) Exponha a utilização da fórmula de TAYLOR no estudo dos máximos e mínimos de $f(x)$. Aplique esses conhecimentos para averiguar se $x=0$ é extremante de $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$

R: a) $Pf(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}^2 x - \dfrac{e^x}{5}(\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x) + \log \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)} + \dfrac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C$

b) *Como* $f^{(IV)}(x) = e^x$ *é a primeira derivada que não se anula para* $x=0$ *e* $f^{(IV)}(0) = 1 > 0$, *estamos em presença dum mínimo.*

4063 — *a*) Enuncie alguma proposição que garanta a diferenciabilidade de $f(x, y)$ em $P(a, b)$ e demonstre a sua suficiência.

b) Dadas as funções $z=f(x, y)$, $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$ a que condições devem satisfazer para que exista $\left(\dfrac{dF}{dt}\right)_{t_0}$ onde $F(t) = f(\varphi, \psi)$?

c) Enuncie o teorema de existência das funções implícitas e mostre que $f(x, y) = xy+x+y+1=0$ define na vizinhança de $P(1, -1)$ uma função $y(x)$. Nesse ponto $y(x)$ será crescente? Porquê?

4064 — *a*) Deduza as fórmulas de GIRARD. Pela análise da equação $z^n - a = 0$ (a complexo) diga quais são os valores da soma e do produto das raízes índice n do complexo a.

b) Em que consiste a transposição da matriz A? Designando por A^* a transposta de A, prove que $(A+B)^* = A^* + B^*$. Sendo A do tipo $(n \times n)$ que relação existe entre $|A|$ e $|A^*|$? Justifique.

c) Sendo A_i^k o complemento algébrico do elemento a_i^k, prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix}$$

estão relacionadas do seguinte modo:

$$A\hat{A} = \hat{A}A = |A| \cdot I$$

d) Quando é que as colunas duma matriz são linearmente dependentes? Prove que a matriz quadrada de colunas linearmente dependentes é singular.

e) Utilize a teoria das matrizes para estudar o sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=0\\ x-y+z&=1\\ y-z+u&=1\\ x+u&=0 \end{aligned}$$

R: e) *O sistema é indeterminado* (*grau de indeterminação* 1).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **2.° exame de frequência (extraordinário) — 6 de Julho de 1955.**

4065 — *a*) Calcule a primitiva de $f(x)=x^2\cdot\log x+$ $+\operatorname{sen} 2x\cdot\sec^4 x+\dfrac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}$.

b) Enuncie e demonstre alguma proposição que garanta o desenvolvimento de $f(x)$ em série de Taylor para certo intervalo $(a, a\pm k)$.

Desenvolva em sèrie de Mac-Laurin a função $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$ e indique o seu intervalo de convergência.

R: a) $\mathrm{P}\,f(x)=\dfrac{x^3}{3}\left(\log x-\dfrac{1}{3}\right)+\sec^2 x-$

$$-\frac{1}{2\,(x^2+2x+1)}+C.$$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{x-2}\right)=$

$$=\frac{1}{3}\left[(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x}{2}\right)^n-\cdots\right)\right]=-$$

$$-\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{4}-\frac{7x^3}{8}+\cdots+\left[(-1)^n x^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]+\cdots\ |x|<1$$

4066 — *a*) Mostre que $f(x,y)$ é contínua em $P(a,b)$, onde tem derivadas finitas, desde que em torno deste ponto uma das derivadas se conserve limitada.

b) Sendo $\varphi(u)$ e $\psi(u)$ diferenciáveis em u_0 e $f(x,y)$ diferenciável em $P[a=\varphi(u_0), b=\psi(u_0)]$, mostre que $f(\varphi,\psi)$ é diferenciável em u_0.

c) Deduza a equação do plano tangente à superfície $z=f(x,y)$ no ponto $P(x,y,z)$ e aplique o resultado para calcular a equação do plano tangente à superfície $z=x^2+y^2+xy-1$ no ponto $P(0,1,0)$.

d) Discuta e classifique o lugar geométrico de equação,

$$x^2+4xy+4y^2+2kx+4ky+4=0 \qquad (k\neq 0)$$

R: c) $\qquad Z=X+2(Y-1)$

d) $\Delta=B^2-AC=0$ *e, como* $\dfrac{B}{A}=\dfrac{E}{D}$, *a equação pode escrever-se na forma* $u^2+2ku+4=0$, *com* $u=x+2y$, *e como o binómio discriminante daquela equação é* k^2-4 *a equação dada representa duas rectas paralelas para* $k<-2$ *ou* $k>2$ *e nada representa se* $-2<k<0$ *e* $0<k<2$.

4067 — *a*) Defina produto de matrizes e mostre que a multiplicação de matrizes é distributiva.

b) Se $A=|\,a_i^k\,|$ é uma matríz regular do tipo $(n\times n)$, $\alpha_i^k=\dfrac{A_i^k}{|A|}$ e $A^{-1}=|\,\alpha_i^k\,|^*$, prove que $A\,A^{-1}=A^{-1}A=I$.

c) Utilize a teoria das matrizes para mostrar que os planos

$$\begin{aligned} x+3y+z-2&=0\\ 2x+4y+3z+1&=0\\ x+y+2z-1&=0 \end{aligned}$$

não tem qualquer ponto comum.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Epoca de Julho — 16 de Julho de 1955.**

4068 — Faça o estudo de $f(x)=\log(x^2+\alpha x-2\alpha^2)$ $(\alpha>0)$, calcule a sua primitiva e apresente o desenvolvimento, desta em série de Mac-Laurim caso seja possível.

R: *a*) *Dominio* $(-\infty,-2\alpha)\ (\alpha,+\infty)$. *Pontos de descontinuidade*: $x=-2\alpha$, $x=2$ e $x=\infty$

b) $f'(x)=\dfrac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x-2\alpha^2}$ *e daí se conclui que* $f(x)$ *cresce em* $(\alpha,+\infty)$ *e decresce em* $(-\infty,-2\alpha)$; *não tem extremos.*

c) $f''(x)=-\dfrac{2x^2+2\alpha x+5\alpha^2}{x^2+\alpha x-2\alpha^2}<0$ *e portanto a concavidade está sempre voltada para baixo.*

d) *Assíntotas*: $X=-2\alpha$ e $X=\alpha$

$$\mathrm{P}f(x)=x\log(x^2+\alpha x-2\alpha^2)-2x+\alpha\log\frac{(x+2\alpha)^2}{x-\alpha}+C$$

Não é possível efectuar o desenvolvimento em série de $\mathrm{P}f(x)$.

4069 — Dado o polinómio $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+$ $+p_2 z^{n-2}+\cdots+p_n$, que relação deve existir entre os coeficientes p_0, p_1, e p_2 e o grau de $f(z)$ para que se anulem simultâneamente o segundo e terceiro termos do transformado $f(z+h)$?

R: *Para que se anule o segundo termo terá de ser* $h=-\frac{p_1}{np_0}$ *e, para que se anule o terceiro, é preciso que* $f^{n-2}(h)=0$ *ou seja*

$$(2) \qquad \binom{n}{2} p_0 h^2+(n-1)p_1 h+p_2=0.$$

Eliminando h *entre* (1) (2) *obtem-se a condição*

$$\frac{n-1}{2}p_1^2-(n-1)p_1^2+n\,p_0 p_2=0$$

4070 — Sejam $A^1, A^2, \cdots$ as sucessivas colunas da matriz $A=|a_i^k|$ (n×n). Junte βA^s a A^t e αA^t a A^s deixando sem alterações as restantes colunas.

a) Utilise o teorema de Jacobi para achar o determinante da nova matriz $B=|b_i^k|$ que assim se obtem. Sendo A regular e $\alpha\cdot\beta\neq 1$, que relação existe entre as soluções dos sistemas $a_i^h x_h=c_i$ e $b_i^h y_h=c_i$ $(i,h=1,\cdots n)$?

b) Substitua em A a coluna A^k pela composição $d_1^k A^1+d_2^k A^2+\cdots d_n^k A^n$. Calcule o elemento genérico da nova matriz bem como o seu determinante.

R: a) $|B|=|A|-\alpha\beta|A|$

$$x_l=y_l \textit{ para } l\neq s,t \quad y_s=\frac{x_s-\beta x_t}{1-\alpha\beta} \textit{ e } y_t=\frac{x_t-\alpha x}{1-\alpha\beta}$$

b) *O elemento genérico é* $l_r^s=a_r^\alpha\left(\varepsilon_\alpha^s+d_\alpha^k\varepsilon_k^s-\varepsilon_\alpha^k\varepsilon_k^s\right)$. *O determinante da nova matriz calcula-se fàcilmente aplicando o teorema de* Laplace *à coluna* k. *O seu valor é* $d_k^k|A|$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Epoca de Outubro — 13 de Outubro de 1955.**

4071 — Sendo

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & (x<-1)\\ x^2 & (-1\leqslant x<2)\\ \dfrac{1}{x} & (2\leqslant x)\end{cases}$$

a) Indique, caso existam, os pontos de descontinuidade próprios. A função é contínua no infinito?

b) Calcule $f'_d(-1)$ *e* $f'_e(-1)$. Existe $f'(-1)$?

c) Determine intervalos de monotonia, extremos, sentido da concavidade e pontos de inflexão de $f(x)$.

d) Algum dos teoremas fundamentais é aplicável em intervalo que contenha $x=-1$ como ponto interior? Porquê?

R: a) *A função é descontínua em* x=2 *e no infinito.*

b) $f'_d(-1)=-2$ *e* $f'_e(-1)=-\frac{1}{4}$ *Como* $f'_d(-1)\neq f'_e(-1)$ *não existe* $f'(-1)$.

c) *A função é decrescente de* $-\infty$ *a* 0 *onde atinge um mínimo, crescente de* 0 *a* 2 *e decrescente de* 2 *a* $+\infty$; *tem a concavidade voltada para baixo entre* $-\infty$ — 1, *voltada para cima entre* -1 *e* $+\infty$. *Ponto de inflexão em* $x=-1$.

d) *Não, porque* f(x) *não admite derivada nesse ponto.*

4072 — *a*) Que superfície é representada por uma equação do tipo $f(y,z)=0$? Intersectando essa superfície pelo plano $Ax+By+Cz+D=0$, como determina as equações das projecções da secção assim obtida sobre os planos coordenados?

b) Que representa o sistema $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b_2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ z=k\end{cases}$ para os diferentes valores de k? Se, em certas condições, o sistema representar curva no espaço determine a equação da sua tangente em ponto genérico.

R: a) *É uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo dos* xx. *As equações das projecções são*: *sobre* y0z $\begin{cases}f(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$, *sobre* x0y $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$, *onde* $\varphi(x,y)$ *resultou da eliminação de* z *entre as equações* $\begin{cases}f(y,z)=0\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$ *e sobre* x0z $\begin{cases}\psi(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$ *onde* $\psi(x,z)$ *resultou da eliminação de* y *entre as equações* $\begin{cases}f(y,z)=0\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

b) *Para* $k>b$ *e* $k<-b$ *o sistema nada representa; para* $k=\pm b$ *representa o ponto* $P(0,0,\pm b)$ *e para* $-b<k<b$ *representa um elipse assente no plano* $z=k$. *Para* $-b<k<b$ *a equação da tangente em* $P(x,y,k)$ *é* $\begin{cases}\dfrac{2x}{a^2}(X-x)+\dfrac{2y}{b^2}(Y-y)+\dfrac{2k}{b^2}(Z-k)=0\\ Z=k\end{cases}$

4073 — Considere o sistema $a_i^h x_h=b_i$ $(i,h=1,2,\cdots n)$. Deduza a sua solução na hipótese $|A|=|a_i^k|\neq 0$. Faça $x_h=b_h^k y_k$ $(k=1,2,\cdots n)$ de modo a obter o sistema $p_i^k y_k=b_i$. Qual é a expressão de p_i^k? Considere a hipótese de $|B|=|b_i^k|\neq 0$, exprima os yy em função dos xx e deduza daí a expressão dos P_i^k em função dos A_i^j e B_i^k.

Enunciados e solução dos n.os 4050 a 4073 de F. de Jesus.

ANÁLISE INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — Exame final — Época de Outubro — 14 de Outubro de 1954.

4074 — Considere a equação $f(x,y,z)=2xz^2+x^2y^2-2y-3z=0$ e prove que ela define uma função $z=\varphi(x,y)$ na vizinhança de $P(-1,1,-1)$. Escreva até aos termos do 2.º grau, inclusivé, o desenvolvimento tayloriano da função $z=\varphi(x,y)$ segundo as potências de $(x+1)$ e $(y-1)$.

A função $z=\varphi(x,y)$ terá um extremo no ponto $(-1,1)$? Justifique a resposta.

R: *Como* $f(-1,1,-1)=0$ *e* $f(x,y,z)$ *é contínua como função de* (x,y) *e* $f'_z(-1,1,-1)\neq 0$, *existe uma vizinhança do ponto* $(-1,1)$ *dentro da qual existe uma função* $z=\varphi(x,y)$ *que substituída na equação dada a transforma numa identidade.*

$$z'_x(-1,1)=-\frac{f'_x(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=0,$$

$$z'_y(-1,1)=-\frac{f'_y(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=0,$$

$$z''_{x^2}(-1,1)=-\frac{f''_{x^2}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=-2,$$

$$z''_{xy}(-1,1)=-\frac{f''_{xy}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=4 \quad e$$

$$z''_{y^2}(-1,1)=-\frac{f''_{y^2}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=-2$$

e portanto o desenvolvimento tayloriano de $z(x,y)$ *é o seguinte:*

$$z(x,y)=z(-1,1)+(x+1)\,z'_x(-1,1)+(y-1)\,z'_y(-1,1)+(x+1)^2 z''_{x^2}(-1,1)+2(x+1)(y-1)\,z''_{xy}(-1,1)+(y-1)^2 z''_{y^2}(-1,1)+R_3=-1-2(x+1)^2+8(x+1)(y-1)-2(y-1)^2+R_3$$

Como o ponto $(-1,1)$ *faz* $z'_x(-1,1)=0$ *e* $z'_y(-1,1)=0$ *teremos de analisar o sinal de* s^2-rt *para ver se existe um extremo. Ora* $s^2-rt=4^2-(-2)(-2)>0$ *e portanto não há extremo.*

4075 — *a*) Prove que $\iint_A x^{2m-1}y^{2n-1}\,dx\,dy=\frac{\beta(m,n)}{4(m+n)}r^{2(m+n)}$, $m>0$, $n>0$ onde A é o quarto de círculo $x^2+y^2\leqslant r^2$ situado no 1.º quadrante.

b) Sabe que em certas condições $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ com $a<c<b$. Enuncie e demonstre alguma proposição análoga para $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ sendo A o rectângulo $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$.

R: *a*) *Fazendo a mudança para coordenadas polares vem*

$$\iint_A x^{2m-1}y^{2n-1}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^r \rho^{2(m+n)-1}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\cdot\operatorname{sen}^{2n-1}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\beta(m,n)\int_0^r\rho^{2(m+n)-1}\,d\rho=\frac{\beta(m,n)}{4(m+n)}r^{2(m+n)}$$

b) *Sabemos que* $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ *quando* $f(x)$ *é contínua em* (a,b). *Vamos então demonstrar a seguinte proposição: «Se* $f(x,y)$ *é contínua em relação ao par de variáveis* (x,y) *no rectângulo* $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ *então:*

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=(b-a)(d-c)\,f(\eta,\tau)$$

onde (η,τ) *é um ponto do rectângulo».*

Com efeito, sendo $f(x,y)$ *contínua em relação ao par de variáveis* (x,y) *também o é em relação a* x *e a* y *separadamente, e então* $\int_c^d f(x,y)\,dy=(d-c)\,f(x,\tau)$, *com* $c<\tau<d$, *e* $\int_a^b (d-c)\,f(x,\tau)\,dx=(d-c)(b-a)\,f(\eta,\tau)$ *com* $a<\eta<b$ *e o teorema está provado.*

4076 — Achar uma curva tal que se *a* normal num ponto M corta o eixo $0x$ num ponto P, o centro de curvatura C é simétrico de P em relação a M.

R: *A normal é* $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$ *ou seja* $X-x+y'(Y-y)=0$ *e as coordenadas de* P *são* $(x+yy',0)$. *Como* $\overline{CM}=\overline{MP}$ *conclui-se fàcilmente que* $yy''=1+y'^2$ *e esta equação pode escrever-se do seguinte modo* $yy'\frac{dy'}{dy}=1+y'^2$

$$\frac{dy}{y}=\frac{y'\,dy}{1+y'^2};\ \log\frac{y}{C_1}=\log\sqrt{1+y'^2};\ y'=\frac{1}{C_1}\sqrt{y^2-C_1^2}$$

$$x=C_1\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}+C_2;\ x-C_2=C_1\operatorname{arcch}\frac{y}{C_1}$$

e finalmente $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$ (catenária).

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 1.º Exame de Frequência — 7 de Janeiro de 1955.

4077 — Demonstre o segundo teorema da média ou teorema de Bonnet sobre o integral de Riemann duma função real de variável real

4078 — Defina integral curvilíneo, enuncie condições suficientes de existência e reduza o cálculo desses integrais ao cálculo dum integral de Riemann

4079 — Responda a duas das seguintes questões:

Se $F(x)$ e $f(x)$ são funções de variações totais limitadas no intervalo (a, b), prove que a função $\varphi(x) = F(x) \cdot f(x)$ tem variação total limitada naquele intervalo; indique um limite excedente dessa variação no caso de

$$F(x) = \log x \qquad f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad a = 2 \qquad b = 4$$

R: *Como:*

$$\sum_i |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| = \sum_i |F(x_{i+1}) f(x_{i+1}) - F(x_i) f(x_i)| \leq$$
$$\leq \sum_i |F(x_{i+1}) - F(x_i)| \cdot |f(x_{i+1})| + \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \cdot |F(x_i)|$$

e, com V_F *e* V_f *a representarem as variações totais de* F *e* f; L_F *e* L_f *a representarem limites excedentes dos conjuntos de valores de* F *e* f; *teremos*

$$V_{F \cdot f} \leq V_F \cdot L_f + V_f \cdot L_F$$

Ora, as funções $\log x$ *e* $\frac{1}{x^2}$ *são monótonas limitadas, a primeira crescente com* $L_F = \log 4 = 2 \log 2$, *a segunda com* $L_f = \frac{1}{2^2}$, *por ser descrescente limitada.*

A variação total de $\frac{1}{x^2} \log x$, *no intervalo* $(2, 4)$, *não pode exceder*

$$(\log 4 - \log 2) \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) 2 \cdot \log 2 = \frac{5}{8} \log 2$$

4080 — Defina soma generalizada (de Cesàro) e prove que toda a série convergente tem soma generalizada. Calcule a soma generalizada da série:

$$3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$$

Dada uma série trigonométrica convergente de soma $f(x)$, exprima por meio de $f(x)$ as somas de Fourier e, em seguida, as somas de Fejer.

R: *Tem-se* $S_{2K} = 3 \quad S_{2K+1} = 0$ *e com* $\sigma_{2K} = \frac{3}{2} \frac{K-1}{K}$

$$\sigma_{2K+1} = \frac{3}{2} \frac{K}{K + \frac{1}{2}}$$

A soma generalizada é $\sigma = \frac{3}{2}$

4081 — $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ são funções definidas no intervalo fechado (a, b) e, ambas, quaisquer que sejam $a < t < t' < b$ assumem valores iguais nos extremos e desiguais em t e t'; além disso possuem derivadas limitadas.

Mostre que a curva com aquelas equações é rectificável e, demonstre que limita uma região plana quadrável.

R: *Com* t *no intervalo* (a, b) *as funções* φ *e* ψ, *por possuirem derivadas definidas, finitas, pois são limitadas, são funções continuas. Temos pois uma curva de* Jordan, *fechada em virtude das outras hipóteses do inicio do enunciado.*

Funções com derivadas limitadas são de variação limitada, pois

$$\sum_i |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sum_i |t_{i+1} - t_i| \cdot |\varphi'(t_i')| \leq K \cdot |a - b|$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — Prova Prática — 11 de Janeiro de 1955.

4082 — Desenvolver em série de potências de x a solução da equação $\alpha y = (1+x) y'$; determinar intervalo de convergência e soma.

R: *Ponha-se* $y = \sum_0^\infty a_n x^n$; $y' = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ *e tem-se*

$$\alpha \sum_0^\infty a_n x^n = (1+x) \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \quad \textit{donde, para } n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\alpha a_0 = a_1$$
$$\alpha a_1 = a_1 + 2 a_2 \qquad ou \qquad a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_0$$
$$\alpha a_2 = 2 a_2 + 3 a_3 \qquad ou \qquad a_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2 \cdot 3} a_0$$

e por ser $a_n = \frac{(\alpha - n + 1)}{n} a_{n-1}$ *tem-se* $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$

e portanto $y = a_0 \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n = a_0 (1 + x)^\alpha$ *válido o desenvolvimento para* $|x| < 1$.

4083 — Determinar as equações dos planos tangentes à superfície $x^2 + y^2 + z^2 - 9z + 5 = 0$ paralelos à recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$.

R: *A superfície é uma esfera* $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$; *os planos tangentes paralelos àquela recta são em número infinito. Os pontos de contacto estão num círculo máximo cujas equações são*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2(z-3) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4 \end{cases}$$

Este círculo máximo é a secção plana feita na esfera por um plano que passa pelo centro $(0,0,3)$ *e perpendicular à recta.*

4084 — Indicar como se racionalizam os integrais

$$\int\sqrt{3x-1-x^2}\,dx\,;\quad \int\frac{dx}{c\,h^4(x-2)}\,;\quad \int(x^2-\log x)^2\,dx\,;$$

$$\int\left(1+x^2\sqrt[3]{2+x}\right)dx$$

e calcular efectívamente dois deles.

R: *O primeiro integral pode transformar-se em:*

$$\int_a^x\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]}\cdot dx$$

e só é real quando a *e* x *estiverem no intervalo* $\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. *Nessas condições a transformação* $x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sen}\varphi$ *conduz a* $\int\frac{5}{4}\cos^2\varphi\,d\varphi=$ $=\int\frac{5}{8}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi$. *O segundo integral, por ser* $\frac{1}{c\,h^4(x-2)}=s\,c\,h^4(x-2)=[1-t\,h^2(x-2)]^2$ *transforma-se, com* $z=t\,h\,(x-2)$, *em*

$$\int(z^4-2z^2+1)\,\frac{dz}{1-z^2}\cdot$$

O terceiro integral dá $\frac{x^5}{5}+\int\log^2x\,dx-2\int x^2\log x\,dx$ *onde se tem* $\int x^2\log x\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx$ *e* $\int\log^2x\,dx=x\log^2x-2(x\log x-x)+C$. *Finalmente, pondo* $2+x=t^3$, *o terceiro integral transforma-se em:*

$$\int 3\,[1+(t^3-2)^2\,t]\,t^2\,dt\,.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 1.º exame de frequência (extraordinário) — 1 de Março de 1955.

4085 — Demonstre que as variações duma função absolutamente contínua, são absolutamente contínuas.

4086 — Diga em que consiste o problema de interpolação de Hermite e apresente a respectiva interpoladora.

4087 — Responda a duas das seguintes questões: $f(x)$ é uma função limitada pròpriamente crescente no intervalo (a,b) com uma únicades continuidade no ponto interior c: prove que, se $f(x)\leqslant\alpha<0$ antes de c e $f(x)\geqslant\beta>0$ depois de c, o integral $\int_a^x f(t)\,dt$ tem um só mínimo interior ao intervalo.

R: *A derivada* $F'(x)$ *de* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *é igual a* $f(x)$ *sempre que em* x *a função* f *for contínua. Logo,* $F(x)$ *é decrescente no intervalo fechado* $(a, c-h)$ *pois aí* $F'(x)=f(x)\leqslant\alpha<0$; $F(x)$ *é crescente no intervalo fechado* $(c+h,b)$ *pois aí* $F'(x)=f(x)\geqslant\beta>0$. *Isto por menor que seja* $|h|$.

A função $F(x)$ *é contínua em* c*; pode se afirmar, com esta continuidade em* c, *que a função tem mínimo nesse ponto; ele é visìvelmente único extremo interior ao intervalo. O valor do mínimo é dado pelo integral impróprio* $\int_a^c f(t)\,dt=\lim\limits_{h=0}\int_a^{c-h}f(t)\,dt$.

4088 — $f(x)$ e $g(x)$ são integráveis em (a,b) e os limites de $g(x)$ são ambos do mesmo sinal; demonstre que $\frac{f(x)}{g(x)}$ é integrável.

R: *Tem-se* $L_i\geqslant g(x_i)\geqslant l_i\geqslant 0$ *ou* $l_i\leqslant g(x_i)\leqslant L_i<0$ *mas em todo o caso por ser integrável:*

$$\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0}\sum(L_i-l_i)(x_{i+1}-x_i)=0\,.$$

Tem-se sempre em qualquer dos casos $\frac{1}{L_i}\leqslant\frac{1}{g(x_i)}\leqslant\frac{1}{l_i}$; $\left|\frac{1}{l_i}-\frac{1}{L_i}\right|=\frac{|L_i-l_i|}{|l_i\,L_i|}\leqslant\frac{|L_i-l_i|}{\alpha^2}$ *onde* α *é o menor dos valores absolutos dos números* l *e* L [*supostos não nulos em* (a, b)].

Resulta daqui

$$\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0}\sum\left|\frac{1}{l_i}-\frac{1}{L_i}\right|(x_{i+1}-x_i)\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\cdot$$
$$\cdot\lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0}\sum|L_i-l_i|\,(x_{i+1}-x_i)=0$$

Demonstrou-se assim que $\frac{1}{g(x)}$ *é integravel.*

4089 — Deduza a derivada de $F(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$ em que a e b são dependentes do parâmetro, depois de efectuar a mudança de variáveis $x=a+(b-a)\,u$ que leva a limites de integração constantes.

R: *Fazendo a mudança de variáveis* $x=\varphi(u,\lambda)=$ $=a+(b-a)\,u$, *vem* $F(\lambda)=\int_0^1 f[\varphi(u,\lambda),\lambda]\cdot(b-a)\,du$.

Pela regra de derivação sob o sinal de integral vem:

$$F'(\lambda)=\int_0^1\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(b-a)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(b-a)+\right.$$
$$\left.+f[\varphi,\lambda]\frac{d(b-a)}{d\lambda}\right\}du\,.$$

Mas, como $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{da}{d\lambda}+\frac{d(b-a)}{d\lambda}\cdot u$ *vêm quatro integrais para calcular* $F'(\lambda)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{da}{d\lambda}(b-a)\,du+$

$$+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{d(b-a)}{d\lambda}u(b-a)\,du+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\lambda}(b-a)\,du+$$
$$+\int_0^1 f(\varphi,\lambda)\frac{d(b-a)}{d\lambda}du.$$

Tiremos dos integrais tudo o que não contém u, *nem directa nem indirectamente* $F'(\lambda)=\frac{da}{d\lambda}(b-a)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}du+$

$$+\frac{d(b-a)}{d\lambda}(b-a)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\varphi}u\,du+(b-a)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\lambda}du+$$
$$+\frac{d(b-a)}{d\lambda}\int_0^1 f[\varphi,\lambda)\,du$$

Desfaça-se a mudança de variáveis nos diferentes integrais

$$F'(\lambda)=\frac{da}{d\lambda}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{d(b-a)}{d\lambda}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)dx+$$
$$+\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}dx+\frac{1}{b-a}\frac{d(b-a)}{d\lambda}\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$$

O primeiro integral dá:

$$\frac{da}{d\lambda}[f(b,\lambda)-f(a\lambda)].$$

Intregando por partes, tem-se

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x-a)\,dx=[f(x,\lambda)(x-a)]_a^b-\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$$

Atendendo a estes resultados e feitas as reduções, obtém-se:

$$F'(\lambda)=f(b,\lambda)\frac{db}{d\lambda}-f(a,\lambda)\frac{da}{d\lambda}+\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\lambda}dx.$$

Enunciados e soluções dos n.os 4074 a 4089 de J. R. Albuquerque.

ESCOLAS ESTRANGEIRAS

U. R. E. E. P. — Geometria Analítica e Vectorial — **Exame final — 2 de Janeiro de 1954.**

4090 — Achar a envoltória da altura BD de um triângulo ABC, tendo fixo o vértice A e o lado BC, de comprimento constante, deslisando sobre uma recta fixa.

4091 — Sendo $\vec a$ e $\vec b$ vectores perpendiculares mostrar a existéncia de uma infinidede de vectores $\vec v$ tais que $\vec v\wedge\vec a=\vec b$ e exprimi-los em função dos dados e de um escalar variável. Dar uma intrepretação geométrica à questão, admitindo variáveis as imagens de $\vec a$, $\vec b$ e $\vec v$.

4092 — Reconhecer se a superfície de equação $9x^2+4y^2+12xy+8x+12y-13y+35=0$ é cilindrica e, em caso afirmativo, caracterisá-la.

U. R. E. E. P. — Geometria Analítica — **2.ª Prova final — 23 de Novembro de 1954.**

4093 — Uma superfície é representada pela equação

$$5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+4z=0$$

que pode ser simplificada por uma rotação dos eixos de acordo com o seguinte quadro de cossenos directores

	x	y	z
X	2/3	2/3	1/3
Y	1/3	− 2/3	2/3
Z	2/3	− 1/3	− 2/3

Caracterizar a superfície depois de reduzida a sua equação e procurar uma representação da mesma em coordenadas cilindricas.

4094 — Mostrar analiticamente que, num tetraedro qualquer, as rectas que unem os meios das arestas opostas passam num ponto. Achar as coordenadas desse ponto.

Enunciados dos n.os 4090 a 4094 de M. Zaluar.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

105 — R. Baldus — F. Löbell — **Nichteuklidische Geometrie** — 3.ª edição corrigida — «Sammlung Göschen» — Walter de Gruyter & Co. 1953 — Berlim.

O presente livro abre com uma exposição cronológica da evolução da geometria, desde Euclides e os seus *Elementos* até os trabalhos de Gauss, Lobatschewsky e Bolyai.

A «Geometria Absoluta», no 2.º capítulo, assenta nos postulados de Hilbert; aí se estudam os axiomas de ordenação, dimensão, das congruências, as consequências destes axiomas, alguns teoremas sobre a circunferência, os axiomas da divisibilidade dos segmentos, de ARQUIMEDES e da continuidade. Consegue-se assim obter o corpo dos números reais e a partir dele construir uma base cartesiana do espaço.

Todos estes resultados são igualmente válidos para as geometrias euclideana, hiperbólica e elíptica.

No 3.º capítulo estuda-se a geometria euclideana e no 4.º a axiomática da geometria hiperbólica no circulo unidade.

O 5.º capítulo, que compreende cerca de metade do livro, estuda a geometria hiperbólica como disciplina independente—noções de ortogonalidade, paralelismo de rectas, curva de distâncias, círculos, medidas de ângulos, funções hiperbólicas, trigonometria, polígonos regulares, etc..

O cap. 6 ainda se refere ràpidamente à geometria elíptica.

Nesta pequena obra o Autor faz um estudo completo da geometria hiperbólica plana que interesa vivamente à formação do nosso professorado secundário, na sua generalidade totalmente afastado dos problemas fundamentais das geometrias não euclideanas.

J. G. T.

106 — A. A. FRAENKEL — **Integers and Theory of Numbers** — «The Scripta Mathematica Studies»— Scripta Mathematica — 1955 — New York.

O professor FRAENKEL dá-nos, num livro de óptima apresentação, a tradução do primeiro volume da sua obra em hebraico — Mavo Le Mathematika — (Introdução à Matemática) melhorada em várias modificações e adições. Anuncia ainda a publicação para breve de outros dois volumes: um dedicado aos conceitos fundamentais da álgebra (grupos, aneis e corpos) e ao papel de tais conceitos na extensão da noção de número aos campos real, complexo e hipercomplexo; o segundo à teoria dos conjuntos, particularmente números cardinais e ordinais transfinitos.

O presente volume trata dos seguintes questões:

Números naturais como cardinais: notação, conceito de número cardinal e ordenação.

Números naturais como ordinais: axiomas de PEANO, independência dos axiomas, indução matemática, adição, multiplicação, relação entre ordinais e cardinais

Teoria dos números: números primos e sua distribuição, partição do circulo, teoremas de FERMAT, conceito de congruência, números perfeitos e amigáveis, números algébricos e ideais.

Números racionais: fracções positivas, inteiros negativos, o campo dos racionais.

De acordo com os actuais programas de aritmética racional do nosso ensino secundário, o presente livro é um óptimo elemento informativo e didático, à disposição do nosso professorado.

J. G. T.

107 — P. DUBREIL — **Algèbre.** Tome I. — 2.ª edição revista e aumentada — «Cahiers Scientifiques», Fasc. XX — Gauthier-Villars. Paris

A Álgebra de Dubreil era até há pouco, na literatura francesa, uma obra fundamental sobre as modernas teorias algébricas.

Pode dizer-se, porém, que esta nova edição constitue um livro inteiramente novo.

Se, por um lado, o nível científico da obra melhorou bastante, nela permanece o mesmo espírito de clareza e precisão que a caracterizava inicialmente.

As adições incluídas ultrapassam 150 páginas; muitas passagens foram inteiramente refeitas. Estas modificações referem-se à teoria dos conjuntos (aplicações multiformes, conjuntos ordenados, conjuntos finitos e números naturais, teorema de Zorn), às estruturas algébricas ordenadas, à teoria dos semi-grupos (equivalências principais, grupos ou pseudo-grupos homomorfos), à teoria dos aneis e ideais (relações com a teoria dos semi-grupos, teorema de KRULL sobre a factorização, decomposição noetheriana com aplicação ao teorema de NÖETHER sobre a intersecção de duas curvas algébricas planas). A exposição assenta em ideias gerais básicas, como a utilização sistemática da operação de fecho, das equivalências regulares, etc.

As demonstrações são apresentadas com todos os pormenores; os exemplos e exercícios permitem ao leitor tirar o maior proveito do estudo.

Se bem que facilite a iniciação no importante ramo das matemáticas modernas, que é a Álgebra Abstrata, este livro oferece aos especialistas a exposição de resultados recentes e pontos de vista novos.

Destina-se pois a alunos e professores e é de desejar que faça sentir a sua influência nos estudiosos do nosso país.

J. G. T.

Errata — O número 60-61 saíu por lapso com o preço de 17$50 em vez de 35$00

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — GAUTHIER VILLARS, Paris

Cours de la Faculté des Sciences de Paris.

H. Poincaré — *Électricité et optique.*

Cours de l'École Polytechnique.

G. Julia — *Cours de Géométrie Infinitésimale* — Fasc. III. Partie I.

Cahiers Scientifiques.

P. Dubreil — *Algèbre* — Tome I.

Lelong-Ferrand — *Représentation Conforme et transformations a Intégrale de Dirichlet bornee.*

R. Damien — *Théorème sur les surfaces d'onde en optique géométrique.*

Editor — LIBRAIRIE VUIBERT, Paris

G. Bouligand — *Initiation a l'Analyse Mathématique.*

M. D'ocagne — *Histoire des Sciences Mathématiques*

Editores — GEORGES THONE, LIÈGE-MASSON & C.IE, Paris

Second Colloque sur les Équations aux Dérivées Partielles

Colloque sur l'Analyse Statistique.

Editor — SCRIPTA MATHEMATICA, New York

A. Fraenkel — *Integers and theory of numbers.*

Editor — WALTER DE GRUYTER & CO., Berlin

G. Kowalewski — *Einführung in die Determinanten-theorie.*

H. von Sanden — *Praxis der Differentialgleichungen.*

K. Hayashi — *Fünfstellige Tafeln der Kreis-una Hyperbelfunktionen.*

K. Strubecker — *Differentialgeometrie I.*