GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XVII N.° 63-64 MARÇO/JUNHO 1956

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Telefone 771943 — LISBOA-N.

Alice Soares Salgado

ANO XVII — N.º 63/64 **GAZETA DE MATEMÁTICA** MARÇO/JUNHO — 1956

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 771943 — LISBOA-N.

Uma exposição intrínseca da teoria dos determinantes

por **Élon Lages Lima**

1. Introdução. São conhecidos 3 processos para definir determinantes. O primeiro, que chamaremos de *combinatório*, (LEIBNIZ, CAYLEY) define o determinante de uma matriz $n \times n\,(\alpha_{ij})$ por meio da fórmula $\det(\alpha_{ij}) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)1}\,\alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}$. O segundo processo, que chamaremos de *axiomático*, (WEIERSTRASS, KRONECKER) consiste em definir o determinante de uma matriz como uma função multilinear alternada dos vectores colunas dessa matriz, função normalizada pela condição de ser igual a 1 para a matriz identidade. Finalmente, o terceiro processo (a ordem, num certo sentido, é cronológica), que chamaremos *exterior*, é essencialmente devido a GRASSMANN mas só recentemente foi posto em forma matemática correta por BOURBAKI. Ele utiliza a álgebra exterior e consiste em definir, sem referência a matrizes, o determinante de uma transformação linear T sobre um espaço vectorial V de dimensão n como o escalar λ tal que o produto exterior $\Lambda^n T$ é igual a λ vezes a transformação identidade de $\Lambda^n V$. O processo combinatório, se bem que seja o mais difundido em livros de texto elementares (v. [1])*, é o de mais complicada exposição, onde todas as demonstrações são feitas por «força bruta» e as fórmulas são repletas de índices. O processo axiomático (v. [2] ou, preferìvelmente, [3]) representa um progresso, não sòmente sob o ponto de vista da elegância de exposição como da lógica, pois mostra que 3 das mais simples propriedades dos determinantes são suficientes para caracterizá-los: todas as demais propriedades se deduzem destas. Entretanto, além de exigir um teorema de existência e unicidade, este processo ainda contém muitos cálculos complicados nas demonstrações dos resultados cruciais, como: (1) $\det(AB) = \det A \, . \, \det B$; (2) $\det A \neq 0$ se e só se A possui inverso; (3) $\det(A^*) = \det A$, onde A^* representa a matriz transposta de A; (4) desenvolvimento de LAPLACE. O processo exterior, embora nada traga em benefício de (3), que é demonstrado da maneira clássica (v. [4]) elimina completamente a dificuldade das demonstrações de (1) e (2) e dá a (4) uma demonstração de simplicidade considerada maximal. Em virtude destas vantagens e de ser o único *intrínseco* (isto é, sem referência essencial a bases e matrizes) o processo exterior é considerado o mais claro, simples e elegante para apresentar a teoria dos determinantes. Apesar disso, continua-se a ensinar esta teoria da maneira combinatória

* Os números entre colchetes referem-se à bibliografia no fim do trabalho.

ou, quando muito, axiomática. Motivo: em geral, quem está estudando determinantes pela primeira vez não conhece a álgebra de GRASSMANN.

Nosso proprósito aqui é apresentar uma exposição intrínseca da teoria dos determinantes que difere da de BOURBAKI por não fazer uso da álgebra exterior. Tudo o que supomos conhecido do leitor são rudimentos da teoria dos espaços vectoriais sobre um corpo comutativo K que, de resto, pode ser pensado como o corpo real ou complexo. Para as demonstrações dos resultados que usaremos, veja-se [5].

2. Permutações. Resumiremos as propriedades das permutações que usaremos nos parágrafos seguintes.

Chamaremos de *grupo simétrico* S_n ao conjunto de todas permutações dos inteiros $\{1, 2, \cdots, n\}$ isto é, de todas as aplicações biunívocas do conjunto $\{1, \cdots, n\}$ sobre si próprio. Se $\rho, \sigma \in S_n$, o produto $\sigma\rho$ é definido como a permutação que consiste em aplicar ρ e depois σ. Em outras palavras: $\sigma\rho(i) = \sigma(\rho(i)), 1 \leq i \leq n$. Munido desta operação, S_n é um *grupo*, isto é: existe uma permutação $\theta \in S_n$ tal que $\theta\sigma = \sigma\theta = \sigma$ para toda $\sigma \in S_n$ (basta definir $\theta(i) = i$, para todo $i, 1 \leq i \leq n$); dada $\sigma \in S_n$ existe $\sigma^{-1} \in S_n$ tal que $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \theta$ (basta definir $\sigma^{-1}(j) = i$ se $\sigma(i) = j$); e finalmente, $\sigma(\rho\mu) = (\sigma\rho)\mu$ quaisquer que sejam $\sigma, \rho, \mu \in S_n$. O grupo S_n tem $n!$ elementos. Uma permutação $\sigma \in S_n$ diz-se *par* se o número de inversões na sequência $(\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ é par e *impar* no caso contrário. Equivalentemente, consideremos o produto $P = (1-2)(1-3)\cdots(n-1-n) = \prod_{i<j}(i-j)$. Uma permutação $\sigma \in S_n$ é par se e só se $P' = \prod_{i<j}(\sigma(i) - \sigma(j)) = P$; σ é ímpar se e só se $P' = -P$. O *sinal* de uma permutação σ é o inteiro ε_σ tal que $\varepsilon_\sigma = +1$ se σ é par e $\varepsilon_\sigma = -1$ se σ é ímpar. É claro que $\varepsilon_{\sigma\rho} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\sigma = \varepsilon_\rho \varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\rho\sigma}$. Entre as permutações, destacaremos as *transposições*. Uma transposição $\tau = (ij), (1 \leq i < < j \leq n)$ é uma permutação tal que $\tau(i) = = j, \tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$ se $j \neq k \neq i$. Uma transposição τ é evidentemente uma permutação ímpar, de modo que $\varepsilon_{\tau\sigma} = -\varepsilon_\sigma$ qualquer que seja a permutação σ. Dada uma transposição (fixa) τ, formaremos, para cada $\sigma \in S_n$, o subconjunto $C_\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\} \subset S_n$. Dois desses conjuntos C_σ e $C_\rho, \rho, \sigma \in S_n$, ou coincidem ou não têm elemento em comum. (Pode acontecer que $C_\sigma = C_\rho$ com $\sigma \neq \rho$; isto se dá se e só se $\rho = \tau\sigma$). Portanto os conjuntos C_σ fornecem uma decomposição de S_n em partes disjuntas, cada uma com 2 elementos. Logo há $n!/2$ dessas partes, isto é: existem $n!/2$ permutações $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n!/2}$ tais que

$$(D) \qquad S_n = C_1 \cup \cdots \cup C_{n!/2}, \text{ com } C_i = \{\sigma_i, \tau\sigma_i\} \text{ e } C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j.$$

Faremos referência a (D) como a *decomposição de* S_n *módulo* τ. Notemos que, em cada $C_\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\}$ um dos elementos é par e o outro é ímpar. Substituindo σ_i por $\rho_i = = \tau\sigma_i$ (lembramos que $C_\sigma = C_{\tau\sigma}$) se necessário, podemos supôr que, em (D), todas as permutações σ_i são pares.

3. Funções multilineares. Durante todo este trabalho indicaremos com V um espaço vectorial sobre um corpo (comutativo) K e com n a dimensão (finita) de V sobre K.

Se W é outro espaço vectorial sobre K, uma *aplicação r-linear* de V em W é uma aplicação $f: V \times V \times \cdots \times V$ (r factores) $\to W$, tal que, para $1 \leq i \leq r$:

$$f(x_1, \cdots, x_i + y_i, \cdots, x_r) = f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_r) + + f(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_r)$$

$$f(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_r) = \lambda f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_r), \quad \lambda \in K.$$

Em particular, se $W = K$, uma aplicação r-linear de V em K será chamada uma *função r-linear sobre* V. Este é o caso que consideramos mais frequentemente. O conjunto $L_r(V)$ de todas as funções r-lineares sobre V constitue um espaço vectorial quando se define soma de 2 funcões e produto de uma função por um escalar, do modo natural. Em particular, se $r=1$, tem-se $L_1(V)=$ $=V^*=$ espaço dual de V.

Uma distinção importante que faremos é entre uma *sequência* de inteiros $(i_1,\cdots,i_r)$, $1\leq i_k\leq n$, e um *conjunto* de inteiros $\{i_1,\cdots,i_r\}$, $1\leq i_k\leq n$. Uma sequência é uma função definida no conjunto $\{1,\cdots,r\}$ com valores no conjunto $\{1,\cdots,n\}$: $1\to i_1,\cdots,r\to i_r$; portanto, podemos ter $i_j=i_k$ numa sequência, com $j\neq k$. Diremos então que a sequência $(i_1,\cdots,i_r)$ tem repetições. Num conjunto, porém, $j\neq k$ implica $i_j\neq i_k$; não há repetições e, em particular, devemos ter $r\leq n$.

PROPOSIÇÃO 1. Seja $\{e_1,\cdots,e_n\}$ uma base de V. Para toda sequência $(i_1,\cdots,i_r)$, $1\leq i_k\leq n$, fixemos arbitràriamente (*) $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})\in K$. Então existe uma e sòmente uma função r-linear f sobre V com os valores (*) nos pontos $(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})$.

Demonstração. Dada $f\in L_r(V)$, quaisquer que sejam $x_1,\cdots,x_r\in V$ pode-se escrever $x_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i(j=1,\cdots,r)$. Portanto $f(x_1,\cdots,x_r)=$

$$=f\left(\sum_{i_1=1}^{n}\alpha_{i_1 1}e_1,\cdots,\sum_{i_r=1}^{n}\alpha_{i_r r}e_{i_r}\right)=$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}\alpha_{i_1 1}\alpha_{i_2 2}\cdots\alpha_{i_r r}f(e_{i_1},e_{i_2},\cdots e_{i_r})\;(**)$$

o que mostra que uma função r-linear fica determinada por seus valores (*) isto é, existe no máximo uma $f\in L_r(V)$ com esses valores. Além disso, se definirmos $f(x_1,\cdots,x_r)$ por meio da igualdade (**), é evidente que $f\in L_r(V)$ e portanto existe realmente uma função r-linear satisfazendo às condições (*).

Uma aplicação r-linear f de V em outro espaço vectorial W sobre K diz-se *alternada* se cumpre a condição

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_r)=0 \quad \text{quando} \quad x_i=x_j$$

Uma aplicação r-linear alternada f é também *antissimétrica*, isto é,

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_r)=-f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_r).$$

Para demonstrar este facto, ponhamos $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_j,\cdots,x_r)=\varphi(x_i,x_j)$. Temos $0=\varphi(x_i+x_j,x_i+x_j)=\varphi(x_i,x_j)+$ $+\varphi(x_j,x_j)+\varphi(x_i,x_j)+\varphi(x_j,x_i)=\varphi(x_i,x_j)+$ $+\varphi(x_j,x_i)$, donde $\varphi(x_i,x_j)=-\varphi(x_j,x_i)$. Mais geralmente, dada f alternada, para toda permutação $\sigma\in S_r$, temos

$$f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)})=\varepsilon_\sigma f(x_1,\cdots,x_r).$$

Recìprocamente, se K tem característica diferente de 2, é fácil ver que toda aplicação r-linear antissimétrica é também alternada. Representaremos por $A_r(V)$ o conjunto das funções r-lineares alternadas sobre V, isto é, o conjunto das aplicações r-lineares alternadas de V em K. $A_r(V)$ é um subespaço vectorial de $L_r(V)$.

A toda permutação $\sigma\in S_r$ e toda função $f\in L_r(V)$ associaremos a função σf, definida pela fórmula:

$$\sigma f(x_1,\cdots,x_r)=f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)}).$$

É claro que $\sigma f\in L_r(V)$ e $\sigma\left(\sum\lambda_i f_i\right)=$ $=\sum\lambda_i(\sigma f_i),\lambda_i\in K,f_i\in L_r(V)$; se ρ é outra permutação, $\rho(\sigma f)=(\sigma\rho)f$; se f é alternada $\sigma f=\varepsilon_\sigma f$.

Dada a função $f\in L_r(V)$, definiremos a *alternada* $\mathfrak{A}f$ de f como $\mathfrak{A}f=\sum_\sigma\varepsilon_\sigma\sigma f$ (σ percorrendo o conjunto S_r de todas as permutações dos inteiros $1,\cdots,r$). Evidentemente $\mathfrak{A}f$ é uma função r-linear. Mostraremos agora que $\mathfrak{A}f$ é alternada. Para isto, sejam $x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_r\in V$ tais que $x_i=x_j$ e consideremos a transposição $\tau=(ij)\in S_r$. Por simplicidade, escrevamos $x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_r)$; temos $\tau f(x)=f(x)$. Seja $\{\sigma_1,\tau\sigma_1\}\cup\cdots\cup\{\sigma_{r!/2},\tau\sigma_{r!/2}\}$ a decomposição de S_r módulo τ. Admitindo cada σ_i par, temos: $\mathfrak{A}f(x)=\sum_\sigma\varepsilon_\sigma\sigma f(x)=$

$$= \sum_{i=1}^{r!/2} [\sigma_i f(x) - (\tau \sigma_i) f(x)] = \sum_i [\sigma_i f(x) -$$

$$- \sigma_i (\tau f(x))] = \sum_i [\sigma_i f(x) - \sigma_i f(x)] = 0 .$$

Proposição 2. Para todo inteiro $r \leq n$ existe uma função r-linear alternada $f \neq 0$.

Demonstração. Consideremos uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V e a função $g \in L_r(V)$ tal que $g(e_1, \cdots, e_r) = 1$ e $g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}) = 0$ para toda sequência $(i_1, \cdots, i_r) \neq (1, \cdots, r)$. g existe pela proposição 1. Tomemos $f = \mathfrak{A} g$; como vimos acima, f é alternada e além disso, $f(e_1, \cdots, e_r) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma g(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = g(e_1, \cdots, e_r) = 1$.

Observação: Se $r > n$, existe a sequência $(e_1, \cdots, e_r)$, o que invalida a demonstração acima.

Corolário: *Dada uma base* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *de* V *existe uma função* n-*linear alternada* f_0 *tal que* $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$.

Proposição 3. Sejam $x_1, \cdots, x_n \in V$ e $0 \neq f \in A_n(V)$. Então $f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ se e só se $x_1, \cdots, x_n$ são linearmente independentes.

Demonstração: Se $x_1, \cdots, x_n$ são linearmente dependentes, podemos supôr $x_1 = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, $\lambda_i \in K$. Então

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, x_2, \cdots, x_n\right) = \lambda_2 f(x_2, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_n f(x_n, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

pois f é alternada. Reciprocamente, se $x_1, \cdots, x_n$ são independentes, eles constituem uma base de $V: x_1 = e_1, \cdots x_n = e_n$. Se fosse $f(e_1, \cdots, e_n) = 0$ então, para toda permutação $\sigma \in S_n$ teríamos $f(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f(e_1, \cdots, e_n) = 0$ e, se $(i_1, \cdots, i_n)$ é uma sequência com repetições, $f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = 0$, pois f é alternada. Pela proposição 1, teríamos então $f = 0$, uma contradição.

Observação: A primeira parte da demonstração acima mostra, mais geralmente, que se $\{x_1, \cdots, x_r\}$ é qualquer conjunto finito de vectores linearmente dependentes em V, $f(x_1, \cdots, x_r) = 0$. Em particular, se $r > n$, toda função r-linear alternada é igual a zero, mostrando que a proposição 2 não pode ser melhorada.

Proposição 4. Se $0 \neq f \in A_n(V)$, para toda $g \in A_n(V)$ existe $\lambda \in K$ tal que $g = \lambda f$. Em outras palavras, $A_n(V)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 sobre K.

Demonstração: Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V. Pela proposição 3, $f(e_1, \cdots, e_n) \neq 0$. Logo existe $\lambda \in K$ tal que $g(e_1, \cdots, e_n) = \lambda f(e_1, \cdots, e_n)$. Se $\sigma \in S_n$ então $g(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma g(e_1, \cdots, e_n) = \lambda \varepsilon_\sigma f(e_1, \cdots, e_n) = f(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$. Se $(i_1, \cdots, i_n)$ é uma sequência com repetição então $g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = 0 = \lambda f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})$. Portanto g e λf coincidem em todos os pontos da forma $(e_{i_n}, \cdots, e_{i_n})$. Pela proposição 1, tem-se $g = \lambda f$.

4. Determinantes. Dados o endomorfismo T de V(= transformação linear de V em si próprio), definiremos o endomorfismo ${}^rT$ de $L_r(V)$ do seguinte modo: para toda $f \in L_r(V)$, ${}^rTf$ é a função tal que ${}^rTf(x_1, \cdots, x_r) = f(Tx_1, \cdots, Tx_r)$.

É fácil ver que ${}^rTf \in L_r(V)$ e que ${}^rT: f \to {}^rTf$ é realmente um endomorfismo. Se S é outro endomorfismo de V, tem-se

$$(1) \qquad {}^r(TS) = {}^rS \cdot {}^rT$$

Se f é alternada, ${}^rTf$ é também alternada. Em particular, se representarmos por $\hat{T}$ a restrição de ${}^nT$ a $A_n(V)$, $\hat{T}$ é um endomorfismo de $A_n(V)$. Como $A_n(V)$ tem dimensão 1, todo seu endomorfismo é um múltiplo escalar do endomorfismo identidade I. Portanto existe um escalar $\det T \in K$ tal que $\hat{T} = \det T \cdot \mathrm{I}$, isto é, $\hat{T} f = \det T \cdot f$ qualquer que seja $f \in A_n(V)$. Chamaremos o escalar $\det T$ de *determinante* do endomorfismo T. Temos então

$$f(Tx_1, \cdots, Tx_n) = \det T \cdot f(x_1, \cdots, x_n)$$

quaisquer que sejam $x_1, \cdots, x_n \in V$ e $f \in A_n(V)$. Em particular, se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base de V e $f_0 \in A_n(V)$ é tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$, temos

$$(2) \qquad \det T = f_0(Te_1, \cdots, Te_n)$$

TEOREMA 1. *Se* S *e* T *são endomorfismos de* V, $\det(\mathrm{S\,T}) = \det \mathrm{S} \cdot \det \mathrm{T}$.

Demonstração: Indicando com o mesmo símbolo I os endomorfismo identidades de V e $A_n(V)$, temos $\det(ST) \cdot I = \widehat{ST} = \hat{S} \cdot \hat{T} = (\det S \cdot I)(\det T \cdot I) = \det S \cdot \det T \cdot I$ donde $\det(S\,T) = \det S \cdot \det T$.

É claro que $\det I = 1$, de modo que se T tem inverso e pomos $S = T^{-1}$ no Teorema 1, obtemos $1 = \det(T^{-1}) \cdot \det T$. Segue-se que $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$ e que $\det T \neq 0$. Reciprocamente, se T não possui inverso, dada a base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V e $f_0 \in A_n(V)$ tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$, temos $\det T = f_0(Te_1, \cdots, Te_n) = 0$ porque $Te_1, \cdots, Te_n$ são linearmente dependentes. Portanto vale o

TEOREMA 2. $\det \mathrm{T} \neq 0$ *se e só se* T *possui inverso*.

Definimos agora o determinante de uma matriz $n \times n\ (\alpha_{ij})$ com elementos em K, pondo $\det(\alpha_{ij}) = \det T$, onde T é o endomorfismo do espaço vectorial K^n que possui a matriz (α_{ij}) relativamente à base canónica $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de K^n; recordemos que esta base é formada pelos vectores $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ com todas as coordenadas 0, excepto a i-ésima, que é 1. Explìcitamente, se $f \in A_n(K_n)$:

$$(3) \qquad \det(\alpha_{ij}) \cdot f(e_1, \cdots, e_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$$
$$\text{onde cada } x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i .$$

Os Teoremas 1 e 2 são evidentemente válidos se interpretarmos S e T como matrizes e portanto duas matrizes semelhantes (α_{ij}) e $(\beta_{ij})^{-1}(\alpha_{ij})(\beta_{ij})$ têm o mesmo determinante. Segue-se que o determinante de um endomorfismo T é igual ao determinante de qualquer das suas matrizes. Consequentemente a fórmula (3) é válida se considerarmos $\{e_1, \cdots, e_n\}$ como uma base de qualquer espaço vectorial V de dimensão n sobre k, e $f \in A_n(V)$. Em particular, é interessante ler a fórmula (3) da direita para a esquerda e ver como se calcula o valor de uma função alternada $f \in A_n(V)$ quando se conhece apenas $f(e_1, \cdots, e_n)$.

Se, em (3), considerarmos novamente α_{ij} como a i-ésima coordenada do vector $x_j \in K^n$ e tomarmos $f = f_0 \in A_n(K^n)$ tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$, obtemos $\det(\alpha_{ij}) = f_0(x_1, \cdots, x_n)$. Portanto o determinante de uma matriz é uma função multilinear alternada dos vectores colunas dessa matriz, normalizada pela condição $\det(\delta_{ij}) = 1$, onde (δ_{ij}) é a matriz identidade. (Definição axiomática de determinante). Se $F(\alpha_{ij}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função multilinear alternada dos vectores colunas da matriz (α_{ij}) então a fórmula (3) mostra que $F(\alpha_{ij}) = \det(\alpha_{ij}) \cdot f(e_1, \cdots, e_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot F(\delta_{ij})$. Portanto a função F é um múltiplo escalar da função $(\alpha_{ij}) \to \det(\alpha_{ij})$, o coeficiente escalar sendo precisamente o valor que F assuma para a matriz identidade. Demonstramos assim o teorema básico de existência e unicidade da teoria dos determinantes exposta pelo método axiomático.

Se, em (3), tomarmos $f = f_0$ tal que $f_0(e_1, \cdots, e_n) = 1$ e desenvolvermos o segundo membro de acordo com a definição de função n-linear, teremos:

$$\det(\alpha_{ij}) = f_0\left(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1 1} e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{i_n n} e_{i_n}\right) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n=1}^{n} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_n n} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) .$$

Notemos, porém, que f_0 é alternada e portanto $f_0(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) = 0$ se a sequência $(i_1, \cdots, i_n)$ tem repetições; além disso, se todos os i_k são diferentes, isto é, se

$(i_1, \cdots, i_k) = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ para alguma permutação $\sigma \in S_n$, temos $f_0(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}) = f_0(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma f_0(e_1, \cdots, e_n) = \varepsilon_\sigma$. Então, a última igualdade se escreve

$$(4) \qquad \det(\alpha_{ij}) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \, \alpha_{\sigma(1)\,1} \, \alpha_{\sigma(2)\,2} \cdots \alpha_{\sigma(n)\,n}$$

onde σ percorre o conjunto S_n. Estabelecemos assim a equivalência entre a nossa definição de determinante e a definição combinatória.

5. Simetria entre linhas e colunas.

PROPOSIÇÃO 5. Seja (α_{ij}) uma matriz $n \times n$ com elementos em K. Se (α'_{ij}) representa a matriz obtida multiplicando-se a primeira linha de (α_{ij}) por λ, onde $0 \neq \lambda \in K$ temos $\det(\alpha'_{ij}) = \lambda \cdot \det(\alpha_{ij})$.

Demonstração: Seja $0 \neq f \in A_n(V)$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de V. Por (3), se tomarmos $x_j = \sum_i \alpha_{ij} e_i \ (j = 1, \cdots, n)$, teremos

$$(5) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot f(e_1, \cdots, e_n).$$

Por outro lado, considerando a base $\{e_1' \cdots e_n'\}$ de V, onde $e_1' = (1/\lambda) e_1$ e $e_i' = e_i$ se $i \neq 1$, e os mesmos x_j, obtemos $x_j = \sum_i \alpha'_{ij} e_j'$, donde

$$(6) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \det(\alpha'_{ij}) \cdot f(e_1', \cdots, e_n').$$

Notando que $f(e_1', \cdots, e_n') = (1/\lambda) f(e_1, \cdots, e_n) \neq 0$, a comparação de (5) e (6) dá: $\det(\alpha'_{ij}) = \lambda \det(\alpha_{ij})$.

Definiremos agora a aplicação $\Lambda : (V^*)^n \to A_n(V)$ do seguinte modo: se $f_1, \cdots, f_n \in V^*$, $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$ é tal que

$$(7) \qquad f(x_1, \cdots, x_n) = \det(f_i x_j), \qquad x_1, \cdots, x_n \in V.$$

Como o determinante de uma matriz é uma função n-linear alternada dos seus vectores colunas, vemos que, realmente, $f \in A_n(V)$. Além disso, a proposição 5 mostra que, se $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$ então (8) $\lambda f = \Lambda(\lambda f_1, \cdots, f_n)$. Se $\{e^1, \cdots, e^n\}$ é uma base de V^*, evidentemente $\Lambda(e^1, \cdots, e^n) \neq 0$. Como dim. $A_n(V) = 1$, toda $f \in A_n(V)$ pode ser escrita como $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$, $f_1, \cdots, f_n \in V^*$, de modo não único. Realmente, $f = \lambda \Lambda(e^1, \cdots, e^n) = \Lambda(\lambda e^1, \cdots, e^n)$.

PROPOSIÇÃO 6. Se, a cada $\varphi \in A_n(V^*)$ e a cada $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n) \in A_n(V)$ associarmos o escalar $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(f_1, \cdots, f_n) \in K$, obteremos uma dualidade entre $A_n(V^*)$ e $A_n(V)$. Dado o endomorfismo T em V e o seu transposto T^* em V^*, o transposto do endomorfismo $\hat{T}$ de $A_n(V)$ em relação à dualidade acima definida é o endomorfismo $\widehat{T^*}$ de $A_n(V^*)$. Em outras palavras: $(\hat{T})^* = \widehat{T^*}$.

Demonstração: Em primeiro lugar, precisamos verificar que $\langle f, \varphi \rangle$ é bem definida. Para isto, suponhamos que $g_1, \cdots, g_n \in V^*$ são tais que $\Lambda(g_1, \cdots, g_n) = f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$. Isto significa (permutando i e j em (6), por conveniência) que $\det(g_j x_i) = \det(f_j x_i)$ (9) quaisquer que sejam $x_1, \cdots, x_n \in V$. Tomando a base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ em V e a base dual $\{e^1, \cdots, e^n\}$ em V^*, escrevamos $f = \sum_i \alpha_{ij} e^i$ e $g_j = \sum_i \alpha_{ij} e^i$. Temos $f_j e_i = \alpha_{ij}$ e $g_j e_i = \beta_{ij}$. Portanto, (9) fornece $\det(\alpha_{ij}) = \det(\beta_{ij})$. Como φ é alternada, temos, em virtude de (3): $\varphi(f_1, \cdots, f_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot \varphi(e^1, \cdots, e^n) = \det(\beta_{ij}) \cdot \varphi(e^1, \cdots, e^n) = \varphi(g_1, \cdots, g_n)$. Assim, o escalar $\langle f, \varphi \rangle$ depende ùnicamente de f e φ mas não da representação $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$. Para mostrar que $\langle f, \varphi \rangle$ é bilinear, observemos que, sendo os 2 espaços $A_n(V)$ e $A_n(V^*)$ de dimensão 1, basta verificar que $\langle \lambda f, \mu \varphi \rangle = \lambda \mu \langle f, \varphi \rangle$, $\lambda, \mu \in K$, o que é óbvio, em virtude de (8). Finalmente, se $\langle f, \varphi \rangle = 0$ para toda f então $\varphi = 0$ por definição e, se $\langle f, \varphi \rangle = 0$ para toda φ, $f = 0$ pois, dado $f \neq 0$, tomamos uma base $\{e^i\}$ de V^* e $f = \Lambda(\lambda e^1, \cdots, e^n)$, $\lambda \neq 0$; qualquer que seja $\varphi \neq 0$ em $A_n(V^*)$, $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(\lambda e^1, \cdots, e^n) \neq 0$. Por conseguinte, $\langle f, \varphi \rangle$ dá, realmente, uma dualidade entre $A_n(V^*)$ e $A_n(V)$. Quanto ao transposto de $\hat{T}$, temos que provar a identidade $\langle \hat{T} f, \varphi \rangle =$

$= \prec f, \hat{I}^* \varphi \succ$ qualquer que sejam f e φ. Ora, se $f = \Lambda(f_1, \cdots, f_n)$, é claro que $\hat{T} f = \Lambda(T^* f_1, \cdots, T^* f_n)$, donde:

$$\prec \hat{T} f, \varphi \succ = \varphi(T^* f_1, \cdots, T^* f_n) =$$
$$= T^* \varphi(f_1, \cdots, f_n) = \prec f, \widehat{T^*} \varphi \succ . \qquad CQD.$$

Observemos agora que, se indicarmos com o mesmo símbolo I o endomorfismo identidade de um espaço e do seu dual e se $\lambda \in K$, temos $(\lambda \cdot \mathrm{I})^* = \lambda \cdot \mathrm{I}$. Segue-se que: $\det T^* \cdot I = T^* = (\hat{T})^* = (\det T \cdot I)^* = \det T \cdot I$, donde o

Teorema 3. $\det \mathrm{T} = \det \mathrm{T}^*$.

Corolário: *Se* (α_{ij}) *é uma matriz* $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ *e* (α_{ji}) *é a sua matriz transposta, então* $\det(\alpha_{\mathrm{ij}}) = \det(\alpha_{\mathrm{ji}})$.

Assim, todos os resultados anteriores referentes a matrizes continuam válidos se substituirmos «colunas» por «linhas» nos enunciados. Em particular:

$$(a) \qquad \det(\alpha_{ij}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \, \alpha_{1\sigma(1)} \cdot \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} .$$

(b) O determinante de uma matriz é uma função multilinear alternada dos vectores linhas dessa matriz.

Aplicando (b) à definição (7), obtemos a

Proposição 7. A aplicação $\Lambda : (V^*)^n \to A_n(V)$ é n-linear alternada.

Corolário: *Se* $\{\mathrm{e}^1, \cdots, \mathrm{e}^n\}$ *é uma base de* V^* *e* $\mathrm{f_j} = \sum_i \alpha_{\mathrm{ij}} \, \mathrm{e^i}$, *então*:

$$(10) \qquad \Lambda(f_1, \cdots, f_n) = \det(\alpha_{ij}) \cdot \Lambda(e^1, \cdots, e^n) .$$

Com efeito, $\Lambda(f_1, \cdots, f_n) =$
$$= \Lambda\Big(\sum\nolimits_{i_1=i}^{n} \alpha_{i_1 1} e^{i_1}, \cdots, \sum\nolimits_{i_n=1}^{n} \alpha_{i_n n} e^{i_n}\Big) =$$
$$= \sum\nolimits_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \cdots \alpha_{i_n n} \cdot \Lambda(e^{i_1}, \cdots, e^{i_n}) .$$

Mas, conforme a proposição 7, $\Lambda(e^{i_1}, \cdots, e^{i})=0$ se $(i_1, \cdots, i_n)$ tem termos repetidos e, em caso contrário $\Lambda(e^{i_1}, \cdots, e^{i_n}) = \Lambda(e^{\sigma(1)}, \cdots, e^{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma \Lambda(e^1, \cdots, e^n), \sigma \in S_n$. Portanto $\Lambda(f_1, \cdots, f_n) =$
$$= \Big(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \, \alpha_{\sigma(1)1} \, \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}\Big) \Lambda(e^1, \cdots, e^n) =$$
$= \det(\alpha_{ij}) \cdot \Lambda(e^1, \cdots, e^n)$, de acôrdo com a igualdade (4).

6. Desenvolvimento de Laplace.

Com as mesmas notações do Corolário acima, se escolhermos um conjunto $J = \{j_1, \cdots, j_r\}$ de inteiros tais que $1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n$ e consideramos o seu complementar $J' = \{j'_1, \cdots, j'_{n-r}\} = \{1, \cdots, n\} - J$, ainda com $j'_1 < \cdots < j'_{n-r}$, temos

$$(11) \qquad \Lambda(f_1, \cdots, f_n) = \rho_{J,J'} \Lambda(f_{j_1}, \cdots, f_{j_r}, f_{j'_1}, \cdots, f_{j'_r}) =$$
$$= \rho_{J,J'} \sum_{(k_1, \ldots, k_r)} \alpha_{k_1 j_1} \alpha_{k_2 j_2} \cdots \alpha_{k_r j_r} \cdot$$
$$\cdot \Lambda(e_{k_1}, \cdots, e^{k_r}, f_{j'_1}, \cdots, f_{j'_{n-r}})$$

onde $\rho_{J,J'}$ é igual a $+1$ ou a -1, conforme o número de inversões da sequência $(j_1, \cdots, j_r, j'_1, \cdots, j'_{n-r})$ seja par ou ímpar, e a soma acima é estendida a todas as sequências $(k_1, \cdots, k_r)$, $1 \le k_s \le n$. Entretanto, se uma dessas sequências possui um elemento repetido, o termo correspondente em (11) é nulo pois Λ é alternada. Omitindo as parcelas nulas, podemos dizer que a soma (11) é estendida a todas as sequências $(k_1, \cdots, k_r)$ onde os k_s são todos distintos. Fixemos arbitràriamente uma sequência $(k_1, \cdots, k_r)$ com elementos distintos, tais que $k_1 < \cdots < k_r$ e vejamos qual é a contribuição, para a soma (11), das parcelas que correspondem às sequências $(p_1, \cdots p_r)$ que têm os mesmos elementos que $(k_1, \cdots, k_r)$ porém em ordem diferente; em outras palavras: existe uma permutação $\sigma \in S_r$ tal que $p_1 = \sigma(k_1), \cdots, p_r = \sigma(k_r)$. (Observe-se que estamos escrevendo $\sigma(k_s)$ em vez de $k_{\sigma(s)}$).

Esta contribuição é $\sum_\sigma \alpha_{\sigma(k_1)j_1}\alpha_{\sigma(k_2)j_2}\cdots\alpha_{\sigma(k_r)j_r}\cdot$

$\cdot\Lambda(e^{\sigma(k_1)},\cdots,e^{\sigma(k_r)},f_{j'_1}\cdots,f_{j'_{n-r}})=$

$=\left(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma\,\alpha_{\sigma(k_1)j_1}\alpha_{\sigma(k_2)j_2}\cdots\alpha_{\sigma(k_r)j_r}\right)\cdot$

$\cdot\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},f_{j'_1},\cdots,f_{j'_{n-r}})$, a soma sendo estendida a todas as $\sigma\in S_r$. Ora, o coeficiente entre parêntesis é evidentemente o determinante da matriz $r\times r$ (β_{st}) onde $\beta_{st}=\alpha_{k_s j_t}$. Este determinante é chamado o *menor* da matriz (α_{ij}) relativo à escolha das linhas $k_1<\cdots<k_r$ e colunas $j_1<\cdots<j_r$. Representaremos tal menor por $M\binom{k_1\cdots k_r}{j_1\cdots j_r}=$ $=M\binom{K}{J}$. Fazendo K percorrer todos os conjuntos $\{k_1,\cdots,k_r\}$ onde $k_1<\cdots<k_r$, temos

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\rho_{J,J'}\sum_K M\binom{K}{J}\cdot\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},f_{j'_1},\cdots,f_{j'_{n-r}})$$

Procedendo de modo análogo com os argumentos $f_{j'_1},\cdots,f_{j'_{n-r}}$ obteremos:

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\rho_{J,J'}\sum_{K,L} M\binom{K}{J}M\binom{L}{J'}\cdot$$
$$\cdot\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e^{l_1},\cdots,e^{l_{n-r}})$$

onde L percorre todos os conjuntos $\{l_1,\cdots,l_{n-r}\}$ com $l_1<\cdots<l_{n-r}$. Mas, sendo Λ alternada, $\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e^{l},\cdots,e^{l_{n-r}})$ é igual a zero se $L\neq K'$ ($=$ complementar de K) e $\Lambda(e^{k_1},\cdots,e^{k_r},e^{l_1},\cdots,e^{l_{n-r}})=$ $=\rho_{K,K'}\Lambda(e^1,\cdots,e^n)$ se $L=K'$. Portanto:

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\left(\rho_{J,J'}\sum_K\rho_{K,K'}M\binom{K}{J}M\binom{K'}{J'}\right)\cdot$$
$$\cdot\Lambda(e^1,\cdots,e^n).$$

Comparando este resultado com (10), como $(e^1,\cdots,e^n)\neq 0$, temos

$$\det(\alpha_{ij})=\rho_{J,J'}\sum_K M\binom{K}{J}\cdot M\binom{K'}{J'} \tag{12}$$

e este é o desenvolvimento de LAPLACE do determinante de (α_{ij}) em relação às colunas $j_1<\cdots<j_r$. O menor $M\binom{K'}{J'}$, formado precisamente pelas linhas e colunas de (α_{ij}) que não entram na confecção de $M\binom{K}{J}$, chama-se o *menor complementar* de $M\binom{K}{J}$.

A fórmula (12) afirma então que, escolhidas as r colunas $j_1,\cdots,j_r$ da matriz (α_{ij}), o determinante de (α_{ij}) é a soma de todos os produtos que se obtêm multiplicando cada $r\times r$ menor extraído das r colunas escolhidas pelo menor complementar respectivo, cada um desses produtos sendo procedido de um sinal conveniente. Em particular, se escolhermos apenas uma coluna, (12) dá o desenvolvimento usual de um determinante segundo os elementos de uma coluna. Outra consequência de (11), muito útil nas aplicações, é que o determinante de uma matriz do tipo $\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix}$, onde A é $r\times r$, C é $(n-r)\times$ $\times(n-r)$ e 0 tem todos os elementos iguais a zero, é igual a $\det A.\det C$. (Basta escolher as colunas de A para o desenvolvimento de LAPLACE).

Usando o Teorema 3, obtemos um desenvolvimento de LAPLACE relativo a linhas.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. J. CARAÇA, Lições de Álgebra e Análise, 2.ª edição, Lisboa, 1945.

[2] SCHREIER & SPERNER, Modern Algebra and Matrix Theory, N. York, 1951.

[3] E. ARTIN, Galois Theory, Ann. Arbor, 1953.

[4] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre III, Paris, 1948.

[5] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre II, Paris, 1947.

Nota sobre o problema da comparação das médias de dois universos normais

por M. A. Fernandes Costa

1. Designem X e Y duas variáveis independentes e da mesma natureza que nos respectivos universos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ têm distribuições normais,

$$X \frown N(\mu_1, \sigma_1) \quad \text{e} \quad Y \frown N(\mu_2, \sigma_2) \,.\, (^1)$$

Suponhamos colhidas em $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ amostras de valores de X e Y, respectivamente $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. O problema estatístico aqui encarado é o de inferir, a partir destas amostras, conclusões sobre a plausibilidade da hipótese $H_0: \mu_1 = \mu_2$ no caso em que se desconheçam tanto estas médias como σ_1 e σ_2.

Para isso servirão as médias

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_1^m x_i \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i$$

e as variâncias

$$s_1^2 = \frac{1}{m}\sum_1^m (x_i - \bar{x})^2 \quad , \quad s_2^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2$$

das distribuições observadas nas amostras.

2. Como se sabe, o ensaio de uma hipótese fundamenta-se sempre numa «estatística» (função das observações) cuja distribuição tenha uma densidade de probabilidade que, além de teórica e numèricamente tratável, seja *independente dos parâmetros desconhecidos*.

No caso simples em que m e n são suficientemente grandes (digamos $\geqslant 30$), o problema referido resolve-se satisfatòriamente por recurso à estatística

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}}} ;$$

visto que $E(\bar{x} - \bar{y}) = E(\bar{x}) - E(\bar{y}) = \mu_1 - \mu_2$, o numerador é uma variável normal de média nula quando seja verdadeira a hipótese H_0 (¹).

Por outro lado, $Var(\bar{x} - \bar{y}) = \dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}$ e, quando m e n assumem valores elevados, $\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}$ é uma boa estimativa desta variância. Daqui resulta (¹) que se tem aproximadamente

$$u \mid \mu_1 = \mu_2 \frown N(0, 1)$$

e o ensaio de H_0 faz-se então muito simplesmente com o auxílio duma tabela da distribuição normal.

3. O caso em que m e n têm valores pequenos foi primeiro solucionado por R. A. Fisher (1925) com a restrição adicional de se supor $\sigma_1 = \sigma_2 (= \sigma)$.

Fisher observou que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{m\, s_1^2 + n\, s_2^2}{m + n - 2}$$

é então uma estimativa «inviciada» de σ^2 ($i \cdot e \cdot$ tal que $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$) — sendo portanto $\hat{\sigma}^2 \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)$ uma estimativa inviciada de

---

(¹) Com $X \frown N(\mu, \sigma)$ pretende-se significar uma variável normal de média μ e variância σ^2. Num caso geral, pode escrever-se $X \frown f(x)$ para indicar que a densidade de probabilidade da distribuição de X é $f(x)$ e $X \mid H \frown f(x)$ para exprimir que isso só é verdade quando se verifique a hipótese H.

Muito se gostaria de ver generalizada tão clara e sucinta notação.

(¹) Com efeito, sabe-se que, se for $Z_1 \frown N(m_1, d_1)$ e $Z_2 \frown N(m_2, d_2)$, se tem

$$a\, Z_1 + b\, Z_2 \frown N\left(a\, m_1 + b\, m_2, \sqrt{a^2 d_1^2 + b^2 d_2^2}\right)$$

$Var(\bar{x}-\bar{y})$ — e utilizou em lugar de u a estatística

$$v=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}};$$

depois provou que, sendo verdadeira a hipótese H_0, a distribuição de v é a de «Student» com $m+n-2$ graus de liberdade (1), o que indicaremos escrevendo

$$v\,|\,\mu_1=\mu_2 \frown t\,(m+n-2)\,.$$

Na resolução prática do problema pode-se assim tirar partido das tabelas da distribuição «t» de «Student».

O ponto fraco desta solução reside na premissa um tanto arbitrária de ser $\sigma_1=\sigma_2$, o que nem sempre pode justificar-se na prática — quer por considerações apriorísticas quer por ensaio estatístico da hipótese $\sigma_1=\sigma_2$.

4. Situa-se precisamente aqui a fonte de uma das mais interessantes e importantes controvérsias que caracterizam o desenvolvimento recente da Estatística Matemática. O problema do ensaio da hipótese $\mu_1=\mu_2$ sem aceitação da premissa $\sigma_1=\sigma_2$ (o qual ficou a ser conhecido por «problema de BEHRENS-FISHER») for também primeiro resolvido por FISHER [3] à luz da sua teoria da *fidutial inference*. Esta teoria, porém, está muito longe de ser universalmente aceite, a ela se opondo uma outra, de inspiração frequencista, criada por J. NEYMAN e E. S. PEARSON à roda de 1930. (2)

Em muitos casos, os resultados das duas teorias coincidem, mas instâncias surgiram de profundas e graves divergências que muita tinta têm feito correr. Todavia, no caso particular do problema de BEHRENS-FISHER, a posição dos partidários da teoria de NEYMAN-PEARSON era bastante incómoda: embora contestassem a validade da solução de FISHER, não sabiam opor-lhe outra. Quem conhecer a faceta polémica do grande criador da Estatística moderna não estranhará que ele se valesse desta posição de vantagem para propagandear as suas ideias e lançar comentários mordazes aos seus adversários; até que de entre estes já havia quem no seu desânimo sugerisse existirem com certeza problemas não susceptíveis de solução...

Foi só em 1947 que B. L. WELCH deu a lume um tratamento definitivo da questão sem recurso à teoria da *fidutial inference*. O seu artigo [7], se não se presta a fácil leitura, é porém de importância capital; e a aplicação prática da solução de WELCH ficou possibilitada com a publicação de tabelas acompanhadas de instruções práticas para o seu uso, de resto muito simples [8].

5. O objectivo desta nota é, principalmente, chamar a atenção para a memória de WELCH, que não parece ter ainda tido a difusão que merece; mas aproveita-se a oportunidade para expor uma outra solução — e muito engenhosa, se bem que de menor interesse prático — que para o problema de BEHRENS-FISHER deu H. SCHEFFÉ [9].

Considere-se a estatística

$$w=\sqrt{m\,(m-1)}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sum_1^m(z_i-\bar{z})^2}},$$

onde

$$z_i=x_i-\sqrt{\frac{m}{n}}\,y_i \quad \text{e} \quad \bar{z}=\frac{1}{m}\sum_1^m z_i$$

(supõe-se $m\leqq n$, o que é evidentemente legítimo). w serve excelentemente para utensilhar um ensaio da hipótese $H_0:\mu_1=\mu_2$, pois se tem

$$w\,|\,\mu_1=\mu_2 \frown t\,(m-1)\,,$$

(1) Pode ver-se uma simples e elegante demonstração deste resultado no belo livro de Weatherburn [1], onde tão bem se introduzem os aspectos puramente matemáticos da Estatística. Veja-se também [2], pág. 56.

(2) O leitor desejoso de se pôr a par das idéias que servem de fundamento às modernas teorias do ensaio de hipóteses e da estimação encontrará exposições sucintas e elementares em [4] e [5]. Também estudará [6] com muito proveito.

sendo portanto a sua distribuição independente de σ_1 e σ_2.

Julga-se de certo interesse dar deste resultado uma demonstração elementar directa, pois SCHEFFÉ fá-lo depender de um enunciado mais geral.

Para isso, comecemos por notar que

$$Var\ (\bar{x}-\bar{y}) = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n} = \tau^2$$

$$Var\ (z_i) = \sigma_1^2 + \frac{m}{n}\sigma_2^2 = m\,\tau^2$$

e

$$E\,(z_i) = \mu_1 - \sqrt{\frac{m}{n}}\,\mu_2 = 0,$$

desde que para comodidade se escolha a origem de modo que o valor comum de μ_1 e μ_2 seja nulo; tem-se então

$$z_i \frown N(0, \sqrt{m}\,\tau)\,.$$

Ora, recorrendo a uma transformação linear ortogonal (cf. [1], págs. 164 e 169), é fácil mostrar que

$$\sum_1^m (z_i - \bar{z})^2 = \sum_1^{m-1} \zeta_i^2\,,$$

onde as variáveis $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{m-1}$ são independentes e

$$\zeta_i \frown N(0, \sqrt{m}\,\tau)\,;$$

logo,

$$\sum_1^{m-1} \frac{\zeta_i^2}{m\,\tau^2}\,\Bigg|\,\mu_1 = \mu_2 \frown \chi^2\,(m-1)\,,$$

em que $\chi^2(m-1)$ designa a distribuição do χ^2 com $m-1$ graus de liberdade (cf. [2], pág. 54).

Por conseguinte,

$$\frac{w^2}{m-1} = \frac{(\bar{x}-\bar{y})^2/\tau^2}{\Sigma\,(z_i - \bar{z})^2/m\,\tau^2}$$

é o quociente de uma variável $\chi^2(1)$ por uma variável $\chi^2(m-1)$, e isto permite concluir o resultado enunciado ([1], pág. 187).

6. Por último, referir-se-á a curiosa solução de DARMOIS [10], a qual se baseia na construção de «regiões de confiança» para o par de parâmetros (μ_1, μ_2).

Esta solução parece no entanto conter alguns pontos obscuros. Em particular, não está provado que o tipo de regiões de confiança escolhido conduza a ensaios eficientes da hipótese $\mu_1 = \mu_2$. Por outro lado, não é possível fixar prèviamente um valor do coeficiente de risco, mas apenas um limite superior da probabilidade de cometer um «erro de primeira espécie».

REFERÊNCIAS

[1] C. E. WEATHERBURN, *A First Course in Mathematical Statistics*, 2.ª ed. Cambridge University Press, 1949.

[2] M. A. FERNANDES COSTA, «Sobre o Cálculo da Distribuição de uma Variável Casual», *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, n.º 8.

[3] R. A. FISHER, «The Fidutial Argument in Statistical Inference», *Ann. Eugenics*, vol. 6, 1935, págs. 391-398. (Reproduzido numa selecta dos trabalhos de Fisher: *Contributions to Mathematical Statistics*, J. Wiley & Sons, New York, 1950).

[4] C. I. K. FORESTER, «An Elementary Introduction to the Testing of Statistical Hypotheses», *Jour. Inst. of Actuaries Students' Society*, vol. VII, págs. 81-97.

[5] L. SOLOMON, «Statistical Estimation», idem, vol. VII, págs. 144-173 e 213-234.

[6] GUSTAVO DE CASTRO, «Sobre a Teoria Elementar do Ensaio de Hipóteses», *Revista de Economia*, vol. III, fasc. III.

[7] B. L. WELCH, «The Generalization of 'Student's' Problem when Several Different Population Variances Are Involved», *Biometrika*, vol XXXIV, Jan. 1947, págs. 28-35. Ver também vol. XLI, Dec. 1954.

[8] ALICE A. ASPIN, «Tables for Use in Comparisons whose Accuracy Involves Two Variances, Separately Estimated», *Biometrika*, vol. XXXVI, Dec. 1949, págs. 290-296.

[9] H. SCHEFFÉ, «On Solutions of the Behrens-Fisher Problem Based on the t-Distribution», *Ann. Math. Stat.*, vol. 14 (1943), págs. 35-44.

[10] G. DARMOIS, «Comparaison des Moyennes de Deux Populations Normales d'Ecarts-Types Inconnus et Différents», *Rev. de Statistique Appliquée*, vol. II, n.º 3, págs.37-41.

Os espaços métricos e a análise clássica: o método do ponto fixo

(Conclusão)

§ 5. Sistemas lineares infinitos.

Consideremos o sistema linear infinito

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots = b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \end{cases}$$

ou, abreviadamente,

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$

e procuremos uma sucessão $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ que, substituída nos primeiros membros das equações (1), os torne convergentes com somas dadas pelos segundos membros. A tal sucessão, caso exista, chamaremos *solução* do sistema (1).

TEOREMA. *O sistema* (1) *admite uma e uma só solução limitada sempre que se verifiquem as condições*

$$\alpha) \qquad a_{ii} \neq 0,$$

$$\beta) \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{\infty} |a_{ij}| \leq q\, |a_{ii}| \ \textit{com}\ q < 1,$$

$$\gamma) \qquad |b_i| \leq B$$

$$(i = 1, 2, \cdots).$$

Dem. A condição α) permite resolver a primeira equação em ordem a x_1, a segunda em ordem a x_2, etc. Obtém-se o sistema

$$(2) \qquad x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{\infty} c_{ij}\, x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

com $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$.

As fórmulas

$$(3) \qquad y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{\infty} c_{ij}\, x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

permitem obter a partir de cada sucessão $x = \{x_i\}$ limitada, $|x_i| < M$ $(i = 1, 2, \cdots)$, uma nova sucessão $y = \{y_i\}$ que é também limitada:

$$|y_i| \leq \sum |c_{ij}|\, |x_j| + |b_i| \leq M \sum |c_{ij}| + B \leq M q + B,$$

em virtude das condições β) e γ).

As fórmulas (3) difinem portanto um operador U no espaço m das sucessões limitadas. E se pusermos $y^{(k)} = U(x^{(k)})$, $x^{(k)} = \{x_{kj}\}$, $y^{(k)} = \{y_{kj}\}$ $(k = 1, 2)$ será

$$\begin{aligned} \delta\,[U(x^{(1)}), U(x^{(2)})] = \delta\,(y^{(1)}, y^{(2)}) = \sup_i |y_{1i} - y_{2i}| &\leq \\ \leq \sup_i \sum |c_{ij}|\, |x_{1j} - x_{2j}| &\leq \\ \leq \sup_i \sum |c_{ij}| \sup_j |x_{1j} - x_{2j}| &\leq \\ \leq q\, \delta\,(x^{(1)}, x^{(2)}), & \end{aligned}$$

o que quer dizer que U é um operador de contracção no espaço métrico completo m. O seu ponto fixo será a solução limitada, única, a que se refere o teorema.

Cálculo aproximado da solução.

Construa-se por iteração sobre as fórmulas (3) a sucessão (de sucessões)

$$x^{(0)} = \{0\},\ x^{(1)} = \{b_i\},\ \cdots,\ x^{(n)} = \{\xi_{ni}\},\ \cdots.$$

Designando por $x = \{\xi_i\}$ a solução, tem-se

$$\delta\,(x^{(n)}, x) \leq \frac{B\, q^n}{1 - q},$$

visto que na desigualdade (4) de § 3 é agora

$$\varkappa = \delta\,(x^{(1)}, x^{(0)}) = \sup |b_i| \leq B.$$

Além disso resulta de (3)

$$|y_i| \leq \sum |c_{ij}|\, |x_j| + B,$$

logo é

$$\sup_i |\xi_{1i}| \leq B,$$
$$\sup_i |\xi_{2i}| \leq B(1+q),$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\sup_i |\xi_{ni}| \leq B(1+q+\cdots+q^{n-1}) \leq \frac{B}{1-q}.$$

Vimos no § 2, (2) que $\xi_{ni} \to \xi_i$. Por conseseguinte,

$$|x| = \sup_i |\xi_i| \leq \frac{B}{1-q}.$$

Observação. Se todos os b_i são nulos, a única solução limitada do sistema (1) — nas condições do teorema — é a solução nula.

Notemos também que mesmo nas condições do teorema podem existir infinitas soluções não limitadas. É o caso do sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= a\, x_2 \\ x_2 &= a\, x_3 \qquad\qquad |a| < 1 \\ &\cdots \\ x_n &= a\, x_{n+1}\,. \\ &\cdots \end{aligned}$$

que tem a solução não limitada $\left(\varkappa, \frac{\varkappa}{a}, \frac{\varkappa}{a^2}, \ldots\right)$ com a constante arbitrária $\varkappa$.

§ 6. Resolução da equação $f(x) = 0$ por iteração.

Teorema 1. *Seja* $y = \varphi(x)$ *uma função de domínio e contradomínio no espaço métrico completo* X, *que satisfaz as duas condições seguintes:*

α_1) $\delta[\varphi(x), \varphi(x')] \leq q\,\delta(x, x')$ *com* $0 < q < 1$ *para quaisquer* x *e* x' *na vizinhança* X_1 *do ponto a definida por* $\delta(x, a) \leq \varepsilon$;

α_2) $\delta[\varphi(a), a] \leq (1-q)\,\varepsilon$.

Então a equação

(1) $$x = \varphi(x)$$

admite uma e uma só solução x^* *na mesma vizinhança* X_1, *que é o limite da sucessão*

$$x_0 = a, \quad x_1 = \varphi(a), \quad \cdots, \quad x_n = \varphi(x_{n-1}), \cdots,$$

tendo-se

(2) $$\delta(x_n, x^*) \leq \varepsilon\, q^n.$$

Dem. A função $y = \varphi(x)$ define um operador U no subespaço X_1 de X. Com efeito, se $x \in X_1$, de α_1) e α_2) resulta

$$\begin{aligned} \delta(Ux, a) = \delta(\varphi(x), a) &\leq \delta(\varphi(x), \varphi(a)) + \delta(\varphi(a), a) \\ &\leq q\,\delta(x, a) + (1-q)\,\varepsilon \leq q\,\varepsilon + (1-q)\,\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo também $Ux = \varphi(x) \in X_1$.

A condição α_1) mostra que U é um operador de contracção.

X_1 é um espaço métrico completo. Na verdade, toda a sucessão $\{x_n\}$ extraída de $X_1 \subset X$ que satisfaça a condição de Cauchy tem um limite $x \in X$, uma vez que X é completo. E de $\delta(x_n, a) \leq \varepsilon$ resulta $\delta(x, a) \leq \delta(x, x_n) + \delta(x_n, a) \leq \delta(x, x_n) + \varepsilon$, o que implica $\delta(x, a) \leq \varepsilon$, isto é $x \in X_1$, se atendermos a que $\delta(x, x_n) \to 0$.

Em resumo, U é um operador de contracção no espaço métrico completo X_1; por consequência admite um e um só ponto fixo x^* em X_1: $Ux^* = \varphi(x^*) = x^*$. E tomando o ponto inicial $x_0 = a$, vem [§ 3, (4)]:

$$\delta(x_n, x^*) \leq k\frac{q^n}{1-q}$$

com $k = \delta(x_1, x_0) = \delta(\varphi(a), a) \leq (1-q)\,\varepsilon$, o que estabelece (2).

Exemplo: equação de Kepler.

É a equação [1]

(3) $$x = e \operatorname{sen} x + M \qquad (0 < e < 1).$$

Neste caso X é o corpo real com a distância $\delta(x, y) = |x - y|$; e $\varphi(x) = e \operatorname{sen} x + M$.

Usando o teorema da média do cálculo diferencial, temos

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x')| &= e\,|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| = \\ &= e\,|\cos x_1|\,|x - x'| \leq e\,|x - x'|; \end{aligned}$$

tem portanto lugar a condição α_1) com $q = e$ em qualquer vizinhança de um ponto arbitrário a, o que automàticamente assegura α_2) e garante a existência de uma e uma só raiz x^* de (3) em todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

---

[1] Trata-se da equação que em Astronomia permite calcular a anomalia excêntrica x conhecidas a excentricidade e e a anomalia média M.

Mais precisamente, tomando $a = M$, asseguramos α_2) com $\varepsilon = \frac{1-e}{e}$, visto que

$$|\varphi(a) - a| = |\varphi(M) - M| = e\,|\operatorname{sen} M| \leq e .$$

E construída a sucessão

$$x_0 = M,\ x_1 = e \operatorname{sen} M + M, \cdots, x_n = e \operatorname{sen} x_{n-1} + M, \cdots$$

será

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n ,$$

tendo-se, usando (2),

$$|x^* - x_n| \leq \frac{e^{n+1}}{1-e} . \tag{4}$$

Pode porém calcular-se directamente um menor limite excedente do erro:

$$\begin{aligned} |x^* - x_n| &\leq e\,|\operatorname{sen} x^* - \operatorname{sen} x_{n-1}| \leq \\ &\leq e\,|\cos x_1|\,|x^* - x_{n-1}| \leq \\ &\leq e\,|x^* - x_{n-1}| \leq e^2 |x^* - x_{n-2}| \leq \\ &\leq \cdots \leq e^n |x^* - x_0| \leq e^{n+1} , \end{aligned}$$

o que quer dizer que em (4) se pode substituir o segundo membro por e^{n+1}.

TEORÊMA 2. *Seja* $y = f(x)$ *uma função real de variável real que na vizinhanca* X_1 *do ponto* a *definida por* $|x - a| \leq \varepsilon$ *admite derivada (finita) e satisfaz as seguintes condições:*

$$\beta_1) \qquad |f(a)| < \varepsilon\,|f'(a)| ,$$

$$\beta_2) \qquad \sup \left|1 - \frac{f'(x)}{f'(a)}\right| \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| .$$

Então a equação $f(x) = 0$ *admite uma e uma só raiz* x^* *na vizinhança* X_1, *tendo-se*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

com

$$x_0 = a,\ x_1 = \varphi(x_0), \cdots . x_n = \varphi(x_{n-1}), \cdots ,$$

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{f'(a)} f(x)$$

e

$$|x^* - x_n| \leq \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|\right)^n .$$

Dem. A condição β_1) garante $f'(a) \neq 0$ e com isso a possibilidade de construirmos a função $\varphi(x)$. Provemos que esta satisfaz as condições α_1) e α_2) do Teorema 1, onde X é agora o corpo real com a distância $\partial(x, y) = |x - y|$, desde que se tome

$$q = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| .$$

É $q < 1$ e β_1) garante $q > 0$.

Pelo teorema da média do cálculo diferencial temos $f(x) - f(x') = f'(x_1)(x - x')$ com x_1 entre os pontos x e x' de X_1. Portanto,

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(x')| &= \left| x - x' - \frac{1}{f'(a)}\Big(f(x) - f(x')\Big) \right| \\ &= \left|1 - \frac{f'(x_1)}{f'(a)}\right| |x - x'| , \end{aligned}$$

donde, usando β_2) e a definição de q,

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq q\,|x - x'| \qquad (0 < q < 1),$$

que é a condição α_1).

A condição α_2) é — com igualdade — a própria definição de q.

A função $\varphi(x)$ admite pois um ponto fixo x^* : $\varphi(x^*) = x^*$ e isto é o mesmo que $f(x^*) = 0$.

Exemplo:

Seja $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Tomando $a = 1/2$ e $\varepsilon = 1/4$ tem-se $f(a) = \frac{1}{8}$, $f'(a) = \frac{11}{4}$ e $q = \frac{9}{11}$. O leitor poderá verificar que estes valores satisfazem β_1) e β_2). Por conseguinte, $f(x)$ admite no intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ uma e uma só raiz x^*, que é um número irracional ($f(x)$ não admite raizes racionais), limite da sucessão de números racionais

$$x_0 = \frac{1}{2}, \cdots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \cdots ,$$

$$\varphi(x) = x - \frac{4}{11}(x^3 + 2x - 1),$$

tendo-se

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{9}{11}\right)^n .$$

§ 7. A equação $y = \varphi(x, y)$ em espaços métricos abstractos.

Começaremos por generalizar a espaços métricos abstractos o exemplo (3) do § 2 de um espaço completo de funções contínuas.

Sejam x e y os elementos genéricos de dois espaços métricos X e Y com as métricas ρ e δ respectivamente. Consideremos uma função $y = \eta(x)$ com o domínio X e o contradomínio em Y. Por continuidade de $\eta(x)$ num ponto x entende-se que, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe um número $\mu(\varepsilon) > 0$ tal que $\rho(x, x') < \mu(\varepsilon)$ implica $\delta(y, y') = \delta(\eta(x), \eta(x')) < \varepsilon$.

Suponhamos que Y é um espaço métrico completo e designe C o conjunto das funções $\eta(x)$ contínuas em todos os pontos $x \varepsilon X$. A função Δ definida neste conjunto por

$$\Delta(\eta, \eta_1) = \sup_{x \varepsilon X} \delta(\eta(x), \eta_1(x))$$

é uma função de distância.

Vamos provar que, com a distância Δ, o espaço métrico C é completo.

Seja então $\{\eta_n(x)\}$ uma sucessão de CAUCHY em C. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma ordem $N(\varepsilon)$ a partir da qual se tem

$$\Delta(\eta_m, \eta_n) = \sup_{x \varepsilon X} \delta(\eta_m(x), \eta_n(x)) < \varepsilon$$

e portanto

$$(1) \qquad \delta(\eta_m(x), \eta_n(x)) < \varepsilon \qquad (x \varepsilon X),$$

o que mostra que a sucessão $\eta_1(x), \cdots, \eta_n(x), \cdots$, satisfazendo a condição do CAUCHY no espaço métrico completo Y, tem certo limite $\eta(x)$. E a sucessão converge uniformemente para este limite, porquanto resulta de (1)

$$\delta(\eta(x), \eta_n(x)) \leq \delta(\eta(x), \eta_m(x)) + \delta(\eta_m(x), \eta_n(x)) < \\ < \delta(\eta(x), \eta_m(x)) + \varepsilon,$$

donde, fazendo $m \to \infty$,

$$(2) \qquad \delta(\eta(x), \eta_n(x)) \leq \varepsilon \qquad (x \varepsilon X).$$

Desta desigualdade e da continuidade das funções $\eta_n(x)$ resulta a continuidade da função $\eta(x)$, visto que

$$\delta(\eta(x), \eta(x')) \leq \delta(\eta(x), \eta_n(x)) + \delta(\eta_n(x), \eta_n(x')) + \\ + \delta(\eta_n(x'), \eta(x')).$$

Finalmente, mostra (2) que se tem

$$\Delta(\eta, \eta_n) = \sup_{x \varepsilon X} \delta(\eta(x), \eta_n(x)) \leq \varepsilon,$$

quer dizer, $\lim_{n \to \infty} \eta_n = \eta$ no espaço C.

O conjunto Z dos pares (x, y) com $x \varepsilon X$ e $y \varepsilon Y$ diz-se *produto* dos espaços X e Y. Escreve-se $Z = X \times Y$.

O teorema que vamos dar neste parágrafo refere-se a uma função $\varphi(x, y)$ de domínio no espaço produto $X \times Y$ e de contradomínio em Y.

Diz-se que a função $\varphi(x, y)$ é contínua num ponto (x, y) quando, dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, se tem

$$\delta(\varphi(x, y), \varphi(x', y')) < \varepsilon$$

sempre que $\rho(x, x') < \mu(\varepsilon)$ e $\delta(y, y') < \nu(\varepsilon)$.

TEOREMA. *Sejam* X *e* Y *espaços métricos, o segundo dos quais completo. Consideremos uma função* $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *de domínio em* $\mathrm{Z} = \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *e contradomínio em* Y *nas seguintes condições:*

α_1) $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ e' *definida e contínua na vizinhança* $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y}_1$ *do ponto* $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \varepsilon \mathrm{Z}$ *definida por* $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{a}) \leq \alpha$ *e* $\delta(\mathrm{y}, \mathrm{b}) \leq \beta$;

α_2) $\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{b}$;

α_3) $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *satisfaz a condição de* LIPSCHITZ

$$\delta(\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}')) < \mathrm{q}\, \delta(\mathrm{y}, \mathrm{y}')$$

com $0 < \mathrm{q} < 1$ *para* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \varepsilon \mathrm{Z}_1$ *e* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}') \varepsilon \mathrm{Z}_1$.

Então existe uma e uma só função $\mathrm{y} = \Phi(\mathrm{x})$ *definida e contínua numa vizinhança* $\mathrm{X}_2 \subset \mathrm{X}_1$ *do ponto* a, *tal que* $\Phi(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$, *e que na mesma vizinhança satisfaz a equação*

$$(3) \qquad \mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}).$$

Dem. Resulta de α_1) e α_2) que a função $\varphi(x, b)$ é contínua no ponto a e toma neste ponto o valor b. Será portanto

$$(4) \qquad \delta(\varphi(x, b), b) < (1 - q)\, \beta$$

para todo o x pertencente a uma certa vizinhança X_2 do ponto a definida por $\rho(x, a) < \alpha' \leq \alpha$.

Consideremos o conjunto C_1 das funções contínuas $y = \eta(x)$ com domínio X_2, de contradomínio em Y_1 — subespaço completo de Y — e tais que $\eta(a)=b$. Com a distância Δ, o conjunto C_1 é um espaço métrico completo, tal como o espaço C estudado acima e que o contém.

Vamos mostrar que a função de domínio X_2

$$\psi(x)=\varphi(x,\eta(x)) \tag{5}$$

é elemento do espaço C_1.

Temos $\psi(a)=b$. O contradomínio de $\psi(x)$ está contido em Y_1; é o que resulta de α_3) e de (4):

$$\begin{aligned}&\delta(\psi(x),b)=\delta[\varphi(x,\eta(x)),b]\leq\\&\leq\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x,b)]+\delta[\varphi(x,b),b]<\\&<q\,\delta(\eta(x),b)+(1-q)\beta\leq q\beta+(1-q)\beta=\beta.\end{aligned}$$

Resta ainda mostrar que $\psi(x)$ é contínua em X_2. Dado $\varepsilon>0$, tem-se, supondo $x,x'\,\varepsilon\,X_2$ e $y'\,\varepsilon\,Y_1$,

$$\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x',y')]<\varepsilon,$$

desde que $\rho(x,x')<\mu'(\varepsilon)$ e $\delta(\eta(x),y')<\nu(\varepsilon)$ — e isto em virtude da continuidade de $\varphi(x,y)$ no ponto $(x,\eta(x))$. Por outro lado, sendo $\eta(x)$ contínua, é

$$\delta(\eta(x),\eta(x'))<\nu(\varepsilon)$$

para $\rho(x,x')<\mu''(\varepsilon)$. Designe $\mu(\varepsilon)$ o menor dos inteiros μ' e μ''; $\rho(x,x')<\mu(\varepsilon)$ implica então

$$\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x',\eta(x'))]<\varepsilon,$$

isto é,

$$\delta(\psi(x),\psi(x'))<\varepsilon,$$

o que prova a continuidade de $\psi(x)$ em X_2.

Posto isto, podemos concluir que a definição (5) de $\psi(x)$ é uma transformação U no espaço métrico completo C_1. Para estabelecer o teorema a partir do teorema de BANACH só falta verificar se U é um operador de contracção. Mas é o que resulta de α_3):

$$\begin{aligned}&\Delta(U(\eta),U(\eta_1))=\Delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x,\eta_1(x))]=\\&=\sup_{x\,\varepsilon\,X_2}\delta[\varphi(x,\eta(x)),\varphi(x,\eta_1(x))]<\\&<\sup_{x\,\varepsilon\,X_2}q\,\delta(\eta(x),\eta_1(x))=q\,\Delta(\eta,\eta_1),\end{aligned}$$

com $0<q<1$.

Cálculo aproximado de $\Phi(x)$.

Tomando o ponto inicial $\eta_0(x)=b$, a sucessão

$$\eta_0(x)=b,\cdots,\eta_n(x)=\varphi(x,\eta_{n-1}(x)),\cdots$$

converge no espaço C_1 para a solução $\Phi(x)$, quer dizer

$$\lim_{n\to\infty}\Delta(\Phi,\eta_n)=0.$$

Tomando a iteração $\eta_n(x)$ como aproximação de $\Phi(x)$, o limite excedente do erro será dado pelo segundo membro da desigualdade

$$\Delta(\Phi,\eta_n)\leq\beta q^n,$$

a qual se obtém de (4), § 3 calculando k e usando (4):

$$k=\Delta(\eta_1,\eta_0)=\sup_{x\,\varepsilon\,X_2}\delta(\varphi(x,b),b)\leq(1-q)\beta.$$

§ 8. Sistemas de equações diferenciais.

TEOREMA. *Seja*

$$\frac{dy_i}{dx}=f(x,y_1,\cdots,y_n)\qquad(i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

um sistema de n *equações diferenciais ordinárias resolvido em ordem às derivadas e suponhamos que para*

$$|x-a|\leq\alpha,$$
$$|y_i-b_i|\leq\beta\qquad(i=1,\cdots,n)$$

as n *funções* f_i *são contínuas e satisfazem a condição de* LIPSCHITZ

$$\begin{aligned}&|f_i(x,y_1,\cdots,y_n)-f_i(x,y_1',\cdots,y_n')|<\\&<K(|y_1-y_1'|+\cdots+|y_n-y_n'|)\quad(i=1,\cdots,n).\end{aligned} \tag{2}$$

Existe então um e um só sistema de n *funções contínuas* $y_i=\varphi_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ *que verificam identicamente o sistema* (1) *para* $|x-a|\leq\alpha'<\alpha$ *e tais que* $\varphi_i(a)=b_i$ $(i=1,\cdots,n)$.

Dem. O sistema (1) com as condições iniciais $y_i(a)=b_i$ é equivalente a este outro

$$y_i=b_i+\int_a^x f_i(t,y_1,\cdots,y_n)\,dt \tag{3}$$

onde, é claro, $|x-a|\leq\alpha$.

Introduzamos o espaço K_1 da variável x e o espaço K_n das matrizes-colunas

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Definamos a função, de domínio em $K_1 \times K_n$ e contradomínio em K_n, equivalente aos segundos membros de (3),

$$\varphi(x,y) = b + f(x,y) \tag{4}$$

onde

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} \int_a^x f_1\,dt \\ \cdots \\ \int_a^x f_n\,dt \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que a função (4) satisfaz as condições α_1), α_2) e α_3) do teorema do § anterior na vizinhança $X_1 \times Y_1$ do ponto (a, b) do espaço $K_1 \times K_n$ definida pelas desigualdades

$$|x-a| \le \alpha_1, \qquad |y-b| \le \beta \tag{5}$$

na primeira das quais se fixa α_1 mediante a condição

$$\alpha_1 < \min\left\{\alpha, \frac{1}{Kn}\right\}. \tag{6}$$

Começemos por verificar a continuidade de $\varphi(x, y)$. Recordando a definição de distância em K_n (§ 2), temos:

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')| = |f(x,y) - f(x',y')| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^x f_i(t, y_1, \cdots, y_n)\,dt - \int_a^{x'} f_i(t, y'_1, \cdots, y'_n)\,dt \right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^x [f_i(t, y_1, \cdots, y_n) - f_i(t, y'_1, \cdots, y'_n)]\,dt - \right.$$
$$\left. - \int_x^{x'} f_i(t, y'_1, \cdots, y'_n)\,dt \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^x f_i(t, y_1, \cdots, y_n) - f_i(t, y'_1, \cdots, y'_n)\,dt \right| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left| \int_x^{x'} f_i(t, y'_1, \cdots, y'_n)\,dt \right| <$$
$$< Kn\,|x-a|\,(|y_1 - y'_1| + \cdots, + |y_n - y'_n|) +$$
$$+ nM\,|x - x'|,$$

utilizando a condição de LIPSCHITZ (2) e designando por M o maior dos supremos das funções f_i para $|x-a| \le \alpha$ e $|y_i - b_i| \le \beta$. Com ε positivo e arbitrário, virá, como queríamos,

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x',y')| < \varepsilon$$

desde que, sempre na vizinhança $X_1 \times Y_1$,

$$|y_i - y'_i| < \frac{\varepsilon}{2Kn^2\alpha_1}, \quad |x - x'| < \frac{\varepsilon}{2nM}.$$

A verificação da condição α_2) resulta da definição (4) de $\varphi(x, y)$ e de ser $f(a, b) = 0$.

Passemos a α_3). Pelo primeiro teorema da média do cálculo integral temos

$$\varphi(x,y) - \varphi(x,y') = f(x,y) - f(x,y') =$$
$$= \begin{bmatrix} \int_a^x [f_1(t, y_1, \cdots, y_n) - f_1(t, y'_1, \cdots, y'_n)]\,dt \\ \cdots \\ \int_a^x [f_n(t, y_1, \cdots, y_n) - f_n(t, y'_1, \cdots, y'_n)]\,dt \end{bmatrix} =$$
$$= (x-a)\begin{bmatrix} f_1(x_1, y_1, \cdots, y_n) - f_1(x_1, y'_1, \cdots, y'_n) \\ \cdots \\ f_n(x_n, y_1, \cdots, y_n) - f_n(x_n, y'_1, \cdots, y'_n) \end{bmatrix},$$

designando por $x_1, \cdots, x_n$ valores convenientes de t entre a e x. De (2) resulta então

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x,y')| < Kn\,|x-a|\,|y-y'| \le q\,|y-y'|$$

se pusermos, atendendo a (5),

$$q = Kn\alpha_1. \tag{7}$$

Mostra (6) que é $q < 1$ (além de ser $q > 0$), logo a condição α_3) está verificada.

De acordo com o teorema do § anterior existe por conseguinte uma e uma só função de domínio em K_1 e contradomínio em K_n

$$y = \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$$

contínua numa vizinhança $X_2 \subset X_1$ do ponto a definida por $|x-a| \le \alpha' \le \alpha_1 < \alpha$ que verifica identicamente a equação

$$y = \varphi(x, y),$$

equivalente às n equações (3), e tal que

$\varphi(a)=b$, isto é, $\varphi_i(a)=b_i$ $(i=1,\cdots,n)$. O teorema está provado.

Cálculo aproximado das funções $\varphi_i(x)$. A função $\varphi_i(x)$ é o limite da sucessão

$$\varphi_i^{(0)}(x)=b_i$$
$$\varphi_i^{(1)}(x)=b_i+\int_a^x f_i(t,b_1,\cdots,b_n)\,dt$$
$$\cdots$$
$$\varphi_i^{(m)}(x)=b_i+\int_a^x f_i[t,\varphi_1^{(m-1)}(x),\cdots,\varphi_n^{(m-1)}(x)]\,dt$$
$$\cdots$$

Designe $\varphi^{(m)}(x)$ a matriz-coluna das n funções $\varphi_i^{(m)}(x)$. Para $|x-a|\leq\alpha'$ temos

$$(8)\qquad |\varphi(x)-\varphi^{(m)}(x)|\leq k\frac{q^m}{1-q}$$

com

$$k=|\varphi^{(1)}(x)-\varphi^{(0)}(x)|=\sum_{i=1}^n\left|\int_a^x f_i(t,b_1,\cdots,b_n)\,dt\right|\leq Mn\alpha'.$$

Usando (7) pode pois escrever-se (8) com a forma

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^n|\varphi_i(x)-\varphi_i^{(m)}(x)|\leq\frac{M\,k^m\,(n\,\alpha')^{m+1}}{1-k\,n\,\alpha_1}.$$

É evidente que o primeiro membro de (9) pode ser substituído por $\sup|\varphi_i(x)-\varphi_i^{(m)}(x)|$ para $|x-a|\leq\alpha'$. Concluímos que a função $\varphi_i(x)$ é o limite da sucessão uniformemente convergente $\varphi_i^{(m)}(x)$, na vizinhança $|x-a|\leq\alpha'$.

§ 9. Funções implícitas.

TEOREMA. *Seja*

$$(1)\qquad f_i(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=0\qquad(i=1,\cdots,n)$$

um sistema de n *equações contendo as* m + n *variáveis reais* $x_1,\cdots,y_n$ *e suponhamos que têm lugar as condições:*

β_1) *o sistema é verificado pelos valores*

$$x_i=a_i\quad(i=1,\cdots,m),\ y_i=b_i\,(i=1,\cdots,n),$$

isto é,

$$f_i(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)=0\qquad(i=1,\cdots,n);$$

β_2) *as* n *funções* f_i *possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em relação às* m + n *variáveis para*

$$|x_i-a_i|\leq\alpha\quad(i=1,\cdots,m)$$
$$|y_i-b_i|\leq\beta\quad(i=1,\cdots,n);$$

β_3) det $M\neq0$, *sendo*

$$M=\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right]_{\substack{x_i=a_i\\ y_i=b_i}}$$

a matriz das derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *calculada para* $x_i=a_i$, $y_i=b_i$.

Então existe um e um só sistema de funções

$$y_i=\Phi_i(x_1,\cdots,x_m)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

contínuas(¹) *para* $|a_i-a_i|\leq\alpha'\leq\alpha$, *que verificam identicamente o sistema* (1) *e tais que*

$$(2)\qquad \varphi_i(a_1,\cdots,a_m)=b_i\qquad(i=1,\cdots,n).$$

Dem. Introduzamos os espaços K_m e K_n das matrizes-colunas

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix},\qquad y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

e seja $f(x,y)$ a matriz, em K_n, das n funções f_i.

Definamos a função de domínio em $K_m\times K_n$ e contradomínio em K_n

$$(3)\qquad \varphi(x,y)=y-M^{-1}f(x,y)$$

e mostremos que ela satisfaz as condições α_1), α_2) e α_3) do teorema do § 7 numa vizinhança conveniente do ponto $(a,b)\in K_m\times K_n$.

Da continuidade das funções f_i, garantida por β_2), resulta, como fàcilmente se verifica, a continuidade da função $\varphi(x,y)$ para $|x-a|\leq\alpha$, $|y-b|\leq\beta$.

De β_1), ou seja de $f(a,b)=0$, resulta $\varphi(a,b)=b$, que é a condição α_2).

Abordemos a condição de LIPSCHITZ α_3).

Pelo teorema da média do cálculo diferencial,

$$f_i(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)-f_i(x_1,\cdots,x_m,y'_1,\cdots,y'_n)=$$
$$=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^*(y_j-y'_j)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

indicando o asterisco que cada derivada é

(¹) e deriváveis; mas omitimos a demonstração da derivabilidade, que pode ver-se na primeira das obras adiante indicadas.

calculada para $x_1, \cdots, x_m$ e para um valor de y_j entre y_j e y'_j. Em K_n as fórmulas anteriores condensam-se em

$$f(x,y) - f(x,y') = M_1 (y - y'),$$

designando M_1 a matriz de elementos $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^*$.
Pondo $M_1 = M + M_2$ vem

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) - \varphi(x,y') &= y - y' - M^{-1}[f(x,y) - f(x,y')] = \\ &= y - y' - M^{-1}(M + M_2)(y - y') \\ &= -M^{-1} M_2 (y - y'). \end{aligned}$$

Em virtude de β_2) os elementos da matriz $M_2 = M_1 - M$ podem tomar-se arbitràriamente pequenos desde que se escolham os y'_j suficientemente próximos dos y_j. Fixado um número positivo $q < 1$ pode pois conseguir-se que os elementos da matriz $-M^{-1} M_2$ saiam de valor absoluto inferior a q / n^2 numa vizinhança $X_1 \times Y_1$ definida por

$$|x - a| \leq \alpha \quad , \quad |y - b| \leq \beta_1 \leq \beta.$$

Nesta mesma vizinhança será então

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x,y')| < q\,|y - y'| \qquad (0 < q < 1)$$

que é α_3) com lugar em $X_1 \times Y_1$.

Posto isto, o teorema do § 7 garante a existência de uma e uma só função contínua

$$y = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \cdots \\ \Phi_n(x_1, \cdots, x_m) \end{bmatrix},$$

isto é, de um sistema de funções contínuas

$$y_i = \Phi_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

que numa vizinhança $X_2 \subset X_1$ do ponto a definida por $|x_i - a_i| \leq \alpha' \leq \alpha \quad (i = 1, \cdots, m)$ satisfaz identicamente a equação $y = \varphi(x, y)$ ou seja $f(x,y) = 0$, ou ainda as equações (1). Além disso, $\Phi(a) = b$, que é o mesmo que (2).

O teorema está provado.

Exercício. Indique como se efectua o cálculo aproximado das funções Φ_i e mostre que a convergência das sucessões aproximantes é uniforme.

BIBLIOGRAFIA

G. Aumann, *Reelle Funktionen* (Berlim, 1954)
I. P. Natanson, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen* (Berlim, 1954)

Máximos e mínimos de algumas funções algébricas

*por **Manuel Joaquim Sousa Ventura***

Desde o primeiro número da sua publicação que a *Gazeta de Matemática* tem incluído nos seus programas uma rubrica cujos fins didáticos se têm distinado a *bem servir* os interesses dos candidatos à admissão ás Escolas Superiores.

A Gazeta procurará desenvolver mais intensamente e alimentar com mais assiduidade uma secção dedicada aos alunos do Ensino Médio, e aos pré-universitários, procurando, assim, diminuir, na medida do possível, a distância que separa o plano liceal do plano universitário.

*

A presente exposição — **Máximos e Mínimos de Algumas Funções Algébricas** — é dirigida em especial aos estudantes do 3.º ciclo e nada de novo apresentará; mas tentaremos imprimir-lhe algo de pessoal na arrumação dos assuntos, do ponto de vista didático.

Antes de levarmos alguns conhecimentos teóricos à aplicação de casos concretos, enunciaremos seis proposições e faremos as respectivas demonstrações.

O aluno deverá ter bem presente a noção de função, de continuidade de função, de máximo e de mínimo.

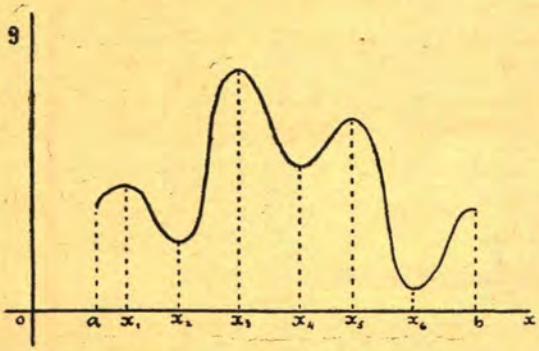
Porém, por conveniência do objectivo a que se destina o presente trabalho, sublinharemos a diferença que existe entre o conceito de *Máximo* e *Mínimo absolutos,* e o conceito de *Máximo* e *Mínimo relativos.*

Chama-se *Máximo absoluto* da função $f(x)$ no intervalo (a, b) ao limite superior dos valores que $f(x)$ assume nesse intervalo.

Anàlogamente, *Mínimo absoluto* de $f(x)$ em (a, b) é o limite inferior dos valores que $f(x)$ assume em (a, b). Diz-se então que *extremos absolutos* são os máximos e os mínimos absolutos.

Sendo $a < x_1 < b$, se o valor $f(x_1)$ é um extremo absoluto (máximo ou mínimo) de $f(x)$ nalguma vizinhança $I(x_1, e)$, diz-se que $f(x_1)$ é um *extremo local* ou *extremo relativo* de $f(x)$ no intervalo (a, b) (máximo ou mínimo, conforme o caso).

Extremo absoluto, assumido num ponto interior do intervalo (a, b), é também extremo relativo, claro. Seja, para exemplo, $y = f(x)$ uma função cuja imagem geométrica é representada pela curva da figura junta: $f(x_1)$ e $f(x_5)$ são máximos relativos; $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são mínimos relativos.



Em x_3 apresenta $f(x)$ um *máximo absoluto* (que é também um máximo relativo) e em x_6 um *mínimo absoluto* (que é também um mínimo relativo) pois $f(x_3)$ e $f(x_6)$ são, respectivamente, o maior e o menor dos valores que $f(x)$ assume em (a, b).

Outro exemplo:

A função $f(x) = 2x$ assume no invervalo $(1, 2)$, o mínimo absoluto $f(1) = 2$ e o máximo absoluto $f(2) = 4$.

$f(x) = 2x$ não apresenta extremos relativos em $(1, 2)$; a função é aí *pontualmente crescente.*

No estudo que vai seguir-se, sòmente trataremos de *extremos absolutos.*

α) O produto de dois factores variáveis, positivos, e de soma constante, atinge o seu valor máximo quando os factores forem iguais.

(Sendo possível a sua igualdade).

Sejam x e y dois factores positivos e tais que $x + y = a$ (constante).

O valor máximo do seu produto $P = x \cdot y$ tem lugar quando $x = y$.

Com efeito, sendo

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = a^2 - (x-y)^2$$

verifica-se que o máximo valor do produto $x \cdot y$ é atingido simultâneamente com o mínimo de $(x - y)^2$ ou seja para $x = y$ ($x > 0$ e $y > 0$).

À mesma conclusão se poderá chegar utilizando as propriedades do trinómio do 2.º grau:

Para isso considere-se ainda $x + y = a$ (constante) e $x \cdot y = P$; teremos, pois, x e y como raízes da equação

$$X^2 - aX + P = 0 \tag{1}$$

cujo binómio discriminante (Δ) deverá ser positivo ou nulo para se atender à positividade obrigatória de x e de y (x e y reais). Então é

$$\Delta = a^2 - 4P \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad 4P \leqslant a^2 \quad \text{ou, ainda,} \quad P \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

$\dfrac{a^2}{4}$ é o valor máximo do produto $P = x \cdot y$

e, com $P = \dfrac{a^2}{4}$ a equação (1) apresenta, pois, a raiz dupla $x = y$.

Exemplo I: Calcular o valor máximo de

$$f(x) = (1+x)(2-x), \text{ sendo } [0 < x < 2]$$

Como é $(1+x) + (2-x) = 3 =$ constante, $f(x)$ atinge o seu valor máximo para

$$1 + x = 2 - x \text{ ou } 2x = 1 \text{ ou } x = 1/2;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

é o máximo procurado.

β) *O produto de vários factores variáveis, positivos, e de soma constante, atinge o seu valor máximo quando esses factores forem iguais entre si.*

Se é
$x + y + z + \cdots + t = c$ (constante)
e se $(x, y, z, \cdots, t > 0)$
então é

(1) $P = x \cdot y \cdot z \cdots t$ máximo com $x = y = z = \cdots = t$

Se no produto $P = x \cdot y \cdot z \cdots t$ existirem factores desiguais, é fácil aumentar o seu produto parcial conservando constante a sua respectiva soma.

Com efeito, seja $y \neq z$, por exemplo. Substitua-se o factor y por $\frac{y+z}{2}$ e o factor z por $\frac{y+z}{2}$. A soma $y+z$ não é alterada por esta substituição, pois $\frac{y+z}{2} + \frac{y+z}{2} = y + z$ e o produto $y \cdot z$ atinge, desta maneira, o seu valor máximo, que é

$$\frac{(y+z)}{2} \cdot \frac{(y+z)}{2} = \frac{(y+z)^2}{4}\,*$$

Com a igualdade dos possíveis pares de factores desiguais de (1), e sem alterar a soma desses mesmos factores, consegue levar-se o produto $P = x \cdot y \cdot z \cdots t$ a atingir o seu valor máximo e, portanto, a concluir-se a afirmação da proposição β).

* Veja a demonstração da proposição α), segundo as propriedades do trinómio do 2.° grau.

γ) *Se a soma de vários factores positivos, é contante o produto destes factores afectados de expoentes racionais positivos é máximo quando estes factores forem proporcionais aos seus respectivos expoentes.*

Seja $x + y + z = c$ (constante)
Pretende-se demonstrar que o valor máximo do produto $P = x^{r/d} \cdot y^{s/d} \cdot z^{t/d}$
é atingido quando

$$\frac{x}{\frac{r}{d}} = \frac{y}{\frac{s}{d}} = \frac{z}{\frac{t}{d}}$$

$(r, s, t, d > 0$, inteiros)

(1) Sendo $P = x^{r/d} \cdot y^{s/d} \cdot z^{t/d}$ é, também, $P = \sqrt[d]{x^r \cdot y^s \cdot z^t}$. O valor máximo de P verificar-se-á simultâneamente com o valor máximo do produto

(2) $P_1 = x^r y^s z^t$ (x, y e z factores positivos).

Determinemos em que condições se verificará o máximo de (2):

O máximo de $P_1 = x^r y^s z^t$ verificar-se-á com o máximo de $P_2 = k x^r y^s z^t$, se k for uma constante.

Fazendo $k = r^{-r} \cdot s^{-s} \cdot t^{-t}$, vem

(3) $$P_2 = (r^{-r} s^{-s} t^{-t}) \cdot x^r y^s z^t = \left(\frac{x}{r}\right)^r \left(\frac{y}{s}\right)^s \left(\frac{z}{t}\right)^t = \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} \cdots \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{s} \cdot \frac{y}{s} \cdots \frac{y}{s} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{z}{t} \cdots \frac{z}{t},$$

produto de factores cuja soma

$$\frac{x}{r} + \frac{x}{r} + \cdots + \frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{y}{s} + \cdots + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} + \frac{z}{t} + \cdots + \frac{z}{t} = \frac{rx}{r} + \frac{sy}{s} + \frac{tz}{t} = x + y + z$$

é constante, por hipótese.

Mas, segundo β), o valor máximo do produto (3), [ou de (2) ou de (1) portanto], será atingido quando

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{s} = \frac{z}{t}$$

Multiplicando as igualdades anteriores por d, vem

$$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{s} = \frac{dz}{t}$$

ou

$$\frac{\frac{x}{r}}{d}=\frac{\frac{y}{s}}{d}=\frac{\frac{z}{t}}{d}$$

c. d. d.

Exemplo II: Determinar o valor máximo da função

$$f(x)=x^2(2-x) \quad \text{com} \quad (0<x<2)$$

Tendo em consideração que $x+(2-x)=2=$ constante, $f(x)$ atinge o seu valor máximo para

$$\frac{x}{2}=2-x \text{ donde se deduz } x=4/3\,;$$

$$f(4/3)=(4/3)^2\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{27}$$

é o máximo de $f(x)$.

α_1) *O mínimo da soma de dois termos variáveis, positivos, e de produto constante, verifica-se com a igualdade desses termos* (caso possam ser iguais).

Se $P=x\cdot y$ é constante, será $(x+y)$ mínimo para $x=y$ (x e $y>0$).

Com efeito, sendo $P=x\cdot y$ e $x+y=s$, o trinómio

(1) $$X^2-sX+P$$

terá x e y como zeros; e dada a natureza real de x e y, terá de ser o binómio discriminante (Δ) de (1) positivo ou nulo:

$$\Delta=s^2-4P\geqslant 0 \quad \text{ou} \quad s\geqslant 2\sqrt{P}$$

Com $s=2\sqrt{P}$ (mínimo de s), o trinómio é quadrado perfeito, e apresenta o zero duplo

$$x=y.$$

Vejamos outro caminho:

É

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$

ou

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4P \quad (P=x\cdot y, \text{ por hipótese})$$

O mínimo de $(x+y)$, ou o de $(x+y)^2$, aparece com o mínimo de $(x-y)^2$, isto é, para

$$x=y$$

visto que $x>0, y>0$, também por hipótese.

Exemplo III: Calcular o valor mínimo de

$$f(x)=\frac{1}{x}+x \quad (x>0).$$

Sendo $\frac{1}{x}\cdot x=1=$ constante, o mínimo será atingido para

$$\frac{1}{x}=x, \text{ donde}$$

$$x^2=1 \text{ ou } x=\pm 1$$

$$f(1)=\frac{1}{1}+1=2 \text{ é o mínimo.}$$

β_1) *Se o produto de vários termos variáveis, positivos, é constante, o mínimo da sua soma verifica-se quando esses termos forem iguais entre si.*

Se é $x\cdot y\cdot z\cdots t=c$ (constante) e se $(x, y, z, \cdots t>0)$ será

(1) $S=x+y+z+\cdots+t$ mínimo para $x=y=z=\cdots=t$.

Com efeito, enquanto existirem parcelas distintas é fácil diminuir a sua soma (conservando constante o seu produto parcial), por meio de substituição adequada: Consideremos, então $x\neq y$, por exemplo, e substituam-se x e y pela média geométrica entre x e y, isto é, por $\sqrt{x\cdot y}$.

Temos, $x\to\sqrt{x\cdot y}$ e $y\to\sqrt{x\cdot y}$.

O produto mantém-se inalterado, pois

$$\sqrt{x\cdot y}\cdot\sqrt{x\cdot y}=x\cdot y$$

e a soma atinge, assim, o seu valor mínimo

$$2\sqrt{x\cdot y}\,*$$

Deste modo, com a igualdade das possíveis parcelas distintas de (1), conseguiu levar-se a referida soma, $x+y+z+\cdots+t$, a atingir o valor mínimo e, portanto, a concluir-se a afirmação expressa em β_1).

Por outra via se pode ver que é

(2) $$x+y\geqslant 2\sqrt{x\cdot y}.$$

De facto, se é

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$$

* Veja a demonstração de α_1), segundo as propriedades do trinómio do 2.º grau.

é, também,

$$(x+y)^2 \geqslant 4\,x \cdot y$$

ou

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \quad (x>0 \text{ e } y>0)$$

cuja evidência impõe a veracidade de (2)

γ_1) *Se é constante o produto das potências de expoente racional e positivo de vários factores variáveis, positivos, o valor mínimo da soma desses factores tem lugar quando os factores forem proporcionais aos seus respectivos expoentes.*

Seja o produto

$$P = x^{r/d} \cdot y^{s/d} \cdot z^{t/d} = c \quad \text{(constante).}$$

O valor mínimo da soma

$$x+y+z$$

é atingido para

$$\frac{x}{\frac{r}{d}} = \frac{y}{\frac{s}{d}} = \frac{z}{\frac{t}{d}} \quad (r, s, t, d > 0, \text{ inteiros}).$$

Sendo

(1) $P = x^{r/d} \cdot y^{s/d} \cdot z^{t/d} =$ constante é, também $P = \sqrt[d]{x^r \cdot y^s \cdot z^t} = c^{te}$ e, consequentemente, é

(2) $P_1 = x^r \cdot y^s \cdot z^t =$ constante (x, y e z factores variáveis, positivos).

Se o produto (2) é constante também é constante

(3) $P_2 = k\, x^r\, y^s\, z^t$ se k for uma constante.

Fazendo $k = r^{-r}\, s^{-s}\, t^{-t}$, vem

$$P_2 = (r^{-r}\, s^{-s}\, t^{-t})\, x^r\, y^s\, z^t = \left(\frac{x}{r}\right)^r \cdot \left(\frac{y}{s}\right)^s \cdot \left(\frac{z}{t}\right)^t =$$

$$= \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} \cdots \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{s} \cdot \frac{y}{s} \cdots \frac{y}{s} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{z}{t} \cdots \frac{z}{t} = C^{te}.$$

Mas, segundo β_1), sendo o produto constante, o mínimo da soma dos factores

$$\frac{x}{r} + \frac{x}{r} + \cdots + \frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{y}{s} + \cdots + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} +$$

$$+ \frac{z}{t} + \cdots + \frac{z}{t}$$

verifica-se para

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{s} = \frac{z}{t};$$

multiplicando as igualdades anteriores por d, vem

$$\frac{dx}{r} = \frac{dy}{s} = \frac{dz}{t},$$

ou

$$\frac{x}{\frac{r}{d}} = \frac{y}{\frac{s}{d}} = \frac{z}{\frac{t}{d}}$$

c. d. d.

Exemplo IV: Calcular para que valor de x a função

$$f(x) = x^2 + x^{-1}$$

tem valor mínimo

Tendo em conta que o produto

$$(x^2)^1 \cdot (x^{-1})^2 = 1 = \text{constante},$$

teremos

$$x^2 = \frac{x^{-1}}{2} \quad \text{ou} \quad 2\,x^2 = x^{-1} \quad \text{donde se deduz}$$

$$x = \sqrt[3]{1/2}\,.$$

Outros exemplos práticos, indicados a seguir, poderão ilustrar as proposições expostas e esclarecer com mais eficiência o espírito do aluno.

Calcular os máximos das seguintes funções:

I) $\quad y = x\,(a^2 - x^2) \qquad (0 < x < a)$

II) $\quad y = \frac{2\pi}{3} \cdot x^2 \sqrt{x\,(2\,R - x)} \qquad (0 < x < 2\,R)$

III) $\quad y = \frac{x - 2\,a}{x^3} \qquad (0 < 2\,a < x)$

I

(1) $\quad y = x\,(a^2 - x^2)$ ou $y = (x^2)^{\frac{1}{2}}\,(a^2 - x^2)$.

Os factores x^2 e $(a^2 - x^2)$, de soma constante, terão produto máximo, segundo γ), quando

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = a^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad 3\,x^2 = a^2, \quad \text{ou ainda,}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

Este valor de x, substituído na expressão analítica da função proposta (1), dará

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\left(a^2-\frac{a^2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3,$$

como valor máximo

II

Como

$$y=\frac{2\pi}{3}\cdot x^2\cdot\sqrt{x(2R-x)},$$

ou

$$y=\frac{2\pi}{3}\cdot x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot(2R-x)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$y=\frac{2\pi}{3}\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot(2R-x)^{\frac{1}{2}}$$

e, além disso, é contante a soma

$$x+(2R-x)=2R,$$

deverá ser, segundo γ),

$$\frac{\frac{x}{\frac{5}{2}}}{}=\frac{2R-x}{\frac{1}{2}}$$

donde se deduz

$$x=\frac{5}{3}\cdot R$$

para valor maximizante de $y=f(x)$.

O máximo é, pois,

$$f\left(\frac{5}{3}R\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{25}{9}\cdot R^2\sqrt{\frac{5}{3}R\left(2R-\frac{5}{3}R\right)}=$$
$$=\frac{50}{81}\cdot\sqrt{5}\cdot\pi\cdot R^3.$$

III

A função

$$y=\frac{x-2a}{x^3}\text{ pode escrever-se:}$$

$$y=\frac{1}{x^3}(x-2a)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2a}{x}\right)=$$
$$=\frac{1}{4a^2}\cdot\left(\frac{2a}{x}\right)^2\left(1-\frac{2a}{x}\right).$$

Tem-se, então, dois factores de soma constante:

$$\frac{2a}{x}+\left(1-\frac{2a}{x}\right).$$

Assim, segundo γ), será

$$\frac{\frac{2a}{x}}{2}=\frac{1-\frac{2a}{x}}{1},$$

donde vem

$$x=3a.$$

Então

$$y=f(3a)=\frac{3a-2a}{(3a)^3}=\frac{1}{27\cdot a^2}$$

é o máximo procurado.

Determinar os mínimos das funções.

IV) $$y=\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}\qquad[-a<x<a]$$

V) $$y=\frac{a^8+b^2x^6}{x^2}\qquad[x>0\text{ e }a>0]$$

IV) $$y=\frac{x^3}{(x-a)^2}\qquad[0<a<x]$$

IV

$$y=f(x)=\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}$$

e tem-se

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=1.$$

Então, segundo a proposição α_1), o mínimo de $f(x)$ terá lugar para

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{a-x}{a+x}\text{ ou }(a+x)^2=(a-x)^2\text{ ou para }x=0.$$

$$f(0)=\frac{a}{a}+\frac{a}{a}=2$$

é o valor mínimo

V

$$y=f(x)=\frac{a^8+b^2x^6}{x^2}\text{ ou }f(x)=\frac{a^8}{x^2}+b^2x^4.$$

Tendo em conta a constância do produto

(1) $$\left(\frac{a^8}{x^2}\right)\cdot(b^2x^4)^{\frac{1}{2}}=a^8b^2,$$

concluimos, segundo γ_1), que $f(x)$ é mínima quando os factores entre parêntesis, de (1) forem proporcionais aos respectivos expoentes.

O valor de x minimizante de $f(x)$ sairá, pois, de

$$\frac{\frac{a^8}{x^2}}{1} = \frac{b^2\, x^4}{\frac{1}{2}}\,; \quad x = \sqrt[6]{\frac{a^8}{2\,b^2}} = a\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{2}\,b}}.$$

Então,

$$f\left(a\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{2}\,b}}\right) = \frac{a^8 + b^2\, a^6 \sqrt[3]{\left(\frac{a}{\sqrt{2}\,b}\right)^6}}{a^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{2\,b^2}}} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot a^6 \sqrt[3]{\frac{2\,b^2}{a^2}}$$

é o mínimo de $f(x)$.

VI

O mínimo de $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-a)^2}$ deve dar-se com o máximo do seu inverso aritmético (*)

$$\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} = \frac{(x-a)^2}{x^3}$$

Determine-se, então, o máximo de

$$[f(x)]^{-1} = \frac{(x-a)^2}{x^3} = \frac{1}{x^3}\,(x-a)^2 = \frac{1}{x}\left(1-\frac{a}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{x}\left(1-\frac{a}{x}\right)^2.$$

Sendo $\dfrac{a}{x} + \left(1-\dfrac{a}{x}\right) = 1$ (constante), poderemos, segundo γ), afirmar que o valor de x maximizante de $[f(x)]^{-1}$ será dado pela igualdade

$$\frac{\frac{a}{x}}{1} = \frac{1-\frac{a}{x}}{2}\,, \text{ donde se deduz } x = 3\,a\,.$$

O máximo de $[f(x)]^{-1}$, ou o mínimo de $f(x)$, é, pois,

$$f(3\,a) = \frac{(3\,a)^3}{(3\,a-a)^2} = \frac{27}{4}\,a\,.$$

A Geometria oferece campo vastíssimo à aplicação das proposições indicadas e destas vamos fazer uso em alguns problemas geométricos.

Seguir-se-á um conjunto de exercícios com as respectivas resoluções. Porém, aconselha-se ao estudante a tentativa de chegar ao fim *Só por Si*, sem recorrer às trajectórias indicadas, ou a terceiros:

— ganhará, assim, mais confiança em *Si Mesmo*, com benefício para o desenvolvimento do próprio autodomínio; poderá até descobrir caminho mais directo ou mais elegante se se alhear das nossas sugestões.

VII

De todos os pontos interiores a uma circunferência de raio R, *qual é aquele cuja potência em relação à circunferência é máxima?*

Sabe-se que qualquer ponto A do interior de uma circunferência divide as cordas que por ele passam em duas partes cujo produto é constante (para cada ponto). A essa constante chama-se *potência do* ponto A em relação à circunferência.

A circunferência de centro O, diâmetro $\overline{CD}$, raio R, representado na Fig. 1, deixa

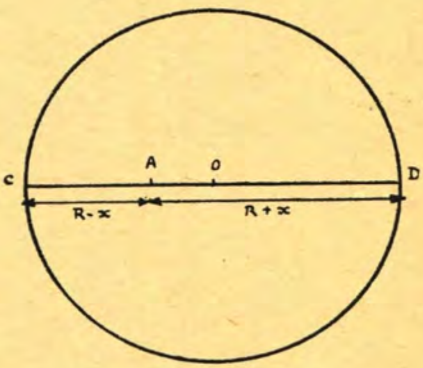


Fig. 1

ver que a potência do ponto A, em relação à circunferência referida, é

$$f(x) = (R-x)\,(R+x)$$

onde x representa a distância do ponto A ao centro da circunferência.

(*) O aluno não deve confundir as funções $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ — funções inversas — com funções $f(x)$ e $[f(x)]^{-1}$ — inversos aritméticos — .

Ora,

$$(R-x)+(R+x)=2R$$

é constante.

Então, segundo α), o maximizante de $f(x)$ é raiz da equação

$$R-x=R+x$$

ou

$$x=0$$

o que nos leva a concluir que o máximo da potência

$$f(0)=R^2$$

se verifica quando $A\equiv O$; A é o próprio centro da circunferência.

VIII

De todos os triângulos rectângulos com a mesma hipotenuza, qual é aquele cuja área é máxima?

Questão equivalente à seguinte:

Inscrever num círculo dado o rectângulo de área máxima.

Representem-se os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por x e y, respectivamente; a hipotenuza por

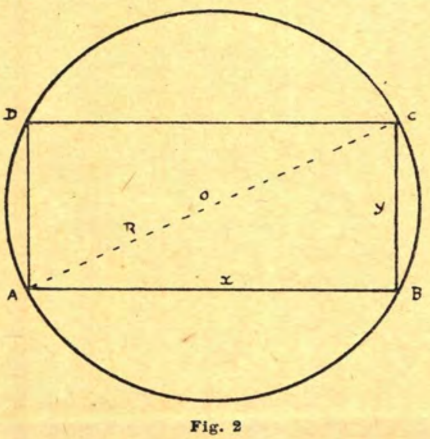


Fig. 2

$2R$ (constante) — diâmetro do círculo de centro O e raio R (Fig. 2).

Assim, será

$$(1) \qquad x^2+y^2=4R^2$$

e

$$(2) \qquad 2s=x\cdot y$$

onde s representa a área da superfície do triângulo $[ABC]$, rectângulo em B.

A eliminação da variável y entre (1) e (2) dá

$$(3) \qquad 2s=x\sqrt{4R^2-x^2}=(x^2)^{\frac{1}{2}}(4R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Como é constante a soma

$$x^2+(4R^2-x^2)=4R^2$$

teremos, conforme γ):

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}=\frac{4R^2-x^2}{\frac{1}{2}}$$

que nos fornece o maximizante

$$x=\sqrt{2}\,R$$

da função (3).

O valor $\sqrt{2}\,R$ mostra já que o quadrilátero $[ABCD]$ é *quadrado* e que o triângulo rectângulo $[ABC]$ é *isósceles*.

A confirmação pode sair de (1), pois é

$$(\sqrt{2}\,R)^2+y^2=4R^2 \quad \text{ou} \quad x=y=\sqrt{2}\,R$$

Então, o máximo da área do triângulo rectângulo de hipotenuza constante $2R$ é

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,R\cdot\sqrt{2}\,R=R^2.$$

IX

De todos os triângulos de perímetro dado, qual é o de maior área?

Sejam x, y e z os valores das medidas dos lados de um triângulo de perímetro

$$2p=x+y+z$$

A área S de qualquer triângulo, em função do seu perímetro, exprime-se mediante a conhecida expressão (de Herão de Alexandria).

$$S = \sqrt{p\,(p-x)\,(p-y)\,(p-z)}\ (^*)$$

Tendo em consideração que a soma

$$(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p - 2p = p$$

é constante e, em obediência à proposição β), poderemos afirmar que $S = f(p)$ é máxima para

$$p - x = p - y = p - z$$

ou para

$$x = y = z\,.$$

O triângulo é, pois, o equilátero, de área

$$S = \sqrt{p\,(p-x)^3} = \sqrt{p\left(p - \frac{2}{3}p\right)^3} = \frac{p^2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{p^2}{9}\sqrt{3}$$

X

a) *Inscrever num círculo de raio* R *um rectângulo de perímetro máximo*

e

b) *Circunscrever ao mesmo círculo um losango de área mínima*

a)

Na figura 3, $[ABCD]$ é um rectângulo inscrito no círculo de centro O e de diâmetro $\overline{AC} = 2R$.

Faça-se $\overline{AB} = \overline{CD} = x$ e $\overline{BC} = \overline{AD} = y$; teremos para perímetro desse rectângulo

(1) $$2p = 2(x+y) \quad \text{ou} \quad p = x + y$$

e

(2) $$x^2 + y^2 = 4R^2\,.$$

(*) O Matemático português Pedro Nunes (primeira metade do século XVI) foi autor de uma demonstração do teorema que é traduzido pela *fórmula de Herão de Alexandria.* A demonstração de Pedro Nunes é fundada em outra proposição segundo a qual a área do triângulo é igual ao semi-produto do seu perímetro pelo raio do círculo inscrito.

Vem a propósito dizer, também, que o eminente cientista português foi dos primeiros matemáticos a estudar, por via geométrica, questões de máximos e mínimos, antes que a luz do século XVII iluminasse o Cálculo diferencial.

Mas

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

ou

$$p^2 = 4R^2 + 2x\sqrt{4R^2 - x^2}$$

É evidente que o máximo de p, ou de p^2, dar-se-à com o máximo de

$$f_1(x) = 2x\sqrt{4R^2 - x^2} = 2\,(x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (4R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

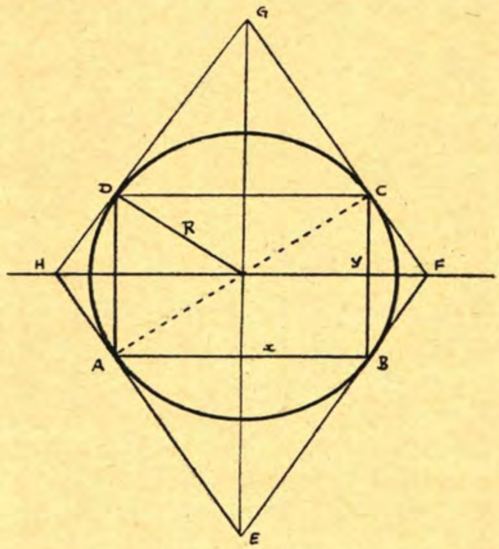


Fig. 3

Ora, sendo

$$x^2 + (4R^2 - x^2) = 4R^2 \qquad \text{(constante)}$$

podemos afirmar que

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} = \frac{4R^2 - x^2}{\frac{1}{2}}$$

donde

$$x = \sqrt{2}\,R \quad (x = y = \sqrt{2}\,R,\ \text{segundo (2)})$$

como valor maximizante de $f_1(x)$, conforme γ).

O rectângulo é, pois, um quadrado de perímetro

$$2p = 2(x+y) = 2(\sqrt{2}\,R + \sqrt{2}\,R) = 4\sqrt{2}\,R$$

b)

Na mesma figura 3, é $[E\,F\,G\,H]$ um losango circunscrito ao mesmo círcula da *a*).

A área do losango é

$$(1) \qquad S = 2\,R\cdot\overline{HG} = 2\,R\left(\overline{HD} + \frac{R^2}{\overline{HD}}\right)$$

visto ser

$$R^2 = \overline{HD}\,(\overline{HG} - \overline{HD})$$

Como o produto

$$\overline{HD}\cdot\frac{R^2}{\overline{HD}} = R^2 \qquad \text{(constante)},$$

o mínimo tem lugar para $\overline{HD} = \dfrac{R^2}{\overline{HD}}$, ou seja, $\overline{HD} = R$.

Podemos então afirmar que o losango $[E\,F\,G\,H]$ de área mínima é um quadrado tal que a sua área é, segundo 1)

$$S = 2\,R\left(R + \frac{R^2}{R}\right) = R^2 .$$

XI

Qual é o paralelipípedo de volume máximo inscrito numa esfera de raio R*?*

Sejam $x\,,y$ e z os valores das medidas das três arestas do paralelipípedo, concorrentes num mesmo vértice. Como um paralelipípedo inscrito numa esfera é necessàriamente rectângulo, o seu volume V será dado por

$$(1) \qquad V = x\cdot y\cdot z\,.$$

O máximo de V tem lugar ao mesmo tempo que o máximo de

$$(2) \qquad V^2 = x^2\cdot y^2\cdot z^2$$

e como é

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4\,R^2 \qquad \text{(constante)}$$

pode, pois, afirmar-se que o máximo de V^2 é atingido com

$$x^2 = y^2 = z^2 \qquad \text{(conforme } \beta))$$

Tem-se, portanto,

$$x = y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,R,$$

isto é, o paralelipípedo de volume máximo é o cubo de volume

$$V = \frac{8}{9}\sqrt{3}\cdot R^3$$

XII

De todos os cilindros com o mesmo volume $2\,\pi\,a^3$, *qual é aquele que pode ser inscrito na superfície esférica do menor raio?*

Na fig. 4 tem-se:

R: raio da superfície esférica de centro 0;

r: raio da base do cilindro inscrito.

x: altura do cilindro.

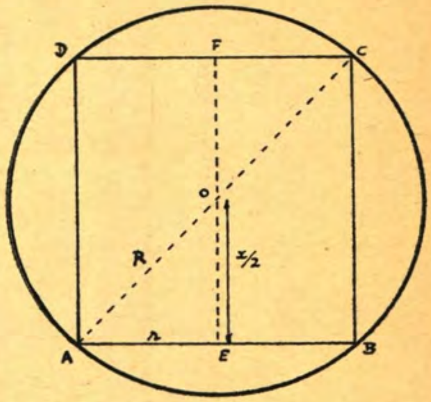


Fig. 4

O volume do cilindro será:

$$V = 2\,\pi\,a^3 = \pi\,r^2\,x$$

ou

$$(1) \qquad V = 2\,\pi\,a^3 = \pi\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)\cdot x$$

donde se deduz

$$2\,a^3 = R^2\,x - \frac{x^3}{4}$$

e

$$(2) \qquad R^2 = \frac{8\,a^3 + x^3}{4\,x} = 2\cdot\frac{a^3}{x} + \frac{x^2}{4}.$$

Sendo constante o produto

$$\left(\frac{2\,a^3}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = a^3,$$

pode recorrer-se a γ_1) para afirmar que o minimizante da função (2) — $R(x)$ — sai de

$$\frac{2a^3}{x}=\frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}}$$

ou

$$x=\sqrt[3]{4}\cdot a\,.$$

O cilindro, nas condições do enunciado, é inscrito na superfície esférica de raio

$$R^2=\frac{8a^3+4\cdot a^3}{4\sqrt[3]{4}\,a}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{4^2}\cdot a^2$$

ou

$$R=\sqrt[6]{\frac{27}{4}}\cdot a\,.$$

XIII

Inscrever numa esfera de raio R *um tronco de cone cuja base maior seja um círculo máximo da esfera e tal que seja máxima a sua área lateral.*

Sejam $\overline{AB}=2R$ e $\overline{DC}=2x$ os diâmetros das bases maior e menor, respectivamente, do tronco cuja geratriz $\overline{AD}=\overline{BC}$ é representada por g.

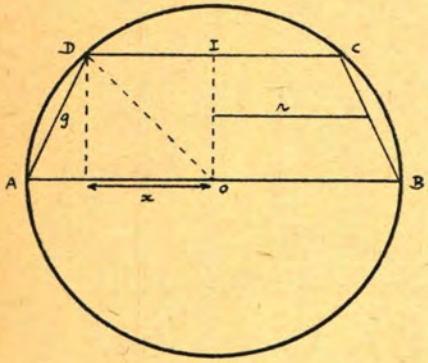


Fig. 5

A geometria elementar fornece a fórmula

(1) $$S=2\cdot\pi\cdot r\cdot g$$

para cálculo da área lateral de um tronco de cone de revolução onde r é a *mediana* do trapézio rectângulo $[OBCI]$ cuja rotação completa em torno do eixo $\overline{OI}$ gera o tronco referido.

Sabe-se que a medida da mediana é igual à semi-soma das medidas das bases do trapézio

(2) $$r=\frac{x+R}{2}.$$

Ora, da observação da figura, sai:

(3) $$g=\sqrt{2R(R-x)}\,.$$

Substituindo (2) e (3) na fórmula (1), vem

(4) $$S=2\pi\cdot\frac{x+R}{2}\cdot\sqrt{2R(R-x)}=$$
$$=\pi\sqrt{2R}\,(x+R)\,(R-x)^{\frac{1}{2}}$$

O maximizante da função $S=f(x)$ é raiz da equação

(5) $$(x+R)=\frac{R-x}{\frac{1}{2}}.$$

Note-se que

$$(x+R)+(R-x)=2R \quad \text{é constante}$$

Sendo $x=\dfrac{R}{3}$ a raiz da equação (5), é, pois,

$$S\left(\frac{R}{9}\right)=\frac{8}{9}\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\cdot R^2$$

o máximo procurado.

XIV

Considere uma esfera de raio R *e seccione-a por meio de dois planos paralelos* $\overline{\text{AB}}$ *e* $\overline{\text{A'B'}}$ *equidistantes do centro.*

Seja CC′ *o diâmetro perpendicular a estes planos.*

Qual é o máximo do volume do sólido constituído pelo cilindro A B A′ B′ *e pelos dois cones* A B C *e* A′ B′ C′*?*

Volume do cilindro A B A′ B′:

$$V_1=\pi\cdot\overline{E'B'}^2\cdot\overline{BB'}.$$

Volume dos dois cones ABC e $A'B'C'$, respectivamente,

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \overline{EB}^2 \cdot \overline{EC}$$

e

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{E'B'}^2 \cdot \overline{E'C'}.$$

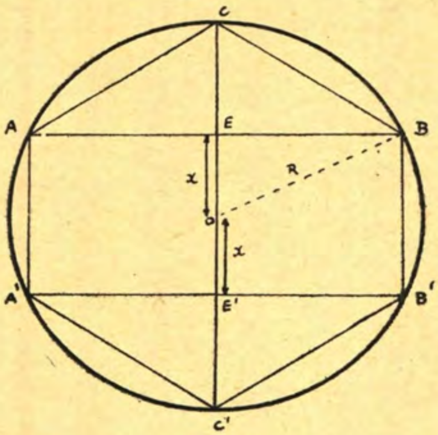


Fig. 6

Volume dos três solidos, em conjunto:

(1) $$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi \overline{E'B'}^2 \cdot \overline{BB'} + \frac{1}{3}\pi(\overline{EB}^2 \cdot \overline{EC} + \overline{E'B'}^2 \cdot \overline{E'C'}).$$

Faça-se

$$\overline{OE} = \overline{OE'} = x.$$

Será, pois, segundo a figura 6:

(2) $$\begin{cases} \overline{EB} = \overline{E'B'} = \sqrt{R^2 - x^2} \\ \overline{EC} = \overline{E'C'} = R - x \\ \overline{BB'} = 2x \end{cases}$$

A substituição destas relações (2) na fórmula (1) de $V(x)$ conduz a

$$V = \pi(R^2 - x^2) \cdot 2x + \frac{2}{3}\pi[(R^2 - x^2)(R - x)]$$

ou a

(3) $$V = \frac{2\pi}{3}(R+x)(R-x)(R+2x).$$

Com base na proposição γ), diríamos que o volume $V(x)$ seria máximo quando

$$R + x = R - x = R + 2x,$$

se a soma destes três factores fosse constante Porém, em virtude de

$$(R + x) + (R - x) + (R + 2x) = 3R + 2x$$

não ser constante, tentaremos a pesquisa de duas constantes k e λ, tais que a função

$$F = k(R - x) + \lambda(R + x) + (R + 2x)$$

não seja variável, ou, por outras palavras, seja independente de x.

Terá de ser, portanto,

$$k(R - x) + \lambda(R + x) + (R + 2x) = \text{constante}$$

ou

(4) $$(\lambda - k + 2)x + (k + \lambda + 1)R = \text{constante}$$

e, segundo o método dos coeficientes indeterminados, na aplicação à identidade de polinómios, deverá ser

(5) $$\lambda - k + 2 = 0$$

cuja verificação impõe o máximo de $V(x)$, para

(6) $$k(R-x) = \lambda(R+x) = R + 2x \quad \text{(proposição } \beta))$$

donde se deduz

(7) $$k = \frac{R+2x}{R-x} \text{ e } \lambda = \frac{R+2x}{R+x} \; (R-x \neq 0 \text{ e } R+x \neq 0, \text{ quando } V(x) \text{ é máximo})$$

A sua substituição em (5) conduz à equação

$$\frac{R+2x}{R+x} - \frac{R+2x}{R-x} + 2 = 0,$$

ou seja,

$$3x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

com as raízes $x = \dfrac{-R \pm \sqrt{13}\,R}{6}$, das quais só a positiva é útil.

Então, $x = \dfrac{-R \pm \sqrt{13}\,R}{6}$ — maximizante de $V(x)$ — substituído em (3), dá

$$V = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{(22 + 2\sqrt{13})R^2}{36}\right]\left[\frac{(2 + \sqrt{13})R}{3}\right] = \frac{\pi}{81}(35 + 13\sqrt{13}) \cdot R^3.$$

Damos a seguir os enunciados de alguns problemas do tipo dos anteriores para que o aluno possa aferir dos seus conhecimentos e sedimentar ideias.

XV

a) Será possível generalizar o Teorema β) substituindo a soma dos factores por combinações lineares?

b) Existirá *mínimo* do produto de dois números positivos de soma dada? E *máximo* da soma de dois números positivos de produto dado?

XVI

Dá-se um rectângulo de perímetro constante $4p$. Sobre os quatro lados, tomados como diâmetros, descrevem-se semi-circunferências exteriores ao rectângulo. Determinar o mínimo da área da superfície assim formada.

XVII

Considere dois pontos A e O; descreva uma circunferência de raio R, variável, com centro em O e pelo ponto A tire tangentes a essa circunferência.

Pergunta-se:

1.º) O máximo da área do triângulo isósceles formado pelas tangentes e pela corda definida pelos pontos de tangência.

2.º) O máximo da área do quadrilátero formado pelas mesmas tangentes e pelos raios que são dirigidos para os pontos de tangência.

XVIII

São dadas duas rectas paralelas r_1 e r_2 e uma terceira recta que as intersecta em dois pontos B e C, respectivamente.

Por um ponto fixo D, tomado sobre r_1 (por exemplo), passa uma recta variável que intersecta $\overline{BC}$ em I e r_2 no ponto A.

Se se designar por x o comprimento de $\overline{BI}$, para que valor de x a soma das áreas dos triângulos $[AIC]$ e $[BID]$ é mínima?

XIX

Um triângulo rectângulo roda em torno da sua hipotenuza. Dá-se o perímetro $2p$ e a hipotenuza a deste triângulo.

Pretende-se:

1.º Calcular o volume do sólido gerado;

2.º Determinar o mínimo deste volume quando a hipotenuza a varia e o perímetro $2p$ é constante.

XX

Determinar sobre a linha dos centros de duas esferas com o mesmo raio, um ponto tal que a soma das zonas esféricas vistas deste ponto seja máxima.

XXI

Determinar o máximo e o mínimo da função

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-4x+2}.$$

XXII

Com o esquema representado na Figura 7, pretende-se o seguinte:

Um carteiro, morador em C, sai duas vezes por dia de sua casa para vir à estrada $\overline{EE'}$ («*recta*» naquela região) tomar posse

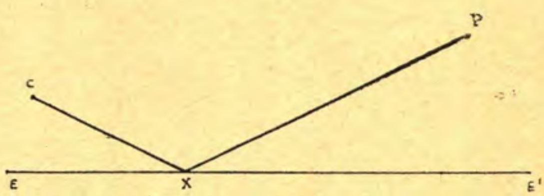


Fig. 7

das malas de correio que um autocarro ali deixa para o carteiro as transportar ao Posto P dos Correios.

a) Em que ponto X da estrada deve o autocarro largar as malas para que, naquelas condições, o carteiro percorra a mínima distância?

b) Confirme a solução por via geométrica.

Represente por m o valor mínimo da distância calculada em *a*) e responda à pergunta seguinte:

c) No plano em que se situam $C, P, \overline{EE'}$ qual será o lugar geométrico das posições de X tais que a soma das suas distâncias aos pontos fixos C e P seja m?

d) Qual a posição de $\overline{EE'}$ relativamente ao lugar geométrico de c)?

*

Estamos dispostos a esclarecer quaisquer dúvidas que porventura possam surgir e prontos a receber sugestões ou críticas construtivas.

Os estudantes poderão, assim, prestar a sua valiosa colaboração ao autor a quem se deverão dirigir por intermédio de «*Gazeta de Matemática*».

MOVIMENTO CIENTÍFICO

SOBRE A INVESTIGAÇÃO NA TEORIA DOS NÚMEROS

Em ligação com a 36.ª reunião anual da Divisão do Pacífico da Associação Americana para o Progresso da Ciência teve lugar em Pasadena no Instituto Tecnológico da California, de 22 a 24 de Junho de 1955, uma conferência sobre a investigação na teoria dos números. Participaram 75 matemáticos. Foram apresentadas as comunicações seguintes: Ernst G. Straus: The arithmetic of analytic functions, Olga Taussky Todd: Matrix methods in algebraic number theory, Morgan Ward: Divisibility sequences, Emma Lehmer: On the location of Gauss'sums, Albert Leon Whiteman: A sum connected with the partition function, Tom M. Apostol: The approximate functional equation of Hecke's Dirichlet series, Richard Bellman: The generalised theta-functions of Hecke, Siegel and Mass, Joseph Lehner: Partial-fraction decompositions and expansions of zero, Lowell Schoenfeld: On the order of the zeta function near the line $\sigma=1$, Atle Selberg. Discontinuous groups and harmonic analysis with applications to Dirichlet series and modular forms, D. H. Lehmer: New results about Ramanujan's tau function, P. T. Bateman: General properties of partition functions, Richard Brauer: Number-theoretical investigations on groups of finite order, J. T. Tate: Cohomology and class-field theory, N. C. Ankeny: Universal zeta functions, H S. Vandiver: Fermat's last theorem, Gordon Pall: Simultaneous representation by adjoint quadratic forms, Marshal Hall, Jr.: The minima of binary quadratic forms, Harvey Cohn: Accessibility of algebraic numbers with rounded norms, Emil Artin: The classical finite simple groups and their orders, J. Barkley Rosser: Some new extensions of Brun's method, Sarvadam Chowla: Remarks on Bernouilli numbers, Ivan Niven: Normal numbers, Alfred T. Brauer: The Schnirelman density of the sum of two sequences of which one has positive density.

M. Z.

CONGRESSO INTERNACIONAL SOBRE A APLICAÇÃO DA TEORIA DAS PROBABILIDADES À ENGENHARIA E ADMINISTRAÇÃO DE TELEFONES

Teve lugar em Copenhague de 20 a 23 de Junho de 1955, o primeiro congresso internacional. O comité de honra era constituído pelos cientistas: Th. C. Fry, G. J. O'Dell, F. Pollaczeck e E. Vaulot. Foram feitas as seguintes comunicações:

R. I. Wilkinson: The beginnings of the switching theory in the United States. Leon Kosten: The historical development of the theory of probability in telephone traffic engineering in Europe. R. Fortet: Probabilité de perte en sélection conjugée. A. Elldin: On equations of state for a two-stage link system. J. W. Cohen: Certain delay problems for a full-availability trunk loaded by two traffic sources. L. von Sydow: Some aspects on the variations in traffic intensity. R. I. Wilkinson: Theories for toll traffic engineering in the U.S.A. Niels Ivar Bech: Deduction of a simple relationship between traffic offered and loss probabilities for the separate traffic sources. F. I. Tånge: Optimal use of both-way circuits in cases of unlimited availability. J. Chauveau: Utilisation des formules d'Erlang dans le cas où le nombre de sources d'appel est limité. Applications au calcul des groupes secondaires de circuits de connexion dans les centraux rotary de Paris. K. M. Olsson: Some recording principles applied in time-zone-metering. K. Rander Buch: On a special use of the Erlang methods in industry. J. Rice and E. P. G. Wright: Probability studies applied to telecommunication systems with storages. A. Elldin: On the congestion in gradings with random hunting. N. Rönnblom: Loss calculations for simple gradings and pure chance traffic. K. Rohde: The significance of random sampling methods in measuring telephone traffic values. C. Jacobæus: Traffic measurements with lamp panel. E. Brockmeyer: A survey of traffic-measuring methods in the Copenhagen telephone exchanges. Leon Kosten.: Application of artificial traffic methods to telephone problems. G. Neovius: Artificial traffic trials using digital computers. S. Ekberg: Telephone traffic research with the aid of traffic analysers. S. A. Karlsson: Ein Analysator für den Fernsprechverkehr. M. Langer: Die Anpassung des Verkehrs und der Verluste, sowie die Ermittelung der Gesamtverluste. R. Syski: Analogies between congestion and communication theories. Arne Jensen: The applicability of decision theory in the planning and operation of a telephone plant. G. Leunbach: An illustration of the application of statistical decision functions in a telephone plant.

O próximo congresso realizar-se-à na Holanda em Haia em 1958. M. Z.

INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Em meados do 2.º semestre de 1954 fundou-se o Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife. A sua creação deve-se à iniciativa do Professor Luiz Freire, seu director, que encontrou apoio eficiente no Magnifico Reitor Professor J. Amazonas, a quem muito deve a Universidade do Recife e no Conselho Nacional de Pesquisas (Rio de Janeiro). O principal objectivo do Instituto é, evidentemente, a investigação no campo da Física Teórica e da Matemática mas, de momento, além desta tarefa ocupa-se também em completar a preparação científica de alguns bolseiros de Pernambuco e de estados vizinhos, que posteriormente frequentarão outros centros de pesquisas mais desenvolvidos, do País, como o I. M. P. A., ou do estrangeiro, e do aperfeiçoamento de pessoal docente de escolas do Nordeste. Deve assinalar-se a inauguração do Instituto com uma série de conferências do Prof. Arnaud Denjoy que durante algumas semanas realizou várias lições sobre assuntos da sua especialidade.

No ano escolar de 1955 funcionaram regularmente no Instituto cursos e seminários. A Física Teórica está a cargo do Prof. Luiz Freire. Da matemática ocupam-se o Prof. Newton Maia encarregado dum curso propedeutico destinado a um grande público, o Prof. A. Pereira Gomes que faz cursos sobre Topologia Geral e Algebra Moderna e tem a seu cargo orientar alguns bolseiros do Centro Nac. de Pesquisas e o Prof. M. Zaluar que foi encarregado dum curso de Cálculo das Probabilidades. M. Z.

4.º CONGRESSO MATEMÁTICO AUSTRIACO

A Sociedade Matemática Austriaca convida os matemáticos de todos os países a participar no 4.º Congresso que terá de novo um carácter internacional e que se realizará em Viena de 17 a 22 de Setembro de 1956.

O principal objectivo desta reunião é o de reatar e reforçar o contacto entre os matemáticos estrangeiros preseguindo o realizado já em Innsbruck em 1949.

Direcção: Österreichische Mathematische Gessellschaft — Technische Hochschule — Karlsplatz 13, Wien IV. M. Z.

XV CONGRESSO INTERNACIONAL DE ACTUÁRIOS NEW-YORK

O XV Congresso Internacional de Actuários celebrar-se-á na Cidade de New-York, começando no dia 14 de Outubro de 1957.

As dissertações devem ser enviadas ao Correspondente Nacional antes do dia 31 de Dezembro de 1956.

Funções do Congresso

I. Evolução e uso da equipagem electrónica do expediente e reprodução de documentos.

II. Cobertura de pensões em grupo e seguros de vida colectivos.

III. Classificação dos riscos de seguros de vida individual.

IV—A. Expressões analíticas de riscos implicados em seguros gerais.

IV—B. Influência das alterações populacionais sobre o seguro de invalidez e de vida, pensões e seguro social nacional.

IV—C. Métodos concisos para obter cálculos actuariais.

*

* *

Para informações, dirigirem-se a *Valentine Howell*, Secretário-Tesoureiro — 763 Broad Street, Newark 1, New Jersey, U. S. A.

SYMPOSIUM INTERNACIONAL SOBRE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

Está em organização um «Symposium» Internacional de Matemática sobre A TOPOLOGIA ALGÉBRICA E AS SUAS APLICAÇÕES, que se deve realizar na cidade do México durante o mês de Agosto de 1956. Será constituído por pequenos cursos e conferências sobre os recentes progressos mais importantes. Esperam os organizadores reunir os especialistas mais notáveis deste campo. Durante o «Symposium» haverá excursões aos arredores da capital mexicana.

Para mais informações dirigir-se à Sr.ª Julieta Silva, secretária do Instituto de Matemáticas, Torre de Ciências — Cidade Universitária — México 20 D. F.

PROFESSOR JACQUES HADAMARD

Sem aparato oficial, conforme desejo formal do Homenageado, celebrou-se há pouco o nonagésimo aniversário natalício do prof. JACQUES HADAMARD.

Decano da Academia das Ciências, o mais antigo membro do Instituto, HADAMARD é um dos maiores matemáticos da sua época e de todos os tempos.

A sua obra é das mais notáveis pela variedade, fecundidade e solidez: os seus primeiros trabalhos são relativos à determinação das singularidades duma função analítica a partir dos respectivos coeficientes de TAYLOR, ao estudo das funções inteiras e aplicação à teoria analítica dos números primos.

POINCARÉ, PICARD, BOREL, HADAMARD e MONTEL foram em França os grandes mestres impulsionadores da teoria das funções. Nos seus trabalhos sobre cálculo das variações e diversos problemas de física matemática assentam certas bases do moderno cálculo funcional.

As suas publicações sobre equações às derivadas parciais, particularmente do tipo hiperbólico; sobre a teoria das ondas, sobre o princípio de HUYGHENS, são consideradas como clássicas em física matemática. O tratado em dois volumes de geometria elementar não só vem «resfrescar» o ensino da geometria com a introdução de vários problemas considerados de geometria superior como fez despontar entre milhares de jóvens o desejo de estudo deste ramo das ciências matemáticas.

Nestas breves linhas não se pretende dar uma idea de extensão e riqueza da obra de J. HADAMARD.

A Gazeta de Matemática apenas deseja associar-se modestamente à homenagem recentemente prestada ao indivíduo que num período de 90 anos deu provas de possuir qualidades inexcedíveis de matemático, professor e cidadão.

J. G. T.

PROFESSOR DR. ANTÓNIO A. R. MONTEIRO

A Academia Brasileira de Ciências acaba de eleger o matemático português Dr. António Monteiro e o matemático francês Dr. Jean Dieudonné membros correspondentes da sua secção de ciências matemáticas.

A referida Academia concedeu também a medalha de ouro referente ao «Prémio Einstein» ao matemático brasileiro Dr. Lélio F. Gama, por seus trabalhos de Matemática, Magnetismo Terrestre e Astronomia.

N. R. — É com prazer que a Redacção registou a homenagem prestada ao labor científico do Dr. António Monteiro, nosso companheiro, sempre lembrado, nos primeiros anos da vida da Gazeta.

J. G. T.

ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS

A Universidade de Illinois anuncia o aparecimento em 1957 de um novo jornal de matemática — *Illinois Journal of Mathematics* — destinado à publicação de trabalhos de investigação nas matemáticas puras e aplicadas. Cada número (4 por ano) conterá cerca de 150 páginas.

Editores: REINHOLD BAER, J. L. DOOB, A. H. TAUB, *Univ. Illinois;* GEORGE W. WHITEHEAD, *Mass. Inst. of Technology;* OSCAR ZARISKI, *Harvard University.* Os artigos serão publicados em inglês, francês, alemão e italiano.

Assinatura $9.00 (4 números) e $5.00 para os sócios da American Mathematical Society.

Os interessados, leitores, assinantes ou colaboradores podem dirigir-se directamente a *Illinois Journal of Mathematics, Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, Illinois.*

A Gazeta de Matemática oferece-se com prazer a facilitar o contacto entre o público português e o novo *Illinois Journal of Mathematics.*

J. G. T.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Julho 1956.

4095 — *a*) Verificar que a imagem da função $y = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ admite uma assíntota e que esta se pode considerar limite da tangente.

b) Mostrar que os extremantes de $f'(x)$ são abcissas de pontos de inflexão da imagem de $f(x)$.

4096 — Determinar os planos que passam pela recta $x = z = 4$ e que cortam a esfera de centro na origem e raio 2, segundo as circunferências de raio 1. Escrever as equações de uma das circunferências e a equação da superfície cilíndrica que a projecta paralelamente a OX.

4097 — Transforme o polinómio $x^3 + 3x^2 + (3 - \lambda)x + 3 - \lambda$ noutro privado de 2.° termo.

Utilizando o resultado obtido, calcule λ de modo que o polinómio admita raízes iguais.

Calcule as raízes nesta hipótese.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.° Exame de frequência (ordinário) — 7-2-1956

4098 — *a*) Determinar a expressão geral dos polinómios $P(x)$ do primeiro grau tais que na decomposição de $\frac{x^2 + P(x)}{(x-1)^2(x^2+1)}$ em elementos simples o numerador da fracção cujo denominador é x^2+1 seja constante.

R: $Kx + 1$

b) Determinar m por forma que a característica da quádrica $xy + yz + xz + x^2 + my^2$ seja igual a 2 e apresentar a sua decomposição em quadrados.

$$R: m = 0 \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}(y - z)^2$$

c) Aplicar a teoria da eliminação ao estudo do sistema

$$x^3 + b x^2 - a^2 x - a^2 b = 0$$
$$x^3 - a x^2 - b^2 x + a b^2 = 0$$

R: *As raízes são* $x = a, x = -b$

4099 — Em que termos se põe o problema de interpolação polinomial?

Provar que há apenas um polinómio que satisfaz às condições do problema.

Descrever o processo para a obtenção dos coeficientes do polinómio interpolador de Newton $- f(x) -$ e mostrar que este polinómio é independente da ordem pela qual se dispõe os valores de x. Justificar a regra do «zig-zag» descrevendo a sua utilidade.

Que modificações sofrem os polinómios interpoladores de Newton e Lagrange quando os valores de x estão em progressão aritmética de razão h?

4100 — Enunciar os teoremas de Laplace, escrever as relações que os sintetizam e concluir destas a existência da matriz inversa de $A\,(n \times n)$ (regular). Sendo A^{-1} a inversa de A qual é o valor de $|A|$ se $A^{-1} = A^*$? Justificar a resposta.

Provar que a inversa de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal.

Utilizando o conceito de matriz inversa deduzir a solução do sistema $AX = B$ (igualdade matricial).

Relacionar a matriz adjunta de A com a matriz inversa A^{-1}.

Qual é a matriz inversa da adjunta de A? Justificar.

Provar que a transformada de inversa de uma matriz é igual à inversa da transformada dessa matriz.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.° Exame de Frequência Extraordinário — 20-3-56.

4101 — Dados $u_0 = 5, u_1 = 10, u_2 = 20$ e $u_3 = -8$ achar o valor de u_4 mediante a formação da correspondente tabela de diferenças. Justificar o processo utilizado.

R: $u_4 = -117$.

4102 — Decompor em quadrados a forma

$$-x^2 - 3y^2 + z^2 + 2yz - 4xz + 8xy$$

Quais são os números característicos e o índice de inércia?

Indicar como se determinam estes elementos sem fazer a decomposição em quadrados.

$$R: \; -(x - 4y + 2z)^2 + \frac{1}{19}\left(19y - 7z\right)^2 + \frac{46}{19}z^2.$$

4103 — Dados dois polimónios A e B, indicar, justificando, como se determina o seu *m. d. c.*.

Enunciar o teorema de Bezout e deduzi-lo com base na teoria da eliminação. Provar que divisor de AH, primo com A, divide H.

Aplicando a teoria da eliminação, determinar para que valores de m tem raízes comuns o sistema

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$
$$x^3 - 3x^2 - x + m + 1$$

e calculá-las

R: $m = 2$ e $m = 5$. *Para* $m - 2$ *as raízes comuns são* 1 *e* -1 *e para* $m = 5$ *a raiz comum é* 2.

4104 — Provar que um determinante nulo, sendo diferente de zero o complemento de certo elemento, a coluna desse elemento é composição linear das restantes colunas.

Definir matriz simétrica de A e provar que $A A^*$ é simétrica; mostrar que, em geral, o produto de duas matrizes simétricas só é matriz simétrica se os factores são permutáveis.

Antemultiplicando o sistema $AX = B$ por A^* deduzir uma regra para resolver $A^* A X = A^* B$ em função da solução do primeiro.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Milicianos — 17/12/55.**

4105 — O polinómio $f(x)$ de grau inferior a $m+n$ verifica as seguintes condições:

$$f(x_1) = f'(x_1) = \cdots = f^{(m-2)}(x_1) = 0, f^{(m-1)}(x_1) = (m-1)!$$
$$f(x_2) = f'(x_2) = \cdots = f^{(n-2)}(x_2) = 0, f^{(n-1)}(x_2) = (n-1)!$$

Utilizando a decomposição da fracção $\dfrac{f(x)}{(x-x_1)^m (x-x_2)^n}$ em elementos simples, determine a expressão analítica de $f(x)$. Indique as raízes de $f(x)$ e os respectivos graus de multiplicidade.

R: $$\frac{f(x)}{(x-x_1)^m (x-x_2)^n} = \frac{1}{(x_1-x_2)^n (x-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)^m (x-x_2)}$$

e portanto

$$f(x) = (x-x_1)^{m-1} (x-x_2)^{n-1} \left[\frac{x-x_2}{(x_1-x_2)^n} + \frac{x-x_1}{(x_2-x_1)^m}\right].$$

O polinómio tem as raízes x_1 *de multiplicidade* $m-1$, x_2 *de multiplicidade* $n-1$ *e a raiz simples*

$$\frac{x_2(x_2-x_1)^m + x_1(x_1-x_2)^n}{(x_2-x_1)^m + (x_1-x_2)^n}.$$

4106 — Sendo $g(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n x^{n-1} + \cdots$ mostre que $f(x, y) = y^3 + 3y + 4g(x) = 0$ define uma só função $y(x)$, qualquer que seja x compreendido no intervalo de convergência de $g(x)$.

Determine o sentido da concavidade de $g(x)$ no ponto $P(0, -1)$.

R: $f'_x(x, y) = \dfrac{8}{(1-x)^3}\ |x| < 1\ f'_y(x, y) = 3(y^2+1) \neq 0$ *portanto* $f(x, y) = 0$ *define* $y(x)$ *desde que* $|x| < 1$. *Como* $\left(\dfrac{d^2 y}{d x^2}\right)_{(0,-1)} < 0$ *a concavidade está voltada para baixo.*

4107 — Dado o determinante $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$ calcular os elementos da 1.ª linha sabendo que os complementos algébricos da 2.ª e 3.ª são, respectivamente: $1\ -2\ -1,\ -3\ 1\ 3$.

R: $a_1^1 = 1\quad a_1^2 = 0\quad a_1^3 = 1$.

I. S. T. — Matemática Gerais — **1.º Exame de Frequência — 1954-55**

4108 — É dada uma sucessão $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ que tem por limite x. Provar que a sucessão $a_{10^1}, a_{10^2}, a_{10^3} \cdots$ tende para o mesmo limite.

4109 — Diga que valor deve ser atribuido à função $\dfrac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \operatorname{sen} x}$ no ponto $x = 0$ de modo que a função seja continua.

4110 — Dada uma sucessão $a_1 a_2 a_3 \ldots$ que tende para o limite π mostrar que são iguais o limite superior dos números ε, para os quais há infinidade de *aa* que lhes são superiores e o limite inferior dos números η para os quais há apenas um número finito de *aa* que lhes são superiores.

4111 — Se num grupo de ordem p^n onde p é número primo, C_λ é o número de classes de conjugados com p^λ elementos, em particular C_0 o número dos elementos do centro, então é $p^p = C_0 + C_{1p} + C_{2p} + \cdots$.

Prove que o centro dum grupo de ordem p^n não se reduz ao elemento unidade.

4112 — Dados 2 elementos a e b que comutam entre si, pertencentes a um domínio de integridade com elemento um e característica a prove que $(a+b)^{a^7} = a^{a^7} + b^{a^7}$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame ordinário — 24-6-1955.**

4113 — Poderá ser convergente a série de termo geral imaginário $\dfrac{1 + 2i + n}{2 + 3i + n}$?

4114 — Escreva as equações que resolvem o problema seguinte:

1) dividir 20 em partes tais que o produto do cubo da primeira pelo quadrado da segunda seja máximo ou mínimo.

4115 — Determine a equação do cone de revolução cujo vértice é: $(0,1,0)$ e cuja geratriz faz 45° com o respectivo eixo, este último suposto em OXY.

4116 — Determine a característica da matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 9 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 13 & 8 \\ -1 & 0 & 5 & 9 & 5 \\ 3 & -9 & 12 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

4117 — Resolva o sistema

$$\begin{array}{rrrrr} 2x & +3y & -z & = & 5 \\ x & -y & +z & = & 2 \\ x & -2y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & -z & = & -3 \end{array}$$

4118 — Se K é um corpo considere o domínio de $K[x,y]$. Mostre que se tem $(x):(y)=(x)$

4119 — Mostre que os anti-automorfismos e os automorfismos dum anel formam um grupo de transformações no qual os automorfismos são sub-grupo invariante de índice 1 ou 2.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.° Exame de Frequência — 3-3-1956.

4120 — Faça passar pela recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-0}{1}$ um plano que diste 1 da origem. Determine o ângulo desse plano com o plano $x0y$

4121 — Discutir o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} x+2y-z&=k \\ 3x+y-2z&=2 \\ -2x+y+z&=k^2 \end{aligned}$$

em função de k.

Determine as soluções positivas do sistema quando o sistema é compatível. Se as equações do sistema representassem planos, em que condições os planos formavam uma superfície prismática?

4122 — Resolva a equação $x^6-1=0$. Quais as raízes primitivas?

4123 — Mostre que o afixo do complexo $z=a+b.t$, em que a e b são constantes complexas, descreve uma recta quando t varia de $-\infty$ a $+\infty$. Qual a equação cartesiana dessa recta? Que curva descreve o afixo de $\frac{1}{z}$?

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — 1.° Exame de frequência — 1954-1955.

4124 — Sejam $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ números reais. Considere o conjunto dos pares (α,β) e defina nesse conjunto uma soma pela lei seguinte

$$(\alpha,\beta)+(\alpha',\beta')=(\alpha+\alpha',\beta+\beta')$$

Mostre que a correspondência $(\alpha,\beta)\to\alpha$, é um homomorfismo, e determine o seu núcleo.

4125 — Determine o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico finito.

4126 — Considere um plano oblíquo qualquer. Determine o seu traço no $\beta_{2,4}$ utilizando uma recta de perfil do plano.

4127 — Dadas 3 rectas não complanas duas a duas, mostre, construindo, que é possível haver um recta paralela a uma delas e que encontra as outras duas.

4128 — Dadas 2 rectas, uma paralela ao $\beta_{2,4}$ e outra paralela ao $\beta_{1,3}$ conduzir por um ponto não pertencente a nenhuma das rectas dadas, uma recta parela ao $\beta_{2,4}$ que as encontre.

Observação: Resolver o problema sem recorrer à LT, no caso em que tiver solução.

Enunciar a condição necessária e suficiente para que o problema tenha solução.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 15-3-56.

4129 — $\mathfrak{G}$ é um grupo -Ω e $\mathfrak{H}$ um invariante -Ω de $\mathfrak{G}$. Suponhamos que $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}=\bar{\mathfrak{G}}\supset\bar{\mathfrak{G}}_1\supset\bar{\mathfrak{G}}_2\supset\ldots\supset\bar{\mathfrak{G}}_k=(x)\}$ é uma série de composição de $\bar{\mathfrak{G}}$, e suponhamos que

$$\{\mathfrak{H}\supset\mathfrak{H}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{H}_t=(x)\}$$

é uma série de composição para $\mathfrak{H}$.

Diga se $\mathfrak{G}$ tem série de composição e construa uma tal série.

4130 — Seja $\mathfrak{H}$ um invariante em $\mathfrak{G}$ (Ω vazio). Mostre que $\mathfrak{G} \simeq \bar{\mathfrak{G}} \times \mathfrak{H}$ em que $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, se e só se existe um endomorfismo E, tal que $x E = x$, para todo o $x \in \mathfrak{H}$.

4131 — Seja $\mathfrak{M}$ um módulo com respeito a $\mathfrak{S}$ (anel simples, com elemento um, e completamente redutível). $\mathfrak{M}$ tem um número finito de geradores. Supondo que um é operador unitário em $\mathfrak{M}$, mostrar que $\mathfrak{M}$ é completamente redutível, e cada submódulo é isomorfo de um ideal de $\mathfrak{S}$.

4132 — Diz-se que o ideal $\mathfrak{R}$ é primo, se o facto de $\mathfrak{R} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{L}$, implicar, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}$, ou $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{R}$. Mostrar que qualquer ideal impotente está contido em ideal primo.

4133 — Mostrar que se $\mathfrak{a}$ é anel regular com um só idempotente, ele é o elemento um. Mostrar ainda que $\mathfrak{a}$ é simples, e ver se é ou não anel de divisão.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º Exame de Frequência — 1.ª chamada — 11-6-1955

I

4134 — *a*) Decomponha em quadrados a forma quadrática seguinte:

$$2\,x_1\,x_2 - 2\,x_1\,x_4 + 6\,x_2\,x_3 - 3\,x_3^2 + 2\,x_3\,x_4$$

b) Reduza a quádrica à forma canónica.

II

4135 — Seja $f(x)$ um polinómio real de raízes $r_1, r_2, \cdots r_n$ e designe $F(x)$ o polinómio de raízes $-(r_i - r_k)^2$ $(i \neq k)$. Mostre que $F(x)$ tem também coeficientes reais.

Sendo $F(x)$ completo de coeficientes todos positivos, prove que $f(x)$ não pode admitir raízes imaginárias nem iguais.

Mostre que, recìprocamente, tendo $f(x)$ raízes reais e distintas $F(x)$ é completo e apresenta variações nos coeficientes. Determine a equação $F(x) = 0$, correspondente à equação

$$f(x) = x^3 + p\,x + q$$

exprimindo os coeficientes de $F(x)$ nas funções simétricas fundamentais das raízes de $f(x)$.

Deduza dos resultados uma condição necessária e suficiente para que a equação real $f(x) = 0$ tenha um par de raízes imaginárias.

III

4136 — Sejam A e B (reais) 2 matrizes quadradas $(n \times n)$ e designe λ um valor próprio de $A\,B$.

a) Prove que λ é valor próprio de $B\,A$.

b) Mostre que existe uma matriz coluna X não nula satisfazendo à equação matricial

$$B\,X = \lambda\,A^{-1}\,X\,.$$

Considere em particular a hipótese de A e B serem matrizes simétricas, sendo A matriz de forma quadrática definida positiva.

c) Que se pode afirmar dos valores próprios de A? e dos de A^{-1}?

d) Prove que nas condições indicadas, λ é sempre real.

IV

4137 — Seja

T) $\quad \Delta_n(x), \Delta_{n-1}(x), \cdots \Delta_2(x), \Delta_1(x), \Delta_0(x)$

uma cadeia principal própria da matriz $|A + x\,I|$ (A é simétrica real e de ordem n). (Em cadeira própria dois Δ_i consecutivos não são idênticamente nulos).

a) Quantas variações perde a sucessão T) na passagem de $-\infty$ a $+\infty$?

b) Estude o comportamento da sucessão na passagem por um ponto c que não anula $\Delta_n(x)$.

c) Prove que $\Delta_n(x)$ tem exactamente n raízes reais.

d) Mostre que se μ é raíz de multiplicidade α de $\Delta_n(x)$ é de multiplicidade $\alpha - i$ para Δ_{n-i} $(i = 1, 2, \cdots \alpha - 1)$

e) Em que condições pode T) considerar-se como uma sucessão de Sturm?

Comente os resultados para o efeito do estudo dos valores próprios de A.

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 15-6-1955.

I

4138 — Sejam r_1, r_2, r_3 as 3 raízes de equação $x^3 + p\,x + q = 0$. Construa, utilizando a teoria das funções simétricas a equação cujas raízes são

$$\alpha_1 = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$$
$$\alpha_2 = (r_2 - r_1)(r_2 - r_3)$$
$$\alpha_3 = (r_3 - r_1)(r_3 - r_2)$$

II

4139 — Seja $f(x)$ um polinómio de grau n, com n raízes reais e distintas:

a) prove que $f(\alpha) \,.\, f''(\alpha) < 0$ qualquer que seja a raíz α de $f'(x)$.

b) Designem $g(x)$ e $r(x)$ o cociente e o resto da divisão de $f(x)$ por $f'(x)$. Prove que $r(x)$ é de grau $n-2$ e as suas raízes separam as de $f'(x)$ e que as raízes de $g(x) \cdot r(x)$ separam as de $f(x)$.

c) Prove, pelas condições indicadas, que a sucessão de FOURIER de $f(x)$ relativa ao intervalo $(-\infty, +\infty)$ é uma sucessão de STURM.

d) Faça pelo método de STURM a contagem das raízes reais da equação

$$x^5 + 5\,p\,x^3 + 5\,p^2\,x + 1 = 0\,.$$

III

4140 — Sejam $H_1, H_2, \cdots H_\mu$ com $\mu = \binom{n}{r}$ os menores de ordem r da matriz $A\,(n \times n)$ contidas nas suas r primeiras linhas e $K_1, K_2, \cdots, K_\mu$ os respectivos complementos algébricos.

a) Por que motivo é

$$|A\,A^*| = \left(\sum_1^\mu H_i K_i\right)\left(\sum_1^\mu H_j K_i\right)?$$

b) Considere a hipótese das r primeiras linhas, constituindo a sub-matriz B, serem perpendiculares às restantes $r-n$ formando a sub-matriz C.

Justifique as seguintes igualdades:

$$|A\,A^*| = |B\,B^*|\,|C\,C^*| = \left(\sum_1^\mu H_i^2\right)\left(\sum_1^\mu K_i^2\right).$$

c) Deduza do confronto das relações anteriores que

$$\sum (H_i K_j - H_j K_i)^2 = 0 \qquad (i \neq j)$$

e que, portanto, nas condições indicadas, cada menor H_i é proporcional ao seu complemento algébrico.

d) Comente deste ponto de vista o comportamento de uma matriz A ortogonal.

IV

4141 — *a*) Prove que $S^*\,C\,S$ é matriz simétrica sempre que C seja matriz simétrica.

b) Mostre que se $A\,(n \times n)$ é decomponível num produto $A = B\,C$ de matrizes simétricas o mesmo acontece com qualquer matriz semelhante a A.

c) Tendo em atenção que

$$\begin{bmatrix} 0\cdots & 0\,\lambda \\ 0\cdots & \lambda\,1 \\ 0\cdots\lambda & 1\,0 \\ \cdots\cdots & \\ \lambda\,1\,0 & \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\,0\cdots 0\,0\,1 \\ 0\,0\cdots 0\,1\,0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1\,0\cdots 0\,0\,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,0 & \cdots 0 \\ 1\,\lambda & \cdots 0 \\ 0\,1\,\lambda & \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \\ 0\cdots & 1\,\lambda \end{bmatrix}$$

demonstre que toda a matriz quadrada é decom ponível num produto de matrizes simétricas.

d) Mostre que a matriz simétrica real, definida positiva é congruente com matriz identidade por transformação real. Conclua daqui que na decomposição

$$A = B\,C$$

sendo B e C matrizes simétricas reais, B só é definida positiva se A for semelhante a uma matriz diagonal real.

GEOMETRIA PROJECTIVA

I

F. C. L. — GEOMETRIA PROJECTIVA — Exame final — 1.ª época — 2.ª chamada — 7-1955.

4142 — *a*) Defina elementos conjugados e elementos polares em relação a uma cónica. Indique como uma cónica pode determinar involuções sobre as formas de 1.ª espécie do seu plano. Defina figuras polares recíprocas em relação a uma cónica e diversas auto-polares, enunciando os teoremas que a estes respeitam.

4143 — *b*) Defina homologia plana, enuncie o teorema que permite definir a sua característa e o respecpectivo corolário. Defina uma homologia especial e uma homologia hormónica. Enuncie as proposições que respeitam às rectas de fuga de uma homologia e defina as homologias particulares que conhece.

4144 — *c*) Defina quádricas regradas, enumere-as, enuncie os teoremas que respeitam às quádricas duplamente regradas e indique o número de rectas necessárias para definir uma quádrica duplamente regrada e qual a sua posição relativa.

II

4145 — *a*) Defina uma homologia que converte a circunferência circunscrita ao triângulo rectângulo $[A\,B\,C]$ dado, onde $\hat{A} = 90°$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$, numa hipérbole equilátera com eixo paralelo à recta $\overline{BC}$. Eixos, assíntotas e vértices da hipérbole homológica. Tangentes paralelas a uma direcção escolhida.

4146 — *b*) Considere um $\Delta\,[M\,N\,P]$ isósceles $\overline{MN} = \overline{MP}$ e a parábola passando em N e P, e nesses pontos tangente a $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ respectivamente.

Determine:

a) o eixo e o vértice da parábola.

b) a tangente paralela à recta $\overline{MV}$ sendo V o vértice parábola.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — 2.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 30-4-56.

4147 — 1. Determine os extremos da função

$$u = x\,y\,z\,[1-(x+y+z)].$$

4148 — 2. Estude os pontos singulares e a envolvente da família de curvas $x(x-1)^2 = (2-x)(y-\lambda)^2$.

4149 — 3. Considere a equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = n\,u$$

onde u é função de x, y e z e sejam ξ, η, ζ novas variáveis dadas por $\xi = \dfrac{x}{z}, \eta = \dfrac{y}{z}, \zeta = z$. Exprimindo du nas variáveis x, y e z e depois em ξ, η e ζ, aproveite os resultados para achar a transformada da equação dada quando x, y, z se substituem por ξ, η, ζ.

4150 — 4. Enuncie o teorema relativo à existência e derivabilidade dum sistema de funções implícitas e deduza as expressões das suas derivadas de primeira ordem em relação às variáveis de que dependem.

4151 — 5. Defina indicatrizes esféricas relativas a uma curva torsa e os vectores que considera para as suas definições; escreva a expressão das componentes de tais vectores relativas a um ponto de uma curva torsa definida por equações paramétricas em coordenadas cartesianas.

4152 — 6. Escreva a equação vectorial das superfícies regradas. Indique o significado das grandezas que nela figuram; defina superfícies empenadas e sua linha de estricção e enuncie a lei de Chasles que respeita a tais superfícies.

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 2.ª Prova prática — 3-5-1955.

4153 — Máximos e mínimos da superfície de equação $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

R: *O sistema das duas primeiras derivadas parciais* $3x^2 - 3y = 0, 3y^2 - 3x = 0$ *tem as soluções* A (0,0), B (1,1). *Escreveram-se os resultados a formar o seguinte quadro*

		A (0,0)	B (1,1)
$p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$	$r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$	$= 0$	$= 6$
$q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$	$s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$	$= -3$	$= -3$
	$t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$	$= 0$	$= 6$
	$s^2 - rt$	> 0	< 0

No ponto A (0,0) *não há extremo e no ponto* B (0,0) *há um extremo; por serem* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$ *há um mínimo igual a* $f(1,1) = -1$

4154 — Em que se transforma $b^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ quando se faz a mudança de variáveis $u = y + bx$, $v = y - bx$?

R: *A função* $f(x,y)$ *transforma-se em* $F(u,v)$ *e vem*

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = \frac{\partial F}{\partial u}(dy + b\,dx) + \frac{\partial F}{\partial v}(dy - b\,dx) =$$

$$= \left(b\frac{\partial F}{\partial u} - b\frac{\partial F}{\partial v}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b\frac{\partial F}{\partial u} - b\frac{\partial F}{\partial v} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

Calculando as diferenciais de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *temos*

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du + b\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}dv - b\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}du -$$

$$- b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}du = \left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - b\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\right)(dy + b\,dx) +$$

$$+ \left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)(dy - b\,dx) =$$

$$= \left(b^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - b^2\frac{\partial^2 F}{d v \partial u} - b^2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)dx +$$

$$+ \left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - b\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy$$

donde resulta

$$\frac{\partial^2 f}{d x^2} = b^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

Anàlogamente

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}dv+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}du+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\right)(dy+b\,dx)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)(dy-$$
$$-b\,dx)=\left(b\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+b\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}-b\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy$$

donde resulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

Agora, vem imediatamente com os valores achados:

$$b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2b^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}\right).$$

4155 — Calcular o volume do cilindroide cuja base em XOY é o segmento determinado na parábola $y^2=8x$ pela recta $x=2$, e cuja tampa é o plano $y+z=3$.

R: *O volume do cilindroide é dado por*

$$V=\iint_\Delta z\,dx\,dy$$

onde Δ *é a base e* $z=f(x,y)$ *é a equação da tampa; mas no caso que se está a considerar, a equação da tampa,* $z=3-y$, *muda de sinal nos pontos de* Δ *e deve decompor-se o segmento de parábola em duas partes por meio da recta* $y=3$ *traço da tampa no plano da base.*

Fixando então y *entre* -4 *e* 3, *as rectas paralelas a* OX *cortam a fronteira da base em pontos de abcissa* $\frac{y^2}{8}$ *e* 2. *Logo, o integral duplo relativo à parte* Δ_1 *da base onde* $z\geqslant 0$, *será*

$$V_1=\iint_{\Delta_1}z\,dx\,dy=\int_{-4}^{3}dy\int_{\frac{y^2}{8}}^{2}(3-y)\,dx=$$
$$=\int_{-4}^{3}\left(6-2y-\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{8}y^3\right)dy=$$
$$=18-9-\frac{27}{8}+\frac{81}{32}+24+16-\frac{4^3}{8}-\frac{4^4}{32}$$

e vem $$V_1=\frac{1029}{32}$$

O integral duplo relativo à parte Δ_2 *da base onde* $z\leqslant 0$, *será*

$$V_2=\iint_{\Delta_2}-z\,dx\,dy=-\int_3^4 dy\int_{\frac{y^2}{8}}^{2}(3-y)\,dx=$$
$$=-\int_3^4\left(6-2y-\frac{3}{8}y^2+\frac{1}{8}y^3\right)dy=\frac{5}{32}$$

Então, $$V=V_1+V_2=\frac{1034}{32}$$

Fixando x *entre* 0 *e* 2, *devido à naturesa da fronteira da parte* Δ_1, *as rectas pararelas a* $\overrightarrow{OY}$ *cortam a fronteira de* Δ_1 *em pontos de ordenadas* $-\sqrt{8x}$ *e* $+\sqrt{8x}$, *sempre que* x *estiver entre* 0 *e* $\frac{9}{8}$; *as rectas paralelas a* $\overline{OY}$ *cortam a frontiira de* Δ_1 *em pontos de ordenadas* $-\sqrt{8x}$ *e* 3, *quando* x *se conservar entre* $\frac{9}{8}$ *e* 2. *Portanto,*

$$V_1=\iint_{\Delta_1}z\,dx\,dy=\int_0^{\frac{9}{8}}dx\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}}(3-y)\,dy+$$
$$+\int_{\frac{9}{8}}^{2}dx\int_{-\sqrt{8x}}^{3}(3-y)\,dx=\frac{1029}{32}$$

Para a parte Δ_2 *da base onde* $z\leqslant 0$, *vem*

$$V_2=\iint_{\Delta_2}-z\,dx\,dy=-\int_{\frac{9}{8}}^{2}dx\int_3^{\sqrt{8x}}(3-y)\,dy=\frac{5}{32}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 2.ª prova prática — 4-5-1955.

4156 — Em que se transforma a soma $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ quando se faz a mudança de variáveis $x=u\cdot\cos\theta-v\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y=u\cdot\mathrm{sen}\,\theta+v\cos\theta$?

R: *Diferenciando temos* $\begin{cases}dx=du\cos\theta-dv\,\mathrm{sen}\\ dy=du\,\mathrm{sen}\,\theta+dv\cos\theta\end{cases}$

e resolvendo $\begin{cases}du=dx\cos\theta+dy\,\mathrm{sen}\,\theta\\ dv=-dx\,\mathrm{sen}\,\theta+dy\cos\theta.\end{cases}$

Como a função $z=f(x,y)$ *se transforma em* $F(u,v)$, *temos*

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=\frac{\partial F}{\partial u}(dx\cdot\cos\theta+dy\,\mathrm{sen}\,\theta)+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial v}(-dx\,\mathrm{sen}\,\theta+dy\cos\theta)=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cos\theta-\frac{\partial F}{d v}\mathrm{sen}\,\theta\right)dx+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\partial F}{\partial v}\cos\theta\right)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

donde se conclui

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cos\theta-\frac{\partial F}{\partial v}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\partial F}{\partial v}\cos\theta\,.$$

Portanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\cos^2\theta-2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\cos^2\theta=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2.$$

4157 — Máximos e mínimos da superfície de equação $z=\frac{y^3}{3}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4\right)y-x^2\left(\frac{2}{3}x+1\right)+1$.

R: *O sistema das duas derivadas parciais* $x(x+1)(y-2)=0\,,\ y^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4=0$ *tem as soluções* $A(0,2)\,B(0-2)\,C\left(-1,\sqrt{\frac{23}{6}}\right)\,D\left(-1,-\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$ $E\left(-\frac{3}{2},2\right)$. *Os resultados encontram-se no seguinte quadro:*

$p=\frac{\partial z}{\partial x}=x^2y+xy-2x^2-2x$	$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2xy+y-4x-2$
$q=\frac{\partial z}{\partial y}=y^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4$	$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x^2+x$
	$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2y$

	$A(0,2)$	$B(0,-2)$	$C\left(-1,\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$
r	$=0$	$=-4$	$=2-\sqrt{\frac{23}{6}}>0$
s	$=0$	$=0$	$=0$
t	$=4$	$=-4$	$=2\sqrt{\frac{23}{6}}$
s^2-rt	$=0$	$=-16$	<0

	$D\left(-1,-\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$	$E\left(-\frac{3}{2},2\right)$
r	$=-2+\sqrt{\frac{23}{6}}$	$=0$
s	$=0$	$=-\frac{3}{4}$
t	$=-2\sqrt{\frac{23}{6}}$	$=4$
s^2-rt	>0	>0

Nos pontos D *e* E *não há extremos. No ponto* C *há extremo e como* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *e* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *são positivos o extremo é um mínimo* $z=f\left(-1,\sqrt{\frac{23}{6}}\right)$. *No ponto* B *há um máximo de valor* $z=f(0,-2)$. *A forma quadrática correspondente à segunda derivada no ponto* A, *reduz-se a* $\varphi(\lambda_1,\lambda_2)=4\lambda_2^2$ *e, vem sempre positiva para todos os pares* $(\lambda_1,\lambda_2\neq 0)$ *e só se anula para* $\lambda_2=0$. *A superfície tem secções com* mínimos *nos planos* $\frac{x}{\lambda_1}=\frac{y-2}{\lambda_2}\ (\lambda_2\neq 0)$. *O estudo prossegue apenas com o plano* $y=2\ (\lambda_2=0)$. *Tem-se:* $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\lambda_1^3\equiv 0$ *e* $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\lambda_1^4\equiv 0$ *e todas as outras formas são identicamente nulas em* λ_1, *com* $\lambda_2=0$. *A secção que a superfície tem no plano* $y=2$ *reduz-se a uma recta. Portanto, a superfície tem no ponto* $A(0,2)$ *um* mínimo no sentido lato *ou largo, com o valor* $z=f(0,2)$. *Os mínimos da superfície dispõem-se ao longo da recta:* $y=2\,,\ z=f(0,2)$.

4158 — Calcular o volume determinado pelo plano $x=0$ na superfície de revolução gerada pela revolução da curva $y^2+2p(x-a)=0\,,\ z=0$ em torno de $\overrightarrow{OX}$.

R: *A superfície é um paraboloide de revolução e o volume do sólido é*

$$V=\int_0^a dx\iint_{S(x)} dy\,dz=\int_0^a dx\left[\pi\left(\sqrt{-2p(x-a)}\right)^2\right]$$

onde $S(x)$ *representa o círculo determinado no paraboloide pelo plano* $x=K$ *com* K *entre* 0 *e* a. *Tem-se*

$$\iint_{S(x)} dy\,dz=\pi\left(\sqrt{-2p(x-a)}\right)^2$$

visto que esses círculos têm raio $\sqrt{-2p(x-2)}$; *este raio é real visto que* $0\leqslant x\leqslant a$. *Resulta*

$$V=\pi\int_0^a -2p(x-a)\,dx=-2p\pi\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_0^a=a^2p\pi.$$

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — 2.º Exame de frequência — 1-6-1955.

4159 — Dado um sistema de m equações a $m+n$ incógnitas

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

enuncie as condições em que ele se pode resolver nas incógnitas $x_1,x_2,\cdots,x_m$, expressas cada uma nos $y_1,y_2,\cdots,y_n$.

Considere-se o caso particular

$$F_i=y_i-f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

e demonstre, à luz da proposição anterior, a relação que há entre os iacobianos

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_m)}{\partial(x_1 x_2 \cdots x_m)}, \frac{\partial(x_1 x_2 \cdots x_m)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_m)}$$

Em que condições o sistema

$$\begin{cases} x^2 - a^2 y - z^3 = 0 \\ x^2 + y^3 + a z = 0 \end{cases} \quad (a \text{ é um parâmetro real})$$

define uma curva em torno da origem? Considere a família de cilindros que projectam aquelas curvas sobre o plano YOZ e determine o cilindro envolvente.

R: *As condições enunciam-se assim:*

Dado o sistema de m *equações a* m + n *incógnitas*

$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$

1.º) *se o sistema é verificado no ponto* $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$ *de* R_{m+n}

2.º) *se as funções* F_i *são contínuas no rectângulo centrado em* P_0

$|y_q - y_q^0| < b, |x_r - x_r^0| < a \quad q = 1, 2, \cdots, n \quad r = 1, 2 \cdots, m$ *e neste rectângulo, admitem derivadas parciais contínuas*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_r} \cdot \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \quad (r = 1, 2, \cdots, m)$$

3.º) *se o determinante funcional*

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)}$$

é diferente de zero no ponto $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots x_m^0, y_1^0, \cdots y_n^0)$

Nestas condições existem m *funções*

$$x_r = \varphi_r(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad (r = 1, 2, \cdots m)$$

definidas, finitas e contínuas, em certo rectângulo de R_n *centrado em* $Q_0(y_1^0, y_2^0, \cdots y_n^0)$ *e definido pelas desigualdades*

$$|y_q - y_q^0| < a' \quad (q = 1, 2, \cdots, n)$$

A solução indicada é única, e toma em Q_0 *os valores* x_r^0.

Para aplicar esta proposição ao sistema particular

$$F_i = y_i - f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

supomos que em certo ponto $P_0(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0, x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ *se tem*

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_m)} \neq 0$$

e ainda as outras condições indicadas; então, existem funções

$$x_r = \varphi_r(y_1, y_2, \cdots, y_m) \quad (r = 1, 2 . \cdots m)$$

Ora, entre os iacobianos há a relação seguinte

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)} = \frac{\partial(F_1 F_2, \cdots, F_m)}{\partial x_1, (x_2 \cdots, x_m)} \times$$
$$\times \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}$$

donde resulta imediatamente, na vizinhança do ponto $Q_0(y_1, y_2, \cdots y_m)$, *a relação*

$$1 = \frac{\partial(y_1 y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1 x_2, \cdots, x_m)} \times \frac{\partial(x_1 x_2, \cdots, x_m)}{\partial(y_1 y_2, \cdots, y_m)}$$

O sistema

$$\begin{cases} x^2 - a^2 y - z^3 = 0 \\ x^2 + y^3 + a z = 0 \end{cases}$$

é satisfeito pelas coordenadas da origem, e a matriz funcional

$$\begin{Vmatrix} 2x & -a^2 & -3z^2 \\ 2x & 3y^2 & a \end{Vmatrix}$$

tem característica dois, visto que: $\begin{vmatrix} -a^2 & -3z^2 \\ 3y^2 & a \end{vmatrix} \neq 0$

na origem, se $a \neq 0$

Então existem duas funções

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

que são equações paramétricas da curva, intersecção das duas superfícies nas vizinhanças da origem.

Os cilindros projectantes são os que têm a equação obtida eliminando x, *isto é:* $a^2 y + z^2 + y^3 + a z = 0$

Derivando esta equação em ordem ao parâmetro a; $2ay + z = 0$ *e a eliminação do parâmetro conduz ao cilindro envolvente*

$$\frac{z^2}{4y} + z^2 + y^3 - \frac{z^2}{2y} = 0$$

ou $$z^2(y - 1) + y^4 = 0$$

4160 — Diga o que se entende por cilindroide de base quadrável Δ determinado por $z = f(x, y)$.

Quando é que este cilindroide é cubável, e qual é o seu volume expresso como limite dos volumes de poliedros?

Demonstre que a condição necessária e suficiente para o referido cilindroide ser cubável, é que $f(x, y)$ seja integral em Δ.

Se a fronteira Γ do domínio Δ é a curva formada pelo arco $\widehat{AB}$ da parábola $y^2 = x$, e o segmento de recta $\overline{AB}$ onde $A[4, 2]$ e $B[4, -2]$; se a função é $z = x y^2 + y^4$; justifique o facto de se poder exprimir o volume do cilindroide com o integral curvilíneo

$$\int_\Gamma \left(\frac{x^2}{2} y^2 + x y^4 \right) dy$$

Calcule o volume do cilindroide.

R: *O cilindroide* C *é cubável, se e só se, existe uma sucessão de poliedros contendo* C *e de volumes* P_n, *e uma sucessão de poliedros contidos em* C *e de volumes* p_n, *de tal modo que a todo o* $\delta > 0$ *arbitrário, se pode fazer corresponder* N *tal que*

$$P_n - p_n < \delta \quad para \quad n \geq N$$

O volume de cilindroide é então $V = \lim P_n = \lim p_n$

O volume pode exprimir-se com aquele integral curvilíneo devido à formula de RIEMANN: $\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy =$

$$= \int_\Gamma Q(x,y)\,dy\,.$$

Tem-se:

$$\int_\Gamma \left(\frac{x^2}{2} y^2 + x y^4\right) dy = \iint_\Delta (x y^2 + y^4)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} (x y^2 + y^4)\,dy = 2\int_0^4 dx \left(x \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)_0^{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \int_0^4 x^{5/2}\,dx = 2 \cdot \frac{2^3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{7} \cdot 2^7 =$$

$$= \frac{2^{16} \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2^{16}}{7\,!}$$

4161 — Defina ponto ordinário e ponto singular duma curva plana; diga como se estuda a curva na vizinhança dum seu ponto singular e classifique as singularidades.

Indique a natureza dos pontos singulares da curva

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 + 3x^2)$$

R: *Se* $f(x,y) = 0$ *é a equação da curva, as condições* $f(x_0, y_0) = 0$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \neq 0$ *ou* $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \neq 0$ *permitem afirmar a existência dum arco de curva contínua passando por* $P(x_0, y_0)$ *e admitindo uma tangente ordinária nesse ponto que será um ponto ordinário da curva.*

Se $f(x,y) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *simultâneamente num mesmo ponto, o ponto é singular.*

A fórmula de TAYLOR, *na vizinhança dum ponto singular*

$$f(x+h, y+k) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{(n)} + R_{n+1}(x)$$

permite estudar a vizinhança da ponto e determinar as tangentes.

A curva tem um ponto isolado na origem.

4162 — Defina curvatura duma curva, tanto no caso da curva plana como da curva torsa. Diga o que é a circunferência de curvatura e deduza as expressões mais correntes do raio de curvatura.

Como determina a evoluta duma curva plana e que relação tem ela com os conceitos anteriores?

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — Exame final escrito — 15-10-1955.

4163 — Prove que o integral indefinido de RIEMANN é função contínua e estude as condições de existência da derivada.

Calcule a derivada da função

$$F(z) = \int_{a(z)}^{b(z)} f(x)\,dx$$

Qual é o valor da constante a qne torna racional a primitiva de

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-a)}{(x^2-1)^2}\,?$$

R: *No caso de* $f(x)$ *ser contínua para* $x = a$ *e* $x = b$, *tem-se*

$$F'(z) = f[b(z)] \cdot b'(z) - f[a(z)] \cdot a'(z)$$

Pondo

$$\frac{(x-2)(x-a)}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

vem

$$x^2 - (a+2)x + 2a = (B+D)x^3 + (A - B + C + D)x^2 + (-2A - B + 2C - D)x + (A + B + C - D)$$

eliminando A *e* C *entre o segundo e quarto coeficientes vem*

$$B - D = a - \frac{1}{2}$$

e com

$$B + D = 0$$

vem

$$B = -D = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}$$

Vê-se pois que a primitiva é racional para $a = \frac{1}{2}$.

4164 — Diga quando existem os integrais

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \int_b^a \varphi(x)\,dx$$

sendo $\varphi(x)$ infinitamente grande na vizinhança esquerda de $x = b$ $(a < b)$.

Enuncie e demonstre condições suficientes de existência daqueles integrais: utilize essas condições para definir as funções $\beta(a,b)$ e $\Gamma(a)$.

4165 — Defina envolvente duma família de curvas planas: diga como se determina a equação discutindo o sistema a que se chega.

A determinação da envolvente de $f(x,y,a) = 0$ não se pode fazer quando esta equação está resolvida relativamente ao parâmetro a: porque?

Determine a envolvente da família das rectas cada uma das quais, com duas rectas dadas, forma um triângulo de área dada $2K$.

R: *A determinação da envolvente de* $f(x, y, a) = 0$ *conduz ao sistema*

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0 \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

Para deste sistema passarmos a outro, equivalente, onde

$$\begin{cases} a = \varphi(x, y) \\ f'_a(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

a primeira equação deste último sistema deverá ser a função de x, y *implìcitamente definida pela primeira equação do outro sistema,* $f(x, y, a) = 0$, *e é precisamenté o que sucederá quando a resolvermos em ordem ao parâmetro* a.

Mas, a existência dessa função implícita só ficará assegurada nos pontos (x, y) *onde for* $f'_a(x, y, a) \neq 0$ *(teorema da função implícita)*

Daqui resulta geralmente a não equivalência dos dois sistemas.

Tomemos as duas rectas dadas para sistema de eixos e seja w *o ângulo dessas duas rectas.*

A equação da recta variável será $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ *e a área do triângulo formado pelas três rectas*

$$2K = \frac{1}{2} a b \operatorname{sen} w$$

onde a *é o parâmetro variável*

Eliminando o parâmetro entre as duas equações

$$\begin{cases} a^2 \cdot y \cdot \operatorname{sen} w - a \cdot 4K + 4Kx = 0 \\ -\frac{x}{a^2} + \frac{y \operatorname{sen} w}{4K} = 1 \end{cases}$$

resulta, por ser $a^2 = \frac{4Kx}{y \operatorname{sen} w}$ *e* $a = \pm\sqrt{\frac{4Kx}{y \operatorname{sen} w}}$

$$\mp\sqrt{\frac{4Kx}{y \operatorname{sen} w}} + 2x = 0$$

ou $\frac{4Kx}{y \operatorname{sen} w} = 4x^2$ *ou* $xy = \frac{K}{\operatorname{sen} w}$

A envolvente é uma hipérbole que tem por assíntotas as duas rectas dadas.

4166 — O que é uma equação diferencial linear e homogénea?

Enuncie algumas propriedades devidas à linearidade e homogeneidade da equação.

Demonstre que, se

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$$

são integrais da equação

$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p^{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$ linearmente independentes na vizinhaça de $x = x_0$, onde $p_0(x_0) \neq 0$, aqueles mesmos integrais serão linearmente independentes em todo e qualquer intervalo onde $p_0(x) \neq 0$.

Resolva a equação $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$ sabendo que e^{2x} é um integral.

R: *A demonstração pedida obtem-se a partir da fórmula de Liouville, que se pede para estabelecer.*

A equação característica $p^3 - 4p^2 + 9p - 10 = 0$ *deverá admitir a raiz* $p = 2$ *e com efeito:* $p^3 - 4p^2 + 9p - 10 = (p - 2)(p^2 - 2p + 5)$

As outras raízes da equação característica são: $1 \pm 2i$

O integral geral é: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \operatorname{sen} 2x$

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — **1.º Exame de frequência — 2.ª chamada — 3-1956**

4167 — 1) Um movimento rígido plano resulta, por composição, das rotações

$\mathbf{w}_1(0, 0, (1 - 4t); 0, 0, 0)$ $\mathbf{w}_2(0, 0, 4t; 12t^2, 0, 0)$

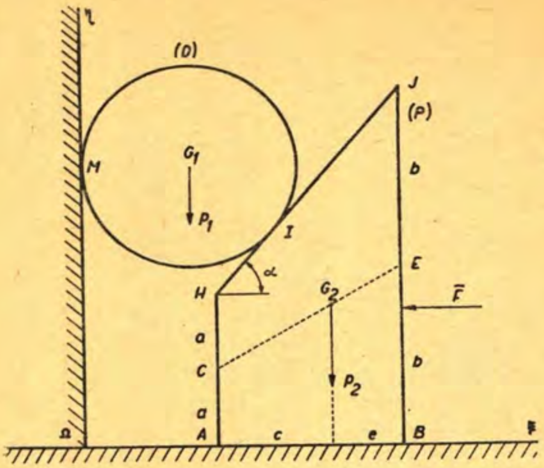
e da translação $\tau = 24t \cdot \mathbf{J}$. (Unidades: metro e segundo).

1*a*) Exprima em $f(t)$ a rotação intantânea $\mathbf{w}$ do movimento, as coordenadas do centro instantâneo de rotação $I(\xi_1, \eta_1)$, as componentes da velocidade de permutação V deste centro instantâneo e as componentes da aceleração do ponto que momentâneamente coincide com ele.

1*b*) Exprima em $f(t, \xi, \eta)$ as componentes da aceleraçãode um ponto $M(\xi, \eta)$ qualquer da figura móvel e, por integração, tire das expressões obtidas as leis do movimento desse ponto sob forma paramétrica. Mostre acessòriamente que existe um ponto na figura móvel que descreve no plano fixo o eixo $\Omega\eta$. Eixos de referência do movimento: $\Omega\xi\eta$.

1*c*) Deduza as equações das curvas polares: a da base em coordenadas cartesianas, a da rolante em coordenadas polares.

4168 — 2) Um sistema é constituído como a figura mostra. Disco circular e trapézio são homogéneos e pesam respectivamente p_1 e p_2. Conhecidos estes pesos, as dimensões do sistema e as posições dos centros de massa G_1 e G_2, calcular a força F que deve ser aplicada horizontalmente ao trapézio à altura de G_2,



para equilibrar o sistema na configuração representada. O cálculo deverá ser feito

2a) pelo teorema do trabalho virtual

2b) pelo método das reacções, analítica ou geomètricamente.

2c) Exprima em função dos pesos p_1, p_2, das dimensões do sistema e dos parâmetros de que a sua configuração depende, todas as reacções que intervem no estudo do seu equilibrio, indicando para cada uma delas grandeza, direcção e sentido.

Não há atrito.

4169—3) Examine se a mediana do trapézio considerado no problema de estática pode ser eixo principal de inércia nalgum dos seus pontos. (Assinala-se que é nulo o integral $\int x_1 y_1 \, dS$ estendido á área do trapézio, em que x_1 e y_1 são coordenadas obliquas referidas á mediana e a uma paralela às bases).

4170—4) Mostre que há pontos M de um sólido em movimento cujas velocidades contemporâneas tem suportes concorrentes. Prove que estes suportes pertencem a um cone de segunda ordem e que o lugar dos pontos M considerados é geralmente uma cúbica de dupla curvatura. (Lembra-se que os eixos coordenados para tratar o problema posto podem ser escolhidos em posição particular que simplifica os cálculos e põe mais em evidência as conclusões a estabelecer; e acrescenta-se que uma cúbica de dupla curvatura resulta da intersecção de duas quádricas com uma geratriz rectilinea comum).

NOTA: O aluno deve procurar responder às preguntas 1a), 1b), 2a), 2b) e 2c). As preguntas 3) e 4) são facultativas.

F. C. P. — Mecânica Racional — 1.º Exame de Frequência (1.ª chamada) — 2-1956.

4171 — A) Dado o estado cinético definido pela expressão

$$\mathbf{v}_m = [(-4 + Y + 3Z)\mathbf{I} + (-14 - X - 2Z)\mathbf{J} + \\ + (6 - 3X + 2Y)\mathbf{K}] \cdot f(t) \quad (\text{unidades } m, s),$$

em que X, Y, Z representam as coordenadas de um ponto M num referencial $OXYZ$ fixo no espaço e $f(t)$ uma função de t a determinar:

1) mostre que corresponde a um movimento rígido;

2) calcule as componentes da rotação instantânea do movimento;

3) escreva as equações do eixo helicoidal tangente, calcule as suas coordenadas vectoriais, determine o passo do movimento e mostre que o estado cinético considerado corresponde a um movimento permanentemente helicoidal;

4) examine se o movimento é dextrorsum ou sinistrorsum;

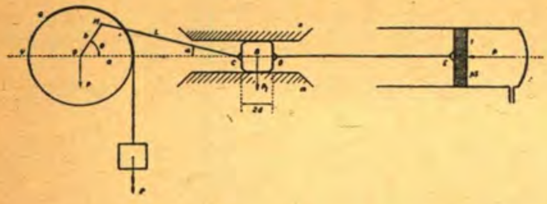
5) calcule, em módulo, a velocidade, a aceleração tangencial e a acelaração normal dos pontos distantes $3\,m$ do eixo helicoidal;

6) fixe a função $f(t)$ de modo que o movimento seja uniformemente retardado a partir do instante $t = 0$ e cesse de sê-lo no instante $t = 5\,s$;

7) suponha que o referencial $OXYZ$ do movimento considerado nas alíneas anteriores—agora movimento relativo — está animado de um movimento de transporte, em relação a $O_1 X_1 Y_1 Z_1$, composto de uma rotação $\Omega = \Omega(t)\mathbf{K}$ em volta do eixo $O_1 Z_1$, com o qual OZ a todo o momento coincide, e de uma translação $\tau = \tau(t)\mathbf{K}$ (paralela a este eixo), e deduza uma expressão vectorial da acelaração complementar de um ponto H situado sobre o eixo do movimento relativo;

8) supondo $\Omega(t)$ dada, poderá determinar $\tau(t)$ de modo que o movimento absoluto implícito na alínea anterior seja constantemente tangente a uma rotação? No caso afirmativo que valor deve atribuir a $\tau(t)$?

4172—B) Um sistema plano é constituido como a figura indica. Um embolo transmite o efeito pS da pressão p, que se exerce sobre a sua face 1, ao botão da manivela OM solidaria com o volante V móvel em volta do seu eixo. Num ponto Q de V está fixo um cabo que se apoia contra a sua períferia e pende verticalmente sob a acção de um peso P. Peso do volante p; peso da placa rígida $B:p_1$; despreze os pesos próprios do cabo, das barras MO, MC, DE;



volante e placa B são homógeneos; não há atrito entre a placa e as guias m e n, nem em nenhuma das articulações, nem no eixo de V. As articulações são pontuais.

9) Para a configuração desenhada, determine o valor da pressão sobre o êmbolo que equilibra um peso dado P, pelo método das reacções;

10) Determine completamente as reacções que se desenvolvem em O e em M e entre a placa B e as guias m (ou n);

11) Partindo de P como um dado determine gràficamente as reacções exteriores e interiores e o valor da força pS, correspondentes à configuração de equilíbrio considerada em 9);

12) Determine pS pela aplicação do teorema do trabalho virtual.

4173 — C) O centro das acelerações de um movimento rígido paralelo a um plano fixo poderá coincidir momentâneamente com o centro instantâneo de rotação? Se a resposta for afirmativa caracterize um caso em que aquela coincidência se verifique.

4174 — D) Deduza as condições analíticas a que devem satisfazer as coordenadas vectoriais $(\mathbf{u}, \mu)$ de quatro rectas para ser possível localizar sobre elas:

D 1) um sistema de forças em equilíbrio.

D 2) dois sistemas de forças, linearmente independentes, separadamente também em equilíbrio.

NOTA — O aluno deve procurar responder às preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12.

As preguntas 8, 11, C e D são facultativas.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

108 — Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles; Second colloque sur les équations aux dérivées partielles — Centre Belge de Recherches Mathématiques — Georges Thone, Liège et Masson & Cie., Paris — 1954.

O Centro Belga de Investigação Matemática consagrou à teoria das equações às derivadas parciais dois colóquios que se realizaram em Lovaina e Bruxelas, em Dezembro de 1953 e Maio de 1954, respectivamente. Participaram nestas reuniões além de matemáticos belgas vários especialistas estrangeiros convidados pelo Centro. As comunicações foram publicadas em dois fascículos, de que a seguir publicamos a relação.

Primeiro colóquio: A. Lichnerowicz, Equations de Laplace et espaces harmoniques — Y. Fourès, Résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques du second ordre non linéaires — J. Delsarte, Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et sur une généralisation de la théorie des fonctions de Bessel et des fonctions hypergéométriques — G. Doetsch, L'application de la transformation bidimensionnelle de Laplace dans la théorie des équations aux dérivées partielles — Th. Lepage, Equations du second ordre et transformations symplectiques — P. Gillis, Sur certaines classes d'équations aux dérivées partielles du second ordre, non linéaires — R. Sauer, Remarques géométriques sur les équations aux dérivées partielles du second ordre quasilinéaires et homogènes.

Segundo colóquio: Mauro Picone, Sur un problème nouveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathématique classique de l'élasticité — Laurent Schwartz, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques — J. L. Lions, Problèmes aux limites de type mixte, Jean Leray, Intégrales abéliennes et solutions élémentaires des équations hyperboliques — M. Brelot et G. Choquet, Polynômes harmoniques et polyharmoniques — G. de Rham, Sur certaines équations de la théorie des formes différentielles harmoniques — H. G. Garnir — «Fonctions» de Green pour les problèmes aux limites de l'équation des ondes — L. Fantappiè, Les nouvelles méthodes d'intégration, en termes finis, des équations aux dérivées partielles.

M. Z.

109 — Colloque sur l'analyse statistique — Centre Belge de Recherches Mathématiques — Georges Thone, Liège et Masson & Cie., Paris, 1955.

O oitavo colóquio internacional promovido pelo Centro Belga de Investigação Mathemática foi dedicado à análise estatística. Teve lugar em Bruxelas em Dezembro de 1954. Foram as seguintes as comunicações apresentadas: G. Darmois, Sur la régression. Résultats nouveaux. Problèmes non résolus — A. Blanc-Lapierre, Considérations sur certains processus ponctuels et sur des fonctions aléatoires associées — B. de Finetti, La notion de «horizon bayesien» — D. van Dantzig, Sur les ensembles de confiance généraux et les méthodes dites non paramétriques—M. J. Hemelrijk, Exemple d'application des méthodes non paramétriques et un nouveau test pour l'égalité de plusieurs probabilités — M. S. Bartlett, The statistical analysis of stochastic processes — D. Dugué, Deux notions utiles en statistique mathématique: les ensembles aléatoires bornés «en loi» et la continuité fortement uniforme en probabilité—E. Franckx, Sur les jeux stratégiques finis—P. Gillis et S. Huybrechts, Théorie des jeux sur le carré-unité—H. Breny, A propos de la méthode de Daniels pour l'échantillonnage des faisceaux de fibres parallèles.

M. Z.

110 — Julia, Gaston — **Cours de Géométrie Infinitésimale** — 1er. fasc. «Vecteurs et tenseurs Théorie élémentaire» 2ème éd -1953; 2ème fasc. «Cinématique et géométrie cinématique. Première partie: Généralités». 2ème éd. — 1955 — Gauthier-Villars, Paris.

Trata-se duma nova edição revista e ampliada do curso escrito pelo Autor para os alunos da Escola Politécnica de Paris. O primeiro fascísculo consta de um único capítulo que abrange a álgebra dos vectores e dos tensores em coordenadas cartesianas rectângulares e oblíquas bem como elementos de Análise vectorial e tensorial (estudo dos operadores gradiante divergência e rotação, etc.). O segundo fascículo compreende 4 capítulos que tratam da cinemática do ponto; cinemática do sólido, generalidades, velocidades e acelerações; composição de movimentos e aplicações; movimento finito de um sólido conhecido o movimento instantâneo, método do triedro móvel.

A obra, como é de esperar, é escrita com rigor e clareza.

M. Z.

111 — G. Bouligand — **Mécanique Rationnelle** — 1954 — *Vuibert* — Paris.

A nova edição da Mecânica Racional de Bouligand, além de reunir no mesmo volume os seus *Précis* e *Compléments et Exércices* têm muitas ampliações e melhoramentos.

O Autor orienta o seu trabalho no sentido de ministrar um ensino entremeado de problemas, conseguindo que por meio duma participação activa do leitor se esclareçam diversas questões de princípio e se desenvolva simultâneamente o espírito crítico.

Ao mesmo tempo o estudante sente-se impelido a leituras orientadas para os trabalhos de Poincaré, Appell, Painlevé, Hadamard, Birkhoff, E. Cartan, Chazy etc.

Na primeira parte do livro tratam-se os problemas clássicos: teoria dos vectores, cinemática, geometria das massas e cinética, princípios e teoremas gerais da dinâmica e aplicação ao corpo sólido, dinâmica analítica, estabilidade, pequenos movimento, princípio da menor acção, choques e percussões, problemas de dinâmica sem atrito, complementos de dinâmica analítica, mecânica dos fios, dos meios deformáveis e fluídos, velocidade da luz, espaço-tempo e gravitação.

A segunda parte é dedicada à cinemática e dinâmica dos sistemas com atrito: movimento dum plano sobre um plano, movimento dum sólido; forças de ligação, atrito, choque com atrito de escorregamento, teoria energética do choque com atrito, ligações unilaterais. A obra termina com a solução, do Autor, de dois problemas de exame e duas notas origiuais

Como em todos os restantes livros de Bouligand, o leitor encontra neste um estudo sério e profundo dos assuntos, tratados. O Autor consegue dar à mecânica racional, não obstante a sua axiomática simplista, uma estrutura de ciência exacta e perfeita. J. G. T.

112 — R. Gouyon — **Le Probléme de Mécanique Rationnelle à l'Agrègation** — 1954 — *Vuibert* — Paris

Trata-se dum volume com 256 páginas de problemas resolvidos cuja índole supõe numa prévia iniciação nos métodos e princípios da mecânica racional.

O Autor inícia o volume por 4 notas distribuidas por 30 páginas: na nota I pretende pôr em destaque o facto das equações de Lagrange se estenderem naturalmente aos movimentos com atrito; na nota II insiste sobre uma clara compreensão de diversas generalizações do teorema do movimento cinético; a terceira nota expõe a teoria dos choques com atrito servindo-se do método dos teoremas gerais; na última aplica as equações de Lagrange aos problemas de choque.

As restantes 226 páginas contém as soluções dos problemas propostos em França na «Agregation» durante 20 anos.

Do mesmo problema, diversas soluções são, por vezes, encarados e sugeridos e apresentam-se vantagens de cada método indicado.

Em toda a obra o Autor aplica o máximo de concisão e o leitor nunca será dispensado do esforço pessoal sem o qual não é possível formação eficaz.

J. G. T.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — **AKADEMIE-VERLAG — Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin — Berlin**

Alexander Kurosch — *Gruppentheorie.*

I. P. Natanson — *Theorie der Funktionen einer reellen Veründerlichen.*

Achieser-Glasmann — *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum.*

Ljusternik und Soboljew — *Elemente der Funktionalanalysis.*

A. J. Chinstschin — *Mathematisch Grundlagen der Quantenstatistik.*

D. Iwanenko-A. Sokolow — *Klassische Feldtheorie.*

A. Sokolow-D. Iwanenko — *Quantenfeldtheorie.*

Editor — **GAUTHIER VILLARS, Paris**

A. Denjoy — *Articles et Mémoires:*

I — La variable complexe.

II — Le champ réel. Notices.

J. P. Vigier — *Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la Théorie des Quanta.*

Editor — **MASSON ET C.IE — Paris**

R. Campbell — *Théorie Générale de l'Équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la Mécanique.*

Editor — **WALTER DE GRUYTER & CO., Berlin**

W. Blaschke — *Kreis und Kugel.*

A SAIR BREVEMENTE:

CÁLCULO VECTORIAL

POR

BENTO DE JESUS CARAÇA

2.ª EDIÇÃO

3-5/12

GAZETA DE MATEMÁTICA

Três números publicados em 1955

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1957 (4 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.° ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1956, quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 59, cada número	17$50
N.ºs 60-61	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telefone 77 19 43