GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XVII N.º 65 DEZEMBRO 1956

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

REDACÇÃO

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque, J. Farinha; **Lisboa:** Almeida Costa, Ferreira de Macedo, A. Sá da Costa, J. Calado, J. Dionísio, J. Sebastião e Silva, S. Ventura, J. R. Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, Orlando M. Rodrigues; **Porto:** Andrade Guimarães, F. Soares David, Laureano Barros, L. Neves Real, Ruy Luís Gomes.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *Buenos Aires:* António Monteiro, L. A. Santaló; *Mendoza:* F. Toranzos; *San Luis:* Manuel Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Luiz Freire, Manuel Zaluar, Newton Maia e A. Pereira Gomes; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Maurício Peixoto; *São Paulo:* Omar Catunda; **Espanha** — *Barcelona:* Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios Garcia; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** — *Paris:* Paul Belgodère; **Suissa** — *Zürich:* H. Wermus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Lincoln:* Maria Pilar Ribeiro.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Telefone 771943 — LISBOA N.

ANO XVII — N.º 65 GAZETA DE MATEMÁTICA DEZEMBRO — 1956

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Sequências e séries de matrizes

por **Leonidas H. B. Hegenberg**

Para que a demonstração do teorema de existência e unicidade das soluções de sistemas de equações diferenciais possa ser feita de modo análogo ao que se emprega no caso simples (uma equação apenas) torna-se muito conveniente o emprego de matrizes. Depois das definições habituais de traço, produto escalar de matrizes, módulo de matrizes (incluindo as desigualdades de SCHWARZ, do triângulo, bem como a propriedade de que o módulo da integral é menor ou igual ao produto $m \cdot n$ pela integral do módulo—em que m e n indicam o número de linhas e colunas da matriz, respectivamente) inicia-se o estudo das séries cujos elementos são matrizes. Sentimos a falta de uma exposição didática desse assunto e foi isso que procurámos fazer no presente artigo.

Sequências de matrizes.

Uma aplicação dos naturais no conjunto de matrizes será definida como sequência (ou sucessão) de matrizes. Se a cada natural se faz corresponder sempre a mesma matriz M a sequência se diz constante.

Se a norma de A_p tende a zero com p suficientemente grande, p sendo um elemento do conjunto dos números naturais, a sequência é uma sequência nulo (infinitésimo). Formalmente a sequência $\{A_p\}$ é uma sequência nulo se existe, para todo ε positivo e arbitrário, um índice p_0 tal que

$$\| A_p \| < \varepsilon \text{ se } p > p_0$$

TEOREMA 1. A sequência $\{A_p\}$ é uma sequência nulo se e sòmente se cada uma das $m \cdot n$ sequências $\{(a_j^i)_p\}$ for sequência nulo.

Prova: Se a sequência $\{A_p\}$ é uma sequência nulo então para todo ε existe p_0 tal que

$$\| A_p \| < \varepsilon$$

se p maior que p_0. Mas o módulo de qualquer elemento da matriz A_p é menor ou igual ao módulo da matriz, de modo que

$$| (a_j^i)_p | < \varepsilon$$

se $p > p_0$ o que indica ser a sequência dos elementos (a_j^i) uma sequência nulo.

Recìprocamente, se a sequência dos elementos é uma sequência nulo, é possível fazer

$$| (a_j^i)_p | < \frac{\varepsilon}{m \cdot n}$$

contanto que p seja suficientemente grande. E como a norma da matriz A_p é menor ou igual à soma dos módulos dos elementos dessa matriz,

$$\| A_p \| \leqslant \Sigma \, | (a_j^i)_p | < m \cdot n \frac{\varepsilon}{m \cdot n} = \varepsilon$$

o que completa a prova.

Teorema 2. A única sequência nulo que é uma sequência constante é a sequência constante zero.

Prova: Se por absurdo $A \neq 0$ então pelo menos um dos elementos de A seria diferente de zero. Se a é o módulo desse elemento diferente de zero, $\|A\|$ sendo maior ou igual que o módulo de qualquer dos seus elementos, $\|A\| \geqq a$, de modo que a norma de A não poderia ser feita menor que a o que vai de encontro à hipótese de ser $\{A_p\}$ sequência nulo.

Não é diferente a prova de que a soma de sequência nulo seja sequência nulo da prova já feita para o caso de sequências numéricas. Igual também é a prova de que é sequência nulo o produto de sequência nulo por uma constante. Define-se soma de sequências e produto de sequências por uma constante do mesmo modo como no caso de sequências numéricas.

Definição. Uma sequência $\{A_p\}$ converge com limite M se a sequência $\{A_p - M\}$ for uma sequência nulo.

Teorema 3. A sequência $\{A_p\}$ converge se e sòmente se cada uma das sequências $(a_j^i)_p$ converge.

Prova: Se a sequência de matrizes converge para a matriz M então

$$\|A_p - M\| < \varepsilon$$

desde que p seja suficientemente grande. Mas os elementos da matriz $A_p - M$ são de módulo menor ou igual ao da matriz de modo que

$$|(a_j^i)_p - m_j^i| < \varepsilon$$

o que indica ser convergente, com limite m_j^i a sequência $\{(a_j^i)_p\}$.

Recìprocamente, se cada sequência converge para um limite m_j^i então, para todo p maior que p_0, se poderá fazer

$$|(a_j^i)_p - m_j^i| < \frac{\varepsilon}{m \cdot n}$$

com qualquer par de índices i e j. Uma vez que

$$\|A_p - M\| < \Sigma\,\Sigma\,|(a_j^i)_p - m_j^i| < \varepsilon$$

segue-se que a sequência $\{A_p\}$ converge.

Teorema 4. O limite, quando existe, é único.

Prova: A existência de dois limites M e $\overline{M}$ implicaria em ser a sequência $\{M - \overline{M}\}$ uma sequência nulo; sendo sequência constante, segue-se que é a sequência zero, i. é, que $M = \overline{M}$.

Teorema 5. (Cauchy) A sequência $\{A_p\}$ converge com limite M se e sòmente se para cada ε positivo e arbitrário se puder obter um p tal que $p > p_0$ e q natural qualquer obriguem $\|A_p - A_{p+q}\| < \varepsilon$.

Prova: Se $\{A_p\}$ converge então existe p_0 tal que para todo p maior que p_0 se tenha:

$$\|A_p - L\| < \varepsilon/2.$$

Como

$$A_{p+q} - A_p = A_{p+q} - L + L - A_p$$

resulta, pela desigualdade do triângulo:

$$\|A_{p+q} - A_p\| \leqslant \|A_{p+q} - L\| + \|L - A_p\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Recìprocamente, se $\|A_{p+q} - A_p\|$ pode tornar-se menor que um ε desde que se faça p suficientemente grande, então cada um dos números

$$|(a_{p+q})_s^r - (a_p)_s^r|$$

pode ser feito arbitràriamente pequeno com p suficientemente grande. Isso obriga a convergência das sequências de números reais $\{(a_p)_s^r\}$ ($p = 1, 2, \cdots$; r variando de 1 a m e s de 1 a n). A convergência dessas sequências implica na convergência da sequência $\{A_p\}$ (pelo teorema 3).

Séries de matrizes.

Definição: Série de termos $A_1, A_2, \cdots$ é a sequência $\{S_k\}$ onde $S_i = A_1 + \cdots + A_i$. A série é designada pelo símbolo:

$$A_1 + A_2 + \cdots = \Sigma_i A_i .$$

O limite S da sequência $\{S_k\}$ é chamado soma da série de termos $A_1, A_2, \cdots$.

TEOREMA 1. A série ΣA_i converge se e sòmente se cada uma das séries $\Sigma (a_i)^r_s$ for convergente, $r=1,\cdots m$; $s=1,\cdots n$; $i=1,2\cdots$.

Prova: É consequência direta da definição e do fato de convergir uma sequência de matrizes quando cada sequência formada com os elementos de uma determinada posição converge. A soma S da série é matriz cujo elemento linha r e coluna s vem a ser a soma da série $\Sigma (a_i)^r_s$.

Como consequência, também aqui se tem o critério de convergência:

CRITÉRIO: Uma série de matrizes converge se e sòmente se dado ε positivo e arbitrário for possível obter um índice p de modo que para qualquer natural q se tenha

$$\| A_p + A_{p+1} + \cdots + A_{p+q} \| < \varepsilon$$

Em particular, se $q =$ zero, resulta como corolário: que o termo geral de uma série de matrizes deve tender a zero em módulo nas séries convergentes.

DEFINIÇÃO: Uma série de matrizes $m \times n$ de termos $A_1, A_2, \cdots$ converge absolutamente se cada uma das $m \cdot n$ séries $\Sigma (a_i)^r_s$, $i=1,2,\cdots$ é absolutamente convergente.

TEOREMA 2. A série $A_1 + A_2 + \cdots$ converge se converge a série $\| A_1 \| + \| A_2 \| + \cdots$.

Prova: basta lembrar que

$$\| A_{k+1} + \cdots + A_{k+p} \| \leq \| A_{k+1} \| + \cdots + \| A_{k+p} \|$$

TEOREMA 3. Se converge a série $\Sigma \| A_i \|$ então cada uma das $m \cdot n$ séries $\Sigma (a_i)^r_s$ $(i=1,2,\cdots)$ é absolutamente convergente.

Prova: É suficiente considerar que

$$| (a_i)^r_s | \leq \| A_i \|$$

$r=1,\cdots m$; $s=1,\cdots n$; $i=1,2,\cdots$.

Segue-se que convergindo a série $\Sigma \| A_i \|$ então a série ΣA_i converge absolutamente.

TEOREMA 4. A soma de uma série absolutamente convergente não depende da ordem em que são tomados os termos da série.

Prova: Seja $a_n = \| A_n \|$; por hipótese Σa_n é convergente. O teorema anterior afirma a convergência da série dada ΣA_n; seja S a soma da série. Efetue-se uma permutação qualquer dos termos dispondo-os em uma nova ordem que dá a série $\Sigma A'_n$. Conside-se a reduzida que contenha todos os termos da reduzida de ordem n da série dada; aparecerão, em geral, mais alguns termos de índices $n+\alpha, n+\beta, \cdots$. Isto é, sendo

$$s_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

construiu-se s'_m tal que todos os termos de s_n aí aparecessem:

$$s'_m = A_1 + \cdots + A'_m = A_1 + \cdots + A_n + A_{n+\alpha} + \cdots + A_{n+\lambda} .$$

Fazendo a diferença:

$$\begin{aligned} | s'_m - s_n | &= | A_{n+\alpha} + \cdots + A_{n+\lambda} | \\ &< a_{n+\alpha} + \cdots + a_{n+\lambda} \end{aligned}$$

que se pode tornar menor que qualquer número pela convergência de Σa_n. O fato de ser a sequência $\{s_m - s_n\}$ uma sequência nulo mostra que $\{s'_m\}$ e $\{s_n\}$ tem o mesmo limite quando n cresce; ou seja, as séries ΣA_n e $\Sigma A'_n$ tem mesma soma.

Séries de funções.

Seja dado um conjunto C de matrizes. Se a cada X de C se fizer corresponder uma outra matriz $A_n(X)$ com $n = 1, 2 \cdots$, então o par de sequências de matrizes:

$$(\{A_n(X)\} \; \{S_n(X)\})$$

onde $S_p(X) = A_1 + A_2 + \cdots + A_p$, é chamado *série* de termos $A_1, A_2 \cdots$.

Se existe uma função (matricial) $S(X)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} S_n(X) = S(X)$$

essa função $S(X)$ é a *soma* da série.

DEFINIÇÃO: A série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ *converge uniformemente* para a função $S(X)$ no conjunto C se (e sòmente se) dado ε positivo e arbitrário existir um número natural n_0 que depende de ε mas que não depende de X escolhido em C de modo que:

$$\| S_n(X) - S(X) \| < \varepsilon \qquad n \geqslant n_0$$

Nota: No caso particular em que C é um conjunto de matrizes 1×1 tem-se as séries de matrizes funções de uma variável. As definições e teoremas não sofrem qualquer alteração.

TEOREMA 1. Uma série de matrizes $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ é uniformemente convergente em C se e sòmente se dado ε positivo e arbitrário existir um n_0 independente de X escolhido em C tal que para $m \geqq n_0$ e $n \geqq n_0$

$$\| S_n(X) - S_m(X) \| < \varepsilon .$$

Prova: A necessidade da condição é fàcilmente verificada e fica proposta como exercício. Veja-se a suficiência. Escolha-se X de C. A série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ fica sendo série de matrizes constantes (no sentido considerado anteriormente). Essa é uma série convergente de vez que satisfaz a condição de convergência (de CAUCHY). Existe, pois uma soma $S(X)$, definida para cada X. Em outras palavras, para cada X de C existe o limite ${}_n lim\, S_n(X)$ e é uma função $S(X)$. Segue-se que na relação

$$\| S_n(X) - S_m(X) \| < \varepsilon$$

para todo $m \geqq n_0$ e $n \geqq n_0$ o primeiro membro tem limite quando n cresce o que implica:

$$lim \| S_n(X) - S_m(X) \| \leqslant \varepsilon$$

donde

$$\| S(X) - S_m(X) \| < \varepsilon \qquad \text{para todo } m \geqslant n_0$$

e n_0 independente de X o que significa, pela definição, que a convergência é uniforme em C.

TEOREMA 2 (WEIERSTRASS). A série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ é uniformente convergente se cada uma das funções $A_i(X)$ é limitada para X em C:

$$\| A_i(X) \| \leqslant c_i \qquad c_i > 0$$

sendo $c_1 + c_2 + \cdots$ uma série convergente.

Prova: Se a sequência $\{X_p\}$ é arbitràriamente escolhida em C, pelo fato de se ter

$$\| A_{n+1}(X_p) + \cdots + A_{n+k}(X_p) \| \leqslant c_{n+1} + \cdots + c_{n+k}$$

e sendo $c_1 + c_2 + \cdots$ uma série convergente está satisfeita a condição de convergência uniforme da série de matrizes, pois o primeiro membro se pode tornar menor que um ε positivo e arbitrário qualquer que seja X desde que $n \geqq n_0$ precisamente o n_0 adequado para a série de termos constantes $c_1 + c_2 + \cdots$

TEOREMA 3. Se a série $A_1(X) + A_2(X) + \cdots$ converge uniformemente em C, e se cada uma das matrizes $A_i(X)$ é contínua em C então a soma $S(X)$ da série também é contínua.

Prova. A série dada sendo convergente, existe a soma $S(X)$. Pela definição de convergência existe um índice n_0 a partir do qual

$$\| S(X_0) - A_n(X_0) \| \leqslant \varepsilon/4$$

sendo X_0 um ponto qualquer de C. Verificando-se também

$$\| S(X) - A_n(X) \| \leqslant \varepsilon/4$$

para o mesmo n_0 que independe de X. Pondo $S(X) - S(X_0) = \Delta S$ e $A_n(X) - A_n(X) = \Delta A$ resulta combinando as duas desigualdades precedentes

$$\| \Delta S - \Delta A \| \leqslant \varepsilon/2$$

Mas,

$$\begin{aligned} \| \Delta S \| &= \| \Delta S - \Delta A + \Delta A \| \\ &\leqslant \| \Delta S - \Delta A \| + \| \Delta A \| . \end{aligned}$$

Pelo fato de serem contínuas as matrizes $A_i(X)$ com X em C é possível fazer ΔA menor que $\varepsilon/2$ desde que se tome X numa vizinhança conveniente de X_0, isto é, desde que se tome X tal que $\| X - X_0 \| \leqq \varepsilon$. O segundo membro pode, portanto, tornar-se menor que ε desde que X permaneça numa vizinhança conveniente de X_0 e isso prova a continuidade de $S(X)$.

Séries de potências.

Definição. A série $C_0 + C_1 A + C_2 A^2 + + \cdots + C_m A^m + \cdots$ em que as matrizes A e C_j com $j = 1, 2, \cdots$, são matrizes quadradas $n \times n$ é chamada série de potências.

Teorema 1. Se a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \| C_n \| \cdot \cdot \| A \|^n$ converge então a série de potências $\Sigma C_n A^n$ converge absolutamente.

Prova: por ser $\| C_n A^n \| \leqq \| C_n \| \, \| A \|^n$ a tese resulta imediata.

Teorema 2. Se a série $\Sigma \| C_n \| \cdot \| A \|^n$ converge então a série $\Sigma \| C_n \| \, \| X \|^n$ converge se $\| X \| \leqq \| A \|$ sendo uniforme a convergência em todo o intervalo $[0, \| A \|]$.

Prova: Se a série converge a sequência dos termos é uma sequência nulo o que a obriga a ser uma sequência limitada:

$$\| C_n \| \, \| A \|^n \leqslant M, \quad M > 0, \text{ donde } \| C_n \| \leqslant \frac{M}{\| A \|^n}$$

e isso acarreta

$$\Sigma \| C_n X^n \| \leqslant \Sigma M \left(\frac{\| X \|}{\| A \|} \right)$$

donde, pelo teorema anterior, resulta a convergência de $\Sigma C_n X^n$, convergência que é uniforme no conjunto $0 \leqq \| X \| \leqq \| A \|$.

Corolário. A série de potências $C_0 + C_1 X + + C_2 X^2 + \cdots + C_n X^n + \cdots$ converge absolutamente se $\| X \| \leqq \| A \|$ sendo uniforme a convergência em $0 \leqq \| X \| \leqq \| A \|$.

Caso particularmente importante é aquele em que $C_m = \dfrac{E}{m!}$, $m = 1, 2, \cdots$. Uma vez que a série de números não negativos

$$1 + \| A \| + \frac{\| A \|^2}{2!} + \cdots + \frac{\| A \|^m}{m!} + \cdots$$

converge qualquer que seja o valor de A, segue-se que a série de matrizes:

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

converge absolutamente qualquer que seja a matriz quadrada n dimensional A sendo uniforme a convergência no conjunto $0 \leqq A \leqq \delta$ em que δ é um número positivo qualquer. Essa é a chamada série exponencial que se designa por e^A ou por $exp\ A$.

Teorema 3. Se A e B são duas matrizes quadradas, de mesma ordem, tais que $AB = BA$ então $exp\ (A + B) = exp\ A \cdot exp\ B$.

Prova: Em primeiro lugar verifica-se que a série matricial

$$E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2\,AB + B^2) + $$
$$+ \frac{1}{3!}(A^3 + 3\,A^2 B + 3\,AB^2 + B^3) + \cdots$$

converge absolutamente desde que qualquer soma parcial da série

$$1 + (\| A \| + \| B \|) + \frac{1}{2!}(\| A \|^2 + 2 \| A \| \, \| B \| + \| B \|^2) + \cdots$$

é menor ou igual a $exp \| A \| \cdot exp \| B \|$.

Em seguida dispõe-se os termos da série absolutamente convergente

$$E + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + 2\,AB + B^2) + \cdots$$

em grupos de modo que o primeiro grupo não contenha B; o segundo contenha B mas não B^2; o terceiro contenha B, B^2 mas não B^3; e assim por diante. A soma de cada um desses grupos será, respectivamente $exp\ A$; $(exp\ A)\,B$; $(exp.\ A)\,B^2$; etc. A soma da série

$$E + A + B + \frac{1}{2!}(A^2 + 2\,AB + B^2) + \cdots$$

é, por conseguinte, $(exp\ A) \cdot (exp\ B)$. Como, por hipótese A e B são comutativas, tem-se também $exp(A + B)$. Vale a pena observar que essa conclussão não é necessàriamente correta se A e B não forem comutativas.

Instituto Tecnológico de Aeronautica
S. José dos Campos, S. P. — Brasil

N. — A Redacção teve a preocupação de manter a ortografia e terminologia do Autor.

Matemática clássica ou matemática moderna, no ensino secundário?

por Emma Castelnuovo

A esta interrogação, nova entre as muitas que põe o ensino da matemática, responde um livro deveras interessante (1), publicado recentemente pela «*Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*». A Comissão é formada de pessoas que, em campos diversos — psicológico, metodológico e prático — procuram dar uma contribuição à melhoria do ensino da matemática; é por isso composta, quer por conhecidos matemáticos, lógicos, psicólogos e pedagogistas, quer por modestos professores que, com atentas e pacientes experiências, estudam a questão dum ponto de vista prático. Os membros da Comissão reúnem-se periòdicamente, a fim de coordenar experiências, estudos e relatórios; desde 1950 realizaram-se nada menos de nove encontros internacionais: em Inglaterra, Bélgica, Suíça, França, Luxemburgo, Alemanha, Holanda, Itália e Áustria.

Até agora a Comissão não tinha considerado oportuno publicar estudos e só as exposições orais feitas pelos vários membros nos respectivos países davam uma ideia do movimento tão activo e moderno que animava o espírito dos organizadores. Hoje, com este livro que reúne vários artigos, a Comissão apresenta-se em forma oficial; os autores são seis dos seus membros fundadores: um psicólogo, JEAN PIAGET, professor das Universidades de Genebra e Paris, um lógico matemático, EWART W. BETH, professor da Universidade de Amsterdam, três matemáticos, JEAN DIEUDONNÉ, professor da Northwestern University, Evanston (E.U.A), ANDRÉ LICHNEROWICZ, professor do Collège de France, GUSTAVE CHOQUET, professor da Universidade de Paris, e finalmente o pedagogista CALEB GATTEGNO, professor do Institut of Education da Universidade de Londres, o qual como secretário geral da Comissão organiza os vários congressos e é verdadeiramente a alma deste movimento.

Os seis artigos não foram coordenados entre si, mas, embora sejam diferentes os pontos de vista e as concepções de cada um, apresentam êles uma tão acentuada continuidade que a passagem de um trabalho para outro não constitui para o leitor uma brusca transição de ideias. Na verdade, através de análises psicológicas, estudos lógicos, considerações históricas e pròpriamente matemáticas, visam todos um fim único: o ensino da matemática, à luz das modernas concepções científicas.

O livro abre com um confronto de PIAGET entre «*as estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência*». Depois de salientar que a diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna está no facto de a primeira pôr na base da construção matemática os elementos simples (tais como os números inteiros, o ponto, a recta, etc.) e a segunda um sistema operatório, isto é uma série de estruturas, o autor referiu as ideias essenciais da escola BOURBAKI, segundo as quais as três estruturas principais, sobre as

(1) J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHNEROWICZ, G. CHOQUET, C. GATTEGNO, «*L'enseignement des mathématiques*», Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel (Suíça).

quais assenta o edifício matemático, são: as estruturas algébricas (de que é protótipo o grupo), as estruturas de ordem (de que é um caso particular o reticulado) e as estruturas topológicas. Ora, PIAGET, através duma série de atentas e minuciosas experiências sobre a génese e o desenvolvimento das operações aritméticas e geométricas na mente da criança, conseguiu demonstrar que as «étapes» fundamentais na aprendizagem dos conceitos matemáticos correspondem precisamente aos três tipos de estruturas matemáticas. Verifica-se que, na criança, nascem mais ou menos no mesmo período as estruturas de tipo algébrico (por exemplo, a compreensão da reversibilidade das acções, da inclusão duma classe parcial A numa classe total B), as estruturas de ordem (a seriação: são já clássicas as experiências de PIAGET sôbre a maior ou menor dificuldade que tem a criança até aos 6-7 anos de dispôr por ordem de alturas várias réguas) e as estruturas topológicas (a ordem da formação das noções geométricas no desenvolvimento expontâneo da criança não se ajusta de modo nenhum à ordem histórica das étapes da geometria: as questões topológicas são aprendidas muito antes das questões euclidianas).

Não é necessário comentar um estudo deste género: podem fàcilmente imaginar-se as imensas consequências que podem ter tais problemas, num primeiro ensino da matemática. É este o único artigo que diz respeito ao ensino elementar; os capítulos seguintes referem-se ao ensino secundário.

Ao estudo de PIAGET segue-se o artigo de E. W. BETH «*Reflexões sobre a organização e sobre o método do ensino matemático*». O autor observa que o divórcio entre o ensino secundário e o ensino universitário se vai acentuando cada vez mais: no primeiro, a matemática elementar não chega a suscitar um interesse científico; no segundo, as teorias cada vez mais complexas a que é conduzida a investigação moderna revelam-se pouco susceptíveis de virem a ser incorporadas no ensino secundário. FELIX KLEIN tinha procurado lançar uma ponte entre a matemática elementar e a matemática superior, mas tratava-se mais de renovação de métodos que de mudança de programa. Hoje — afirma BETH — as modernas investigações sobre os fundamentos da matemática levam-nos a compreender como algumas vezes (por exemplo, para esclarecer a diferença entre a estrutura dos números racionais e a dos números reais) é impossível chegar a uma explicação exaustiva e criticamente perfeita se se insiste em permanecer no domínio da lógica elementar e evitar qualquer referência a noções que competem à teoria dos conjuntos. É por isso que o autor seria favorável a adoptar no ensino secundário o método axiomático, abandonando o método genético. Termina o artigo uma análise aprofundada das relações entre lógica e psicologia para os fins do ensino; BETH declara-se abertamente contrário à tendência de exagerar a importância da psicologia nos problemas de didáctica matemática e sublinha o valor e o alcance dum ensino rìgidamente lógico.

Os três artigos que se seguem, os de DIEUDONNÉ, LICHNEROWICZ e CHOQUET versam sobre questões que se referem estrictamente à matemática, ao programa e aos métodos de ensino desta disciplina na escola secundária.

J. DIEUDONNÉ, no seu trabalho «*A abstracção em matemática e a evolução da álgebra*» começa por responder à pergunta clássica «Qual é o objectivo do ensino da matemática?» Não são — diz ele — as questões em si, por vezes esmiuçadas e subtilizadas em extremo, que devem formar o objecto do nosso ensino — mas é antes o método matemático, a essência da própria matemática que deve influenciar a inteligência do aluno, levando-o a raciocionar cada vez mais sobre noções abstractas. A apoiar esta tese, ele traça em poucas páginas uma história dos conceitos fundamentais da álgebra, fazendo ver como todo o desenvolvimento desta disciplina representa uma contínua ascenção para o abstracto, ascenção da qual a introdução dos números imaginários constitui uma étape decisiva. Foi então que o matemático adquiriu consciência do seu poder criador de calcular sobre novos objectos — que não são números — em vez de se resignar passivamente a limitar-se aos que lhe eram impostos pelas origens concretas da matemática. Um segundo acto de libertação é representado pelo cálculo dos operadores: foram modificadas assim também as regras de cálculo algébrico, até então consideradas intangíveis, e deste modo se foi tendo percepção cada vez mais nítida, dos dois constituintes fundamentais de qualquer «cálculo»: — os objectos sobre os quais se opera e as regras operatórias — estas só verdadeiramente essenciais. Segundo tal concepção, o estudo dum cálculo, ou — como se diz — duma estrutura algébrica, toma como dados de base um conjunto de objectos e um certo número de operações. DIEUDONNÉ conclui a sua exposição, admirável de clareza e vigor, declarando que só o método axiomático, extrema étape no sentido da abstracção, permite canalizar as novas descobertas matemáticas, classificá-las e ligá-las aos resultados precedentes, simplificar a exposição das várias teorias, aumentando por vezes o seu alcance com uma análise mais aprofundada.

O artigo de A. LICHNEROWICZ «*A introdução do espírito da álgebra moderna na álgebra e na geometria elementar*» vem completar o de DIEUDONNÉ, dando ideias e sugestões para um eficaz ensino secundário como iniciação no espírito da ciência contemporânea. Sublinha ele que, se é verdade que só uma percentagem mínima de alunos virá a dedicar-se à ciência pura, não é menos certo que também aqueles que se dirigem para as aplicações técnicas virão a encontrar-se perante uma matemática que já hoje não é menos abstracta, aos olhos dos conformistas, do que a matemática chamada pura. Não se trata — diz o autor — de distribuir dogmàticamente teorias abstractas da álgebra moderna, mas antes se deveria procurar, logo de início, familiarizar o aluno com as principais estruturas algébricas, levando-o a reconhecer propriedades comuns em domínios diversos (por exemplo, as propriedades comuns a números inteiros e polinómios, as leis de composição em certas classes de números), questões que se podem tratar mesmo nos primeiros anos duma escola secundária. Depois, na última classe dos liceus, seria necessário comparar as várias teorias aritméticas, geométricas, etc., sempre do ponto de vista estrutural, pondo em confronto propriedades iguais e propriedades distintas de entidades completamente diversas (por exemplo, os axiomas dos grupos e as propriedades comuns aos deslocamentos e às semelhanças no espaço). LICHNEROWICZ insiste no facto de que, fazendo deter a atenção do aluno sobre alguns casos elementares de isomorfismo, se poderá, por um lado, pôr em evidência como a «natureza matemática» é qualquer coisa que não tem sentido determinado e, por outro lado, procurar destruir os compartimentos-estanques entre os diversos ramos da matemática elementar.

De carácter mais particular é o artigo de G. CHOQUET «*O ensino da geometria elementar*». Declara ele, explicitamente, que escreve estas páginas para o professor, não para o aluno, mas pensa que possam fornecer matéria de reflexão, para o mestre, no sentido duma eventual adaptação à idade do aluno. «A geometria elementar — diz o autor — é uma bela viagem, mas o seu ponto de partida tem muitas vezes lugar numa sombra cheia de dúvidas e o caminho seguido atravessa profundos pântanos, como o dos deslocamentos e o da orientação, dos quais não se sai sem a sujeição ao suplício chinês do pau». Depois de fazer uma crítica minuciosa e brilhante dos usuais livros de texto, G. CHOQUET põe as bases dum desenvolvimento do curso de geometria elementar, a partir da geometria da recta, passando depois à do plano e ao estudo das isometrias e da orientação, e dá, com este trabalho, uma contribuição nova e original ao estudo dos fundamentos da geometria. Não é possível resumir brevemente o artigo e por isso relegamos os colegas à leitura directa, com a certeza de que encontrarão ali matéria de aprazimento intelectual.

Depois de todos estes artigos, densos de ideias e de sugestões, mas que, embora tendo em consideração o aluno, estudam o problema da didáctica matemática de um ponto de vista teórico, chega-se ao último capítulo «*A pedagogia da matemática*», onde o autor, C. GATTEGNO, nos coloca no meio estudantil; este capítulo interessa portanto particularmente ao professor da escola secundária. Os pareceres de GATTEGNO são assim resumidos nas suas palavras: «O leitor terá já encontrado nos capítulos precedentes dados relativos aos factores psicológicos e matemáticos. Trataremos aqui do ensino pròpriamente dito e mostraremos como o programa pode ser tornado funcional, isto é, pode ser concebido como síntese dos diversos factores». Pretende o autor servir-se, precisamente, das estruturas mentais já existentes na mente da criança e conceber um programa que, baseando-se nestas, tenha especialmente em conta as dificuldades que encontra o aluno, ao passar duma estrutura mental a outra. Segundo GATTEGNO, não é o particular mas o geral que interessa a criança; é a acção do programa e a do professor que constrangem a sua inteligência a confinar-se dentro de certos limites e é por esta razão que, muitas vezes, o ensino da matemática resulta difícil e pouco atraente. No ensino da aritmética, por exemplo, pode conseguir-se em breve tempo que os alunos se libertem do numérico, para tomar consciência, mesmo que seja de modo intuitivo e quási por brincadeira, de propriedades gerais das várias operações, e passar depois ao campo da álgebra. Aqui, sempre tendo em vista concepções gerais, insistir-se-á muito mais sobre a reversibilidade das operações e sobre o dinamismo das fórmulas (isto é, sobre os vários aspectos que uma fórmula pode tomar) do que sobre o resultado. Observe-se, além disso, que o conceito de função que tem o aluno nestas idades é muito mais largo do que aquele que nós queremos impôr-lhe, quando lhe oferecemos exemplos simples e construídos de propósito. Sobre a base destas ideias, GATTEGNO esquematiza um programa de álgebra para os rapazes dos 11 aos 16 anos, programa que, aos nossos olhos, pode parecer excessivamente abstracto, mas que é sem dúvida nenhuma interessante.

Para o ensino da geometria não é proposto um programa como para a álgebra, mas os exemplos e as sugestões que se dão, verdadeiramente dignos de serem tomados em consideração, já por si só ditam um programa. GATTEGNO declara-se absolutamente contrário a um ensino dedutivo que, partindo de certas premissas, obrigue a chegar a determinadas consequências, levando o rapaz a percorrer uma via prèviamente traçada. Propõe ele, portanto, um estudo que não imponha uma «camisa de fôrças» ao aluno, um estudo baseado sobre a tomada de consciência de determinadas «situações». Por exemplo — diz GATTEGNO — nas primeiras lições de geometria (pelos 11 anos de idade), dar-se ia ao rapaz um compasso, deixando livre campo à sua fantasia para desenhar o que quisesse. A partir de uma série de desenhos ordenados e desordenados, índice, eles próprios, de interesses estéticos e de momentos psicológicos, o aluno seria conduzido, numa segunda fase, à observação de duas famílias de círculos concêntricos e poderia, ajudado com raras intervenções do mestre, chegar a uma tomada de consciência matemática: a simples observação e percepção conduzi-lo-ia portanto, a pouco e pouco, a organizar o seu pensamento e, daquelas premissas instrumentais, ele poderia fazer brotar relações e consequências até inesperadas. Propriedades e questões, que estamos habituados a tratar numa certa ordem e que são muitas vezes «atomizadas», fundir-se-iam num todo único. E, a pouco e pouco, a estrutura de cada particular situação levaria a conceber o método axiomático relativo àquela determinada situação, porque — diz com acerto o autor — «averiguar aquilo que basta postular para obter tudo por via dedutiva é um luxo que a ciência se permite, só depois de ter acumulado um certo número de factos». Ele acha por isso que uma revisão do programa dum ponto de vista dedutivo só deveria fazer-se no fim da carreira escolar. Como se vê, trata-se dum ensino da geometria em que falta uma linha contínua, no sentido que estamos habituados a conceber; é uma série de assuntos organizados sobre o plano das estruturas, mas livres; é um ensino por centros de interesse, em que cada centro é provocado por um impulso particular.

Com quanto haja, sem dúvida, um paralelismo entre o ensino da geometria e o da álgebra sugeridos pelo autor, paralelismo devido ao sentido de largueza e de libertação que se pretende esteja na base de ambos, nota-se uma considerável diferença entre as duas didácticas, sendo a geométrica muito mais perceptiva, mais visual e portanto menos abstracta do que a algébrica, aplicada na mesma idade.

Cada um de nós é levado pela leitura deste artigo, que pode, à primeira vista, parecer excessivamente original e afastado das nossas ideias, geralmente mais moderadas, a uma reconsideração do programa e da nossa maneira de ensinar; ainda por esta razão, o trabalho de GATTEGNO, oferecendo contínuos estímulos de revisões, de crítica, de discussão, traz em si uma contribuição notável ao problema em questão.

* * *

Depois de ter referido cada capítulo deste livro, verdadeiramente original e fascinante, pouco resta a concluir, porque o livro não quer concluir, quer deixar aberto o problema. Um problema discutido por matemáticos de profissão e pedagogistas, por lógicos e psicólogos; cada um deles expôs, de modo magistral, as suas ideias sobre o mesmo assunto: «o ensino da matemática». Compete agora a cada um de nós encontrar nestas páginas matéria de reflexão e de trabalho e dar uma contribuição ao movimento que se está difundindo em todo o mundo para inspirar a didáctica matemática em critérios mais modernos.

N. da R. — Em consequência da demora de publicação da «G. M.» e da subsequente acumulação de original, sai este artigo com atraso considerável, do que pedimos desculpa à nossa distinta colaboradora, bem como aos leitores.

«Princípios de equivalência sobre equações»

por ***Henrique Verol Marques***

A importância primordial de que se reveste o estudo dos princípios de equivalência de equações leva-nos a abordá-lo no presente artigo. Presume-se que se torne útil dissecar tal matéria por se crer que, nem sempre, o estudante de liceu lhe atribui a importância que ela, inegàvelmente, merece. Basta ter em atenção que sendo o objectivo fundamental da Álgebra a resolução de equações, tal objectivo só poderá ser atingido se se conhecerem, com clareza, as leis que regem essa resolução.

No presente trabalho apenas se consideram equações a uma incógnita, porque só a estas se faz referência no actual programa dos liceus.

Como é sabido, raiz ou solução de uma equação a uma incógnita é todo o número que colocado no lugar da incógnita torna o valor numérico do primeiro membro idêntico ao valor numérico do segundo membro. E sabe-se, também, que duas equações são equivalentes quando toda a solução de uma delas é solução da outra, e reciprocamente. Seja $f(x)=g(x)$ uma equação em x em que algum dos dois membros poderá ser, eventualmente, constante.

Demonstremos, primeiramente, que se somarmos a ambos os membros daquela equação um número N ou uma função inteira, $\varphi(x)$, da incógnita, a equação resultante é equivalente à proposta.

Com efeito, se se designa por α uma solução genérica da equação $f(x)=g(x)$ tem-se, por definição de raiz de uma equação, que $f(\alpha)=g(\alpha)$ e daí $f(\alpha)+N=g(\alpha)+N$ (são iguais as somas de dois números iguais com um terceiro). Logo, α é também solução de $f(x)+N=g(x)+N$. Por outra parte, se β é raiz genérica da equação $f(x)+N=$ $=g(x)+N$ será $f(\beta)+N=g(\beta)+N$, donde se tira $f(\beta)=g(\beta)$ (subtraindo a números iguais um terceiro, as diferenças são ainda iguais). Quer dizer, β é também solução de $f(x)=g(x)$.

As duas equações $f(x)=g(x)$ e $f(x)+$ $+N=g(x)+N$ são, portanto, equivalentes.

Anàlogamente, se $\varphi(x)$ é função inteira de x, $\varphi(\alpha)$ tem significado numérico (continuando a representar por α uma qualquer raiz de $f(x)=g(x)$). Ora, de $f(\alpha)=g(x)$ deduz-se, então, $f(\alpha)+\varphi(\alpha)=g(\alpha)+\varphi(\alpha)$, igualdade comprovativa de ser α raiz da equação $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$. Recìprocamente, se se designa por γ uma solução genérica desta equação, tem-se $f(\gamma)+$ $+\varphi(\gamma)=g(\gamma)+\varphi(\gamma)$. Daí, $f(\gamma)=g(\gamma)$. Consequentemente, γ é raiz da equação $f(x)=g(x)$.

As duas equações $f(x)=g(x)$ e $f(x)+$ $+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ são, então, equivalentes.

Seja, agora, $\theta(x)$ uma função não inteira de x. Se $\theta(\alpha)$ tem significado numérico a equação $f(x)=g(x)$ é equivalente à equação $f(x)+\theta(x)=g(x)+\theta(x)$ (tudo se passa como no caso anterior). Se $\theta(\alpha)$ não tem significado numérico as duas equações não serão equivalentes, visto que carece de sentido a relação $f(\alpha)+\theta(\alpha)=g(\alpha)+\theta(\alpha)$.

Em resumo:

Primeiro princípio de equivalência: «Somando a ambos os membros de uma equação uma mesma constante ou uma mesma função inteira da incógnita resulta uma equação equivalente à primeira; somando a ambos os membros uma mesma função não inteira da incógnita a equação obtida só não será equivalente à proposta se para alguma raiz desta a função carece de significado numérico».

Assim, por exemplo:

1) São equivalentes as equações

$$5x+8=3-2x \quad \text{e} \quad 7x=-5,$$

pois que a segunda equação resulta da primeira, somando a ambos os membros desta a função inteira $\varphi(x)=2x-8$.

2) Não são equivalentes as equações

$$x^2=4 \quad \text{e} \quad x^2+\frac{1}{x-2}=4+\frac{1}{x-2},$$

porque a função $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-2}$ carece de significado para $x=2$, que é raiz da equação $x^2=4$. Quer dizer, ao passar desta equação para a equação $x^2+\dfrac{1}{x-2}=4+\dfrac{1}{x-2}$ perde-se a raiz $x=2$.

3) São equivalentes as equações

$$3x = 7 \quad \text{e} \quad 3x + \frac{1}{x-2} = 7 + \frac{1}{x-2},$$

porque a função $\varphi(x) = \dfrac{1}{x-2}$ tem significado numérico para $x = \dfrac{7}{3}$ que é a única raiz da equação $3x = 7$.

Do princípio que estabelecemos resulta a importante conclusão: «é sempre legítimo o transporte de um membro para o outro da equação, de uma constante ou de uma função inteira da incógnita, mediante troca de sinal».

Com efeito, se se designa por A uma constante ou uma função inteira de x, a equação $f(x) + A = g(x)$ é equivalente à equação $f(x) = g(x) - A$ que se obtém da primeira somando a ambos os membros $-A$. Mas o transporte de um membro para outro da equação de uma função não inteira da incógnita pode introduzir soluções novas, caso em que a equação obtida não será equivalente à proposta.

Assim,

4) Seja a equação

$$x - 4 + \frac{1}{x-1} = -3 + \frac{1}{x-1}.$$

Transportando para o 1.º membro o termo $\dfrac{1}{x-1}$ que figura no 2.º membro, resulta:

$$x - 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = -3$$

ou seja,

$$x - 4 = -3$$

Ora esta equação admite a raiz $x = 1$, que não é solução da equação proposta.

Retomemos a equação $f(x) = g(x)$ e designemos por k um número diferente de zero. Vejamos que a equação $f(x) = g(x)$ é sempre equivalente à equação $kf(x) = kg(x)$. De facto, sendo α uma solução qualquer da primeira equação, é $f(\alpha) = g(\alpha)$ e daí $kf(\alpha) = kg(\alpha)$. Quer dizer, α é também raiz da equação $kf(x) = kg(x)$. Recìprocamente, sendo β uma raiz qualquer da equação $kf(x) = kg(x)$ será $kf(\beta) = kg(\beta)$, donde resulta, mulplicando ambos os membros por $\dfrac{1}{k}$ (terá, pois, de ser $k \neq 0$) $f(\beta) = g(\beta)$. Isto é, β satisfaz também à equação $f(x) = g(x)$.

As duas equações são, assim, equivalentes.

Se, porém, se multiplicam ambos os membros da equação $f(x) = g(x)$ por uma função $\varphi(x)$ da incógnita, a questão carece de análise mais demorada.

E assim:

a) Toda a raiz do tipo α (como tal se designarão) de $f(x) = g(x)$ é também raiz de $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$, desde que $\varphi(\alpha)$ tenha significado númérico. (Como no caso do teorema anterior).

b) Toda a raiz α' de $f(x) = g(x)$ não é raiz de $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ desde que $\varphi(\alpha')$ careça de significado númérico.

Porque não existem os produtos $f(\alpha')\varphi(\alpha')$ e $g(\alpha')\varphi(\alpha')$.

c) Toda a raiz λ de $\varphi(x)$ que não seja raiz de $f(x) = g(x)$ é também raiz de $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ desde que $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ tenham significado númerico.

Pois de $\varphi(\lambda) = 0$ resulta, então, $f(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) = g(\lambda) \cdot \varphi(\lambda)$.

d) Toda a raiz λ' de $\varphi(x)$ que não dá significado numérico a algum dos membros de $f(x) = g(x)$ não é raiz da equação $f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$.

Porque, suposto $f(\lambda')$ sem significado numérico, não existe o produto $f(\lambda') \cdot \varphi(\lambda')$.

Do que se expõe nas alíneas anteriores logo ressalta, que quando se passa da equação I) $f(x) = g(x)$ à equação II) $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$, poder-se-ão ganhar ou perder raízes, ou nem ganhar nem perder (caso em que as duas equações são equivalentes). Perdem-se raízes, se há soluções da equação I) que não satisfazem à equação II); ganham-se raízes, se há soluções da equação II que não verificam a equação I).

Logo,

1) As raízes perdidas são do tipo α'.

2) As raízes ganhas são do tipo λ (que são raízes de $\varphi(x)$).

3) Se a equação I) admite, apenas, raízes do tipo α e as raízes de $\varphi(x)$ são do tipo λ', as equações I) e II) são equivalentes.

Em particular, se $\varphi(x)$ é função inteira, não há raízes de $f(x)=g(x)$ do tipo α' e, portanto, não há perda de raízes. Quer dizer, a equação II) tem, pelo menos, todas as soluções de I).

Os exemplos seguintes esclarecem a questão.

Seja a equação

$$\text{A)}\qquad 2x+\frac{x-2}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$$

Por comodidade, continuaremos a designar por $f(x)$ e $g(x)$ o primeiro e segundo membros, respectivamente, da equação A) e por $\varphi(x)$ uma função da incógnita por que ambos os membros se multiplicarão.

Assim, sendo $\varphi(x)=\dfrac{1}{x-2}$ resulta a equação

$$\text{B)}\qquad \frac{2x}{x-2}+\frac{1}{x-1}=\frac{2x}{(x-1)(x-2)}$$

Como $\varphi(x)$ não tem significado numérico para $x=2$ que é solução da equação A), segue-se que esta raiz é do tipo α'.

Esta circunstância implica a perda de uma raiz, isto é, a equação B) não admite a raiz $x=2$.

Logo, as duas equações não são equivalentes.

Se for $\varphi(x)=x-1$ obtém-se a equação

$$\text{C)}\qquad 2x(x-1)+x-2=2x$$

Como $\varphi(x)$ é função inteira de x não se perdem raízes. Por outra parte, a única raiz de $\varphi(x)$ é do tipo $\lambda'(\lambda'=1)$, visto que $f(\lambda')$ carece de significado numérico. Logo, também se não ganham raizes.

Então, as duas equações A) e C) são equivalentes.

Enfim, se se tem $\varphi(x)=x+2$ resulta a equação

$$\text{D)}\qquad 2x(x+2)+\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{2x(x+2)}{x-1}$$

Não há perda de raízes, por isso que $\varphi(x)$ é função inteira.

Além disso, $\varphi(x)$ tem uma raiz do tipo $\lambda(\lambda=-2)$, visto que $f(-2)$ e $g(-2)$ têm significado numérico, sendo $f(-2)\neq g(-2)$. Ganhou-se, portanto, uma raiz $x=-2$.

Logo, as duas equações A) e D) não são equivalentes.

O que precede permite, pois, concluir:

Segundo princípio de equivalência: — «Multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira; se se multiplicam ambos os membros de uma equação por uma função da incógnita (se a função for inteira não há perda de raízes) a equação resultante poderá ser ou não equivalente à proposta».

A principal aplicação prática do segundo princípio de equivalência reside na possibilidade de desembaraçar de denominadores uma equação, isto é, na determinação de uma equação equivalente à proposta que não contenha denominadores. Para isso, multiplicam-se ambos os membros da equação dada pelo menor múltiplo comum dos seus denominadores.

Se a equação é inteira, o *m. m. c.* é constante e, portanto, é sempre legítimo desembaraçar de denominadores.

Se a equação é fraccionária, o *m. m. c.* é uma função inteira, $\varphi(x)$, da incógnita, não havendo, por isso, perda de raízes. E só se poderão ganhar se alguma das raízes da equação resultante é raiz de $\varphi(x)$. Quer dizer, as duas equações são equivalentes desdes que as soluções da equação obtida não anulem o *m. m c.* dos denominadores da equação proposta.

E assim:

«É sempre legítimo desembaraçar de denominadores uma equação racional desde que as raízes da equação resultante não anulem o *m. m. c.* dos denominadores da equação proposta».

Seja a equação fraccionária H)

$$\frac{3}{x^2-1}+\frac{7}{3(x+1)}=\frac{3x}{2(x-1)}$$

Multiplicando ambos os membros pelo *m. m. c.* dos denominadores, $\varphi(x)=6(x^2-1)$ resulta a equação $18+14(x-1)=9x(x+1)$ que tem duas raízes $x_1=1$ e $x_2=-\frac{4}{9}$.

Pois que $\varphi(x_2)\neq 0$ e $\varphi(x_1)=0$ segue-se que a equação H) não admite a raiz $x=1$, tendo, portanto, uma única solução, $x=-\frac{4}{9}$.

De acordo com tudo o que fica dito, conclui-se que a redução de uma equação fraccionária à forma inteira, isto é, a operação de desembaraçar de denominadores uma equação, não conduz, necessàriamante, à obtenção de uma equação equivalente. As raízes da equação inteira obtida só serão raízes da equação proposta desde que não anulem o *m. m. c.* dos denominadores desta equação.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

A Redacção da «Gazeta de Matemática» vem-nos incumbindo há tempos da tarefa de dar aos leitores notícia sobre o movimento matemático internacional. A tarefa imposta tem sido só parcialmente cumprida por vários motivos entre os quais avulta a dificuldade de a realizar de modo completo. Com efeito, os últimos anos têm sido assinalados por um grande desenvolvimento das matemáticas que se traduz na creação de Institutos e Centros de Estudos de Matemática Pura e Aplicada em todo o mundo, por numerosos congressos internacionais e nacionais, colóquios, simpósios, etc.; A União Matemática Internacional, cuja actividade tinha sido interrompida durante vários anos, tem contribuído largamente por variados modos para a realização destas reuniões. Nestas não são só apresentados os progressos alcançados e discutidos os problemas que ocupam no momento os matemáticos, mas também se tem elaborado programas e estabelecido inquéritos tendentes a melhorar e modernizar o ensino da Matemática, problema que se impõe urgente. Em próximo número da «Gazeta de Matemática» o Prof. Hugo Ribeiro, da Universidade de Nebraska, focará alguns destes assuntos e o Prof. José Sebastião e Silva, da Universidade de Lisboa, dará notícia sobre algumas das actividades da União Matemática Internacional, junto da qual é um dos representantes de Portugal.

Uma ideia sobre o movimento matemático pode já obter-se pela consulta frequente das numerosas revistas de Matemática que hoje se publicam e aí se verá pela natureza dos artigos quais os problemas e assuntos que mais ocupam os cientistas. Há-as dos mais variados tipos, algumas publicando só artigos de um dado capítulo da Matemática, (Lógica Matemática, Cálculo Tensorial, etc.), outras menos especializadas. Algumas destas revistas, em especial os Boletins das Sociedades de Matemática, incluem noticiário das reuniões, dos cursos extraordinários e conferências de especialistas convidados pelas Escolas ou Centros de Estudo, prémios, etc.; a este tipo pertencem por exemplo, o «Bulletin of the American Mathematical Society» que dá um panorama parcial do movimento matemático nos Estados Unidos da América do Norte, o «Bolletino della Unione Matemática Italiana», a revista «L'Enseignement Mathématique», orgão oficial da Comissão Internacional do Ensino Matemático, a revista «Notícias Matemáticas Internacionais», que é o boletim da União Matemática Internacional, editada pela Sociedade Matemática Austriaca, etc., etc. Não podemos evidentemente esquecer as publicações «Mathematical Reviews» e «Zentralblat», instrumentos indispensáveis de estudo e informação.

Dalgumas das revistas assinaladas são extraídas as notícias que seguem.

Manuel Zaluar Nunes

SIMPÓSIO INTERNACIONAL SOBRE A TEORIA DOS NUMEROS ALGÉBRICOS

Promovida pela União Matemática Internacional e pela «Science Conference of Japan» realizou-se em Tóquio e Nikko de 8 a 15 de Setembro de 1955 uma reunião internacional de matemáticos onde foram apresentadas as seguintes comunicações:

E. Artin (Princeton University): Theory of braids; A. Weil (Chicago): On the breeding of bigger and better zeta functions.; C. Chevalley (Columbia University): A few remarks on mathematical journals; E. Artin: Representatives of the connected components of the idèle class groups; K. Iwasawa (Massachusetts Inst. of Technology): Galois groups acting on the multiplicative groups of local fields; A. Weil: On certain characters of idèle class groups; R. Brauer (Harvard University): Number-theoretical investigations on groups of finite order; T. Tannaka (Tohoku University): On the generalized principal ideal theorem; T. Kubota (Nagoya University): Density in a family of abelian extensions; C. Chevalley: Projective imbedding of a group variety; K. Yamasaki: (Tokyo University): Fibre spaces and sheaves in number theory; D. Zelinsky (Northwestern University): Cohomology of function fields and other algebras; T. Nakayama (Nagoya University/Princeton): A conjecture on the cohomology of algebraic number fields and the proof of its special case; G. Shimura (Tokyo University): On complex multiplications; Y. Taniyama (Tokyo University): Jacobian varieties and number fields; A. Weil: Generalization of complex multiplication; M. Deuring (Göttingen): On zeta functions of elliptic curves with singular modulus; I. Satake (Tokyo University): On Siegel's modular functions; K. G. Ramanathan (Tata Institute): Units of fixed points in involutorial algebras J. P. Serre (Nancy): Syzygy theory in local rings; A. Néron (Poitiers): Arithmétique et classes de diviseurs sur les variétés algébriques; Y. Nakai (Kyoto University): Some results in the theory of the differential forms of the first kind on algebraic varieties; M. Nagata (Kyoto University): The theory of multiplicity in local rings.

COLÓQUIO SOBRE TOPOLOGIA ALGÉBRICA PARA JOVENS TOPOLOGISTAS

Eis uma reunião extremamente simpática e que constitui uma novidade. A ideia deve-se sobretudo ao Prof. J. H. C. Whitehead, tendo subsidiado o Colóquio o British Council e a União Matemática Internacional. Teve lugar em Oxford (Inglaterra) de 28 de Junho a 1 de Julho de 1955. As manhãs inteiras e por vezes uma hora de tarde foram preenchidas por comunicações dos jovens topologistas, sendo o resto do tempo reservado a discussões nas quais tomaram parte os topologistas já de renome. Os participantes foram alojados num dos Colégios de Oxford. O Presidente da Comissão Organizadora foi o Prof. Whitehead e os delegados da U. M. I. o Prof. Hopf e W. D. Hodge.

Foram lidas as comunicações seguintes: J. F. Adams: The loop space of a complex; A. Aepli: Modifikation von topologischen reellen und komplexen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten; W. D. Barcus: Track groups and homotopy classification of mappings; P. Dedecker: A generalization of the spectral sequence; A. Dold: The completeness os Wu's relations between the Stiefel-Whitney classes of compact manifolds; P. J. Hilton: Quasi-Lie algebras and homolopy; D. M. Kan: Abstract homotopy; M. Kervaire: Homotopy and generalized curvatura integra; A. Kosinski: (i) On r-spaces, manifolds, etc. (ii) On some generalizations of antipodal theorems (report of work by J. W. Jaworowski); J. Milnor: Immersion of manifolds in a sphere; J. C. Moore: Mappings of compact spaces in a sphere; F. Peterson: Generalized cohomotopy groups; D. Puppe: On sphere-like manifolds; H. Schubert: Knots with two bridges; R. Thom: Operations in real cohomology; H. Toda: The homotopy groups of spheres and Lie groups; E. Vesentini: Sur certains champs de vecteurs et sur les points stationnaires de formes différentielles méromorphes d'une variété complexe compacte.

COLÓQUIO SOBRE A FUNÇÃO ZETA

De 14 a 21 de Fevereiro de 1956 realizou-se no «Tata Institute of Fundamental Research» em Bombaim um colóquio sobre a função zeta com a participação de vários matemáticos estrangeiros convidados. O programa científico compreendeu as seguintes comunicações:

C. L. Siegel: A generalization of the Epstein zeta function; P. Turán: On the zeros of the zeta function of Riemann; A. Selberg: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series; I, II, III, IV; M. Deuring: The zeta functions of algebraic curves and varieties; I, II.; R. A. Rankin: The construction of automorphic forms from the derivates of a given form.; H. Maass: Spherical harmonics and theta series.; M Koecher: On the Hecke operators for modular forms of degree $m > 1$.; M. Eichler: Modular correspondences and their representations; I, II.; I. Selberg S Chowla: On Epsteins zeta function.; K. G. Ramanathan: Quadratic forms over involutorial division algebras.; S. Bochner-K. Chandrasekharan: On Riemann's functional equation.; H. Petersson: On a certain kind of zeta-fuchsian functions.; S. Bochner: Gamma factors in functional equations.; I. Satake: Some remarks on Siegel's modular functions.

Ao colóquio seguiu-se uma reunião sobre o ensino de Matemática na Ásia do Sul, onde além dos delegados dos países sul asiáticos participaram os cientistas Stone, Bompiani, Choquet, Broadbent, Oppenheim, Freudenthal, de Bruijn, Alexandrov, Korobov, Melon e Marczewski. Os discursos inaugurais foram feitos por H. Bhabha e K. Chandrasekharan seguindo-se as comunicações:

M. H. Stone: Some crucial problems of mathematical instruction.; T. A. A. Broadbent: Present-day problems in English mathematical education. Typography and the teaching of mathematics.; A. Oppenheim: The problems which face mathematicians in Singapore and the Federation of Malaya.; E. Bompiani: Mathematical instruction in Italy.; G. Choquet: Teaching in secondary schools and research.; A. D. Alexandrov: On mathematical education in the U. S. S. R.; H. Freudenthal: Initiation into geometry.; E. Marczewski: On mathematical education in Poland.

3.º CONGRESSO DOS MATEMÁTICOS SOVIÉTICOS

Teve lugar em Moscovo, no Palácio da Universidade, de 25 de Junho a 5 de Julho de 1956. Nele participaram cerca de 2 000 matemáticos da URSS, e perto de 80 estrangeiros convidados pela Academia das Ciências da URSS.

Os discursos inaugurais foram pronunciados pelos matemáticos e académicos Vinogradov e Petrovki. As sessões foram em número de treze: Teoria dos números, Álgebra, Equações diferenciais e integrais, Teoria das funções, Análise funcional, Cálculo das probabilidades, Topologia, Geometria, Lógica matemática e fundamentos, Cálculos numéricos, Problemas matemáticos da Mecânica, Problemas matemáticos da Física e História da Matemática. Houve cerca de 800 comunicações de matemáticos russos e 50 de estrangeiros.

9.º CONGRESSO INTERNACIONAL DE MECÂNICA APLICADA

Este congresso realizou-se em Bruxelas de 5 a 13 de Setembro de 1956. Foi presidido pelo Prof. F. van den Dungen; numerosos países estiveram representados e reuniu cerca de oitocentos participantes.

Houve quatro conferências gerais: Prof P. Germain (Faculté des Sciences-Lille) — *Quelques Progrès récents en aérodynamique théorique des grandes vitesses;* Prof. R. Hill (Univ. Nottingam) — *New horizons in mecanics of solids;* Prof. M. K. Davidson (Stevens Inst. of Technology, U. S. A.) — *Ships;* e Prof. Dr. H. Mettler (Technische Hochschule, Karlsruhe) — *Forced non linear vibrations of elastic bodies.* As comunicações foram em número de de cincoenta aproximadamente e versaram vários capítulos da Mecânica dos Fluídos e de Mecânica dos Solos.

Foi decidido que o próximo congresso tenha lugar na Itália em 1960.

4.º CONGRESSO DOS MATEMÁTICOS ROMENOS

Teve lugar em Bucarest de 27 de Maio a 4 de Julho de 1956. Nele participaram cerca de 400 matemáticos romenos e 70 estrangeiros, de França, Inglaterra, Alemanha, Itália, Polónia, U. R. S. S., U. S. A., etc. As secções eram cinco: Álgebra e Teoria dos Números, Análise, Geometria e Topologia, Matemáticas Aplicadas e Metodologia e História da Matemática. Os matemáticos romenos apresentaram em sessão plenária comunicações sobre as investigações feitas na Roménia no período 1940-1955 no campo da 1) Geometria Diferencial; 2) Equações diferenciais ordinárias e às derivadas parciais e equações funcionais; 3) Teoria das Funções; 4) Álgebra, Topologia, Análise Funcional, Lógica Matemática; 5) Matemáticas Aplicadas.

GAZETA DE MATEMÁTICA

A Gazeta de Matemátiea, no intuito de facilitar aos alunos das Escolas Universitárias o acesso a determinados ramos das Matemáticas Superiores tem-se esforçado pela organização de cursos destinados aos mesmos alunos.

Álgebra — No ano lectivo de 1955-56 relizaram-se regularmente sessões semanais de $1\,{}^1/_2$ horas, dedicadas ao estudo de Álgebra. Os assuntos versados foram sistemas algebrizados por uma e duas operações. Reconheceu-se, porém, que é pedagògicamente errada e cientìficamente deficiente [1] qualquer acção que vise especialização em indivíduos ainda não iniciados, e que, particularmente no ensino de Álgebra, se deve começar por fornecer a alunos recentemente saídos dos liceus, visão panorâmica de toda a disciplina.

Assim, no presente ano lectivo continuam a realizar-se sessões de estudo [2] subordinadas ao programa seguinte:

1) A Teoria dos Conjuntos como introdução à Análise Geral;
2) Estudo das relações e das correspondências;
3) Conjuntos ordenados; Estruturas;
4) A operação e a Álgebra; a vizinhança e a Topologia;
5) Estudo dos sistemas algébricos;
   a) Grupoides; semi-grupos; grupos; abelianos;
   b) Aneis; corpos;
   c) Ideais;

A inscrição é gratuíta e apenas subordinada às instalações à disposição da Gazeta.

Alemão — Realizam-se às segundas e quintas, das $21\,{}^1/_2$ às 23 horas, aulas destinadas apenas à aquisição da tecnica de tradução de textos de matemática e física escritos em lingua alemã. Com base na experiência adquirida, projecta-se a elaboração duma gramática adoptada a esse objectivo e o respectivo dicionário de termos técnicos.

O livro de texto adoptado foi: K. Strubecker. *Differentialgeometrie I.* «Sammlung Göschen» (V. pág. 26, crítica, 115).

Deste modo, facilita-se aos estudiosos de matemática da lingua portuguesa a utilização da imensa e importantíssima bibliografia matemática escrita em lingua alemã.

J. G. T.

NOTICIAS VÁRIAS

A «Gazeta de Matemática» regista com muito júbilo a nomeação do Professor António Aniceto Monteiro, um dos seus fundadores, para a cadeira de Análise Matemática da Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales da Universidade de Buenos Aires.

*

Foram eleitos membros da Academia das Ciências de Paris os Professores Maurice Fréchet e Georges Darmois que sucedem a Emile Borel e Jean Chazy respectivamente. A «Gazeta de Matemática» felicita os novos académicos sob cuja orientação trabalharam alguns matemáticos portugueses.

*

Em 1995 e 1956 faleceram os notáveis matemáticos Herman Weyl, F. Riesz, E. Whittaker, G. Valiron, J. Chazy, E. Borel e L. Fantappiè.

---

[1] Insiste-se mais uma vez, que se considera também pedagògicamente errada a tendência de chamar «Abstracto» àquilo que o é apenas de modo relativo. assim como o «Moderno» com mais de um século de existência é cientìficamente falso.

[2] Quartas-feiras, das 14 às 15,30 horas.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro de 1956.

Ponto n.º 1

4175 — Seja $f(x, y)$ contínua e constante nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e diferenciável no seu interior.

a) Mostre (pelo teorema de Rolle) que a derivada de f ao longo da recta $\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \end{cases}$ $(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$ se anula pelo menos uma vez em ponto interior.

b) Prove que, quando homogénea, f é também constante sobre as circunferências concêntricas, interiores.

c) Verifique que, nas condições da alínea *b*), $z = f(x, y)$ define uma superfície de revolução.

4176 — Considere a função $\begin{cases} f(x) = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ definida no intervalo $(-1, 1)$. Diga, justificando, se é contínua no ponto $x = 0$. Calcule as derivadas laterais neste mesmo ponto. É $f(0)$ extremo? Porquê?

4177 — Desenvolva em série de potências de x a fracção

$$y = \frac{x^4 - 2x + 1}{(1 + x)(1 + x^2)^2}$$

depois de a ter decomposto em elemento simples.

Ponto n.º 2

4178 — Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} (x - a)\, e^{\frac{1}{x-a}} \\ 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\omega(a)$

b) Assíntotas da imagem de $f(x)$.

c) Expressão linear que mais se aproxima de $f(x)$ nas vizinhanças do infinito. Diferença entre $f(x)$ e aquela expressão linear e sinal de tal diferença para grandes valores de $|x|$.

4179 — Mostre que a equação

$$f(x, y) = xy^3 + x^3 y - 2 = 0$$

define nas vizinhanças do valor $x = 1$ uma função $y = \varphi(x)$ como sua raiz sob a condição $\varphi(1) = 1$.

Calcule ao longo da imagem de $\varphi(x)$ o valor da expressão $x f'_x + y f'_y$. Direcção da imagem referida naquele ponto e sentido da concavidade nas suas vizinhanças.

4180 — Dê um desenvolvimento em série de potências de x da função

$$f(x) = \log \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

e indique a sua região de validade. Confirme o resultado por recurso ao desenvolvimento de $f'(x)$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Ponto de exame — 1.ª Frequência (1.ª chamada) — 1956-1957.

4181 — Que se pode dizer de um ponto fronteiro a um conjunto X, quando ele não é um x?

b) Mostre que é fechado o conjunto X_1 obtido pela adjunção a qualquer conjunto X de todos os seus pontos fronteiros.

c) Sendo Y o conjunto dos reais não contidos em X_1, mostre que Y é conjunto aberto.

d) Seja X um conjunto com infinitos elementos de um e outro sinal, elementos sujeitos à condição de:

$$a < |x| < b .$$

É X limitado? Relacione com a e b os limites de Weierstrass de X_1. Supondo que existem sempre elementos $x < a + 1/n$ e $x > b - 1/n$ com qualquer n, quais são os limites a respeito de X?

4182 — *a*) Estabeleça a fórmula da radiciação de índice n e faça a sua aplicação ao número $z = \rho(\cos m\pi + i \operatorname{sen} m\pi)$ com m inteiro. Discuta o resultado relativamente à existência do valor real da raiz.

b) Designe $[A\,B\,C\,D]$ e $[A'\,B'\,C'\,D']$ dois quadrados de centro na origem, o 1.º de vértices nos eixos coordenados e o 2.º com os lados paralelos a estes, e inscritos em circunstâncias de raio r e r_1. Quais os complexos cujas raízes de índice 4 têm por imagens os vértices de um e outro quadrado?

4183 — *a*) Considere o polinómio real:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n \quad \text{para} \quad a_n > 0$$

Relacione $f, f' \cdots f^{(n)}$ com os a_i e indique, com justificação, o préstimo da regra de Ruffini para o cálculo de tais coeficientes.

b) Mostre que sendo $f(a), f'(a) \cdots f^{(n-1)}(a)$ não negativos, a é limite excedente das raízes reais de f. Supondo que $z = a$ é raiz de multiplicidade α de $f(z)$, que polinómios derivados de $f(z)$ se anulam em α? Determinar as constantes α e β para $\beta \neq 0$ de modo que o polinómio $f(z) = z^4 + 4\alpha z^3 + 2z^2 - \beta$ admita alguma raiz tripla não nula e para tais valores de α e β calcule essas raízes e dê a decomposição de f em factores primários. Qual o m. d. c. de f e f'? f' e f''? f' e f'' e f'''?

4184 — Descreva a operação de condensação de uma matriz A e o seu préstimo no cálculo da característica, justificando alguma proposição das que, fundamentam a técnica, aplicando esta mesma técnica à resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y - 3z + u = -3 \\ 2x + y + 4z - 2u = 9 \\ x + 2y + z - u = 4 \\ x + y + 3z + u = 9 \\ x + y \quad\; + u = \alpha \end{cases}$$

Determine α de modo que o sistema seja possível.

Enunciados dos n.os 4175 a 4184 de J. Dionísio.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência — Ordinário — 29-6-56.

4185 — Resolver os seguintes problemas:

a) Calcular $\lim_{x=0} \dfrac{x \cdot tg\, x}{e^x - x - 1}$.

R: 2.

b) Calcular $P\, x \cdot \log \sqrt[3]{1+x^4}$.

R: $\dfrac{x^2}{2} \log \sqrt[3]{1+x^4} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} x^2 + C$.

c) Utilizar a sucessão de Fourier para averiguar se $f(x) = 12x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$ tem raízes em $(0, 1)$. Em caso afirmativo separá-las.

R: *Existem duas raízes, respectivamente nos intervalos* $\left(0, \dfrac{7}{26}\right)\left(\dfrac{7}{26}, 1\right)$.

4186 — Provar que quando $S_n \to S$ também $\dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} \to S$. Enunciar alguma proposição da teoria das séries relacionada com esta propriedade e mostrar que $\Sigma(-1)^n k$ (k constante), embora divergente, é somável por média.

Deduzir o primeiro critério de Cauchy. Como aplicá-lo à determinação do intervalo de convergência de $\Sigma\, a_n x^n$?

Definir série absolutamente convergente e provar que a sua soma é independente da ordem dos termos.

4187 — Provar que, sendo $u = f(z)$ univalente e contínua no conjunto limitado e fechado Z, a função inversa $z = g(u)$ é contínua no conjunto transformado $U = f(Z)$.

Sendo $f(x)$, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ contínuas e deriváveis em (a, b) e $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}$ a derivada de $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}$ provar que $\Delta'(c) = 0$ onde $a < c < b$. Como se deduzem desta propriedade os teoremas de Lagrange e de Cauchy?

4188 — Em que condições a equação $f(x, y) = 0$ define na vizinhança de $P(a, b)$ uma função $y(x)$? Admitindo a derivabilidade de $y(x)$ aplicar a regra de derivação das funções compostas para deduzir a fórmula $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — 16-7-56.

4189 — Considerar o determinante $|A| = |a_i^k| = 0$ ($A_i^k \neq 0$ para todos os valores $i, k = 1, \cdots n$) e o sistema $A_i^\alpha x_\alpha = 0$ $(i, \alpha = 1, \cdots n)$.

Mostrar que o sistema é indeterminado, indicar o seu grau de indeterminação d e apresentar d soluções independentes. Qual é a expressão geral das suas soluções?

R: *O sistema é indeterminado em virtude de* $|\hat{A}| = |A|^{n-1} = 0$ *e, como* $M_r(\hat{A}) = |A|^{r-1}$ compl. $M(A^*)$ (Jacobi), *só com* $r = 1$ *se encontra um menor diferente de zero. O grau de indeterminação do sistema será* $d = n - 1$ *e, por exemplo, as* d *soluções*

$$(a_1^1, a_1^2, \cdots a_1^n)$$
$$(a_2^1, a_2^2, \cdots a_2^n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \cdots a_{n-1}^n)$$

são independentes como consequência da hipótese proposta.

Todas as soluções se contêm na fórmula

$$((x)) = \beta^1((x^1)) + \beta^2((x^2)) + \cdots + \beta^d((x^d))$$

ou, mais explicitamente, utilizando as d *soluções acima apresentadas:*

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta^1 a_1^1 + \beta^2 a_2^1 + \cdots + \beta^{n-1} a_{n-1}^1 \\ x_2 &= \beta^1 a_1^2 + \beta^2 a_2^2 + \cdots + \beta^{n-1} a_{n-1}^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \beta^1 a_1^n + \beta^2 a_2^n + \cdots + \beta^{n-1} a_{n-1}^n \end{aligned}$$

4190 — Utilizar as teorias da interpolação e eliminação para determinar o parâmetro m, por forma que o polinómio do 3.º grau $f(x)$, de que se conhecem os valores

$$\begin{aligned} f(-1) &= m-6 \\ f(0) &= m \\ f(1) &= m-6 \\ f(2) &= m-18 \end{aligned}$$

tenha duas raízes comuns com o polinómio $x^3-5x^2-4x+20$. Apresentar a equação das raízes comuns.

R: *Construindo a tabela de diferenças, obtem-se*

x	f(x)	Δ f(x)	Δ² f(x)	Δ³ f(x)
−1	m − 6	6	−12	6
0	m	− 6	− 6	
1	m − 6	−12		
2	m − 18			

Pela fórmula de Gregory-Newton *vem*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{3!}\,\frac{\Delta^3 f(a)}{h^3} =$$

$$= m-6+(x+1)\cdot 6 + \frac{(x+1)x}{2!}\cdot(-12) +$$

$$+ \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\cdot 6 = x^3-6x^2-x+m.$$

Adoptando o método para simplificar o resultante de $f(x)$ *e do polinómio dado obtem-se:*

1	−5	−4	20
	1	−6	−1 m
−1	−1	3	m − 20
1	−2	m − 24	20
2	m − 34	12	40

Para que existam duas raízes comuns terá de ser $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & m-34 \end{vmatrix} = 0$ *o que dá imediatamente* $m = 30$ *valor que também anula o resultante. A equação das raízes comuns tira-se do quadro apresentado ou seja* $-x^2+3x+10=0$.

4191 — Seja $f(x)$ definida em (a, b) e

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (1)$$

com $a < x_1 < x_2 < b$ e $A[x_1, f(x_1)]$ $B[x_2, f(x_2)]$.

Escrever a equação da corda AB e mostrar que se dá a desigualdade (1) quando em (x_1, x_2) a corda deixa o arco da curva por baixo dela.

Escrever com três termos a fórmula de Taylor para $f(x_1)$ e $f(x_2)$, respectivamente segundo as potências de $\dfrac{x_1-x_2}{2}$ e $\dfrac{x_2-x_1}{2}$.

Concluir dos desenvolvimentos que a desigualdade (1) tem lugar sempre que $f''(x) > 0$ em (x_1, x_2).

R: *A equação da corda* AB *é*

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

e, se a corda deixa o arco da curva por baixo dela, terá de ser

$$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$$

que conduz imediatamente à desigualdade (1).

A fórmula de Taylor *dá*

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{x_1-x_2}{2}f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{(x_1-x_2)^2}{8}f''(\tau_1)$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{x_2-x_1}{2}f'\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) + \frac{(x_2-x_1)^2}{8}f''(\tau_2)$$

Adicionando membro a membro e notando que $f''(x) > 0$ *em* (x_1, x_2), *vem:* $f(x_1)+f(x_2) > 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ *ou*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \text{c. q. d.}$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho — (2.ª chamada) — 20-7-56.

4192 — Considerem-se dois sistemas de eixos coordenados cartesianos rectangulares $S)$ Ox, Oy, Oz e $S')$ Ox', Oy', Oz', em que (a, b, c), (a', b', c') e

(a'', b'', c'') são os cosenos directores, respectivamente, de Ox', Oy' e Oz' em relação ao sistema S.

a) Provar que $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ é ortogonal.

b) Qual é o valor de $|L|$? Interpretar geomètricamente.

c) As fórmulas de transformação do sistema S no sistema S' são, como se sabe,

$$\begin{aligned} x' &= a\ x + b\ y + c\ z \\ y' &= a'\ x + b'\ y + c'\ z \\ z' &= a''\ x + b''\ y + c''\ z\,. \end{aligned}$$

Mostrar que a transformação é ortogonal e concluir daí que a distância de um ponto à origem é invariante com a transformação.

R: a) L *é ortogonal porque* $a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2=a''^2+b''^2+c''^2=1$ e $aa'+bb'+cc'=aa''+bb''+cc''=a'a''+b'b''+c'c''=0$.

b) $|L|=\pm 1$. *Se* S *e* S' *coincidem* $|L|=1$; *Se* S *e* S' *têm os eixos na mesma posição relativa então* $|L|=1$ *e se não têm* $|L|=-1$.

c) *A transformação é ortogonal porque* L *é ortogonal. Uma das propriedades dessa transformação diz que* $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$, *o que prova que a distância de um ponto à origem é invariante com a transformação.*

4193 — Provar que $\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{h}{1+xh+x^2}$ e $\Delta \log f(x) = \log \left[1 + \dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}\right]$.

b) Calcular $\Delta^n e^{ax+b}$ e $\Delta^n (a x^n + b x^{n-1})$.

c) Escrever o polinómio de menor grau que para os valores $0, 1, 2, 3$ toma, respectivamente, os valores $2, 5, 7, 8$.

R: a) $\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x$ *e, fazendo* $y = \operatorname{arctg}(x+h)$ *e* $z = \operatorname{arctg} x$ *vem*

$$\Delta \operatorname{arctg} x = y - z$$

e

$$\operatorname{tg}(y-z) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z} = \frac{h}{1 + xh + x^2}$$

Então

$$\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{h}{1 + xh + x^2}$$

$$\Delta \log f(x) = \log f(x+h) - \log f(x) = \log \frac{f(x+h)}{f(x)} = \log \left[1 + \frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right].$$

b)
$$\Delta e^{ax+b} = e^{a(x+h)+b} - e^{ax+b} = e^{ax+b}(e^{ah}-1)$$
$$\Delta^n e^{ax+b} = e^{ax+b}(e^{ah}-1)^n$$
$$\Delta^n (a x^n + b x^{n-1}) = a \Delta^n x^n = a\, n!\, h^n$$

c) *Utilizando a fórmula de* Gregory-Newton *obtem-se o polinómio* $-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7x}{2} + 2$.

4194 — *a*) Aplicar a teoria dos máximos e mínimos para determinar o cilindro de volume máximo inscrito numa esfera dada.

b) Determinar os parâmetros α e β por forma que a equação $x^2 + \alpha x^2 y + \beta x y + 1 = 0$ defina na vizinhança de $P(1, -1)$ uma curva $y(x)$ cuja tangente nesse ponto é $3x - 2y - 5 = 0$.

R: a) *O volume do cilindro vem dado por* $V = \pi \left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) h$ *onde* R *é o raio da esfera e* h *a altura do cilindro. Como* $\dfrac{dV}{dh} = \pi \left(R^2 - \dfrac{3h^2}{4}\right)$, *o volume máximo oblem-se com* $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

b) *Os parâmetros são* $\alpha = 3$ *e* $\beta = -1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro — 17-10-56.

4195 — Dado o polinómio $f(x) = x^3 + p x^2 + q x + r$ resolver os seguintes problemas

a) Provar que a condição para que as suas raízes estejam em progressão geométrica é $q^3 = p^3 \cdot r$.

b) Calcular $\Delta^3 f(x)$.

c) Atribuindo a x os valores x_0, x_1, x_2, x_3 e x_4, poderá existir um polinómio do 4º grau que, para aqueles valores de x, tome, respectivamente, os valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ e $f(x_4)$? Porquê? Mostrar que há uma infinidade de polinómios $g(x)$ tais que $g(x) - f(x)$ é divisível por $\psi(x) = \prod_{i=0}^{i=4} (x - x_i)$.

R: a) *Pelas fórmulas de* Girard $\begin{cases} a + ah + ah^2 = -p \\ a^2 h + a^2 h^2 + a^2 h^3 = q \\ a^3 h^3 = -r \end{cases}$

o que conduz imediatamente a $q^3 = p^3 r$.

b) $\Delta^3 f(x) = 3!\, h^3$

c) *Não, porque existe apenas um polinómio de grau inferior a* 5 *que para aqueles valores de* x *toma os correspondentes valores de* f(x). *Esse polinómio terá de ser necessàriamente* f(x). *Há evidentemente uma infinidade de polinómios* g(x) *(de grau maior ou igual a* 5) *que passam pelos mesmos pontos que* f(x) *e, por conseguinte,* $g(x) - f(x)$ *tem as raízes* x_0, x_1, x_2, x_3 *e* x_4, *o que o torna divisível por* $\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1) \cdot (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

4196 — *a*) Estudar a independência das formas lineares

$$f_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$
$$f_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$f_3 = a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4$$

b) Dada a substituição linear $y_i = a_i^j x_j\,(i\,,j = 1\,,2\,,\cdots n)$ quantos valores de K satisfazem à relação $Y_i = K x_i$? Que são estes valores em relação à matriz $\| a_i^j \|$?

R: a) *As formas são independentes com qualquer das condições:* $c \neq a\,,\ b \neq c\,,\ b \neq d$.

4197 — *a*) Utilizar a relação $y'(1+x+x^2) = 1+2x$ para desenvover em série de potências inteiras de x a função $y = \log(1+x+x^2)$.

b) Calcular $\varphi'_y(0,0)$ para a função

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2(x-y)}{x^2+y^2} & (x \neq 0\,, y \neq 0) \\ 0 \quad (x=y=0) \end{cases}$$

A equação $\varphi(x\,,y) = 0$ define uma função $y(x)$ na vizinhança do ponto $(0\,,0)$? Porquê?

Enunciados e soluções dos n.os 4185 a 4197 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 8-10-56.

4198 — 1) Estude a correspondência $x \to e^{2\pi i x}$ em que x é um número real. Diga qual é o núcleo do homomorfismo.

4199 — 2) Na multiplicidade $\mathfrak{M}_n\ (n \to 3)$ considere o conjunto daqueles vectores para os quais $5x_1 - x_3 = 0$. Formam estes vectores uma sub-multiplicidade? No caso afirmativo diga porquê.

4200 — 3) Prove que se o vector y não pertence à submultiplicidade $\mathfrak{M}_k$ de $\mathfrak{M}_n$ mas pertence à gerada por $\mathfrak{M}_k$ e $x\,,x$ pertence à gerada por $\mathfrak{M}_k$ e y

4201 — 1') R_1 e R_2 são duas rectas paralelas a ox e P_1 e P_2 são dois pontos respectivamente de R_1 e R_2; o ângulo $P_1\,o\,P_2$ supõe-se recto. Diga qual o lugar do ponto M quando se supõe $OM \perp P_1P_2$.

Nota: É necessário e basta para que M pertença ao lugar que a recta perpendicular a OM tirada por M encontre R_1 e R_2 em pontos P_1 e P_2 tais que $P_1\,O\,P_2$ seja recta.

4202 — 2') Considere a elipse situada no plano xoy, de semi-eixos 2 e 1. Determine a equação do cilindro cuja directriz é a referida elipse e cujos parâmetros directores são $(1\,,1\,,1)$.

4203 — 1'') Determinar o triângulo de área máxima tal que $x+y=2$, sendo x a altura e y a base.

4204 — 2'') As equações $a\,z + \operatorname{sen}(x+y) = 0$ e $a\,z + \operatorname{sen}(x-y) = 0$ definem z e y como funções de x. Determine $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0\,,0\,,0)$.

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — Exame final escrito — 20-7-1955.

4215 — Enuncie o problema do desenvolvimento duma função periódica de período 2π em série trigonométrica.

Como se obtém a série de Fourier duma função $f(x)$ definida no intervalo $(-\pi\,,+\pi)$? Determine a série Fourier da função igual a $\left|\dfrac{x}{2}\right|$ quando x varia entre $-\pi$ e $+\pi$.

Prove que a série de Fourier duma função $\varphi(x)$ contínua no intervalo $(-\pi\,,+\pi)$ é uma série só de cosenos se $\varphi(x)$ é função par, e só de senos se $\varphi(x)$ é impar.

R: *A função* $f(x) = \left|\dfrac{x}{2}\right|$ *quando* x *varia entre* $-\pi$ *e* $+\pi$, *e a função*

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} \ \textit{para}\ -\pi \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x}{2} \ \textit{para}\ 0 \leq x \leq +\pi \end{cases}$$

tem valores iguais nos extremos do intervalo e é função contínua.

Os coeficientes da série são dados por

$$\begin{cases} 2\pi a_0 = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \\ \pi a_p = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos px\,dx \\ \pi b_p = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\operatorname{sen} px\,dx \end{cases}$$

$$2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{x}{2}\right|dx = \int_{-\pi}^{0} -\frac{x}{2}\,dx + \int_{0}^{+\pi}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{2} \quad \textit{donde} \quad a_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi a_p = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{x}{2}\right|\cos p\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} x\cos px\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\pi} x\cos px\,dx$$

como se tem $\displaystyle\int x\cos px\,dx = \frac{x}{p}\operatorname{sen} px +$

$$\int -\frac{1}{p}\operatorname{sen} px\,dx = \frac{x}{p}\operatorname{sen} px + \frac{1}{p^2}\cos px + C$$

vem $\pi a_p = -\frac{1}{2p^2}\left[\cos p x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2p^2}\left[\cos px\right]_{0}^{\pi}$

resultando $\pi a_{2k} = 0$; $\pi a_{2k+1} = -\frac{2}{(2k+1)^2}$

Por outro lado $\pi b_p = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{x}{2}\right| \operatorname{sen} px\, dx = 0$

Tem-se finalmente

$$\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + \cdots\right]$$

4216 — Defina integral duma função $f(x, y)$ num domínio Δ quadrável.

Como e em que condições se pode efectuar uma mudança de variáveis nesses integrais?

Calcule

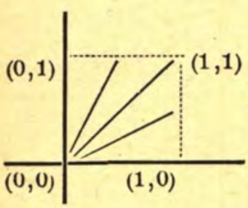
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(4+x^2+y^2)^{3/2}}$$

depois de mudar as coordenadas cartesianas em coordenadas polares.

R: *O domínio Δ ao qual se estende o integral é o quadrado de vértices*

$$(0,0)\quad(1,0)\quad(1,1)\quad(0,1)$$

Tem-se, pois:



$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(4+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{\rho\, d\rho}{(4+\rho^2)^{3/2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} \frac{\rho\, d\rho}{(4+\rho^2)^{3/2}}$$

como é $\int \frac{\rho\, d\rho}{(4+\rho^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{4+\rho^2}} + C$

virá

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(4+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\right] + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+4\operatorname{sen}^2\theta}}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{5-4\operatorname{sen}^2\theta}}\right] + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5-4\cos^2\theta}}\right]$$

mas, como é

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{5-4\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5-4\cos^2\theta}} = -\frac{1}{2}\,\frac{-\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

vem finalmente

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(4+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{8} - \left[\operatorname{arc\,sen}\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

4217 — A equação diferencial $\frac{y'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ é incompleta e o seu primeiro membro pode visìvelmente exprimir-se paramètricamente; determine o integral geral e os integrais singulares.

R: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *é a equação duma elipse cujas equações paramétricas são:* $x = a\cos t$ $\quad y = b \operatorname{sen} t$

Pondo então

$$y = b\operatorname{sen} t \qquad y' = a\cos t$$

vem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = b\cos t\,\frac{dt}{dx} = a\cos t$$

e portanto $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \qquad x = \frac{b}{a}t + c$

As curvas integrais têm as equações paramétricas

$$x = \frac{b}{a}t + c \qquad y = b\operatorname{sen} t$$

O integral geral é $\quad y - b\cdot\operatorname{sen}\frac{a(x-c)}{b} = 0$

Derivando em ordem à constante, e anulando: $\cos\frac{a(x-c)}{b} = 0$ *quadrando e somando, vem* $\frac{y^2}{b^2} = 1$ *ou* $y = \pm b$ *integrais singulares que se podiam visìvelmente obter, logo, da equação proposta.*

4218 — Demonstre que as funções dum sistema ortogonal são linearmente independentes

Indique a condição necessária e suficiente de dependência linear, válida para funções de quadrado integrável, e prove a necessidade e suficiência.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

113 — M. L. Dubreil — Jacotin, L. Lesieur e R. Croisot — **Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques** — Cahiers Scientifiques, fasc. XXI, 385 pág. — Gauthier-Villars, Éditeur — Imprimieur — Libraire, Paris, 1953.

Estamos em presença de mais um belo livro da Colecção «Cahiers Scientifiques», dirigida por Gaston Julia.

Trata-se, como se afirma na Introdução, do desenvolvimento de um ensino semestral realizado pelos Autores na Faculdade de Ciências de Poitiers, nos anos escolares de 1950-1951 e 1951-1952.

Esta obra está dividida em três partes.

Na primeira parte, elaborada por R. Croisot, tratam-se as noções fundamentais relativas aos Reticulados abstractos.

O capítulo I é dedicado aos *Conjuntos Ordenados* (ou *parcialmente ordenados*, segundo a terminologia de Garrett Birkhoff). As propriedades gerais dos *Reticulados* e *Semi-reticulados* são expostas no Capítulo II.

O Capítulo III trata de *Reticulados Completos* e *Semi-reticulados Completos*, incluindo a demonstração do Teorema de MacNeille relativo à imersão de um conjunto ordenado num reticulado completo.

O Capítulo IV é dedicado ao estudo das noções de *Homomorfismo* e *Isomorfismo* de semi-reticulados e de reticulados.

Os *Reticulados Modulares, Distributivos* e *Semi-modulares* são estudados, respectivamente, nos Capítulos V, VI e VII Introduz-se a noção de *Reticulado Modular Enfraquecido*, que se revela muito útil para o estudo de certos reticulados geométricos.

A definição de Reticulado Semi-modular é dada independentemente de ser finito ou não o comprimento do reticulado e várias propriedades conhecidas para os reticulados semi-modulares de comprimento finito, são estabelecidas para reticulados semi-modulares mais gerais, a saber, aqueles em que todas as cadeias limitadas são de comprimento finito.

Os *Reticulares Complementados* e *Relativamente Complementados* são estudados no Capítulo VIII. Estabelece-se uma condição necessária e suficiente para que seja complementado ou relativamente complementado, um reticulado semi-modular com primeiro elemento e em que todas as cadeias limitadas são de comprimento finito.

O Capítulo IX trata de noções e propriedades ligadas ao conceito de *Independência* em reticulados e em semi-reticulados.

A segunda parte deste trabalho, da autoria de M.me Dubreil-Jacotin, é consagrada ao estudo dos conjuntos munidos de uma estrutura algébrica ordenada.

Começa por estabelecer as propriedades gerais dos *Reticulados Multiplicativos* ou *Grupóides Reticulados* e, mais geralmente, dos *Grupoides ordenados*, tomando o termo «grupoide» na acepção de Oystein Ore.

A operação de *Residuação* é estudada no Capítulo II, que termina pelas demonstrações de que *todo o grupo reticulado em cadeia é arquimedeano e comutativo* e *todo o corpo ordenado arquimedeano é comutativo*. [Em «Lattice Theory», de Garrett Birkhoff, mostra-se que *é comutativo todo o grupo reticulado completo*].

No Capítulo III estudam-se *Congruências*. É apresentada uma condição necessária e suficiente para que uma equivalência definida num conjunto ordenado, seja regular com respeito à relação de ordem.

Introduz-se a noção *equivalência fortemente regular superiormente* (equivalência F. R. S) e mostra-se que toda a congruência num reticulado é uma equivalência F R. S., com respeito à relação de ordem definida pela operação «união».

Dão-se algumas propriedades gerais das congruências definidas numa álgebra.

Estabelece-se uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto de um grupoide associativo seja classe de alguma congruência nele definida e tal condição é estabelecida independentemente de o grupoide ter ou não elemento unidade. Para o caso de o grupoide ser grupo, mostra-se que existe *apenas* uma congruência que admite por classe um subconjunto que satisfaça a tal condição.

Mostra-se ainda que, para todo o semi-reticulado, há um reticulado de congruências que admitem por classe todo o subsemireticulado convexo dado.

No Capítulo seguinte estudam-se os *Ideais*.

Começa-se por dar uma definição de *complexo ideal* num grupoide associativo; a definição é tal que, no caso de o grupoide ser grupo, um complexo é um complexo ideal se e só se é um subgrupo invariante. Os complexos ideais são utilizados para a determinação das congruências de uma álgebra.

Define-se ideal de um reticulado e estudam-se as relações entre ideais e congruências, procurando as congruências que admitem um dado ideal como classe.

Estabelecem-se propriedades importantes, sob o ponto de vista dos reticulados, dos ideais de um grupo reticulado, de um anel, de um grupoide e, finalmente de uma álgebra.

Nos Capítulos V e VI são demonstrados vários teoremas de decomposição.

Finalmente, a terceira parte da obra, escrita por L. LESIEUR, trata do estudo dos *Reticulados Geométricos*.

O Capítulo I diz respeito aos Reticulados Geométricos de dimensão finita. Começa por observar que os elementos de uma Geometria Projectiva e os elementos de uma Geometria Afim constituem reticulados Em seguida, procede-se à construção axiomática de uma Geometria de dimensão n, partindo directamente dos elementos de um reticulado. Caracterizam-se, de vários modos, as geometrias de dimensão n.

No capítulo II estudam-se anàlogamente os Reticulados Geométricos de dimensão infinita, introduz-se a noção de paralelismo e dá-se uma condição necessária e suficiente de irredutibilidade de um reticulado geométrico.

No Capítulo seguinte estudam-se as geometrias projectivas de dimensão finita ou infinita e caracterizam-se as geometrias projectivas irredutíveis.

As Geometrias afins de dimensão finita ou infinita são estudadas no Capítulo IV. Uma geometria afim é definida como uma geometria modular enfraquecida de dimenção igual ou maior que 2, que verifica o postulado de Euclides.

Introduz-se o chamado *Postulado de Euclides Generalizado:* «Dada uma recta de um reticulado geométrico e dado um ponto não pertencente à recta, existe *quando muito* uma recta que passa pelo ponto e é paralela à recta dada».

Define-se em seguida *Geometria Afim Generalizada* como uma geometria modular enfraquecida de dimensão igual ou maior que 3, que verifica o postulado de Euclides generalizado.

Estuda-se o paralelismo numa geometria afim generalizada.

Constroi-se uma geometria projectiva a partir de uma geometria afim generalizada.

Estabelece-se finalmente a irredutibilidade de uma geometria afim generalizada.

As geometrias planas (isto é, de dimensão 2) afins são estudadas, *por via analítica*, no Capítulo V.

Faz-se uma referência especial às *Geometrias Planas Afins de Translacção*, às *Geometrias Planas Afins Desarguianas* e *Geometrias Planas Afins Pascalianas*.

No último capítulo põem-se em relêvo as ligações íntimas existentes entre as variedades lineares de uma geometria projectiva irredutível e os subespaços vectoriais de um espaço vectorial.

Mostra-se que o reticulado dos subespaços vectoriais de um espaço vectorial é uma geometria projectiva irredutível e que toda a geometria projectiva irredutível de dimensão superior a 2 é isomorfa à geometria projectiva dos subespaços vectoriais de um espaço vectorial.

O texto, de leitura agradável, é ilustrado com exemplos muito bem escolhidos.

Não tem este livro a feição enciclopédica de «Lattice Theory» de GARRETT BIRKHOFF Antes tem carácter didático, no bom sentido – no sentido de habilitar o leitor ao estudo de Memórias originais e estimular o seu trabalho pessoal.

No final de cada capítulo são propostos vários exercícios com o objectivo de dominar e desenvolver as matérias expostas.

Desejamos que esta obra seja lida por Professores e Estudantes de Matemática, pelo muito que ela pode contribuir para a actualização dos cursos de Matemática das nossas Escolas Superiores, actualização absolutamente indispensável e urgente, que nenhum artifício pode já iludir.

J. Morgado

114 — I. P. NATANSON — Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen — 1954 — AKADEMIE VERLAG — Berlin.

Com a tradução alemã desta obra de I. P. NATANSON, a editora «Akademie-Verlag» põe à disposição dos alunos e professores de matemática que dominam esta língua, um livro que pode contribuir grandemente para a divulgação de estudo profundo e actualizado da Análise Matemática.

Na realidade, a categoria deste livro, publicado pela primeira vez em 1950 (1), impõe-no por forma que, quatro anos depois é adoptado como livro de texto em várias universidades alemãs. A forma magistral e simultâneamente simples como a difícil teoria das funções de variável real é apresentada, torna a leitura agradável e atraente. O autor dirige-se sempre ao estudante e consegue, mercê da exposição, ordem e selecção de assuntos e exemplos, incutir-lhe confiança nas suas possibilidades pessoais e abrir-lhe perspectivas sobre as infindáveis belezas das matemáticas.

Em 470 páginas são expostos os assuntos seguintes:

Cap I – Conjuntos Infinitos: são pormenorizadamente esclarecidas as noções de numerável e potência do contínuo.

(1) Edições do Estado para literatura teórico-técnica, Moscovo-Leningrado.

Cap. II. — Conjuntos de pontos: estuda a estrutura dos conjuntos abertos e fecha-los, as noções de separabilidade, pontos de condensação. O Cap III estuda os conjuntos mensuráveis, as noções de medida interior e exterior e medida (à LEBESGUE) dos conjuntos limitados, a mensurabilidade e a medida como noção invariante em face dos movimentos e termina com notas gerais sobre o problema da medida baseadas sobre os teoremas de BANACH, HAUSDORFF e VITALI.

As funções mensuráveis são estudadas no Cap. IV: os teoremas de FRECHET, EGOROW, LUSIN, WEIERSTRASS, BERNSTEIN determinam as estruturas dessas funções.

O Cap. V dedica-se ao integral de LEBESGUE das funções limitadas; o Cap. VI às funções somáveis, o Cap. VII às funções de quadrado somável, sistemas de funções ortogonais e espaços L^p e l^p.

O integral de STIELTJES, precedido do estudo das funções de variação limitada, do princípio de HELLY e teoremas de BANACH, é exposto no Cap. VIII.

As funções absolutamente contínuas e suas propriedades, as representações contínuas — teoremas de BANACH, ZARETZKI, FICHTENHOLZ — precedem o integral indefinido de LEBESGUE (Cap IX). A teoria das funções de uma variável real termina no Cap. X com o estudo das séries de FOURIER e suas aplicações.

Seguem-se dois capítulos (XI e XII) sobre conjuntos planos e funções mensuráveis de várias variáveis e sua integração; um capítulo sobre funções de conjunto e suas aplicações à teoria da integração e três capítulos respectivamente sobre números transfinitos, classificação de BAIRE e análise funcional.

Quase todos os capítulos terminam por vários exercícios propostos — muitos deles de relativa dificuldade — totalizando cerca de 120.

O livro termina com um interessante e original capítulo onde se dá realce ao papel desempenhado pelos investigadores russos e soviéticos no domínio e na evolução da teoria das funções de variável real.

Sendo impossível em breves palavras fazer uma referência adequada a esta obra, queremos apenas apontá-la como exemplo de como a clareza, o rigor, a profundidade não são incompatíveis na boa exposição matemática.

Tratando-se portanto duma verdadeira obra-prima, é com sincera satisfação que a apresentamos ao público matemático português, particularmente aos estudiosos que venham a beneficiar do curso de técnica de tradução de obras matemáticas em língua alemã, organizado pela Gazeta de Matemática. O seu preço, 26 marcos, é relativamente baixo, comparado com outros livros estrangeiros.

J. G. T.

115 — KARL STRUBECKER — **Differentialgeometrie I, Kurventheorie des Ebene und des Raumes.** — — «Sammlung Göschen» — Walter de Gruyter — — Berlim, 1955.

No vol. 1113/1113a da Colecção Göschen estudam-se as noções fundamentais de Geometria Diferencial das curvas planas e torsas. Em 145 páginas de formato pequeno encontra o leitor, numa exposição simples e actualizada, os assuntos que constituem o conteúdo normal do programa de geometria diferencial integrado numa cadeira de análise infinitesimal, mas que ultrapassem de longe, infelizmente, os conhecimentos adquiridos nas nossas universidades.

O livro divide-se em duas partes:

I — Curvas planas, curvatura, equação intrínseca das curvas planas, contacto, evolutas e evolventes, curvas convexas.

II — Curvas no espaço, fórmulas de FRENET, equações intrínsecas das curvas torsas, famílias de planos, superfícies planificáveis, evolutas e evolventes, curvas isótropas.

Este livrinho mantém as características dos restantes da colecção — clareza, simplicidade, muitos exemplos e boa apresentação.

J. G. T.

116 — KEIICHI HAYASHI — **Fünfstellige Tafeln der Kreis-und Hyperbelfunktionen** — Walter de Gruyter — Berlim, 1955.

O presente livro é uma reedição das tábuas editadas com o mesmo título em 1920. Apresenta, em relação às tábuas vulgares de funções trigonométricas circulares e hiperbólicas, a grande vantagem de referir o argumento das mesmas funções, às unidades naturais: para cada ponto x são dados os valores $sen\, x$, $cos\, x$, $sh\, x$, $ch\, x$, e^x, e^{-x}, e o correspondente valor do argumento em unidades sexagesimais.

As diferenças dos valores de x são de: 10^{-4} desde $x=0$ a $x=0,1$; 10^{-3} desde $x=0,1$ a $x=3,0$; 10^{-2} desde $x=3,0$ a $x=6,3$; 10^{-1} desde $x=6,3$ a $x=10,0$, intervalos de variação na realidade pequenos.

Termina o livro com tábuas de e^x e e^{-x} para os valores seguintes: de $x=10^{-4}$ a $x=9.10^{-3}$ — doze decimais; de $x=10^{-2}$ a $x=9\times10^{-2}$ — dez decimais; de $x=10^{-1}$ a $x=10$ — oito decimais; e valores inteiros de x desde $x=11$ a $x=100$; com tabelas de transformação dos valores naturais do argumento nas unidades sexagésimais; com formulários de trigonometria circular e hiperbólica.

J. G. T.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Três números publicados em 1955

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1957 (4 números) 50 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1957, quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 a 64 { cada número simples	17$50
» » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telefone 77 19 43