GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIX **N.° 70-71** MARÇO-JUNHO 1958

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Telefone 771943 — LISBOA-N.

ANO XIX—N.º 70-71 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO/JUNHO—1958

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 771943 — LISBOA-N.

Uma órbita simétrica de um foguetão para vôo em torno da Lua (*)

por **G. A. Tchebotarev**

§1. Posição do problema

Neste artigo apresenta-se a solução do seguinte problema: determinação das condições iniciais do movimento, em face das quais um foguetão, encontrando-se para $t=0$ sobre a superfície da Terra, realiza um vôo em torno da Lua e volta à Terra sem dispêndio de combustível durante o percurso.

Tomemos para origem das coordenadas o centro da Terra; além disso consideremos o plano xy como o da órbita da Lua. Desprezando a excentricidade da órbita da Lua, consideremos o movimento da Lua como circular.

As perturbações devidas ao Sol e planetas estão fóra dos limites de exactidão dos cálculos adoptados no presente trabalho. As simplificações feitas não têm carácter essencial e fàcilmente podem ser tidas em conta em caso de necessidade.

Admitamos que no instante inicial t_0, a Lua e o foguetão se encontram sobre o eixo dos x, e que, além disso, a distância x^0 do foguetão à Terra é maior do que a distância x_1^0, da Terra à Lua, sendo também a velocidade do foguetão igual a zero. Na ausência de perturbação devida à Lua, movendo-se o foguetão sobre o eixo dos x, atingirá a superfície da Terra com velocidade que é igual à velocidade necessária para que o foguetão seja atirado até a altura inicial x^0.

As perturbações da Lua deformam a trajectória rectilínea do foguetão, e de modo

(*) No nosso artigo «A criação de um satélite artificial da Terra» (Gaz. Mat. 68-69), prometemos obter, de especialistas competentes, ou artigos ou elementos que permitam desenvolver qualquer pormenor de interesse, relativos aos problemas que se debatem actualmente no campo da Cosmonáutica.

O Académico, Prof. Gleb Alexandrovich Tchebotarev, Doutor em Física-Matemática, Director da Biblioteca da Academia das Ciências da URSS em Leningrado, é um dos mais destacados especialistas dos problemas de determinação das trajectórias de foguetões no espaço cósmico.

Ao Prof. Tchebotarev estamos extremamente gratos por permitir a publicação na Gaz. Mat. da presente tradução do seu artigo «Simmetritchnaja Traectorija Raketi dljá Poleta Vokrug Lúni» do «Bulleten Instituta Teoretitcheskoi Astronomii», Tomo VI, n.º 7-(80) 1957, Izdatelstvo Academii Nauk SSSR.

J. G. T.

geral, o foguetão no seu movimento a partir do ponto x^0, já não toca a superfície da Terra mas passa a certa distância r_{min} do centro da Terra.

É evidente que, aumentando o valor inicial x^0, aumentamos a distância do foguetão à Lua $\Delta^0 = x^0 - x_1^0$ e por consequência diminuímos as perturbações lunares. Por aproximações sucessivas é possível conseguir-se que seja verificada a desigualdade

$$r_{min} < R\,,$$

onde R é o raio da Terra.

Supunhamos agora que o movimento da Lua é o invertido. Então o foguetão, partindo do ponto x^0, descreve nova trajectória, simétrica da que acaba de ser construída. A posição e velocidade do foguetão no instante da queda dão as condições iniciais indispensáveis para lançar o foguetão para a posição x^0. Nestas condições, o movimento inverso da Lua deve-se substituir, indispensávelmente, pelo directo.

Assim é construída a trajectória, que consiste em dois ramos simétricos, para um vôo do foguetão em torno da Lua com retorno para a superfície da Terra.

Neste trabalho tomam-se os seguintes valores numéricos para as constantes astronómicas

raio médio da órbita da Lua	$a_1 = 384.400$ Km
período da revolução da Lua	$P_1 = 655{,}72$ horas
massa da Lua	$m_1 = 0{,}012277$
raio da Terra	$R = 6.378$ Km.
raio da Lua	$R_1 = 1.740$ Km.

É adoptado o sistema de unidades: kilómetro, hora, massa da Terra. Neste sistema, o valor numérico da constante de Gauss é dado por

$$k = 2{,}2699 \times 10^6\,.$$

Todos os cálculos são feitos com cinco decimais exactas.

§ 2. Primeira aproximação

Em primeira aproximação, a distância do foguetão à Terra, para $t = 0$, é aceite como igual a 400.000 km. Deste modo, as condições iniciais de integração são definidas pelos seguintes dados

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} x^0 &= 400.000\ \text{Km} \qquad & \dot{x}_0 &= 0 \\ y^0 &= 0 & \dot{y}_0 &= 0 \end{aligned}$$

A distância inicial do foguetão ao centro da Lua é $\Delta^0 = 15.600$ km. A integração numérica foi ordenada pelo método de Cowell [1] com as fórmulas bem conhecidas:

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} x &= f^{-2} + 0{,}083333\, f \\ y &= g^{-2} + 0{,}083333\, g \end{aligned}$$

onde

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} f &= \omega^2 \ddot{x} = -\omega^2 k^2 \frac{x}{r^3} + X \\ g &= \omega^2 \ddot{y} = -\omega^2 k^2 \frac{y}{r^3} + Y \end{aligned}$$

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} X &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\Delta^3} \\ Y &= \omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\Delta^3} \end{aligned}$$

Os termos

$$X_1 = -\,\omega^2 k^2 m_1 \frac{x_1}{a_1{}^3}$$

e

$$Y_1 = -\,\omega^2 k^2 m_1 \frac{y_1}{a_1{}^3}$$

estão situados fóra dos limites de precisão dos cálculos e consequentemente são regeitados.

O intervalo de integração ω é tomado como igual a uma hora. Para $t > 100$ horas as perturbações tornam-se insignificantes e o movimento ulterior do foguetão pode ser considerado como não perturbado.

Para $t = 100$ horas a integração numérica dá

$$(5)\quad \begin{aligned} x &= 40.914 \text{ Km} & \dot{x} &= -9575 \\ y &= 72.431 \text{ Km} & \dot{y} &= -3209 \\ r &= 83.188 \text{ Km} & \Delta &= 301.700 \text{ Km} \end{aligned}$$

As velocidades são expressas na unidade de tempo, igual a ω de 24 horas; convém dividi-las por ωk antes da dedução dos elementos. Os elementos são calculados pelas seguintes fórmulas:

$$(6)\quad \begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} & e \operatorname{sen} E &= \frac{r\dot{r}}{\sqrt{a}} \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 & e \cos E &= rV^2 - 1 \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - V^2 & M &= E - e \operatorname{sen} E \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} \pi = \frac{y}{r} \cos E - \dot{y} \sqrt{a} \operatorname{sen} E$$

$$\cos \pi = \frac{x}{r} \cos E - \dot{x} \sqrt{a} \operatorname{sen} E .$$

Os parâmetros, que nos interessam, da elipse osculatriz [2] são:

$$(7)\quad \begin{aligned} a &= 235.200 \text{ Km} \\ e &= 0{,}85980 \\ r_{\min} &= 32.975 \text{ Km} \end{aligned}$$

Deste modo, o foguetão passa à distância de 26.597 km. da superfície da Terra.

§ 3. Segunda aproximação

Na segunda aproximação aumentamos a distância inicial do foguetão à Lua, considerando-a igual a $\Delta^0 = 31.600$ km.

Como mostra a integração na primeira aproximação, o intervalo ω pode ser substancialmente aumentado. Consideremos assim $\omega = 2$ horas.

As condições iniciais para a segunda aproximação são

$$(8)\quad \begin{aligned} x^0 &= 416.000 \text{ Km} & \dot{x}_0 &= 0 \\ y^0 &= 0 & \dot{y}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Para $t = 100$ horas a integração numérica dá os seguintes resultados:

$$(9)\quad \begin{aligned} x &= 169.374 \text{ Km} & \dot{x} &= -11920 \\ y &= 36.585 \text{ Km} & \dot{y} &= +134 \\ r &= 173.280 \text{ Km} & \Delta &= 282.670 \text{ Km} \end{aligned}$$

Calculemos a órbita osculatriz para $t = 100$ horas

$$(10)\quad \begin{aligned} a &= 215.200 \text{ Km} & M &= -23^0{,}70 \\ e &= 0{,}97598 & \pi &= 176^0{,}72 \end{aligned}$$

$$n = 1^0{,}303 \text{ (por hora).}$$

Desprezando, como na primeira aproximação, as perturbações para $t = 100$ horas, calculamos a distância do perigeu do foguetão

$$r_{\min} = 5.169 \text{ Km}.$$

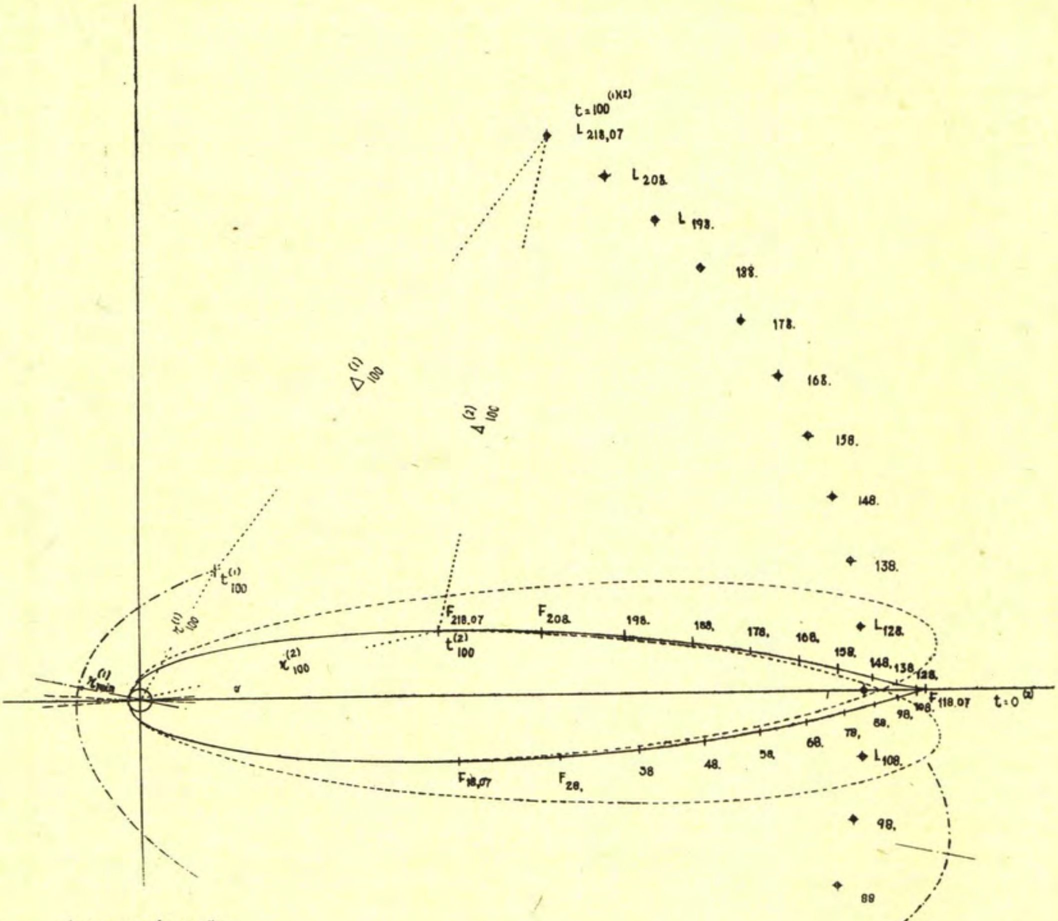
Portanto, o foguetão, no seu movimento, toca obrigatòriamente a superfície da Terra.

Determinando as condições da queda a partir da igualdade $r = R = 6378$ Km, vem:

$$(11)\quad \begin{aligned} M &= -0^0{,}16 \\ V &= 11.080 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Conhecendo a velocidade angular média, n, do foguetão, fàcilmente se calcula que a distância é $\Delta M = 23^0{,}54$, no caso da trajectória não perturbada, contada a partir do instante t_{100} até o instante da queda; isto é o foguetão leva então $\Delta t = 18{,}07$ horas.

Assim, o tempo total do movimento, desde o ponto x^0 até o instante de queda na superfície da Terra totaliza 118,07 horas, ou sejam 4,92 dias.



(1) 1.ª aproximação
(2) 2.ª »
F_{28}, Posição do foguetão $_{(x,y)}$ para $t = 28{,}07$
L_{68}, Posição da lua $_{(x_1,y_1)}$ para $t = 68{,}07$
—·—·—· Elipse osculatriz para a 1.ª aproximação
·········· Idem para a 2.ª aprox. para o instante $t^{(2)} = 100$
———— Trajectória completa do foguetão construída a partir dos dados da tabela
ESCALA 1 mm ~ 4.000 Km

Em virtude da simetricidade do segundo ramo da trajectória em relação ao eixo dos x, as condições iniciais de lançamento do foguetão para o vôo em torno da Lua são definidas pelos seguintes parâmetros:

$$(12) \qquad \begin{aligned} a &= 215.200 \text{ Km} & M &= +0^0{,}16 \\ e &= 0{,}97598 & \pi &= 183^0{,}18 \end{aligned}$$

Velocidade inicial, $V_0 = 11.080 \text{ m/s}$. A duração total do vôo do foguetão é de 236,14 horas ou 9,84 dias. A menor distância do foguetão à superfície da Lua é de 29.860 Km.

Neste trabalho é dada apenas a solução esquemática do problema posto.

t Horas	x (1.000 Km)	y (1.000 Km)	r (1.000 Km)	x_1 (1.000 Km)	y_1 (1.000 Km)	Δ (1.000 Km)
18,07	169,4	−36,6	173,3	221,0	−314,5	282,7
28,07	221,9	−34,6	224,6	250,1	−291,9	258,8
38,07	264,1	−31,1	265,9	276,9	−266,6	235,3
48,07	299,0	−26,7	300,2	301,1	−238,9	212,1
58,07	328,1	−22,0	328,8	322,6	−209,0	187,1
68,07	352,4	−17,2	352,8	341,1	−177,2	160,3
78,07	372,6	−12,4	372,8	356,5	−143,8	132,0
88,07	389,0	− 7,8	389,1	368,6	−109,0	103,0
98,07	401,9	− 3,8	401,9	377,4	− 73,2	73,6
108,07	411,1	− 0,9	411,0	382,6	− 36,8	45,7
118,07	414,9	0	414,9	384,4	0	30,5
128,07	410,3	+ 0,5	410,3	382,6	+ 36,8	45,6
138,07	400,4	+ 3,5	400,4	377,4	+ 73,2	73,4
148,07	386,8	+ 7,6	386,8	368,6	+109,0	103,0
158,07	369,6	+12,3	369,8	356,5	+143,8	132,0
168,07	348,6	+17,2	349,0	341,1	+177,2	160,2
178,07	323,3	+22,2	324,5	322,6	+209,0	186,8
188,07	293,2	+27,0	294,8	301,1	+238,9	212,0
198,07	257,0	+31,4	259,3	276,9	+266,6	236,0
208,07	213,2	+34,9	216,4	250,1	+291,9	259,5
218,07	158,2	+36,7	162,7	221,0	+314,5	284,7

As investigações ulteriores devem seguir em três direcções:

1 — Estudo da estabilidade da trajectória teórica relativamente às condições iniciais do movimento.

2 — Estudo da influência dos erros das constantes astronómicas adoptadas no movimento do foguetão.

3 — Passagem ao problema real em resultado da renúncia às simplificações feitas no presente trabalho.

§ 4. Cálculo de controle.

Em conclusão do trabalho, foi feito o cálculo de controle de todo o percurso do foguetão desde a partida da superfície da Terra até o regresso inverso à Terra. Como dados de partida serviram os elementos elípticos (12).

Durante as primeiras 18,07 horas de vôo, o movimento foi considerado como não perturbado. As medidas fundamentais que caracterizam o movimento perturbado são indicados na tabela junta. Pelos dados numéricos desta tabela fàcilmente se vê [3] o efeito da acumulação de erros no processo de integração numérica. É necessário notar também a inexactidão dos dados iniciais (12), que são obtidos como resultado da integração numérica.

A órbita elíptica osculatriz calcula-se para o instante t_{100}:

$$a = 214.247 \text{ Km}$$

$$(13) \qquad e = 0,97524$$

$$r_{\min} = 5.313 \text{ Km}$$

Deste modo, o foguetão no seu movimento pela órbita não perturbada toca a superfície da Terra.

Os cálculos de controle são feitos pelo colaborador científico do Instituto, M. C. Volkov.

§ 5. Etapas fundamentais da conquista do espaço interplanetário.

Que significado prático tem o problema examinado no presente trabalho?

Para responder a esta questão, é necessário dizer algumas palavras sobre as étapas fundamentais da conquista do espaço interplanetário. É possível marcar três étapas fundamentais na organização dos vôos interplanetários:

I etapa — vôos de foguetões não dirigidos;

II etapa — vôos de foguetões automáticos dirigidos;

III etapa — vôos de foguetões dirigidos com passageiros.

Para lançar no espaço interplanetário um foguetão, privado de combustível próprio (e, consequentemente, não dirigido), com alguns quilogramas de peso, é necessário construir um foguetão de três andares, cujo peso inicial será igual a 16,8 *t*. Mas já para o peso útil dum terceiro andar de 100 kg o peso inicial do foguetão sobe a 62,4 *t*. (em outra variante — 90,9 *t*). Para criar um satélite artificial de 36 *t* de carga útil o peso total do foguetão de três andares deve ser igual a 7.000 *t*, das quais 90 °/₀ é de combustivel (projecto Brown). Para comparação, indicaremos que o peso inicial das *V*-2 é ao todo 12,9 *t*.

Deste modo, as possibilidades da técnica contemporânea não vão fora dos limites de realização da I etapa das comunicações interplanetárias (foguetões não dirigidos).

A realização das II e III etapas requer, sem dúvida, em princípio, uma solução nova para o problema do combustivel do foguetão. Além disso, a realização da III etapa está ligada a uma série de problemas difíceis, e ainda não esclarecidos, de carácter biológico e médico (complexidade especial representa a defesa da actividade biológica contra as radiações cósmicas).

Que problemas podem ser solucionados na I etapa com o auxílio dos foguetões não dirigidos?

Indicaremos três desses problemas:

1 — problema: — Criação dum satélite artificial da Terra. As órbitas dos satélites podem ser muito variadas.

2 — problema: — Embora o vôo à Lua dum foguetão não leve consigo qualquer carga útil e não possa impedir a sua queda na superfície da Lua, o significado científico de tal vôo é extraordinariamente importante.

3 — problema: — Vôo à volta da Lua com regresso à Terra. Para frenar o foguetão na atmosfera empregam-se planadores e paraquedas. A realização deste projecto torna possível fotografar o hemisfério lunar invisivel da Terra.

Todos estes três problemas, de dificuldade técnica aproximadamente idêntica, serão provàvelmente resolvidos uns após outros no decurso dos próximos 5-10 anos.

Contudo, do ponto de vista da mecânica celeste, o segundo e especialmente o terceiro são problemas muito mais úteis de que o primeiro. Para a atenção destes problemas deve voltar-se a atenção dos astrónomos que se interessam pelas questões de cosmonáutica.

Na lista bibliográfica são indicados os trabalhos fundamentais publicados em russo.

LITERATURA

Kondratiuk, Y. V., 1947 — *A conquista do espaço interplanetário*. Defesa, 84 págs.

Kvoi, I. e I. Yutenbogart, 1950 — *O foguetão dinâmico*. Defesa, 232 págs.

OBERTH, T., 1948 — *Meios de realização dos vôos cósmicos.* Defesa, 232 págs.

RININ, N. A., 1928-1932 — *Comunicações interplanetárias.* Publicações 1-9.

TSANDER, F. A., 1947 — *O problema do vôo por meio de foguetões.* Defesa, 240 págs.

TSIOLKOWSKY, K. E., 1951 — *Aerodinâmica. Obras completas* 1. AN CCCR, 268 págs.

TSIOLKOWSKY, K. E., 1954 — *Aparelhos de vôo de reacção Obras Completas* 2. AN CCCR, 455 págs.

STERNFELD, A., 1937 — *Introdução à cosmonáutica.* ONTI, 320 págs.

ESNAULT-PELTERIE, R., 1950 — *Vôos cósmicos.* Defesa, 148 págs.

Entrou na redacção a 3 de Abril de 1956.

NOTAS

[1] Sobre o método de COWELL para órbitas perturbadas, consultar G. STRACKE — Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, — § 78-b.

[2] Elipse osculatriz significa aqui a órbita que o foguetão seguiria, suposta nula a influência perturbadora da Lua. Não tem o significado geométrico que exige um contacto de 2.ª ordem.

[3] Pela falta de simetria em relação ao instante $t = 118{,}07$ h dos valores de x e y.

As presentes notas e figura, incluídas no texto, não pertencem ao artigo escrito na língua original. Resultaram da valiosa colaboração dos Ex.^mos Senhores: Drs. A. CHAVES, S. DINIZ, Arq. H. GANDRA e Com.^te P. MAGALHÃES, na interpretação de alguns pontos mais delicados do trabalho. A todos manifestamos o nosso reconhecimento.

J. G. T.

Observações astronómicas dos satélites artificiais

por ***Raimundo Oliveira Vicente***

Com os primeiros lançamentos, coroados de êxito, de satélites artificiais da Terra, aparece um novo capítulo na longa história dos estudos astronómicos e que tem por fim não só a observação como também a determinação das órbitas dos satélites. Este novo capítulo da Astronomia não apresenta nem novos métodos de observação nem conceitos teóricos originais, limitando-se a adaptar convenientemente processos já utilizados em outros campos de Astronomia.

Desta maneira vamos considerar no presente artigo os métodos de observação que se poderão utilizar para detectar a presença de satélites artificiais. Uma das vantagens destas observações reside no facto de se terem antecipadamente dados precisos acerca da forma, dimensões e constituição dos satélites o que, sob o ponto de vista astronómico, é um caso único. Precisamente uma das características das observações astronómicas, até à época actual, reside no facto de se não ter conhecimento prévio das características do astro que se observa, características essas que se obtêm depois de efectuadas as observações.

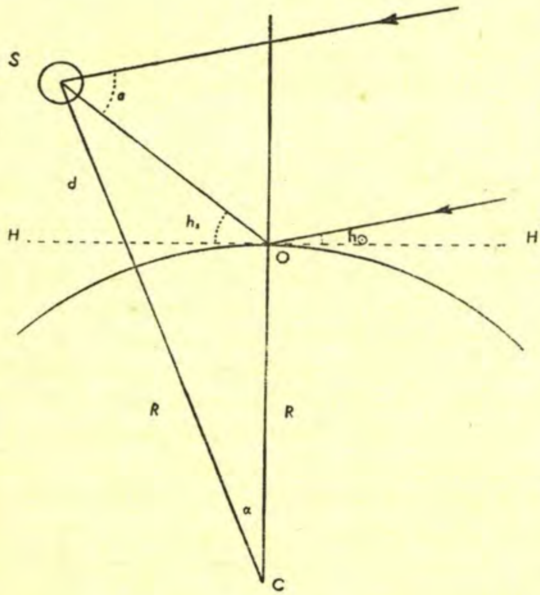
As possibilidades de observação dos satélites dependem dos processos utilizados para a observação dos astros e que se podem classificar em dois grupos — visuais e rádio-astronómicos — conforme o comprimento de onda das radiações recebidas. Em virtude da existência da atmosfera, as radiações que se podem observar à superfície da Terra estão situadas na região visível do espectro e na região que vai desde alguns centímetros até às dezenas de metros; estas duas regiões são as únicas em que as radiações não são absorvidas pela atmosfera terrestre.

As observações astronómicas correspondentes à região visível têm sido efectuadas desde os princípios das civilizações humanas ao passo que as observações correspondentes aos comprimentos de onda maiores só têm sido feitas recentemente, especialmente a partir da 2.ª guerra mundial, beneficiando dos grandes progressos realizados no campo da electrónica, e costituindo o que se chama presentemente a Rádio-Astronomia.

Os comprimentos de onda das radiações observadas condicionam os métodos aperfeiçoados para o seu estudo, e por isso vamos indicar seguidamente algumas das características dos métodos visuais e dos processos rádio-astronómicos da observação de satélites.

Para uma observação visual ser efectuada nas melhores condições é necessário conhecer qual é a magnitude do satélite e quais os instantes em que a observação é fácil de se efectuar. Qualquer destes problemas se pode resolver fàcilmente, utilizando expressões conhecidas da Astronomia de posição, como vamos mostrar no caso da determinação da magnitude de um satélite.

Consideremos a figura junta que nos mos-



tra geomètricamente as condições de iluminação do satélite. Seja O o local de observação do satélite S, de raio r, situado à distância D de O e cuja altura é h_s, contada a partir do horizonte Zénite racional HH' do lugar.

Figurando a direcção dos raios solares que incidem no satélite e no observador, seja $h_{\odot}$ a altura do Sol para o observador O, o ângulo $\sigma = h_s + h_{\odot}$ denomina-se ângulo de fase e dá-nos uma indicação sobre a superfície iluminada do satélite que é visível de O. Supondo que o satélite se encontra a uma distância d acima da superfície terrestre, e como é conhecido o raio R da Terra, verifica-se trigonomètricamente que os valores de D e h_s são funções do parâmetro α indicado.

Vamos considerar o caso de um satélite esférico que reflecte completamente toda a luz incidente. A lei de LAMBERT, estudada na Óptica, permite-nos determinar a intensidade luminosa dum elemento superficial dS do satélite por unidade de ângulo sólido, numa direcção fazendo um ângulo ε com a normal à superfície do satélite:

$$dq = \frac{aF_0}{\pi} \cos i \cos \varepsilon \, dS$$

sendo a o albedo do satélite devido a ser iluminado pelo Sol, F_0 o fluxo incidente e i o ângulo de incidência (contado a partir da normal à superfície do satélite). Exprimindo o elemento de superfície dS em coordenadas esféricas e integrando entre limites convenientes obtém-se a seguinte expressão

$$q = \frac{2}{3} \frac{aF_0}{\pi} r^2 [\operatorname{sen} \sigma + (\pi - \sigma) \cos \sigma].$$

Se não houvesse atmosfera, o observador situado à superfície da Terra veria o satélite com a iluminação $E = \frac{q}{D^2}$. Para atender porém à acção da atmosfera considera-se ainda um coeficiente exponencial $e^{-0,117 \operatorname{cosec} h_s}$ dado em função da altura do satélite. A expressão final será assim

$$E = \frac{2}{3} \frac{aF_0}{\pi} \frac{r^2}{D^2} [\operatorname{sen} \sigma + (\pi - \sigma) \cos \sigma] e^{-0,117 \operatorname{cosec} h_s}.$$

Em Astronomia costuma-se exprimir a iluminação de um astro em função duma grandeza denominada magnitude aparente. Por exemplo, a magnitude aparente de Sírius que é a estrela mais brilhante da esfera celeste, é igual a $-1{,}58$.

A magnitude aparente m é definida a partir da fórmula de POGSON

$$m = m_0 + 2{,}5 \lg \frac{E_0}{E}$$

onde podemos considerar $m_0 = -26{,}7$ como sendo a magnitude aparente do Sol cuja iluminação é E_0. Introduzindo nesta expressão o valor de E obtido anteriormente, podemos calcular a magnitude aparente de qualquer satélite de raio r conhecido e situado a uma distância D do observador. Como se verifica pela fórmula, a magnitude aparente do satélite depende também do albedo a que é função da constituição da sua superfície exterior, da altura h_s a que é observado e do ângulo de fase σ.

Para determinar as condições em que o satélite se pode observar visualmente é ainda necessário considerar não só qual a magnitude limite que se pode ver mas também o brilho da esfera celeste.

O limite da magnitude aparente que é visível à vista desarmada depende do brilho da região da esfera celeste em volta do astro, tendo-se feito determinações experimentais que forneceram valores das magnitudes aparentes que são visíveis em condições diferentes de brilho. Assim, por exemplo, quando $lg\,B = 0{,}5$ a magnitude aparente limite é igual a $+0{,}75$.

Quando se observa através de instrumentos astronómicos evidentemente que a magnitude limite aumenta, verificando-se que esse aumento Δm é dado, em 1.ª aproximação, pela expressão $\Delta m = 5\, lg\, M$ sendo M o poder amplificador do instrumento.

Quanto ao brilho da esfera celeste verifica-se que varia ràpidamente durante o crepúsculo e que o aumento de brilho, a partir do zénite até uma altura de 60°, é sòmente da ordem dos 30°/₀, quando a atmosfera está muito transparente e para uma altitude de cerca de 3,5 km. Ao nível do mar, em virtude da maior quantidade de ar existente, o brilho é cerca de 1,5 vezes superior.

Com estes elementos pode-se calcular a visibilidade de qualquer satélite. Para isso basta determinar o brilho da esfera celeste ($lg\,B$), a magnitude aparente limite m_{lim} referente a este brilho e em seguida comparar esta magnitude limite com a magnitude aparente m calculada para o satélite. Efectuando estes cálculos podem-se construir tabelas como a seguinte:

Visibilidade de um satélite de 53 cm de diâmetro, reflectindo toda a luz incidente, situado a 320 km de altitude (d=320 km), visto no crepúsc. ($h_\odot$=0°)

σ	D km	m	$lg\,B$	m_{lim}	$m - m_{lim}$	M
90°	320	5,51	0,90	0,00	5,51	12,5
41,8	468	5,40	1,20	−0,60	6,00	16
22,2	750	6,41	1,40	−1,05	7,46	31
19,7	1170	7,66	1,55	−1,35	9,01	63
4,35	1600	9,32	1,60	−1,45	10,77	>100

A diferença $m - m_{lim}$ dá-nos uma ideia da facilidade (no caso de ser negativa) ou dificuldade (no caso de ser positiva e ter um valor numérico apreciável) com que se observa o satélite. O valor tabulado M dá-nos a amplificação mínima que é necessária para que o satélite se veja; evidentemente que a amplificação a utilizar no instrumento deve ser superior aos valores indicados.

Estes estudos permitem chegar às seguintes conclusões:

1.ª — A região da esfera celeste na qual o satélite pode ser mais fàcilmente identificado corresponde a uma altura de 55° a 90°, na direcção oposta à do Sol.

2.ª — As melhores condições de visibilidade, para um satélite passando no zénite do observador, têm lugar quando o Sol tem uma altura de $-5°$ a $-17°$.

3.ª — Se a altitude do satélite fôr superior a 320 km, a sua observação torna-se difícil em virtude do brilho variar com o inverso do quadrado da distância. Tem no entanto as seguintes vantagens: o céu apresenta-se mais escuro, o satélite será iluminado durante períodos maiores no crepúsculo e além disso parece mover-se mais lentamente na esfera celeste, tornando assim mais fácil a observação com instrumentos.

4.ª — Os cálculos foram feitos supondo que a atmosfera é muito transparente. No caso de a atmosfera apresentar pouca transparência, o seu brilho aumenta, diminuindo o brilho do satélite. Por isso os locais de observação devem estar situados em regiões em que a atmosfera tenha boa transparência, como sucede, por exemplo, em regiões de elevada altitude.

De todos estes resultados podemos deduzir as melhores condições práticas para a observação de satélites. Verifica-se assim que se deve preferir a observação com um binóculo ou um instrumento astronómico (luneta ou telescópio) com pequeno poder amplificador e com um campo razoável, isto é, que a região da esfera celeste observável seja suficientemente grande. Um binóculo 7×50, cujo poder amplificador é de 7 vezes, sendo o diâmetro da objectiva de 50 mm, permitirá observar fàcilmente os satélites.

As observações dos satélites que estamos a considerar têm por fim a determinação da órbita do satélite com o maior rigor possível para que, a partir do conhecimento da órbita, se possam obter as coordenadas das várias grandezas físicas determinadas pelos instrumentos científicos transportados pelos satélites.

As observações visuais de satélites podem dividir-se em dois grupos, conforme são feitas por amadores ou profissionais, desempenhando um papel importante as observações de amadores visto que, como vimos, as observações de satélites são difíceis pelas condições especiais em que se encontram os objectos a observar.

As observações só apresentam interesse quando, no momento da observação, se regista o tempo por meio de cronógrafos ou cronómetros.

Algumas das observações visuais e fotográficas de amadores que apresentaram maior interesse foram efectuadas na Nova Zelândia, região situada numa posição favorável para as observações do primeiro satélite russo, visto que a órbita do satélite passava precisamente por cima da Nova Zelândia durante o crepúsculo vespertino quando o satélite e o foguetão que o acompanhava estavam ainda iluminados pelo Sol.

As observações dos foguetões dos primeiros satélites russos eram relativamente fáceis devido às suas dimensões. Assim observações visuais e fotográficas (algumas delas feitas com máquinas de formato 35 mm) efectuadas na Irlanda permitiram determinar o período de revolução e a variação do semi-eixo da órbita.

O programa americano de observação dos satélites por amadores está organizado de modo a que as observações sejam efectuadas por grupos, denominando-se «Moonwatch Program», havendo numerosos grupos de amadores integrados neste programa não só nos Estados Unidos como também na América do Sul e no Japão.

As observações dos satélites feitas por astrónomos são efectuadas principalmente por métodos fotográficos que permitem maior precisão na determinação dos elementos da órbita. Uma das câmaras fotográficas utilizadas é uma câmara Schmidt F/1 de 51 cm de abertura, permitindo fotografar uma região da esfera celeste de 30° de diâmetro; verifica-se que uma tal câmara pode registar as imagens de uma esfera de 38 cm de diâmetro situada a cerca de 1600 km. A precisão das observações depende principalmente da precisão com que se consegue registar o tempo, utilizando-se por isso os relógios de quartzo. Colocando várias destas câmaras em regiões convenientes para a observação dos satélites, conseguem-se obter informações precisas da maior parte da trajectória do satélite.

A partir das observações, visuais e fotográficas, determina-se a órbita do satélite utilizando os métodos clássicos da Mecânica Celeste. Para os satélites situados nas proximidades da superfície terrestre, até 1600 km de altitude, verifica-se que as perturbações principais da órbita elíptica resultam da forma do globo terrestre e da atmosfera; em comparação com estas perturbações, a influência do Sol, da Lua e dos efeitos da teoria da relatividade podem-se desprezar.

Conhecida a órbita de um astro, pode-se determinar o instante em que o astro passa no meridiano de um lugar (cujas coordenadas, latitude e longitude, são conhecidas) e que se denomina passagem meridiana do astro, sendo esta maneira de proceder a mais utilizada na maior parte dos problemas de Astronomia de posição. Porém, no caso dos satélites artificiais até agora lançados, sucede que os planos das órbitas apresentam inclinações apreciáveis em relação ao equador, desde 30° a 65°; além disso, os elementos da órbita apresentam grandes variações no decurso de alguns dias, em virtude da proximidade dos satélites. Por estas razões, verificou-se que era preferível calcular os instantes da passagem no paralelo correspondente à latitude do lugar.

Como já dissemos, os progressos da Rádio-Astronomia têm sido muito rápidos, utilizando-se não só instrumentos muito sensíveis, capazes de captarem as radiações emitidas pelas origens de rádio galácticas e extra-galácticas, como também instalações de radar que têm sido utilizadas, por exemplo, na observação de meteoros.

Desta maneira os observatórios rádio-astronómicos encontram-se em excelentes condições para a observação dos satélites artificiais, quer recebendo as emissões provenientes dos aparelhos de rádio dos satélites quer utilizando técnicas de radar para determinar directamente a distância a que os satélites se encontram.

As emissões dos satélites têm sido utilizadas principalmente para a determinação dos elementos da órbita, empregando-se processos interferométricos e processos que se baseiam no efeito DOPPLER. A partir destas emissões também se podem obter dados muito importantes acerca da propagação das ondas de rádio nas camadas da atmosfera.

Nos processos que utilizam o efeito DOPPLER, a redução das medidas feitas numa dada estação principia com a determinação do tempo t_0 a que corresponde a distância mínima r_0 a que o satélite se encontra da estação de observação. Designando por r a distância a que se encontra o satélite no instante t, contado a partir de t_0, e sendo v_r a velocidade relativa entre o satélite e a estação, podemos escrever

$$r^2 = r_0^2 + v_r^2 t^2 ,$$

supondo que a Terra e a trajectória do satélite são planas nas proximidades da estação.

A partir desta equação podem-se determinar os valores de v_r e r_0, utilizando uma série de observações e aplicando o método dos mínimos quadrados. Utilizando o efeito DOPPLER, os elementos que se podem obter a partir da observação duma única passagem do satélite são v_r, r_0 e t_0. Para determinar a órbita verifica-se que é necessário combinar as observações provenientes de diversas estações.

Utilizando os resultados obtidos pelos processos interferométricos com os provenientes do efeito DOPPLER em diferentes locais, foram deduzidos para o primeiro satélite russo, no Observatório Rádio-Astronómico Mullard, de Cambridge, os seguintes elementos da órbita:

Inclinação $i=64^{\circ}\,25'\pm 30'$ (interferómetro)
$65^{\circ}\ 1'\pm 10'$ (efeito DOPPLER)
Período (princípios de Outubro) $T=96^{m}\,2^{s}$ ($-1^{s},5$ por dia)
Excentricidade $e=0{,}06$
Altitude mínima (latitude 45° aproximadamente) 190 km
Altitude máxima (latitude 45° aproximadamente) 970 km
Precessão dos nodos $3^{\circ}\,40'\pm 20'$ por dia.

As observações efectuadas em Cambridge também mostraram que as variações, nos sinais emitidos pelo satélite, provinham da rotação de FARADAY do plano de polarização, para a qual um período de atenuação proporcional ao quadrado do comprimento de onda resulta de considerações teóricas. Estes resultados mostraram que não tinham fundamento as afirmações feitas de que os sinais emitidos vinham em forma de código.

As técnicas de radar para a observação de satélites adquirem especial importância a partir do momento em que o satélite deixa de emitir sinais. Deste modo, a partir deste instante, só observações visuais e de radar permitem determinar a órbita do satélite. A grande vantagem das técnicas de radar reside no facto da observação ser possível não só quando existem nuvens como também durante o dia.

Em virtude porém do pequeno número de observatórios devidamente equipados para estas observações, os resultados obtidos por meio de radar são ainda pouco numerosos. Devemos no entanto destacar os resultados já obtidos com o rádio-telescópio de cerca de 75 m de diâmetro, situado em Jodrell Bank, dependente da Universidade de Manchester, que se encontra nas últimas fases de acabamento.

As superfícies planificáveis e as envolventes das faces do triedro móvel

por ***J. Ribeiro de Albuquerque***

(Conclusão do número anterior)

Toda a planificável é gerada pelo movimento da tangente ao longo duma certa curva Γ, a sua aresta de reversão.

Seja u o arco da curva Γ, suposta orientada e tomado sobre ela um ponto fixo P_0; seja $\vec{t}$ o vector unitário sobre a tangente no ponto $P(u)$; pode-se tomar para a planificável uma representação paramétrica

$$11)\qquad M=P+\vec{t}(v-u)$$

As curvas $u=c^{te}$ são as tangentes a Γ, e as curvas $v=c^{te}$ são as evolventes de Γ, como mais adiante se verá.

Duas superfícies dizem-se aplicáveis se existe uma correspondência biunívoca entre os pontos M de S e M' de S', de tal modo que, a cada arco $\widehat{AB}$ de S corresponde um arco $\widehat{A'B'}$ de S' com

$$12)\qquad \int_{\widehat{AB}} ds=\int_{\widehat{A'B'}} ds'$$

Na equação 11) para $u=0$, vem: $M=P_0+\vec{t}_0 v$ que é a equação duma recta do espaço, a tangente a Γ no ponto P_0. Consideremos o plano π envolvido pela planificável e que lhe é tangente ao longo daquela recta.

Desenhe-se sobre esse plano, tangente à recta em P_0, uma curva Γ_1, orientada em concordância com a orientação de Γ; a orientação passou para Γ_1 através do ponto P_0 e da recta

$$M = P_0 + \vec{t}_0 v$$

tangente comum. Com uma coordenada curvilínea u_1 sobre Γ_1 contada a partir da origem P_0, pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de Γ e de Γ_1.

A curva Γ_1 fica completamente determinada com a condição de ter, em cada um dos seus pontos, uma curvatura ρ_1, de flexão, igual à curvatura ρ, de flexão, da curva Γ, no ponto correspondente.

Os pontos M_1 do plano π onde se desenhou Γ_1 podem ser determinados, com a única tangente a Γ_1 que, por eles, passa. Resulta para o plano π, dum modo evidente, a seguinte representação paramétrica:

$$13) \qquad M_1 = P_1 + \vec{t}_1 (v_1 - u_1)$$

e esta equação, estende às duas superfícies em questão, a planificável e o plano, a correspondência pontual biunívoca que se estabeleceu entre as duas curvas, Γ e Γ_1.

Da equação 12) ou das três seguintes, que lhe são equivalentes

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{dx}{du}(v-u) \\[2ex] Y = y + \dfrac{dy}{du}(v-u) \\[2ex] Z = z + \dfrac{dz}{du}(v-u) \end{cases}$$

tiram-se

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 =$$

$$= (v-u)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2 \right]$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial v} = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = 1$$

Para qualquer curva, traçada sobre a planificável, se tem então:

$$d s^2 = \frac{(v-u)^2}{\rho^2} d u^2 + d v^2$$

Os mesmos cálculos dão, para qualquer curva traçada no plano π, o mesmo resultado

$$d s_1^2 = \frac{(v_1 - u_1)^2}{\rho_1^2} d u_1^2 + d v_1^2$$

e, com as hipóteses feitas, se tem: $d s^2 = d s_1^2$.

A planificável é aplicável sobre o plano π. Se tirarmos à curva Γ a torsão, veremos que ela vai coincidindo com a curva Γ_1, e as tangentes a Γ vão-se assentando no plano π, e a planificável se vai planificando. Inversamente, se torcermos a curva Γ_1, em cada ponto da qual se desenhou a respectiva tangente, veremos aparecer, no espaço, a planificável.

De todas as esferas do espaço, aquela que tem com Γ, em P, um contacto de ordem máxima, é a *esfera osculadora* de Γ, no ponto P. A esfera tem contacto de ordem n, em P, quando assim suceder para qualquer curva da esfera a passar por P.

Sejam $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ as equações paramétricas da curva Γ, e sejam $X = X(s, a, b, c, r)$, $Y = Y(s, a, b, c, r)$, $Z = Z(s, a, b, c, r)$ as equações paramétricas duma curva situada sobre uma esfera, com centro em (a, b, c) e raio r, isto é, três funções a satisfazer

$$14) \qquad (X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$$

Esta família de esferas tem quatro parâmetros, a, b, c, r, e s é o parâmetro dos pontos da curva esférica. Esta curva deverá passar por P,

$$X(s, a, b, c, r) = x(s), Y(s, a, b, c, r) = y(s),$$
$$Z(s, a, b, c, r) = z(s)$$

o que, posto na equação 14), nos dá

15) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

para haver contacto devevá ter-se

$$X'(s,a,b,c,r)=x'(s)=\alpha$$
$$Y'(s,a,b,c,r)=y'(s)=\beta$$
$$Z'(s,a,b,c,r)=z'(s)=\gamma$$

derivando uma vez 14) e pondo aí estas condições, vem

16) $(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=0$

Com as novas condições, de igualdade das segundas derivadas

$$X''=x'' \,,\; Y''=y'' \,,\; Z''=z''$$

derivando duas vezes 14) e pondo aí estas condições e as anteriores temos, depois de atender às fórmulas 5) de FRENET-SERRET

17) $\dfrac{x-a}{\rho}\xi+\dfrac{y-b}{\rho}\eta+\dfrac{z-c}{\rho}\zeta+1=0$

Como existem quatro parâmetros a fixar, na família de esferas deveremos igualar, ainda, as terceiras derivadas, o que faz, normalmente, que o contacto seja de terceira ordem; vem ainda

$$X'''=x''' \,,\; Y'''=y''' \,,\; Z'''=z'''$$

ou, doutro modo

$$X'''=\frac{dX''}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\cdot\frac{\xi}{\rho}=\frac{\rho\dfrac{d\xi}{ds}-\xi\dfrac{d\rho}{ds}}{\rho^2}$$

e as análogas

$$Y'''=\frac{\rho\dfrac{d\eta}{ds}-\zeta\dfrac{d\rho}{ds}}{\rho^2}\qquad Z'''=\frac{\rho\dfrac{d\zeta}{ds}-\zeta\dfrac{d\rho}{ds}}{\rho^2}$$

teremos fàcilmente

$$3(X'X''+Y'Y''+Z'Z'')=$$
$$=3\left(\alpha\frac{d\alpha}{ds}+\beta\frac{d\beta}{ds}+\gamma\frac{d\gamma}{ds}\right)=\frac{3}{\rho}(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)=0$$

e derivando três vezes 14), o que dá

$$3(X'X''+Y'Y''+Z'Z'')+$$
$$+(X-a)X'''+(Y-b)Y'''+(Z-c)Z'''=0$$

obtemos

$$\frac{x-a}{\rho}\frac{d\xi}{ds}+\frac{y-b}{\rho}\frac{d\eta}{ds}+\frac{z-c}{\rho}\frac{d\zeta}{ds}-$$
$$-\left[\frac{x-a}{\rho}\xi+\frac{y-b}{\rho}\eta+\frac{z-c}{\rho}\zeta\right]\frac{\dfrac{d\rho}{ds}}{\rho}=0$$

Atendendo às condições anteriores e às fórmulas 5) de FRENET-SERRET, temos

$$-\frac{x-a}{\rho}\left(\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\lambda}{\tau}\right)-\frac{y-b}{\rho}\left(\frac{\beta}{\rho}-\frac{\mu}{\tau}\right)-$$
$$-\frac{z-c}{\rho}\left(\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\nu}{\tau}\right)-\frac{\dfrac{d\rho}{ds}}{\rho}=0$$

Finalmente, atendendo a 16), temos

18) $\dfrac{x-a}{\tau}\lambda+\dfrac{y-b}{\tau}\mu+\dfrac{z-c}{\tau}\nu-\dfrac{d\rho}{ds}=0$

Temos, então, o seguinte sistema para determinação de a,b,c,r:

15) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$

16) $(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma=0$

17) $(x-a)\xi+(y-b)\eta+(z-c)\zeta=-\rho$

18) $(x-a)\lambda+(y-b)\mu+(z-c)\nu=\tau\dfrac{d\rho}{ds}$

As três últimas equações permitem determinar a,b,c. Por ser

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \xi & \eta & \zeta\\ \lambda & \mu & \nu\end{vmatrix}=1$$

e, por ser, cada elemento deste determinante igual ao respectivo complemento algébrico, vem o sistema imediatamente resolvido

$$x-a=-\rho\xi+\tau\frac{d\rho}{ds}\lambda \,,\; y-a=-\rho\eta+\tau\frac{d\rho}{ds}\mu$$

$$z-a=-\rho\zeta+\tau\frac{d\rho}{ds}\nu$$

e portanto

$$19)\begin{cases} a=x+\rho\xi-\tau\dfrac{d\rho}{ds}\lambda \\ b=y+\rho\eta-\tau\dfrac{d\rho}{ds}\mu \qquad P=M+\rho\vec{N}-\tau\dfrac{d\rho}{ds}\vec{B} \\ c=z+\rho\zeta-\tau\dfrac{d\rho}{ds}\nu \end{cases}$$

e, ainda, o valor do raio, dado por 15)

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2+\tau^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$$

Procuremos, agora, a envolvente dos planos normais de Γ.

A equação do plano normal é

$$(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=0$$

e as rectas características são definidas por esta equação, e ainda

$$(X-x)\frac{d\alpha}{ds}+(Y-y)\frac{d\beta}{ds}+(Z-z)\frac{d\gamma}{ds}= \\ =\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

que se transforma, com as fórmulas 5), em

$$(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=\rho$$

As características pertencem ao plano normal e, a este último que é um plano paralelo ao plano rectificante, a passar pelo centro de curvatura. As rectas características chamam-se *rectas* ou *eixos polares*, e passam pelos centros de curvatura, sendo portanto perpendiculares ao plano osculador.

A aresta de reversão é dada por mais uma equação, obtida por derivação da última. Temos o sistema

$$(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=0$$
$$(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=\rho$$
$$(X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu=-\tau\frac{d\rho}{ds}$$

Se neste sistema mudarmos X, Y, Z por a, b, c, obtemos as equações 16), 17) e 18) que forneceram o centro da esfera osculadora.

A aresta de reversão da *superfície polar*, que assim se chama, a envolvente dos planos normais, é o lugar geométrico dos centros das esferas osculadoras.

Obtínhamos estes resultados, com um terço do esforço, do seguinte modo: Seja M o ponto da curva Γ, de coordenadas $x(s), y(s), z(s)$. O plano normal é o lugar dos pontos P que formam com M, vectores perpendiculares a $\vec{T}$, e por ser o produto interno proporcional ao coseno do ângulo dos factores, temos para equação do plano normal

$$(P-M)/\vec{T}=0$$

Derivando em ordem ao parâmetro s desta família de planos, vem

$$-\frac{dM}{ds}/\vec{T}+(P-M)/\frac{dT}{ds}=0$$

ou, sucessivamente

$$-\vec{T}/\vec{T}+(P-M)/\frac{\vec{N}}{\rho}=0 \quad \text{e} \quad (P-M)/\vec{N}=\rho$$

As rectas características são definidas por $(P-M)/\vec{T}=0$, o plano normal, e $(P-M)/\vec{N}=\rho$, que é um plano paralelo ao rectificante, que lhe fica a uma distância ρ.

Uma nova derivação, dá

$$-\frac{dM}{ds}/\vec{N}+(P-M)/\frac{d\vec{N}}{ds}=\frac{d\rho}{ds}$$

ou

$$(P-M)/\left(-\frac{\vec{T}}{\rho}-\frac{\vec{B}}{\tau}\right)=\frac{d\rho}{ds}$$

ou ainda

$$(P-M)/\vec{B}=-\tau\frac{d\rho}{ds}$$

As três equações são achadas

$$(P-M)/\vec{T}=0$$
$$(P-M)/\vec{N}=\rho$$
$$(P-M)/\vec{B}=-\tau\frac{d\rho}{ds}$$

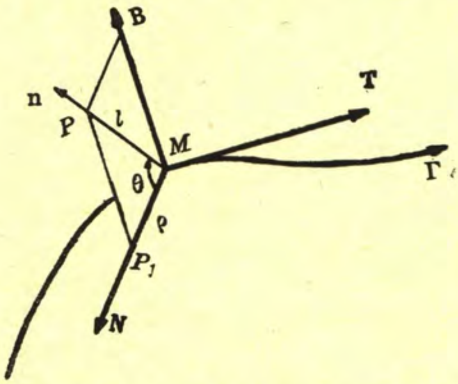
dão as componentes de $P-M$ no triedro móvel e tem-se

$$P=M+\rho\vec{N}-\tau\frac{d\rho}{ds}\vec{B}$$

que é a equação 19) obtida lá atrás.

Dada uma curva Γ do espaço, procuremos fixar em cada ponto P da curva, entre as muitas normais que aí ela admite, uma em cada ponto, mas isto de tal modo que fiquemos com uma família de rectas do espaço admitindo uma envolvente: é esta envolvente que se chamará *evoluta* de Γ. Nada, evidentemente, impede que existam diversas evolutas.

Uma normal $\vec{n}$, a Γ em M, será fixada com o ângulo θ que ela faz com a normal



principal $\vec{N}$, como se vê na figura 3; o ângulo θ é medido no plano normal de $\vec{N}$ para $\vec{B}$. Um ponto P desta normal $\vec{n}$ será dado por

$$P = M + l(\cos\theta \cdot \vec{N} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{B})$$

Quando se supõe Γ orientada, e nela a coordenada curvilínea s, do seu ponto M, a crescer, pretendemos determinar l e θ, como funções de s, de modo que o ponto P descreva uma curva, à qual a normal $\vec{n}$ se mantenha sempre tangente.

Temos

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dM}{ds} + \frac{dl}{ds}(\cos\theta \cdot \vec{N} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{B}) + \\ + l\left(-\operatorname{sen}\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{N} + \cos\theta \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} + \right. \\ \left. + \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{B} + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{dB}{ds}\right)$$

que, com as fórmulas de FRENET-SERRET, se transforma em

$$\frac{dP}{ds} = \left(1 - l \cdot \frac{\cos\theta}{\rho}\right)\vec{T} + \\ + \left(\frac{dl}{ds} \cdot \cos\theta - l \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{N} + \\ + \left(\frac{dl}{ds} \cdot \operatorname{sen}\theta + l \cdot \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{ds}\right)\vec{B}$$

Para $\dfrac{dP}{ds}$ se manter no plano normal, deverá ser

20) $$l \cdot \cos\theta = \rho$$

e, além disso, $\dfrac{dP}{ds}$ deverá ser paralelo a $\vec{n}$, isto é, $\dfrac{dP}{ds}$ e $l(\cos\theta \cdot \vec{N} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{B})$ deverão ser colineares, o que dá

21) $$\frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds} = 0$$

Obtemos, então

$$\theta = -\int_{s_0}^{s} \frac{1}{\tau}\, ds + s^{te}$$

A relação 20), depois de determinado θ por esta forma, dá então l. Vê-se por ela que $\overline{PP_1}$ é a recta polar, visto que $\overline{P_1 M}$ é igual a $l \cdot \cos\theta$, igual portanto a ρ, isto é, P_1 é o centro de curvatura.

O ponto P está sempre na recta polar e, por consequência, *todas as evolutas estão na superfície polar*.

Para que as normais principais $\vec{N}$, tenham uma envolvente, é necessário e suficiente que $\theta = 0$; deverá ser então $\tau = 0$, isto é, a curva Γ é plana. Encontra-se, assim, uma evoluta situada no plano da curva, já conhecida; as outras evolutas são hélices situadas na superfície polar que é, nesse caso, um cilindro.

Dada uma curva Γ, do espaço, chama-se *evolvente* toda a curva C, de que Γ seja uma evoluta.

Por um ponto $M(s)$ de Γ, tira-se uma tangente $\vec{T}$ e, sobre esta, determina-se um ponto P, tal que, ao variar s, P descreva uma curva C, à qual $\vec{T}$ se conserve normal. Será

$$P = M + \lambda \cdot \vec{T}$$

e

$$\frac{dP}{ds} = \vec{T} + \frac{d\lambda}{ds} \cdot \vec{T} + \lambda \frac{d\vec{T}}{ds} = \left(1 + \frac{d\lambda}{ds}\right) \cdot \vec{T} + \lambda \cdot \frac{\vec{N}}{\rho}$$

O vector $\frac{dP}{ds}$ deve ser perpendicular a $\vec{T}$, isto é, paralelo ao plano normal e, portanto, nula a sua componente segundo $\vec{T}$

$$1 + \lambda' = 0$$

donde

$$\lambda = -s + C^{te}$$

Vem então

$$P - M = (C - s)\vec{T}$$

e com duas determinações

$$P_0 - M_0 = (C - s_0)\vec{T}_0 \qquad P_1 - M_1 = (C - s_1)\vec{T}_1$$

se pode eliminar a contante C, obtendo-se

$$\frac{P_1 - M_1}{\vec{T}_1} + (s_1 - s_0) = \frac{P_0 - M_0}{\vec{T}_0}$$

que traduz a conhecida propriedade, do fio inextensível.

Procuremos finalmente a planificável envolvente dos planos rectificantes.

A equação do plano rectificante é

$$22)\quad (X - x)\xi + (Y - y)\eta + (Z - z)\zeta = 0$$

Derivando esta equação, vem

$$(X - x)\frac{d\xi}{ds} + (Y - y)\frac{d\eta}{ds} + (Z - z)\frac{d\zeta}{ds} = \\ = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

e com as fórmulas 5) de Frenet-Serret, vem

$$23)\quad \frac{1}{\rho}[(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma] + \\ + \frac{1}{\tau}[(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu] = 0 .$$

As rectas características chamam-se rectas rectificantes e são dadas pelo sistema das duas equações 22) e 23). A segunda representa um plano que passa evidentemente pela normal principal, e a recta rectificante é o traço desse plano no plano $M\vec{T}\vec{B}$.

A aresta de reversão, obtém-se juntando mais uma equação que se obtém derivando 23).

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}[(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma] + \\ \frac{\rho}{\rho^2}\left[(X - x)\frac{d\alpha}{ds} + (Y - y)\frac{d\beta}{ds} + (Z - z)\frac{d\gamma}{ds} - \\ -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right] - \frac{1}{\tau^2}\frac{d\tau}{ds}[(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + \\ + (Z - z)\nu] + \frac{1}{\tau}\left[(X - x)\frac{d\lambda}{ds} + (Y - y)\frac{d\mu}{ds} + \\ + (Z - z)\frac{d\nu}{ds} - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)\right] = 0$$

com as fórmulas 5) de Frenet-Serret, e atendendo a 22), vem

$$24)\quad \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}[(X - x)\alpha + (Y - y)\beta + (Z - z)\gamma] + \\ + \frac{1}{\tau^2}\frac{d\tau}{ds}[(X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu] = -\frac{1}{\rho}$$

O sistema das três equações 22), 23) e 24) é equivalente a este outro

$$25)\begin{cases}(X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta=0\\ (X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\\ \qquad\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\tau}{ds}\right]}\\ (X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu=-\dfrac{1}{\rho}\cdot\\ \qquad\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\tau}\left[\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\tau}{ds}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{ds}\right]}\cdot\end{cases}$$

Represente-se por Δ, o determinante seguinte

$$26)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\rho} & \dfrac{1}{\tau}\\ \dfrac{d\tau}{ds} & \dfrac{d\rho}{ds}\end{vmatrix}$$

e ponhamos

$$A=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho\Delta}\qquad\qquad B=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\tau\Delta}.$$

Então, o sistema 25) pode escrever-se

$$\begin{aligned}(X-x)\alpha+(Y-y)\beta+(Z-z)\gamma&=A\\ (X-x)\xi+(Y-y)\eta+(Z-z)\zeta&=0\\ (X-x)\lambda+(Y-y)\mu+(Z-z)\nu&=B\end{aligned}$$

e resolve-se ràpidamente.

$$\begin{aligned}X&=x+A\alpha+B\lambda\\ Y&=y+A\beta+B\mu\\ Z&=z+A\gamma+B\nu\end{aligned}$$

isto é, mais explìcitamente

$$\begin{aligned}X-x&=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\alpha+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\lambda\\ Y-y&=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\beta+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\mu\\ Z-z&=-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\rho}{\Delta}\gamma+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\Delta}\nu\end{aligned}$$

que são as equações da aresta de reversão desta planificável, a planificável rectificante. A distância do ponto da curva ao correspondente ponto da aresta de reversão é dada por

$$\frac{1}{\rho\cdot|\Delta|}\cdot\sqrt{\rho^2+\tau^2}$$

Se $\Delta=0$ a aresta de reversão desloca-se para o infinito, e a planificável rectificante será um cilindro. Isso sucede com as curvas Γ para as quais $\Delta=0$, ou

$$\frac{\rho'}{\rho}-\frac{\tau'}{\tau}=0$$

o que integrado: $\dfrac{\rho}{\tau}=C^{te}$. São as hélices.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por **Luís G. M. de Albuquerque**

(Continuação do número anterior)

8. Aproximação linear nos espaços de Hilbert.

Considere-se o espaço de Hilbert H, seja $V\subset H$ uma variedade linear gerada pelos vectores linearmente independentes $x_1,\cdots,x_m$, e $y\in H-V$. Pelo teorema demonstrado no § 7, e em virtude da norma do espaço de Hilbert ser sempre forte (§ 5), existe em V um e um só vector $x_0=\sum_1^m \alpha_k^0 x_k$ que é projecção de y em V. Ora,

Teorema A. *Se* x_0 *é a projecção de* y *em* V , $y - x_0$ *é ortogonal com cada um dos vectores de* V

$$(y - x_0, x) = 0, \ \textit{qualquer que seja} \ x \in V.$$

Demonstração. Se houvesse em V um vector $x \neq 0$ que não fosse ortogonal com $y - x_0$

$$(y - x_0, x) = a \neq 0,$$

considerando o vector

$$z = x_0 + \frac{a}{(x, x)} x \in V$$

teríamos (deixamos ao leitor o cuidado de estabelecer esta relação):

$$\| y - z \|^2 = \| y - x_0 \|^2 - \frac{| a |^2}{(x, x)};$$

donde, em virtude de ser $(x,x) > 0$ (pois $x \neq 0$)

$$\| y - z \| < \| y - x_0 \|;$$

assim, x_0 não seria a projecção de y em V' como admitimos.

A partir deste teorema podemos construir as componentes do vector x_0 e, ao mesmo tempo, calcular o erro cometido quando se toma, em lugar de y, o seu polinómio de melhor aproximação em V, x_0. Com efeito: sendo $y - x_0$ ortogonal com cada um dos vectores de V, é em particular ortogonal com cada um dos vectores da base $(x_1, \cdots, x_m)$ de V:

$$(y - x_0, x_k) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

ou seja

$$(8.\ 1) \qquad (y, x_k) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^0 (x_i, x_k) = 0 \qquad k = 1, \cdots, m,$$

que é um sistema de m equações lineares nas m incógnitas $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_m^0$. Assim, a solução de (8. 1) conduz ao polinómio melhor aproximação de y em V; e como esta aproximação existe e é única, aquele sistema terá de ser sempre compatível e determinado; por isso é sempre diferente de zero o determinante de GRAMM:

$$G(x_1, \cdots, x_m) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1)\,(x_2, x_1) \cdots (x_m, x_1) \\ (x_1, x_2)\,(x_2, x_2) \cdots (x_m, x_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1, x_m)\,(x_2, x_m) \cdots (x_m, x_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obtida, com as componentes dadas por (8. 1), a projecção x_0 de y em V, o erro de se tomar x_0 em lugar de y será

$$\delta = \| y - x_0 \| = \min_{x \in V} \| y - x \|;$$

mas

$$\delta^2 = \| y - x_0 \|^2 = (y - x_0, y - x_0) = \\ = (y - x_0, y) - (y - x_0, x_0)$$

e como pelo teorema anterior se tem

$$(y - x_0, x_0) = 0, \ \text{por ser} \ x_0 \in V,$$

fica

$$\delta^2 = \| y - x_0 \|^2 = \left(y - \sum_{1}^{m} \alpha_k^0 x_k, y \right)$$

ou

$$(8.\ 2) \qquad \delta^2 = (y, y) - \sum_{1}^{m} \alpha_k^0 \cdot (x_k, y);$$

a eliminação dos $\alpha_k^0 (k = 1, \cdots, m)$ entre (8. 2) e as m equações (8. 1), conduz a

$$\begin{vmatrix} (y, y) - \delta^2 & (x_1, y) \cdots & (x_m, y) \\ (y, x_1) & (x_1, x_1) \cdots & (x_m, x_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (y, x_m) & (x_1, x_m) \cdots & (x_m, x_m) \end{vmatrix} = 0,$$

donde

$$(8.\ 3) \qquad \delta = \sqrt{\frac{G(y \cdot x_1, \cdots, x_m)}{G(x_1, \cdots, x_m)}}.$$

As equações (8. 1) que determinam as componentes do polinómio x_0, melhor aproximação de y em V, e a expressão do erro

δ, tomam um aspecto mais simples quando a base de V é ortonormada:

$$(x_i , x_k) = \delta_{ik} \qquad (i , k = 1 , \cdots , m) .$$

Neste caso as equações (8. 1) escrevem-se

$$(y , x_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^0 \delta_{ik} \qquad (k = 1 , \cdots , m)$$

e dão logo as componentes de x_0:

$$\alpha_k^0 = (y , x_k) \qquad (k = 1 , \cdots , m),$$

ficando a projecção de y em V definida por

$$(8.\ 4) \qquad x_0 = \sum_1^m (y , x_k) x_k ;$$

a expressão do erro escreve-se agora:

$$\delta^2 = (y , y) - \sum_1^m (y , x_k) \cdot (x_k , y) =$$

$$= (y , y) - \sum_1^m |(y , x_k)|^2$$

ou

$$(8.\ 5) \qquad \delta = \sqrt{(y , y) - \sum_1^m |(y , x_k)|^2}$$

9. Equação de Parseval-Liapunov.

Suponhamos agora H dotado de uma base ortonormada

$$B = \{ e_1 , e_2 , \cdots , e_n , \cdots \} .$$

Qualquer sistema finito de vectores $\{ e_1 , e_2 , \cdots e_n \}$ gera uma variedade linear $V_n \subset H$; e tomado um vector $y \in H - V_n$ a projecção de y em V_n é dada por

$$(9.\ 1) \qquad x_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (y , e^k) e_k$$

determinando y com um erro $\delta^{(n)}$ definido por (8. 5); isto é, se

$$y = x_0^{(n)} + z^{(n)}$$

tem-se

$$\delta^{(n)2} = \| z^{(n)} \|^2 = (y , y) - \sum_{k=1}^{n} |(y , e_k)|^2 \geqq 0$$

donde se obtem a *desigualdade de* Bessel:

$$(9.\ 2) \qquad \sum_1^n |(y , e_k)|^2 \leqq (y , y) .$$

Formando a sucessão de variedades lineares

$$(*) \qquad V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$$

e sendo $y \in H - \bigcup_{k=1}^{n} V_k$, podemos construir a sucessão das projecções de y nos V_k

$$x_0^{(1)} , x_0^{(2)} , \cdots , x_0^{(n)}$$

que são dadas por relações do tipo (9. 1); cada uma delas, $x_0^{(k+1)}$, obtém-se da precedente, $x_0^{(k)}$, juntando-lhe o termo

$$(y , e_{k+1}) e_{k+1} \; (k = 1 , 2 , \cdots , n - 1) .$$

Se para certo valor N de n se tem $y \in V_N$, então y coincide com a sua projecção em V_N

$$(9.\ 3) \qquad y = x_0^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} (y , e_k) e_k ;$$

caso contrário, isto é, quando por maior que seja n é sempre $y \in H - \bigcup_{k=1}^{n} V_k$, somos levados a passar da soma que intervém em (9. 3) para a série $\sum_{k=1}^{\infty} (y , e_k) e_k$ correspondente ao vector $y \in H$

$$y \sim \sum_{k=1}^{\infty} (y , e_k) e_k ,$$

interessando-nos então estabelecer as circunstâncias em que se possa escrever

$$(9.\ 4) \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} (y , e_k) e_k .$$

Deve-se notar que, por (*), os erros das sucessivas projecções de y nas variedades V_k formam sucessão decrescente,

$$\delta^{(1)} \geqq \delta^{(2)} \geqq \cdots \geqq \delta^{(n)} \geqq \cdots ;$$

e assim procurar as condições para que (9. 4) tenha lugar equivale a encontrar em que casos é

$$\lim_n \delta_n = 0 .$$

Ora, em virtude da desigualdade de Bessel, a série de termo geral $|(y, e_k)|^2$ é convergente e tal que

$$(9.\ 5) \qquad \sum_1^\infty |(y, e_k)|^2 \leqq (y, y);$$

o teorema C do § 6 garante-nos então a convergência da série

$$\sum_{k=1}^\infty (y, e_k) \cdot e_k ;$$

portanto a igualdade (9. 4) será válida desde que

$$\lim_n \delta_n = (y, y) - \sum_{k=1}^\infty |(y, e_k)|^2 = 0$$

ou seja, quando se tem

$$(9.\ 6) \qquad (y, y) = \sum_{k=1}^\infty |(y, e_k)|^2 ,$$

que se designa por *equação de* Parseval-Liapunov.

Deste modo, podemos concluir:

Teorema. *Num espaço de* Hilbert *com base orto-normada numerável, todo o vector* y *que satisfaça à equação de* Parseval-Liapunov *pode ser escrito na forma:*

$$(9.\ 7) \qquad y = \sum_{k=1}^\infty (y, e_k) e_k .$$

Os coeficientes (y, e_k) de (9. 7) são chamados os *coeficientes de* Fourier de $y \in H$; e (9. 7) é a série de Fourier (generalizada) de y.

10. Bases completas.

Resta-nos agora ver em que condições a equação de Parseval-Liapunov tem lugar para todos os vectores do espaço de Hilbert (que não pertençam a qualquer variedade linear V_N).

Diremos que a base orto-normada do espaço, B, *é completa*, quando não exista em H qualquer vector distinto do vector nulo que seja ortogonal com todos os vectores da base.

Teorema A. *Num espaço de* Hilbert *completo, para que a base orto-normada* $B = \{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ *seja completa, é necessário e suficiente que seja verificada a equação de* Parseval-Liapunov

Demonstração. Suponhamos que a equação de Parseval-Liapunov, (9. 6), tem lugar qualquer que seja $y \in H$, sem que a base orto-normada B seja completa. Nesse caso existe pelo menos um vector não nulo, $z \in H$, tal que $(z, z) = \|z\|^2 = \alpha^2 > 0$, ortogonal com todos os vectores de B

$$(z, e_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots);$$

tem-se

$$0 = \sum_{k=1}^\infty |(z, e_k)|^2 < (z, z) = \alpha^2 ,$$

relação impossível porque está em contradição com (9. 6). Assim, não existe em H qualquer vector $z \neq 0$ ortogonal com todos os e_k, e a base é completa.

Mas a condição também é necessária. Admitamos que a base orto-normada B é composta, mas que não é verificada a equação de Parseval-Liapunov; pelo menos para um vector $x \in H$ ter-se-ia então

$$(10.\ 1) \qquad \sum_{k=1}^\infty |(x, e_k)|^2 < (x, x) .$$

Considerada a sucessão de vectores

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \quad (n=1, 2, \cdots),$$

tem-se

$$x_n - x_m = \sum_{m+1}^{n} (x, e_k) e_k$$

e, visto ser $\| e_k \| = 1$ para todo o k:

$$\|x_n - x_m\| \leqq \sum_{m+1}^{n} |(x, e_k)|^2 \cdot \|e_k\| = \sum_{m+1}^{n} |(x, e_k)|^2;$$

(10. 1) garante a convergência da série $\sum_{1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$, e por isso

$$\sum_{m+1}^{n} |(x, e_k)|^2 = | s_n - s_m | < \delta$$

desde que $n > m > N(\delta)$, nas mesmas condições

$$\| x_n - x_m \| \leqq | s_n - s_m | < \delta$$

e $\{ x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \}$ é uma sucessão fundamental de vectores de H; como este espaço é completo, existe um vector $x' \in H$ tal que

$$\lim_n x_n = x' \quad \text{ou} \quad \lim_n \| x_n - x' \| = 0 .$$

Ora a desigualdade (5. 2) dá
$|(x' - x_n, e_k)| \leqq \| x' - x_n \| \cdot \| e_k \| = \| x' - x_n \|$
e portanto

$$\lim |(x' - x_n, e_k)| = 0;$$

mas sendo $(x' - x_n, e_k) = \left(x' - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j, e_k \right) =$
$= (x', e_k) - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) \delta_{jk} = (x', e_k) - (x, e_k)$

vem

$$|(x', e_k) - (x, e_k)| = \lim_n |(x' - x_n, e_k)| = 0$$

donde

$$(x', e_k) = (x, e_k) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Considere-se agora o vector $y = x' - x \in H$, que é ortogonal com todos os vectores de B, pois

$$(y, e_k) = (x', e_k) - (x, e_k) = 0;$$

em virtude de B ser completa, terá de ser $y = 0$. Mas por outro lado, verificando-se (10. 1) em lugar da equação de Parseval-Liapunov, tem-se

$$\| x' \|^2 = \lim_n \| x_n \|^2 = \lim_n \sum_{1}^{n} |(x, e_k)|^2 =$$
$$\sum_{1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 < \| x \|^2 ,$$

donde

$$\| y \| = \| x - x' \| \geqq \| x \| - \| x' \| > 0 ,$$

relação impossível por ser $y = 0$.

O teorema fica, pois, demonstrado.

Teorema B. *Um espaço de* Hilbert *completo* (e definido sobre o corpo complexo) *contém uma base orto-normada completa quando é separável.*

Demonstração. Consideremos o espaço de Hilbert separável H, e seja $N \subset H$ uma sucessão numerável de vectores densa em $H: \overline{N} = H$. Excluamos de N os vectores que sejam combinações lineares dos precedentes, e ortogonalizemos a sub-sucessão $B \subset N$ assim obtida. B é uma base completa de H: pois se $y \in H$ fosse ortogonal com todos os vectores de B, era também ortogonal com todos os vectores de N, pois os vectores de N estão em B ou são combinações lineares de vectores de B; mas sendo N denso em H, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe um $x \in N$ tal que

$$\| y - x \| < \varepsilon , \quad \text{com} \ (y, x) = 0;$$

ora $\quad \|y\|^2 = (y, y) = (y - x, y)$

e, em consequência de (5. 2),

$$\|y\|^2 = (y - x, y) \leqq \|y - x\| \cdot \|y\| < \varepsilon \cdot \|y\|$$

donde $\quad \|y\| < \varepsilon$;

assim, por ser ε arbitrário, conclui-se que $\|y\| = 0$, ou seja $y = 0$. B é uma base completa, e a condição do teorema é suficiente.

Considere-se agora a base orto-normada completa de H

$$B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$$

e seja $M \subset H$ o conjunto constituído pelos vectores

$$\alpha_1^{(r)} e_1 + \alpha_2^{(r)} e_2 + \cdots + \alpha_n^{(r)} e_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

combinações lineares dos vectores de B com coeficientes complexos racionais. Sendo B completa verifica-se a equação de Parseval-Liapunov em H, e qualquer que seja $y \in H$ tem lugar a relação (9. 4):

$$y = \sum_1^\infty (y, e_k) \cdot e_k;$$

assim, fixado $\varepsilon > 0$, é possível determinar um inteiro n para o qual se tem:

$$\text{(10. 2)} \qquad \left\| y - \sum_1^n (y, e_k) e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2};$$

por outro lado, sendo o conjunto dos números complexos racionais denso no conjunto dos números complexos, é possível determinar os números $\alpha_k^{(r)} (k = 1, 2, \cdots, n)$ de tal modo que

$$|(y, e_k) - \alpha_k^{(r)}| < \varepsilon/2n,$$

ou seja

$$\text{(10. 3)} \qquad \left\| \sum_1^n \{(y, e_k) - \alpha_k^{(r)}\} e_k \right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_1^n |y, e_k) - \alpha_k^{(r)}| \cdot \|e_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para o vector

$$x = \sum_1^n \alpha_k^{(r)} e_k \in M \subset H$$

vem:

$$y - x = y - \sum_1^n (y, e_k) e_k +$$

$$+ \sum_1^n (y, e_k) e_k - \sum_2^n \alpha_k^{(r)} e_k$$

e, em virtude das desigualdades (10. 2) e (10. 3):

$$\|y - x\| < \varepsilon$$

qualquer que seja $y \in H$. Portanto, o conjunto dos vectores M, numerável, é denso em H, e este espaço é separável. Como queríamos provar.

Dos teoremas agora demonstrados verifica-se que sendo H um espaço de Hilbert completo e separável, o problema que nos ocupa pode ser posto do seguinte modo:

Seja $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$ uma base orto-normada e completa de H, e designe V_i a variedade linear gerada por $\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$. Dado um vector $y \in H$ e fixado um número real $\varepsilon > 0$, é possível determinar um inteiro $N(\varepsilon)$ de tal modo que, para todo o $n_0 > N(\varepsilon)$ o vector y pode ser dado pela combinação (polinómio de ordem n_0)

$$\sum_1^{n_0} (y, e_k) \cdot e_k$$

com um erro inferior a ε:

$$\delta^{(n_0)} = \sqrt{\left\| y - \sum_1^{n_0} (y, e_k) e_k \right\|} < \varepsilon.$$

(Continua no próximo número)

Aspectos da actualidade Matemática

por A. Pereira Gomes

(Conclusão do número anterior)

É corrente falar-se da matemática moderna como sendo uma matemática abstracta. Assim, a Álgebra dita moderna (mas que na realidade conta mais de 100 anos) chama-se também muitas vezes Álgebra abstracta. Ora, no sentido usual desta palavra, toda a matemática é abstracta. No entanto, se é permitido falar-se em diferentes graus de abstracção, poderá dizer-se que na matemática moderna aparecem teorias dum «grau mais elevado de abstracção», o que lhes confere, dentro da Matemática, a designação de «teorias abstractas».

Em que consiste, precisamente, como se atingiu e que vantagens porventura apresenta isso a que estou a chamar «grau mais elevado de abstracção»?

Essencialmente, trata-se do desenvolvimento duma determinada teoria independentemente do significado atribuído aos elementos a que ela diz respeito, isto é, sem precisar qual a natureza dos elementos com que nela se lida, pois sòmente interessam no seu desenvolvimento lógico as relações existentes entre esses elementos.

Uma tal realização nos mais diversos domínios da Matemática foi possível com a criação por Georges Cantor, nos fins do século passado, dum novo ramo da Matemática a que se chamou Teoria dos Conjuntos Abstractos. Surgida, ela própria, numa época de profunda renovação de métodos, pode dizer-se que a teoria dos conjuntos provocou um forte abalo em todo o edifício matemático. Na realidade, porém, ela abriu novos caminhos à sistematização e ao desenvolvimento de velhas teorias e, simultâneamente, proporcionou uma nova técnica de trabalho matemático, que viria impulsionar o rápido crescimento desta ciência verificado nos últimos 60 anos.

Com a teoria dos conjuntos foi também possível pela primeira vez na história do pensamento humano, tratar de maneira satisfatória do problema do infinito acerca do qual escreveu Hilbert na sua conferência *Uber das Unendlich*: «Como nenhun outro problema, o infinito sempre profundamente agitou a alma dos homens. Como nenhuma outra idéia, o infinito tem tido uma influência estimulante e fértil sobre a sua mente. Mas o infinito está também, mais do que qualquer outro conceito, em necessidade de clarificação. No sentido desta clarificação a criação de Georges Cantor constituiu deveras um magnífico avanço, que é o seu maior padrão de glória.

A Teoria dos Conjuntos, pela universalidade do seu conteúdo, ofereceu uma nova base para a axiomatização das diversas teorias matemáticas. Os *Grundlagen der Geometrie*, onde Hilbert publicou, em 1889, a axiomatização completa da Geometria euclideana, começam assim: «Imaginemos três sistemas diferentes de objectos, a que chamaremos *pontos, rectas* e *planos*». Mas já anos antes ele havia lançado a sua escandalosa asserção: «em lugar de pontos, rectas e planos poderíamos dizer, sem qualquer inconveniente, *mesa, cadeira* e *copo de cerveja*», sublinhando assim o sentido puramente convencional daquelas designações.

O método axiomático e a teoria dos conjuntos abstractos foram pois as vias de acesso que levaram algumas dessas teorias ao que chamámos há pouco «um grau mais elevado de abstracção».

Para ser exacto, conviria fixar o sentido com que se usam as palavras «moderno», «abstracto», «clássico» e «concreto», atribuídas às teorias matemáticas.

Num excelente artigo sobre «Os métodos modernos e o futuro das matemáticas concretas», o matemático francês ROGER GODEMENT, que no ano passado efectuou numa série de conferências nesta Universidade do Recife, propõe uma dupla classificação das teorias matemáticas.

Por um lado, estas teorias agrupar-se-iam em *abstractas* e *concretas*, por outro em *clássicas* e *modernas*. Teorias concretas seriam aquelas que dizem respeito a entes de natureza especificada; por exemplo, a Aritmética, que trata das propriedades dos números, a teoria das funções duma variável real, etc. Teorias abstractas seriam aquelas em que se faz abstracção da natureza própria dos entes envolvidos na teoria, como, por exemplo, a teoria dos grupos, a teoria dos espaços métricos, etc. Uma teoria clássica seria uma teoria univalente, quer dizer, o domínio de entes a que ela se refere à unìvocamente determinado ou determinado a menos dum isomorfismo. É o caso, por exemplo, da teoria do espaço de HILBERT, axiomatizada por VON NEUMANN em 1929. Um espaço de HILBERT pode considerar-se constituído por sucessões de números cujos quadrados formam uma série convergente ou, então, por funções numéricas cujos módulos elevados ao quadrado são integráveis no sentido de LEBESGUE. Num caso tem-se o que se chama a realização numérica do espaço, no outro, a sua realização funcional. Mas o campo de tais sucessões e o campo daquelas funções são isomorfos, isto é, pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca entre sucessões, dum lado, e funções, do outro, de tal modo que toda proposição sobre sucessões é transposta numa proposição idêntica sobre funções, mediante aquela correspondência. A realização numérica e a realização funcional do espaço são, assim, matemàticamente indistinguíveis dentro da respectiva teoria. A teoria do espaço de HILBERT, é, pois, uma teoria univalente, o que equivale a dizer que o seu sistema de axiomas é categórico ou completo.

Uma teoria multivalente será chamada moderna. A teoria dos grupos, é, nesse sentido, uma teoria moderna. Basta notar que existem grupos finitos e grupos infinitos, que não serão, por conseguinte, isomorfos.

As teorias abstractas tanto podem ser modernas como clássicas, o que ficou claro, por certo, nos exemplos apontados. O mesmo se pode dizer das teorias concretas, embora à primeira vista isso possa parecer contraditório.

Um exemplo duma teoria concreta multivalente é a dos funcionais analíticos de FANTAPPIÉ, recentemente despida das suas particularidades acessórias e por vezes constrangedoras, e integrada na teoria mais ampla dos espaços vectoriais topológicos. Apraz-me registar a propósito, que esse trabalho foi empreendido em Portugal e no Brasil, quase simultâneamente, pelos matemáticos JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA e CÂNDIDO DA SILVA DIAS, respectivamente, que por algum tempo foram discípulos de FANTAPPIÉ, o primeiro em Roma, o segundo em S. Paulo, e que posteriormente, sob a influência de novos métodos, deram àquela tarefa uma contribuição notável.

Convém acentuar, por outro lado, para desfazer quaisquer possíveis equívocos, que os matemáticos de hoje, mesmo aqueles que se integram em escolas de axiomatização sistemática, como o célebre grupo BOURBAKI em França, não repudiaram a criação de teorias concretas, que continuam a surgir de par com as teorias abstractas. Um exemplo expressivo desta situação é o aparecimento, em 1948, da *Teoria* das *Distribuições*, devida ao insigne matemático francês LAURENT SCHWARTZ. Nascida de sugestões várias da Física Matemática, esta teoria despertou um enorme interesse em todo o mundo e tem tido notáveis repercussões em diversos domínios da Matemática e da Física. Trata-se duma teoria concreta, cujo aperfeiçoamento foi possível com recurso à teoria abstracta dos espaços vectoriais topológicos. Esta, por sua vez, recebeu sob alguns aspectos um estímulo apreciável da primeira, pela necessidade de formular rigorosamente certas questões da Teoria das Distribuições — o que ilustra de maneira clara as sinuosidades da edificação matemática, onde tantas vezes se avança tateando através do entrelaçamento dos seus diversos sectores.

Contudo o esforço de axiomatização das diferentes teorias concretas é hoje como numa palavra de ordem no campo da Matemática. Assim, a Teoria das Distribuições foi axiomatizada há cerca de dois anos e meio pelo matemático português Sebastião Silva.

A respeito dessa tendência, citemos o trabalho já referido de Godement:

«No ponto em que se encontram actualmente as pesquisas matemáticas, não há dúvida que o futuro verá desenvolver-se cada vez mais a influência dos métodos modernos sobre as teorias concretas. Em primeiro lugar uma teoria concreta raciocinando sobre objectos bem determinados, tem fatalmente tendência em apoiar-se sobre *todas* as propriedades desses objectos; ora, muitas vezes (ou de maneira precisa: quando esta teoria concreta é de tipo moderno) apercebemo-nos, após uma análise mais ou menos cerrada, que algumas destas propriedades são perfeitamente inúteis e, de facto, não desempenham nenhum papel na edificação da doutrina considerada. O papel dos métodos modernos é, então, desembaraçar as teorias concretas de todas as hipóteses supérfluas que as atravancam e que, geralmente, lhes encobrem a verdadeira significação; de certo modo, o papel desses métodos é o de reconsiderar completamente as teorias concretas, delas fazer ressaltar as grandes linhas e, automáticamente, o de acrescer consideràvelmente o seu domínio de validade».

Sem querer entrar em pormenores que implicariam o uso dum tecnicismo descabido nesta hora, mas recordando entretanto que é no convívio activo com a Matemática que algo dela se pode apreender, seja-me permitido esclarecer ràpidamente, por meio de um exemplo sugestivo e não trivial, a actuação dos métodos modernos no sentido daquela *extensão dos domínios de validade,* de que acima falámos, a qual constitui, talvez, a maior contribuição ao enriquecimento do património matemático neste meio século.

O exemplo que vou apresentar é o *Teorema do Ponto Fixo,* teorema que na sua forma elementar tem um aspecto insignificante e mesmo inofensivo, mas cujo conteúdo, convenientemente aproveitado, se revelou dum vigor extraordinàriamente fecundo.

Trata-se duma proposição de Topologia, que exprime o seguinte facto: Numa região do plano, limitada e convexa, qualquer deformação contínua que mantenha os pontos da região dentro do seu contorno inicial, deixa nela um ponto fixo. Uma rotação dum disco em torno do seu centro é uma modalidade banal dum tal facto. Mas consideremos um disco de borracha aplicado sobre uma mesa e deformemo-lo de qualquer modo, tendo apenas o cuidado de que ele não ultrapasse a região delimitada pelo seu contorno inicial; podemos contraí-lo, dobrá-lo, esticá-lo, só não podemos rasgá-lo, porque então a deformação deixaria de ser contínua. Pois bem, estejamos certos de que durante essas deformações houve um ponto do disco que ficou fixo, isto é, coincidente com a sua posição inicial. Este resultado não é perceptível intuitivamente, mas demonstra-se sem grande dificuldade.

Será esta propriedade exclusiva das figuras planas? Não. Numa memória sobre as deformações contínuas das superfícies, publicada em 1910, o matemático holandês

BROUWER mostrou que essa propriedade é válida no espaço a três dimensões (ou espaço ordinário) e mais geralmente num espaço euclideano com um número finito, qualquer, de dimensões.

Já em 1912, pouco antes da sua morte, POINCARÉ utilizou esta ideia das deformações contínuas com pontos fixos no tratamento duma questão relativa à existência dum número infinito de trajectórias periódicas no problema dos três corpos, questão que havia de ser resolvida no ano seguinte, pelo matemático americano G. D. BIRKHOFF.

Entretanto, novas ideias sobre o conceito de *espaço* estavam sendo introduzidas na matemática. O espaço cartesiano isomorfo do espaço euclideano, onde um ponto é identificado com o sistema das suas três coordenadas, há muito tinha sido generalizado com o conceito de espaço n-dimensional, onde um ponto tem um número n, qualquer, de coordenadas. Mais um passo, e uma sucessão infinita de coordenadas foi igualmente designada por ponto, dum espaço com uma infinidade de dimensões. Relações apropriadas definiam aí o equivalente duma distância e davam a esse domínio uma *estrutura espacial*.

Em 1904, FRÉCHET cria um conceito de espaço muito mais geral, liberado de tais particularidades. Considerando um conjunto abstracto, ele introduz nesse conjunto uma estrutura de espaço (a que chamaria *espaço distanciado*, ou *métrico*) mediante uma definição axiomática de distância entre dois elementos do conjunto.

Nesse conceito geral de espaço — *espaço abstracto* — ficavam então englobados uma multidão de domínios analíticos (como os espaços de HILBERT já referidos), cujas conexões íntimas não haviam podido ainda ser explicitadas.

O Cálculo das variações, por exemplo, trata de problemas em que a incógnita não é uma variável numérica mas uma função (vale dizer, uma linha ou superfície). Compreende-se imediatamente a necessidade de operar com as funções como se opera habitualmente com números ou vectores, de considerar funções de função («funções de linha», na designação de VOLTERRA) e de definir para tais funções conceitos como os de limite, continuidade, etc.

A nova teoria de FRÉCHET veio unificar tais processos e, pelas sugestões da linguagem geométrica que o conceito geral de distância inculcava e permitia definir com rigor, iria revelar-se um instrumento utilíssimo da Análise Funcional.

Foi nesta ordem de ideias que, em 1922, os matemáticos americanos BIRKHOFF e KELLOGG transportaram o teorema do ponto fixo para os espaços funcionais e, ao mesmo tempo que estendiam assim o seu domínio de validade, mostravam o proveito que se podia tirar desse teorema na Análise Funcional, com a sua aplicação à demonstração da existência de soluções das equações diferenciais ordináaias.

Em que consistiu esse «transporte» para um espaço funcional e como pôde ser aplicado às equações diferenciais esse teorema de tão modesta origem na topologia do plano?

Essencialmente, o problema de resolver uma equação diferencial, posta sob a forma integral, pode reduzir-se ao seguinte: encontrar uma função x que mediante uma operação ϕ (a operação integral) seja transformada no próprio x. À função x chamaremos *ponto*, à operação ϕ chamaremos *transformação* (ou *deformação*, como há pouco). Esta transformação opera num certo espaço, constituído pelas funções que satisfazem a certas condições inerentes ao nosso problema.

Nós começaremos por definir neste espaço funcional o que se deve entender por conjunto convexo, por conjunto compacto (que de certo modo corresponde a ser limitado e incluir a sua fronteira) e por transformação contínua. A teoria dos espaços abstractos fornece-nos os meios necessários para isso. Suponhamos então que o Teorema do ponto fixo foi demonstrado neste espaço. Bastará então constatar que as funções consideradas no problema constituem um conjunto convexo e compacto, que a nossa transformação ϕ é contínua e, aplicada a um ponto desse conjunto, leva a um ponto do mesmo conjunto. Todo o ponto fixo é solução da equação, cuja existência nos é pois assegurada por tão prestável teorema.

Não resisto aqui à tentação de abrir um parêntese para evocar as célebres palavras de POINCARÉ em que ele fixa de forma magistral, e como por antecipação, a essência do método que acabo de descrever sumàriamente:

«A Matemática — escreveu ele em 1908 — é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes. Entendamo-nos. Convém que essas coisas diferentes pela matéria sejam semelhantes pela forma, que elas possam, por assim dizer, vazar-se do mesmo molde. Quando a linguagem foi bem escolhida, fica-se surpreso ao ver que todas as demonstrações feitas para um objecto conhecido se aplicam imediatamente a muitos objectos novos; nada há que mudar, nem mesmo as palavras, porquanto os nomes se tornaram os mesmos».

Assim ocorre, efectivamente, com o Teorema do ponto fixo. Mas a sua história continua após 1922 — e tudo leva a crer, de resto, que ainda não terminou...

Os resultados de BIRKHOFF e KELLOGG deixaram o caminho aberto a uma série de pesquisas tendentes a uma larga aplicação do Teorema do ponto fixo na Análise Funcional e, na verdade, várias generalizações deste teorema foram sucessivamente apresentadas, procurando aligeirar as suas hipóteses de modo a abarcar novos espaços funcionais onde ele poderia ter aplicação. Nesse sentido as contribuições mais importantes devem-se a SCHAUDER, notável matemático polonês, que demonstrou o teorema para transformações definidas em espaço de BANACH (em 1927) e mais tarde (em 1930) em espaços de FRÉCHET.

SCHAUDER aplicou o Teorema do ponto fixo ao problema de DIRICHLET relativo a equações de derivadas parciais do tipo hiperbólico. O matemático francês LERAY, que se interessou com SCHAUDER pela utilização deste teorema na Análise Funcional, explorou largamente a sua aplicação em domínios como equações integrais não lineares, problema de DIRICHLET para equações não lineares de tipo elíptico, cálculo das variações, um problema de DIRICHLET levantado pela teoria dos fluidos viscosos, problemas levantados pelos escoamentos dos fluidos perfeitos e compreensíveis, problemas de representação conforme do tipo HELMHOLTZ surgidos nos escoamentos dos fluidos perfeitos e compressíveis, problemas de representação conforme do tipo de HELMHOLTZ surgidos nos escoamentos dos fluidos perfeitos, etc.

Outros matemáticos o seguiram ou acompanharam. Os esforços feitos no sentido de dar ao teorema do ponto fixo o máximo de generalidade, culminaram com o resultado de TYCHONOFF, professor da Universidade de Moscovo que, em 1935, demonstrou esse teorema para os espaços topológicos localmente convexos, que abrangem todos os espaços funcionais importantes e constituem por isso a classe de espaços vectoriais topológicos mais geral que se considera presentemente.

É interessante assinalar que, através destas generalizações sucessivas, o Teorema demonstrado por BROUWER para o espaço cartesiano continuou sendo o resultado essencial, utilizado nos diferentes casos como base de demonstração dos teoremas mais gerais, que para todos eles assenta no mesmo princípio: uma aproximação conveniente do espaço considerado por um espaço de dimensão finita.

É igualmente digno de nota — e expressamente para isso alonguei a citação de trabalhos de LERAY e outros quão larga tem sido a intervenção deste teorema, não apenas em questões de carácter teórico, mas nas próprias aplicações da Matemática, nomeadamente à Dinâmica dos fluidos.

Pode assim constatar-se uma vez mais uma verdade bem conhecida e — talvez por isso — fàcilmente esquecida: que a matemática mais abstracta se não reduz a meras especulações formais, confabulações esotéricas de espíritos isolados em torres de marfim, ausentes da realidade e supremamente inúteis.

De longínquas raízes finamente mergulhadas na experiência humana, o pensamento matemático prossegue a sua senda «para honra do espírito humano» — como dizia JACOBI — mas não no sentido duma soberba fuga, como pretendem alguns.

Embrenhando-se ousadamente em labirintos sutis, as teorias matemáticas parecem, não raro, atingir paragens de quimera, desviando-se da Vida e dos seus problemas permanentes. Mas a história da ciência ensina que nessa ausência a Matemática apenas se fortalece para melhor os servir no próximo regresso.

«Probabilidades, erros e estatística»

por ***M. A. Fernandes Costa***

Um dos aspectos salientes da recente reforma do ensino de Engenharia foi a instituição no 2.º ano de uma cadeira semestral com o nome que serve de título a este comentário.

Efectivamente, não podia ignorar-se por mais tempo o êxito estrondoso e a larga aplicação que nos países industrializados, particularmente nos de língua inglesa, têm vindo a usufruir os métodos estatísticos de «quality control».

Cabe aos britânicos a honra de terem alçado a Estatística ao nível de ciência metodológica universal e realizado muito trabalho precursor no domínio das aplicações, nomeadamente à indústria; por seu lado, o espírito prático dos americanos soube avaliar com clareza as possibilidades da nova técnica que o seu poder realizador levou a extremos surpreendentes. Postos em execução pela primeira vez em larga escala nas numerosas fábricas e depósitos de material de guerra que o governo americano operou durante o último conflito, os métodos estatísticos de controle de qualidade alcançaram resultados tão espectaculosos que a indústria privada logo os abraçou; e sempre que uma técnica vence de forma tão definitiva a relutância do industrial, cujas preocupações económicas naturalmente sobrelevam as científicas, as suas virtudes ficam demonstradas de forma insuspeita.

Pensou-se por isso, e muito bem, que não seria peso morto na bagagem dos nossos engenheiros um conhecimento — se não de fundo, ao menos de conceitos — da moderna Estatística Industrial. Criou-se então uma cadeira, nomearam-se os professores, e tudo ficou resolvido. Ou talvez não?

Começamos por deplorar o nome com que se baptisou a nova disciplina, estigmatizando-a logo à nascença duma forma que lhe não augura vida saudável.

Na verdade, o nome de «Probabilidades, Erros e Estatística» afigura-se pouco adequado; tão pouco adequado, digamos, como o de «Esqueleto, Músculos e Anatomia Geral» que se atribuisse a uma cadeira de Medicina. O título não estaria mal para uma douta conferência em que se examinasse a *evolução histórica* da teoria estatística; mas para uma cadeira dum curso de Engenharia, situada, ainda por cima, no *primeiro* semestre do seu *segundo* ano — antes, portanto, que se possa aproveitar a teoria ministrada em Cálculo Infinitesimal — parece-nos menos do que apropriado.

É que, por um lado, o Cálculo das Probabilidades só pode considerar-se, no caso sujeito, como um *meio* e não como um *fim*, como um *instrumento* e não como o produto final: a clássica definição de probabilidade como o «quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos igualmente possíveis», os teoremas (1) das probabilidades totais e compostas, o

(1) Sim, teoremas! Para quê abordar os problemas filosóficos das probabilidades? Para quê mencionar o proposto fundamento axiomático da teoria?

teorema de BERNOULLI ligando a probabilidade com a frequência, a noção de variável aleatória e suas exemplificações mais importantes, e pouco mais, fornecem fundamento suficiente à teoria estatística que há oportunidade para expor. Logo, não parece justificar-se o destaque atribuído às «Probabilidades» no nome da cadeira.

Por outro lado, os «Erros» constituem um problema fàcilmente tratável, banal até, à luz da moderna teoria estatística. Surpreende ver ainda hoje a chamada «teoria dos erros» apresentada independentemente, com expressões polvilhadas d terminologia gaussiana, actualmente pitoresca, e baseada em argumentação escassamente diferente da do próprio GAUSS! [1] Tal procedimento poderá tolerar-se em certos casos por razões de tradição, como por exemplo quando se pretenda informar matemàticamente certas regras de trabalho na Topografia e na Geodesia; mas não parece admissível em paralelo com uma exposição dos princípios fundamentais da Estatística, pressuposta no caso sujeito.

A demonstração da afirmação acima feita de que a teoria dos erros não é hoje mais do que um simples capítulo da Estatística, se bem que se não encontre explícita na literatura — talvez por demasiado banal! — daria assunto para outro artigo. Mas não resistimos a fazer aqui algumas observações tendentes a ilustrar o nosso ponto de vista.

Note-se, em primeiro lugar, que a corrente obediência dos erros de observação à lei normal pode imediatamente justificar-se como corolário do «teorema do limite central» (uma das mais difíceis proposições da teoria estatística, mas cujo enunciado é muito fácil de entender). Daqui a mostrar que as sucessivas medições de uma mesma grandeza se distribuem normalmente em torno do valor desta vai apenas um passo, que logo pode ser seguido doutro no sentido de sublinhar que a estima da grandeza é equivalente à estima da média duma variável normal. (Por conveniência, caracterizaremos desde já esta variável designando por μ a sua média e por σ^2 a sua variância).

O problema básico da «teoria dos erros» insere-se assim num dos capítulos centrais da Estatística: o da estima dum parâmetro da população (neste caso μ) a partir duma amostra nela colhida (constituída pelas n observações $x_1, x_2, \cdots, x_n$). Claro que servirão para estimar μ a «média aritmética» $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, a mediana, ou qualquer outro estimador apropriado; mas há um bom par de razões que levam a preferir a primeira: é uma estimativa «centrada» (quer dizer, $E(\bar{x}) = \mu$) e a mais «eficiente» (i. e. de variância mínima). Esta última qualidade prende-se de resto com a circunstância de ser também $\bar{x}$ uma estimativa de «máxima verosimilhança».

Para aferir o grau de confiança de que a estimativa $\hat{\mu} = \bar{x}$ é merecedora, há necessidade de estimar também o desvio padrão σ. Sem mencionar sequer o mundo de simplificações que recentes resultados sobre o uso da amplitude como medida de dispersão permitem introduzir nos cálculos [1], referir-nos-emos apenas ao estimador habitual: o desvio padrão da amostra, $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$.

Quando n é pequeno, procura-se, de acordo com um critério discutível, melhorar a estimativa tomando antes $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$. É costume apresentar para este procedimento as mais fantasistas justificações, ignorando-se sempre as razões que efectivamente podem pesar na escolha: (*a*) $\hat{\sigma}$ maximisa a densidade de probabilidade da distribuição da variável s [2], $f(s \mid \sigma) \propto e^{-n s^2/2\sigma^2} s^{n-2}$, quando aqui se supõe s substituído pelo valor observado; (*b*) $\hat{\sigma}$ é a estimativa que intervém na definição de várias «estatísticas» muito usadas, como por exemplo as variáveis «*t*» de STUDENT e «*F*» de SNEDECOR.

Por exemplo, relativamente uma série de 10 observações tem-se $t = \sqrt{10}\,(\bar{x} - \mu)/\hat{\sigma}$; daqui se deduzirá um intervalo-α de confiança para μ substituindo $t_{\frac{\alpha}{2}}$ em $\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}\right)$ pelo valor do quantilho- $\frac{\alpha}{2}$ duma variável t com 9 graus de liberdade. Com $\alpha = 0{,}50$ vem $t_{\frac{\alpha}{2}} = 0{,}703$ e a semi-amplitude do intervalo será dada por $0{,}703 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}$. Compare-se este valor com o «erro provável» [3] $r = 0{,}6745 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{10}}$ tradicionalmente empregado neste contexto: se $\hat{\sigma}$ for relativamente grande, a divergência pode ser considerável.

Poderia prosseguir-se com a consideração das médias ponderadas; poderia também relacionar-se o

(1) *Theoria Motus Corporum Coelestium*, 1809

(1) V. artigo do autor a este respeito em *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, n.º 12 (1956).

(2) Desvio padrão observado em amostras de n colhidas na mesma população.

(3) O tal que «não é erro nem tão pouco provável».

«princípio dos mínimos quadrados» com o «princípio da máxima verosimilhança»; e assim por diante. Mas não se pretende divagar demasiado e o que fica dito ilustra suficientemente o ponto de vista defendido.

Julgamos ter apresentado argumentos suficientes para evidenciar a pouca propriedade do nome escolhido para a nova disciplina. Se o aspecto que mais interessa salientar é o das aplicações à indústria, porque não chamar-lhe «Estatística Industrial» ou qualquer outra coisa semelhante?

Poderá cuidar-se que o baptismo, por pouco inspirado que seja, nenhuma influência tem no funcionamento dos cursos; mas a verdade incontroversa é que a designação de «Probabilidades, Erros e Estatística» tende a imprimir aos programas dos cursos orientação errada sempre que aos seus regentes falte a indispensável experiência de trabalho na matéria (experiência essa que, ousaríamos dizer, muito rareia no nosso meio).

Veja-se por exemplo como se desenrolou o curso numa escola de engenharia com a qual temos contacto mais directo. Nessa Escola parece prevalecer o estranho critério de que o ensino da Matemática fica melhor entregue a engenheiros (1) do que a matemáticos, nunca se havendo reparado que essa pobre ciência, tão martirizada, é talvez a mais vulnerável a uma defeituosa exposição. Nenhum matemático português deve, portanto, ter sido tomado de surpresa ao ver sacrificar a Estatística como a nova vítima do amadorismo que tanto tem prejudicado as matemáticas aplicadas em Portugal.

O professor encarregado de reger na referida Escola a cadeira de «Probabilidades, Erros e Estatística» — que aliás deve ser pessoa de luzidas qualidades, pois lhe foram também confiadas mais três cadeiras básicas de Matemática distribuídas pelos dois primeiros anos — não hesitou em assumir a responsabilidade de, logo no primeiro ano de funcionamento da cadeira, estruturar ele próprio o programa do curso e publicar as *suas* lições. Não lhe deve ter ocorrido sequer a solução — porventura mais lógica, mais natural e mais eficaz — de adoptar para efeitos docentes e discentes um dos muitos livros de Estatística Industrial que pululam nas literaturas americana e inglesa.

O resultado está à vista. Percorramos, com efeito, muito ràpidamente, as tais «lições» (que, escusado será dizer, escrupulosamente quizeram traduzir o nome da cadeira: primeiro «deu-se» Cálculo das Probabilidades, depois «deu-se» Teoria dos Erros e finalmente «deu-se» Estatística).

(1) Frequentemente, até, a meros diplomados em Engenharia ou a simples alunos dos últimos anos!

1. *Cálculo das Probabilidades.*

Começa-se pela definição lógica (!) de probabilidade, cujos axiomas são alternadamente apodados de «propriedades» e «teoremas». Menciona-se depois a definição de BERNOULLI, fala-se numa coisa a que vagamente se chama a «lei empírica do acaso» e introduzem-se os «campos de probabilidade» (?). Ilustra-se a seguir, copiosamente, a técnica de cálculo de probabilidades em problemas do tipo clássico, muito clássico mesmo. Vai-se ao ponto de enunciar a generalização do teorema das probabilidades totais ao caso de os acontecimentos não serem *mùtuamente exclusivos* (sic). Sem esquecer o problema do encontro, passa-se depois às probabilidades geométricas (!).

O problema das provas repetidas é tratado de forma quase exaustiva, analisando-se laboriosa e pormenorizadamente a aplicabilidade das aproximações normal e de POISSON à binomial.

Vêm a seguir as inevitáveis probabilidades das causas, para só depois se entrar num estudo sumário das variáveis aleatórias, mas não tão sumário que se deixe de introduzir a «função característica» (função geradora dos momentos) que se aplica ao cálculo de momentos e, sem justificação, à demonstração da lei da combinação linear de variáveis normais.

Tudo isto muito bem misturado e condimentado por paradoxos de MÉRÉ, problemas de TCHEBYCHEFF, agulhas de BUFFON, etc., etc., etc.

2. *Teoria dos Erros.*

Sobre este assunto foram publicados apontamentos pelo próprio regente da cadeira, que nos permitem desenvolver uma crítica mais fundamentada.

Feita a distinção entre erros sistemáticos e acidentais, enunciam-se os postulados de GAUSS e deduz-se deles a lei normal dos erros, que se afirma ser *inteiramente* confirmada pela experiência. Definem-se depois uma «medida de precisão» e vários «aferidores» (erro quadrático médio, erro provável e erro médio absoluto).

Considera-se a seguir a combinação linear de erros e deduz-se a «fórmula de propagação de erros». Esta, como se sabe, é a fórmula aproximada que dá o erro médio quadrático duma função $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de várias variáveis cujos valores são experimentalmente determinados; mas no opúsculo não se esclarece como remover a dificuldade de cálculo das derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ que na fórmula intervêm. (Não se conhecem os valores correctos dos x_i).

Outro ponto cujo tratamento se oferece também a particulares reparos é o princípio dos mínimos quadrados, em cuja justificação se diz, entre outras coisas, ser $\dfrac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}$ a *probabilidade* de cometer o erro t, e embandeira-se em arco ao verificar que esse princípio conduz a tomar a média aritmética como o «valor mais provável», esquecendo-se que isso decorre da própria dedução da lei de Gauss a partir dos seus postulados. Este princípio podia ao menos ter sido aproveitado para justificar o uso da média ponderada no caso de observações de desigual precisão, mas não o foi — pelo menos explìcitamente.

O capítulo que se segue, sobre observações indirectas, é talvez o que, pelo deficiente enunciado do problema e particular imperfeição da exposição, causará aos entendidos alteração mais sensível da pressão arterial. Cometeu-se neste ponto a «proeza» de transpor para a notação hoje corrente na teoria das matrizes toda a argumentação que conduz às equações normais de Gauss. Todavia, do ponto de vista matemático, nada se parece ter ganho em clareza; quanto ao sentido físico do problema, esse perde-se completamente por detrás das desajeitadas equações.

Outros aspectos mais deploráveis do trabalho sujeito poderiam ainda ser mencionados; mas confessamo-nos impotentes para dar uma ideia, por pálida que seja, da frequente imprecisão ou mesmo impropriedade de linguagem, da forma vaga ou incompleta por que são postos os problemas, da imperfeição da maioria dos conceitos, da má ligação com a matéria anterior, enfim, da confusão irremediável que impregna toda a exposição.

Permita-se-nos uma transcrição:

> «Em tudo o que se segue, falaremos de erros quadráticos médios, erros prováveis, etc., como se fossem os teóricos, isto é, definidos pela curva de Gauss correspondente. É evidente que há erro nessa aproximação porque a curva de Gauss refere-se a uma variável contínua enquanto que o número de observações é sempre finito; na definição dos aferidores entra o conceito de probabilidade enquanto que com um número finito de observações estaremos lidando com frequências.
>
> Prova-se que esse erro tende para 0 quando n tende para infinito e que tratando-se dum número suficiente de observações ($n > 20$) é *pràticamente* verdadeira a asserção feita.
>
> Nota: n — número de observações».

Não se julgue que é o estilo que pretendemos criticar; quizemos apenas dar uma ilustração eloquente do que pode acontecer quando se procure traduzir à risca a desastrosa designação da cadeira. Naqueles períodos acha-se enunciada, por uma forma embrionar e toscamente incompleta embora, a ideia fundamental da Estatística (indução amostra ⟶ universo) que só na parte final do curso será abordada.

3. *Estatística.*

A esta matéria aplicam-se integralmente, se não com maior intensidade ainda, as críticas feitas atrás a respeito da qualidade da exposição. Esta pode também ser detidamente apreciada através da leitura dum segundo opúsculo publicado pelo mesmo autor.

Após uma introdução em que se dá a definição de Estatística mais adequada que se encontrou [1] — a de Cournot (1801-1877) — entra-se na primeira parte da obra, pomposamente intitulada «Elementos de Estatística Matemática».

Despejam-se aqui, numas curtas 14 páginas, todas as costumadas noções que se encontram nos primeiros capítulos dos livros, tanto as indispensáveis como as supérfluas, tanto as de uso corrente como as obsoletas, tanto as aplicáveis num curso breve como as de carácter mais avançado e subtil. Nem as correcções de Sheppard para os momentos, nem a distribuição de Lexis, nem os desenvolvimentos em série de Edgeworth escaparam à chamada!

Na segunda parte, sob a epígrafe «Métodos Estatísticos no Controle dos Processos Industriais» (finalmente!), o autor ocupa-se exclusivamento de cartas de controle nas suas variadas formas (melhor diríamos, deformações). Nem uma palavra sobre inspecção por amostra — o segundo problema básico da Estatística Industrial — nem sobre a organização de planos de amostragem de acordo com margens de risco prèfixadas.

Muitas tabelas, numerosos ábacos, mas escassa explicação sobre o que se acha por detrás delas. O uso da amplitude *(range)* na construção das cartas, que se aplaude, fica porém assaz mal esclarecido; e as cartas de controle da proporção de elementos defeituosos são muito incompleta e inadequadamente tratadas.

As exigências de espaço não nos permitem todavia fazer crítica pormenorizada deste incrível escrito, destinado — é bom não esquecer — ao uso de alunos duma Universidade. Ao seu autor cabe a dúbia distinção de haver dado a lume o primeiro texto sobre Estatística Industrial em português. Dizemos «dúbia» porque não podemos afiançar que o opúsculo trate na realidade de Estatística; e, quanto a ser redigido em português, limitar-nos-emos a notar que as costumadas dificuldades resultantes da pobreza da terminologia científica nacional são nele resolvidas com um

---

[1] Menciona-se também, a «título de curiosidade», uma «definição humorística» — *a Estatística é a arte de precisar o que se ignora* — a qual justificadamente se diz «visar os estatistas ignorantes ou pouco escrupulosos».

critério que decerto espantará quem entre nós algum interesse tenha dedicado ao assunto. *Desvio típico*, por exemplo, foi termo com que o responsável por estas linhas nunca ouviu os seus colegas mimosear o *desvio padrão*; e *quartos, décimos, centésimos* são epítetos com que os *quartilhos*, os *decilhos* e os *centilhos* provàvelmente se ressentirão.

Com todo este arrazoado não se quiz, sinceramente, atingir ninguém. Sòmente se pretendeu chamar a atenção para um aspecto particular dum problema grave e muito mais vasto: o cancro do amadorismo que entre nós aflige o ensino das Matemáticas.

Quando chegará o dia em que se deixe aos especialistas o cultivo das especialidades?

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CONFERÊNCIAS NA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE BARCELONA

O Prof. Sebastião e Silva proferiu uma série de dez conferências na Faculdade de Ciências de Barcelona, entre 14 de Abril e 8 de Maio deste ano, subordinadas ao tema geral «*Distribuições e Funcionais Analíticas. Aplicações ao Cálculo Operacional*».

O Diário de Barcelona de 17 de Abril de 1958 inseriu a seguinte notícia:

«O Professor José Sebastião e Silva, director do Centro de Estudos Matemáticos do Instituto de Alta Cultura e catedrático da Universidade Técnica de Lisboa, iniciou o ciclo de conferências sôbre teoria das distribuições e suas aplicações, organizado pelo Seminário Matemático de Barcelona. O director do Seminário, doutor D. José Maria Orts apresentou o conferencista focando os distintos aspectos da sua personalidade científica de tanto relevo na matemática moderna.

«O doutor Sebastião expôs, de forma magistral, uma nova axiomática da moderna teoria das distribuições, de tanta aplicação não só no campo abstracto, como nas novas teorias físicas.

«O cálculo simbólico de Heaviside há muito aplicado nos problemas de engenharia encontram com esta teoria uma justificação rigorosa que até agora lhe faltava. A função de Dirac, instrumento valioso na Mecânica Quântica, adquire sentido quando considerada como uma distribuição. Muitos problemas de equações diferenciais têm solução adequada com este novo instrumento de cálculo».

Seguem-se os títulos das conferências realizadas.

1 — Considerações prévias: necessidade das distribuições; sua introdução heurística no Cálculo Operacional (escola de Heaviside) e na Física Teórica (escola de Dirac).

2 — Construção do espaço das distribuições de ordem finita como derivadas formais de funções contínuas. Interpretação das funções localmente somáveis como distribuições.

3 — Distribuições de ordem infinita. Axiomática das distribuições. Produto multiplicativo.

4 — Limite de uma sucessão de distribuições. Alusão à topologia dos espaços de distribuições.

5 — Integral de uma função com respeito a uma distribuição. Fórmula integral de Dirac. Funcionais e operadores lineares contínuos sobre distribuições. Definição de distribuição segundo Schwartz.

6 — Espaços particulares de distribuições. Modalidades algébricas e topológicas do conceito de convolução (faltung) de duas distribuições.

7 — Revisão sumária da teoria das funcionais analíticas e do Cálculo Operacional de Fantappiè, segundo uma orientação mais recente.

8 — A transformação de Laplace como operador linear contínuo sobre distribuições. Suas relações com o Cálculo operacional de Fantappiè.

9 — Aplicação do Cálculo Operacional aos problemas mistos para as equações em derivadas parciais de 2.ª ordem. Distribuição de Green para a equação de ondas.

10 — Novas perspectivas abertas pelas distribuições no Cálculo Operacional. As ultra-distribuições como funcionais analíticas de Fantappiè.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DE LISBOA

O Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa do I. A. C. realizou nos meses de Maio a Julho uma série de lições sobre Topologia que foram seguidas com bastante interesse por alunos e licenciados. Estas lições foram proferidas pelo bolseiro do I. A. C., João dos Santos Guerreiro, e trataram até agora duma iniciação aos métodos da Topologia concretizados com aplicações á Análise Funcional, devendo prosseguir no próximo ano lectivo.

A pedido de alguns alunos, em especial da Faculdade de Letras, o Prof. SEBASTIÃO E SILVA realizou também uma série de lições sobre Lógica e Teoria dos Conjuntos que foram seguidos com vivo interesse.

Finalmente o Prof. HUGO B. RIBEIRO da Universidade de Nebraska proferiu duas lições de encerramento.

Merece todo o nosso louvor esta feliz iniciativa, que vem contribuir para a renovação da Cultura Matemática no nosso país e despertar interesse entre os novos pela Matemática Moderna.

J. G. T.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATEMÁTICOS

Como já foi anunciado no último n.º de Gazeta de Matemática, realiza-se de 14 a 21 de Agosto próximo em Edimburgo o XII Congresso Internacional dos Matemáticos, sobre a direcção superior da União Matemática Internacional.

A Gazeta de Matemática dará no próximo número indicações pormenorizadas sobre esta reunião, e faz votos de que o próximo Congresso, — o XIII — a realizar em 1962 o seja em Portugal.

J. G. T.

PROFESSOR AGREGADO DA F. C. L.

Nos dias 31 de Janeiro, 24, 27 de Fevereiro e 13 de Maio realizaram-se na F. C. L. as provas para habilitação ao título de Prof. Agregado do 1.º grupo 1.ª Secção — Análise e Geometria — da F. C. L. do 1.º Assistente do I S C E F Dr. JOSÉ RIBEIRO ALBUQUERQUE:

31-1-58 — prova prática — Equações às derivadas parciais de 1.ª ordem.

24-2-58 — 1.ª lição — Equações diferenciais lineares no domínio real; métodos de integração.

27-2-58 — 2.ª lição — Superfícies regradas.

13-5-58 — defesa da Tese — «Propriedades de conexão nos espaços abstractos».

Foram arguentes os Profs. ANIBAL SCIPIÃO GOMES DE CARVALHO, JOSÉ FRANCISCO RAMOS E COSTA e LUIZ BEDA DE SOUSA TAVARES NETO.

A Tese foi publicada na Revista da Faculdade de Ciências em 1954, data em que foi requerida a admissão a concurso.

A votação foi feita no final das provas sobre o mérito absoluto do candidato que foi aprovado por unanimidade. Felicitamos sinceramente o Dr. RIBEIRO ALBUQUERQUE.

J. G. T.

DOUTORAMENTO

Nos dias 17 e 18 de Março realizaram-se na F. C. L. as provas para doutoramento em Ciências Matemáticas do Assistente daquela Faculdade ANTÓNIO CÉSAR DE FREITAS. O Candidato, que foi aprovado com a classificação de 18 valores, apresentou como dissertação, «A Teoria das Distribuições e o Cálculo simbólico dos Electrotécnicos no caso de circuitos de Constantes concentradas», aplicação da Teoria das Distribuições aos sistemas de equações diferenciais que traduzem o funcionamento dos circuitos de constantes concentradas. Argumentaram os Profs. JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, RODRIGO SARMENTO BEIRES e DIOGO PACHECO AMORIM. Ao novo doutor as nossas felicitações.

J. G. T.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **1.º Exame de Frequência — (1.ª chamada) — 1958.**

4339 — *a*) Mostre que o conjunto dos racionais x tais que $x^3 > 5$ constituem uma secção superior

b) Considere o conjunto dos números $a + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Indique os seus pontos de acumulação, os isolados e os limites de WEIERSTRASS. Sob que condição existiria mínimo?

c) Mostre que conjunto limitado e fechado contém mínimo e máximo.

4340 — *a*) Descreva a maneira de calcular as raízes racionais de um polinómio de coeficientes inteiros. Se estes são todos positivos e os coeficientes extremos iguais à unidade, que pode concluir a respeito dessas mesmas raízes.?

b) Caracterize os polinómios reais $f(x)$ de grau n para os quais as imagens das raízes são simétricas duas a duas em relação ao eixo dos yy. Com $n=4$, determine $f(x)$ pela condição ulterior de ser um quadrado perfeito.

c) Mostre que se $f(x)$ é múltiplo de $f'(x)$ então um e um só valor anula quer $f(x)$, quer $f'(x)$.

4341 — *a*) Enuncie a regra de multiplicação de matrizes e estabeleça a propriedade associativa desta operação.

b) Defina característica de uma matriz. Descreva com justificação um processo para o seu cálculo. Indique os valores de λ para os quais o produto AB com

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & \lambda-1\\ -2 & -1-2\lambda\\ 0 & 1+\lambda\end{bmatrix}$$

resulta de característica 2.

c) Seja A uma matriz quadrada de característica igual à ordem n. Utilizando a teoria da condensação por operações elementares sobre linhas, mostre que existe uma matriz B tal que $BA=I$. Verifique que B é também de característica n e que permuta com A.

4342 — *a*) Dados $z_1=3+4i$ e $z_2=1+2i$, construa a imagem do complexo z tal que $\arg(z-z_1)=\frac{\pi}{3}$ e $\arg(z-z_2)=\alpha$. Para que valores de α existe solução? Enuncie e justifique a propriedade em que fundamenta a resolução.

b) Mostre que o polinómio $f(x)=2x^3-3x^2-2$ não tem raízes racionais, mas admite uma raiz real. Calcule esta com duas casas decimais pelo método de Holmes.

c) Estabeleça a divisibilidade de $f(-1)$ por $\alpha+\beta$ quando $\frac{\alpha}{\beta}$ é uma fracção irredutível raiz de $f(x)$, polinómio de coeficientes inteiros.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame de Frequência — (2.ª chamada) — 1958.

4343 — *a*) Mostre que os racionais x que fazem $x^3>7$ constituem uma secção superior. Indique justificando a natureza do número que ela define.

b) Seja $f(x)$ uma função crescente e contínua em $[a,b]$. Indique o seu contradomínio e enuncie e demonstre o teorema em que fundamenta a resposta.

c) Calcule os limites laterais no infinito e em zero para a função $f(x)$ $2^{-\frac{1}{x}}$. Trace um gráfico aproximado de $f(x)$. Diga, justificando, se é uniformemente contínua em $[-1,0)$.

4344 — *a*) Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$. Se y_0 não é valor tomado pela função, prove que existe uma vizinhança de y_0 onde não existe nenhum valor da função. Enuncie e demontre o teorema em que baseia a resposta.

b) Seja $f(x)$ uma função crescente em $[a,b]$ com o contradomínio $[f(a),f(b)]$. Verifique que $f(x)$ é contínua em qualquer ponto c de $[a,b]$.

c) Defina continuidade uniforme de $f(x)$ num conjunto e estude deste ponto de vista $f(x)=\frac{1}{x-2}$, definida em $(2,3)$.

4345 — *a*) Dado $u=1+i$, calcule o complexo v que tem a imagem sobre a circunferência com centro na origem e raio 2 e que verifica a condição $|u+v|=|v|-|u|$. Prove que é sempre $|z_1+z_2|\geqslant||z_2|-|z_1||$, indicando o caso de igualdade.

b) Calcule as raízes racionais do polinómio $f(x)=9x^5-10x^3-36x^2+x+4$ e a raiz irracional com duas casas decimais.

c) Defina o m. d. c. de $f(n)$ e $g(n)$ e relacione-o, justificando, com estes polinómios.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 21-4-58.

4346 — Relacione a e b de modo que a recta $ax+by=1$ fique tangente à circunferência $x^2+y^2=4$ do plano xOy. Equação do plano que, passando no no ponto $P(1,1,2)$, tem aquela tangente por traço em xOy. Valores de a e b para os quais o plano é paralelo à recta $\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$.

4347 — Estabeleça a condição necessária e suficiente para que

$$f=a_0x^n+\cdots$$
$$g=b_0x^m+\cdots \qquad a_0b_0\neq 0$$

tenham alguma raiz comum.

Determine y de modo que

$$f=x^2+2x+y$$
$$g=x^3-2x^2-x+2$$

tenham alguma raiz comum e, para tal valor de y, forme a equação das raízes comuns.

4348 — Mostre que $f=a_{ik}x_ix_k$ de característica r é decomponível numa soma de r quadrados de formas lineares independentes (supõe-se $a_{\alpha\alpha}\neq 0$, com algum α). Decomponha em quadrados a quádrica

$$f=x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+2x_2x_4+x_3^2-2x_3x_4.$$

4349 — Prove que se $S = \sum u_n$ é semi-convergente, podem extrair-se dela duas subséries $\sum a_n$ e $\sum(-b_n)$ com $a_n, b_n > 0$, ambas divergentes infinitas. Conclua daí que é possível reordenar os termos de S de modo que a nova série seja divergente infinita positiva.

Intervalo de convegência da série $\sum_2^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^2-1}$ e natureza da série nos extremos desse intervalo. É a série uniformente convergente nesse intervalo? Razão disso.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º Exame de Frequência — (2.ª chamada) — 28-4-1958.**

4350 — Estabeleça os teoremas principais relativos à composição e decomposição de determinantes.

Calcule o determinante de 4.ª ordem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{e o determinante de ordem } n: \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

4351 — Defina caracterítica duma quádrica. Enuncie a lei da inércia de Sylvester, para as quádricas reais. Que entende por índice de inércia?

Calcule a característica e o índice de inércia da quádrica.

$$x^2 + \lambda y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx,$$

onde λ é parâmetro real.

4352 — Dê uma condição necessária e suficiente para que duas rectas do espaço

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + \partial' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_1' x + B_1' y + C_1' z + D_1' = 0 \end{cases}$$

sejam

a) Paralelas
b) Secantes.

Escreva as equações dos feixes de planos determinados por cada uma das rectas dadas, e deduza uma condição necessária e suficiente para que elas sejam complanares.

Calcule α de modo que as rectas

$$\begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = -z + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2z - 1 \\ y = 5z + 4 \end{cases}$$

sejam complanares e determine uma equação do plaque as contém.

4353 — Estabeleça o teorema de Bolzano relativo a limites finitos de sucessões, e deduza dele uma condição necessária e suficiente de convergência duma série.

Estudo das séries $\sum \frac{1}{(2n+1)^n}$ e $\sum \frac{1}{n \times \sqrt[n]{n}}$.

Enunciados dos números 4339 a 4353 de J. J. Dionísio.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Epoca de Outubro — 1-10-57.**

4354 — *a*) Os polinómios

$$x^3 - \alpha x^2 + 11x - 6$$
$$x^3 - \beta x^2 + x + 6$$

têm duas raízes comuns cuja soma é igual a 5.

Escreva a equação das raízes comuns e calcule os valores de α e β.

b) Estude a posição relativa da recta $\frac{x-x_0}{h} = \frac{y-y_0}{k} = \frac{z-z_0}{l}$ e do plano $Ax + By + Cz + D = 0$, por meio da teoria dos determinantes, obtendo as relações que estudou em Geometria Analítica.

R: a) *O processo prático para a construção do resultante dá imediatamente a equação das raízes comuns que*

1	$-\alpha$	11	-6	
	1	$-\beta$	1	6
-1	$\alpha-\beta$	-10	12	
...	...	...	...	
...	...	...	...	

é do segundo grau: $(\alpha-\beta)x^2 - 10x + 12 = 0$. *Como a soma das raízes desta equação é* 5, *será*

$$\frac{10}{\alpha-\beta} = 5 \quad ou \quad \alpha - \beta = 2$$

o que permite escrever a equação na forma $x^2 - 5x + 6 = 0$, *cujas soluções são* $x' = 2$ *e* $x'' = 3$. *Substituindo nos polinómios dados* x *por* 2 (*ou por* 3), *obtem-se* $\alpha = 6$ *e* $\beta = 4$.

b) *O problema consiste em estudar o sistema*

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{h} = \frac{y-y_0}{k} = \frac{z-z_0}{l} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \quad \textit{equivalente a}$$

$$\begin{cases} kx - hy = kx_0 - hy_0 \\ ly - kz = ly_0 - kz_0 \\ Ax + By + Cz = -D \end{cases}$$

Se o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} k & -h & 0 \\ 0 & l & -k \\ A & B & C \end{vmatrix}$ *for diferente de* $0\,(Ah + Bk + Cl \neq 0)$, *o sistema é possível, e determinado, o que significa que a recta encontra o plano num ponto. Se* $\Delta = 0\,(Ah + Bk + Cl = 0)$ *e admitindo que* $\begin{vmatrix} k & -h \\ 0 & l \end{vmatrix} \neq 0$, *há dois casos a considerar: sendo* *o característico* $\Delta' = \begin{vmatrix} k & -h & k x_0 - h y_0 \\ 0 & 1 & l y_0 - k z_0 \\ A & B & -D \end{vmatrix}$ *diferente de* $0\,(A x_0 + B y_0 + C z_0 + D \neq 0)$ *o sistema é impossível (a recta é paralela ao plano) e se* $\Delta' = 0\,(A x_0 + B y_0 + C z_0 + D = 0)$ *o sistema é possível indeterminado (recta assente no plano).*

4355 — Dada a fracção racional $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$, resolva os seguintes problemas:

a) Determine os seus extremos e estude o sentido da concavidade.

b) Decomponha-a em elementos simples e aproveite o resultado para calcular $f^{(n)}(x)$ e $Pf(x)$.

c) Escreva o desenvolvimento em série de $f(x)$ segundo as potências de $x+1$.

R: a) $f'(x) = -\dfrac{3x-2}{x^3(x-1)^2}$ *e* $x = \dfrac{2}{3}$ *é o único ponto de estacionaridade. Como* $f'(x) < 0$ *para* $x > \dfrac{2}{3}$ *e* $f'(x) > 0$ *para* $x < \dfrac{2}{3}$, *trata-se de um ponto de máximo.*

$f''(x) = 2.\dfrac{6x^2-8x+3}{x^4(x-1)^3}$ *e, como* $6x^2-8x+3>0$ *para todos os valores de* x, $f''(x) > 0$ *para* $x > 1$ *(concavidade voltada para cima) e* $f''(x) < 0$ *para* $x < 1$ *(concavidade voltada para baixo).*

b) $\dfrac{1}{x^2(x-1)} = \dfrac{a_0 + a_1 x}{x^2} + \dfrac{b_0}{x-1}$. *Para determinar* a_0 *e* a_1 *basta considerar a fracção auxiliar* $R_0(x) = \dfrac{1}{-1+x}$ *e efectuar a divisão algébrica até ao grau 1 do cociente. Obtem-se* $-1-x\,(a_0=-1, a_1=-1)$. *A constante* b_0 *pode calcular-se fàcilmente, fazendo* $x=1$ *na fracção auxiliar* $R_1(x) = \dfrac{1}{x^2}\,(b_0=1)$.

Então $\dfrac{1}{x^2(x-1)} = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\left[\frac{n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{n!}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right] =$$

$$= (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{x+n+1}{x^{n+2}}\right]$$

$$Pf(x) = \frac{1}{x} + \log\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

c) *Pode obter-se o desenvolvimento em série aproveitando a expressão de* $f^{(n)}(x)$. *Assim*

$$f(x) = \sum_0^\infty f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_0^\infty\left(-\frac{1}{2^{n+1}} - n\right)(x+1)^n$$

4356 — *a*) Provar que, sendo $f(x,y)$ homogénea de grau α, $x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = \alpha(\alpha-1)f$.

b) Mostre que a equação $xy^2 + (x^2+x)y - 3 = 0$ define na vizinhança de $P(1,1)$ uma função $y(x)$. Escreva a equação da tangente à curva nesse ponto.

R: a) *Escrevendo a identidade de* Euler *para* $f'_x(x,y)$ *e* $f'_y(x,y)$, *funções homogéneas de grau* $\alpha-1$, *tem-se:*

(1) $\quad x f''_{x^2} + y f''_{xy} = (\alpha-1) f'_x$

(2) $\quad x f''_{xy} + y f''_{y^2} = (\alpha-1) f'_y$

Multiplicando (1) *e* (2) *por* x *e* y, *respectivamente, e somando, obtem-se*

$$x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = (x-1)[\alpha f'_x + y f'_y] = (\alpha-1)\alpha f$$

b) *Designando por* $\varphi(x,y)$ *o primeiro membro da equação, tem-se* $\varphi(1,1) = 0$. *As derivadas* $\varphi'_x(x,y)$ *e* $\varphi'_y(x,y)$ *são contínuas em* $P(1,1)$ *e* $\varphi'_y(1,1) \neq 0$. *Estão pois satisfeitas as condições de existência da função* $y(x)$.

A equação da tangente é $\varphi'_x(1,1)(x-1) + \varphi'_y(1,1)(y-1) = 0$ *ou — substituindo* $\varphi'_x(1,1)$ *e* $\varphi'_y(1,1)$ *pelos seus valores e simplificando —* $x+y-2=0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Milicianos — 14-12-1957.

4357 — Resolva os seguintes problemas:

a) Determime a função $f(x)$ tal que $\Delta f(x) = x\,(h=1)$.

b) Utilizando determinantes, concluir que o sistema

$$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ x-y+z-t&=2\\ x+y+z+t&=0\\ x+y+t&=0\\ x-y-z-t&=3 \end{aligned}$$

é impossível. Com equações deste sistema construa outro que seja possível e indeterminado de grau 1. Exprima a última equação como composição linear das três primeiras.

R: a) $f(x)$ *é da forma* ax^2+bx+c. *Então* $f(x+1)-f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2+bx+c) = 2ax + (a+b)$ *e, como* $2ax + (a+b) \equiv x$, *será* $a = \dfrac{1}{2}$ *e* $b = -\dfrac{1}{2} \cdot f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + c$

b) *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

o determinante principal. Como os determinantes característicos não são todos nulos, o sistema é impossível.

É evidente que o sistema

$$\begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ x - y + z - t &= 2 \\ x + y + z + t &= 0 \end{aligned}$$

é possível ($\Delta \neq 0$) *e indeterminado de grau* 1.

Para exprimir a última equação como composição das três primeiras, considere-se o determinante característico correspondente à última equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando os complementos algébricos dos elementos da última coluna, obtem-se $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -4$ *e* $\lambda_5 = -4$ *e então* $\lambda_1(x + y - z + t - 1) + \lambda_2(x - y + z - t - 2) + \lambda_3(x + y + z + t) + \lambda_5(x - y - z - t - 3) = 0$, *o que permite escrever* $x - y - z - t - 3 = (x + y - z + t - 1) + (x - y + z - t - 2) - (x + y + z + t)$.

4358 — *a*) Determinar os máximos e mínimos de $y = a e^{kx} + b e^{-kx}$.

b) Calcular $P x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$.

c) Desenvolver em série de Mac Laurin $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

R: a) $y' = a k e^{kx} - k b e^{-kx}$. *a equação* $y' = 0$ *tem por raiz* $x = \dfrac{1}{2k} \log \dfrac{b}{a}$ *que, substituída em* $y'' = a k^2 e^{kx} + k^2 b e^{-kx}$, *dá* $y'' > 0$. *Está-se em presença do mínimo* $\left(\dfrac{1}{2k} \log \dfrac{b}{a}, 2\sqrt{ab}\right)$.

b) $P x^2 \cdot \operatorname{arctg} x = \dfrac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3} P \dfrac{x^3}{1 + x^2} = \dfrac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3} P\left(x - \dfrac{x}{x^2 + 1}\right) = \dfrac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6} \cdot \log(x^2 + 1) + C$.

c) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \sum\limits_0^\infty (2^n - 1) x^{-(n+1)}$.

4359 — Achar a equação da tangente à curva $y(x)$, definida implìcitamente pela equação $f(x, y) = x y^2 - 2 x^2 y - 3 = 0$, na vizinhança de $P(1, -1)$. Provar que $x f'_x + y f' y \equiv 9$.

R: $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1 = \left(-\dfrac{y^2 - 4xy}{2xy - 2x^2}\right)_{(1,-1)} = \dfrac{5}{4}$ *e então a tangente é* $y + 1 = \dfrac{5}{4}(x - 1)$. *Como* $f(x, y) = \Psi(x, y) - 3 = 0$, *com* $\Psi(x, z)$ *homogénea de grau* 3, *tem-se* $x \Psi_x + y \Psi_y \equiv 3 \Psi(x, y)$ *ou* $x f'_x + y f'_y \equiv 9$.

Soluções dos números 4354 a 4359 de Fernando de Jesus.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame de frequência — 1957-1958.**

4360 — Ache o limite superior preciso e o limite inferior preciso de Cauchy para o conjunto assim definido:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \; a_{2n} = n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

As definições dão-se da mesma maneira ainda que os conjuntos não sejam limitados.

4361 — Determine um complexo z tal que 4 das suas raízes de índice 6 satisfaçam à equação $x^4 + 2x^2 + 4 = 0$.

4362 — Ache a derivada de $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$.

4363 — Um endomorfismo diz-se normal se comuta com os automorfismos internos. Demonstre que, dado o grupo $\mathfrak{G}$, se η for endomorfismo normal, $\mathfrak{G}\eta$ é invariante.

4364 — Determine o núcleo do homomorfismo $e^{i\theta} \to e^{ik\theta}$ ($k \to$ inteiro fixo, $\theta \to$ número real).

4365 — Considere o conjunto unido $U = A_1 \cup A_2$; mostre, em seguida, que U se pode escrever como união de dois conjuntos disjuntos.

4366 — Mostre que as transformações definidas pelo sistema $\begin{cases} x' = a x - b y \\ y' = b x + a y \end{cases}$ formam grupo. Os números a e b são variáveis.

4367 — Um endomorfismo dum grupo diz-se normal se comuta com todos os automorfismos internos. Mostrar que o produto de dois endomorfismos normais é um endomorfismo normal.

4368 — Escreva a expressão da derivada da função $y = \arccos x$, suposto y um arco de terceiro quadrante.

4369 — Verifique que a função $Z = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2}$ é contínua no ponto $(0, 0)$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 5.ª e 6.ª turmas — 23-6-58.**

4370 — Considere as formas lineares $x_1 + x_3$, $2x_2 + x_4$, $x_1 + 2x_2 + 2x_4$, $x_1 + 2x_3 - x_4$, e verifique se há ou não entre elas uma dependência linear. No caso afirmativo, indique quantas são independentes e escreva um sistema máximo de independentes. Justifique o processo.

Nota. A justificação pedida é a parte essencial do problema.

4371 — Considere, no espaço linear R_5, o sub-espaço E de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_2 + 3\,x_3 + x_4 = 3 \\ 3\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 - 2\,x_4 + 3\,x_5 = 0 \end{cases}$$

e determine um sub-espaço paralelo a E, de dimensão inferior de uma unidade à dimensão de E e passando pela origem das coordenadas.

4372 — Determine a equação do plano tangente à superfície $x + y + z = \operatorname{sen}(x\,y\,z)$ no ponto $(0,0,0)$ e escreva as equações da normal no mesmo ponto.

4373 — Tome no plano xz, uma elipse de centro na origem dos coordenados e de eixos 2 e 3, respectivamente sobre os eixos $0x$ e $0z$. Depois, tome uma recta do plano yz igualmente inclinada sobre os dois eixos. Escreva a equação do cilindro cuja directriz é a elipse e cujas geratrizes são paralelas à recta dada.

4374 — Determine a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n^3}}+i\,\frac{(n^2)\,!}{(n+1)\,!}\right]$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame final — 7.ª turma — 4-7-58.**

4375 — Tendo em conta as propriedades dos determinantes, prove, sem cálculos, que

$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f_1(y) & \varphi_1(y) & \psi_1(y) \\ f_2(z) & \varphi_2(z) & \psi_2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \\ f_1'(y) & \varphi_1'(y) & \psi_1'(y) \\ f_2'(z) & \varphi_2'(z) & \psi_2'(z) \end{vmatrix}$$

4376 — Ache o ângulo do plano $Ax + By + Cz + D = 0$ e da recta $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$.

4377 — Considere o espaço a 5 dimensões, de referencial $O_0(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Em seguida tome os dois pontos $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,0,1,0)$. Escreva, depois, as equações paramétricas da recta que passa pelos dois pontos; e, finalmente, a partir daquelas equações paramétricas, escreva as equações não paramétricas.

4378 — Determine, para uma multiplicidade vectorial a 4 dimensões as equações da sub-multiplicidade definida pelos dois vectores $(1,1,0,1)$ e $(2,0,3,0)$.

4379 — Dada a série convergente de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, determine a natureza da série

$$\sum_{n=a}^{\infty}\left(u_n^2 + i\,u_n\sqrt{2-u_n}\right).$$

Enunciados dos números 4360 a 4379 de F. Almeida e Sá.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **1.º exame de frequência — (2.ª chamada) 1958.**

4380 — Considere dois pontos sobre uma recta de topo um dos quais sobre o segundo bissector. Fixe um terceiro ponto, no segundo bissector, de modo que os três pontos formem um triângulo equilátero no espaço (de preferência, sem LT).

4381 — Considere uma circunferência no plano vertical e uma recta. Determine um ponto de uma superfície gerada por uma recta móvel que encontre perpendicularmente a recta e encontre a circunferência.

4382 — Dado um grupo $\mathfrak{Y}$ defina um novo produto por $a\,|\,b = ab^{-1}$. Mostre que se obtem um grupo se e só se os elementos são de segunda ordem.

4383 — Mostre que, dado um grupo, a totalidade dos elementos de segunda ordem, se for um subgrupo, é invariante.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de Frequência — 1.ª Chamada — 11/1/57.**

4384 — Fracções contínuas: suas definição e periodicidade; tipos de periodicidade e teoremas relativos às fracções contínuas periódicas.

4385 — Exponha o conceito de medida dum conjunto e defina conjuntos mensuráveis.

4386 — Defina a operação de rotação num plano em cálculo vectorial e escreva a equação vectorial de um ponto, com base nessa operacão, em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares.

4387 — Dada a quádrica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy + x - 1 = 0$$

a) Mostre que tem uma recta de centros a distância infinita.

b) Determine o plano diametral conjugado com a direcção (1,3,5) e mostre que passa pela recta de centros.

c) Classifique a quádrica e escreva uma equação reduzida.

4388 — Prove que a função

$$y = \frac{(ax + b)}{(x^2 - 2Bx + C)}$$

sendo a, b, B, C constantes, converte em identidade a equação

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \cdot \frac{x^2 - 2Bx + C}{2} + 2(x - B)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Deduza desta relação que

$$\frac{x^2 - 2Bx + C}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{d^{n+2} y}{dx^2} + \frac{2(x-B)}{n+1} \cdot \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + \frac{d^n y}{dx^n} = 0 .$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de Frequência — 2.ª Chamada — 18/1/57.**

4389 — Defina conjuntos conexos e conjuntos perfeitos e enuncie as propriedades que respeitam aos conjuntos conexos.

4390 — Defina versor dum vector e indique a expressão dum vector em função do seu versor; vectores fundamentais: sua definição e aplicação à expressão de um vector e do produto externo de dois vectores.

4391 — Defina infinitamente pequeno e ordem dum infinitamente pequeno; escreva a expressão geral dum infinitamente pequeno de ordem n e defina a parte principal e parte complementar dum tal infinitamente pequeno.

4392 — Dada a quádrica

$$x^2 + y^2 = ax + myz \quad (a, m \neq 0)$$

a) Determine o plano tangente π na origem das coordenadas e a direcção do espaço cujo plano diametral conjugado em relação à quádrica é paralelo a π.

b) Classifique a quádrica e verifique que a sua natureza não depende dos parâmetros a e m.

Determine as geratrizes da superfície que passam pela origem, se existirem.

c) Haverá alguns valores dos parâmetros para os quais a superfície seja de revolução? Escreva uma equação reduzida da quádrica.

4393 — Dada a expressão diferencial

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y$$

mude as variáveis x, y em u, v, sabendo que as equações de ligação são

$$x = u^2 + v^2$$
$$y = u^2 - v^2$$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **Exame Final — I grupo — (2.ª chamada) — 24-6-57.**

4394 — Defina contacto de ordem n entre duas superfícies, deduza as condições analíticas para um tal contacto; defina conceito de osculação para a superfície e aplique-o ao caso de uma das superfícies ser um plano.

4395 — Escreva a equação vectorial das superfícies regradas, indique o significado das grandezas que nela figuram, defina superfícies empenadas e a sua linha de estrição e enuncie a lei de Charles que respeita a tais superfícies.

4396 — Indique como se calcula o volume de sólidos limitados por superfícies de revolução, deduzindo a fórmula correspondente; indique se conhece outros casos em que a aplicação do raciocínio empregado pode conduzir a simplificação do cálculo do volume de sólidos que neles se consideram.

4397 — Defina equações diferenciais simultâneas; indique como os sistemas de tais equações se podem obter a partir dum sistema dado de equações que contenha constantes arbitrárias. Considere o caso particular dum sistema de duas equacões diferenciais de 1.ª ordem e defina o seu sistema de I. G., sistemas de I. particulares e sistemas de I. singulares, quando existam.

4398 — Dada a curva de equação $y^3(2x - a) + a^2 x^2 - x^4 = 0$, onde a é uma constante, determine os seus pontos singulares com excepção dos seus pontos de inflexão.

4399 — Calcule $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$.

4400 — Calcule $\displaystyle\iint_A (y^2 + 2xy + x^2)\, dx\, dy$ onde A é o triângulo de vértices (1, 1), (2, 0), (0, 0) referidos ao sistema de eixos cartesianos ortogonais.

4401 — Ache todos os integrais da equação diferencial $2xy\,dx + (3y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final — 1.º Grupo — Junho 1958.**

4402 — Calcule

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)(x^2+1)}$$

4403 — Determine a solução geral da equação diferencial:

$$(1-x+y)\,dx+(x+1)\,dy=0\,.$$

4404 — Calcule o volume da região do espaço limitado pelas superfícies: $z=0\,,y=1\,,y=x^2\,,z=x^2+y^2\,.$

4405 — Determine as assíntotas de

$$x^4-x^2y^2+2x^2y+4y^2+3x=0\,.$$

4406 — Defina uma curva torsa num ponto e escreva nas formas vectorial ec artesiana as fórmulas de Frenet e Serret, indicando o significado das grandezas que nelas entram.

4407 — Escreva a equação vectorial das superfícies regradas e indique o significado das grandezas que nela figuram. Defina superfícies empenadas e sua linha de estrição. Enuncie a lei de Chasles a respeito de tais superfícies.

4408 — Defina contacto de ordem n entre 2 superfícies, escreva a condição analítica para tal contacto. Defina o conceito de osculação que lhe diz respeito e restricto ao caso duma das superfícies ser um plano.

4409 — Enuncie os tipos de equações diferenciais susceptíveis de abaixamento de ordem. Indique como se consegue o abaixamento de ordem nos dois tipos de equações homogéneas, aplicando os respectivos processos às equações de 2.ª ordem.

ANÁLISE MATEMÁTICA

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — **1.º Exame de Frequência — 27-3-57.**

4410 — Diga o que é a relação de inclusão entre conjuntos e quais as suas propriedades.

Quais são as sucessões monótonas e seus limites?

Defina classe aditiva de conjuntos. Porque é que os conjuntos de medida ($\mathcal{L}$) nula não constituem uma classe aditiva?

Defina espaço ($\mathcal{D}$) e prove que o espaço $\mathcal{R}_n$ é um espaço ($\mathcal{D}$).

Demonstre que o diâmetro dum conjunto limitado de $\mathcal{R}_1$ é a diferença entre os limites superior e inferior de Weierstrass.

4411 — Demonstre que uma função monótona limitada num intervalo finito é de variação limitada.

Defina integral no sentido de Lebesgne. Estabeleça a desigualdade de Schwarz.

Se $f(x)$ é limite duma sucessão $f_n(x)$ de funções definidas e uniformemente limitadas dum modo global num conjunto $\mathcal{C}$ nensurável, demonstre que:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x)\,dx=\lim_{n=\infty}\int_{\mathcal{C}} f_n(x)\,dx$$

Exprimindo a derivada $f'(x)$ como limite duma conveniente sucessão de funções, prove que a derivada duma função nensurável num intervalo finito é função nensurável e, portanto, integrável nesse intervalo.

4412 — Considere uma função vectorial de variável vectorial; defina diferença finita, considere-lhe as componentes diferenciáveis e defina a derivada.

O que é espaço produto de dois espaços cartesianos? Dê exemplos.

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — **Exame final — 1.ª chamada — 16-7-57.**

4413 — Estude a convergência do integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha x\,dx$$

R: *Tem-se*

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p \cos^\alpha x=$$

$$=\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^p \operatorname{sen}^\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$$

quando $p=\alpha$

Então, por definição de limite, vem

$$0<1-\delta<\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{p} \cos^{\alpha} x<1$$

quando $$\frac{\pi}{2}-\varepsilon \leqslant x<\frac{\pi}{2}$$

e daqui se tira, sucessivamente

$$\cos^{\alpha} x<\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{p}} \quad ,0<\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon'} \cos^{\alpha} x \, dx<$$

$$<\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon'} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{p}}$$

Mas, fixado aquele ε *e fazendo tender* ε' *para zero, tem-se a convergência do último integral, para limite finito, sempre que* $p<1$. *Conclui-se a convergência do integral proposto sempre que* $\alpha<1$.

4414 — Primitive a função

$$f(x)=\frac{\operatorname{artcg}\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}$$

R: *Primitivando por partes, vem:*

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+1)^2}\,dx=-\frac{\operatorname{artcg}\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}+$$

$$+\int \frac{1}{x+1}\cdot\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}}{1+x^2+2x-3}\,dx=-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}+$$

$$+\int \frac{dx}{(x^2+2x-2)\sqrt{x^2+2x-3}}\,.$$

A função integranda está definida em $(-\infty,3)$ *e* $(1,+\infty)$, *isto é, fora do intervalo fechado* $(-3,1)$ *dos zeros de* x^2+2x-3. *A primitiva que se procura será válida visto que os zeros de* $x+1$ *e de* x^2+2x-2, *caiem dentro do intervalo* $(-3,1)$.

Tem-se

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x-2)\sqrt{x^2+2x-3}}=$$

$$=\int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2-3]\sqrt{(x+1)^2-4}}=\int \frac{dt}{(t^2-3)\sqrt{t^2-4}}$$

A substituição indicada por $\sqrt{t^2-4}=(t+2)\,u$, *ou melhor:* $t=\frac{2(1+u^2)}{1-u^2}$ *e cuja derivada é* $\frac{dt}{du}=8\frac{u}{(1-u^2)^2}$ *é decrescente em* $(-\infty,0)$ *e crescente em* $(0,+\infty)$; *admite duas inversas, perfeitamente definidas em* $(-\infty,-2)$ *e* $(2,+\infty)$; *há, por tanto, uma inversa fora do intervalo* $(-3,1)$ *onde se procura a primitiva. Efectuada a substituição, vem*

$$\int \frac{dt}{(t^2-3)\sqrt{t^2-4}}=$$

$$=\int \frac{8\frac{u}{(1-u^2)^2}du}{\left[4\frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2}-3\right]\left[2\frac{1+u^2}{1-u^2}+2\right]u}=$$

$$=\int \frac{8(1-u^2)\,du}{[4(1+u^2)^2-3(1-u^2)^2]\,[2(1+u^2)+2(1-u^2)]}=$$

$$=\int \frac{2(1-u^2)\,du}{[2(1+u^2)-\sqrt{3}(1-u^2)]\,[2(1+u^2)+\sqrt{3}(1-u^2)]}=$$

$$=\int \frac{2(1-u^2)\,du}{(a+bu^2)\,(b+au^2)}$$

onde se pôs $a=2-\sqrt{3}$ e $b=2+\sqrt{3}$. *O método dos coeficientes indeterminados é aconselhável para obter a decomposição em duas fracções; deve notar-se que a fracção a decompor não se altera mudando* u *em* $-u$; *vem*

$$\int \frac{2(1-u^2)\,du}{(a+bu^2)\,(b+au^2)}=\int \frac{M_1\,du}{a+bu^2}+\int \frac{M_2\,du}{b+au^2}$$

onde

$$M_1=\frac{2}{a+b}=\frac{1}{2} \quad e \quad M_2=\frac{2}{a-b}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Em seguida, vem

$$\int \frac{M_1\,du}{a+bu^2}=\frac{M_1}{\sqrt{a\,.\,b}}\int \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\,du}{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,u\right)^2};$$

$$\int \frac{M_2\,du}{b+au^2}=\frac{M_2}{\sqrt{a\cdot b}}\int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,du}{1+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\,u\right)^2}$$

e portanto

$$\int \frac{2\,(1-u^2)\,du}{(a+b\,u^2)\,(b+a\,u^2)} = \frac{M_1}{\sqrt{a\cdot b}}\, arctg \sqrt{\frac{b}{a}}\, u + $$
$$+ \frac{M_2}{\sqrt{a\cdot b}}\, arctg \sqrt{\frac{a}{b}}\, u\,.$$

Finalmente

$$\int \frac{arctg\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{arctg\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} +$$
$$+\frac{1}{2}\, arctg\,(2+\sqrt{3})\,\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+3} +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\,(2-\sqrt{3})\,\frac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+3} + C\,.$$

4415 — Calcule $\int_\Gamma x\,dy$ sendo Γ a fronteira do domínio limitado por

$$x^2+y^2=R^2\,,\; x^2+y^2=r^2\,,\; y=m_1\,x\,,\; y=m_2\,x$$
$$(R>r\,;\; m_1>m_2>0)\,.$$

Interprete geomètricamente o valor de $\int_\Gamma x\,dy$, com o auxílio das fórmulas de Riemann.

R: *O domínio de que se fala no enunciado é formado por duas regiões simètricamente dispostas em relação à origem, determinadas pelas duas rectas na corôa circular; a curva* Γ *decompõe-se em dois circuitos fechados e, se um ponto* $P\,(x\,,y)$ *descreve no sentido directo o que está no 1.º quadrante, o simétrico* $P'\,(-x\,,-y)$ *descreverá no sentido directo o do 3.º quadrante; o produto* $x\,dy$ *tem o mesmo sinal sobre os dois circuitos e, deduz-se que*

$$\int_\Gamma x\,dy = 2\int_{\Gamma'} x\,dy$$

onde Γ' *é o circuito fechado do 1.º quadrante. Posto isto, tem-se*

$$\int_{\Gamma'} x\,dy = \int_{\frac{m_1 R}{+\sqrt{m_1^2+1}}}^{\frac{m_1 r}{+\sqrt{m_1^2+1}}} \frac{y}{m_1}\,dy + \int_{arctg\,m_1}^{arctg\,m_2} r^2\cdot cos^2\,\alpha\cdot d\,\alpha +$$
$$+\int_{\frac{m_2 r}{+\sqrt{m_2^2+1}}}^{\frac{m_2 R}{+\sqrt{m_2^2+1}}} \frac{y}{m_2}\,dy + \int_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1} R^2\cdot cos^2\,\alpha\cdot d\,\alpha =$$
$$=\frac{1}{2\,m_1}\left[\frac{m_1^2\,r^2}{1+m_1^2}-\frac{m_1^2\,R^2}{1+m_1^2}\right]+\frac{1}{2\,m_2}\left[\frac{m_2^2\,R^2}{1+m_2^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{m_2^2\,r^2}{1+m_2^2}\right] + (R^2-r^2)\int_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1} cos^2\,\alpha\cdot d\,\alpha =$$
$$=\frac{1}{2}\,(R^2-r^2)\left[\frac{m_2}{1+m_2^2}-\frac{m_1}{1+m_1^2}\right]+$$
$$+(R^2-r^2)\int_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1}\frac{1+cos\,2\,\alpha}{2}\,d\,\alpha =$$
$$=\frac{1}{2}\,(R^2-r^2)\left[\frac{m_2}{1+m_2^2}-\frac{m_1}{1+m_1^2}\right]+$$
$$+\frac{(R^2-r^2)}{2}\left[arctg\,m_1-arctg\,m_2+\frac{1}{2}\,(sen\,2\,\alpha)_{arctg\,m_2}^{arctg\,m_1}\right]$$

Notando que os arcos α_1 *e* α_2 *cujas tangentes são* m_1 *e* m_2 *pertencem ao 1.º quadrante e, notando ainda que se* $m=tg\,\alpha$, *se tem* $\frac{1}{1+m^2}=cos^2\,\alpha$, $\frac{m^2}{1+m^2}=sen^2\,\alpha$,

vem

$$\frac{1}{4}\Big[sen\,2\,\alpha\Big]_{\alpha_2}^{\alpha_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{m_1}{1+m_1^2}-\frac{m_2}{1+m_2^2}\right]$$

Resulta, então

$$\int_{\Gamma'} x\,dy = \frac{1}{2}\,(R^2-r^2)\,[arctg\,m_1-arctg\,m_2]\,.$$

4406 — Calcular os máximos e mínimos da função $x\,(y\,,z)$ definida por

$$x^2+y^2+z^2-2\,x-4\,y+2\,z+5=0\,.$$

R: *Para a função* $x\,(y\,,z)$ *ter extremo deverá anular-se a matriz iacobiana*

$$J=\left[\frac{\partial x}{\partial y}\;\frac{\partial x}{\partial z}\right].$$

Supondo que a equação dada define $x(y,z)$, *derivando parcialmente em ordem a* y (x *dependente*, y *e* z *independentes*), *vem:*

$$2x\frac{\partial x}{\partial z}+2z-2\frac{\partial x}{\partial z}+2=0 \quad \textit{donde} \quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{z+1}{x-1}.$$

A equação define $x(y,z)$ *em todo o ponto* $P(0,b,c)$ *onde* $x-1\neq 0$; *o valor da função é dado por* $x^2+b^2+c^2-2x-4b+2c+5=0$; *são, portanto duas as funções* $x(y,z)$ *de que se procuram os extremos.*

Para qualquer das funções $x(y,z)$ *definidas implicitamente pela equação é nula a matriz iacobiana em* $y=2, z=-1$. *Neste ponto as funções têm valores distintos* $(x^2+4+1-2x-8-2+5=0)$.

$$x_1(2,-1)=0 \qquad x_2(2,-1)=2$$

e ambos estes valores, não anulam $x-1$. *As matrizes hesseanas*

$$H_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y\,\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}\end{bmatrix} \qquad H_2=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y\,\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}\end{bmatrix},$$

devido aos valores

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{-(x-1)-(2-y)\dfrac{\partial x}{\partial y}}{(x-1)^2}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}=1\\[2mm] \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial y^2}=-1\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z}=0 \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=-\frac{x-1-(z+1)\dfrac{\partial x}{\partial z}}{(x-1)^2}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}=1\\[2mm] \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}=-1\end{cases}$$

transformam-se em

$$H_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad H_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

Para a função $x_1(y,z)$ *tem-se no ponto* $(2,-1)$ $d_H x_1=0$, $d_H^2 x_1=H\,H_1\,H^*>0$.

Para a função $x_2(y,z)$ *tem-se:* $d_H x_2=0$, $d_H^2 x_2=H\,H_2\,H^*<0$.

A função x_1 *tem em* $(2,-1)$ *um mínimo igual a zero.*
A função x_2 *tem em* $(2,-1)$ *um máximo igual a dois.*
A confirmar estes resultados, tem-se:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4+(z^2+2z+1)-1+5=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2-1=0.$$

A equação dada representa uma esfera de raio um e centro em $(1,2-1)$.

As funções $x_1(y,z)$ *e* $x_2(y,z)$ *são relativas ás duas semi-esferas que se obtêm com o plano* $x-1=0$; *elas estão definidas no interior do circulo* $(y-2)^2+(z+1)^2=1$. *A função* $x_1(y,z)$ *cuja imagem é a semi-esfera da esquerda, tem mínimo igual a zero, no centro do seu domínio; a função* $x_2(y,z)$ *tem o máximo no mesmo ponto.*

CRÍTICA DE LIVROS

O livro único de Algebra — 3.º ciclo

A aprovação, como livro único, do *Compêndio de Álgebra* da autoria de J. Sebastião e Silva e J. D. da Silva Paulo é, em meu entender, um facto de tal interesse para a vida escolar liceal que a Gazeta de Matemática não pode deixar de assinalar a sua importância.

Quis o acaso que fosse eu o primeiro colaborador desta revista a referir-se ao *Compêndio.* Noto, de passagem, esta circunstância, para recordar que fui eu também quem se encarregou, dentro da Gazeta de Matemática, da crítica ao livro único que precedeu este no exercício das suas funções. Fiel a uma posição que, então como agora, procura o máximo de independência, é com muito gosto que felicito os Autores e os Juízes desta obra, em contrastante atitude, com a outra que tomei, há anos, nas condições já recordadas.

É minha intenção publicar, nestas páginas, uma análise da segunda parte do Compêndio. Neste número, vou referir-me apenas à primeira parte, relativa ao programa do 6.º ano; de resto, é este o sector em que mais vivamente se fazia sentir a necessidade de um bom livro de texto, já porque alguns dos seus assuntos são delicados e fundamentais já porque nada existia em livros didácticos portugueses, ao nível liceal, que pudesse considerar-se satisfatório.

Ainda antes de ser tomada uma decisão oficial, escrevi um comentário crítico que se restringiu também ao primeiro volume. Esse comentário foi publicado há pouco no boletim de um colégio onde sou professor (*). Porque, de então para cá, não reconheci necessidade de qualquer alteração ao trabalho realizado, limitar-me-ei, por agora, a fazer a transcrição quase total desse comentário.

«A debilidade da nossa literatura didáctica, que corresponde talvez à pobreza da nossa cultura universitária (salvo uma ou outra excepção de universitários cultos, poder-se-à falar de cultura universitária em Portugal?) faz com que inicie geralmente a leitura de qualquer compêndio em atitude de desconfiança e cepticismo e quase sempre verifico, *à posteriori*, a exactidão da atitude preconcebida. Com o livro presente não se passou o mesmo, porque a categoria dos autores e o conhecimento que deles já tinha como professores eram suficiente garantia de autenticidade e seriedade do seu trabalho: o Prof. Sebastião e Silva, cuja obra matemática ultrapassa as fronteiras do nosso país, pois, além doutras importantes contribuições no *front* da actual investigação matemática, liga o seu nome à construção da moderníssima *Teoria das Distribuições* e, a par da sua intervenção nos domínios da criação científica, tem lutado por uma actualização sensata mas progressiva do Ensino da Matemática em Portugal; e J. D. da Silva Paulo que, entre outras actividades, pode orgulhar-se de ser co-autor de uma *Aritmética Racional* que marca tambem uma época nas nossas publicações liceais e de ser um dos fundadores da *Gazeta de Matemática* à qual sempre tem prestado interessante colaboração.

Foi portanto com fortes razões de simpatia que me aproximei desta obra. De modo algum fiquei desiludido ao acabar a sua leitura: pelo contrário, posso afirmar que este livro ultrapassou toda a espectativa. Na verdade, nele se aliam uma exposição rigorosa, isenta de quaisquer deficiências doutrinárias, e qualidades de clareza e simplicidade que tornam a leitura mais que sugestiva e atraente, porque, por vezes, merece o qualificativo «aliciante» (cito, por exemplo, algumas das notas de introdução aos diferentes capítulos e todas as notas históricas contidas no volume).

* * *

Seguindo a ordem dos programas, o livro abre com um capítulo referente à *Evolução do conceito de número*. Os autores, numa exposição coerente e clara, utilizam fundamentalmente o princípio de conservação das regras de cálculo. É particularmente interessante, de um ponto de vista elementar, o estudo dos números irracionais através das dízimas, o que permitiu uma ligeira mas utilíssima introdução à técnica de cálculo numérico aproximado, de que no fim do capítulo há exemplos propostos, bastante elucidativos. Relativamente a este assunto apenas me ocorre uma observação: por que razão os Autores, a par da demonstração de que «as dízimas infinitas que representam números racionais são sempre periódicas», não fizeram a demonstração da proposição recíproca?

Tratava-se apenas de uma aplicação curiosa e simples da noção de limite de uma sucessão e, desta forma, o corpo de doutrina relativo às dízimas ficaria mais consistente.

O Capítulo 2.º — *Números complexos* — mantém o alto nível da exposição. Embora, em um outro passo, se torne menos fácil a compreensão de certas ideias, não pode escapar ao leitor atento a preocupação de estabelecer um todo coerente. E, como sempre, os Autores atingem o objectivo. Impõe-se, no entanto, uma pergunta: para que deixar reservada ao 2.º volume (7.º ano) a demonstração de que «todo o número complexo não nulo tem duas e só duas raízes quadradas»? Se não houve outras razões que não fossem a de evitar a resolução de uma equação biquadrada, podia ter-se seguido o critério da pág. 84, onde se considera a equação biquadrada como caso especial de uma equação do 2.º grau. Desta maneira, o assunto ficava definitivamente arrumado no lugar mais indicado para o fazer.

O capítulo 3.º — *Funções reais de variável real* — é admirável. Entre outros aspectos interessantes saliento a distinção estabelecida entre a classificação de expressões analíticas e a de funções e o paralelismo apontado com o que se passa no domínio numérico. Que diferença entre tudo isto e aquilo a que estávamos habituados!

O mesmo podemos afirmar quanto ao capítulo 4.º — *limites de sucessões* —, em que o rigor, a clareza e a sobriedade são características de tal modo evidentes que tornam pouco possível melhor realização. Além de tudo, o capítulo apresenta no final um conjunto de questões propostas que muito esclarecem a matéria nele versada.

O capítulo 5.º — *limites de funções de variável real* — é também um modelo do que pode e deve fazer-se, a este respeito, no ensino liceal. Abandona-se, inteiramente, a definição de limite segundo Cauchy, através do jogo de $\delta\delta$ e $\varepsilon\varepsilon$ e utiliza-se, por sistema, a orientação de Heine que recorre apenas às sucessões. Foi pena que o texto não incluísse a resolução de questões do tipo de algumas das propostas no final (por ex., as questões 15 e 16), o que tornava mais completa a compreensão das noções apresentadas.

O capítulo 6.º — *Funções contínuas* — é curto mas

(*) Boletim da Academia Cultural de João de Deus, n.º 38, Março de 1958.

incisivo. Parece-me, apesar de tudo, que uma exemplificação mais vasta, mesmo através de funções definidas gràficamente, podia alargar o alcance da exposição.

O capítulo 7.º — *Derivadas* — , que começa por uma introdução claríssima, é exposto com todo o cuidado. Em particular, é de assinalar a distinção feita entre o que é consequência lógica de princípios e o que se admite, sem demonstração (**) por considerações de ordem intuitiva. Quero destacar também o interesse posto em relacionar a doutrina do capítulo com questões de Cinemática que, salvo erro, são estudadas, em Física, no próprio 6.º ano.

Passando ao capítulo 8.º — *Polinómios numa variável* — , verifiquei que está exposto na justa medida do que pode interessar a alunos do ensino liceal. Uma vez que foi posto de lado o caso da existência de raízes múltiplas, quase todas as demonstrações assumem um carácter de extrema simplicidade. Impunha-se, no entanto, uma referência às raízes múltiplas que é feita só na 2.ª edição da obra mas através de uma nota pertinente.

O livro termina com o estudo de *Fracções algébricas*. Neste capítulo, depois de uma breve mas rigorosa exposição sobre o que há de essencial em cálculo operatório, é dada uma lição magistral referente a símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação.

Podem alunos e professores do ensino liceal considerar-se de parabéns por terem ao seu alcance uma obra magnífica que muito deve ajudar uns e outros. Oxalá todos saibamos aproveitá-la!»

Laureano Barros

(**) Os Autores não deixam, evidentemente, de se referir à possibilidade de demonstração rigorosa em estudos superiores.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

123 — Carl B. Boyer — **History of Analytic Geometry** — *The Scripta Mathematica Studies* — n.ºs 6/7 — *Scripta Mathematica*. New York, 1956.

Em qualquer obra dedicada à História da Matemática, necessàriamente se faz referência à Geometria Analítica; em especial, determinados trabalhos destinam-se particularmente a aspectos bem definidos de alguns capítulos ou ramos da Matemática. O desenvolvimento histórico da Geometria Analítica, considerado como um todo, apenas, porém, por duas vezes foi encarado: de ambas as vezes por Gino Loria e em revistas de matemática — em 1923 nos *Memorie dei Lincei* e em 1942-45 na revista romena *Mathematica*.

Devemos no entanto dar relevo especial à obra do nosso Gomes Teixeira, premiada em 1899 pela Academia das Ciências de Madrid, publicada em 1905 em espanhol e mais tarde em 2.ª edição, muito aumentada, em francês, integrada nas suas *Obras sobre Mathematica: Tratado das Curvas Especiais Notáveis*.

Aqui, diz Gomes Teixeira, «comme dans l'édition précédente nous étudions la forme, la construction, la rectification et la quadrature, les propriétés et l'histoire de chaque courbe»; aqui, o nosso compatriota atinge grau de notável desenvolvimento no que respeita a qualquer dos aspectos a que atrás faz referência. Parece portanto justo classificar-se a obra de Gomes Teixeira como uma enciclopédia das curvas planas e torsas que, no que respeita à parte histórica, contribui notàvelmente para o conhecimento da evolução e desenvolvimento dos métodos da análise matemática no estudo das curvas.

Presentemente a Scripta Mathematica nas suas publicações «Studies» inclui uma obra do Prof. Boyer que nos parece notàvelmente original pelo seu objectivo bem definido — História da Geometria Analítica.

No seu livro, o Prof. Boyer começa por dizer que a origem da associação de relações numéricas com configurações espaciais é pré-histórica e encontra para justificá-lo as primeiras contribuições na ciência do Egipto, Caldea, China, Índia, etc.

Toda a matemática grega está impregnada da ideia da equivalência — configuração geométrica ~ relação numérica — e tal facto está largamente explorado pelo Autor em dois capítulos com cerca de 40 págs. — Cap. I — As primeiras contribuições, cap. I — A idade Alexandrina.

Mas é pròpriamente com o despontar da Idade Moderna que a Geometria Analítica toma corpo de doutrina; e o Autor da presente obra é na realidade exaustivo ao analisar cinco séculos de desenvolvimento e evolução dum ramo de ciência riquíssima em aspectos, perspectivas e aplicações, como é a Matemática.

No Cap. III (12 págs), procura nas civilizações árabe, bizantina e industânica as origens das ideias e obras dos primeiros anos do período moderno

(Cap. IV, 20 págs.). Como portugueses lamentamos sinceramente que a obra de PEDRO NUNES seja tão pouco conhecida e que no caso presente só de relance e, referindo-se nomeadamente a BERNOULLI o Autor tenha escrito: (DÜRER) «introduced the idea of an asymptotic point and illustrated it by a curve strongly resembling the logaritmic spiral. This curve, later made famous by JACQUES BERNOULLI, may have been suggested by the revived interest at the time in map construction; it is the plane stereographic projection of the loxodrome on the sphere, and the latter was studied in 1530 by NÚÑEZ (1502-1578)». Atribuimos o nome escrito em espanhol ao facto de a sua última obra, *Livro de Álgebra,* ter sido publicada em língua castelhana em 1567; obra que convinha, por seu lado, considerar em particular pela profunda influência que teve no pleno desabrochar da Geometria Analítica.

Os trabalhos de FERMAT e DESCARTES merecem ao Autor no Cap. V e em 30 págs. longas considerações e análise pormenorizada de conceitos originais e críticas actuais aos mesmos conceitos.

As reacções de certos matemáticos do século XVII à nova geometria só lhe vem dar força e apoio — Cap. VI (35 págs) e os métodos da Análise desde o cálculo integral de NEWTON e LEIBNIZ até a representação paramétrica das curvas, sistematizada por EULER, são largamente comentadas nas suas relações com a Geometria Analítica — Cap. VII (55 págs). No Cap. VI faz-se referência, em nota de fim de página à obra atrás citada de GOMES TEIXEIRA.

O Autor termina o livro com dois capítulos — VIII — A formulação definitiva (32 págs.) e IX — A idade de Ouro (43 págs.).

Estas 75 páginas são bem aproveitadas com a análise minuciosa das ideias e conceitos que surgiram e se desenvolveram durante dois séculos, desde d'ALEMBERT até os nossos dias.

Consideramos que em qualquer descrição histórica da evolução de uma ciência, nomeadamente da Matemática, o expositor deve dar o devido relevo que a influência do ambiente da vida social exerce em cada momento sobre as ideias criadoras, e consequente evolução da mesma Ciência. O Autor parece partilhar das mesmas considerações, ou pelo menos afirma não desconhecer que haja quem as defenda; no entanto «a esta regra geral parece haver várias excepções» diz, «and the discovery of analytic geometry certainly seems to be one of the exceptions». Permitimo-nos discordar. O completo historiador é aquele que, além do mais, consegue descobrir as causas de origem social dos fenómenos históricos. Neste ponto portanto consideramos que a obra não atinge o seu objectivo histórico. No resto, porém, pensamos que se trata de trabalho de excepcional valor tanto na descrição das relações dos diversos estados da Geometria Analítica em relação com os restantes ramos da Matemática como pela extensa bibliografia apresentada no fim do volume. É portanto obra que recomendamos vivamente a todo o estudioso da Matemática e julgamos necessária em qualquer biblioteca pública.

J. G. T.

124 — J. CHINTSCHIN — Mathematische grundlagen der Quantenstatistik — Akademie Verlag — Berlin.

Nesta obra encontra o leitor uma fundamentação rigorosa da Mecânica Estatística Quântica mediante a utilização de resultados relativamente recentes obtidos por GNEDENKO e seus colaboradores no domínio do Cálculo das Probabilidades.

O primeiro capítulo destina-se precisamente a expor aqueles resultados refundidos, porém, no sentido da sua imediata aplicação à estatística quântica, o que lhe confere interesse próprio mesmo do ponto de vista do especialista da teoria das probabilidades. Concretamente, são estabelecidos, usando o método das funções características, teoremas que esclarecem o comportamento assintótico, em certas condições, da lei de distribuição de uma soma de n variáveis casuais inteiras. Os conhecimentos pressupostos são os que constam de qualquer curso normal de Cálculo das Probabilidades.

No segundo capítulo faz o autor uma exposição muito clara da problemática formal da Mecânica Quântica, que contudo não dispensa o leitor de um mínimo de familiarização com o assunto.

No terceiro capítulo é que se expõe o objecto e o método da estatística quântica. Se, do ponto de vista fenomenológico (não estatístico) um sistema físico se encontra num estado perfeitamente definido (pelos valores de um certo número, em geral pequeno, de parâmetros), já do ponto de vista estatístico esse estado encobre na realidade toda uma infinidade de estados diferentes, todos compatíveis com os valores daqueles parâmetros. Ora, uma grandeza qualquer relativa ao sistema deverá ter, na teoria fenomenológica, um valor perfeitamente determinado (função dos valores dos referidos parâmetros); ao passo que na teoria estatística terá valores que diferem de um para outro daqueles estados. É aqui que se põe o problema que o autor chama da *representabilidade do valor médio* e que é um verdadeiro problema de Física Matemática. Consiste este problema em construir por via puramente teórica uma média tal dos valores da grandeza que, com probabilidade próxima da unidade, ela coincida — ou quase coincida — com o valor previsto pela teoria fenomenológica.

Seja $U_1, U_2, \ldots, U_m$ um sistema ortonormal completo de funções próprias do operador L da energia, correspondente a um dado valor desta (quer dizer, a um certo estado estacionário do sistema). O autor define como *valor médio microcanónico* da grandeza A, a que corresponde um operador $\mathcal{A}$, a média aritmética das esperanças matemáticas $(\mathcal{A} U_k, U_k)$ da grandeza nos diferentes estados U_k:

$$\overline{A} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (\mathcal{A} U_k, U_k) .$$

Tratando-se de um sistema submetido a uma estatística simétrica ou anti-simétrica, as funções U_k serão correspondentemente apenas funções simétricas ou apenas anti-simétricas.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo exaustivo da estatística dos fotões e culmina no estabelecimento da fórmula de Planck para a distribuição da energia do espectro do corpo negro.

A estatística das partículas materiais é abordada no capítulo seguinte. Embora o método seguido seja o mesmo da estatística dos fotões, a situação é aqui mais complexa, sobretudo porque no caso do sistema de fotões dotado de certa energia se dá a circunstância simplificadora de não ser constante o número de fotões.

No último capítulo é dada a definição de entropia e estabelece-se o segundo princípio da Termodinâmica.

Quanto à forma como a obra é escrita há que salientar não só a clareza da exposição pròpriamente matemática de um assunto que de sua natureza não é fácil, como também, e principalmente, a análise profunda que o autor faz de todas as ideias que são postas em jogo. Trata-se enfim de um verdadeiro livro de Física Matemática, na acepção clássica desta expressão.

J. J. Dionísio

125 — R. Risser e C. E. Traynard — **Les Principes de la Statistique Mathématique** — Livre II — XII + 418 págs., 7000 frs. — Gauthier-Villars, Paris, 1958.

Neste segundo volume completam os autores, com a exposição das teorias da correlação e das séries cronológicas, a sua «vue d'ensemble» da Estatística Matemática.

Se é importante para o investigador a redução de um conjunto de observações a um restrito número de características matemática ou empìricamente tratáveis — matéria de que se ocupava o primeiro volume — não o é menos a pesquisa de relações de dependência que possam apontar o caminho do esclarecimento das causas dos fenómenos. O instrumento estatístico adequado é a teoria da correlação, que nesta obra se acha exposta nos seis capítulos que constituem as duas primeiras partes.

Além dos assuntos costumados, abordam-se numerosas noções e alfaias especializadas que não se encontram correntemente na literatura anglo-saxónica, notando-se ao mesmo tempo uma simpática preocupação nacionalista em «descobrir» precursores gauleses na introdução de um ou outro conceito... Excitou particularmente o nosso interesse o capítulo em que se critica o coeficiente de correlação e se propõem as condições a que deve satisfazer um bom índice de correlação, referindo-se os índices de Gini e de Jordan e uma classe geral de índices devida a Fréchet. É pena, porém, que se não aflore sequer o importante problema da distribuição desses índices, sem a qual não é possível ajuizar a significância dos valores obtidos na prática.

Na terceira parte da obra, que ocupa cerca de metade da sua extensão, estudam-se as séries cronológicas, encarando-se como habitualmente as suas características gerais, as flutuações sasonárias, a investigação das ligações entre termos sucessivos das séries (autocorrelação) e a análise harmónica. É assunto que interessa especialmente aos economistas, embora eventualmente encontre aplicação em ramos fora da sua alçada, como a meteorologia.

Sobre a qualidade da exposição podem fazer-se os mesmos reparos que se aplicaram ao primeiro volume (Gazeta de Matemática, N.º 66-67): discutível sistematização dos assuntos, fraca insistência nos conceitos estatísticos à custa de excessiva proeminência para os desenvolvimentos matemáticos, ausência quase completa de exemplos de aplicação.

Não é, decididamente, livro que sirva aos principiantes, ainda que providos de larga bagagem matemática; mas também não parece que possa ser muito útil aos especialistas, pelo menos como obra de referência.

M. A. Fernandes Costa

Por absoluta falta de espaço não foi possível incluir no presente número as críticas às obras seguintes:

Wilhelm Specht — *Elementare Beweise der Primzahlsätze* — 78 págs. — Deutsche Verlag der Wissenschaften — Berlin, 1956.

Iwanenko-Sokolow — *Klassische Feldtheorie* — 348 págs. — Akademie Verlag — Berlin, 1953.

Lancelot-Hogben — *Statistical Theory* — George Allen and Unwin, Ltd. — London.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1958 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1957, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática.* Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 a 71 cada número simples	17$50
N.os 51 a 71 » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telefone 77 19 43