GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XX **N.° 74-75** MARÇO-JUNHO 1959

SUMÁRIO

DEPOSITARIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 29449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 29449 — LISBOA-2.

ANO XX — N.º 74-75 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO/JUNHO — 1959

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 29449 — LISBOA 2

A definição de entropia em cálculo das probabilidades

por **J. J. Dionísio**

O propósito deste artigo é expor como se introduz no Cálculo das Probabilidades o conceito de entropia. Colocar-nos-emos naturalmente no caso mais simples das distribuições discretas e a isso se limitarão as nossas considerações. Seguiremos para o efeito a primeira das memórias de A. I. Khinchin editadas pela casa Dover de Nova York sob o título *Mathematical Foundations of Information Theory*, editadas também em Berlim (Deutscher Verlag der Wissenschaften) acompanhadas de trabalhos de outros autores, sob a epígrafe *Arbeiten zur Informationstheorie.*

Suponhamos que o resultado de uma experiência A, em lugar de ser perfeitamente determinado, comporta certo número n de modalidades, a designar por $A_1, \cdots, A_n$. Suponhamos mais que uma das modalidades se produz com certeza (cada vez que se realiza a experiência) e que, além disso, uma só tem lugar, o que quer dizer que as n modalidades são *incompatíveis* duas a duas.

Sendo possível prescrever aos acontecimentos $A_1, \cdots, A_n$ probabilidades $p_1, \cdots, p_n$, respectivamente, tem-se nas condições anteriores

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Dizemos então que A é um *sistema completo de acontecimentos* e escrevemos

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_n \\ p_1 \cdots p_n \end{pmatrix}$$

Assim, no lançamento de um dado homogéneo, o aparecimento A_1 de um número de pontos igual ou inferior a 4 e o acontecimento contrário A_2 (aparecimento de 5 ou 6 pontos) constituem um sistema completo A, tendo-se

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

pois que é $\frac{2}{3} = 4 \times \frac{1}{6}$ a probabilidade de surgir qualquer das faces com 1, 2, 3 ou 4 pontos e $\frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{3}$ a probabilidade de A_2.

Como o resultado da realização da experiência A não é univocamente determinado, segue-se que a cada sistema completo de $n > 1$ acontecimentos anda ligada uma *indeterminação* ou *incerteza* quanto ao resultado de uma experência que venha a efectuar-se. E por outro lado, uma vez realizada esta, o que era incerteza é agora *informação* — o saber-se qual a modalidade que teve lugar. E compreende-se que, quanto maior a incerteza inicial, mais ampla a informação final.

Ao sistema

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pode dizer-se que corresponde uma incerteza nula, já que o resultado é unìvocamente determinado; e por isso mesmo é nula a informação obtida, pois conhecíamos de antemão esse mesmo resultado.

Dos sistemas

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}97 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

é evidente que corresponde ao primeiro uma incerteza *menor* do que aquela contida no segundo: é quase certo que A aparece sob a forma A_3 (97 vezes em cada 100) ao passo que é igualmente provável o realizar-se B sob a forma B_1 ou sob a forma B_2.

Ora o que se pretende é justamente examinar a possibilidade de definir por cada sistema completo de acontecimentos A uma função $H(A)$ que de algum modo se comporte como a *medida da sua indeterminação* ou, que é o mesmo, como a *medida da informação* em que se traduz a realização de cada experiência.

A expressão analítica da função $H(A)$ dependerá, é claro, das variáveis $p_1, \cdots, p_n$ e só dependerá destas, uma vez que os valores que elas tomem em cada caso definem completamente o sistema A do ponto de vista probabilístico.

E a exigência de que a função

$$H(A) = H(p_1, p_2, \cdots p_n)$$

satisfaça o requisito anterior — medir a indeterminação ou a informação contida no sistema — pode reformular-se de uma maneira mais concreta através de certas propriedades a que ela deverá obedecer.

Quais sejam algumas dessas propriedades não é difícil descortinar.

Primeira. Se algum p_k iguala a unidade, o que obriga ao anulamento dos restantes, deve ter-se

$$H(A) = 0$$

porquanto não subsiste indeterminação alguma em tal hipótese, como já observámos.

Segunda. H deve ser uma função simétrica das n variáveis $p_1, \cdots, p_n$ de que depende. Quer dizer, efectuada uma permutação qualquer de $p_1, \cdots, p_n$ na expressão analítica de H, não deve esta alterar-se.

Tal exigência decorre tão sòmente de que na consideração de A é imaterial a ordem por que se enumerem as respectivas modalidades $A_1, \cdots, A_n$.

Terceira. H deve atingir um valor máximo quando as variáveis tomam todas o mesmo valor

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n$$

o qual será $\dfrac{1}{n}$, dado que é $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Por outras palavras,

$$H\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$$

deverá ser o máximo valor de H.

Já observámos, com efeito, que a incerteza é máxima quando todos os acontecimentos $A_1, \cdots, A_n$ são igualmente prováveis.

Quarta. Consideremos dois sistemas completos de acontecimentos

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_m \\ p_1 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_n \\ q_1 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$$

e suponhamos que eles são *independentes,* isto é, que a realização de cada A_k não predispõe absolutamente para a realização de nenhum B_r, e recìprocamente.

A partir de A e B construamos um novo sistema completo de $m \times n$ acontecimentos

$$C = (A \text{ e } B) = \begin{pmatrix} A_1 \text{ e } B_1 & A_1 \text{ e } B_2 \cdots A_m \text{ e } B_n \\ r_{11} \qquad r_{12} & r_{mn} \end{pmatrix}$$

A independência de A e B traduz-se em

$$r_{ij} = p_i q_j$$

pelo que, na verdade,

$$\sum_{ij} r_{ij} = \sum_{ij} p_i q_j = \sum_i p_i \sum_j q_j = 1$$

A experiência C consiste na realização das experiências A e B e cada modalidade de C não é mais do que um resultado de A com outro de B:

$$C_{ij} = (A_i \text{ e } B_j)$$

Posto isto, impomos à função H a condição

(1) $$H(A \text{ e } B) = H(A) + H(B)$$

a qual significa que a informação contida em C é a *soma* das informações contidas em A e B.

Se A e B não fossem independentes, se estivéssemos, por exemplo, perante a situação extrema

$$m = n, A_i \text{ implica } B_i (i = 1, \cdots, n)$$

então é evidente que a realização de B, quando precedida da realização de A, não comportaria informação alguma: seria em tal caso $H(A \text{ e } B) = H(A)$.

É absolutamente natural a imposição à função H das quatro propriedades acima descritas. Passamos a verificar que elas são satisfeitas pela função

(2) $$H(p_1, \cdots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k .$$

Reconhece-se logo que ela se anula sempre que algum p_k iguale a unidade (ficando por conseguinte nulos os restantes p_k; toma-se $0 \log 0 = 0$).

A simetria da função (2) também é evidente.

Verifiquemos a quarta propriedade. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned} H(A \text{ e } B) &= -\sum_{ij} r_{ij} \log r_{ij} \\ &= -\sum_{ij} p_i q_j \log (p_i q_j) \\ &= -\sum_{ij} p_i q_j (\log p_i + \log q_j) \\ &= -\Big(\sum_j q_j\Big) \sum_i p_i \log p_i - \Big(\sum_i p_i\Big) \sum_j q_j \log q_j \\ &= H(A) + H(B) \end{aligned}$$

Veremos até, dentro em pouco, que a função (2) obedece a uma lei de que esta quarta propriedade é apenas um caso particular — o da independência de A e B.

Com este fim e também com o de verificarmos a terceira propriedade, teremos necessidade de utilizar uma desigualdade que é satisfeita por todas as funções $f(x)$ que *admitem segunda derivada não-negativa* num certo intervalo:

(3) $$f''(x) \geqq 0$$

A desigualdade em questão é a seguinte

(4_n) $$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqq \leqq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

válida para todos os números $x_1, \cdots, x_n$ daquele intervalo e para quaisquer $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ não-negativos submetidos à condição

(5) $$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$$

Em particular, tomando

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$$

obtém-se de (4_n)

$$(6_n) \quad f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

isto é, o valor da função calculado para a média aritmética das abcissas não excede a média aritmética dos valores que a função toma nas mesmas abcissas.

Não é difícil provar, em sentido inverso, que toda a função *contínua* que verifique (6_n) também verifica (4_n). E, ainda, que *qualquer* função que satisfaça a desigualdade (6_n) para $n=2$ igualmente a satisfaz para todos os outros valores de n (noutros termos, (6_2) implica (6_n)). O leitor pode consultar a este respeito a obra clássica de Hardy, Littlewood and Polya, *Inequalities* (Cambridge).

Função que verifique (4_n) chama-se *convexa*. Provemos pois que *é convexa toda a função com segunda derivada não-negativa*, isto é, que (3) implica (4_n).

Fazendo

$$(7) \qquad x_o = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

temos, usando a fórmula de Taylor com resto de segunda ordem de Lagrange,

$$f(x_k) = f(x_o) + (x_k - x_o)\, f'(x_o) + \\ + \frac{1}{2}(x_k - x_o)^2\, f''(\xi)$$

com ξ entre x_o e x_k.

A terceira parcela do segundo membro é não-negativa em virtude da condição (3). Desprezando-a fica

$$f(x_k) \geq f(x_o) + (x_k - x_o) f'(x_o)$$

Multipliquemos ambos os membros por α_k, façamos k variar de 1 a n e somemos membro a membro as n desigualdades assim obtidas. Resulta

$$\sum_k \alpha_k f(x_k) \geq f(x_o) \sum_k \alpha_k + f'(x_o) \sum_k \alpha_k x_k - \\ - x_o f'(x_o) \sum_k \alpha_k$$

donde, usando (5) e (7),

$$\sum_k \alpha_k f(x_k) \geq f\left(\sum_k \alpha_k\, x_k\right)$$

que é precisamente (4_n), como desejávamos.

Após esta digressão de análise elementar encontramo-nos já em condições de verificar que a função (2) tem a propriedade de máximo.

Em primeiro lugar,

$$(8) \qquad f(x) = x \log x$$

satisfaz (3) no intervalo $(0, \infty)$, pois que

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Aplicando então (6_n) a $f(x)$ dada por (8), tomando

$$x_k = p_k \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

fica

$$\frac{\sum p_k}{n} \log \frac{\sum p_k}{n} \leq \frac{\sum p_k \log p_k}{n}$$

ou

$$(9) \qquad \log \frac{1}{n} \leq \sum_k p_k \log p_k$$

Como

$$H\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -\log \frac{1}{n}$$

a desigualdade (9) vem a ser, como desejávamos, o mesmo que

$$H\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right) \geq H(p_1, \cdots, p_n)$$

Voltemo-nos para a generalização, a que já aludimos, da quarta propriedade. Rejeitamos a independência de A e B, pelo que agora não é já $r_{ij} = p_i q_j$ mas sim, mais geralmente,

$$(10) \qquad r_{ij} = p_i q_{ij}$$

onde q_{ij} significa *a probabilidade de realização de* B_j *quando se tenha realizado* A_i.

Calculando $H(C)$ temos

$$H(C) = -\sum r_{ij} \log r_{ij} =$$
$$-\sum p_i q_{ij} (\log p_i + \log q_{ij})$$

ou

$$(11) \quad H(C) = -\sum_i (p_i \log p_i) \sum_j q_{ij} + \\ + \sum_i p_i \left(-\sum_j q_{ij} \log q_{ij}\right)$$

Mas é

$$(12) \qquad \sum_j q_{ij} = 1$$

porquanto a realização de A_i acompanha-se com certeza da realização de algum dos acontecimentos $B_1, \cdots, B_n$, o que dá

$$q_{i1} + \cdots + q_{in} = \text{prob. de } (A_i \text{ e } B_1) + \cdots \\ \cdots + \text{prob. de } (A_i \text{ e } B_n) = 1$$

Na segunda parcela do segundo membro de (11) figura a função que designamos por $H_i(B)$,

$$H_i(B) = -\sum_j q_{ij} \log q_{ij}$$

e na verdade ela não é mais do que a função H calculada para o sistema B *na hipótese de ter sido realizada a experiência* A *com o resultado* A_i.

Considerando estes números $H_i(B)$ $(i = 1, \cdots, m)$ como valores de uma nova função, manifestamente atingidos com as probabilidades respectivas p_i, o valor médio de tal função será dado por

$$(13) \qquad H_A(B) = \sum_i p_i H_i(B)$$

que é, como qualquer valor médio, a soma dos produtos dos valores da função pelas correspondentes probabilidades.

Atendendo a (12) e (13) a igualdade (11) passa a escrever-se

$$(14) \qquad H(A \text{ e } B) = H(A) + H_A(B)$$

Esta a relação que procurávamos. É de facto uma generalização de (1) pois (1) é o seu caso particular em que, por ser

$$q_{ij} = q_j$$

(independência de A e B) se obtém

$$H_A(B) = H(B)$$

como o leitor fàcilmente verifica.

É óbvio que, havendo interdependência de A e B, o realizar-se A fornece alguma informação a respeito de B. Quer dizer, é de esperar que tenha lugar a desigualdade

$$(15) \qquad H_A(B) \leq H(B)$$

e na verdade assim é. Para o demonstrar, retomemos a função (8),

$$f(x) = x \log x$$

e apliquemos-lhe a desigualdade (4_n) com

$$\alpha_i = p_i \qquad x_i = r_{ij}$$

Obtém-se

$$\left(\sum_i p_i r_{ij}\right) \log \left(\sum_i p_i r_{ij}\right) \leq \sum_i p_i r_{ij} \log r_{ij}$$

Mas porque é

$$\sum_i p_i r_{ij} = p_1 r_{1j} + \cdots + p_m r_{mj}$$
$$= \text{prob. de } (A_1 \text{ e } B_j) + \cdots + \text{prob. de } (A_m \text{ e } B_j) \\ = \text{prob. de } B_j = q_j$$

a desigualdade anterior reescreve-se

$$q_j \log q_j \leq \sum_i p_i r_{ij} \log r_{ij}$$

donde, fazendo $j = 1, \cdots, n$ e somando membro a membro,

$$\sum_j q_j \log q_j \leq \sum_i p_i \sum_j r_{ij} \log r_{ij}$$

ou seja

$$H(B) \geqq \sum_i p_i H_i(B)$$

que é a desigualdade (15) que assim fica portanto demonstrada.

Em resumo, a função simétrica $H(p_1, \cdots, p_n)$ definida por (2) satisfaz aquele mínimo de requisitos sem os quais não poderia tomar-se como medida da indeterminação ou da informação contida no sistema.

Cabe todavia perguntar se não haverá outras funções que obedeçam às mesmas exigências. A resposta é a seguinte: função simétrica $H(p_1, \cdots, p_n)$ definida e contínua para $0 \leqq p_k \leqq 1$, com valor máximo para $p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, que satisfaz a desigualdade (14) — generalização de (1) — e que satisfaz ainda a condição de tomar o mesmo valor para os sistemas

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_n \\ p_1 \cdots p_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdots A_n \, I \\ p_1 \quad\; p_n \, 0 \end{pmatrix}$$

onde I designa o acontecimento impossível (de probabilidade nula) — tal função, repetimos, *coincide com a função definida por* (2) *à parte um factor de proporcionalidade.* Para a demonstração remetemos o leitor às memórias que começámos por citar.

À função

$$H(A) = -\sum_k p_k \log p_k$$

foi dado o nome de ENTROPIA, o mesmo, como se sabe, de certa grandeza termodinâmica. Não é difícil surpreender o liame entre os dois conceitos, o probabilístico e o termodinâmico.

O conceito termodinâmico de entropia foi introduzido por Clausius em 1865 como a grandeza S que satisfaz a relação diferencial

$$(16) \qquad dS = \frac{1}{T} dQ$$

em que dQ é a diferencial da quantidade de calor $Q(T)$ do sistema físico considerado, suposto este à temperatura absoluta T. Fixado um estado inicial E_0 do sistema e chamando E ao estado final, mostrou Clausius que o integral

$$\int dS$$

depende não só de E como também da evolução do sistema; mas que tem um mesmo valor, que é *máximo*, para todas as evoluções *reversíveis*. A esse valor máximo chamou entropia do sistema no estado E.

Depois, Boltzman, em 1896, aplicando a teoria de Clausius a um sistema gazoso em evolução reversível, provou que a integração da relação (16) dá

$$(17) \qquad S = k \log W$$

onde k é uma constante positiva dependente de T, e W é a *probabilidade* do estado considerado do gaz, calculada quanto às posições e velocidades possíveis das moléculas de que se compõe.

Permanecendo o sistema isolado, já Clausius inferira que a entropia do sistema aumenta constantemente. Nos termos de Boltzman, reinterpreta-se esta lei sob a seguinte forma, como mostra a relação (17): *os sistemas isolados evoluem para os estados mais prováveis.* Ou ainda: a indeterminação do estado de um sistema isolado diminue à medida que ele evolue.

Tal conclusão não contradiz as considerações teóricas que antes expusemos e nas quais o crescimento da função entropia $H(p_1, \cdots, p_n)$ significa um aumento da indeterminação. E não há contradição em virtude do sinal *menos* que afecta a definição probabilística mas não a termodinâmica.

Observemos ainda que a definição (2) da função entropia é a definição de um *valor médio*, no caso sujeito o dos n números

$$-\log p_1, \cdots, -\log p_n$$

Por outro lado, prova-se em Cálculo das Probabilidades que, em certas situações, os valores que toma uma variável aleatória aproximam-se do valor médio dessa variável o suficiente para que, do ponto de vista experimental, os possamos com ele identificar.

Assim se esclarece, nas suas linhas gerais, a conexão entre a relação (17) de BOLTZMAN e a definição (2) da função entropia.

Contudo, foi a moderna teoria das telecomunicações e do controle automático que levou o cientista americano C. E. SHANON a introduzir a definição geral de entropia (*A mathematical theory of communication*, Bell System Techn. J., 27, 1948), criando-se assim um novo ramo do Cálculo das Probabilidades que se encontra em pleno desenvolvimento: a teoria da informação.

Princípios fundamentais dos computadores digitais automáticos

por **A. César de Freitas**

O que vai seguir-se não é mais do que dissemos numa série de palestras feitas na Faculdade de Ciências de Lisboa em Dezembro de 1958 e destinadas a divulgar as ideias que estão na base dos mais poderosos meios de cálculo numérico actualmente existentes.

Nessas palestras procurou-se sempre apresentar os assuntos na sua forma mais elementar e sem entrar em aspectos técnicos, para que os princípios fundamentais fossem percebidos pelo maior número possível de ouvintes, a maioria deles inteiramente leigos na matéria. Esses princípios fundamentais, que como se verá são bastante simples, podem ser apreendidos sem grande dificuldade por qualquer pessoa com instrução equivalente à dos nossos cursos secundários.

Evidentemente que, apenas pela leitura destas palestras, ninguém fica apto a construir uma máquina calculadora electrónica por mais rudimentar que ela seja; o que se pretende é que elas permitam fazer uma ideia, mais ou menos precisa, da maneira como trabalha uma das maiores maravilhas inventadas pelo homem, cujas aplicações são cada vez maiores em quase todos os ramos da actividade humana. Por outro lado, para aqueles que tenham um interesse especial pelo assunto, julgamos ter apresentado os elementos suficientes à compreensão de obras mais especializadas. Principalmente para estes inserimos no final alguma bibliografia por ordem crescente de especialização.

1. Generalidades. As máquinas matemáticas podem classificar-se em *máquinas digitais* e *máquinas analógicas*. As primeiras trabalham por *contagem* de acontecimentos discretos, as segundas *medem* grandezas contínuas. Um exemplo de máquina digital é a máquina calculadora vulgar (manual ou eléctrica); a régua de cálculo é uma máquina analógica em que os números são representados por comprimentos.

Mais precisamente o termo *digital*, quando aplicado a uma máquina, implica mecanização das matemáticas dos problemas, uma vez esses problemas sejam postos na forma aritmética; o termo *analógico* implica uma semelhança de propriedades nos aspectos que interessam, e na máquina analógica a analogia baseia-se na identidade (ou semelhança) das equações matemáticas que traduzem as propriedades do sistema em estudo e as propriedades do sistema analógico. Por exemplo, para estudar as vibrações duma asa de avião pode-se analisar as oscilações de natureza absolutamente diferente dum *modelo* eléctrico (sistema analógico) verificando as mesmas equações matemáticas.

A precisão das máquinas analógicas é limitada pela precisão das medidas das grandezas físicas que nelas se consideram; pelo contrário, nas máquinas digitais a precisão em geral só é limitada pelo número de casas decimais que se queira conservar e por isso estas máquinas são em geral preferíveis e nalguns casos indispensáveis em cálculos científicos (1). As máquinas digitais são evidentemente as únicas empregadas em cálculos de tipo comercial (em bancos, companhias de seguros, etc.).

Vamo-nos referir apenas às máquinas calculadoras digitais automáticas chamadas universais devido à universalidade das suas aplicações — elas resolvem qualquer problema que se possa reduzir a uma sequência finita das operações elementares (adição, subtracção, multiplicação). Tais máquinas designam-se também por *computadores digitais automáticos universais.*

Apenas nos referiremos aos princípios fundamentais dessas máquinas sem entrar em quaisquer detalhes de ordem técnica. Veremos como a máquina efectua as operações, como recebe e trata as informações que lhe são dadas e finalmente como fornece os resultados que lhe são pedidos.

*

Nos computadores digitais automáticos universais distinguem-se em geral as seguintes partes principais

(1) A *memória*, onde se registam os números que vão ser usados nos cálculos, as instruções (ordens) para operar com esses números e os resultados que seja necessário registar.

(2) A *unidade aritmética*, onde se efectuam as operações.

(3) O *sistema de control* que controla a sequência de operações a efectuar pela máquina.

(4) A *via de entrada* e a *via de saída* (de informação) por onde a máquina recebe os dados numéricos e as instruções e fornece os resultados.

Quando se está a fazer um cálculo com uma máquina de calcular vulgar as tábuas e folhas de papel que se usam correspondem à memória, a máquina corresponde à unidade aritmética e o calculador ao sistema de control.

A memória do computador digital, qualquer que seja a sua estrutura física, está dividida em compartimentos em cada um dos quais se pode «escrever» um número (ou parte dum número) ou uma ou mais ordens. Ao conteúdo dum destes compartimentos chama-se um *termo*. Esta designação única, tanto para ordens como para números, justifica-se, como veremos depois, porque dentro da máquina tudo é representado da mesma maneira.

Na maioria dos computadores actualmente existentes os números são representados no sistema de base dois (sistema binário) fazendo-se então uso apenas dos algarismos 0 (zero) e 1 (um). Neste sistema o número $143 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$, por exemplo, representa-se por 10001111 que corresponde a $2^7 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$.

É fácil verificar as seguintes correspondências:

(1) Isto não significa que não existam certas situações em que sejam preferíveis máquinas analógicas.

Base 10	Base 2
0	0
1	1
2	10
3	11
$4=2^2$	100
5	101
6	110
7	111
$8=2^3$	1000
9	1001
10	1010
$16=2^4$	10000
$32=2^5$	100000
$0{,}5=\frac{1}{2}$	0,1
$0{,}25=\frac{1}{2^2}$	0,01
$0{,}75=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$	0,11
0,1	$0{,}0001100110011\cdots$
$\frac{10}{16}$	0,101

A «tabuada» da adição no sistema binário é simplesmente

$$\begin{aligned} 0+0&=\ \ 0\\ 0+1&=\ \ 1\\ 1+0&=\ \ 1\\ 1+1&=10 \end{aligned}$$

e a da multiplicação

$$\begin{aligned} 0\times 0&=0\\ 0\times 1&=0\\ 1\times 0&=0\\ 1\times 1&=1 \end{aligned}$$

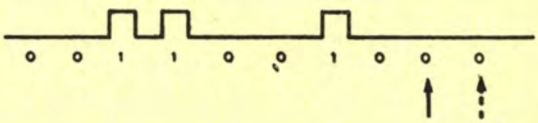
Para fazer uma soma de duas parcelas usam-se as tabelas seguintes:

$$\text{Tabela I} \rightarrow \begin{aligned} 0+0&=00\\ 0+1&=01\\ 1+0&=01\\ 1+1&=10 \end{aligned}$$

$$\text{Tabela II} \rightarrow \begin{aligned} 0+0+0&=00\\ 0+0+1&=01\\ 0+1+0&=01\\ 1+0+0&=01\\ 0+1+1&=10\\ 1+0+1&=10\\ 1+1+0&=10\\ 1+1+1&=11 \end{aligned}$$

Nestas tabelas o primeiro algarismo (a contar da esquerda) dos segundos membros das igualdades representa o transporte.

Nas máquinas a que nos estamos a referir toda a informação é transmitida e tratada na forma de grupos de impulsos eléctricos. Por exemplo, o número 100 (base dez) é representado pelo grupo



onde estamos a supor que a ausência de impulso representa zero e a presença representa um, e onde a seta a cheio indica o algarismo das unidades; se a posição das unidades correspondesse à seta a tracejado, então o grupo de impulsos figurado representaria o número 200.

É pois necessário distinguir entre os impulsos (ou ausência de impulsos) que representam os algarismos das diferentes ordens e isso pode fazer-se por dois processos: pode conseguir-se que o significado posicional dum impulso seja dado pelo fio em que ele viaja ou pelo instante em que ele ocorre. Esta distinção é fundamental e conduz a dois tipos de máquinas usualmente conhecidas por máquinas do *tipo paralelo* e por máquinas do *tipo série*. Nas primeiras os dígitos apresentam-se simultaneamente ao passo que nas segundas se apresentam em sucessão.

É interessante assinalar algo de semelhante ao que acabámos de referir e que se passa no nosso sistema nervoso. A informação transmite-se através dos nossos corpos na forma de cadeias de impulsos todos aproximadamente do mesmo tamanho. A grandeza do estímulo controla o número de impulsos que passam através duma fibra nervosa num certo intervalo de tempo mas a amplitude desses impulsos (cerca de 0,1 volts) e a sua velocidade (cerca de *320* Km/hora) são mais ou menos constantes. A distinção entre operações do tipo série e operações do tipo paralelo aparece também no sistema nervoso: nós ouvimos *simultaneamente* todos as componentes dum som, contudo só vemos distintamente uma pequena região de cada vez e para ver uma região maior temos que ver parte por parte e com as partes vistas «construir» o todo.

É em parte devido a estas semelhanças e a outras que apontaremos mais adiante, que muitas vezes se chama *cérebros electrónicos* aos computadores digitais automáticos e a outras máquinas afins. Deve-se porém evitar tal designação pois ela parece sugerir que a máquina pode actuar como o cérebro humano, o que não corresponde à realidade. A máquina simplesmente cumpre as ordens que o homem lhe dá e para que foi construida, mas é incapaz de reagir *conscientemente* a qualquer situação que não tenha sido prevista por quem a construiu. Note-se contudo que a máquina é capaz de fazer alguma cousa de que o homem não é capaz. Basta pensar que existem actualmente computadores digitais electrónicos que somam dois números com doze algarismos, no sistema decimal, em 20 micro-segundos, multiplicam esses mesmos números em 200 micro-segundos, calculam um seno, um cosseno, um logaritmo em 2,5 mili-segundos com erro inferior a 2^{-30}, etc.

A forma de representação dos números exige ainda que se fixe um intervalo a que eles terão de pertencer. Em muitas máquinas tudo se passa de modo que qualquer número x verifique a relação

$$-1 \leqq x < 1$$

e para trabalhar com números fora deste intervalo há que usar factores de redução apropriados.

É necessário ainda saber distinguir entre números negativos e positivos. Isso faz-se, em geral, substituindo os números negativos pelos complementos dos seus módulos. Para o caso duma máquina trabalhando no intervalo referido e em que se representem os números negativos, como os complementos para dois, dos seus módulos, o número $-0{,}75$ será representado por 1,01. Dum modo geral, em tal máquina, sempre que o primeiro dígito a contar da esquerda é um 0 trata-se dum número positivo; se esse digito é 1, trata-se dum número negativo.

Exemplifiquemos

(1) Se o número 0,2 for representado por 0,0011001100110 então o número $-0{,}2$ será representado por 1,1100110011010.

(2) O número negativo 1,110010001 corresponde a escrever $-1+0{,}110010001 =$ $= -0{,}001101111$.

É também

$$1{,}110010001 = 10 - 0{,}001101111$$

Ao dígito que está à esquerda da vírgula chama-se o *dígito do sinal*.

A principal vantagem de usar a forma complementar para os números negativos reside no facto de as somas se fazerem sempre à maneira ordinária sem pensar nos sinais dos números.

2. Elementos de álgebra de Boole. Consideremos um conjunto apenas com dois elementos distintos que designaremos por 0 e 1.

Definamos neste conjunto uma «adição» fazendo corresponder a cada par de elementos do conjunto um elemento desse conjunto do modo seguinte

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=1$$

Nesta «adição» o resultado é 1 sempre que a primeira parcela é 1 *ou* a segunda parcela é 1; caso contrário o resultado é 0. Designaremos esta operação por *operação «ou»*.

Definamos uma segunda operação da forma seguinte

$$0\times 0=0$$
$$0\times 1=0$$
$$1\times 0=0$$
$$1\times 1=1$$

Nesta «multiplicação» o resultado é 1 se, e só se, o primeiro factor *e* o segundo factor são iguais a 1. Designaremos esta operação por *operação «e»*.

Vejamos dois exemplos.

(1) Suponhamos que se pretendia provocar uma explosão fazendo chegar ao explosivo sinais eléctricos de duas origens diferentes. Se um sinal vindo de qualquer das origens (ou de ambas ao mesmo tempo) for capaz de provocar a explosão trata-se duma operação *«ou»* (desde que se convencione representar por 1 a presença do sinal e da explosão); se, por motivos de segurança, a explosão só se der quando as duas origens enviem sinais simultâneamente, trata-se então da operação *«e»*.

(2) Em lógica simbólica pode dar-se a seguinte interpretação às operações definidas. Suponhamos que se convenciona escrever

$x=1$ com o significado *a proposição x é verdadeira*

$x=0$ com o significado a *proporção x é falsa*

A operação *«ou»* corresponde a uma proposição x_3, composição de x_1 e x_2, que é verdadeira quando e só quando x_1 ou x^2 (ou ambas) são verdadeiras; a operação *«e»* corresponde à proposição que é verdadeira se, e só se, x_1 e x_2 são verdadeiras.

É do caso do exemplo (2) que resulta chamar-se *disjunção* (ou *alternação*) à operação *«ou»* e chamar-se *conjunção* à operação *«e»*. Uma outra operação que vamos definir é a *operação de negação* pela qual se faz corresponder a cada elemento do conjunto o elemento diferente Designaremos esta operação por um traço sobre o elemento a que diz respeito

$$\overline{0}=1$$
$$\overline{1}=0$$

Tal como na álgebra ordinária, podem considerar-se variáveis $X, Y, Z, \cdots$ que tomam os valores no conjunto referido, e funções dessas variáveis por intermédio das operações definidas. Assim, quando escrevemos $Z=X+Y$ queremos dizer que $Z=1$ se $X=1$ *ou* $Y=1$ (ou ambas são iguais a 1); caso contrário $Z=0$. Do mesmo modo $Z=X\times Y$ ou $Z=X\,Y$ significa que $Z=1$ se $X=Y=1$; se isto não se verifica então é $Z=0$.

Das definições dadas obtém-se imediatamente que

$$X+0=X \qquad X\times 0=0 \qquad X+\overline{X}=1$$
$$X+1=1 \qquad X\times 1=X \qquad X\overline{X}=0$$
$$X+X=X \qquad X\times X=X \qquad \overline{\overline{X}}=X$$

Tanto a operação *«ou»* como a operação *«e»* são comutativas (por definição) e associativas

$$X+Y=Y+X \qquad XY=YX$$
$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z) \qquad (XY)Z=X(YZ)$$

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} &X(Y+Z)=X\,Y+XZ\\ (1)\qquad &X+YZ=(X+Y)(X+Z)\\ &\overline{XYZ}=\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}\\ &\overline{X+Y+Z}=\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\end{aligned}$$

Para o verificar basta, em cada caso, substituir X, Y, Z pelos seus valores possíveis.

Consideremos agora as funções S e T definidas do modo seguinte

$$(2)\qquad \begin{cases} S = X\overline{Y} + \overline{X}\,Y \\ T = X\,Y \end{cases}$$

e vejamos os valores que elas podem tomar para os possíveis pares de valores de X e Y. Virá

X	Y	T	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Tabela III

que corresponde precisamente à tabela I, se considerarmos que os símbolos da tabela anterior são os números zero e um.

As expressões (2) podem escrever-se nas formas seguintes

$$(3)\qquad \begin{cases} S = (X + Y)\,(\overline{X} + \overline{Y}) \\ T = \overline{\overline{X} + \overline{Y}} \end{cases}$$

e

$$(4)\qquad \begin{cases} S = (X + Y)\,\overline{XY} \\ T = XY \end{cases}$$

e seria fácil arranjar outras maneiras de representar as mesmas funções. Para verificar que (3) e (4) equivalem a (2) pode reproduzir-se a tabela III a partir dessas expressões ou aplicar as igualdades (1) por forma apropriada.

Consideremos ainda as seguintes funções de três variáveis

$$(5)\qquad \begin{cases} S = XYZ + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}\,Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} \\ T = X\,Y + XZ + YZ \end{cases}$$

e construamos uma tabela dos seus valores para os ternos possíveis de valores de X, Y, Z. Obtem-se

X	Y	Z	T	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabela IV

Se considerarmos os símbolos desta tabela como os números zero e um, reconhece-se imediatamente que ela corresponde à tabela II.

As expressões (5) podem apresentar-se com formas equivalentes diversas.

Assim, por exemplo,

$$(6)\qquad \begin{cases} S = (X + Y + Z)\,(\overline{T} + XYZ) \\ T = X\,Y + XZ + YZ \end{cases}$$

e

$$(7)\qquad \begin{cases} S = [(X\overline{Y} + \overline{X}\,Y) + Z]\,(X\,Y + \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{Z}) \\ T = (X\overline{Y} + \overline{X}\,Y)Z + X\,Y \end{cases}$$

3. Circuitos básicos

(*a*) *Circuito de coincidência* (ou circuito «*e*»), é um circuito que executa a operação «*e*» (conjunção). Este circuito está esquematizado na Fig. 1 para o caso de ser constituido por electro-imans

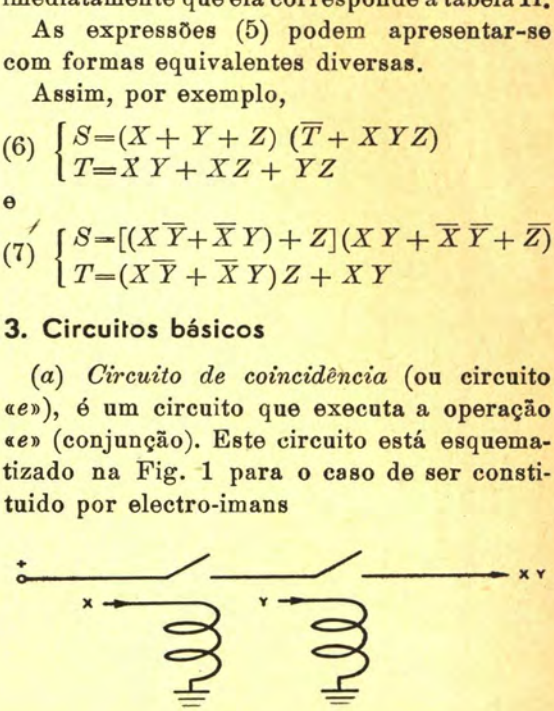


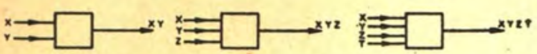
Fig. 1

Há dois terminais de entrada (X e Y) e um terminal de saída. Sempre que há um sinal eléctrico em X ($X=1$) a armadura do respectivo electro-íman é atraida e se ao mesmo tempo houver um sinal em Y ($Y=1$) obtem-se um sinal no terminal de saída ($XY=1$).

Se em X passar corrente enquanto em Y circulam os impulsos correspondentes a um número, no terminal de saída reproduz-se o número ($1 \times Y = Y$).

Evidentemente que pode haver um circuito de coincidência com mais terminais de entrada.

Representaremos circuitos de coincidência do modo seguinte



com dois, três e quatro terminais de entrada respectivamente.

(*b*) *Circuito disjuntivo* (circuito «*ou*» ou *circuito de alternação*) é um circuito que executa a operação «*ou*» e que está esquematizado na Fig. 2.

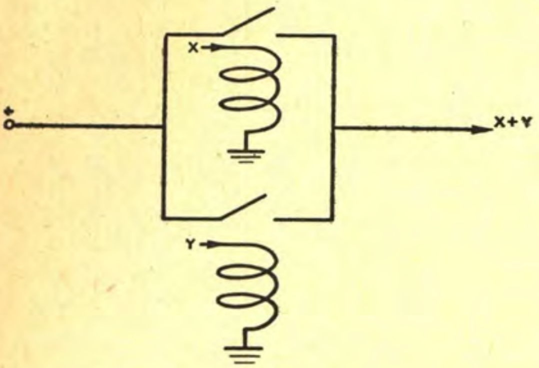
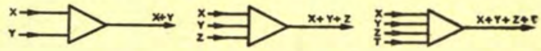


Fig. 2

Sempre que há um sinal em qualquer dos terminais de entrada X ou Y obtem-se um sinal no terminal de saída. Também um circuito deste tipo pode ter vários terminais de entrada.

Representaremos estes circuitos do modo seguinte



com dois, três e quatro terminais de entrada.

(*c*) *Circuito inversor* (circuito de negação).

Neste circuito — Fig. 3 — há um terminal de entrada e um terminal de saída

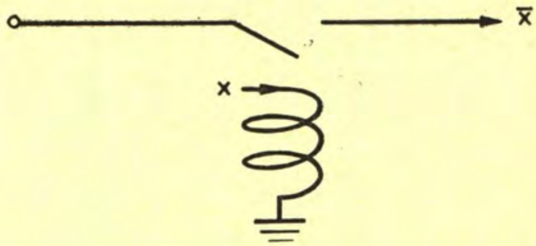


Fig. 3

Representaremos um circuito deste tipo por

É fácil reconhecer que com circuitos dos tipos (*a*) e (*c*) se pode construir um circuito do tipo (*b*). Para isso basta notar que $X+Y=\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$ e portanto o circuito seguinte satisfaz

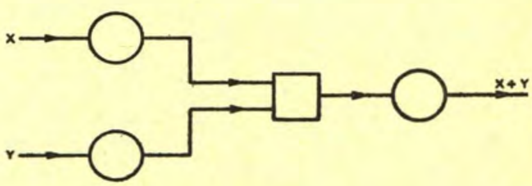


Fig. 4

De modo análogo se poderia construir um circuito do tipo (a) usando circuitos do tipo (b) e (c). Basta notar que $X\,Y = \overline{\overline{X} + \overline{Y}}$.

Nos circuitos referidos estamos a supor que a existência dum sinal em qualquer das terminais significa 1 e a ausência de sinal significa 0. Se porém fizermos a convenção contrária, isto é, se a presença de sinal significar 0 e a ausência significar 1, o circuito da Fig. 1 passará a ser um circuito «*ou*» e o da Fig. 2 um circuito «e».

Vamos agora indicar alguns circuitos que se obtém por combinação dos anteriores e que utilisaremos nos parágrafos seguintes.

(d) *Circuito bi-estável* (bi-vibrador, «flip-flop»). Neste circuito, como o próprio nome indica distinguem-se dois estados. Pode ser constituído do modo seguinte

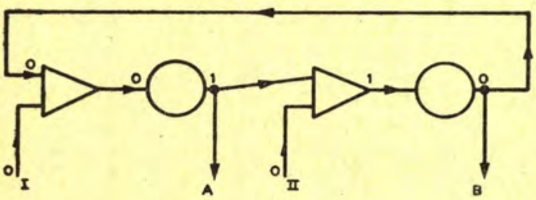
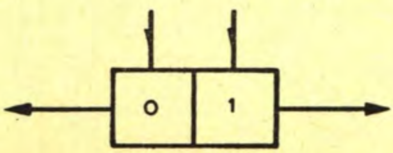


Fig 5

Tal como está indicado na figura, no terminal A tem-se sempre 1 e no terminal B tem-se sempre 0; este facto caracteriza um dos estados do circuito (onde supomos que não há qualquer sinal nos terminais I e II). Suponhamos que chega um impulso ao terminal I. Vê-se imediatamente que no terminal A passa a ter-se 0 e no terminal B passa a ter-se 1, mantendo-se este outro estado do circuito até que chegue um outro impulso ao terminal II.

Representaremos este circuito por



(e) *Semi-somador* — é um circuito que tem dois terminais de entrada e dois terminais de saída que correspondem aos valores S e T seguintes

$$(1) \qquad \begin{cases} S = X\,\overline{Y} + \overline{X}\,Y \\ T = X\,Y \end{cases}$$

onde X e Y se referem aos terminais de entrada. As expressões anteriores são as expressões (2) do parágrafo 2, e correspondem ao circuito

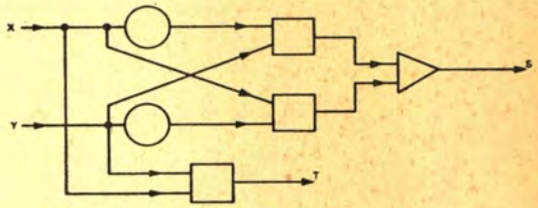


Fig. 6

Qualquer circuito correspondente a expressões equivalentes a (1) é um circuito que executa as mesmas funções mas com outro arranjo de componentes. Assim o semi-somador correspondente às expressões (4) do parágrafo 2 será

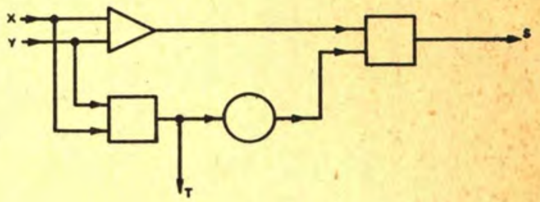
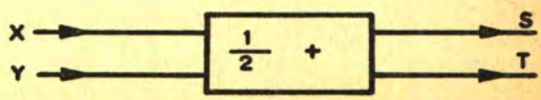


Fig. 7

Representaremos um semi-somador por



(*f*) *Somador* — É um circuito com três terminais de entrada — X, Y, Z — e dois terminais de saída — S, T — que corresponda às funções (5) do parágrafo 2, ou a quaisquer expressões equivalentes a essas.

O somador correspondente às expressões (6) do parágrafo 2 será

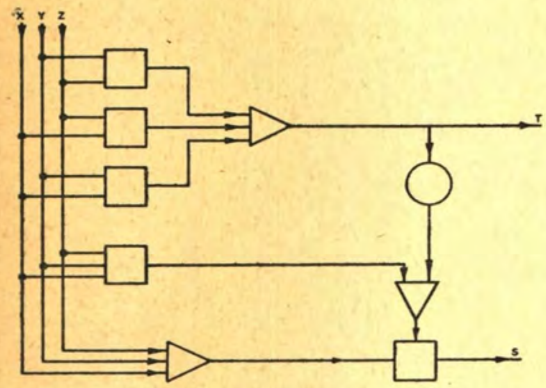


Fig. 8

Pode também obter-se um somador, a partir de dois semi-somadores do modo indicado na Fig. 9.

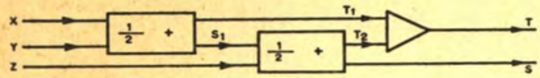


Fig. 9

Para o verificar pode usar-se o seguinte método (analítico):

$$\begin{aligned}S &= Z\overline{S}_1+\overline{Z}S_1 = Z(\overline{X\overline{Y}+\overline{X}Y})+\overline{Z}(X\overline{Y}+\overline{X}Y)\\ &= Z(\overline{X\overline{Y}}\;\overline{\overline{X}Y})+\overline{Z}(X\overline{Y}+\overline{X}Y)\\ &= Z[(\overline{X}+Y)(X+\overline{Y})]+X\overline{Y}\overline{Z}+\overline{X}Y\overline{Z}\\ &= Z(XY+\overline{X}\,\overline{Y})+X\overline{Y}\overline{Z}+\overline{X}Y\overline{Z}\end{aligned}$$

ou seja

$$S = XYZ+X\overline{Y}\overline{Z}+Y\overline{X}\overline{Z}+Z\overline{X}\,\overline{Y}$$

que é precisamente a primeira das expressões (5) do parágrafo 2.

Tem-se ainda

$$\begin{aligned}T = T_1+T_2 &= XY+Z(X\overline{Y}+Y\overline{X})\\ &= XY+ZX\overline{Y}+Y\overline{X}Z\\ &= XY+ZX\overline{Y}+Y\overline{X}Z+XYZ+XYZ\end{aligned}$$

porque

$$XY+XYZ = XY$$

Vem então

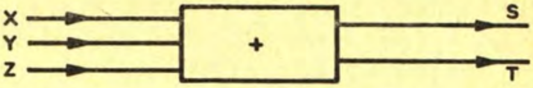
$$T = XY+XZ(Y+\overline{Y})+YZ(X+\overline{X})$$

ou seja

$$T = XY+XZ+YZ$$

que é a segunda das expressões (5) do parágrafo 2.

Representaremos um somador por



As designações de semi-somador e somador dadas aos circuitos (*e*) e (*f*) serão justificadas mais adiante.

Todos os circuitos a que acabámos de fazer referência podem ser construídos com válvulas electrónicas, transistores, materiais magnéticos, etc.

(Continua)

L'intérêt scientifique des satellites artificiels (*)

Por E. Vassy

Aujourd'hui des satellites artificiels tournent autour de la Terre. Pourquoi en est-on arrivé là? Est-ce simplement un jeu de balisticiens? Aussi me contenterai-je de vous exposer les possibilités qu'offrent au géophysicien les satellites artificiels.

Il faut pour cela d'abord revenir aux fusées. Voici la courbe représentant en fonction du temps la trajectoire attendue de notre «Véronique» dont on espère tirer une série à partir d'octobre prochain (fig. 1). En abscisses, on a des secondes et on se rend compte que l'engin ne restera au-dessus de 100 kilomètres que pendant 350 à 400 secondes.

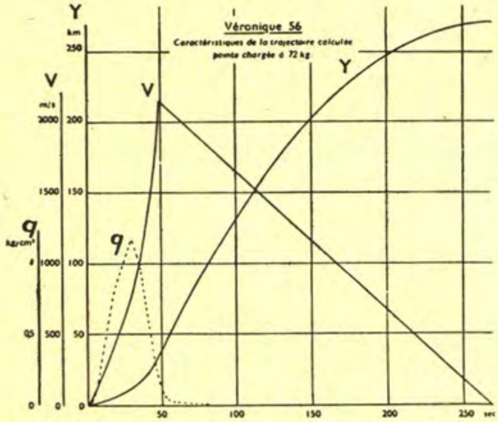


Fig. 1 — En fonction du temps: altitude Y (en km); vitesse V (en m/s); poussée q (en kg/cm^2).

Voici d'ailleurs une autre figure sur laquelle sont traduits les temps pendant lesquels un engin dont l'altitude maximum est inscrite sur les courbes demeure au-dessus d'une altitude représentée en abscisses (fig. 2).

La fusée permet donc un sondage en altitude, à la verticale d'un point donné, pendant un temps relativement court. Pour avoir une vue d'ensemble sur un phénomène à l'échelle de la géophysique, il faudra effectuer la même opération en des point de latitudes différentes.

En outre, les phénomènes géophysiques varient en fonction du temps. Dans la haute atmosphère, il en est de nombreux liés à l'activité solaire. Pour lancer une fusée juste au moment intéressante, cela est bien difficile. Avec un satellite, qui tourne pendant

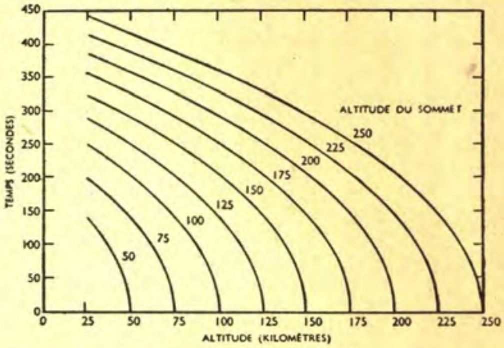


Fig. 2 — Temps passé par une fusée au dessus d'une altitude donné pour différentes valeurs de l'altitude maximum atteinte.

plusieurs mois autour de la Terre, on aura non seulement la possibilité d'avoir une coupe du phénomène le long d'un méridien par exemple, mais d'en saisir toutes les variations dans le temps. Par contre, l'inconvénient du satellite est de n'explorer que le domaine d'altitudes compris entre le périgée et l'apogée.

Nous allons maintenant passer en revue les différentes études possibles en nous plaçant de ce point de vue de parent pauvre qui est le nôtre, c'est-à-dire en distinguant les études utilisant des instruments montés à bord du satellite de celles qui en sont indépendantes, c'est-à-dire que nous pouvons effecttuer.

I. — Expériences utilisant des instruments montés a bord

Voyons d'abord les premières. Les photographies prises à bord de fusées nous ont déjà habitués à voire la Terre de haut et sur certains clichés les météorologistes ont fait d'intéressantes observations, mais se rapportant à une heure déterminée, sans qu'il soit possible de saisir une évolution dans le temps.

1 — La Terre, vue du satellite: Intérêt météorologique

La météorologie synoptique porte un intérêt certain au satellite. Ainsi une caméra de télévison à une altitude de 1.000 kilomètres verra une étendue de surface terrestre allant du Cap Nord à l'Afrique du Nord. Sans même chercher à utiliser son déplacement sur l'orbite et la possibilité de voir l'ensemble d'une zone autour de la Terre, le dessin des masses nuageuses permettra au météorologiste de distinguer le développement des orages et d'une manière plus générale, l'évolution du temps. En effet, les nuages sont la traduction de processus physiques se déroulant dans la basse atmosphère, oú interviennent les conditions de température, d'humidité, les mouvements aux différentes altitudes. La distribution des masses nuagueuses sur la Terre doit être liée aux masses d'air typiques et aux systèmes frontaux. Les quelques photografies prises en haute altitude par les fusées et qui se rapportent toutes à un instant relativament court (moins d'une minute) étainte très encourageants à cet égard. L'exploitation systématique des images transmises par une caméra de télévision tournant autour de la Terre mettrait sans doute le météorologiste sur la voie de nouvelles méthodes de prévision.

De nombreuses questions de thermodynamique de l'atmosphère (bilan thermique notamment) et de cyclogenèse pourraient être résolues à la suite de la mesure à bord d'un satellite du rayonnement solaire incident et de l'albedo (facteur de réflexion diffuse) de la Terre.

Jusqu'ici l'albedo n'a été déterminé que par la méthode de Danjon utilisant la lumière cendrée (clair de Terre sur Lune) et par Fritz d'après une sommation des surfaces couvertes de forêts, de neige, de mers, de nuages, etc., en tenant compte de leurs albedos respectifs.

Stroud et Nordberg ont imaginé un dispositif avec trois cellules photoélectriques (détecteur Kodak Ektron). Eles sont arrangées de telle sorte qu'a 500 kilomètres d'altitude, il y en a toujours une qui regarde la Terre. Si le satellite tourne sur lui-même, chaque cellule peut balayer un certain parcours sur la surface terrestre. On mesurera le nombre de rotations de l'engin sur lui-même par la fréquence de répétition des signaux des cellules, et le problème le plus difficile sera de déterminer quelle région de la Terre est explorée. Il sera résolu en déterminant l'orientation du satellite par rapport à la Terre directement d'après les impulsions enregistrées par les cellules.

2 — Pression, densité, température

J'ai montré dans mon cours de cette année toute la difficulté qu'il y a à connaître la pression et la densité au-dessus de l'altitude de 100 kilomètres, ou le libre parcours moyen dépasse la dimension des jauges susceptibles d'être utilisées. J'ai exposé les travaux récents de Horowitz et La Gow qui, utilisant la jauge Philips (jauge à ionisation dont l'espace parcouru par les ions est accru par la présence d'un champ magnétique) pour mesurer la variation de pression lorsque l'engin tourne sur lui-même, arrivent au prix d'hypothèses nombreuses et osées à déduire une courbe notablement différente de celle admise jusq'ici. Et de plus, la présence des gaz résiduels fausse considérablement la mesure. Pour en tenir compte, il faut se livrer à une discrimination manquant vraiment de sûreté.

a) *Pression et densité.* — 1° La jauge PHILIPS, ne permettant pas de descendre au--dessous de 10^{-8} mm de Hg, et les pressions attendues entre 400 et 900 kilómètres étant comprises entre 10^{-8} et 10^{-10} mm de Hg, SICINSKI, SPENCER et BOGGESS, de l'Université de Michigan, ont proposé l'usage d'un dispositif, qu'ils appelent le «Synchromètre», susceptible de mesurer de telles pression.

Le principe de son fonctionnement est identique à celui du cyclotron. Un faiceau de particules ionisantes est émis parallèlement à un champ magnétique, produisant une ionisation locale le long de ce faisceau. Les ions sont alors accélérés entre deux plaques parallèles par un champ électrique alternatif de haute fréquence. Comme dans le cyclotron, quand la valeur de la fréquence este égale à $\frac{e\mathrm{H}}{m}$, les ions de masse m et de charge e sont accélérés sur des orbites de dimensions croissantes (spirales d'Archimède) et peuvent alors frapper un collecteur d'ions. Le courant dans le collecteur mesure la pression partielle du gaz dont le rapport est e/m. On a ainsi une jauge à résonance.

Une instrumentation légère est techniquement possible.

2° JONES et BARTMAN ont proposé un accéléromètre d'un type nouveau pour mesurer le ralentissement instantané (décélération). Il se compose essentiellement de deux sphères concentriques ou plus exactement avec des position remplissant des conditions déterminées. Les détails communiqués jusqu'ici sont insuffisants pour juger de l'efficacité du procédé.

3° SPITZER a proposé de mesurer le changement d'orientation produit par le freinage de l'air sur un satellite dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de pression. Soit un satellite ayant la forme d'une haltère, dont l'une des sphères pèserait 10 fois plus que l'autre. Si le satellite est mis en mouvement sans rotation avec son axe perpendiculaire à la direction du mouvement, le freinage de l'air produira un déplacement de la sphère la plus légère par rapport à la sphère la plus lourde.

Pour déterminer la rotation, on utilisera le système mis au point au Naval Research Laboratory: cellule photoélectrique recevant la lumière solaire directe dans un grand angle et la lumière diffusée par la Terre dans un angle plus petit.

Mais ce ne sont là que des possibilités, qui n'ont pas encore fait l'objet de réalisations conues.

b) Quant à la *température de l'air,* on a fait appel pour la mesurer à la sonde de LANGMUIR, déjà utilisée à bord des fusées. Si chaque couche de l'ionosphère peut être considérée comme étant en équilibre thermique, toutes les particules présenteut des distributions maxwelliennes de l'énergie. Cette hypothèse est satisfaisante si les durées de vie de toutes les particules sont très longues comparativement aux libres parcours moyens. La température d'équilibre est obtenue d'après la pente de la courbe obtenue en portant le logarithme du courant dans la sonde, dans l'intervalle où les électrons atteignent le collecteur en traversant un champ retardateur.

c) S'il s'agit de la *température du satellite,* elle résultera d'un équilibre entre le rayonnement reçu, le rayonnement émis et l'énergie empruntée au milieu ambiant. Un corps noir à 300° K rayonne 40 miliwatts par centimètre carré; si toute l'énergie cinétique des molécules rencontrées à l'altitude de 300 kilomètres était absorbée, l'énergie entrant en moyenne sur la surface serait de 0,01 milliwatt par centimètre carré.

La Gow a calcuté que la température d'équilibre serait pendant la nuit de — 35° C, pendant le jour de 30 à 70° C, suivant le rapport de l'émissivité de l'infra-rouge à celle du visible. Pour la mesure, on emploie des thermistors montés à différents emplacements sur le satellite et reliés à la télémesure.

Poussant l'étude du problème plus loin, Gast distingue dans l'énergie reçue par le satellite, celle provenant directament du Soleil, celle provenant du Soleil mais diffusée par la Terre ou les nuages et une troisième source constituée par le rayonnement de la Terre (250° K). Tenant compte des caractéristiques du satellite (coefficient d'absorption et albedo de sa surface, forme, masse, chaleur spécifique) et de celles de son orbite, cet auteur a déterminé les températures maxima et minima auxquelles on peut s'attendre. Les courbes montrent que la pauvre chienne a dû être soumise à une sucession de chauds et froids. Il serait intéressant de connaître les températures effectivement mesurées à l'intérieur du satellite et si la concordance avec les calculs n'est pas bonne, il fraudra revoir les donnés. La valeur absolue de la température mesurée et l'amplitude de la variation quand l'engin passe de l'ombre au Soleil mettront sur la voie pour identifier les donnés erronées. Et pour améliorer celles-ci des mesures seront nécessaires.

3. — Composition de l'atmosphère

Il serait intéressant de reprendre á bord du satellite les mesures effectuées à bord des fusées à l'aide d'un spectrographe de masse, lesquelles permettent de connaître la masse atomique ou moleculaire des constituantes de l'atmosphère. On verrait ainsi comment varient ces constituants entre le jour et la nuit et surtout les répercussions des éruptions solaires.

La question de la teneur en hydrogène présente un aspect particulier. Elle peut être abordée, comme nous le verrons plus loin, par l'étude d'une radiation émise par l'atmosphère terrestre.

Il y a aussi celle des poussières météoriques, importante non seulement pour la géophysique, mais aussi pour l'astrophysique et l'astronautique.

Il y a déjà l'expérience acquise avec les V_2 et les Aerobee avec une technique acoustique, l'énergie étant détectée par un microphone, puis amplifiée dans la bande 30-60 Kc /s.

M. Dubin a envisagé aussi pour les grosses particules de détecter les impulsions transmisses à un accéléromètre placé à bord du satellite.

Les impacts météoriques qui, avec les fusées se sont révélés en assez petit nombre mériteraient d'être étudiés lorsque l'orbite de la Terre traverse des essaims tels que les Persaïdes ou les Aquarides où le Radar met en évidence des trajectoires très nombreuses.

4. — Ionisation

La composition de l'atmosphère mérite d'être examinée du point de vue de ses charges électriques. Les fusées ont déjà apporté pas mal de résultats à la connaissance de l'ionosphère. L'investigation directe qui a permis de distinguer les électrons des ions positifs et négatifs a de considérables avantages sur la classique méthode des échos, base des sondages ionosphériques.

On a déjà utilisé à bord des fusées la sonde classique de Langmuir. Hok qui en a l'expérience, propose de placer quatre sonds á bord du satellite, aux sommets d'un tétraèdre, de telle manière qu'il y en ait toujours une près de l'equateur de l'engin.

Ce dispositif serait précieux non seulemente pour l'étude de l'ionosphère en temps normal, mais il permettrait de saisir le mécanisme des perturbations ionosphériques, qu'il s'agisse de perturbations à début brusque ou d'orages liés aux orages magnétiques. Opérant dans la partie supérieure de l'ionosphère où les phènomènes sont plus simples par suite du moins grand nombre de chocs qu'aux altitudes plus basses, on pourrait ainsi espérer se faire une idée exacte du mécanisme suivant lequel agit le Soleil.

5 — Rayonnement solaire et atmosphérique

Ce travail serait d'ailleurs facilité par l'étude du rayonnement solaire responsable de l'ionisation.

a) *Rayonnement électromagnétique.* — Les radiations de l'extreme ultraviolet sont très efficaces : elles produisent l'ionisation des gaz, affectent l'état solide en produisant l'effet photoélectrique. (On peut en passant se demander quel sera le résultant d'une exposition prolongée des métaux constituant l'enveloppe du satallite à l'extreme ultraviolet solaire avec l'intensité qu'on lui connaît d'après les mesures effectuées à bord de fusées).

Il y a l'importante question de la raie $L\alpha$ de l'hydrogène (1215 Å) émise par le Soleil. Il sera non seulement possible de déterminer la variation de l'intensité de cette radiation en function de l'altitude (altitudes comprises entre le périgée et l'apogée), mais le satellite tournant un certain temps autour de la Terre, on aura ainsi le temps de voir comment se manifeste l'activité solaire, avec les éruptions, les sursauts, la nature des centres actifs, etc., quant à l'émission de $L\alpha$. Pour cela on dispose des tubes photo-compteurs à oxyde nitrique gazeux enfermé dans une ampoule à fenêtre de fluorure de lithium opaque aux radiations $<$ 1.110 Å. L'oxyde nitrique s'ionisant au-dessous de 1.340 Å seulement, on a donc un détecteur très convenable pour $L\alpha$.

Une fusée lancée un jour où il y avait une légère activité solaire ayant montré un renforcement important du rayonnement X solaire, il importe d'étudier le comportement de l'émission solaire dans ce domaine spectral.

L'atmosphère terrestre émet aussi un certain nombre de radiations, soit pendant la nuit, soit au crépuscule. On connaît bien les raies rouges (6.300 Å), vert (5.577 Å) de l'atome d'oxygène neutre, la raie de résonance du sodium, etc. On connaît ces radiations parce qu'on peut les déceler de la surface terrestre. Or tout ce qui est émis dans l'ultraviolet au-dessous de 3.000 Å nous échappe. Tandis qu'avec une fusée, il est difficile d'obtenir un résultat, avec un satellite on aura des chances de mettre en évidence les variations de cette émission reçue par le dessus de l'atmosphère, en fonction de la latitude.

Chubb, Friedman et Kupperian ont proposé de mesurer en même temps que la radiation $L\alpha$ (1215 Å) provenant directement

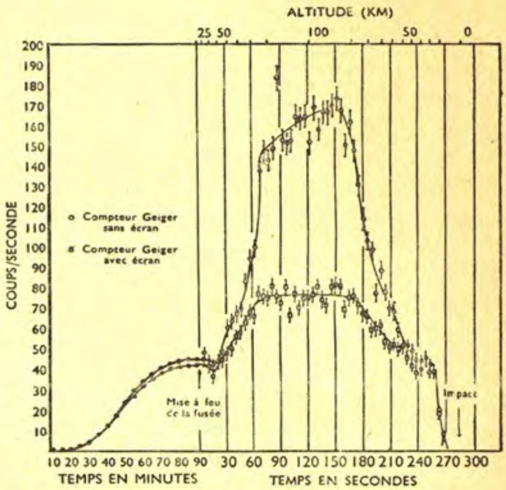


Fig. 3. — Rayonnemente en fonction du temps et de l'altitude.

du Soleil, la même radiation provenant de l'effet de résonance sur l'hydrogène de la haute atmosphère éclairé par le Soleil. Il y a aussi une autre source possible de cette radiation: les atomes d'H sont ionisés par le rayonnement solaire de courte longueur d'onde (ultraviolet et X) ou sont éjectés du Soleil. Une fraction de ces protons se recombinent en donnant un atome excité susceptible d'émettre un spectre continu autour de $L\alpha$.

En utilisant un tube photo-compteur beaucoup plus sensible que celui utilisé pour la lumière solaire directe, il sera possible de distinguer par l'étude de la corrélation des deux résultats au moment d'une éruption l'importance de la radiation de résonance par rapport à la radiation de recombinaison. L'équipe du Naval Research Laboratory a préparé un dispositif expérimental dans ce but.

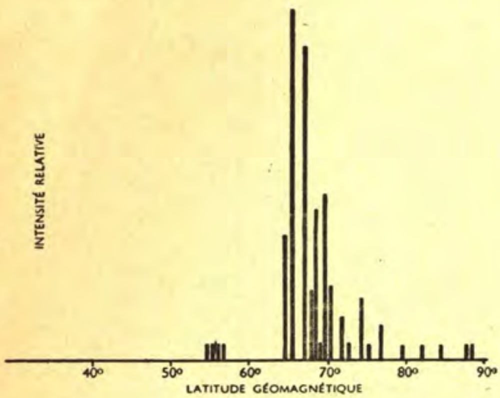


Fig. 4 — Intensités relatives de la radiation molle (mesurée au tube de Geiger sans écran), à haute altitude, en fonction de la latitude géomagnétique.

Il y a aussi le rayonnement mou découvert par J. VAN ALLEN et son groupe en 1953 en lançant dans les régions polaires des Rockoons équipés de compteurs de GEIGER (fig. 3). Ce rayonnement qui serait un rayonnement X (d'une énergie de 10 à 100 Kev et d'une intensité de 10^4 photons /cm²/ sec) est dû au bremmstrahlung des électrons auroraux. Comme on ne le rencontre qu'aux latitudes géomagnétiques voisines de 67° (fig. 4), il y a là toute une exploration à effecteur autour de la Terre, avec des orbites passant par les pôles. L'appareillage pourrait être tout à fait identique à celui utilisé à bord des Rockoons.

6 — Rayonnement corpusculaire

On sait que les observations spectroscopiques de MEINEL sur l'élargissement de la raie $H\alpha$ des aurores polaires a permis de mesurer l'énergie des protons incidents. Celle-ci serait de 0,5 Mev pour des protons atteignant 100 kilomètres, 2,5 Mev pour ceux atteignant 80 kilomètres. Au moment d'une aurore intense, on devrait s'attendre à rencontrer 10^8 protons/ cm²/ sec. Ces données ont permis à W. H. BENNETT de prévoir une chambre d'ionisation pour étudier la distribution du flux de protons autour du globe. Cette chambre serait disposée sur le bord du satellite; ele comporte une rangée de trous disposés en demi-cercle sur son extrémité hémisphérique. Un écran absorvant ayant la forme d'un demi-tore, en nichel, d' épaisseur variable, tourne de manière que l'absorption varie en dents de scie. Un émetteur de rayons α permet un étalonnage en vol et on obtient ainsi le nombre de protons capables de traverser l'absorvante en chaque point de la dent de scie.

Ce rayonnement corpusculaire nous amène au rayonnement cosmique.

7 — Rayonnement cosmique

Un des problàmes les plus intéressants à l'heure actuelle concernant le rayonnement primaire est de déterminer l'abondance relative des noyaux de lithium, beryllium et bore par rapport aux noyaux lourds. Il y a en effet un désaccord flagrant entre les résultats spectroscopiques et ceux relatifs au rayonnement cosmique dans la haute atmosphère.

A bord des ballons, J. Van Allen a déjà utilisé dans ce but le détecteur de Cerenkov (fig. 5), dont les résultats sont susceptibles d'être transmis par télémesure. Malheureusement le temps passé par les ballons dans la haute atmosphère était bien trop court pour avoir suffisament de noyaux lourds.

Mais le problème le plus important est celui de la distribution dans l'espace et dans le temps du rayonnement cosmique. Une approche déjà sérieuse en a été faite par J. Van Allen avec ses rockoons tirés en des points de latitude élevée. Ses résultats sont résumés sur la figure 6. L'appareillage n'est pas compliqué: un simple compteur tubulaire de Geiger dont les indications sont

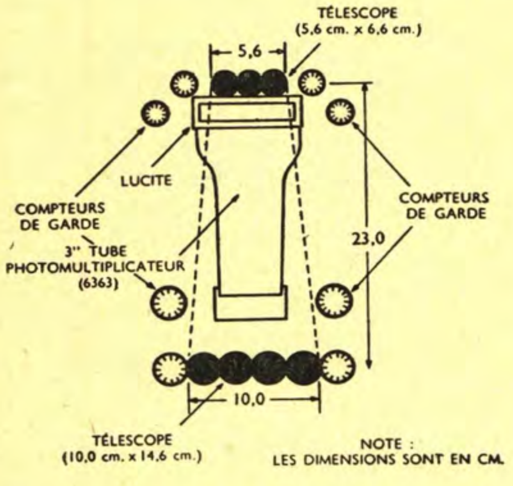


Fig. 5 — Detecteur de Cerenkov pour mesurer en altitude l'intensité des noyaux lourds.

transmises par télémesure. On pourra ainsi enregistrer les fluctuations de l'intensité du rayonnement cosmique, plus importantes en altitude qu'au sol. On verra comment ces fluctuations dépendent de la latitude géomagnétique et à quels autres phénomènes géophysiques et solaires ellles sont liées.

On espère ainsi déceler les zones d'impact solaire sur la Terre. Et la simple dépendance de la latitude de la fraction fluctuante donnera une mesure du spectre de rigidité des particules responsables de la fluctuation.

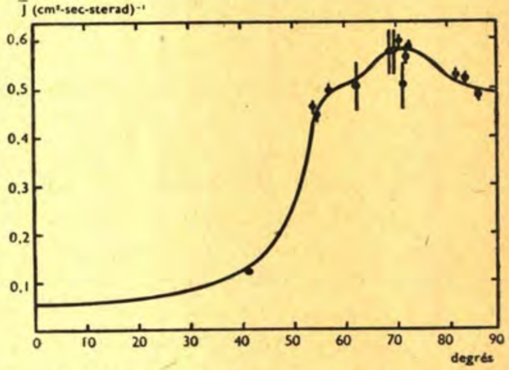


Fig. 6 — Intensité des rayons cosmiques au dessus de l'atmosphère en fonction de la latitude géomagnétique.

Non seulement il sera possible d'interpréter les nombreux résultats recueillis au sol pendant l'A. G. I., mais la radiation primaire sera beaucoup mieux connue.

8 — Camp magnétique terrestre

Il faudra mesurer parallèlement le champ magnétique terrestre, et cela permettra d'expliquer le rôle de spectrographe de masse que joue la Terre vis-à-vis des rayons cosmiques chargés.

Juspu'ici on n'avait mesuré le champ en altitude qu'à bord d'un Aerobee et trouvé qu'à condition de tenir compte des anomalies de surface, il y avait accord avec la loi de l'inverse cube.

Les mesures du champ magnétique total au-dessus des régions fortement ionissées de la haute atmosphère présentent un intérêt certain. Elles permettent de répondre aux questions concernant les orages magnétiques et autres perturbations, certaines théories malgré le grand renom de leurs auteurs étant encore controversées.

J'ai eu déjà l'occasion de décrire plusieurs fois le magnétomètre à résonance magnétique nucléaire déjà utilisé à bord d'Aerobees.

A bord d'un satellite, cet instrument permettrait d'obtenir la distribution spatiale du champ magnétique à l'intérieur de l'ionosphère et de l'exosphère, d'estimer la distribution spatiale et l'altitude des systèmes de courants électriques qui circulent à travers l'ionosphère et au delà, par comparaison avec les résultats des mesures au sol. Il est difficile d'exposer les travaux possibles dans ce domaine à partir de la connaissance complète de la distribution spatiale et dans le temps, du champ magnétique en altitude. Nous avons jusqu'ici bâti des représentations des phénomènes à partir de nos seules connaissances à l'altitude zéro : nous devons nous attendre à des surprises.

Qu'il s'agisse des mesures dans le domaine du magnétisme, des rayons cosmiques, etc, on aperçoit l'intérêt qu'il y a à avoir une trajectoire du satellite passant par les pôles géomagnétiques.

II — Expériences indépendantes des instruments de bord

1 — Détermination da la densité de l'air

L'étude du mouvement du satellite permet d'atteindre la densité du milieu dans lequel il se propage. En effect, la force retardatrice qu'oppose l'air de densité ρ à un satellite de section efficace A, se déplaçant à la vitesse v est :

$$F = \rho \cdot A \cdot v^2$$

Considérons d'abord le cas le plus simple d'une *orbite circulaire*. La trajectoire sera une spirale. La variation d'énergie pendant une révolution este donnée par :

$$\Delta W = -2\pi r F$$

r étant le rayon de l'orbite.

Si la masse du satellite est M, l'énergie totale $= \frac{1}{2} M v^2$.

On peut calculer la variation relative de période pour une révolution, on trouve que :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{3\Delta W}{2W} = \frac{6\pi r \; A\rho}{M}$$

Si l'on prend un satellite de 10 kilogrammes, dont la section efficace soit 3.10^5 centimètres carrés se déplaçant à une altitude de 300 kilomètres et si l'on prend la valeur la plus probable de ρ: $4{,}10^{-15}$ g/cm^3, on trouve pour une seule révolution $\frac{\Delta P}{P} =$ $= 1{,}7 \cdot 10^{-5}$.

Si on effectue un calcul d'erreurs, on voit que si la précision relative, obtenue après 10 révolutions sur la mesure de P est 10^{-6}, la densité moyenne sera déterminée à quelques p. 100 près. Il sera même possible de mettre en évidence des fluctuations de densité de l'ordre de 10 p. 100.

Si l'on considère le cas réel d'une *orbite elliptique*, on pourra utiliser deux méthodes :

1° examiner la perturbation de l'orbite pendant une seule révolution ;

2° procéder comme ci-dessus.

Pour la première méthode, il faudrait disposer d'observations astronomiques, suffisamment précises, ce qui est tout à fait possible.

Quant à la deuxième méthode, L. Spitzer a donné les calculs qui à partir des variations du grand axe et de l'excentricité, permettent de déterminer la densité entre le périgée et l'apogée. Ils sont un peu compliqués pour être exposés ici.

Pour être complet, je dois signaler que Jastrow et Pearse ont montré que le ralentisssement du satellite provient non seulement des collisions avec les atomes ou molécules, mais aussi des pertes électrostatiques dues au passage d'une sphère chargée dans un milieu ionisé. Les deux effets sont à peu près du même ordre de grandeur à l'altitude de 500 kilomètres.

2. — Distribution ionique

Le Ballistic Research Laboratory a développé un radiothéodolite qui permet si le satellite émet une onde sinusoïdale pure de déterminer sa trajectoire. Deux récepteurs sont situés à chaque extrémité d'une base. Les deux récepteurs mesurent la différence de phase entre les deux ondes reçues. Si la fréquence est suffisamment élevée pour ne pas être affectée par l'ionosphère, cette différence de phase est fonction de l'azimut et de la hauteur de l'émetteur. Quatre récepteurs placés aux 4 coins d'un carré fournissent à la fois l'azimut et la hauteur de l'émetteur.

Deux carrés disposés à chaque extrémité d'une base suffisamment longue donnent 4 angles, c'est-à-dire une surabondance de donnés pour déterminer la trajectoire par rapport à la base.

Deux sortes d'informations peuvent être obtenues : les donnés sur la phase fournissent la position du satellite. Mais l'installation d'un émetteur de référence au sol permet d'atteindre la vitesse radiale par la mesure de l'effet DOPPLER. (Il faut pour cela un filtrage après détection et opérer sur une bande très étroite: 1 c/s). Pour l'effet DOPPLER des filtres à bande relativement large sont nécessaires.

Si maintenant la fréquence de l'émetteur est telle qu'elle soit affectée par l'ionosphère, la vitesse de phase est modifiée, si bien que l'effet DOPPLER mesuré différera de celui obtenu en l'absence d'ionosphère ou avec une fréquence non affectée par l'ionosphère.

L'importance de cette différence dépend de la vitesse radiale, de la fréquence de l'émetteur et de la distribution des charges électriques dans l'ionosphère. Si donc on connaît la vitesse radiale, en utilisant la fréquence non affectée par l'ionosphère, il est possible de déduire la distribution électronique.

Une méthode complète de calcul a été mise au point par W. BERNING.

Il y a toutefois quelques difficultés. La fréquence de l'émetteur n'est peut-être pas suffisamment stabilisée. Aussi faut-il la déterminer par comparaison à la fréquence de référence aux instants où la vitesse radiale est nulle.

Cette méthode est donc applicable avec les deux fréquences 20 et 40 Mc/s émises par les «Spoutnik».

3. — Nombre total des charges

Il est possible de déterminer aussi la densité électronique intégrée le long du parcours satellite- observateur terrestre: nombre d'électrons contenus dans une colonne cylindrique de section droite unité.

On peut pour cela utiliser le fait suivant: une onde polarisée rectilignement, de fréquence suffisamment élevée qui traverse l'ionosphère se dédouble en deux ondes polarisées circulairement en sens opposés et qui se propagent avec des vitesses différentes. Ces deux ondes sont équivalentes à une onde polarisée rectilignement, dont le plan de polarisation tourne. HATANAKA a montré que la rotation θ est donnée par :

$$\theta = 2{,}97 \cdot 10^{-2} \cdot H \cdot f^{-2} \cos\theta \int N \mathrm{d}r$$

où N est la densité ionique
  dr l'élément de parcours
  H le camp magnétique terrestre
  θ l'angle du champ magnétique terrestre avec la direction de propagation
  f la fréquence de l'onde transmise.

Le tableau donne l'ordre de grandeur de la rotation

f		θ
200	Mc/s	6 rad.
400	—	86°
800	—	21°5

L'orientation du plan de polarisation du signal reçu peut être déterminé à l'aide de deux antennes de réception polarisées circulairement et d'un déphaseur permettant de faire varier d'une façon continue la phase des sigaux captés par les deux antennes. On amène sur un oscillographe cathodique la sortie du détecteur sur les plaques verticales et le déphaseur sur le balayage horizontal. Cela permet un enregistrement photographique.

Pour un lieu donné du globe, il sera possible de déterminer le nombre d'ions par unité de surface compris entre le sol d'une part et d'autre part les altitudes allant du périgée à celle de l'apogée. Si on connaît par un sondeur classique utilisant la méthode des échos la distribution ionique en fonction de l'altitude jusqu'au maximum d'ionisation de F_2, on aura ainsi le moyen d'atteindre les couches situées au-dessus de ce maximum, plafond habituel des méthodes classiques.

Conclusion

Je vais devoir m'arrêter là dans mon énumération des travaux possibles à l'aide des satellites artificiels. On a même proposé d'étudier la distribution verticale de l'ozone qui est plus aisée avec des moyens moins puissants: un simple ballonsonde ou une fusée Monica. J'ai limité volontairement mon exposé aux utilisations géophysiques et encore n'ai-je pas parlé de la mesure de l'aplatissement de la Terre, étant seulement un spécialiste de l'atmosphère.

Mais au point de vue de la physiologie, l'intérêt est au dire des spécialistes très grand, ce qui expliquerait le sacrifice de Leika.

Et puis il y a l'intérêt astronautique, mais là c'est un domaine si vaste et si digne d'intérêt qu'il mériterait à lui seul toute une conférence.

Je me suis volontairement limité au point de vue de ma spécialité. S'il est une conclusion que l'on peut tirer, c'est que l'envoi d'un seul satellite mériterait que les scientifiques de toutes les nations participent aux études qu'ils peuvent faire, connaissant seulement les fréquences émises. Cela aurait été une belle tâche pour le Comité d'Organisation de l'A. G. I. de discuter des trajectoires, des lieux d'observation, de la mise en commum des résultats. Ce faisant les Spoutnik et autres Pamplemousse n'auraient plus pour conséquence de désunir les hommes, mais de les unir pour le plus grand bien de la science.

(*) No n.° 68-69 disse-se ser propósito da Gaz. de Mat. informar os Leitores, na medida do possível, sobre determinados problemas que surgiram recentemente relacionados com as realizações do Ano Geofísico Internacional. O presente artigo é a reprodução duma Conferência subordinada ao mesmo título, feita pelo Professor de Física da Atmosfera, da Universidade de Paris, ETIENNE VASSY, no Palais de la Découverte em Paris. Pelas démarches realizadas e facilidades concedidas para a presente reprodução, a Gaz. Mat. manifesta profundo reconhecimento a M. M. ANDRÉ LÉVEILLÉ, Director do Palais de la Découverte e ETIENNE VASSY.

J. G. T.

Notas sobre os fundamentos do Cálculo das Probabilidades

por L. Albuquerque

1. Para uma análise, sumária embora, dos fundamentos do Cálculo das Probabilidades, é necessário prestar atenção pelo menos a dois problemas, qualquer deles de extraordinário interesse para se avaliar da actual posição deste capítulo da Matemática. Em primeiro lugar, a exposição dos seus fundamentos históricos, o que permitirá acompanhar a evolução que o trouxe do seu domínio inicial, extremamente restricto, aos vastíssimos campos a que hoje se aplica; depois, importa fazer a análise dos fundamentos matemáticos a partir dos quais presentemente se estrutura a teoria das probabilidades, tornando-a apta, com o carácter de generalidade de que assim se reveste, a intervir com êxito nesses vários domínios de aplicação.

2. Além destes dois aspectos fundamentais, a que nos iremos referir em seguida, seria ainda de tratar o das implicações de ordem filosófica que o C. das P. sugeriu e sugere, pois a sua importância imediata só talvez tivesse sido igualada pelas consequências da mesma ordem que se inferiram da moderna teoria dos conjuntos. O facto do C. das P. se ocupar do comportamento de fenómenos que podem ter ou não ter lugar quando se produza um dado complexo de condições (fenómenos estocásticos), pode-se dizer que foi desde a sua origem uma causa de embaraços; e uma boa parte das controvérsias de carácter especìficamente filosófico que o conceito de probabilidade desencadeou, foram devidas a equívocos que aí nasceram, quando não prontamente corrigidos.

3. Mas desde que o C. das P. passou a intervir decisivamente nas teorias físicas, e sobretudo a partir da sua contribuição à mecânica quântica, tais dificuldades perturbam muito menos os matemáticos: ou porque foram resolvidas, como se pode dizer que sucedeu com o problema dos seus fundamentos lógicos; ou porque perderam o interesse em face de situações *de facto*. E isto a despeito de não ter sido possível conseguir um acordo completo sobre alguns dos pontos em discussão, e da necessidade que talvez houvesse em aclará-los.

4. Sobre a própria noção basilar da teoria — a noção da probabilidade — houve e persistem divergências. E nem é necessário citar o caso de VON MISES, introduzindo uma noção que conduzia à impossibilidade de definir numèricamente a probabilidade, para se ter uma ideia dos extremos a que se chegou: POINCARÉ, por exemplo, considerava de todo impossível dar «uma definição satisfatória de probabilidade».

A questão, posta nestes termos, tem hoje menos interesse. FORTET (1) ao referir-se às relações, de um ponto de lista filosófico, entre a probabilidade e a frequência relativa, escreveu recentemente: «os matemáticos não estão neste momento muito interessados em tal problema». Razão porque dele não trata nesse artigo em que, sublinhe-se, se ocupa dos mais recentes progressos do C. das P.

(1) «Recent advances in probability theory», in *Surveys in Applied Mathematics*, vol. IV, 1958.

5. Apesar disso, são de citar algumas tentativas que têm sido feitas para se apresentar uma noção de probabilidade inequìvocamente objectiva; é claro que além desse carácter essencial, exige-se-lhe que ofereça maleabilidade que a torne aplicável a todos os desenvolvimentos da doutrina, e não negue as definições que antes foram usadas na construção da teoria. Este duplo objectivo pode, no entanto, ser alcançado de mais de um modo.

6. De um ponto de vista prático, basta efectuar uma síntese entre as definições clássica e estatística de probabilidade. Mas teòricamente, é o aspecto lógico do problema o que mais interessa: parte-se dos dados experimentais, introduzindo-se definições e axiomas que reflectem a realidade mas se revestem de carácter abstracto; a partir deles se edifica depois, por operações lógico-matemáticas, um corpo de doutrina que, na sua estrutura, tem por modelos a Geometria ou a Teoria dos Grupos.

Todavia, entendem alguns que no primeiro caso a noção de probabilidade oferece uma duplicidade, nessa origem diversificada pelos dois aspectos distintos que intervêm na síntese. Os críticos da segunda solução insistem principalmente sobre a circunstância de se transferir o problema para a teoria da medida [1].

7. Porém, para se estabelecer de um modo concreto a noção de probabilidade, é fora de dúvida que o caminho mais indicado seria o de acompanhar a «história» do processo aleatório que a ela conduz em cada caso. E foi o que logrou fazer KHINTCHINE (1952), introduzindo no estudo de tais processos um método a que chamou das funções arbitrárias. Para KHINTCHINE a estabilidade da frequência relativa, em que se baseia a definição estatística, *é um facto experimental*. A questão resume-se, portanto, a elaborar um método analítico que permita reconhecer os efeitos dessa lei.

8. A despeito das dificuldades que seriam de prever na realização prática desta ideia, KHINTCHINE ensaia e consegue concretizá-la, muito embora, no trabalho que conhecemos [1], se limite a considerar exemplos muito simples. Um dos casos aí estudados é o da probabilidade de saída da cor vermelha num lançamento de roleta (fenómeno A). Este acontecimento tem ou não tem lugar consoante o valor da velocidade inicial com que a pequena esfera de marfim é lançada sobre o marcador; supondo que a «distribuição» das velocidades iniciais, *que em última análise condicionam* A, é dada por uma função $f(v)$ (onde f apenas está sujeita às condições de ser sempre positiva ou nula, e integrável no sentido de LEBESGUE), KHINTCHINE *mostra que, qualquer que seja* f, *o valor da frequência de* A *é sempre* $\frac{1}{2}$.

O autor analisa depois sob que hipóteses este método poderá ser aplicável a outros casos.

É inegável o interesse de tais investigações: garantida que seja a estabilidade da frequência relativa por métodos da Análise Matemática, a definição estatística da probabilidade passará a oferecer uma objectividade segura.

---

[1] O recurso à teoria da medida e à teoria das funções é por vezes apontado como que uma perda de *pureza* dos fundamentos do C. das P. Os autores de tais reparos apontam, em geral, o modelo da geometria euclidiana como típico de uma construção axiomática *pura*, esquecendo-se de que todo um livro dos *Elementos* é dedicado a questões de Aritmética.

[1] «La méthode des fonctions arbitraires», in *Questions Scientifiques*, Paris, 1954, tomo V.

9. Passemos, entretanto, ao primeiro problema indicado no n.º 1. Os primeiros acontecimentos aleatórios sujeitos a um estudo matemático foram os jogos de azar, principalmente de cartas e de dados, vício muito generalizado sobretudo a partir do Renascimento. Os problemas que no jogo surgiam — a propósito das «entradas», ou a respeito do «risco» e da divisão do «bolo», se o jogo era interrompido antes do final — exigiam o recurso a uma «aritmética» pouco corrente, que nem sempre punha de acordo os interessados.

Não surpreende por esta razão que o primeiro escrito de C. das P. fosse um pequeno tratado sobre os jogos de azar: escreveu-o CARDANO, por meados do século XVI, sob o título *De ludo aleae.* E só à pouca clareza com que está escrito acreditamos que se deva a circunstância de não ter sido pràticamente notado até há poucos anos (1).

10. É verdade que as notas e observações de CARDANO sobre as leis dos jogos, o comportamento das variáveis que neles entravam e as soluções apresentadas nem sempre estão isentas de erros. Apesar desses lapsos, de que o próprio autor por vezes se dá conta, tem de se apontar CARDANO como o pioneiro da aplicação da Matemática ao estudo dos fenómenos estocásticos, pois o *De ludo aleae* estabelece métodos válidos para o estudo de problemas desta natureza, além de criar noções que seriam o ponto de partida para o ulterior desenvolvimento do C. das P.

Partindo de casos de igual probabilidade nas combinações de um jogo (e ao seu conjunto dava ele o nome de «circuito»), CARDANO introduz numèricamente a noção de probabilidade; determina correctamente a probabilidade de um acontecimento se produzir em n ensaios repetidos independentes, conhecida a probabilidade (constante) de se dar em cada um deles; recorre familiarmente, e com acerto, à soma das probabilidades dos acontecimentos incompatíveis; etc. (1).

11. Alguns dos problemas tratados por CARDANO foram retomados na correspondência trocada entre PASCAL e FERMAT a respeito ainda de problemas de jogos, e que habitualmente se aponta como iniciadora do C. das P. Mas se é verdade que os dois grandes matemáticos do século XVII deram de alguns deles soluções mais perfeitas do que as encontradas por CARDANO (o «problema dos pontos», por exemplo), é igualmente exacto que não aparece naquelas cartas qualquer noção que não tivesse já aparecido no *De ludo aleae.*

12. Versa ainda o mesmo assunto um pequeno livro de HUYGHENS intitulado *De ratiocinius in ludo aleae*, traduzido em latim na segunda metade do século XVII. Em catorze proposições HUYGHENS trata de casos concretos dos jogos de azar, e termina o folheto propondo ao leitor cinco problemas, de que BERNOULLI apresentaria as soluções no célebre tratado intitulado *Ars Conjectandi.* Uma observação, no entanto, singulariza HUYGHENS relativamente aos seus predecessores: de facto, *ele prevê que os cálculos ali desenvolvidos a propósito dos jogos, possam vir a ser usados na formulação de uma «útil e interessante» teoria.*

---

(1) Servimo-nos da ed. americana deste livro, preparada, comentada e editada por OYSTEIN ORE sob o título: CARDANO, *the gambling scholar*, Princeton, 1953.

(1) Diz GNEDENKO (ob. cit. no final, p. 338) que alguns autores adiantam ter CARDANO esboçado a «lei dos grandes números», na forma de BERNOULLI. O próprio BERNOULLI na *Ars Conjectandi*, refere que o resultado por ele alcançado não era novo; todavia, nada encontramos na obra de CARDANO que sugira, mesmo indirectamente, tal enunciado.

13. A previsão de HUYGHENS não demorou a ser confirmada: Alguns anos decorridos sobre a tradução latina daquela obra, o inglês JOHN de GRAUNT dava o primeiro exemplo de aplicação do C. das P., usando-o para estabelecer os princípios da demografia. Baseado em registos coligidos para a cidade de Londres, GRAUNT tentou e conseguiu estabelecer coeficientes de mortalidade para cada idade (1).

Advirta-se, no entanto, que o trabalho de GRAUNT não foi a única tentativa de aplicação da teoria das probabilidades a domínios alheios aos jogos de azar, embora fosse o único em que, por essa época, se alcançou algum sucesso.

14. BERNOULLI, na IV parte da sua *Ars Conjectandi* iria mais detidamente ocupar-se da utilização do C. das P. em questões de índole prática diferentes das sugeridas pelos jogos de azar, concluindo satisfatòriamente pela legitimidade dessa utilização. Essa parte da obra intitula-se «do uso e aplicação da doutrina dos jogos de azar às coisas civis, morais e económicas», diligenciando o autor definir para os fenómenos aleatórios «naturais», como para os jogos, uma probabilidade — o que leva a recorrer aos dados estatísticos.

15. O carácter aleatório que certos fenómenos apresentam é, para BERNOULLI, o resultado do desconhecimento (total ou parcial) em que nos encontramos acerca das leis físicas ou naturais que os regem. Notando que a estrutura de tais fenómenos não era absolutamente equivalente à dos jogos de azar, onde à priori se pode conhecer uma relação numérica entre os casos possíveis e os casos favoráveis, BERNOULLI observa: «O que não é dado conhecer à priori, será ao menos possível colhê-lo à posteriori, isto é, do sucesso observado muitas vezes em casos semelhantes».

Adoptava-se, portanto, um ponto de vista estatístico, tomando-se como probabilidade o valor da frequência relativa — o que, de resto, é esclarecido no texto com um exemplo. A «lei dos grandes números», que pela primeira vez se demonstra na *Ars Conjectandi*, relacionava aleatòriamente os dois conceitos.

16. Esta solução apresentada por BERNOULLI, por discutível que alguns autores a considerassem (como aconteceu), teve o mérito de apontar como o C. das P. era um fecundo meio de investigação em estudos de vária natureza; ao mesmo tempo, tornava a noção de probabilidade muito mais maleável, o que oferecia interesse até para as aplicações a problemas de jogo.

Um exemplo muito simples justificará esta afirmação: admitamos que se joga com um dado de forma cúbica perfeitamente regular, mas com o centro de massa um pouco deslocado do centro de figura. As noções de probabilidade, desde CARDANO, concordariam em dar a qualquer dos pontos, num lançamento, a probabilidade 1/6, o que é incorrecto. Ora a determinação da probabilidade à posteriori, no sentido de BERNOULLI, permitiria corrigir este erro. Quer dizer: enquanto até as observações da *Ars conjectandi*, a respeito de um problema tão simples, as regras do C. das P. apenas se poderiam aplicar quando se tratasse de dados geomètricamente perfeitos e de *massa homogénea* — isto é: *dados ideais* — a partir de BERNOULLI essas condições deixam de ser indispensáveis, e a teoria das probabilidades passaria a poder ser aplicada a dados *reais*.

17. Depois da publicação da obra de BERNOULLI as aplicações do C. das P. multi-

(1) Seria talvez desnecessário observar que os resultados atingidos por GRAUNT vinham afectados de erros fortes; não só pela incipiência dos métodos a que recorreu, mas também pela imprecisão dos dados oferecidos pelos registos.

plicaram-se, e em geral com êxito absoluto. Em fins do século XVIII já o valor objectivo dos resultados assim conseguidos era quase geralmente aceite. Um facto ocorrido com LAPLACE sublinha a confiança que se depositava em tais métodos: LAPLACE verificou a existência de uma anomalia na taxa dos nascimentos de crianças do sexo masculino nos registos de Paris, em relação às de outras cidades; o que o levou a pensar que um factor *sistemático* interviria como causa da alteração verificada na frequência relativa desse acontecimento *aleatório*. E tinha razão nessa suspeita, como ele próprio averiguou, pois entre as populações rurais dos arredores daquela capital, corria o hábito de se mandarem pôr na roda dos expostos na cidade, os recém-nascidos varões...

18. Na *Ars Conjectandi* apontam-se, como acabamos de ver, os dois caminhos que levavam à definição numérica de probabilidade. O primeiro, que conduz à chamada definição clássica, parte da consideração de casos igualmente possíveis com fundamento em situações de simetria, tomando a relação daqueles que são favoráveis ao acontecimento que nos interessa, para o número total dos acontecimentos a que o complexo de condições pertinente à questão em causa pode dar lugar. O segundo caminho infere a probabilidade da experiência estatística, registando o número de vezes que aquele acontecimento se produz em um grande número de ensaios.

19. Antes de passarmos adiante convém fazer uma observação. Quando a um acontecimento aleatório se podem aplicar as duas definições, verifica-se que os valores obtidos para a probabilidade estão próximos um do outro (supondo-se a probabilidade estatística definida sobre um grande número de ensaios), mas não coincidem, em geral; como em geral não coincidem entre si os valores da frequência relativa para diversas séries de ensaios.

Esta circunstância, e as interpretações pouco correctas do conteúdo do teorema de BERNOULLI [1], constituiram a origem de perturbações para alguns autores, e possibilitaram a solução idealista de VON MISES [2], que hoje está abandonada mas conheceu o seu período de prestígio.

Uma observação trivial de FRÉCHET esclarece, ao que supomos, a questão. FRÉCHET considera um «valor médio» da frequência relativa, constante para cada fenómeno aleatório e caracterizando-o do ponto de vista estocástico; esse «valor médio» será a *probabilidade natural* do fenómeno considerado. Se diversas experiências de um grande número de ensaios dão valores diferentes, mas não muito afastados uns dos outros, para a frequência, esse facto deve ser, ainda segundo FRÉCHET, encarado com a mesma significação que têm as discordâncias encontradas quando se mede diversas vezes uma grandeza física.

20. Vamos agora ver como, a partir de KOLMOGOROV (1933), e com recurso à teoria

---

(1) Recorde-se que o teorema de BERNOULLI, supondo que em n ensaios se produz μ vezes o acontecimento A de probabilidade p, se exprime por

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\delta\right\}=1,$$

onde $P\{\cdots\}$ indica a probabilidade que seja

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\delta.$$

(2) O ponto de vista de VON MISES é exposto por K. DÖRGE em «Zu der von R. VON MISES gegebenen BEGRÜNDUNG der WAHRS. 2. Mittellung: Allgemein Wahrscheilichkeitheorie», *Math Zeit.*, 40 (1936), pág. 162. (Não conhecemos, no entanto, a primeira parte deste trabalho, que foi publicada no Vol. 32 da mesma revista).

da medida e à teoria das funções, se pode dar ao C. das P. uma base axiomática [1].

Seja U um conjunto a cujos elementos (de qualquer natureza) chamaremos *acontecimentos ou fenómenos elementares.* Consideremos uma família $\mathcal{E}$ de sub-conjuntos de U (e tal que $U \in \mathcal{E}$) que se designará por *corpo boreliano* de *acontecimentos aleatórios* e verificará as seguintes propriedades:

1.ª) Se $A \in \mathcal{E} \to \bar{A} \in \mathcal{E}$, sendo $\bar{A} = \{e \in \mathrm{U}\,;\ e \in \bar{A}\}$;

2.ª) Se $A_i \in \mathcal{E}$ $(i = 1, 2, \cdots) \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$;

3.ª) Se $A_i \in \mathcal{E}$ $(i = 1, 2, \cdots) \to \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$;

É sobre os acontecimentos do corpo boreliano que se enunciam os axiomas de KOLMOGOROV, depois de definidos o acontecimento certo (U); o acontecimento impossível $(V = \bar{U})$; acontecimentos incompatíveis $(A \cap B = V)$; e acontecimentos contraditórios $(A \cap B = V$ e $A \cup B = U$; portanto: $\bar{A} = B)$.

21. Defina-se agora sobre o corpo boreliano $\mathcal{E}$ uma medida P, que suporemos *real*, *normada* e *σ-aditiva*, — quer dizer, verificando os axiomas:

I. A cada $A \in \mathcal{E}$ corresponde um número não negativo $P(A)$. A $P(A)$ chamar-se-à *a probabilidade de* A.

II. $P(U) = 1$.

III. Quando os acontecimentos aleatórios $A_k \in \mathcal{E}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ são dois a dois incompatíveis (isto é: se $A_i \cap A_k = V$, $i \neq k$), tem-se:

$$P\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

É de observar que o axioma da σ-aditividade (III) pode ser substituído por um outro, dito da continuidade, que lhe é equivalente:

III'). Se $B_n \supset B_{n+1}$, com $B_n \in \mathcal{E}$ (qualquer que seja n) e além disso $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = V$, tem-se:

$$\lim_{n \to \infty} P(B_n) = O.$$

22. É sobre o sistema $\{U, \mathcal{E}, P\}$ que se pode construir a teoria das probabilidades. Com os três primeiros axiomas deduzem-se todas as propriedades da teoria clássica; o axioma III′ só intervem quando nos ocupamos das leis de probabilidade de uma variável aleatória.

Pode-se verificar que o conjunto de axiomas de KOLMOGOROV é *não contraditório* (dando um qualquer exemplo de um sistema real que os verifica); por outro lado, fàcilmente se verifica também que ele é *não completo*, pois é possível atribuir-se mais do que uma distribuição de probabilidades para os acontecimentos do mesmo corpo boreliano $\mathcal{E}$ construído sobre um dado conjunto U. Todavia, esta última circunstância, longe de ser um defeito da axiomática de KOLMOGOROV, é uma das suas virtudes; o que se reconhece quando estamos em presença de um problema com as características daquele que citamos no n.º 16.

23. Todos os demais conceitos necessários ao desenvolvimento do C. das P. se introduzem depois com generalidade semelhante. A título de exemplo, indicaremos apenas como aparece o de variável aleatória.

Consideremos a função numérica $\xi = f(e)$ definida para $e \in U$. Diremos que ξ é uma *variável aleatória* quando a função f for

---

(1) As primeiras tentativas de axiomatização do C. das P. dignas de referência devem-se a BERNSTEIN, (1917), LOMNICKI (1923) e STEINHAUS (1923). LOMNICKI (in *Fund Math.*, vol. 4 (1923). p. 34-71) supomos ter sido quem primeiro tentou explorar a relação entre a probabilidade e a teoria dos conjuntos, recorrendo à medida de LEBESGUE.

mensurável a respeito da medida P introduzida em $\mathcal{E}$ com o significado de probabilidade.

Esta definição impõe logo a noção clássica de lei de probabilidade de ξ. De facto, sendo f uma função mensurável, qualquer que seja x é mensurável o conjunto $A(f < x)$, no qual a variável aleatória ξ é inferior a x; a lei de probabilidade $F(x)$ será:

$$0 \leqq F(x) = P\{A(f < x)\} = P\{\xi < x\} \leqq 1 .$$

24. Algumas críticas têm sido feitas à axiomática de Kolmogorov, e entre os críticos conta-se o próprio autor que, com Gnedenko, insistiu sobre os seguintes pontos [1]:

a) As noções de conjunto de fenómenos elementares e, portanto, de corpo boreliano, têm um carácter abstracto;

b) Um acontecimento de probabilidade 1 não é necessàriamente *certo*, mas apenas *quase certo*. (Por exemplo: suposto U com a potência c, tem medida unitária qualquer conjunto U' que se obtenha de U extraindo-lhe elementos que constituam um conjunto discreto). De um ponto de vista prático, este facto foi extremamente fecundo no desenvolvimento do C. das P., pois impôs um estudo mais atento dos acontecimentos muito raros ou muito frequentes. A observação de Kolmogorov e de Gnedenko visava, no entanto, pôr em causa uma espécie de conflito desta consequência com a observação empírica e com o axioma II;

c) Finalmente, o axioma que estabelece a σ-aditividade da medida P, é introduzido artificialmente.

25. Tais objecções podem, pelo menos em parte, ser removidas, como o próprio Kolmogorov (1949) e Cos (1955) mostraram. Basta admitir que os acontecimentos de que a teoria das probabilidades se ocupa são elementos de uma álgebra métrica de Boole, quer dizer, uma álgebra $\mathcal{B}$ de Boole tal que a cada $x \in \mathcal{B}$ corresponda um número real $P(x)$, a probabilidade de x, verificando as condições:

I_a) se $x, y \in B$ e $x \cap y = n$ (n elemento nulo de $\mathcal{B}$) $\rightarrow P(x \cup y) = P(x) + P(y)$

II_a) se $x \neq n \rightarrow P(x) \geqq 0$

III_a) se u é o elemento unidade de $\mathcal{B} \rightarrow P(u) = 1$.

u é agora o único elemento de $\mathcal{B}$ com a probabilidade 1; além disso, a σ-aditividade resulta directamente do primeiro axioma [1].

26. Uma outra objecção, e bem mais importante, pois provém de exigências impostas pelas aplicações do C. das P., pode ser feita à axiomática de Kolmogorov. Daremos um exemplo. Em mecânica quântica, se é Ψ a função de onda ligada a uma partícula (Ψ, solução da equação de Schrödinger), a densidade de probabilidade «de presença» da partícula é definida por:

$$P(\vec{r}, t) = \Psi^*(\vec{r}, t) \cdot \Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \geqq 0$$

e deve satisfazer á condição de normalização

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau = 1 ,$$

onde o domínio de integração é todo o espaço. Esta condição é verificada sempre que se trate de um integral convergente, em virtude da homogeneidade da equação de Schrödinger, bastando para tanto «forçar» a solução com um factor constante conve-

[1] Ver Fortet, liv. cit.

[1] Uma construção axiomática do C. das P., não tem de ser necessàriamente iniciada pelo conceito de acontecimento aleatório e correspondente definição de probabilidade. Kawada (1943) procurou uma solução no conceito de variável aleatória.

nientemente escolhido. Se, porém, o integral é divergente, o recurso é considerar como domínio de integração, em lugar de todo o espaço, a chamada «célula de normalização»; assim se remove a dificuldade, mas de um modo manifestamente insatisfatório.

Para dar conta deste e outros casos análogos, propoz-se RÉNYI (1) fazer uma revisão da axiomática de KOLMOGOROV, tomando-a como ponto de partida mas considerando como conceito fundamental a probabilidade de um acontecimento relativamente a outro, e não a probabilidade absoluta.

Podemos resumir os primeiros parágrafos da exposição de RÉNYI deste modo: Considere-se um conjunto U de acontecimentos elementares, e seja $\mathcal{E}$ um corpo boreliano de sub-conjuntos de U, cujos elementos são considerados acontecimentos aleatórios (supõe-se $U \in \mathcal{E}$) tome-se o conjunto $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ não vazio, e defina-se a função de conjunto (com duas variáveis)

$$P(A \mid B) \text{ com } A \in \mathcal{E} \text{ e } B \in \mathcal{E}_1$$

de tal maneira que se verifiquem os axiomas:

α) Quaisquer que sejam $A \in \mathcal{E}$ e $B \in \mathcal{E}_1$ tem-se

$$P(A \mid B) \geqq 0, \quad P(B \mid B) = 1;$$

β) $P(A \mid B)$ é σ-aditiva a respeito de A, quando se fixe $B \in \mathcal{E}_1$. Isto é, se

$$A_k \in \mathcal{E} (k = 1, 2, \cdots) \text{ e } A_i \cdot A_k = V (i \neq k) \rightarrow$$
$$\rightarrow P\Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \mid B\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \mid B)$$

γ) Se $A, B \in \mathcal{E}, C \in \mathcal{E}_1$ e $B \cdot C \in \mathcal{E}_1 \rightarrow$
$$\rightarrow P(A \mid BC) \cdot P(B \mid C) = P(AB \mid C).$$

(1) A. RÉNYI desenvolveu o seu ponto de vista nos dois trabalhos seguintes: «*Axiomatischer Aufbau des Wahrscheinlichkeitsrechnung*», in *Wahrrs und Math. Statistik* (colóquio de Berlin), Berlin, 1956, p. 7; e «On a new axiomatic theory of probability», *Acta Math. Hungaricae.* 6 (1955), p. 285. Num destes trabalhos o A. informa-nos que KOLMOGOROV, já desenvolvera a mesma ideia em um dos seus cursos.

Verificados estes axiomas, o sistema $\{U, \mathcal{E}, \mathcal{E}_1, P(A \mid B)\}$ constitui um campo de probabilidades condicionadas. As suas propriedades deduzem-se então fàcilmente da definição axiomática, como RÉNYI mostra em qualquer das duas memórias citadas (mas mais desenvolvidamente na de publicação mais antiga).

27. A relação do precedente sistema com a axiomática de KOLMOGOROV é fácil de estabelecer. Se $\{U, \mathcal{E}, P\}$ é um campo de probabilidade absoluta no sentido do n.º 21, se definimos $\mathcal{E}_1$ por

$$\mathcal{E}_1 = \{B \in \mathcal{E}; \quad P(B) > 0\}$$

e se pomos

$$P(A \mid B) = P(A) / P(B),$$

o sistema $\{U, \mathcal{E}, \mathcal{E}_1, P(A \mid B)\}$ é um campo de probabilidades condicionadas. Inversamente: de qualquer campo condicional sai um campo absoluto uma vez que se fixe o conjunto $B \in \mathcal{E}_1$ (1).

28. Para concluir, notaremos que o que se pede ao C. dos P., é, afinal, um *índice* ou

(1) Se quizessemos referir aqui todos os trabalhos dos últimos anos sobre os fundamentos do C. das P., teríamos de citar ao menos os resultados recentes a que chegaram alguns matemáticos franceses, que se propuseram analisar o comportamento de variáveis aleatórias muito gerais, admitindo que elas tomam os seus valores em espaços métricos ou em espaços de BANACH. FRÉCHET construiu a teoria para os espaços métricos, introduzindo neles as noções de *valor central* e de *dispersão* de um elemento aleatório; EDITH MOURIER, por seu lado, estudou as propriedades de elementos aleatórios com valores em espaços de BANACH. A este respeito, consulte-se: FRÉCHET: (1) «Les elements aléatoires d'une nature quelconque dans un espace distancié», *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, 10 (1948), p. 215; (2) «Abstrakte Zuffalselements», in *Wahrs und Math. Statistik*, ed. cit., p. 25; R. FORTET: «Normal verteilte Zuffalselemente in BANACH RAÜMEN. Anwendungen auf zuffälige Funktionen», *Wahrs. und. Math. Statistik*, id., p. 29; E. MOURIER: «Elements aléatories dans un espace de BANACH», *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, 13 (1952-53), p. 161.

«informação» sobre o comportamento dos fenómenos aleatórios que ele estuda. O indeterminismo (no sentido estreito), quando relacionado com um esquema de probabilidades, é susceptivel de se prestar à anàlise científica, e a mecânica quântica será talvez o exemplo mais frisante deste facto.

Todavia, a informação que o simples anunciar de uma probabilidade fornece, é por vezes insuficiente ou incaracterística. Como seria natural, foi no campo da prática que tal insuficiência se tornou notada, e foi aí também que pela primeira vez se perguntou se não se poderia ir mais além. A resposta afirmativa foi dada pela teoria da informação, como se pode ler no artigo de J. J. Dionísio publicado neste número da *Gazeta de Matemática*.

BIBLIOGRAFIA

Além das obras ou artigos referenciados nas notas ao texto, servimo-nos na redacção deste artigo de:

[1] Amorim (Pacheco de), «O C. dos P. e a classificação das ciências». *Associação Port. para o Progresso das Ciências*, *Congresso de 1956*. Coimbra, tomo I.

[2] Cardano (J.), *De ludo aleae*, *in The gambling Scholar de* Oystein Ore, Princeton, 1953.

[3] Castro (G. de), *O Cálculo das Probabilidades*. Lisboa, 1956.

[4] Fisz (M.), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und matematische Statistik*. Berlin, 1958.

[5] Fortet (R.), «Opinions modernes sur les fondéments de la probabilité», in *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris, 1948, págs. 207 e ss.

[6] Gnedenko (B. W.), *Lerhbuch des Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, 1957.

[7] Gnedenko (B. W.) e Khintchine (A. J.), *Elementare Einfhürung in die Wahrscheinichkeitsrechnung*. Berlin, 1955.

[8] Halmos (R.), *Measure theory*. Toronto, 1950 (Principalmente o cap. IX).

[9] Kolmogorov (A. N.), *Foundations of the theory of probability*. New-York, 1950.

[10] Loéve (M.), *Probability theory (Foundations. Random sequences)*. New-York, 1955.

[11] Lomnicki, «Nouveaux fondéments du calcul des Probabilités», *Fund. Math.*, 4 (1923), pág. 34.

[12] Steihnaus, «Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure», *Idem*, 4 (1923), pág. 286.

[13] Todhunter (I.), *A history of the mathematical theory of the probability*. 2.ª ed., Now-York, 1949.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Estava já composto e em boa parte impresso este número da *Gazeta de Matemática* quando recebemos notícia da concessão, pela Fundação Calouste Gulbenkian, à *Gazeta de Matemática* e *Portugaliae Mathematica* de subsídios na importância respectivamente de 100.000$00 e 25.000$00.

Impossibilitados assim de dar à notícia o relevo que ela merece não podemos deixar de referir, para o agradecer à Fundação Gulbenkian, o bom acolhimento dado ao nosso pedido. Esse acolhimento, que põe em evidência o reconhecimento, da acção da *Gazeta de Matemática* e da *Portugaliae Mathematica,* pela Fundação Gulbenkian, desvanece-nos pelo estímulo que representa e pelas possibilidades que nos poderá dar de aperfeiçoamento do nosso trabalho.

No próximo número daremos mais pormenorizada notícia do pedido feito à Fundação (a quem reiteramos os nossos agradecimentos), e dos termos da concessão dos subsídios.

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

No dia 23 de Maio de 1959, verificou-se um incêndio no pavilhão onde estavam localizadas as dependências de Física e Matemática do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, à Avenida Wenceslau Braz 71, Rio de Janeiro, Brasil, tendo daí resultado a destruição completa da valiosa biblioteca do referido Centro, sem dúvida uma das melhores do Brasil na especialidade. A fim de reconstituir a referida Biblioteca, o Centro está dirigindo um apelo a físicos, matemáticos e instituições congéneres no sentido de lhe serem doadas duplicatas de publicações disponíveis de Física e Matemática, as quais deverão ser remetidas para o endereço acima indicado.

L. N.

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Em Abril de 1959, teve início a publicação do Noticiário Brasileiro de Matemática, patrocinado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rua São Clemente 265, Rio de Janeiro, Brasil. Esse periódico aparecerá três vezes ao ano, nos últimos dias de Abril, Agosto e Dezembro. Sua finalidade é a de manter os estudiosos a par das actividades matemáticas no Brasil, no que diz respeito a reuniões científicas, professores visitantes, doutoramentos, bolsas, cursos e seminários especiais, conferências, pubicações, etc. Os professores de Matemática interessados em receber regularmente o Noticiário deverão se dirigir ao referido Instituto.

L. N.

EXAMES DE ADMISSÃO
ao estágio nos Liceus Normais

Ano de 1956

Exposições sobre:

I

5004 — Continuidade das funções de uma variável real.

5005 — Perímetro da circunferência. Comprimento de um arco. Área do círculo, sector circular e segmento de círculo.

II

Aritmética Racional:

5006 – Determine dois números inteiros cuja soma é 127008 e que admitam 45 divisões. Indique todas as soluções.

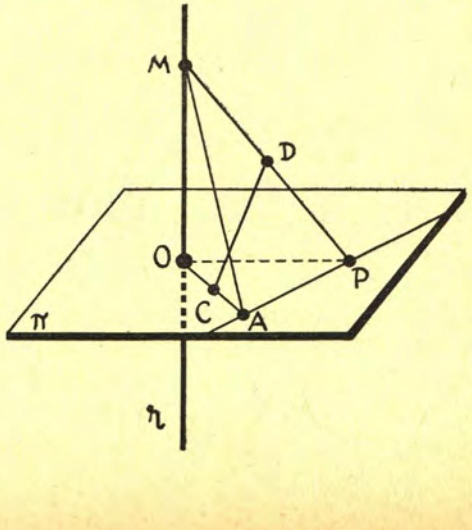
Álgebra:

5007 — Elimine x e y no sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x^2 + y^2 = b \\ x + y = c \end{cases}$$

Geometria:

5008 — Na figura seguinte a recta r é perpendicular ao plano π $(r \perp \pi)$ no ponto O. A recta AP é aposta ao plano π e perpendicular a OA $(OA \perp AP)$.



As medidas dos segmentos $\overline{OA} = a$ e $\overline{MP} = b$ são valores conhecidos.

1) Mostre que

a) $\overline{OM}^2 + \overline{AP}^2 = b^2 - a^2$

b) $\overline{AM}^2 + \overline{OP}^2 = a^2 + b^2$

2) Represente por C e D os pontos médios de $\overline{OA}$ e $\overline{MP}$ respectivamente. Determine $\overline{CD}$ em função de a e b.

3) Represente a projecção ortogonal do tetraedro $[MOAP]$ sobre um plano perpendicular a $\overline{OA}$; indique quais as arestas que se projectam em verdadeira grandeza e como se projecta nesse plano o segmento da perpendicular comum a $\overline{OA}$ e $\overline{MP}$.

Trigonometria:

5009 — A distância dos centros de duas circunferências é a; o ângulo das tangentes exteriores é 2α e o ângulo das tangentes interiores é 2β.

Calcule os raios das duas circunferências.

Aplicação: $a = 714{,}1\,m$; $2\alpha = 36^\circ\ 7'$; $2\beta = 104^\circ\ 12'$; aproxime o resultado a decímetros.

Ano de 1957

Exposições sobre:

I

5010 — Funções monótonas e determinação dos seus máximos e mínimos. (Funções reais de uma variável real).

II

5011 — Duplicação e bissecção do ângulo (discussão e interpretação geométrica das respectivas fórmulas).

Aritmética Racional:

5012 — Determine dois números a e b primos entre si, tais que $a+b$ e $a^2 - ab + b^2$ sejam equimúltiplos respectivamente de 10 e de 91.

Álgebra:

5013 — O polinómio $P(x)$ dividido por $x-1$, $x+1$ e $x+4$ dá respectivamente os restos 15, 7 e -80.

a) Calcule o resto da sua divisão por

$$x^3 - 4x^2 - x - 4$$

b) Determine o polinómio $P(x)$ supondo que é do 4.º grau, que a soma das suas raízes é $S = -4$ e que o seu produto é $P = 8$.

Geometria:

5014 — É dado o tetraedro regular $[ABCD]$ de aresta a.

1.º — Prove que as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares.

2.º — Prove que é um rectângulo a secção feita no tetraedro por um plano conduzido por um ponto de $\overline{BC}$ paralelamente a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e determine o lugar geométrico dos centros desses rectângulos.

3.º — Conduz-se pelo vértice B um plano α paralelo à aresta $\overline{CD}$, dividindo-se o tetraedro em duas pirâmides, uma triangular e outra quadrangular. Determine a posição α_1 do plano α de modo que aquelas duas pirâmides sejam equivalentes.

Trigonometria:

5015 — Considere um triângulo qualquer $[ABC]$ e tire a mediana $\overline{CI}$.

Demonstre que, se x e y são os ângulos que esta mediana faz respectivamente com os lados $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, se tem

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

Aproveite esta propriedade para calcular os ângulos x e y, sendo conhecidos os ângulos A e B, adaptando as fórmulas ao cálculo logarítmico.

Aplicação: $A = 48^\circ\ 27'\ 16''$; $B = 36^\circ\ 42'\ 34''$.

2.ª Chamada

Aritmética Racional:

5016 — Determine um número inteiro de dois algarismos, sabendo que é igual ao dobro do produto dos seus algarismos.

Álgebra:

5017 — Resolva a equação

$$x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 36x + 12 = 0$$

sabendo que o seu primeiro membro é o produto de dois polinómios do 2.º grau com coeficientes inteiros.

Ano de 1958

Exposições sobre:

I — A teoria dos polinómios inteiros a uma variável.
II — A semelhança no plano.

Aritmética Racional:

5018 — Determinar, no sistema de numeração decimal, o número que se escreve com três algarismos no sistema de base 8 e com os mesmos algarismos em ordem inversa no sistema de base 12.

Álgebra:

5019 — Verifique que o polinómio

$$x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)$$

é divisível por

$$(x-y)(y-z)(z-x)$$

e demonstre que o quociente é o polinómio

$$Q_n=-\Sigma x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

em que Σ representa a soma de todos os produtos parciais que satisfazem à condição

$$\alpha+\beta+\gamma=n-2$$

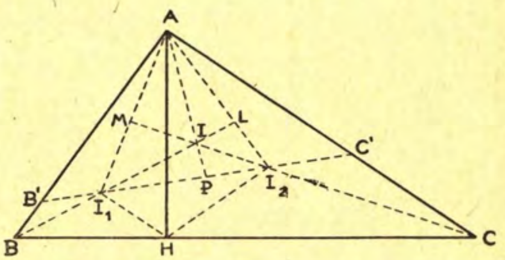
Sugestão: use o método de indução finita.

Geometria:

5020 — Condições da figura junta:

1) O triângulo $[ABC]$ é rectângulo em A; o segmento $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa.

2) Os pontos I, I_1 e I_2 são respectivamente os incentros dos triângulos $[ABC]$, $[ABH]$ e $[ACH]$.



Responda às seguintes questões:

a) Prove que o ponto I é o ortocentro do triângulo $[A I_1 I_2]$;

b) Prove que a distância do vértice A à recta $I_1 I_2$ tem por expressão:

$$\overline{AP}=\frac{\overline{AH}\cdot\sqrt{2}}{2}$$

c) Prove que

$$\overline{I_1 I_2}=\overline{AI}.$$

Trigonometria:

5021 — Considere um triângulo $[ABC]$. Exprima em função da sua área (S) e do seu perímetro $(2p)$ o produto das seis distâncias dos três vértices às três bissectrizes dos ângulos internos.

PROVAS DE CULTURA
para os candidatos admitidos ao Estágio do 8.º grupo sem Exame de admissão no ano de 1958-1959

I

5022 — Faça uma exposição sobre — «Indeterminações de funções de uma variável real».

II

5023 — *a*) Considere o triângulo ABC cujas medianas verificam a condição

1) $m_a^2=m_b^2+m_c^2$

1.º — Determine uma relação entre os lados do triângulo.

2.º — Determine o lugar geométrico do vértice A dos triângulos de base dada $\overline{BC}$, cujas medianas cumprem a condição 1).

5024 — *b*) No triângulo ABC supõe-se conhecidas as medidas dos seis elementos: *a*, *b*, *c*, *A*, *B*, *C*.

Unam-se os vértices *A*, *B* e *C* com o centro *O* de circunferência inscrita, o que determine respectivamente os pontos A' B' e C'.

Calcule as medidas dos ângulos e dos lados do triângulo A' B' C'.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência.

5025 — 1) Estude a série $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Calcule, com erro inferior a $0,01$, a soma da série que se obtém fazendo $x = 1/2$.

5026 — 2) Sejam A, B, C as imagens das raízes cúbicas de um complexo z e seja $[A' B' C']$ o triângulo que se obtém de $[A B C]$ por uma rotação de $+30°$ em torno do centro.

Qual o complexo cujas raízes cúbicas são representadas por $A' B' C'$? Justifique.

5027 — 3) Demonstre que toda a sucessão monótona tem limite.

Seja $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a^n + \cdots$ uma série de termos alternadamente positivos e negativos com $a^{n+1} < a^n$ e $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Pondo $s^n = q_1 - q^2 + \cdots + (-)^{n-1} q^n$ mostre que $s^1, s^3, \cdots, s^{2n-1}, \cdots$ e $s^2, s^4, \cdots, s^{2n}, \cdots$ são sucessões monótonas com o mesmo limite e conclua daí a natureza da série dada.

5028 — 4) Que valores pode tomar o expoente β para que a série $\sum \frac{n\beta}{n^2(n+1)}$ seja convergente? Ache a soma da série quando $\beta = 1$.

5029 — 5) Sabe-se que a sucessão u_n tem uma infinidade de termos posivos e uma infinidade de termos negativos. Pode a sucessão ser convergente? Qual será nesse caso o limite de $(1 + u_n) 1/u_n$? Justifique.

5030 — Seja C o conjunto plano formado pelas imagens dos complexos Z tais que $|Z| C 1$. Quais o ponto de acumulação deste conjunto? Qual o fecho de C? Qual o complementar de C em relação a todo o plano?

5031 — Se u_n e v_n são sucessões convergentes para o mesmo limite e $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$, que sabe de w_n?

Calcule $\lim_{n\to 8} \sqrt[n]{\log n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \log n}$ e deduza daí o valor de $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n!}$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de Frequência — 1. cad. — 2-2-1959.

I

5032 — Considere a correspondência do conjunto de números reais $\{x/0 \leqslant x \leqslant 1\}$ em si, estabelecida pela função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ e verifique:

1) Se se trata duma aplicação daquele conjunto sobre si;

2) Se se trata duma aplicação biunívoca.

Determine ainda:

3) $f^{-1}(A)$, sendo $A = \{x/0 \leqslant x \leqslant 1/2\}$.

II

5033 — Prove, utilizando o método de indução que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

III

5034 — Prove que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

IV

5035 — No espaço linear a 3 dimenssões, represente os vectores dum plano (subespaço linear a 2 dimensões) contendo o vector $\{1, 0, 2\}$ e os pontos $A(0, 1 0)$ e $B(1, 0, 0)$.

V

5036 — Resolva e diga o que representa o sistema

$$\begin{cases} 3x+5y+z=-1 \\ x+y+2z+t=1 \\ 2x+z-t=4 \\ 2y+3z+3t=-2 \\ 3x+y+3z=5 \end{cases}$$

VI

5037 — Prove que, se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$, para todos o $\varepsilon > 0$, existe função poligonal $\varphi(x)$, tal que

$|f(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$, para todo o $x \ni [a,b]$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 19-2-1958.

I

5038—1) Considere os conjuntos $X\{(0,2);3;(4,7)\}$ e $Y\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (n $=1,2,\cdots$) e responda às seguintes perguntas:

a) Interior e fronteira de X e Y.

b) Pontos de acumulação de X e Y. Os conjuntos são fechados?

c) Limites de Weierstrass de X e Y.

d) $X \cup Y$ e $X \cap Y$.

2) Demonstre que todo o número complexo (não nulo) tem n raízes distintas de índice n.

II

5039 — Escrevendo o polinómio $f(z)$ na forma $\varphi(z^2)+z\psi(z^2)$, mostre que o resto da divisão de $f(z)$ por z^2-a é $\varphi(a)+z\psi(a)$.

Aproveite a mesma decomposição para provar que, em polinómio real, raízes imaginárias, se as há, são conjugadas duas a duas.

Seja $g(z)$ o transformado em $\frac{1}{z}$ de $f(z)$ e admita que $g=\lambda f$ (λ constante). Mostre que, nestas condições, $p_k=\lambda p_{n-k}$ e $p_{n-k}=\lambda p_k$ $(k=0,1\cdots n)$ e conclua seguidamente que λ só pode tomar os valores ± 1.

III

5040 — Defina produto de duas matrizes e descreva o processo de multiplicação por partes. Sendo A diagonal, provar que $AB=BA$ se B é quadrada e A, além de diagonal, é escalar.

Utilize o teorema de Rouché para achar a condição a que devem satisfazer α e β por forma que o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ x+y-z&=0 \\ x+3y+3z&=0 \\ 6x+\alpha y+\beta z&=1 \end{aligned}$$

seja: *a*) possível, *b*) impossível.

Se o sistema $a_i^{\alpha} x_{\alpha}=0$ $(i=1,\cdots n)$ é simplesmente indeterminado, mostre que os complementos algébricos das linhas de $|a_i^k|$ são proporcionais.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 20-3-1959.

I

5041 — 1) Dado o conjunto X, infinito e limitado, demonstre qne ele admite um primeiro ponto de acumulação.

Em que condições admite X mínimo?

Sendo X' o conjunto dos pontos de acumulação de X mostre que a união $X \cup X'$ é conjunto fechado.

2) Utilize as fórmulas de Girard para provar que é nula a soma dos produtos k a k das raízes índice n de um número complexo $(k<n)$.

II

5042 — 1) Sejam A e B dois polinómicos com divisor comum. Prove que se tem $AV=BU$ com dois polinómios U e V, primos entre si, inferiores em grau a A e B, e recìprocamente.

Se V divide A demonstre que, então também UV divide A.

2) Para o polinómio $f(z)=6z^4-16z^3-3z^2+$ $+12z+1$, indique, caso existam, ós valores racionais de h que anulam o quarto termo de $f(z+h)$.

III

5043.— Seja $A=|a_i^k|$ $(n \times n)$ uma matriz simétrica. Defina termos, par e impar, da matriz e verifique que o determinante $|A|$ se não altera se multiplicarmos cada elemento a_i^k por l^{k-i} $(l \neq 0)$.

Supondo $|A|=0$, prove que, então, o anulamento do complemento algébrico do elemento a_r^r arrasta o anulamento dos complementos algébricos dos restantes elementos contidos na linha r e coluna r.

Mostre que há sempre constantes $\lambda_1\cdots\lambda_n$, não conjuntamente nulas, que fazem $\lambda^i a_n^i=|A|$ $(i=1,2,\cdots n)$. Indique-as.

Fernando de Jesus

ALGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Algebra Superior — 1.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 20-2-59.

5044 — 1) Mostre que num semi-grupo em que existe um elemento a que é divisor direito e esquerdo, qualquer elemento tem identidade.

5045 — 2) Mostre que se existe um homomorfismo $x \to f(x)$ de $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{g}'$ se tem

$$f^{-1}(A' B') = f^{-1}(A') \cdot f^{-1}(B')$$

e

$$f^{-1}(A'^{-1}) = f^{-1}(A')^{-1}$$

Conclua que a imagem completa e inversa de um subgrupo de $\mathfrak{g}'$ é um subgrupo de $\mathfrak{g}$.

5046 — 3) Um anel em que todo o elemento é idempotente é de característica 2 e comutativo.

5047 — 4) O domínio operatório Ω de um grupo $\mathfrak{g}$ é um grupo. Seja ε a unidade de Ω, todo o elemento é o produto

$$x = x\varepsilon \cdot (x^{-1} \varepsilon x)$$

de dois elementos num dos quais ε dá o endomorfismo nulo e noutro a identidade.

Tiago de Oliveira

F. C. L. — Algebra Superior — 1.º exame de frequência — (2.ª chamada) — 27-2-59.

5048 — 1) Seja $\mathfrak{S}$ um subconjunto de um grupo $\mathfrak{g}$ tal que $x \mathfrak{S} x^{-1} \leqslant \mathfrak{S}$ qualquer que seja $x \in \mathfrak{g}$. Mostre que o subgrupo gerado por $\mathfrak{S}$ é um invariante,

5049 — 2) Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto, $\mathfrak{A}$ um anel e $\mathfrak{F}$ a família de todas as operações f de $\mathfrak{S}$ em $\mathfrak{A}$, definamos em $\mathfrak{F}$ soma e produto de duas aplicações f_1 e f_2 por:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Verifique que $\mathfrak{F}$ é um anel. Em que condições $\mathfrak{F}$ é comutativo?

5050 — 3) Mostre que se $\mathfrak{g}$ é um quase-grupo de operação $a \cdot b$ a solução da equação $a x = b$ define univocamente uma função $r(a_1 b)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ com respeito a operação $r(a_1 b)$ é ainda um quase-grupo.

5051 — 4) Seja E um endomorfismo Ω do grupo $\Omega - \mathfrak{g}$. Mostre que a totalidade dos endomorfismos tais que $xE = x$ forma um subgrupo Ω. Tal subgrupo Ω é um invariante Ω se só se E é normal.

Tiago de Oliveira

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Analise Superior — 1.º exame de frequência — (2.ª chamada) — 6-3-59.

I — Teoria

5052 — 1) Defina substituição linear entre duas variáveis complexas e indique, justificando, o seu significado geométrico no caso mais geral.

5053 — 2) Escreva a fórmula do integral de Cauchy indicando o significado das letras que nela figuram e deduza a partir dela um limite superior do módulo das derivadas da função $f(a)$ por aquela fórmula definida.

5054 — 3) Séries de Fourier no campo imaginário; definição e indicação da sua região de convergência e condições a que, em tal região, deve satisfazer uma função para que tal desenvolvimento lhe seja aplicável.

II — Prática

5055 — 1) Considere a equação diferencial

$$y'^2 + 2x^3 y' = 4x^2 y.$$

a) Integral geral.

b) Integral singular.

c) Condição a impor às coordenadas α e β do ponto $P(\alpha, \beta)$ para que nele passem curvas integrais da equação com a mesma direcção; equação da respectiva tangente, tomando $\alpha = 1$.

5056 — 2) Considere a transformação de z em Z definida pela igualdade

$$Z = \frac{\alpha - iz}{iz - 1}$$

a) Determine α de modo que $z = \dfrac{1-i}{2i}$ seja um ponto fixo da transformação, único.

b) Decomponha aquela transformação (com o valor de α calculado) em transformações elementares e opere a inversão que entre elas se contem na família de rectas de equação $ax + by = 1$, relacionando a e b prèviamente, de modo que as figuras transformadas dessas rectas sejam igualmente rectas.

H. Meneses

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — 1.ª Frequência — 1958-59 — (1.ª chamada) 20-1-59.

Teoria

5057 — Expressão de um vector em função linear de outros.

5058 — Momento de um vector em relação a um eixo. Sua expressão como produto misto. Deduzir das propriedades do produto misto as condições de anulamento do momento.

5059 — Sistema de vectores localizados de automomento nulo.

Prática

5060 — Considere a superficie de equação vectorial.

$$P = 0 + \alpha \cos\beta\, \bar{e}_1 + \alpha \operatorname{sen}\beta\, \bar{e}_2 + \beta\, \bar{e}_3 .$$

Diga que linhas se obtém, fazendo separadamente α e β constantes. Equação do plano tangente num ponto genérico. Escreva a equação vectorial do l. g. dos pontos da superfície tais que o plano tangente à superfície nesses pontos contenha a origem.

5061 — Considere o sistema de vectores formado por

$\bar{v}_1 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ aplicado em A $(4, -2, 2)$
$\bar{v}_1 = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ « « B $(0, 2, 0)$.

Verifique que se trocarmos o ponto de aplicação dos vectores se obtém um sistema equivalente ao primeiro.

Achar o l. g. dos pontos que gozam da propriedade de, trocando os pontos de aplicação dos vectores, se obter um sistema equivalente supondo o ponto B desconhecido.

F. C. L. — Mecânica Racional — 1.ª Frequência — 1958-59 — (2.ª chamada) — 27-1-59.

Teoria

5062 — Produto misto de 3 vectores: suas propriedades.

5063 — Operações elementares da teoria dos vectores localizados sobre rectas. Equivalência dos sistemas de vectores localizados que resulta de aplicar essas operações a um sistema dado.

5064 — Sistemas de vectoores localizados equivalentes a um vector único.

Prática

5065 — Determine a equação vectorial da tangente à linha

$$P = 0 + \lambda\,\bar{e}_1 + (\lambda^2 - 2\lambda + 5)\,\bar{e}_2$$

no ponto correspondente a $\lambda = 2$.

Designe por A e B os pontos de encontro dessa tangente com o eixo dos XX e dos YY respectivamente e determine para que pontos P da linha dada a soma dos vectores $B - A, B - P$ é perpendicular à perpendicular à recta

$$Q = 0 + k\,(4\,\bar{e}_1 - \bar{e}_2).$$

5066 — O sistema de vectores localizados sobre rectas tem por coordenadas vectoriais em relação à origem

$$\bar{R} = \bar{e}_1 - 2\,\bar{e}_2 + 3\,\bar{e}_3 \quad \text{e} \quad \bar{G}_0 = 4\,\bar{e}_1 - 2\,\bar{e}_2 - 3\,\bar{e}_3 .$$

a) Determinar um sistema equivalente ao sistema dado formado por 2 vectores $\bar{u}$ e $\bar{v}$, o vector perpendicular à recta

$$P = 0 + \bar{e}_1 + \lambda\,(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3).$$

b) Suponha no problema da alínea anterior que o módulo do vector $\bar{u}$ é igual a a. Estude a possibilidade do problema para todos os valores de a.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — 1.º exame de frequência – (1.ª chamada) — 14-2-59.

5067 – 1) Supondo n fixo, considere ${}_nC_k$ como função de k, $f(k)$.

Se $n = 2m$, prove que $f(k)$ se torna máxima para $k = m$ e se $n = 2m + 1$ prove que $f(k)$ se torna máxima para

$$k = m \text{ e } k = m + 1 .$$

5068 — 2) Supondo conhecida a fórmula de Bayer, caso particular da fórmula de Bayer-Laplace, quando as probabilidades directas $r\,t = s$, deduza a fórmula correspondente relativa à probabilidade do acontecimente futuro.

5069 – 3) São dadas as urnas $U_1(2,1)$ $U_2(2,1)$ $U_3(2,1)$ e $U_4(3,2)$. Escolhe-se ao acaso uma das urnas, transfere-se ao acaso uma esfera da urna escolhida para uma das 3 urnas restantes escolhida ao acaso, e por fim, extrai-se ao acaso uma esfera da urna para a qual se faz a transferência.

Calcule a probabilidade de que a esfera extraída seja do 1.º tipo.

5070 — 4) Prove que

$$n! \cdot > c \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}$$

sendo $c = \sqrt{2}\,\pi$.

5071 – 5) Dois jogadores A e B disputam ao acaso um jogo que consiste de partidas consecutivas em cada uma das quais A faz o lançamento casual e simultâneo de duas moedas perfeitas e B faz o lançamento casual e simultâneo de 3 moedas perfeitas. Ganha a partida quem lançar maior número de casas do que o adversário, e ganha o jogo quem ganhar uma partida. Supondo que o número de partidas não pode exceder um valor pré-fixado n, calcule as probabilidades de que A ganhe o jogo e de que B ganhe o jogo e determine o limite excedente duma probabilidade.

5072 – 6) Use a desigualdade de Lyapounoff para provar que sendo μ_s o momento absoluto de ordem s da variável casual e $a \geqq c \geqq 0$ se verifica a desigualdade

$$\mu^3_{\frac{a+2c}{3}} \leqq \mu_a \cdot \mu_c^2 .$$

5073 – 7) Calcule o valor médio quadrático da variável casual que tem como valores possíveis as somas dos números de pontos que podem sair num lançamento casual e simultâneo de n dados perfeitos.

5074 – 8) Supondo que a função geratriz dos momentos de uma variável casual tem uma derivada de ordem (positiva) para a qual se anule na origem, mostre que a variável em questão é degenerada na constante zero.

P. Braumann

ASTRONOMIA E MECÂNICA CELESTE

F. C. L. — 1.ª Frequência de Astronomia — 1958-59 (1. chamada) — 30-1-59.

Teoria

5075 — O que é a Rádio-astronomia?

5076 — Qual é a constituição dos anéis de Saturno? Porquê?

5077 — O que entende por paralaxe solar?

5078 – Os meteoros descrevem órbitras bem difinidas no sistema solar? Justifique a resposta.

5079 — Mostre porque é que um erro cometido na determinação da paralaxe dum astro afecta o conhecimento da sua distância à Terra.

5080 — Porque é que se adopta para unidade astronómica de medida a distância da Terra ao Sol.

5081 – O processo trigonométrico pode-se utilizar sempre para a determinação das paralaxes das estrelas? Porquê?

5082 — Defina estrela variável irregular. Indique a importância de algumas destas estrelas.

5083 — As nebulosas planetárias são visíveis à vista desarmada? Porquê?

5084 – A designação estrelas de rádio é apropriada? Porquê?

5085 — O zenite e o nadir geocêntrico tem interesse no estudo do movimento das estrelas? Justifique a resposta.

5086 — As coordenadas equatoriais absolutas dependem da posição dos equinócios? Porquê?

5087 — Existindo um erro dz no valor do ângulo horário de Cyrius, mostre em que posições esse erro afecta menos a determinação do tempo sideral.

5088 — Todos os problemas de transformação de coordenadas se podem resolver gràficamente? Porquê?

5089 — Existem alguns lugares da Terra para os quais o Sol é uma estrela de elongação? Justifique a resposta indicando, no caso afirmativo, quais são.

Prática

5090 — As coordenadas eclípticas de um objecto são:

$$\beta = 34^\circ\ 52'\ 17''.8$$
$$\lambda = 300^\circ\ 10'\ 12''.5.$$

Trabalhe com $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 15''.83$. Determine as coordenadas equatoriais absolutas. Resolução gráfica e analítica.

5091 — Dado um lugar de latitude

$$\varphi = 40^\circ\ 32'\ 12''.4 \text{ Sul},$$
$$\alpha = 70^\circ\ 45'\ 47''.6,$$
$$\delta = -15^\circ\ 34'\ 52''.4,$$

determine o azimute no ocaso e o ângulo horário no nascimento.

R. Vicente

F. C. L. — 1.ª Frequência de Astronomia — 1958-59 (2. chamada) — 6-2-59.

Teoria

5092 — Porque é que se classifica Plutão como um planeta?

5093 — Um comete pode-se confundir com uma nebulosa galáctica? Porquê?

5094 — Qual o melhor método para determinar a paralaxe solar? Porquê?

5095 — A Lua tem atmosfera? Porquê?

5096 — Pode-se determinar a paralaxe geocêntrica de um meteoro? Justifique a resposta.

5097 — Sabendo-se que existe um erro dp na determinação da paralaxe de uma estrela, deduza o erro que provem para a distância da estrela, expressa em parsecs.

5098 — O que é um binário de eclipse? Porque é que se podem observar esses binários?

5099 — O que é uma variável cefeide? Indique qual a importância destas estrelas nos estudos gláctícos.

5100 — As Núvens de Magalhães pertencem á nossa galáxia? Porquê?

5101 — Em que consiste a teoria do estado estacionário do Universo?

5102 — O instante em que um observador vê o nascimento do planeta Júpiter depende da posição do horizonte racional do observador? Porquê?

5103 — As coordenadas horizontais dependem da latitude geográfica do observador? Justifique a resposta.

5104 — As coordenadas eclípticas de uma estrela são sempre independentes do tempo? Porquê?

5105 — Pode-se passar directamente das coordenadas horizontais para as coordenadas eclípticas? Justifique a resposta.

5106 — Conhecendo-se as coordenadas equatoriais absolutas de uma estrela e determinando-se pela observação a sua distância zenital, pode-se determinar, sem ambiguidade, o seu ângulo horário? Justifique a resposta.

R. Vicente

F. C. L. — Mecânica Celeste — 1.º exame de frequência — 1958-1959.

Responda apenas a três questões, uma pelo menos do grupo I.

GRUPO I

5107 — 1 — *a*) Energia potencial dum sistema de n pontos materiais atraindo-se mutuamente segundo a lei de Newton: definição e significado mecânico.

b) Equações diferenciais do movimento absoluto do sistema dos n pontos, em coordenadas cartesianas. Seus integrais primários.

c) Redução do estudo do movimento dos centros de massa dos astros do sistema solar ao caso considerado na alínea anterior.

5108 — 2) O problema dos dois corpos:

a) Enunciado do problema e equações diferenciais do movimento.

b) Mostre que o movimento de qualquer dos corpos é uma cónica de que o outro ocupa um dos focos e determine essa cónica.

Caso da cónica ser uma elípse: lei do movimento sobre a trajectória.

c) O problema dos dois corpos e as leis de Kepler.

GRUPO II

5109 — 1 — *a*) Indique como a partir das leis de Kepler é natural concluir que os planetas se movem sob a acção de forças que os atraem para o Sol e cujos módulos variam na razão inversa do quadrado da distância ao Sol.

b) Um ponto material está sujeito à acção de uma força central sendo a lei de força da forma

$$F = \frac{A + B \cos 2\theta}{r^2}$$

com A e B constantes e tendo θ e r o significado habitual (coordenadas polares).

Mostre que, quaisquer que sejam as condições iniciais, a trajectória do ponto é uma curva algébrica de 4.ª ordem, a não ser que $B = 0$ em que tal trajectória será uma cónica.

5110 — 2 — *a*) Potencial newtoniano dum sistema material contínuo num ponto exterior.

b) Calcular a força do campo newtoniano devido a um cilindro circular recto homogéneo (altura a e raio da base b) num ponto exterior do eixo, à distância c duma das bases.

5111 — 3) Elementos de órbita no caso do problema dos dois corpos (movimento relativo).

Integrais gerais das equações do movimento elíptico tomando os elementos de órbita como constantes arbitrárias.

César de Freitas

CÁLCULO NUMÉRICO

F. C. L. — Cálculo Numérico, Mecanico e Gráfico — **Exame de frequência — 1958-1959.**

5112 — 1) Mostre que não excede 5×10^{-5} o valor absoluto do erro que vem para o valor de

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{51}{x}\right)$$

quando calculado a partir do valor aproximado $x = 7{,}14$.

(Os coeficientes da expressão de y são números exactos).

5113 — 2) Resolver pelo método de relaxação o sistema

$$\begin{cases} 20x - 4y + z - t - 1{,}2 = 0 \\ 2x - 20y - 4z - 2t + 1{,}5 = 0 \\ 3x - y + 20z - 3t + 2{,}3 = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 20t - 1{,}0 = 0 \end{cases}$$

obtendo os valores das incógnitas com duas casas decimais.

5114 — 3) Construir um ábaco cartesiano rectilíneo para representar a relação (entre quatro variáveis)

$$A B^2 = m + 2n + 1 .$$

Indicar o modo de utilizar o ábaco.

5115 — 4) Prepare os elementos necessários à construção dum ábaco de pontos alinhados para representar a relação

$$\frac{1}{u^2} + \frac{2}{v} = \frac{1}{t^3}$$
$$0 < u < 5$$
$$0 < v < 10$$

e indique resumidamente como faria a sua construção.

Pretende-se desenhar o ábaco numa folha de papel de $30^{cm} \times 40^{cm}$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

5116 — Sejam m, n e p inteiros não negativos tais que $p \leqslant m \leqslant n$. Mostre que, para todo o número $a \neq 0$, se tem

$$\frac{1}{n!} = \sum_{p,m=0}^{p,m=n} (-1)^p \cdot \frac{a^m}{p!(m-p)!(n-m)!}.$$

5117 — Mostre que, quaisquer sejam o inteiro positivo n e o inteiro não negativo p, se tem

$$\binom{n+p}{0}\binom{n}{0}+\binom{n+p}{1}\binom{n}{1}+\binom{n+p}{2}\binom{n}{2}+$$
$$+\cdots+\binom{n+p}{n}\binom{n}{n}=\binom{2n+p}{n},$$

onda, pelo símbolo $\binom{m}{i}$ se designa o número de combinações de m objectos, tomados i a i.

Conclua que a soma dos quadrados dos coeficientes do desenvolvimento do binómio $(a+b)^n$ é igual a $\binom{2n}{n}$.

5118 — Sejam x, y e z números positivos tais que

$$x^{1/2} - y^{1/2} + z^{1/2} = (x - y + z)^{1/2}.$$

Mostre que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{y}{z}\right)^n + \left(\frac{z}{x}\right)^n = \left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{x}\right)^n + \left(\frac{z}{y}\right)^n$$

qualquer que seja o inteiro n.

5119 — Sejam A, B, C as medidas dos ângulos internos de um triângulo, a, b, c as medidas dos lados respectivamente opostos e p o semi-primetro. Mostre que

$$(\cos A + \cos B + \cos C + 3)abc = 2p(2p^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

5120 – Dados os polinómios $x^{2n} - x^n + 1$ e $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$, determine uma condição necessária e suficiente a ser satisfeita pelo inteiro positivo n e pelo ângulo α para que o primeiro polinómio seja divisível pelo segundo.

Conclua daí que nenhum polinómio $x^{2n} - x^n + 1$ é divisível por $x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1$ e que uma infinidade de polinómios $x^{2n} - x^n + 1$ é divisível por $x^2 - \sqrt{3}\, x + 1$.

5121 – Dados num plano um ponto A, duas rectas b e c e um triângulo $A' B' C'$, construa, com régua e compasso, um triângulo $A B C$, semelhante ao triângulo dado e tal que B e C pertençam respectivamente a b e c.

Discutir.

5122 – Dados num plano três pontos A, B, C, construa, com régua e compasso, uma recta r que satisfaça às seguintes condições: *a)* a distância de A a r é igual ao comprimento de um segmento dado d; *b)* as distâncias de B a r e de C a r estão entre si como dois segmentos dados m e n.

Discutir.

5123 – Sejam A, B, C as medidas dos ângulos internos de um triângulo e a, b, c os lados respectivamente opostos. Mostre que é condição necessária e suficiente para que o ângulo B seja duplo do ângulo C que se tenha

$$b^2 = (a + c)\, c.$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

129 – C. Berg – **Theories des graphes et ses applications.** — 288 pags. 15×24; 3400 F. – Dunod, Paris, 1959.

A palavra *graphe,* usada pelos matemáticos franceses, é um neologismo que, em certos casos, tem sido traduzida em português por *diagrama.* Os matemáticos ingleses servem-se da palavra *graph,* que tem quase os mesmos inconvenientes do que gráfico. Na definição de Serge:

Diz-se que se tem um gráfico *(graphe)* sempre que se tem:

1.° – Um conjunto X;

2.° – Uma aplicação T de X em X.

Quando for possível os elementos de X, são representados por pontos ligados entre si por segmentos de recta orientados.

A teoria dos gráficos creada, pode dizer-se, por König tem hoje aplicação em capítulos os mais diferentes das ciências. Os simplexes da topologia, são gráficos, bem como o são os esquemas de que o matemático muitas vezes se serve ao representar um conjunto ordenado e mais geralmente um recticulado (estructura). Mas não é só na matemática que os gráficos têm aplicação; na química o esquema duma molecula dum composto orgânico é um gráfico; os sociogramas da psicologia, os circuitos electricos da física, os diagramas de organização da economia, são gráficos, uma arvore genealógica é um gráfico Estes factos dão-nos ideia da importância do estudo abstrato dos gráficos. No livro *Théories des graphes et ses aplications* faz-se o estudo sistemático das propriedades dos gráficos de uma forma acessível e completa. A partir do trabalho de König, o autor estuda os progressos feitos pela teoria, acrescentando os resultados das suas investigações pessoais. Noções e resultados que se encontravam espalhos por revistas ou em pequenas referências em livros, foram aqui reunidos e expostos de maneira sistemática de modo a fornecer ao estudioso o que lhe faltava neste campo: um livro que expuzesse a teoria no seu estado actual. É um livro notável e de aconselhar pois a técnica exposta serve a matemáticos, fisicos, engenheiros, sociologos, economistas, porquanto se aplica às ciências do comportamento, à teoria da informação, à cibernética, à teoria dos jogos, às redes de transportes, às telecomunicações, à teoria dos conjuntos etc. Os títulos dos diferentes capítulos fornece-nos ideia mais completa dos assuntos tratados:

Cap. I — *Definições gerais;*
Cap. II — *Estudo preliminar da descendência;*
Cap. III — *Função ordinal e função de Grundy sobre um gráfico finito;*
Cap. IV — *Os números fundamentais da teoria dos gráficos;*
Cap. V — *Núcleo de um gráfico;*
Cap. VI — *Jogos sobre um gráfico;*
Cap. VII — *O problema do mais curto caminho;*
Cap. VIII — *Redes de transporte;*
Cap. IX — *Teorema dos semi-graus;*
Cap. X — *Ligação de um gráfico simples;*
Cap. XI — *Factores;*
Cap. XII — *Centros de um gráfico;*
Cap. XIII — *Diâmetro de um gráfico fortemente convexo;*
Cap. XIV — *Matriz associada a um gráfico;*
Cap. XV — *Matriz de incidência;*
Cap. XVI — *Arvores e arborescências;*
Cap. XVII — *O problema de* Euler;
Cap. XVIII — *Ligação de um gráfico qualquer;*
Cap. XIX — *Semi-factores;*
Cap. XX — *Conectividade de um gráfico;*
Cap. XXI — *Gráficos planos.*

É um livro que se recomenda aos interessados.

J. Silva Paulo

130 — Joseph Blakey, Ph. D. — **University Mathematics** — *Blackie & Son Limited* — Londres, 581 pag. Preço: 35 s.

O livro é considerado pelo seu autor como livro de texto para alunos de Ciência e Engenharia das Universidades inglesas e contém pràticamente todos os assuntos de matemática exigidos a tais alunos, excluída a geometria projectiva. O próprio autor no prefácio esclarece que a análise não é rigorosa, mas julga que o livro será útil até mesmo a estudantes ingleses liceais (Grammar Schools). Diz-nos ainda o autor que os problemas foram extraídos dos pontos de exame de Matemáticas Puras, da Faculdade de Engenharia da Universidade de Londres.

O livro está escrito de modo a fazer-se compreender pelo estudante médio mas não é uma exposição teórica sistemática das matérias abordadas; podemos dizer que se trata da apresentação de resultados clássicos da álgebra e análise com um mínimo de justificação teórica, e com vista à resolução dos exemplos e problemas de que o livro é um belíssimo repositório. É sob esse aspecto um livro de recomendar Eis o resumo do índice que dá ideia dos assuntos tratados no livro: I. Revisões. II. Limites; convergência e divergência de séries; funções exponencial e hiperbólicas; números complexos. III. Fracções parciais e soma de séries. IV. Diferenciação. V. Integração. VI. Desenvolvimento de uma função em série; máximos e mínimos, e pontos de inflexão. VII. Tangentes, normais, curvatura, diferenciação parcial, etc. VIII. Determinantes. IX. Sistemas de coordenadas da geometria plana; linha recta, circunferência e parábola. X. Secções cónicas — elipse e hipérbole. XI. Equação geral e polar de uma cónica. XII. Sistema de coordenadas no espaço a três dimensões; plano e recta. XIII. Quádricas, esfera, cone, etc. XIV. Área da superfície limitada por uma curva, volume de um sólido de revolução, etc. XV. Equações às derivadas parciais de segunda ordem. XVII. Trigonometria esférica. XVIII. Momento de inércia e movimento harmónico.

J. S. P.

131 — Aristotle D. Michal — **Le Calcule Diférentiel dans les Espaces de Barrach** — Gauthier — Villars, Paris, 1958.

Os trabalhos de A. Michal sobre funcionais, dispersos por várias publicações, foram, por sugestão de M. Frechet, retomados e expostos de uma forma sistemática em um trabalho que Michal deixou concluído antes da sua morte. O presente livro é o primeiro volume da tradução francesa desse trabalho.

A noção de funcional, função numérica de uma variável de natureza qualquer, que nasceu, pode dizer-se, com os trabalhos de Volterra sobre as funções de linha, estendeu-se a outras correspondências entre conjuntos abstratos. O estudo da continuidade de tais *funções gerais* e da generalização das propriedades das funções contínuas ordinárias e do cálculo diferencial levou à noção de derivada de função de linha de Volterra. Mais tarde M. Frechet deu a definição de diferencial, válida nos casos em que o domínio e o contradomínio de tais correspondências são espaços de Banach. A generalização destes estudos às diferentes classes de funções e equações, e a investigação das propriedades da análise clássica válidas para tais correspondências, foi o trabalho a que se dedicou, entre outros, A. Michal. O índice do volume fornece uma visão dos assuntos tratados neste primeiro volume:

Cap. I: Noção de função geral e de funcional. Equações integrais. Cap. II: Espaços lineares normados. Polinónimos. Funções analíticas. Cap. III: Diferenciais de funções de variável abstracta. Cap. IV: Equações F — diferenciais na teoria das equações integrais de Volterra. Cap. V: Equações integrais de Fredholm generalizadas. Cap. VI: Soluções de equações diferenciais como funcionais dos seus coeficientes. Cap. VII. Equações diferenciais verificadas pela função exponencial em espaços abstractos.

J. S. P.

132 — A. J. Pomerans — **Worked examples in Mathematics** — Hutchison of London, 1959.

Trata-se de um livro de exercícios sobre os vários capítulos de matemática que fazem parte do General Certificate of Education (Advanced Level) e dirige-se aos alunos que trabalham para obter esse grau ou se preparam para exames universitários do mesmo nível. Os exercicios resolvidos nem sempre o são, como o autor admite, sob a forma mais simples e o facto deve-se sem dúvida aos conhecimentos que se supõe possuir os candidatos a quem se destinam. Os exercícios ou são baseados nos problemas saídos em recentes exames da Universidade de Londres, ou são mesmo questões propostas nesses exames. É um livro útil a quem se prepara para tal espécie de exame, mas não dispensa como o próprio autor indica, o uso de um bom livro de texto. Eis os vários capítulos sobre que versam os exercícios: Geometria analítica plana; trigonometria; geometria pura; teorema do binómio; análise combinatória; equações do 2.° grau, propriedades dos polinómios e gráficos; propriedades dos triângulos; trigonometria esférica; geometria no espaço; calculo integral e diferencial; volumes dos solidos de revolução.

O livro, que tem 219 páginas, pode ser útil mesmo aos nossos alunos do 7.° ano dos liceus e do primeiro ano das Faculdades de Ciências. A edição é bastante cuidada e aparentemente apresenta poucas gralhas.

J. S. P.

133 — L. D. Landau e E. M. Lifshitz — **Quantum Mechanics** — Pergamon Press — London, Paris.

O Tratado de Física Teórica publicado em 9 volumes pelos professores e académicos da Academia das Ciências da URSS Landau e Lifshitz, é talvez das obras do género, a que mais se tem imposto internacionalmente, quer pela extensão e profundidade quer ainda pela clareza de exposição e meticulosidade de pormenores, não obstante «um dos princípios que guiou a escolha de material tenha sido o de não incluir assuntos que necessitem de apresentação de resultados experimentais».

Assim, vários tem sido os volumes já traduzidos em línguas estrangeiras. *The Classical Theory of Fields* é a tradução inglesa do vol. 2 — *Teoria dos Campos*, o primeiro apresentado ao público científico não conhecedor da língua russa, primeiramente publicada por Addisson-Wesly Pub. Co. e agora por Pergamon Press. Seguiram-se-lhe o vol. 3 — *Quantum Mechamics (non-relativistic Theory)* e o vol. 5 — *Statistical Physics*, ambos editados por esta segunda editora. *Quantum Mechanics* é um volume 516 + XII pág. distribuídas por 16 cap. e 6 apendices com 96 problemas propostos e inteiramente resolvidos.

No primeiro capítulo a apresentação dos «conceitos básicos da mecânica quântica» faz-se de forma que as noções quânticas são introduzidas o mais intuitivamente possível (sob o aspecto matemático); de resto, em toda a obra, os Autores provam sobejamente que o uso e o desenvolvimento dos conceitos e instrumentos matemáticos, quando devidamente empregados, longe de encobrirem ou deformarem os aspectos físicos, os esclarecem e completam.

O cap. II trata dos operadores de energia e momentos e formas matriciais de mecânica quântica.

A equação de Schrödinger e os diversos tipos dos espectros dos respectivos valores próprios da energia; os potenciais mais frequentes — poços e barreiras — e problemas correlativos são estudados no cap. III. As noções de momento angular, valores próprios e funções próprias e adição de momentos angulares, são largamente tratados no cap IV.

Os cap. V, VI, VII e VIII tratam respectivamente de: movimentos de uma partícula nos diversos campos de simetria central, incluíndo o coulombiano; a teoria perturbações (dependentes e independentes do tempo); o método de aproximação KBW (o caso quase clássico); a noção de spin, e particulas de spin $\frac{1}{2}$ e de spin diferente de $\frac{1}{2}$.

Até o presente, o programa exposto é o de qualquer vulgar tratado de mecânica quântica não relativista (o vol. 4 da obra tem o nome *Teoria quântica relativista*); o valor da obra, no que respeita a estes 8 capítulos, está na originalidade, clareza e rigor matemático da exposição.

O cap. IX trata dos sistemas com grande número de partículas idênticas, das respectivas estatísticas Fermi-Dirac e Bose-Einstein e do método de segunda quantificação aplicado a estas duas estatísticas. O cap. X estuda o átomo: niveis de energia, estados electrónicos, átomos de hidrogénio e hidrogenoides, estructuras finas, método Hartree-Fok, equação Thomas-Fermi para átomos complexos com grande número de electrões, estados quase-estacionários, efeito Stark, etc.

A molécula diatómica é estudada no que respeita aos seus termos electrónicos e respectiva interacção, relações entre os termos atómicos e moleculares, valência, vibração e rotação das estruturas moleculares, etc. O estudo da interacção spin-eixo de rotação é feito com desenvolvimento e pormenor nos casos que Hund classificou de *a* e *b* e os Autores de *c* e *d*. As propriedades de simetria dos termos da molécula diatómica são caracterizadas pelo comportamento das funções de onda em face da simetria das coordenadas dos núcleos atómicos; o estudo dos elementos de matriz da molécula é já caso particular do assunto do capítulo seguinte a teoria da simetria. Antes de terminarem o capítulo da molécula diatómica, os Autores examinam cuidadosamente os fenómenos de Hill, e van Vleck e Kronig, a teoria das forças de van der Waals e a pré-dissociação A grande importância da teoria dos grupos como aplicação à mecânica quântica é posta em relevo no cap. XII. Pode mesmo dizer-se que esta obra é particularmente notável por este objectivo plenamente atingido.

A bem dum necessário prestígio da matemática nas suas aplicações, aconselhamos a leitura atenta deste capítulo a todos os que tomam posição de incompreensível exagero, uns apresentando certos ramos da Álgebra como de extrema importância na física e geometria, outros negando essa importância num racional e actualizado estudo da *física da molécula* e da *física do sólido*. Estamos certos que essa leitura seria o começo de uma racionalização e actualização do ensino da matemática em escolas que muito dele necessitam.

O cap. XIII completa o anterior, estudando a molecular poliatómica terminando com a discussão do movimento do electrão num campo eléctrico periódico.

Em dois capítulos, o XIV e XV, dá-se a devida atenção ao problema fundamental em física nuclear da teoria das colisões-elásticas e inelásticas: a teoria geral das colisões elásticas, aproximação de Born, método dos desfasagens, caso do potencial de Coulomb, fórmula de Rutherford; colisão de partículas idênticas; colisão entre electrões e átomos. Teoria geral das colisões inelásticas Fórmulas de Bhreit e Wigner. Colisões inelásticas entre electrões e átomos, partículas pesadas e átomos, entre moléculas, etc.

Finalmente o livro termina estudando o movimento no campo magnético, efeito de Zeeman, etc.

Os apendíces tratam dos polinómios de Hermite e Legendre, função de Airy e funções hipergeométricas e aplicações.

Tencionamos publicar nos próximos números da G. M. referências a outros volumes do tratado e algumas indicações biográficas dos Autores.

Fá-lo-emos convictos de contribuirmos um pouco para a divulgação entre o público português de um dos melhores tratados actuais de Física Teórica.

J. G. T.

LIVROS RECEBIDOS PARA CRÍTICA:

- *Annales Vuibert, B A C, Mathématiques,* 1958, fasc. 1, 1.re partie et 2.a partie.
- *Versicherungsmathematik-II,* Prof. Dr. Friedrich Böhm. — Sammlung Göschen Band 917/917a. — Walter de Gruyter & Co. — Berlim.
- *Einführung in die Theorie der Spiele* — Ewald Burger — Walter de Gruyter & Co. — Berlim, W 35.
- *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Statistique* — par A. Blanc-Lapierre, P. Casal et A. Tortrat — Masson & C.ie Editeurs — Paris
- *La Localisation des Valeurs Caractéristiques des Matrices et ses applications,* par Maurice Parodi — Paris, Gauthier-Villars.
- *Méthodes Numériques, Interpolation — Derivées,* par J. Kuntzmann — Dunod, Paris.
- *La personalidad científica de Arquimedes,* por J. J. Schäffer — Separata da Revista da Facultad de Humanidades y Ciencias — Montevideu (Uruguay).
- *Resonancia Magnetica Nuclear,* por Pedro Coca Rebollero — Separata da Acta Salamanticensia — Salamanca.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1959 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1959, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 71 { cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 71 { » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA - 2 — Telefone 29449