GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXI N.° 79-80 ABRIL-SET. 1960

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2

ANO XXI — N.º 79-80 GAZETA DE MATEMÁTICA ABRIL/SET. — 1960

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Telef. 29449 — LISBOA 2

Método de relaxação para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares

por A. César de Freitas

Este artigo destina-se a apresentar os elementos indispensáveis à compreensão e utilização do *método de relaxação* para resolver sistemas de equações algébricas lineares. Esse método, pela facilidade com que pode ser usado e pelo modo como traduz certas situações das aplicações práticas, tem larga aplicação em física e engenharia. Assim, por exemplo, usa-se correntemente na resolução numérica de equações diferenciais ordinárias e com derivadas parciais.

É um método que se adapta particularmente bem ao cálculo com papel e lápis e máquina de calcular vulgar, mas de difícil aplicação com as modernas máquinas calculadoras automáticas, pois a sua eficiência depende em grande parte do discernimento e da experiência do calculador.

A ideia básica do método de relaxação parece ser devida a Gauss, mas a sua popularidade e muitas das suas aplicações são devidas aos trabalhos de Southwell [1] e seus discípulos.

O nome de «relaxação» vem da terminologia de certas questões de engenharia onde Southwell aplicou o método pela primeira vez.

[1] Ver referências [4] e [5] da bibliografia.

1 — Considere-se o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

que supomos admitir uma e uma só solução, isto é, há um só conjunto de valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ que verificam as equações do sistema.

Seja $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ um conjunto (ordenado) de n números. Chamam-se *resíduos* correspondentes a esse conjunto e ao sistema (1), aos valores

$$(2) \quad \begin{cases} r_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n - b_1 \\ r_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n - b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n - b_n \end{cases}$$

Os resíduos serão todos nulos se, e só se, $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \cdots, \xi_n = x_n$ (ou seja, se $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ for a solução do sistema).

Diremos que $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ é uma *solução aproximada do sistema com erro inferior a* $\eta > 0$, se se tiver

$$(3) \qquad |\xi_1 - x_1| < \eta, |\xi_2 - x_2| < \eta, \\ , \cdots, |\xi_n - x_n| < \eta$$

Substituindo em (2) os valores de $b_1, b_2, \cdots, b_n$ dados por (1) obtem-se

$$(4)\quad \begin{cases} r_1 = a_{11}(\xi_1 - x_1) + a_{12}(\xi_2 - x_2) + \cdots + \\ \qquad + a_{1n}(\xi_n - x_n) \\ r_2 = a_{21}(\xi_1 - x_1) + a_{22}(\xi_2 - x_2) + \cdots + \\ \qquad + a_{2n}(\xi_n - x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_n = a_{n1}(\xi_1 - x_1) + a_{n2}(\xi_2 - x_2) + \cdots + \\ \qquad + a_{nn}(\xi_n - x_n) \end{cases}$$

e, se se verificam as relações (3),

$$(5)\quad \begin{cases} |r_1| < (|a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1n}|)\,\eta \\ |r_2| < (|a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2n}|)\,\eta \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |r_n| < (|a_{n1}| + |a_{n2}| + \cdots + |a_{nn}|)\,\eta \end{cases}$$

e, portanto, se η é suficientemente pequeno, os resíduos também são números próximos de zero.

Em geral só interessa determinar uma solução aproximada do sistema (1), quer porque o cálculo da solução exacta exigiria trabalhar com valores com um número incomportável de algarismos, quer porque muitas vezes os coeficientes e os termos independentes das equações não são números exactos (ou por resultarem de dados da observação, ou por resultarem de outros cálculos onde houve que fazer arredondamentos).

Interessa-nos observar que em certos sistemas podem obter-se resíduos bastante próximos de zero para valores $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ muito afastados da solução. É o que acontece, por exemplo, com o sistema

$$(6)\quad \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

onde para $\xi_1 = 14{,}6$, $\xi_2 = -7{,}2$, $\xi_3 = -2{,}5$, $\xi_4 = 3{,}1$ se obtêm os resíduos $r_1 = -r_2 = -r_3 = r_4 = 0{,}1$; para $\xi_1 = 2{,}36$, $\xi_2 = 0{,}18$, $\xi_3 = 0{,}65$, $\xi_4 = 1{,}21$, obtêm-se os resíduos $r_1 = -r_2 = -r_3 = r_4 = 0{,}01$. Contudo a solução do sistema é $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Sistemas tais como (6) dizem-se *numéricamente instáveis* e, para estes sistemas, pequenas variações nos coeficientes traduzem-se por grandes variações na solução.

A resolução de sistemas numéricamente instáveis exige sempre cuidados especiais e, se os coeficientes estão sujeitos a incertezas, esses sistemas conduzem a soluções sem qualquer valor [1].

Em notação matricial o sistema (1) escreve-se

$$AX = B \qquad (1)'$$

onde A é a matriz do sistema, X é o vector-coluna das incógnitas e B é o vector-coluna dos termos conhecidos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \vdots & \cdots\cdots \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dizer que o sistema admite uma e uma só solução equivale a dizer que a matriz A é regular.

O sistema (2), com a notação anterior, escrever-se-á

$$R = A\xi - B \qquad (2)'$$

sendo $R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$

Vem então, tendo em atenção (1)',

$$R = A\xi - AX = A(\xi - X) \qquad (4)'$$

que é o sistema (4).

(1) Ver referência [2] da bibliografia.

2 — Os inúmeros métodos de resolução do sistema (1) podem classificar-se em *métodos directos* (ou *exactos*) e *métodos iterativos* (ou *aproximados*)

Nos métodos directos obtem-se a solução do sistema por uma sequência finita de operações e, se estas se fazem exactamente, a solução obtida é exacta.

Nos métodos iterativos usam-se aproximações sucessivas: parte-se duma solução aproximada e a partir dela vão-se obtendo sucessivamente novas soluções aproximadas formando uma sucessão cujo limite é a solução (exacta) do sistema. É então necessário que exista esse limite, isto é, é necessário que o processo seja convergente; na prática, é preciso ainda que o processo seja rapidamente convergente para que se possa obter uma boa aproximação da solução com relativamente poucas iterações.

Note-se que em geral os métodos directos fornecem soluções aproximadas devido à necessidade prática de limitar o número de algarismos dos números com que se trabalha. Nos métodos iterativos (convergentes) pode obter-se sempre um valor aproximado da solução com a precisão que se queira, mas soluções exactas exigiriam, pelo menos geralmente, processos infinitos.

Um exemplo dum método directo é o conhecido *método de redução* da álgebra elementar. O *método de relaxação,* como vamos ver em seguida, é um método iterativo.

Nesse método calculam-se os resíduos correspondentes a uma solução aproximada $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ e por correcções sucessivas a partir das componentes desta solução, procura-se fazer com que esses resíduos tendam para zero. Com esse fim começa-se por construir uma tabela, a *tabela das operações unitárias,* das variações dos resíduos para variações unitárias de cada um dos $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$.

Essa tabela é a seguinte

Δx_1	Δx_2	$\cdots$	Δx_n	Δr_1	Δr_2	$\cdots$	Δr_n
1	0	$\cdots$	0	a_{11}	a_{21}	$\cdots$	a_{n1}
0	1	$\cdots$	0	a_{12}	a_{22}	$\cdots$	a_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\cdots$	1	a_{1n}	a_{2n}	$\cdots$	a_{nn}

Com efeito, tem-se para o caso da primeira linha

$$\begin{cases} r'_1 = a_{11}(\xi_1 + 1) + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n - b_1 \\ r'_2 = a_{21}(\xi_1 + 1) + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n - b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r'_n = a_{n1}(\xi_1 + 1) + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n - b_n \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{gathered} \Delta r_1 = r'_1 - r_1 = a_{11} \\ \Delta r_2 = r'_2 - r_2 = a_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta r_n = r'_n - r_n = a_{n1} \end{gathered}$$

As outras linhas obtiveram-se de modo análogo.

Note-se que os valores $\Delta r_1, \Delta r_2, \cdots, \Delta r_n$ são independentes da solução aproximada considerada.

Na parte da direita da tabela anterior os elementos da primeira linha são os coeficientes de x_1 no sistema (1), os elementos da segunda linha são os coeficientes de x_2, etc.; por outras palavras, os elementos dessa parte da tabela constituem a transposta da matriz do sistema.

Vamos agora ver como usar a tabela das operações unitárias no cálculo da solução aproximada do sistema (1), mas vamos fazê-lo com um exemplo simples, por ser a melhor maneira de perceber o método de relaxação.

3 — Seja obter, com erro inferior a 0,005, a solução do sistema

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 80 \\ 3x_1 + 10x_2 - x_3 = 50 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 40 \end{cases}$$

A tabela das operações unitárias é agora

	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δr_1	Δr_2	Δr_3	
(*a*)	1	0	0	9	3	−1	
(*b*)	0	1	0	−3	10	2	(I)
(*c*)	0	0	1	2	−1	5	

Como não temos qualquer ideia dum valor aproximado da solução, vamos partir de $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ a que correspondem os resíduos $r_1 = -80$, $r_2 = -50$, $r_3 = -40$.

Os cálculos serão dispostos numa *tabela de relaxação* do modo seguinte

	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	r_3	
	0	0	0	−80	−50	−40	
(1)	9	—	—	1	−23	−49	
(2)	—	—	9	19	−32	−4	
(3)	—	3	—	10	−2	−2	
(4)	−1	—	—	1	−5	3	
	8	3	9	1	−5	3	Verificado

A linha (1) desta tabela foi obtida fazendo o que se chama *uma relaxação em* x_1 no valor de *9* unidades, tendo em vista reduzir a zero o maior resíduo (em valor absoluto); usou-se para isso a linha (*a*) da tabela (I).

A linha (1) exprime que para $\xi_1 = 9$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, se tem $r_1 = 1$, $r_2 = -23$, $r_3 = -49$.

A linha (2) foi obtida fazendo uma relaxação de *9* unidades em x_3, porque o maior resíduo (em valor absoluto) era agora $r_3 = -49$; a linha (3) obteve-se fazendo uma relaxação de 3 unidades em x_2; a linha (4) obteve-se fazendo uma relaxação em x_1 de valor igual a -1.

Nesta altura, para reduzir os resíduos, teriam de fazer-se relaxações de valor inferior à unidade o que não é conveniente do ponto de vista prático. Por isso, verificados os resíduos obtidos, multiplicamos todas as entradas por dez e continuamos o processo como a seguir indicamos.

Note-se que se a verificação falhar, não é necessário descobrir onde houve engano, basta corrigir os resíduos e partir dos novos valores de ξ_1, ξ_2, ξ_3, no nosso caso, $8, 3, 9$, respectivamente. O facto de não haver necessidade de descobrir os enganos constitui uma das vantagens do método de relaxação.

A continuação da tabela de relaxação é

10×	80	30	90	10	−50	−30	
	—	5	—	−5	0	40	
	—	—	−8	−21	8	0	
	2	—	—	−3	14	−2	
	—	−1	—	0	4	−4	
	82	34	82	0	4	−4	Verificado
10×	820	340	820	0	40	−40	
	—	—	9	18	31	5	
	—	−3	—	27	1	−1	
	−3	—	—	0	−8	2	
	—	1	—	−3	2	4	
	817	338	829	−3	2	4	Verificado
10×	8170	3380	8290	−30	20	40	
	—	—	−8	−46	28	0	
	5	—	—	−1	43	−5	
	—	−4	—	11	3	−3	
	—	—	2	15	1	−3	
	−2	—	—	−3	−5	−1	
	8173	3376	8284	−3	−5	−1	Verificado

e portanto a solucão do sistema nas condições pedidas é $x_1 = 8{,}17$, $x_2 = 3{,}38$, $x_3 = 8{,}28$.

Houve que fazer um grande número de operações mas todas muito simples e a maioria delas foi feita mentalmente.

Contudo o processo pode ser acelerado usando *grupos de relaxação* que correspondem a fazer relaxações de mais do que uma incógnita de cada vez. Para isso deveria ter-se acrescentado à tabela (I) mais algumas linhas do tipo seguinte.

	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δr_1	Δr_2	Δr_3
(d)	1	1	0	6	13	1
(e)	1	0	1	11	2	4
(f)	1	3	0	0	33	5
(g)	2	0	1	15	5	0

Estas linhas obtêm-se imediatamente das da tabela (1). Assim para obter a linha (d) basta somar os elementos correspondentes das linhas (a) e (b); a linha (g) obtem-se somando o dôbro dos elementos da linha (a) com os elementos correspondentes da linha (b); etc.. Têm particular interesse linhas em que apareça algum elemento nulo porque permitem fazer a redução de alguns resíduos sem alterar outros.

Nalguns casos a redução de certo grupo de residuos obtem-se mais fàcilmente se for precedida duma *sobre-relaxação*, isto é, uma relaxação tendo em vista mudar o sinal de de um ou mais resíduos.

4 — O exemplo que acabamos de resolver não permite avaliar todas as vantagens do método de relaxação pois algumas delas só se evidenciam quando se trata de resolver sistemas com um grande número de incógnitas em que muitos dos coeficientes sejam iguais a zero. Estes sistemas aparecem na resolução numérica de equações diferenciais (1). De resto, no exemplo referido, é discutível se o método empregado tem vantagem sobre os métodos directos.

Evidentemente que o método de relaxação nem sempre é aplicável porque o processo pode não ser convergente (ou convergir muito lentamente). Isso acontece em geral com os sistemas numèricamente instáveis. Contudo muitas vezes é possível, usando artifícios, passar dum certo sistema para outro, para o qual o processo já seja convergente.

Dum modo geral, pode dizer-se, que o método é aplicável sempre que seja possível obter uma tabela de operações unitárias e de grupos de relaxação, de modo que na coluna correspondente a cada resíduo, exista um elemento que, em valor absoluto, seja grande quando comparado com os valores absolutos dos restantes elementos da linha a que pertence.

Por outro lado, como já se deve ter notado, o método de relaxação só é eficiente para a resolução de sistemas cujos coeficientes são inteiros e relativamente pequenos (em valor absoluto).

5 — Para um estudo mais desenvolvido do método de relaxação e suas aplicações podem consultar-se as obras seguintes

BIBLIOGRAFIA

[1] D. N. de G. Allen, *Relaxation Methods*, Mc Graw-Hill Publ. Co. Ltd. (1955)

[2] A. César de Freitas, *Métodos numéricos em álgebra linear*, publicação do Seminário de Calc. Num. e Máq. Matem. do Instituto de Alta Cultura, Lisboa (a aparecer brevemente)

[3] F. S. Shaw, *Relaxation methods* Dover Publications, Inc. (1953)

[4] R. V. Southwell, *Relaxation methods in theoretical phisics*, Oxford University Press (1946)

[5] R. V. Southwell, *Relaxation methods in engineering science*, Oxford University Press (1951)

Em [1] encontra-se uma extensa bibliografia sobre o assunto; em [2], além do método de relaxação, tratam-se outros métodos de resolução do sistema (1); [4] e [5] apresentam variadíssimas aplicações do método, mas sempre tratadas do ponto de vista físico.

Lisboa, Julho 1960

(1) Ver [1] e [3]

Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações

por J. M. Gil

1 — Reordenações dum conjunto — Permutações — Funções biunívocas

Qualquer disposição linear de n objectos distintos chama-se uma *permutação linear* desses objectos. Cada permutação é assim uma *reordenação* dos elementos do conjunto dos n objectos, ou, mais simplesmente, uma *ordenação do conjunto* dos n objectos.

2 — Quando a cada elemento x do conjunto X se faz corresponder um só objecto $\varphi(x)$ dum conjunto Y, de modo que todos os elementos de Y sejam utilizados, diz-se que a correspondência φ é uma *aplicação de* X *sobre* Y.

Pois bem, cada permutação linear dos n objectos do conjunto X define, aritmèticamente, com uma ordenação inicial de X, uma aplicação biunívoca de X sobre X. A posição ordinal é aqui a regra pela qual se estabelece a correspondência entre as duas ordenações de X.

O conjunto finito X, numa ordenação inicial, é aplicável biunìvocamente, mediante a posição ordinal dos elementos, sobre cada uma das permutações lineares dos n objectos do conjunto.

Cada aplicação biunívoca de X sobre X designa-se por *permutação do conjunto* X.

Uma disposição linear de n objectos pode assim ser encarada duplamente: — como permutação dos n objectos — reordenação do conjunto deles; como permutação do conjunto dos n objectos — definição da correspondência biunívoca entre os n objectos numa posição de referência e na posição indicada.

3 — A aplicação biunívoca, $\varphi(x)$, de X sobre X também se diz uma *função* φ, definida em X, e de valores em X.

Cada permutação linear dos elementos de X, finito, constitui o conjunto dos valores duma função φ, definida em X e dispostos pela ordem em que φ os determina a partir da disposição inicial dos elementos de X.

4 — Número de permutações

Representemos por P_n o número das possíveis reordenações do conjunto $C = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$ de n elementos a_i. Consideremos a partição $C = C_1 + C_2$ com $C_2 = \{a_2, a_3, \cdots a_n\}$ e $C_1 = \{a_1\}$. Tomemos, por exemplo, a ordenação $a_2, a_3, \cdots, a_n$ dos elementos de C_2. O elemento a_1 colocado em primeiro lugar, em último lugar, ou entre dois daqueles elementos, dá origem, de cada vez, a uma reordenação dos elementos de C. Assim

$$\begin{array}{c} a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n \\ a_2\, a_1\, a_3 \cdots a_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2\, a_3\, a_4 \cdots a_n\, a_1 \end{array}$$

O elemento a_1 pode ocupar n lugares, em cada reordenação dos elementos de C_2, originando em cada posição uma reordenação dos elementos de C. Simbòlicamente

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

5 — Ainda

$$P_{n+1} = (n+1)\, P_n$$

e

$$P_{n+p} = \prod_{j=0}^{p-1} (n+p-j)\, P_n$$

Para $n=0$, e com $P_0 = 1$, vem

$$P_p = \prod_{j=0}^{p-1} (p-j)$$

$$= p(p-1)(p-2) \cdots 2 \times 1 .$$

6 — Representaremos o número $P_n = n(n-1) \cdots 2 \times 1$ das permutações de n objectos por $n! = P_n$.

7 — A formação de uma das reordenações de $C = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$, ou uma das permutações dos n elementos do conjunto, consiste em escolher um dos elementos do conjunto C para o primeiro lugar, escolher um dos restantes $n-1$ elementos para o segundo lugar, escolher um dos restantes $n-2$ elementos para o terceiro lugar, e assim sucessivamente até ao lugar n—ésimo.

A primeira escolha pode fazer-se de n maneiras diferentes, a segunda de $n-1$ maneiras diferentes, a terceira de $n-2$ maneiras diferentes, etc., e a última duma só maneira, porque resta apenas um elemento. Cada sucessão de n escolhas dá uma permutação dos n elementos. Todas as sucessões possíveis conduzem às $n!$ permutações. Podemos interpretar este resultado duma maneira geral. Suponhamos que executamos sucessivamente, uma após outra, n operações, cada uma delas, depois da primeira, só possível após a execução da anterior, e, que a primeira tem m_1 resultados possíveis; a segunda m_2; a terceira m_3; etc. A execução da sucessão das n operações, em cada caso, conduz a um de

$$m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

resultados diferentes.

8 — Para distribuir n objectos distintos por n caixas iguais, em linha, deixando um objecto em cada caixa, tenho de executar n operações sucessivas, que consistem em colocar um dos objectos numa das caixa disponíveis. Poderei escolher um dos n objectos para colocar na primeira caixa. A escolha conduz a n resultados possíveis e determina o conjunto em que farei a nova escolha. Para colocar na segunda caixa disponho de $n-1$ objectos, à escolha. Posso assim obter $n-1$ resultados diferentes nesta escolha. E assim sucessivamente até ao último objecto que será colocado na última caixa.

O número total de distribuições diferentes é

$$n(n-1)(n-2) \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

9 — Permutações circulares — Ordenações cíclicas

Consideremos uma permutação dos $n=4$ objectos

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 .$$

Escrevamos as permutações que se obtêm, conservando a posição relativa dos objectos nesta permutação, e começando no segundo, no terceiro, etc., no n-ésimo, completando a permutação com os elementos que antecedem o elemento inicial

$$\begin{matrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}$$

Estas permutações designam-se por *permutações circulares* de uma qualquer delas. Cada permutação inicial dá origem a $n-1$

permutações circulares, que com ela constituem uma *classe de permutações circulares.*

Em cada classe de permutações circulares é conservada a posição relativa dos elementos e diz-se que têm a mesma *ordenação cíclica.* A classe constitui assim uma *permutação circular* dos n elementos considerados.

O conjunto das P_n permutações de n elementos é assim dividido em $P_n/n = P_{n-1}$ classes de permutações circulares.

Também é P_{n-1} o número de ordenações cíclicas do conjunto dos n elementos, ou o númera das permutações circulares dos n objectos.

10 — Reordenações de C, com um subconjunto de p elementos iguais

Façamos $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = b$ em todas as permutações dos n elementos de $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Obtemos assim as permutações de n elementos, dos quais p são iguais. Seja $P_{n|p}$ o número destas permutações e $\overline{P}_{n|p}$ uma qualquer delas.

É $P_{n|p} < n!$, porque as permutações dos n elementos diferentes, em que, por exemplo, os elementos $a_1, a_2, \cdots a_p$ figuram seguidos e permutados

$$\begin{array}{llll}\cdots a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_p \cdots \\ \cdots a_2 & a_1 & a_3 \cdots a_p \cdots \\ \cdots a_3 & a_1 & a_2 \cdots a_p \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

e os restantes $n - p$ elementos conservam as respectivas posições, dão origem à mesma permutação com o elemento b repetido p vezes. Não nos interessam agora as permutações dos elementos que fizermos iguais a b, isto é, as permutações no agrupamento dos p elementos bb.

Se em cada uma das $\overline{P}_{n|p}$ fizermos um dos bb igual a a_p, obteremos uma das $\overline{P}_{n|p-1}$. Esta operação pode executar-se em cada $\overline{P}_{n|p}$ de p maneiras diferentes — uma por cada $a_i = b = a_p$, com $i = 1, 2, \cdots, p$.

Repetindo a operação em todas as $\overline{P}_{n|p}$, obteremos as $\overline{P}_{n|p-1}$, o que torna fácil a sua contagem. Assim

$$P_{n|p-1} = p \cdot P_{n|p}.$$

11 — Consequentemente

$$P_{n|p+1} = \frac{1}{p+1} P_{n|p}$$

e

$$P_{n|p+q} = \prod_{j=0}^{q-1} \frac{1}{p+q-j} P_{n|p}.$$

Fazendo $p = 0$ e $P_{n|0} = P_{n|1} = P_n$, vem

$$P_{n|q} = \prod_{j=0}^{q-1} \frac{1}{q-j} P_n = \frac{P_n}{P_q} = \frac{n!}{q!}$$

com $p \leqq n$.

12 — As permutações de n elementos, dos quais $n - 1$ iguais, são da forma

$$\begin{array}{ccccc} c & b & b \cdots b & b \\ b & c & b \cdots b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b \cdots c & b \\ b & b & b \cdots b & c \end{array}$$

Ponhamos índices nos bb a partir do c para direita e continuemos a numeração, à esquerda, com o índice a seguir ao último da direita. Façamos ainda $c = b_n$. Obtemos as permutações

$$\begin{array}{lllll} b_n & b_1 & b_2 \cdots b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_n & b_1 \cdots b_{n-3} & b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 & b_3 & b_4 \cdots b_n & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots b_{n-1} & b_n \end{array}$$

que são as permutações circulares de uma das permutações de n objectos. Como cada uma delas foi obtida de uma das $\overline{P}_{n|n-1}$, temos que o seu número é $P_{n|n-1}=n$.

Quando se lêem as permutações de baixo para cima vê-se que cada uma se obtém da anterior adicionando uma unidade a cada índice e fazendo $n+1=1$, ou trocando cada elemento com o seguinte.

13 — Arranjos de n elementos

Digo que *escolho ordenadamente* $n-p$ elementos dum conjunto $C=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ de n elementos, quando designo alguma das reordenações dum subconjunto de $n-p$ elementos.

Cada escolha ordenada de $n-p$ elementos também se diz um *arranjo dos* n *elementos*, $n-p$ a $n-p$. Representaremos cada um dos arranjos por $\overline{A}_{n|n-p}$ e o número deles por $A_{n|n-p}$.

Consideremos as permutações de n elementos, dos quais p são iguais a b. Para cada uma destas permutações, excluamos em C os elementos que ocupam a posição dos bb, na ordem $1, 2, \cdots, n$. A cada uma destas permutações fica assim a corresponder uma escolha ordenada de $n-p$ elementos do conjunto C. Temos consequentemente $P_{n|p}=A_{n|n-p}$ e, fazendo $n-p=q$,

$$A_{n|q}=P_{n|n-q}=\frac{n!}{(n-q)!}$$

com $q \leqq n$.

14 — Relações de recorrência nos índices de $P_{n|p}$

Vimos que é

$$P_{n|p}=\frac{1}{p}\cdot P_{n|p-1}.$$

Anàlogamente

$$P_{n|p}=\frac{n!}{p!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{p!}=n\cdot P_{n-1|p}$$

e ainda

$$P_{n|p}=\frac{n!}{p!}=\frac{n}{p}\cdot\frac{(n-1)!}{(p-1)!}=\frac{n}{p}\cdot P_{n-1|p-1}$$

ou

$$P_{n|p}=\frac{n}{p}P_{n-1|p-1}=\left(1+\frac{n-p}{p}\right)P_{n-1|p-1}$$

$$=P_{n-1|p-1}+\frac{n-p}{p}P_{n-1|p-1}$$

$$=P_{n-1|p-1}+(n-p)P_{n-1|p}$$

$$=P_{n-1|p-1}+P_{n-p|n-p-1}P_{n-1|p}$$

15 — $P_{n|p}$ pode ainda decompor-se num maior número de parcelas por aplicação sucessiva de $P_{n|p}=P_{n-1|p-1}+P_{n-p|n-p-1}$ $P_{n-1|p}$.

Assim

$$P_{n|p}=P_{n-1|p-1}+P_{n-p|n-p-1}\;P_{n-2|p-1}+$$
$$+P_{n-p|n-p-1}\;P_{n-p-1|n-p-2}\;P_{n-2|p}$$

$$=P_{n-1|p-1}+\sum_{j=1}^{n-p}P_{n-p|n-p-j}\;P_{n-(j+1)|p-1}$$

$$=P_{n-p|n-p}\quad P_{n-1|p-1}+\sum_{j=1}^{n-p}P_{n-p|n-p-j}$$
$$P_{n-(j+1)|p-1}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-p}P_{n-p|(n-p)-j}\;P_{n-(j+1)|p-1}$$

anàlogamente

$$P_{n|p}=P_{n-p|n-p-1}\;P_{n-1|p}+$$
$$+P_{n-p|n-p-1}\;P_{n-2|p-1}+P_{n-2|p-2}$$

$$=P_{n-p|n-p-1}\sum_{i=0}^{p-1}P_{n-1-i|p-i}+P_{n-p|0}$$

$$P_{n|p}=P_{n-p|n-p-1}\left(\sum_{i=0}^{p-1}P_{n-1-i|p-i}+P_{n-p-1|0}\right)$$

$$=P_{n-p|n-p-1}\sum_{i=0}^{p}P_{n-1-i|p-i}$$

16 — As relações dos parágrafos 14 e 15 mantêm-se, quando $P_{n|p}$ perde o significado

inicial, designando simplesmente a fracção $n!/p! = P_{n|p}$ com $p \lesseqgtr n$ inteiro positivo.

17 — Se nas permutações de n elementos, com o elemento b repetido p vezes, fizermos $a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = a_{p+q} = c$ obtemos as permutações de n elementos, dos quais p são iguais entre si, e outros q também iguais entre si.

Representaremos o número destas permutações por $P_{n|p,q}$ e uma delas por $\overline{P}_{n|p,q}$.

Claro que as $\overline{P}_{n|p,q}$ se obtêm das $\overline{P}_{n|p}$ como estas se obtiveram de P_n, com desprezo das permutações dos q elementos iguais a c. Consequentemente

$$P_{n|p,q} = \frac{P_{n|p}}{P_q} = \frac{n!}{p!\,q!}$$

com $p + q \leqq n$.

18 — Anàlogamente no caso de C conter mais algum subconjunto de elementos iguais.

19 — Propriedades de $P_{n|p,q}$

a) É imediato que os índices p e q são permutáveis

$$P_{n|p,q} = P_{n|q,p}$$

b) Fórmulas de recorrência nos índices

1) $$P_{n|p,q} = \frac{P_{n|p}}{q!} = \frac{n\,P_{n-1|p}}{q!} = n\,P_{n-1|p,q}$$

2) $$P_{n|p,q} = \frac{P_{n|p}}{q!} = \frac{\frac{1}{p}P_{n|p-1}}{q!} = \frac{1}{p}P_{n|p-1,q}$$
$$= \frac{1}{pq}P_{n|p-1,q-1}$$

3) $$P_{n|p,q} = \frac{n}{pq}P_{n-1|p-1,q-1}$$

c) $$P_{n|p,q} = \frac{P_{n|p}}{q!} = \frac{P_{n-1|p-1} + P_{n-p|n-p-1}\,P_{n-1|p}}{q!}$$
$$= P_{n-1|p-1,q} + P_{n-p|n-p-1}\,P_{n-1|p,q}$$

d) Os resultados anteriores mantêm-se para quaisquer inteiros p e q, e quando se permutam o p e o q, nos símbolos em que eles aparecem.

e) A expressão da propriedade c) pode obter-se da última expressão do parágrafo 14, substituindo $P_{n|p}, P_{n-1|p-1}$ e $P_{n-1|p}$ respectivamente por $P_{n|p,q}$, $P_{n-1|p-1,q}$ e $P_{n-1|p,q}$.

Consequentemente, segundo o parágráfo 15

$$P_{n|p,q} = \sum_{j=0}^{n-p} P_{n-p|(n-p)-j}\;P_{n-(j+1)|p-1,q}$$

e

$$P_{n|p,q} = P_{n-p|n-p-1}\sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j|p-j,q}$$

20 — Suponhamos que C é a reunião de dois subconjuntos disjuntos: C_1, com p elementos $a\,a$; e C_2, com $n-p$ elementos $b\,b$. Diz-se que C é a *soma directa* dos subconjuntos C_1 e C_2.

O número das permutações dos elementos de C é

$$P_{n|p,n-p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

21 — Combinações de n elementos

Vejamos como se formam estas permutações dos elementos de C. Considerados os n lugares que terão de ocupar os elementos de C, precisamos apenas de escolher p lugares para os elementos $a\,a$; os lugares para os elementos $b\,b$ ficam automàticamente determinados.

Assim $P_{n|p,n-p}$ indica o número de maneiras por que é possível escolher p lugares de entre n disponíveis, ou número de subconjuntos de p elementos, que é possível definir num conjunto de n elementos, visto que cada lugar corresponde a um elemento do conjunto C e a escolha de p lugares determina um subconjunto de p elementos.

Chamaremos a estes subconjuntos de p elementos *combinações dos* n *elementos,* p a p.

22 — Dum modo geral, para um conjunto C, de n elementos distintos, a determinação dum subconjunto de p elementos consiste em classificar cada elemento de C em elemento a — p precisamente — ou elemento b — $n-p$ ao todo. Esta classificação é afinal a definição duma função f em C com dois valores a e b

$$f: C \to \{a, b\}.$$

Precisamente porque é a dois valores chamar-lhe-emos uma *dicotomia.*

23 — Qualquer dicotomia determina uma *bipartição* de C, isto é, dois subconjuntos

$$E_1 = \{x \in C \mid f(x) = a\}$$
$$E_2 = \{x \in C \mid f(x) = b\}$$

complementares, ou tais que $E_1 + E_2 = C$ e $E_1 \cdot E_2 = 0$.

24 — As dicotomias de C, que determinam a bipartição de C num subconjunto de p elementos e noutro de $n-p$ elementos, são tantas quantos os subconjuntos de p elementos, portanto $P_{n|p,n-p}$

25 — Dum modo geral chamaremos *partição de ordem* K de C os subconjuntos $E_1, E_2, \cdots, E_k$ tais que

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_k = C$$
$$E_i \cdot E_j = 0 \text{ com } i, j = 1, 2, \cdots, k \text{ e } i \neq j.$$

26 — O número de partições de ordem k de C, com E_1 de p_1 elementos, E_2 de p_2 elementos, $\cdots, E_k$ de p_k elementos, é $P_{n|p_1,p_2,\cdots,p_k}$ com $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$.

27 — Cada partição de ordem k de C é determinada por uma *classificação multinominal* em k categorias dos elementos de C. Assim $P_{n|p_1,p_2,\ldots,p_k}$ com $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$ é ainda o número de classificações desta natureza dos elementos de C que é possível definir, e que conduzem a partições de ordem k nas condições indicadas.

28 — Dum modo geral uma dada partição de C pode ser determinada por mais de uma classificação dos elementos de C. Por exemplo, as classificações $f: C = \{1, 2, 3, 4\} \to (a, b)$ tal que $f(1) = f(2) = a$ e $f(3) = f(4) = b$, e $g: C = \{1, 2, 3, 4\} \to (a, b)$ tal que $g(1) = g(2) = b$ e $g(3) = g(4) = a$ conduzem à mesma partição $E_1 = \{1, 2\}$ e $E_2 = \{3, 4\}$.

29 — Representaremos o número de combinações de n elementos, p a p, ou o número de subconjuntos de p elementos dum conjunto de n elementos, por $\binom{n}{p}$ com $p \leqq n$.

Assim

$$\binom{n}{p} = P_{n|p,n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

com $p \leqq n$.

30 — Propriedades de $\binom{n}{p}$

a) $\binom{n}{p} = P_{n|p,n-p} = P_{n|n-p,p} = \binom{n}{n-p}$.

Evidentemente cada subconjunto de p elementos determina um subconjunto complementar de $n-p$ elementos. São tantos de uns como de outros.

b) Seja $C = C_1 + x$, com C_1 um subconjunto de $n-1$ elementos diferentes de x. Então, qualquer subconjunto de C_1 com p elementos é um subconjunto de p elementos de C, em que não entra o elemento x. O número de subconjuntos de p elementos de C_1 é $\binom{n-1}{p}$ e também este o número de subconjuntos de C, de p elementos, que não contêm um dado elemento x.

O número de subconjuntos, de p elementos, de C, em que figura o elemento x, é o número de subconjuntos de C_1 com $p-1$ elementos, isto é, $\binom{n-1}{p-1}$.

c) Obtêm-se fórmulas de recorrência nos índices, fazendo no parágrafo 19 $q=n-p$ e as transformações necessárias para obter um índice, à esquerda, igual à soma dos índices, à direita

1) $$\binom{n}{p} = n\ P_{n-1|p,n-p}$$
$$= n \cdot \frac{1}{n-p} P_{n-1|p,n-p-1}$$
$$= \frac{n}{n-p} P_{n-1|p,n-p-1}$$
$$= \frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p}.$$

Com a interpretação fácil: $\binom{n-1}{p}$ é o número de subconjuntos de p elementos em não entra o elemento x; $n\binom{n-1}{p}$ é o número de vezes em que os n elementos não figuram nos subconjuntos de p elementos. Para obter um subconjunto de p elementos é preciso que nele não figurem $n-p$ dos elementos dados. Será então $\frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p}$ o número de subconjuntos de p elementos.

2) $$\binom{n}{p} = \frac{1}{p}\ P_{n|p-1,n-p}$$
$$= \frac{1}{p} \cdot n \cdot P_{n-1|p-1,n-p}$$
$$= \frac{n}{p}\ P_{n-1|p-1,n-p}$$
$$= \frac{n}{p} \cdot \binom{n-1}{p-1}$$

Quer dizer: $n \cdot \binom{n-1}{p-1}$ dá o número de vezes que os n elementos figuram nos subconjuntos de p elementos. Para obter um subconjunto de p elementos é preciso utilizar p dessas figurações e será $\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ o número de subconjuntos de p elementos.

(Continua)

Two classroom notes on algebra

by *J. J. Dionísio*

1. The computation of the Vandermonde determinant.

Let

$$\Delta_n(x_1,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

We have

(1) $$\Delta_2(x_1,x_2) = x_2 - x_1.$$

The computation of $\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)$ along the last column by the LAPLACE rule shows that it is a polynomial in x_n of degree $n-1$. Its roots are $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$. Hence

(2) $$\Delta_n(x_1,\ldots,x_n) = \Delta_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})\prod_{j=1}^{n-1}(x_n - x_j).$$

If we suppose that

$$\Delta_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1}) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

then from (1) and (2) we infer that

$$\Delta_n(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

2. A rule for solving systems of linear equations.

The following result is easily proved.

THEOREM. *Let*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

be an $m \times n$ *matrix with elements in a field* $\mathcal{F}$. *By elementary row operations and interchange of columns it can be reduced to the matrix (over* $\mathcal{F}$*)*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

where $r \leqq min \{m, n\}$ *is the rank of* A.

Now consider the system of linear equations over $\mathcal{F}$

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_n = d_1 \\ \cdots \\ a_{m1}\, x_1 + \cdots + a_{mn}\, x_n = d_m \end{cases}$$

or, in matrix notation,

$$AX = D$$

where

$$A = [a_{ij}], \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Write the matrix

$$A' = [A \mid D],$$

reduce A to the above form B, allowing, however, the elementary row operations act on D as well. (The interchange of columns 1 to r must be accompanied by corresponding interchange of variables). Let the result be the matrix

$$B' = [B \mid D']$$

where

$$D' = \begin{bmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_m \end{bmatrix}.$$

The system (3) is solvable if and only if $r = m$ or, if $r < m$,

$$d'_{r+1} = \cdots = d'_m = 0.$$

A solution of the system (3) is then

$$X_0 = \begin{bmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

It is easily seen that the homogeneous linear system associated to (3), that is, in matrix notation, $AX = 0$, has the $v = n - r$ linearly independent solutions

$$X_1 = \begin{bmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots,$$

$$X_v = \begin{bmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Moreover, any solution of $AX = 0$

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

is a linear combination of $X_1, \cdots, X_v$ with coefficients

$$k_1 = x_{r+1}', \cdots, k_v = x_n'.$$

Hence, the general solution of (3) is

$$X = X_0 + k_1 X_1 + \cdots + k_v X_v$$

where $k_1, \cdots, k_v$ are arbitrary elements of $\mathcal{F}$.

Of course, the method allows as well the construction of the null space of a linear transformation of nullity v.

For comparison with other methods, see [1].

REFERENCE

[1] Kurt Bing, *A construction of the null space of a linear transformation,* The Amer. Math. Monthly, 67 (1960).

MOVIMENTO MATEMÁTICO

SEMINÁRIO DE CÁLCULO NUMÉRICO E MÁQUINAS MATEMÁTICAS DO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

Este seminário, dirigido pelo Doutor A. César de Freitas, no intuito de colaborar activamente no esforço necessário, no domínio científico e técnico-industrial, para equiparar o País a outros mais adiantados, organizou um programa de publicações e pequenos cursos, feitos por especialistas, com o fim de tratar de assuntos de aplicação imediata e que não sejam correntemente estudados nas cadeiras das nossas Universidades. A primeira publicação da autoria do Doutor A. César de Freitas intitula-se *Cálculos com números aproximados*, e é uma exposição de iniciação ao assunto.

Dos cursos projectados o primeiro, que se realizará nos fins do corrente ano, tratará de *Métodos de resolução de equações com derivadas parciais (com especial referência aos métodos numéricos)* e as lições serão feita pelos Doutores A. César de Freitas e F. R. Dias Agudo.

As lições que interessam a matemáticos, físicos e engenheiros podem ser seguidos por quem conheça a matéria versada em qualquer curso de cálculo infinitesimal das Universidades portuguesas.

Os interessados devem fazer a sua inscrição (gratuita) por meio de carta dirigida ao Seminário, para a Faculdade de Ciências de Lisboa. Os incritos até meados de Outubro serão informados directamente sobre o programa e horários das lições.

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Conselho Nacional de Pesquizas — O Prof. Leopoldo Nachbin, do IMPA, Rio de Janeiro, foi nomeado membro do Conselho Deliberativo do Conselho Nacional de Pesquizas, de que é director o Dr. Lélio I. Gama.

J. C. Morgado Jor. — A Universidade do Recife contratou, em 1960, o matemático português Prof. José Cardoso Morgado Júnior.

Escola Politécnica da Paraiba, Campina Grande — Nos dias 16 e 17 de Dezembro de 1959, o Prof. Manuel Zaluar Nunes, da Universidade do Recife, realizou duas conferências intituladas «O Ensino do Cálculo Numérico nas Escolas de Engenharia».

Cursos — *Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife* — Estão sendo ministrados os seguintes cursos:

1) «Álgebra Moderna», pelo Prof. José C. Morgado: grupos, aneis e polinómios.

2) «Teoria Espectral das Álgebras Normadas», pelo Prof. A. Pereira Gomes: representação de Gelfand e aplicação à teoria espectral.

3) «Cálculo das probabilidades e Estatística Matemática», pelo Prof. Manuel Zaluar Nunes: noções de probabilidades e estimação estatística.

4) «Álgebra Linear», pelo Prof. Roberto Ramalho de Azevedo: curso solicitado pela Comissão de Desenvolvimento Económico de Pernambuco (CODEPE).

5) «Análise Funcional», pelo Prof. Jônio Lemos: espaços métricos normados, aplicações.

Professores estrangeiros — Foi contratado, pela IMPA, por um período de 6 meses o Prof. Stephen Smale, da Universidade da Califórnia, Berkeley, USA, que realiza um curso intitulado «Diferential Topology»: teoremas de imersão, fibrados vectoriais, cobordismo.

O Dr. António A. Monteiro, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro e da Universidade Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina, fez na IMPA uma conferência intitulada: Matrizes características de Morgan para o Cálculo Proposicional.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame Final — Epoca de Julho — (2.ª chamada) — 18-7-1959.

I

5163 — Determine $f(x, y) = 0$ por forma que a quádrica $x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 + 2x_1x_5 + 2Xx_2x_5 + 2(Y-1)x_3x_5 - 4x_4x_5$, ao descrever $P(X, Y)$ a curva $f(x, y) = 0$, se decomponha exactamente em quatro quadrados.

Apresente nesse caso a decomposição.

R:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	**1**	0	-1	0	1	$\to f_1 = x_1 - x_3 + x_5$
x_2	0	0	1	0	X	
x_3	-1	1	1	0	$Y-1$	
x_4	0	0	0	1	-2	
x_5	1	X	$Y-1$	-2	1	

	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	0	X	
x_3	1	2	0	Y	
x_4	0	0	**1**	-2	$\to f_2 = x_4 - 2x_5$
x_5	X	Y	-2	0	

	x_2	x_3	x_5	
x_2	0	1	X	
x_3	1	**2**	Y	$\to f_3 = x_2 + x_3 + Yx_5$
x_5	X	Y	-4	

	x_2	x_5	
x_2	-1	$2X-Y$	$\to f_4 = -x_2 + (2X-Y)x_5$
x_5	$2X-Y$	$-8-Y^2$	

Para que a quádrica se decomponha exactamente em quatro quadrados terá de ser $\begin{vmatrix} -1 & 2X-Y \\ 2X-Y & -8-Y^2 \end{vmatrix} = 8 - 4X^2 + 4XY = 0$ *e portanto* $f(x, y) = 2xy - 2x^2 + 4 = 0$. *A decomposição em quadrados é* $(x_1 - x_3 + x_5)^2 + (x_4 - 2x_5)^2 + (x_2 + x_3 + Yx_5)^2 - [x_2 + (2X-Y)x_5]^2$.

II

5164 — Dados os planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi_2 &\equiv 2x + y + z = 0 \\ \pi_3 &\equiv -2x + 4y - z = 0 \\ \pi_4 &\equiv 2x - 3y + z = 0 \end{aligned}$$

determine as soluções independentes do sistema, bem como a solução geral.

Aproveite o resultado para calcular os cosenos directores da recta definida por π_1 e π_2.

R: *Como fàcilmente se reconhece, a característica de* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ *é igual a* 2 *e portanto o grau de indeterminação do sistema proposto é* 1. *Existe pois uma solução independente e qualquer outra é proporcional. Tomando* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$ *para determinante principal, será* z *a incógnita secundária e fazendo* $z = 1$, *por exemplo, obtém-se a solução independente* $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ *e a solução geral* $\left(-\frac{\alpha}{2}, 0, \alpha\right)$.

Devido à proporcionalidade, $\frac{x}{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$

e por conseguinte os parâmetros directores da recta definida por π_1 e π_2 *são* $h = -\frac{1}{2}$, $k = 0$, $l = 1$. *Os cosenos directores obtêm-se pelas formas* $\cos\alpha, \beta, \gamma = \frac{h, k, l}{\pm\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$ *que dão* $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

III

5165 – Considere a função $f(x) = x \log(1+x)$.

a) Desenvolva $f(x)$ em potências de $x-1$.

b) Calcule $Pf(x)$.

c) Determine $f^{(n)}(x)$.

R: a) *Fazendo* $x - 1 = t$, *como* $\log(2+t) = P\frac{1}{2+t}$ *e* $\frac{1}{2+t} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^n}{2^{n+1}}$ *vem* $\log(2+t) = \log 2 + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$.

$$(1+t)\log(2+t) = \log(2+t) + t\log(2+t) = \log 2 + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + t\log 2 + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{n+2}}{(n+1)2^{n+1}} = \log 2 + \left(\log 2 + \frac{1}{2}\right)t + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}t^{n+1} = \log 2 + \left(\log 2 + \frac{1}{2}\right)(x-1) + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}(x-1)^{n+1}.$$

b) $$Pf(x) = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}P\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}P\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1| + C.$$

c) $$f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x} = \log(1+x) + 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{6}{(1+x)^4}$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + \frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x)^n} (n = 2, 3, \cdots$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro – 13-10-1959

I

5166 – Considere a quádrica $f = X^* A X$, com $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, e a transformação $X = BY$,

com $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

a) Mostre que a transformação é ortogonal.

b) Apresente a quádrica $g = Y^* C Y$, resultante daquela transformação. Aproveite-a para apresentar a decomposição de $f(x_1, x_2, x_3)$ em quadrados. Classifique a quádrica $f(x_1, x_2, x_3)$.

R: a) *A transformação é ortogonal porque a matriz* B *é ortogonal. Com efeito,*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$(0)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

b) *Fazendo a transformação* $X=B\,Y$ *a quádrica* $f=X^*A\,X$ *transforma-se na quádrica equivalente* $g=(B\,Y)^*A\,B\,Y=Y^*B^*A\,B\,Y$, *isto é,* $C=B^*A\,B=$

$$=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$ *Portanto* $g=3\,y_1^2+3\,y_2^2$ *e, como*

$$Y=B^{-1}X=B^*X=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2\,x_3)\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3)\end{bmatrix},$$

vem $$\begin{cases}y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\\[2mm] y_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2\,x_3)\\[2mm] y_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x_1+x_2+x_3)\end{cases}$$ *e* $f=\dfrac{3}{2}(x_1-x_2)^2+$

$+\dfrac{1}{2}(x_1+x_2-2\,x_3)^2$. *A quádrica* $f(x_1,x_2,x_3)$ *é definida positiva.*

II

5167 — 1) Desenvolva em série de Mac Laurin a função $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$, indicando o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

Calcule em termos finitos $P\,f(x)$.

2) Dada a função $y=x^{\frac{1}{x}}$, indique o seu domínio, defina-a em $x=0$ por forma que fique contínua à direita nesse ponto, calcule $y'_d(0)$, determine os extremos e intervalos de monotonia.

R: 1) $$f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}=(1-x)(1+x)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(1-x)\left[1+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2\,n-1)}{2\cdot4\cdots2\,n}x^n\right]=$$

$$=1+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(1\,n-1)}{2\cdot4\cdots2\,n}x^n-x-$$

$$-\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2\,n-1)}{2\cdot4\cdots2\,n}x^{n+1}=1-\frac{3}{2}x+$$

$$+\sum_2^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2\,n-3)\,(4\,n-1)}{2\cdot4\cdots2\,n}x^n,\ \text{para } |x|<1.$$

$$P\,f(x)=P\frac{1}{\sqrt{1+x}}-P\frac{x}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x}-P\frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

A primitiva de $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ *pode calcular-se fazendo* $1+x=t^2$. *Assim,* $P\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=2\,P\dfrac{t^2-1}{t}\cdot t=$

$=2\dfrac{t^3}{3}-2\,t=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}$ *e então vem*

$$P\,f(x)=4\sqrt{1+x}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}+C.$$

2) *Como* $y=e^{\frac{\log x}{x}}$, *o domínio é visivelmente* $(0,+\infty)$. *Dado que* $\lim\limits_{x\to+0}y=0$, *terá de ser* $y(0)=0$ *para que a função fique contínua à direita em* $x=0$.

$$y'_d(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to+0}e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\log x}=0.$$

Como $y'=e^{\frac{\log x}{x}}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\log x\right)=\dfrac{e^{\frac{\log x}{x}}}{x^2}(1-\log x)$,

$y'>0$ *em* $(0,e)$ $y'=0$ *em* $x=e$ *e* $y'<0$ *em* $(e,+\infty)$ *e portanto* $y(x)$ *cresce em* $(0,e)$ *atinge um máximo em* $x=e$ *e decresce em* $(e,+\infty)$. *Claro que* $x=0$ *é minimizante de* $y(x)$.

III

5168 — Certa função $y=\varphi(x)$ é definida implìcitamente pela equação $y^p+x^p+k=0$. Dada a recta $a\,x+b\,y=c$ (a, b e c parâmetros), determine a condição para que ela seja tangente a $y=\varphi(x)$.

Forme o sistema constituído pela equação que exprime essa condição e pela recta dada, resolva-o em ordem a x e y por forma a obter $x=g_1(a,b,c)$ e $y=g_2(a,b,c)$ e mostre que estas duas funções são homogéneas de grau zero.

R: *A condição é que* $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{a}{b}$ ou $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{p-1}=$

$=\dfrac{a}{b}$. *O sistema* $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{p-1}=\dfrac{a}{b}\\ a\,x+b\,y=c\end{cases}$ *é equivalente a*

$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}\\ a\,x+b\,y=c\end{cases}$ *e utilizando, por exemplo, o método de substituição, obtem-se:*

$$x=\frac{c}{b\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-p}}+a}\quad e\quad y=\frac{c}{a\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}+b},$$ *funções que são, visìvelmente, homogéneas de grau zero.*

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de milicianos — 12/12/1959.

I

5169 — Estude o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= \beta \\ x - y \quad + z + u &= 0 \\ 2x + y \quad + z + u &= 0 \\ \alpha x - y \quad - z - u &= \gamma \end{aligned}$$

para os diferentes valores de α, β e γ, utilizando a teoria dos determinantes. Refira-se em pormenor ao caso da homogeneidade.

R: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2+\alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -(2+\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4(2+\alpha).$

Se $\alpha \neq -2$ *o sistema é possível determinado para quaisquer valores de* β *e* γ; *em particular, com* $\beta = \gamma = 0$ *o sistema é homogéneo e admite apenas a solução nula.*

Se $\alpha = -2$, *como* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, *o sistema é possível indeterminado (grau 1)*

se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & \gamma \end{vmatrix} = 0$, *o que acontece com qualquer* β *e* $\gamma = 0$; *em particular, com* $\beta = \gamma = 0$ *o sistema é homogéneo e indeterminado do grau 1, apresentando portanto soluções proporcionais.*

O sistema será impossível com $\alpha = -2$, $\gamma \neq 0$ *e* β *qualquer.*

II

5170 — 1) Estude a função $y = \dfrac{k}{1+e^{-x}}$ $(k > 0)$.

2) Calcule $P \log^2 x$.

R: 1) *Domínio* $(-\infty, +\infty)$. *Intersecta o eixo dos yy no ponto* $(0, k)$. *Como* $y' = k \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})} > 0$, *a fnnção é sempre crescente.* $y'' = k \; e^{-x} \dfrac{(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$ *e portanto a concavidade está voltada para cima em* $(-\infty, 0)$ *e para baixo em* $(0, +\infty)$, *havendo uma inflexão no ponto* $\left((0 ; \dfrac{k}{2}\right)$. *Como* $\lim\limits_{x \to +\infty} y = k$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} x = 0$, *a curva possui as assíntotas* $y = 0$ *e* $y = k$.

2) $P \log^2 x = x \log^2 x - 2 P x \cdot \log x \cdot \dfrac{1}{x} =$

$$= \log^2 x - 2 \left(x \log x - P x \cdot \right) =$$

$$= x \log^2 x - 2 x \log x + 2 x + C.$$

III

5171 — Dada a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$, resolva os seguintes problemas:

a) Mostre que é homogénea e escreva-a na forma $g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Calcule $g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $g'_x\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $g'_y\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e mostre que estas funções ainda são homogéneas.

b) Calcule a derivada de (f, xy) sobre a curva

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$$

c) A equação $f(x, y) - 2 = 0$ pode definir implìcitamente uma função $y(x)$ na vizinhança de $P(1, 1)$? Porquê?

R: *a*) $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$ *e portanto a função é homogénea de grau* 0. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ *e portanto* $g'\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{x^2}{y^2} + 1$, *função homogénea de grau* 0; $g'_x\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$ *e* $g'_y\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{x}{x^2} + \dfrac{1}{x}$, *ambas funções homogéneas de grau* -1.

b) $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}\right) \cdot 1 + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{y^2}\right) 2t.$

c) *A equação é satisfeita em* $P(1, 1)$ *mas* $f'_y(1, 1) = 0$ *e portanto não pode definir uma função implìcitamente na vizinhança desse ponto.*

Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência ordinário — 7-3-1960.

I

5172 — 1) Determine os pontos de acumulação, pontos fronteiros e limites de Weierstrass do conjunto $\left\{0, \left[(-1)^n \frac{1}{n}\right], \left(\frac{2n}{n+1}\right)\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. O conjunto é fechado? Porquê?

Dispondo os elementos do conjunto em sucessão, determine os seus limites máximo e mínimo e mostre que há uma infinidade de elementos inferiores ao limite mínimo. Poderá existir alguma sucessão em que haja uma infinidade de elementos inferiores a um número menor do que o limite mínimo? Porquê?

2) Prove que, tendendo $x_{n+1} - x_n$ para K, também $\frac{x_n}{n}$ tende para K. Qual o limite da sucessão

$$u_n = \frac{1}{n}\left[2 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)\right]?$$

R: 1) *Pontos de acumulação:* 0 e 2.

Pontos fronteiros: $\left\{0, \left[(-1)^n \frac{1}{n}\right], \left(\frac{2n}{n+1}\right), 2\right\}$

O conjunto não é fechado porque o ponto de acumulação 2 *não pertence ao conjunto.*

2) *O teorema do limite da média aritmética dá imediatamente* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n}\left[2 + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

II

5173 — 1) Deduza o 1.° critério de Cauchy e diga como o aplica ao estudo das séries de potências.

Supondo que a série $\sum (-1)^n a_n$ $(a_n > 0)$ é absolutamente convergente, qual é o màximo intervalo de convergência absoluta para a série $\sum a_n x^n$? É aí uniforme a convergência? Porquê?

Diga em que condições o intervalo indicado coincide com o intervalo de convergência absoluta de $\sum a_n x^n$.

2) Determine pela regra de Cauchy o quadrado da série $\sum x^n$ e indique a sua soma.

R: 2) $(\sum x^n)^2 = \sum n\, x^{n-1}$ *que, para* $|x| < 1$, *tem a soma* $\frac{1}{(1-x)^2}$.

III

5174 — 1) Estude a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & (x < 0) \\ 2 & (x = 0) \\ x^2 & (x > 0), \end{cases}$$

calcule os limites laterais $f(+0)$ e $f(-0)$ e a oscilação para $x = 0$.

2) Enuncie e demonstre o teorema de Lagrange para as funções regulares. Pode aplicar-se esta proposição a $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ em $(-1, 1)$? Porquê?

R: 1) *A função é contínua em* $(-\infty, +\infty)$ *excepto para* $x = 0$.

$$f(+0) = 0 \quad \text{e} \quad f(-0) = 1$$

$$w(0) = \overline{f}(0) - \underline{f}(0) = 2 - 1 = 1.$$

2) *A proposição não se pode aplicar a* $\varphi(x)$ *em* $(-1, 1)$ *porque esta função não é regular nesse intervalo Embora seja contínua,* $\varphi(x)$ *tem derivada infinita de duplo sinal em* $x = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência extraordinário — 2-4-1960.

I

5175 — Prove que ponto de acumulação do conjunto dos termos de uma sucessão é limite de subsucessões. Supondo que uma sucessão tem uma infinidade de sublimites, mostre que o conjunto destes é fechado.

Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log n}$.

R: *Como* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\log n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$, *vem* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\log n} = 0$.

II

5176 — 1) Mostre que uma condição necessária de convergência de uma série é dada pela evanescência do termo geral.

Defina série absolutamente convergente e enuncie as suas propriedades fundamentais.

Determine os valores de x para os quais a série $\sum n \left(\frac{1}{x-a}\right)^n$ é absolutamente convergente.

2) Como estuda a natureza de um produto infinito de termos positivos? Indique os valores

de α para os quais o produto $\Pi\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ é convergente.

R: 1) *Como* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left|\frac{1}{x-a}\right|^n} = \frac{1}{|x-a|}$, *a série dada será absolutamente convergente para os valores de* x *tais que* $|x-a|>1$ *ou* $x>a+1$ *e* $x<a-1$.

2) *O produto será convergente quando* $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ *o for, o que acontece com* $\alpha>1$.

III

5177 — 1) Supondo que $\varphi'(x)>0$ em (a,b), prove que $\varphi(x)$ é crescente nesse intervalo.

2) Considere as funções $\Phi(y)$ e $f(x)$. Supondo que $\Phi'(b)$ é finita $(b=f(a))$ e $f(x)$ é contínua em $x=a$, prove que $F(x)=\Phi[f(x)]$ é contínna em $x=a$. A mesma hipótese garante a existência de $F'(a)$? Porquê?

3) Calcule P arc sec x.

R: 3) *P arc sec* $x = x$ *arc sec* $x - \mathrm{P}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$
$= x$ *arc sec* $x -$ *arch* $x + C$.

Soluções de Fernando de Jesus

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência — (Licenciaturas em Ciências Biológicas e Geológicas) — 1959-60.

5178 — Estude a curva $y=\frac{x^2+1}{x}$.

5179 — Demonstre e interprete geomètricamente o teorema de Lagrange. Será o teorema aplicável à função $y=\sqrt[3]{x^2}$ no intervalo $[-8,8]$? Porquê?

5180 — Determine $\lim\limits_{x\to\pi-0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi-x}}$.

5181 — Primitive *a*) $\cos^{\frac{2}{3}}x\cdot\operatorname{sen}^3 x$; *b*) $x^2e^x + \frac{1}{x^4+2x^2+1}$; *c*) $\frac{x^2-x+1}{x_2-3x+2}$.

5182 — Determine a área limitada pela parábola $y=2-x^2$ e a recta $y+x=0$.

Enunciados do Dr. Dias Agudo

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de frequência — 1959-60.

5183 — *a*) Discutir o seguinte sistema

$$\begin{cases} ax+y+z=1\\ x+ay+z=b\\ x+y+az=b^2\\ x+y+z=1\end{cases}$$

e resolvê-lo quando possível.

b) Indicar em cada um dos casos a posição relativa dos planos representados pelas quatro equações.

5184 — Dada a relação $w=2iz+4$, com $z=x+iy$ e $w=u+iv$, determine o lugar das imagens de w no plano de Argand quando

a) $\rho(z)\leqslant 2$; *b*) $\rho(z)\leqslant 2$ e $I(z)\geqslant|R(z)|$

5185 — Considerando os vectores $\overline{u}=2\overline{I}+\overline{J}$ e $\overline{v}=a\overline{I}+b\overline{J}+2\overline{K}$, supostos aplicados no ponto $B(0,1,2)$, determine a e b de modo que $\overline{u}$ seja perpendicular a $\overline{v}$ e o ponto $A(1,2,3)$ esteja a uma distância igual a 1 do plano definido por $\overline{u}$ e $\overline{v}$ (eixos rectangulares).

5186 — Considerando a matriz $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$

a) Determine 3 vectores próprios $\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}$ de módulo igual a 1 (eixos triortogonais).

b) Calcule os ângulos $(\widehat{\overline{v_i},\overline{v_j}})$ $(i\neq j)$. Seria de prever o resultado? Porquê?

c) Designando por V_i a matriz coluna constituída pelas coordenadas de $\overline{v_i}$ $(i=1,2,3)$, determine a matriz inversa de $T=[V_1\,V_2\,V_3]$.

d) Com $X=|x\,y\,z|$ determine X^*AX e indique, em que se transforma esta expressão quando se faz a substituição $X=TX'$.

e) O que representa geomètricamente cada uma das equações $X^*V_i=0$ e a que se reduz cada uma delas por meio da transformação anterior?

Enunciados do Dr. Dias Agudo

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 1959-60. (Algumas questões).

Ponto 1

5187 — Dada a quádrica $3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$.

a) Determine o plano diametral conjugado com a recta de equações $x = y, z = 0$. Trata-se de algum plano diametral particular? Justifique a resposta.

b) Deduza uma equação canónica e classifique a quádrica.

5188 — Pretende-se construir um silo de volume dado V com a forma de um cilindro terminado por um hemisfério na parte superior. Cada metro quadrado de construção custa para o hemisfério o dobro do que custa para o cilindro. Determinar as dimensões do silo por forma a tornar mínimo o custo da construção.

5189 — Dada a função $w = e^{\log xyz}$ com $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \sqrt{1+4t^3}$, $z = t^{a^t}$. Calcular $\dfrac{dw}{dt}$ e $\dfrac{d^2 w}{dt^2}$.

5190 — Em determinados problemas de Resistência de Materiais intervém as grandezas $M(x)$ (momento flector) e $T(x)$ (espaço transverso) relacionadas por $T(x) = \dfrac{dM}{dx}$.

Considere uma viga assente no eixo OX de um sistema de referência XOY com os extremos em $(0, 0)$ e $(l, 0)$ e suponha que para ela se tem

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} q b & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \dfrac{1}{2} q b - q(x-a) & \text{para } a < x < a+b \\ -\dfrac{1}{2} q b & \text{para } a+b \leqslant x \leqslant l \quad (a, b, l, q \text{ constantes positivas}). \end{cases}$$

Determine a correspondente função $M(x)$ sabendo que $M(0) = 0$ e estude a variação de $M(x)$ no intervalo $(0, l)$.

Ponto 2

5191 — Dado o plano $\pi \equiv x + z + 1 = 0$ e a recta $r \equiv x = y = z$, determine:

a) Os planos que passam por r e formam com π um ângulo de 60°.

b) Os planos paralelos a π que cortam a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ segundo uma circunferência de raio 4.

5192 — Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes do plano $x + y + z = 1$ e do ponto $P(1, 1, 1)$. Como se chama a superfície obtida?

5193 — Dada a função $u = f(r)$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{dx^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 u}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}$.

5194 — Em que teoremas se baseia para concluir que uma funcão contínua transforma um intervalo fechado noutro intervalo fechado?

Sejam m e M o mínimo e o máximo da função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Mostre que $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$ e conclua daí que existe pelo menos um ponto ξ em $[a, b]$ tal que $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$.

Interprete geomètricamente esta propriedade.

Exprimindo $\int_a^b f(x)\,dx$ em termos de uma primitiva de $f(x)$ que teorema obtém? Justifique.

Enunciados do Dr. Dias Agudo

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência – 1960.

5195 – 1) Prove que, sendo iguais todos os sublimites de uma sucessão, esta tem limite.

5196 – 2) Estude a natureza da série

$$a_1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - \cdots$$

supondo que a_n decresce para zero.

5197 — 3) Intervalo de convergência e comportamento nos extremos deste para a série

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}{3^n\, n!} (2x)^n$$

5198 – 4) Discuta a natureza do produto infinito

$$\prod_1^\infty (1 - u_n)\, e^{u_n}$$

5199 — 5) Calcule no ponto $x = 0$ os limites laterais e as derivadas laterais da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{para } x < 0 \\ +\sqrt{2-(x-1)^2} & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5200 – 6) Seja F um conjunto fechado e A um conjunto aberto contido em F. Prove que é fechado o conjunto dos elementos de F não pertencentes a A.

5201 – 7) Designe $\sum_0^\infty u_n(x)$ uma série uniformemente convergente em cada ponto de X limitado e fechado Mostre que ela converge uniformemente em X.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 2.° exame de frequência — 1960.

5202 — 1) Considere a função

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x^2 - 4}$$

a) Calcule as assíntotas

b) Prove que admite quatro extremos locais e indique a natureza de cada

c) Prove que admite um e um só ponto de inflexão

d) Faça o traçado aproximado

e) Efectue a decomposição em fracções simples e calcule a área limitada pela curva e o eixo dos $x\,x$.

f) Usando a mesma decomposição, calcule o termo geral do desenvolvimento segundo as potências de x e indique o intervalo de convergência

5203 — 2) *a*) Se $f(x)$ tem segunda derivada negativa ao longo do intervalo (a, b), que dizer do sentido da concavidade da sua imagem? Justifique

b) Em que condições se pode integrar termo a termo uma série de potências? Estabeleça o teorema em que baseia a resposta.

c) Suponha que as funções $\varphi(u, v)$, $\psi(v)$ e $f(x, y)$ têm derivadas de primeira ordem nos pontos (u_0, v_0), v_0 e $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(v_0)$, respectivamente. Imponha condições que assegurem a existência das derivadas de primeira ordem da composição $F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(v)]$ no ponto (u_0, v_0). Dê as expressões dessas derivadas.

J. J. Dionísio

F. C. P. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência — 9-2-1960.

Ponto n.° 2

5204 — 1) Solução analítica e gráfica do sistema

$$\begin{cases} |Rz| = 3 \\ Rz = Iz \end{cases}$$

Nota: Rz e Iz indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z.

2) Considere o sistema (em x, y, z)

$$\begin{cases} x + ay + z = \alpha \\ ax + \ \ y + z = \beta \\ x + ay + z = \gamma\,; \end{cases}$$

determine uma matriz principal do sistema e escreva (em cada caso) as matrizes características correspondentes.

3) Represente por Q o corpo dos números racionais e considere os polinómios $A = 2 + x + x^2$ e $B = 1 + x^2$ de $Q[x]$;

a) exprima o máximo divisor comum de A e B como combinação linear de A e B usando o algoritmo de Euclides;

b) servindo-se exclusivamente dos cálculos da alínea *a*), decomponha em elementos simples de $Q(x)$ a fracção $\dfrac{2}{(2 + x + x^2)(1 + x^2)}$.

Nota: A e B são irredutíveis sobre Q.

4) Considere o corpo assim definido:

$E = \{0, 1, 2, 3\}$;

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

;

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

;

determine os polinómios do grau dois e normados de $E[x]$ irredutíveis (sobre E).

5) Considere um corpo E e em seguida o conjunto $E[x]$ dos polinómios de coeficientes em E e na indeterminada x; supondo que $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de ideais de $E[x]$ tal que dados dois (quaisquer) elementos A_α e A_β da família existe um elemento da família A_γ tal que $A_\alpha \subset A_\gamma$ e $A_\beta \subset A_\gamma$, mostre que $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um ideal.

6) Considere a série de termo geral $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Verifique que é divergente usando o teorema de Cauchy (é essencial mostrar prèviamente a legitimidade da sua aplicação).

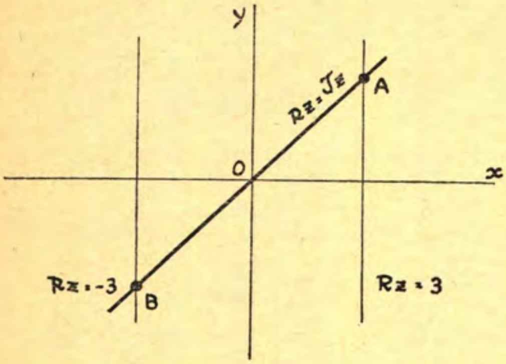
Nota: As questões que deverá resolver são:

1, 2, 3, 5 e 6 ou 1, 2, 4, 5 e 6.

Resolução do ponto n.° 2

1) a) Solução analítica: $|\mathrm{R}\,z| = 3$ *significa* $\mathrm{R}\,z = 3$ *ou* $\mathrm{R}\,z = -3$; *logo as soluções são* $3 + 3i$ e $-3 - 3i$.

b) Solução gráfica: A, B.



2) *A matriz do sistema é* $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$; *como o seu determinante é zero (1.ª e 3.ª linhas iguais), a sua característica é* 1 *ou* 2 *(há elementos diferentes de zero); a submatriz* $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *relativa às duas primeiras linhas e às duas últimas colunas, tem determinante igual a* $a-1$ *e daqui, na hipótese* $a \neq 1$, *a submatriz referida é matriz principal e a matriz característica correspondente é* $\begin{bmatrix} a & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ a & 1 & \gamma \end{bmatrix}$; *no caso* $a=1$ *poderá tomar-se a submatriz* $[1]$, *relativa à primeira linha e à primeira coluna, como matriz principal e as matrizes características correspondentes são*

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \ e \ \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}.$$

3) a) $A = B\,Q + R_1$ *com* $Q_1 = 1 \quad R_1 = 1 + x$
$B = R_1\,Q_2 + R_2$ *com* $Q_2 = -1 + x \quad R_2 = 2$

logo, $R_2 = 2$ *é máximo divisor comum de* A *e* B; *como:*

$$R_1 = A - B\,Q_1 \quad e \quad R_2 = B - R_1\,Q_2\,,$$

teremos:

$$R_2 = B - (A - B\,Q_1)\,Q_2 = A\,(-Q_2) + B\,(1 + Q_1\,Q_2)$$

$$2 = (2 + x + x^2)\,(1 - x) + (1 + x^2)\,x$$

b) $$\frac{2}{(2+x+x^2)\,(1+x^2)} = \frac{(2+x+x^2)\,(1-x) + (1+x^2)\,x}{(2+x+x^2)\,(1+x^2)} = \frac{x}{2+x+x^2} + \frac{1-x}{1+x^2}$$

4) *Seja* $A = a + b\,x + x^2 \in E[x]$ *irredutível (sobre* E*); como* A *é de grau dois, dizer que é irredutível e equivalente a dizer que a função polinomial definida por* A *toma em cada ponto de* E *um valor diferente de* 0. a *e* b *deverão então ser determinados pelas condições:*

$$A(0) = a \neq 0$$
$$A(1) = a + b + 1 \neq 0$$
$$A(2) = a + b\,2 + 3 \neq 0$$
$$A(3) = a + b\,3 + 2 \neq 0\,.$$

Analisemos, a título de exemplo, o caso $a = 1$. *Da segunda condição, vem, então,* $b = 1$ *ou* $b = 2$ *ou* $b = 3$; *pelas duas últimas teremos que afastar o caso* $b = 1$; *isto é, o polinómio* $1 + b\,x + x^2$ *é irredutível quando e só quando* $b = 2$ *ou* $b = 3$.

5) i) *O polinómio zero pertence a* $\bigcup_{i \in I} A_i$; *pois o polinómio zero pertence a qualquer ideal;*

ii) *Se* $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$ *e* $B \in \bigcup_{i \in I} A_i$ *então* $A - B \in \bigcup_{i \in I} A_i$; *na verdade, existem então* $\alpha \in I$ *e* $\beta \in I$ *tais que* $A \in A_\alpha$ *e* $B \in A_\beta$ *e como existe* $\gamma \in I$ *tal que* $A_\alpha \subset A_\gamma$ *e* $A_\beta \subset A_\gamma$, A *e* B *pertencem ao ideal* A_γ *e daqui se conclui que* $A - B \in A_\gamma \subset \bigcup_{i \in I} A_i$;

iii) *se* $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$, *qualquer que seja* $X \in E[x]$, $A\,X \in \bigcup_{i \in I} A_i$; *como* $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$ *existe* $\alpha \in I$ *tal que* $A \in A_\alpha$ *e como* A_α *é ideal,* $A\,X \in A_\alpha \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

b) O *teorema de* Cauchy *invocado é este: «se* $(a_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ *é uma sucessão decrescente e de termos não-negativos, pondo* $b_i = 2^i\,a_{2^i}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, *as séries* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *e* $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ *são ambas convergentes ou ambas divergentes».*

Ora $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1,2,3\ldots,}$ *é decrescente e de termos não-negativos, logo o teorema é aplicável. A série de termo geral* $b_i = 2_i\,\frac{1}{\sqrt{2^i}}$, $i = 0, 1, 2 \cdots$, *é a série geométrica* $1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \cdots$, *de razão* $\sqrt{2}$, *que é divergente. A série de termo geral* $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, *é portanto divergente.*

F. C. P. — Matemáticas Gerais — 9-2-60.

Ponto n.º 3

5205 — 1) Solução gráfica e analítica do sistema

$$\begin{cases} |\mathcal{R}z + \mathcal{I}z| = 1 \\ |z| = 1\,. \end{cases}$$

Nota: $\mathcal{R}z$ e $\mathcal{I}z$ indicam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z.

2) É dado o sistema (em x, y, z):

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ ax + by + cz = c; \end{cases}$$

condicione a, b e c, apresentando o resultado de maneira simples, de modo que o sistema seja solúvel e tenha mais que uma solução usando exclusivamente o teorema de Rouché sob a forma em que intervêm directamente os determinantes das matrizes características.

3) Represente por Q o corpo dos números racionais e considere os polinómios $A = 1 - x + x^2$ e $B = 1 + 2x + x^2$ de $Q[x]$;

a) exprima o máximo divisor comum de A e B como combinação linear de A e B usando o algoritmo de Euclides;

b) usando exclusivamente o método dos coeficientes indeterminados, decomponha em elementos simples de $Q(x)$ a fracção: $\dfrac{6 + 8x + 13x^2 + 5x^3}{(1+x)^2(1-x+x^2)}$

Nota: $1 - x + x^2$ é irredutível sobre Q.

4) Considere o corpo assim definido:

$E = \{0, 1, 2, 3\}$;

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

;

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

;

a) Diga, justificando, se o polinómio $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ é ou não irredutível (sobre E); caso seja não irredutível, factorize-o em factores normados e irredutíveis (de $E[x]$);

b) determine o polinómio $A \in E[x]$, quando muito de grau três, tal que:

$$A(0) = 1 \quad A(1) = 2 \quad A(2) = 3 \quad A(3) = 1.$$

5) Considere, por exemplo, o corpo dos números complexos C, e no conjunto E dos subcorpos de C a relação de ordem parcial $\subset$ (inclusão de conjuntos).

Mostre:

a) cada parte $A (\neq \emptyset)$ de E é minorada e tem ínfimo;

b) cada parte $A (\neq \emptyset)$ de E é majorada e tem supremo.

6) Aplicando o critério de D'Alembert à série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \cdots$$

diga se é convergente ou divergente.

Nota: Designando por $a_n, n = 1, 2, \cdots$, o termo de ordem de n, é:

$$\begin{cases} a_{3n-2} = 1/2^{n-1}\ 3^{n-1}\ 4^{n-1} & n = 1, 2, \cdots \\ a_{3n-1} = 1/2^{n}\ 3^{n-1}\ 4^{n-1} & n = 1, 2, \cdots \\ a_{3n} = 1/2^{n}\ 3^{n}\ 4^{n-1} & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Observação: As questões que deverá resolver são: 1, 2, 3, 5 e 6 ou 1, 2, 4, 5 e 6.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 1959-1960.

Alguns enunciados doutros pontos

5206 — 1) Considere o conjunto Z dos números inteiros e as relações ρ e σ definidas em Z como se indica:

$$x \rho y \text{ significa } \begin{array}{ll} x \leqslant y & \text{se } |x| = |y| \\ |x| < |y| & \text{se } |x| \neq |y|; \end{array}$$

$$x \sigma y \text{ significa } |x| = |y|.$$

Mostre que ρ é uma relação de ordem total e σ é uma relação de equivalência.

2) Sejam ρ e σ relações de ordem parcial definidas no conjunto $E \neq \emptyset$ e considere as relações τ_1 e τ_2 definidas em E deste modo:

$$x \tau_1 y \text{ significa } x \rho y \text{ ou } x \sigma y;$$
$$x \tau_2 y \text{ significa } x \rho y \text{ e } x \sigma y.$$

Diga, justificando, se alguma das relações τ_1 e τ_2 é de ordem parcial.

3) Considere a relação ρ definida no corpo dos números complexos como se indica:

$$z \rho z' \text{ significa } \begin{array}{ll} \mathcal{I}z \leqslant \mathcal{I}z' & \text{se } \mathcal{R}z = \mathcal{R}z' \\ \mathcal{R}z < \mathcal{R}z' & \text{se } \mathcal{R}z \neq \mathcal{R}z'. \end{array}$$

Mostre que ρ é um relação de ordem total.

4) Estude, pelo teorema de Cauchy e mostrando a legitimidade da sua aplicação, a série de termo geral

$$a_n\,,\quad n=1,2,3,\cdots,\quad \text{com}\quad a_1=1\quad \text{e}\quad a_n=\frac{1}{n\log n}$$

para $n=2,3,\cdots$.

5) Estude, pelo critério de Cauchy, a série:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{5^6}+$$
$$+\frac{1}{8^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{5^9}+\cdots$$

Nota: Representando por a_n, $n=1,2,\cdots$, o termo de ordem n, é:

$$a_{3n-2}=1/8^{3n-2}\quad n=1,2,\cdots$$
$$a_{3n-1}=1/2^{3n-1}\quad n=1,2,\cdots$$
$$a_{3n}\ =1/5^{3n}\quad n=1,2,\cdots$$

6) Considere o corpo assim definido:

$E=\{0,1\}$;

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

;

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

a) $1+x+x^2+x^3$ e $E[x]$ é irredutível (sobre E)? Justifique.

b) Forme as tabelas das operações «$+$» e «$\bullet$» definidas em $E\times E$ do modo seguinte:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$$
$$(x,y)\bullet(u,v)=(x\cdot u,y\cdot v).$$

c) Verifique que $(E\times E,+,\cdot)$ não é um corpo.

Enunciados e soluções de
Aníbal Coimbra Aires de Matos

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 1960.

1.ª chamada

5207 — 1) Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 7\\ 1 & 2 & -1\\ -4 & -6 & 9\end{bmatrix}$$

a) Calcule $c(\lambda)$, adj $(\lambda I - A)$ e A^{-1}

b) Mostre que é cíclica

c) Calcule os valores próprios e bases dos subespaços próprios, estas usando adj $(\lambda I - A)$.

5208 — 2) Seja $A=[\alpha_{ij}]$ matriz tal que

$$R\,\alpha_{kk}>\sum_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{n}|\alpha_{kj}|\qquad k=1,\cdots,n$$

a) Prove que são positivas as partes reais de todos os valores próprios

b) Prove que é $\det R\,A>0$.

5209 — 3) Designe A a soma directa de r transformações lineares $A_1,\cdots,A_r$ com polinómios mínimos respectivos $f_1(\lambda),\cdots,f_r(\lambda)$ primos entre si dois a dois. Dê, justificando, o polinómio mínimo de A.

5210 — 4) *a*) É dado o polinómio $f(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+1$. Obtenha a decomposição espectral de $f(A)$ usando a relativa a A.

b) Se C é nilpotente de índice q, prove que $\sum_{k=1}^{q-1}\alpha_k C^k=0$ implica $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{q-1}=0$.

c) Usando as alíneas anteriores, deduza para A uma condição incidente sobre os valores próprios, necessária e suficiente para que $f(A)$ resulte completa.

2.ª chamada

5211 — 1) Calcule os valores próprios da matriz

$$A=\begin{bmatrix}9 & -1 & -1\\ -1 & 9 & -1\\ 2 & 2 & 12\end{bmatrix}$$

e obtenha uma base de Jordan.

5212 — 2) *a*) Prove que é unidimensional qualquer subespaço próprio de uma transformação linear cíclica.

b) É a recíproca verdadeira? Justifique.

c) Condição necessária e suficiente para que uma transformação cíclica seja completa.

5213 — 3) *a*) Que valores são admissíveis para α de modo que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

admita potência infinita? Use o teorema de Oldenburger.

b) Confirme o resultado anterior mediante o cálculo prévio da sucessão das potências de A.

5214 — 4) *a*) A matriz não-negativa A é ampliada com uma linha e uma coluna não-negativas. Relacione o raio espectral da nova matriz com o de A.

b) Prove que matriz nilpotente não-negativa é transformável por permutação em matriz triangular.

J. J. Dionísio

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Análise Superior — 1.ª frequência — (1.ª chamada) — 1960.

5215 — 1) Demonstre que, num espaço métrico, a distância entre um conjunto compacto e um conjunto fechado é maior que zero, se, e só se, os dois conjuntos são disjuntos. Mostre com um exemplo que a distância entre dois conjuntos fechados pode ser nula, sendo os conjuntos disjuntos.

5216 — 2) Mostre que um sub-espaço fechado dum espaço métrico completo é também completo.

5217 — 3) Prove que, num espaço separado, dados vários pontos em número finito, é sempre possível escolher vizinhanças desses pontos, disjuntas duas a duas.

5218 — 4) Reduza à forma triangular o sistema

$$\begin{aligned} Dx + Dy - z &= \varphi \\ Dx + y + Dz &= \varphi \\ x + y + Dz &= \varphi \end{aligned}$$

e supondo que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \text{ ou } t > \pi/2 \\ 1, & \text{se } 0 < t < \pi/2 \end{cases}$$

ache a solução do sistema que se anula para $t < 0$.

5219 — 5) Determine, pelo método de truncatura, a solução da equação $y''' + 4y' = 1$ que verifica as condições $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5220 — 6) Determine a função de Green associada ao sistema

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= \varphi(x) \\ y(0) = 0 \,, \; y(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

e determine a resposta do sistema quando a acção $\varphi(x)$ é a função $|\operatorname{sen} 4x|$.

5221 — 7) Prove que a sucessão de funções

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n\,, & \text{para } |x| \leqslant \dfrac{1}{n^2} \\ 0\,, & \text{para } |x| \geqslant \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

converge em média sobre a recta mas não converge em média quadrática nem pontualmente.

5222 — 8) Mostre que, se φ é uma função indefinidamente derivável no sentido usual e S uma distribuição qualquer, o produto de composição $\varphi * S$ é uma função indefinidamente derivável no sentido usual. (Supõem-se φ e S nulas à esquerda da origem).

F. C. L. — Análise Superior — 1.ª frequência — (2.ª chamada) — 1960.

5223 — 1) Seja f uma aplicação de R num intervalo limitado; mostre que, para f ser contínua, é necessário e suficiente que o gráfico de f seja um conjunto fechado em R^2.

5224 — 2) Prove que o espaço R^3 é homeomorfo ao interior de uma esfera de R^3 e que R^2 não é homeomorfo a uma superfície esférica.

5225 — 3) Sendo E um espaço separado, prove que, dados dois conjuntos compactos M, N de E disjuntos, existem sempre dois conjuntos abertos disjuntos A; B de E tais que $M \subset A$ e $N \subset B$.

5226 — 4) Determine pelo método de truncatura a solução da equação

$$y^{(\mathrm{iv})} - y = \cos x$$

que verifica as seguintes condições iniciais

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,,\; y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,,\; y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,,\; y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,.$$

5227 — 5) Determine a solução do sistema

$$x'+y'-x-y=H$$
$$x''+y''-x+y=\delta$$

que se anula à esquerda da origem. (H designa a função de Heaviside e δ a distribuição de Dirac).

5228 — 6) Determinar a função de Green associada ao sistema

$$y'''=\varphi(x)\,,\; y(0)=0\,,\; y(1)=y'(1)=0\,.$$

5229 — 7) Mostre que, se T é uma distribuição de ordem $p \geqslant 2$, todas as soluções da equação $y''+a\,y'+b\,y=\mathrm{T}$ são distribuições de ordem $p-2$.

F. C. L. — Análise Superior — 2.ª frequência — 1960

5230 — 1) Seja f uma função holomorfa num domínio D e seja a uma singularidade isolada de f. Demonstre que:

a) Condição necessária e suficiente para que a seja um polo de ordem k é que existam duas constantes positivas M, N tais que se tenha

$$N \leq |f(z)|\,|z-a|^k \leq M$$

numa vizinhança de a privada deste ponto.

b) É impossível a condição $|f(z)| \geqslant e^{\frac{1}{|z-a|}}$ numa vizinhança de a privada deste ponto.

5231 — 2) Mostre que a função $\exp(1/z)$ é limitada no semi-plano $\mathrm{Re}\, z < 0$, apesar de a origem ser uma singularidade essencial para esta função.

5232 — 3) Seja D um domínio aberto qualquer do plano complexo C e designe $\mathcal{H}(D)$ o espaço vectorial complexo formado pelas funções holomorfas em D, com as definições usuais de adição de duas funções e produto de uma função por um número complexo. A cada função f e $\mathcal{H}(D)$ e a cada compacto $K \subset D$, com um número infinito de pontos, façamos corresponder o número $p_K(f)=\max\limits_{z \in K}|f(z)|$. Posto isto

a) Provar que p_K é uma função norma definida em $\mathcal{H}(D)$, qualquer que seja o compacto K.

b) Caracterizar a convergência de uma sucessão f_n de funções de $\mathcal{H}(D)$, relativamente ao sistema de normas $p_K(f)$.

c) Provar que o operador D de derivação é contínuo relativamente à topologia introduzida em $\mathcal{H}(D)$ pelo sistema de normas $p_K(f)$.

5233 — 4) Resolver pelo método das matrizes o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{d t^2}=-3x_1+5x_2 \\ \dfrac{d^2 x_2}{d t^2}=-2x_1+3x_2 \end{cases}$$

com as condições iniciais $x_1(1)=0\,,\; x_1'(1)=1$ $x_2(1)=0\,,\; x_2'(1)=0$.

5234 — 5) *a*) Determine as funções próprias do operador D^2 que verificam as condições nos limites $y(0)=0\,, y(\pi)=0$.

b) Utilize o resultado anterior para determinar as componentes harmónicas da solução da equação $D^2 y = x$ sujeita aquelas mesmas condições.

5235 — 6) Calcular pelo método dos resíduos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x}}{1+x^2}\,dx$$

5236 — 7) Calcular pelo método dos resíduos o integral

$$\int_{\Gamma} z^2\, e^{\frac{1}{z}}\, dz$$

sendo Γ uma circunferência com centro na origem, orientada no sentido positivo.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecanica Racional — 1.º exame de frequência — 1959-1960.

5237 — 1 — *a*) Componentes tangencial e centrípeta da aceleração dum ponto em movimento.

b) Prove que o raio de curvatura da trajectória do ponto na posição que ele ocupa num certo instante é

$$\rho=\frac{|\mathbf{v}|^3}{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ são, respectivamente, a velocidade e a aceleração do ponto no referido instante. Por meio desta expressão, obtenha a expressão do raio de curvatura da linha plana $y = f(x)$ num seu ponto genérico.

2 — a) Ângulos de Euler. Estabeleça a relação que existe entre os ângulos de Euler e os cossenos directores dos eixos dos dois triedros de referência.

b) Sejam dois triedros S_1 e S_2; estabeleça as relações que existem entre os ângulos de Euler que definem a posição de S_2 em relação a S_1 e os ângulos de Euler que definem a posição de S_1 em relação a S_2, e comprove com as relações obtidas na alínea a) as relações agora obtidas.

3 — a) As coordenadas vectoriais dum sistema de vectores localizados sobre rectas em relação ao ponto $A(0, 1, 1)$ são

$$\mathbf{R} = 3\,\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 .$$

Determine um sistema equivalente ao sistema dado, formado por três vectores

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ aplicado em A

$\mathbf{v}_2$ pertencente ao plano $B = O + \lambda\,\mathbf{e}_2 + \mu\,\mathbf{e}_3$

$\mathbf{v}_3$ pertencente ao plano $C = O + m\,\mathbf{e}_1 + n\,\mathbf{e}_3$.

Mostre que nem todo o sistema de vectores é equivalente ao sistema dos três vectores nas condições referidas.

b) É dado um sistema de vectores, S, uma recta r e dois pontos A e B. Mostre que se S é equivalente a três vectores $(r, \mathbf{v}_1)$, $(A, \mathbf{v}_2)$, $(B, \mathbf{v}_3)$, então $\mathbf{v}_1$ é determinado, assim como os planos de $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

4) Um ponto P move-se de modo tal que as componentes da sua velocidade são

$$\begin{cases} v_x = -2\,\omega \operatorname{sen} \omega t \\ v_y = 4\,\omega \operatorname{sen} 2\,\omega t \\ v_z = 0 . \end{cases}$$

com ω constante. No instante $t = 0$ o ponto encontrava-se em $P_0(0, 2, 2)$.

a) Determine as equações finitas do movimento de P e a sua trajectória.

b) Mostre que o movimento é periódico e determine o tempo que o ponto leva a percorrer a trajectória uma vez.

c) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração do ponto no instante $t = \dfrac{\pi}{2\,\omega}$.

F. C. L. — Mecânica Racional — 2.º Exame de frequência — 1959-1960.

5238 — 1) a) Eixos principais de inércia dum sistema material S em relação a um ponto. Critério que permite reconhecer se uma recta que passa por um ponto A é eixo principal de inércia de S em relação a A. Mostre que se um eixo principal de inércia é eixo principal central de inércia, então é eixo principal de inércia em relação a qualquer dos seus pontos.

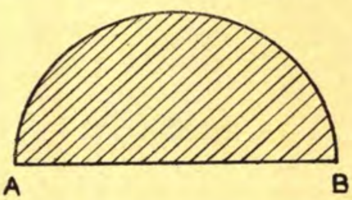
b) O elipsoide central de inércia de um dado sistema material é uma esfera. Servindo-se da relação que existe entre os momentos de inércia dum sistema material em relação a rectas paralelas, diga que forma particular tem o elipsoide de inércia do mesmo sistema em relação a um outro ponto A.

Sendo I o momento de inércia do sistema referido em relação ao seu centro de massa G e d a distância de G a A diga quais os valores dos seus momentos principais de inércia em relação a A.

5239 — 2) a) Sistemas articulados. Suas equações de equilíbrio. Deverão ou não estas equações implicar que o sistema de forças exteriores é equivalente a zero. Justifique a resposta.

b) Considere um sistema articulado formado por cinco lados, quatro dos quais constituem um quadrilátero e o quinto uma das diagonais desse quadrilátero. Classifique este sistema dentro dos tipos que estudámos. Escreva as suas equações de equilíbrio e deduza delas, directamente, que o sistema das quatro forças exteriores aplicadas nos nodos é equivalente a zero.

5240 — 3) a) Um semi-círculo material (raio R) tem em cada ponto uma densidade numéricamente igual à distância do ponto à base AB.



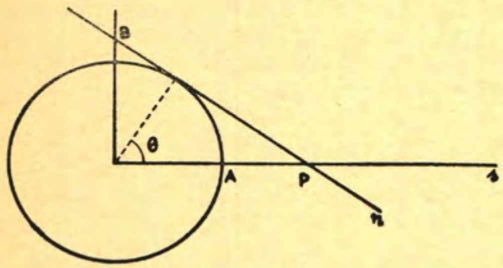
Determinar a posição do seu centro de massa Determinar o seu raio de giração em relação à mediatriz da base.

b) Suponha que o semi-círculo está fixo pelo ponto A, é pesado e que o ponto B é atraído para um ponto fixo C, no plano horizontal de A, por uma força de módulo proporcional à distância BC. Se o sistema se move apenas no plano vertical de AC, quais as suas posições de equilíbrio?

Faça dist. $AC = a$.

c) Mostre que se no caso da alínea anterior o semi-círculo puder ter qualquer movimento em torno do ponto A, as suas posições de equilíbrio continuam a ser as mesmas.

5241 — 4) Uma recta r move-se num plano do modo seguinte



1.º) — Um dos seus pontos P percorre uma recta fixa, s, desse plano com movimento uniformemente acelerado (aceleração **a**)

2.º) — Mantem-se constantemente tangente a uma circunferência fixa de raio R e cujo centro pertence à recta onde se move P.

3.º) — Inicialmente P encontrava-se em A com velocidade nula.

a) Determinar as trajectórias polares do movimento de r.

b) Considere o ponto B que em cada instante é a intersecção de r com a perpendicular a s tirada pelo centro da circunferência. Figure para um instante genérico a direcção e o sentido dos vectores velocidade relativa, velocidade de transporte e velocidade absoluta de B, e determine os módulos desses vectores no instante em que o ângulo θ figurado é igual a $\pi/4$ radianos.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. C. — Cálculo das Probabilidades — **1.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 8-3-1960.**

I — Parte Prática

5242 — 1) Dum baralho de 40 cartas tiram-se à sorte sucessivamente e sem reposição 5 cartas. Calcule a probabilidade de saída de:

a) Um só ás;

b) Um ás pelo menos;

c) Três cartas de um mesmo naipe e duas de outro;

d) Uma copa na última tiragem, sabendo que nas anteriores só saiu uma.

Justifique sumàriamente.

5243 — 2) Duma urna com 10 esferas, sendo 6 brancas e 4 pretas, tiram-se à sorte, simultâneamente, 2 esferas que saiem da mesma cor.

Qual a probabilidade de, em nova tiragem de 2 esferas, de entre 8 restantes voltar a sair esfera da mesma cor das duas primeiras.

5244 — 3) Sobre os catetos dum triângulo rectângulo $[OAB]$ lança-se à sorte 2 pontos M e N, um em cada cateto. A recta aleatória MN divide o triângulo em duas regiões: um triângulo rectângulo e um quadrilátero. Calcule a probabilidade de, em novo lançamento de um ponto Q, este caír no quadrilátero.

II — Parte Teórica

5245 — 1) Enuncie e demontre o teorema da possibilidade composta para uma classe dupla, em Probabilidade Descontínua.

5246 — 2) Enuncie a lei binominal no problema das provas repetidas. Generalize o enunciado.

5247 — 3) Em Probabilidade Contínua defina probabilidade no caso de lançamentos em regiões ilimitadas. Enuncie um teorema relativo a esse caso e faça a aplicação a um exemplo.

Enunciados do Dr. Neto Murta

MECÂNICA CELESTE

F. C. L. — Mecanica Celeste — 1.º exame de frequência — 1959-1960.

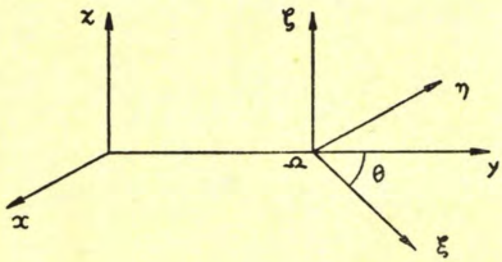
Responda apenas a três questões.

5248 — 1) *a*) Potencial newtoniano dum sistema material contínuo num ponto exterior ao sistema.

b) Calcular a força do campo newtoniano devido a um contorno rectangular homogéneo de lados $2a$ e $2b$ num ponto genérico da perpendicular ao plano do contorno passando pelo seu centro.

5249 — 2) *a*) Equações diferenciais, em coordenadas cartesianas, do movimento absoluto de n pontos materiais atraindo-se segundo a lei de Newton. Seus integrais primários.

b) Designe por $S(0;X,Y,Z)$ o referencial de inércia que usou na alínea anterior e seja $S_1(\Omega;\xi,\eta,\zeta)$ um novo referencial nas condições figuradas



$$\omega\zeta // OZ$$
$$\theta = \text{constante}$$

movendo-se o ponto Ω sobre OY com velocidade constante.

Considere o movimento dos n pontos em relação ao referencial S_1 e compare a energia total do sistema neste caso, com a energia total obtida no caso da alínea *a*).

5250 — 3) No problema dos dois corpos:

a) Considere o movimento do sistema dos dois pontos em relação a um referencial de inércia com origem no centro de massa e mostre que cada um dos pontos descreve uma cónica de que o centro de massa é um foco.

b) Caso da órbita elíptica no movimento dum dos pontos em relação ao outro.

5251 — 4) *a*) Elementos intermediários no método de Laplace para o cálculo de órbitas. Dê uma ideia geral do modo de obter tais elementos a partir de três observações.

b) Suponha conhecidos os elementos intermediários a que se refere a alínea anterior e indique como se obtém, a partir deles, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita.

CÁLCULO NUMÉRICO

F. C. L. — Cálculo Numérico Mecânico e Gráfico — Exame de frequência — 1959-1960.

Responda apenas a uma questão de cada grupo.

I

5252 — 1) As raízes da equação $x^2-18x+1=0$ são

$$x_1 = 9 + \sqrt{80}$$
$$x_2 = 9 - \sqrt{80}$$

Calcule os valores dessas raízes usando o valor de $\sqrt{80}$ com cinco algarismos significativos.

Quantos algarismos significativos tem cada um dos valores obtidos?

Mostre que, calculado x_1, é preferível obter x_2 a partir da relação $x_1 x_2 = 1$.

5253 — 2) Mediram-se dois lados dum triângulo e o ângulo por eles definido obtendo-se

$$c = 5,36\,(2)\ \text{cm}$$
$$b = 8,32\,(2)\ \text{cm}$$
$$\alpha = 45\,(0,25)^\circ$$

Determinar o erro relativo da área do triângulo quando calculada a partir dos elementos medidos.

II

5254 — 1) A grandeza $R = \dfrac{x}{x+y}$ pode obter-se medindo x e $x+y$ ou medindo x e y.

Os valores de x e $x+y$ podem obter-se com erro relativo inferior a $1\,^0/_0$; y pode medir-se com erro relativo inferior a $20\,^0/_0$. Sabendo que R tem um valor da ordem de $0,95$, quais as medidas que se devem fazer para obter o melhor resultado?

5255 — 2) Por aplicação da teoria dos operadores das diferenças finitas mostre que

a) $\nabla^n f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} f_{i-k}$

b) $f(x-n\,h) = f(x) - n\,\nabla f(x) + \dfrac{n\,(n-1)}{2!}\nabla^2 f(x) +$
$+ \cdots + (-1)^n \nabla^n f(x)$.

III

5256 — 1) $f(x)$ é um polinómio de grau par. Na seguinte tabela de valores exactos há um engano

x	$f(x)$
0	10000
1	9998
2	9968
3	9844
4	9488
5	8750
6	7408
7	5198
8	1808

Corrigir esse engano e continuar a tabela ate $x = 12$

5257 — 2) A partir da relação

$$x = y^3 - 2\,y - 5$$

construiu-se a tabela

x	$y = f(x)$
$-1,941$	1,9
$-1,000$	2,0
$+0,061$	2,1
$+1,248$	2,2
$+2,567$	2,3

Construa uma tabela de diferenças divididas correspondentes aos valores tabulados da função y e a partir dela determine um valor aproximado da raíz do polinómio $y^3 - 2\,y - 5$ que está entre 2,0 e 2,1

IV

5258 — 1) Construir um ábaco de pontos alinhados de suportes rectilíneos em N, para representar a relação

$$X = \frac{d^2\,n}{2,5}$$
$$X = 0\,(10)\,120$$
$$d = 0\,(1)\,5\,.$$

5259 — 2) Construir um ábaco de pontos alinhados de suportes rectas concorrentes para representar a relação

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{w}$$
$$u = 0\,(1)\,10$$
$$v = 0\,(1)\,20$$

Os suportes das escalas de u e v devem ser perpendiculares e a razão dos comprimentos das escalas deve ser igual a $3/4$.

F. C. L. — Cálculo Numérico, Mecanico e Gráfico — **Exame final — Prova prática — (Junho 1960).**

5260 — 1) Calcular

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)\,(2-x)}\,d\,x$$

pela regra de Simpson, fazendo $h = 0,05$.

5261 — 2) Resolver, pelo método de relaxação, o sistema

$$\begin{cases} 9\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 = 80 \\ 3\,x_1 - 10\,x_2 - x_3 = 50 \\ -x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 = 40 \end{cases}$$

obtendo o resultado com erro inferior a $0,005$.

5262 — 3) Calcular, por fraccionamento, a inversa da matrix,

$$\begin{bmatrix} 0,59 & -0,25 & -0,18 \\ -0,25 & 0,70 & -0,23 \\ -0,18 & -0,23 & 0,56 \end{bmatrix}$$

5263 — 4) Um computador electrónico universal tem um código de direcção simples que inclui as ordens seguintes (Ac — acumulador, M — registo do multiplicador, $C\,(A\,c)$ — conteúdo de $A\,c$, $C\,(M)$ — conteúdo de M, $C\,(n)$ — conteúdo do compartimento n da memória)

$A\,n$ — Adicione $C(n)$ a $C(A\,c)$ colocando o resultado em $A\,c$.

$S\,n$ — Subtraia $C(n)$ de $C(A\,c)$ colocando o resultado em $A\,c$.

$T\,n$ — Transfira $C(Ac)$ para o compartimento n da memória (deixando limpo o acumulador).

$U\,n$ — Copie $C(Ac)$ no compartimento n da memória.

$H\,n$ — Substitua $C(M)$ por $C(n)$.

$V\,n$ — Multiplique $C(n)$ por $C(M)$ e some o resultado a $C(A\,c)$.

$G\,n$ — Se $C(A\,c) < 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem, caso contrário proceda normalmente.

$E\,n$ — Se $C(A\,c) \geqslant 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem, caso contrário proceda normalmente.

$F\,n$ — Tome $C(n)$ como a próxima ordem a ser executada.

Escreva programas para resolver os seguintes problemas:

a) Calcular $a\,b + c\,d + e\,f$ onde a, b, c, d, e, f estão, respectivamente, nos compartimentos 20, 21, 22, 23, 24 e 25 da memória.

b) Se $C(4)$ e $C(6)$ têm o mesmo sinal, colocar o produto $C(4) \times C(6)$ no comportamento 1; se têm sinais contrários colocar $|\,C(4) - C(6)\,|$ nesse mesmo compartimento.

PONTOS DE EXAME DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática I — 1.ª prova parcial — Junho de 1960.

5264 — 1) Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+1}}+\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+n}}\right).$$

R.: *Como*

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+1}} > \frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+2}} > \cdots > \frac{1}{n\sqrt[n]{n^2+n}},$$

a soma encerrada entre parêntesis está constantemente compreendida entre $\dfrac{n}{n\sqrt[n]{n^2+n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}}$ *e* $\dfrac{n}{n\sqrt[n]{n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$.

$$\textit{Mas}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = 1\Big/\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right) = 1,$$

e anàlogamente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n}} = 1,$$

sendo, por consequência igual a 1 *o limite pedido.*

5265 — 2) Seja a um número real maior que 1 e considere a sucessão

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

em que

$$a_1 < a \quad e \quad a_{n+1} = \frac{1}{a}\cdot a_n + a - 1 .$$

Mostre que a sucessão é convergente e determine o seu limite quando $n \to \infty$.

R.: *Tem-se, por hipótese,* $a_1 < a$ *e, supondo* $a_n < a$, *resulta* $a_{n+1} < \dfrac{1}{a}\cdot a + a - 1 = a$. *Conclui-se, por indução, que a sucessão é superiormente limitada.*

É imediato também $a_{n+1} > a_n$, *pois esta desigualdade é equivalente a* $a_n < a$.

Trata-se, portanto, de uma sucessão crescente e superiormente limitada, logo convergente.

Designando por L *o seu limite, tem-se*

$$L = \frac{1}{a}\cdot L + a - 1,$$

donde $L = a$.

5266 — 3) Seja A o conjunto de todos os números racionais x tais que $x^3 + 2x < 1$. Mostre que:

a) A define um corte no conjunto dos números racionais;

b) se y é um número racional tal que $y^3 + 2y > 1$, então existe pelo menos um número racional $z < y$, tal que $z^3 + 2z > 1$;

c) o supremo do conjunto A é um número irracional.

R.: a) *O conjunto* A *define um corte porque:*

α) A é não vazio, *visto conter pelo menos o racional zero;*

β) A não contém todos os racionais; *por exemplo, não contém o racional* 1;

γ) Se $r \in A$ e r' é um racional menor que r, então $r' \in A$. *De facto,* $r' < r$ *implica* $r'^3 + 2r' < r^3 + 2r$ *e, portanto,* $r' \in A$;

δ) Se $r \in A$, existe pelo menos um racional $r' > r$, tal que $r' \in A$. *Na verdade, se* $r^3 + 2r < 1$, *ponhamos* $\varepsilon = 1 - r^3 - 2r$. *(Podemos supor, sem perda de generalidade,* $0 < r < 1$ *e, portanto,* $0 < \varepsilon < 1$*).*

É fácil ver que o racional $r' = r + \varepsilon/10$ *é um elemento de* A.

b) *Podemos supor, sem perda de generalidade,* $0 < y < 1$, *porque, se* $y \geqslant 1$, *basta pôr* $z = 1/2$.

Seja então $0 < y < 1$ *e ponhamos* $\varepsilon = y^3 + 2y - 1$.

É fácil concluir que $z = y - \dfrac{\varepsilon}{10}$ *satisfaz às condições desejadas.*

c) *Dos resultados anteriores conclui-se que o supremo* s *do conjunto* A *não pode ser tal que*

$$s^3 + 2s < 1 \quad nem \quad s^3 + 2s > 1$$

donde resulta, pela tricotomia da relação de ordem, que

$$s^3 + 2s = 1$$

Supondo que $s = \dfrac{m}{n}$, *com* m *e* n *inteiros primos entre si, vinha*

$$m^3 + 2mn^2 = n^3$$

donde se concluía que n *é divisor de* m^3 *e, portanto, seria* $n = \pm 1$. *Ora isto é absurdo, em virtude de ser* $0 < s < 1$. *Logo* s *é um número irracional.*

Enunciados e soluções dos n.os 5264 a 5266 de José Morgado

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Complementos de Geometria — 1.ª prova parcial — Junho de 1960.

5267 — 1) É dada a curva de equação vectorial

$$\vec{r}(u) = a \cdot \operatorname{sen} u \cos u \cdot \vec{i} + b \cdot \operatorname{sen}^2 u \cdot \vec{j} + c \cdot \cos^2 u \cdot \vec{k}$$

onde u é um parâmetro real e a, b, c são constantes reais não nulas.

a) Mostre que a curva dada é plana quaisquer que sejam a, b, c, e determine a equação cartesiana do plano da curva.

b) Determine a condição a que devem satisfazer a, b e c para que $\dfrac{dl}{du}$ seja constante (l é a abcissa curvilínea de um ponto genérico da curva).

c) Supondo que a, b e c satisfazem à condição encontrada na alínea anterior, determine a curvatura da curva dada.

R.: a) *A curva dada é plana, se se tiver*

$$(1) \qquad \frac{d\vec{r}}{du} \,\Big|\, \frac{d^2\vec{r}}{du^2} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{du^3} = 0$$

qualquer que seja u.

Ora verifica-se que $\dfrac{d\vec{r}}{du}$ e $\dfrac{d^3\vec{r}}{du^3}$ *são vectores colineares e, portanto, a igualdade* (1) *é válida para todo* u, *e daqui resulta que a curva dada é plana.*

O plano da curva é o plano osculador

$$\overrightarrow{R - r(u)} \,\Big|\, \frac{d\vec{r}}{du} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{du^2} = 0$$

ou seja $cy + bz = bc$.

b) *O cálculo de* $\dfrac{dl}{du}$ *conduz a*

$$\frac{dl}{du} = \sqrt{a^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{sen}^2 2u}$$

e, portanto, a condição pedida é $a^2 = b^2 + c^2$.

c) *Curvatura* $= 2/|a|$.

5268 — 2) Seja C uma curva torsa de classe suficientemente elevada, tal que em todos os seus pontos se tenha

$$\vec{n} \,\Big|\, \frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2} = 0$$

Mostre que:

a) O módulo do vector $\dfrac{d\vec{n}}{dl} \wedge \dfrac{d^2\vec{n}}{dl^2}$ é igual a $\left(\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\tau^2}\right)^{3/2}$;

b) $\rho = c\tau$, onde c é uma constante real;

c) O vector $c \cdot \vec{t} + \vec{b}$ é constante.

[$\vec{t}$, $\vec{n}$ e $\vec{b}$ são, respectivamente, os versores da tangente, da normal principal e da binormal à curva no ponto genérico de abcissa curvilínea l; ρ e τ são, respectivamente o raio de curvatura e o raio de torsão no ponto l].

R.: a) *Como*

$$\frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2} = \left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\vec{t} +$$
$$+\left(\frac{\rho^1}{\tau\rho^2}-\frac{\tau^1}{\rho\tau^2}\right)\vec{n}+\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\vec{b},$$

a condição $\vec{n} \left| \frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2} = 0\right.$ *equivale a*

$\frac{\rho'}{\tau\rho^2} - \frac{\tau'}{\rho\tau^2} = 0$ *e, portanto*

$$\left|\frac{d\vec{n}}{dl} \wedge \frac{d^2\vec{n}}{dl^2}\right| = \left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)^2 +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)^2\right]^{1/2} = \left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)^{3/2}.$$

b) *De* $\frac{\rho'}{\tau\rho^2} - \frac{\tau'}{\rho\tau^2} = 0$, *resulta* $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\tau}{\tau}$, *isto é,* $\rho = c \cdot \tau$, *onde* c *é constante real.*

c) *Como* $\frac{d}{dl}(c\cdot\vec{t}+\vec{b}) = c\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\vec{n} - \frac{1}{\tau}\vec{n} = \vec{0}$,

conclui-se que $c\,\vec{t}+\vec{b}$ *é um vector constante.*

Enunciados e soluções dos n.os 5267 e 5268 de José Morgado

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — Concurso de Habilitação de 1960 — 16/2/1960

Prova Escrita de Matemática

I

1.ª Parte — Questionário

5269 — 1) Dada a expressão:

$x = \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{b\,c^3}$, exprimir $\log x$ em função de $\log a$, $\log b$ e $\log c$.

2) Dentre os problemas resolúveis pela aplicação das formulas do termo geral e da soma dos termos de uma progressão aritmética, quais os que conduzem a equações de gráu superior ao primeiro?

3) A que é igual a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton $(x+a)^m$? Justifique.

4) O sistema abaixo:

$$5x+3y=5$$
$$2x+7y=43.$$

é de Cramer? Porquê?

5) Quando se diz que uma sucessão (a_n) tem por limite L?

6) Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

$$x^2+y^2-2y-4x-4=0$$
$$x^3+y^2=15$$
$$x^2+xy=2y^2-16. \qquad \text{Porquê?}$$

7) Dentre as retas

$$3x+2y+16=0$$
$$3x-2y+5=0$$
$$3x+3y+7=0$$

qual é perpendicular à reta $2x+3y+7=0$? Justifique.

8) Quais os números inteiros que podem ser raízes da equação $2x^3+x^2-18x-9=0$? Porquê?

9) É a equação $x^4-2x^3+6x^2+2x-1=0$ recíproca? Porquê?

10) Qual o módulo do complexo conjugado de $-4+3i$?

2.ª Parte — Demonstrações

a) Estabelecer a expressão da distância de um ponto a uma reta.

b) Estabelecer a expressão do desenvolvimento do binômio de Newton.

3.ª Parte — Problemas

5270 — 1) As retas $x=3$, $3x-2y+6=0$ e $x+2y+2=0$ formam um triângulo. Determinar as coordenadas do centro e o raio da circunferência circunscrita ao mesmo.

5271 — 2) Dado $R(x) = \frac{3x+2}{P(x)}$ com $P(x) = x^3-5x^2+8x-4$,

a) Decompor $P(x)$ no produto de factores binômios

b) Decompor $R(x)$ na soma de frações simples.

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — Concurso de Habilitação de 1960 — 17/2/1960

Prova escrita de Matemática

II

Ponto sorteado n.º 1

Questionário

(Pêso 2)

5272 — 1) Definir ângulo duma reta e dum plano.

2) Quantas e quais são as posições relativas que podem ocupar três planos no espaço?

3) Complete: «Em qualquer triedro, a soma dos ângulos diedros está compreendida entre... ?

4) Quantos e quais são os poliedros regulares convexos?

5) Qual o enunciado do teorema no qual se baseia a dedução da fórmula que permite determinar a área da superfície de uma esfera?

6) Complete: «Uma cunha esférica está para a esfera inteira assim como o ângulo dessa cunha está para...»

7) Definir a elipse como lugar geométrico.

8) Dar a expressão geral dos arcos que verificam a condição:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9) Indique os períodos e os pontos de descontinuidade das funções $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$.

10) Das igualdades seguintes indique as que são impossíveis:

$\cos x = \frac{1}{2}$, $\sec 2x = \frac{1}{4}$, $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} x = 3$, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $2 + \operatorname{tg} 2x = 1$. Justifique.

Demonstrações
(Pêso 4)

5273 — 1) Demonstrar que a soma das faces de qualquer ângulo sólido convexo é menor do que quatro ângulos retos.

2) Se a, b, c, A, B, C, são os elementos de um triângulo qualquer:

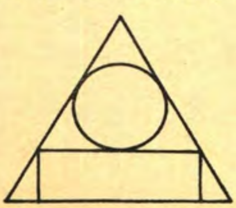
demonstrar que:

$$I)\quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$$II)\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Problemas
(Pêso 4)

5274 — 1) Em um cone de revolução de altura h e raio da base a, dados, inscreve-se um cilindro. Determina-se, assim, um cone parcial com base na parte superior do cilindro inscrito e no qual inscreve-se uma esfera. Determinar qual deverá ser a altura x do cilindro para que a área da sua superfície lateral seja igual à área da esfera inscrita no cone parcial



2) Calcular a soma dos quadrados dos lados de um triângulo de área $S = 24\,m^2$ conhecendo dois de seus ângulos, a saber:

$$A = \frac{\pi}{3}\,rd \quad \text{e} \quad B = \frac{\pi}{4}\,rd\,.$$

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — 2.º Concurso de Habilitação de 1960 7 de Março de 1960

Prova Escrita de Matemática

I

Ponto sorteado: 1.º

1.ª Parte — Questionário
(Pêso 2)

5275 — Representando por C_m^n o número de combinações de m elementos tomados n a n, qual a diferença entre a soma das combinações correspondentes a n par e a soma das combinações correspondentes a n ímpar $(1 \leq n \leq m)$? Justifique utilizando o desenvolvimento do binômio de Newton.

2) Como se utiliza uma tábua de logarítmos decimais para calcular os logarítmos neperianos?

3) A função $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-1)^2(x+3)^3}$ é contínua para todos os valores de x? Justifique.

4) Dizer se as retas: $x + y - 5 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ e $2x - 3y = 0$ concorrem em um ponto. Justifique.

2.ª Parte — Demonstrações
(Pêso 4)

5276 — 1) Estabelecer as condições para que uma equação algébrica das variáveis x, y represente em coordenadas retangulares uma circunferência; calcular as coordenadas do centro e o raio.

2) Enunciar a propriedade que permite escrever a identidade

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ e & a & b \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

Utilizando esta identidade, demonstrar que $3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$ é divisível por $a + b + c$.

3.ª Parte — Problemas
(Pêso 4)

5277 — 1) Determinar a equação de uma reta que passe pelo centro da circunferência

$x^2 + y^2 - 3x + 6y + 7 = 0$ e faça um ângulo de 45° com a tangente a esta circunferência no pt $(2, -1)$.

2) Achar as condições necessárias e suficientes que devem relacionar a, b, c, d para a equação

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

admita duas raízes duplas α e β.

Para $c = 2, d = 1$, determinar a e b e resolver a equação.

Universidade do Recife — Escola de Engenharia de Pernambuco — 2.° Concurso de Habilitação de 1960 — 8/3/60.

Prova Escrita de Matemática

II

Ponto sorteado n.° 10

1.ª Parte — Questionário

(Pêso 2)

5278 — 1) Escrever a expressão da área do fuso esférico de n gráus.

2) Qual a relação que liga o número de arestas o número de faces e o número de vértices de um poliedro convexo?

3) Dê a expressão geral dos arcos x tais que $tg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) Porque basta ter as tábuas trigonométricas com os logarítmos das funções até 45°?

2.ª Parte — Demonstrações

(Pêso 4)

5279 — 1) Demonstrar que, em tôda parábola, a sub-normal é constante e igual ao parâmetro.

2) Deduzir as fórmulas que exprimem $\text{sen}\,\frac{a}{2}$ e $\cos\frac{a}{2}$ em função de $\cos a$ e em função de $\text{sen}\, a$ e discutir os sinais destas fórmulas.

3.ª Parte — Problemas

(Pêso 4)

5280 — 1) São dados um semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$ e um ponto M sôbre sua semi-circunferencia. Dêsse ponto baixa-se a perpendicular MC sôbre AB e traça-se MA e MB. Supõe-se, em seguida, que a figura assim obtida gira em tôrno do eixo determinado pelo diâmetro AB. Determinar qual deverá ser a posição do ponto M para que o volume gerado pelo segmento circular de corda MB seja equivalente ao volume do cone de revolução gerado pelo triângulo MAC.

2) Resolver a equação trigonométrica:

$$\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x = \cos 2x + \cos x + 1$$

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1959.

Ponto N.° 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5281 — Determinar o menor inteiro superior a 1000 que dividido por 9 dá resto 2 e dividido por 16 dá resto 11.

R: *Notando que* $11 = 9 + 2$, *logo se vê que ao adicionar* 11 *a um múltiplo comum de* 9 *e* 16 *se obtém um número que dividido por* 9 *dá resto* 2 *e por* 16 *dá resto* 11.

É m. m. c. $(9, 16) = 144$; *o múltiplo comum imediatamente superior a* 1000 *é* $7 \times 144 = 1008$; *o número pedido é, portanto,* $1008 + 11 = 1019$.

ÁLGEBRA

5282 — Determinar m de modo que a equação

$$2x^2 - (m + 1)x + m + 7 = 0$$

tenha uma raíz dupla.

R:

$$\Delta = (m+1)^2 - 8(m+7) = 0$$
$$m^2 + 2m + 1 - 8m - 56 = 0$$
$$m^2 - 6m - 55 = 0$$
$$m = 3 \pm \sqrt{9+55} = 3 \pm 8 < \begin{matrix} m = 11 \\ m = -5 \end{matrix}$$

5283 — Derivar a função $y = \dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ e simplificar o resultado.

R:

$$y' = \frac{(1+x^2)^{3/2} - x \cdot 3/2 \cdot (1+x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(1+x)^3} =$$
$$= \frac{(1+x^2)^{3/2} - 3x^2(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^3} =$$
$$= \frac{1+x^2-3x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

TRIGONOMETRIA

5284 — Calcular $\dfrac{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{tg\,\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}$, sendo α o ângulo do 2.º quadrante cujo seno é $\dfrac{8}{17}$.

R: *Será* $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{8}{17}\right)^2} = -$

$$-\sqrt{1-\frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\frac{15}{17} \therefore$$

$$\therefore \frac{\sec\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{tg\,\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{-\dfrac{17}{15} - \dfrac{17}{8}}{-\dfrac{8}{15} - \dfrac{15}{8}} = \frac{8\times17 + 15\times17}{8\times8 + 15\times15} =$$

$$= \frac{17(8+15)}{64+225} = \frac{17\times23}{17^2} = \frac{23}{17}.$$

5285 — Resolver a equação $tg\,2x = 3\,tg\,x$.

R:

$$tg\,2x = 3\,tg\,x$$
$$tg\,2x = \frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x}$$

$\dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2x} = tg\,x$. *Esta equação verifica-se imediatamente para* $tg\,x = 0$; *além disso, sendo* $tg\,x \neq 0$, *obtém-se dela esta outra* $\dfrac{2}{1-tg^2x} = 3$, *donde logo se tira* $tg\,x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. *As raízes são, portanto,* $x = arctg\,0$ *ou* $x = arctg\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$, *arcos de expressão geral fácil de encontrar.*

GEOMETRIA

5286 — Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos $(2, -5)$ e $(-4, 3)$.

R: *As distâncias de um ponto genérico,* (x, y) *aos pontos dados, são, respectivamente, iguais a* $\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}$ *e* $\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}$. *Igualando estas distâncias, fàcilmente se obtém da relação* $\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2} = \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}$ *a equação do lugar pedido, que é* $4y - 3x + 1 = 0$.

Ponto N.º 2

ARITMÉTICA

5287 — Determinar todos os números naturais que divididos por 29 dão resto igual ao quadrado do cociente respectivo.

R: *Serão os números da forma* $N = 29x + r$, *em que* $r < 29$ *e* $r = x^2$. r *tomará portanto, os valores* 1, 4, 9, 16 *ou* 25, *correspondentes, respectivamente, aos quocientes* 1, 2, 3, 4 *e* 5. $29 + 1 = 30$; $29 \times 2 + 4 = 62$; $29 \times 3 + 9 = 96$; $29 \times 4 + 16 = 132$ *e* $29 \times 5 + 25 = 170$.

ALGEBRA

5288 — Determinar os valores de m para os quais a equação

$$x^2 + 4x - 3 = m(x + 12 - m)$$

tem raízes reais e desiguais.

R: *O descriminante da equação é* $\Delta = -3m^2 + 40m + 28$; *os seus zeros são* $m = 14$ *e* $m = -2/3$. *A equação tem raízes reais e desiguais quando fôr* $\Delta > 0$, *ou seja* $14 > m > -2/3$.

5289 — Derivar a função $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ e simplificar o resultado.

R:

$$y' = \frac{(1+x^3)^{1/2} - 3/2\,x^3(1+x^3)^{-1/2}}{1+x^3} =$$
$$= \frac{1 + x^3 - 3/2\,x^3}{(1+x^3)(1+x^3)^{1/2}} = \frac{2 - x^3}{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}.$$

TRIGONOMETRIA

5290 — Sem usar tábuas, resolver o triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede 10 metros e um dos catetos 5 metros. (Usar $\sqrt{3}=1{,}732$).

R: *O seno do ângulo oposto ao cateto dado é igual a* $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. *Esse ângulo mede, portanto, 30°. O segundo ângulo agudo do triângulo mede 60°. O segundo cateto mede* $\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=5\cdot\sqrt{3}\text{ m}=5\times 1{,}732\text{ m}$.

5291 — Resolver a equação $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x=\cos x$.

R: *Da equação dada vem* $4\cdot \operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x=\cos x$, *que admite a raiz* $x=n\times 180°+90°$ (*de* $\cos x=0$).

Por outro lado $\begin{cases}4\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x=1\\ \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$, *sistema em* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$, *de que se encontram fàcilmente as 4 soluções contidas em* $\begin{cases}\operatorname{sen} x=\pm\dfrac{\sqrt{6}\mp\sqrt{2}}{4}\\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}\end{cases}$. *É* $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; *ora* $\frac{\sqrt{3}}{2}=$ $=\operatorname{sen} 60°$; $\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{sen} 45°=\cos 45°$; $\frac{1}{2}=\cos 60°$, *pelo que* $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\operatorname{sen} 60°\cdot\cos 45°-$ $-\cos 60°\cdot\operatorname{sen} 45°=\operatorname{sen} 15°$.

É imediato que $90°-15°=75°$ *também é raiz da equação, assim como* $15°+180°$ *e* $75°+180°$.

Resumindo: x *pode tomar qualquer das formas*

$$n\times 180°+15°;\ n\times 180°+75°;\ ou\ n\times 180°+90°$$

GEOMETRIA

5292 — Determinar o ângulo da recta $y=3x-2$ com a recta que passa pelos pontos $(2,-1)$ e $(0,-2)$.

R: *A recta que passa por* $(2,-1)$ *e* $(0,-2)$ *tem por equação* $\frac{x}{y+2}=2$, *ou* $y=\frac{1}{2}x-2$. *O ângulo* α *que este sector forme com o da equação* $y=3x-2$ *é*

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=\operatorname{arctg} 1=45°$$

Exames de aptidão para frequência dos cursos de engenharia civil, engenharia de minas, engenharia mecânica, engenharia electrotécnica e engenharia químico-industrial e curso de arquitectura — Ano de 1959.

Ponto n.º 1

Prova escrita de Matemática

5293 — Calcule o resto da divisão por 11 de

$$29357+\overline{321}^2\times 17$$

pelos critério da divisibilidade.

Em que teoremas se baseia?

R:

$$\begin{aligned}29357&=\dot{1}\dot{1}+9\\ 321&=\dot{1}\dot{1}+2\\ 321^2&=\dot{1}\dot{1}+4\\ 17&=\dot{1}\dot{1}+6\\ 321^2\times 17&=\dot{1}\dot{1}+24=\dot{1}\dot{1}+2\\ 29357+321^2\times 17&=(\dot{1}\dot{1}+9)+(\dot{1}\dot{1}+2)=\dot{1}\dot{1}\end{aligned}$$

O resto é igual a zero.

Bases: Critério de divisibilidade por 11 *e teoremas relativos aos restos de divisões de somas, produtos, potências, por um número.*

5294 — Calcule a área do círculo cujo centro tem o afixo $4+3i$ e um dos pontos da circunferência é o conjugado do centro.

O conjugado do centro é o ponto que tem por afixo $4-3i$. *O raio da circunferência é, portanto, igual a* $\sqrt{(4-4)^2+(3+3)^2}=6$. *A área do círculo será igual a* 36π.

5295 — Haverá valores de x para os quais a fracção

$$\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-4x+3}$$

tome a forma $\frac{0}{0}$? Sabe-se que o numerador se anula para x -2.

R: *As raízes do denominador são* 3 *e* 1; *para* $x=3$ *o numerador anula-se; para* $x=1$, *tome o valor* -24. *Logo a fracção toma o valor* $\frac{0}{0}$ *para* $x=3$. *A indicação do que o numerador se anula para* $x=2$, *dispensável, como se viu, para a resolução do problema, sugere que o autor dos pontos desejava que se calculassem os zeros desse numerador, o que se obtém igualando a zero o cociente da divisão do* x^3+2x^2- $-9x-18)$ *por* $(x+2)$, *como se sabe.*

5296 — Ache a derivada da função

$$y=\frac{\text{sen } x \cos x}{\text{tg } x}$$

O que entende por função contínua num dado intervalo?

R: $y' = -2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x$.
Uma função diz-se contínua num intervalo quando é contínua em todos os pontos desses intervalo.

5297 — Demonstre que

$\cos (n+1) x = 2 \cos x \cos n x - \cos (n-1) x$

R: *Com efeito é:*

$cos\,(n+1)\,x = cos\,(n\,x+x) = cos\,n\,x \cdot cos\,x - sen\,n\,x \cdot sen\,x$
$cos\,(n-1)\,x = cos\,(n\,x-x) = cos\,n\,x \cdot cos\,x + sen\,n\,x \cdot sen\,x$

somando ordenadamente, vem

$cos\,(n+1)\,x + cos\,(n-1)\,x = 2\,cos\,n\,x \cdot cos\,x$, *donde*
$cos\,(n+1)\,x = 2\,cos\,n\,x \cdot cos\,x - cos\,(n-1)\,x$, *c. q. d.*

5298 — Ache a equação da recta tangente à cónica $y^2 = -2x$ no ponto $\left(-\frac{9}{2}, -3\right)$ e, uma vez obtida, ache a tangente do ângulo que essa tangente faz com a tangente no ponto simétrico $\left(-\frac{9}{2}, 3\right)$.

Qual a área do triângulo formado pelas duas rectas tangentes e a directriz. usando o metro como unidade de medida?

R: *Para que a recta* $y = m\,x + p$ *seja tangente à curva* $y^2 = 2x$ é preciso que o sistema $\begin{cases} y = m\,x+p \\ y^2 = 2\,x \end{cases}$ *tenha uma só solução.*

Estude-se: $\begin{cases} y = m\,x + p \\ y^2 = -2\,x \end{cases} \begin{cases} \\ (m\,n + p)^2 = -2\,x \end{cases}$

$\begin{cases} \\ m^2 x^2 + 2\,(m\,p+1) + p^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} \\ \rightarrow \Delta = (m\,p+1)^2 - p^2 m^2. \end{cases}$

$\Delta = \rightarrow m^2 p^2 + m\,p + 1 - m^2 p^2 = 0 \rightarrow m\,p + 1 = 0.$
Por outro lado, sabe-se que a tangente contém o ponto $(-{}^9/_2, -3)$, *o que obriga* m *e* p *a satisfazerem simultâneamente as equações* $2\,m\,p + 1 = 0$ *e* $-3 = -\frac{9}{2}m + p$. *Daqui tira-se* $m = {}^1/_3$ *e* $m = {}^3/_2$. *A tangente pedida tem por equação* $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{2}$. *O coeficiente angular da tangente no ponto simétrico é igual a* $-{}^1/_3$, *pelo que a tangente do ângulo formado pelas duas rectas é igual a* $\frac{18}{24}$.

A equação da directriz desta parábola é $n = {}^1/_2$. *Temos portanto de achar a área do triângulo formado pelas rectas* $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{2}$; $y = -\frac{x}{3} + \frac{3}{2}$ *e* $x = {}^1/_2$. *As 2 tangentes contam-se no ponto* $A\,({}^9/_2, 0)$, *e cortam a directriz respectivamente nos pontos* $B\,{}^1/_2, -{}^2/_3)$ *e* $C\,({}^1/_2, {}^2/_3)$. *É* $\overline{BC} = {}^4/_3$ *e dist. de* A *a* $\overline{BC} = 4$. *Logo, a área do triângulo mede* $4 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{16}{6}\,m^2$.

Ponto n. 2

5299 — Pelo critério da divisibilidade calcule os algarismos *a* e *b* para que o inteiro $\overline{a\,37\,b}$ seja simultâneamente divisível por 11 e por 5.

O que entende por congruência?

R: $\overline{a\,37\,b} = \dot{11} = \dot{5}$

$b\begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases} \quad (b+3) - (a+7) = \dot{11}$

Se $b = 0$, $a = 7$
Se $b = 5$, $a = 1$
ou 7370 *ou* 1375.

Dois números dizem-se côngruos a respeito de um terceiro (módulo), quando a sua diferença é dele múltipla.

5300 — Sendo as coordenadas polares de dois pontos $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ e $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$ ache a distância desses dois pontos.

R:

$$d = \sqrt{(3 \cdot cos\,{}^{\pi}/_6 - 5\,cos\,{}^{\pi}/_2)^2 + (3 \cdot sen\,{}^{\pi}/_6 - 5 \cdot sen\,{}^{\pi}/_2)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + ({}^3/_2 - 5)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{49}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{76}}{2} = \sqrt{19}.$$

5301 — Ache o verdadeiro valor da expressão

$$y = \frac{1}{x^2-1} - \frac{3x}{x^2+x-2}$$

para $x = 1$.

R:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3x}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= \frac{x + 2 - 3x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{-3x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

que tome o valor $-\infty$, *para* $x = 1$.

5302 — Ache a derivada da função

$$y = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x}}$$

O que entende por derivada dc uma função?

R:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{\sqrt{x}} \qquad y' = \frac{(2x+3)\sqrt{x} - \dfrac{x^2+3x}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{4x^2 + 6x - x^2 - 3x}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + 3x}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x + 3}{2\sqrt{x}}.$$

Chama-se derivada de uma função $f(x)$ *no ponto* x_0 *ao limite da razão incremental de* $f(x)$ *em* x_0, *se tal limite existir, quando* x *tende para* x_0.

5303 — Resolva a equação

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \cot x = 2$$

R:

$$\frac{sen\, x}{1 + cos\, x} + cotg\, x = 2$$

$$\frac{sen\, x}{1 + cos\, x} + \frac{cos\, x}{sen\, x} = 2$$

$$sen^2 x + cos\, x + cos^2 x = 2\, sen\, x\, (1 + cos\, x)$$

$$1 + cos\, x = 2\, sen\, x\, (1 + cos\, x).$$

Isolando a solução desta equação, que vem de $1 + cos\, x = 0$, *obtém-se a solução* $sen\, x = \frac{1}{2}$, *ou seja* $x = arc \cdot sen \frac{1}{2}$.

$$x = n\pi + (-1)^n \times 30^\circ$$

5304 — De uma circunferência são conhecidas as coordenadas do centro $(2,2)$ e um ponto da curva $(0,4)$. Deseja-se saber a área compreendida entre a tangente à circunferência nesse ponto $(0,4)$, o eixo dos xx e o arco da circunferência que as duas rectas limitam. Use como unidade de medida o metro.

R: *Da simples observação dos dados se conclui que a circunferência passa na origem; a equação da tangente no ponto* $(0, 4)$ *é* $y = x + 4$, *dado que a equação da recta que contém o raio com extremo em* $(0, 4)$ *é* $y = -x + 4$. *Essa tangente vai cortar o eixo* $\overline{OX}$ *no ponto* $(-4, 0)$. *A área pedida é, portanto é igual à área do triângulo de vértices* $(0, 4)$ $(0, 0)$ e $(-4, 0)$, *diminuida da do segmento circular determinado pela corda de extremos* $(0, 0)$ *e* $(0, 4)$. *O raio da circunferência é igual a* $\sqrt{8}$. *O sector circular referente ao arco em causa é um quadrante.*

Logo: $A = 8 - \left(\frac{8\pi}{4} - \frac{8}{2}\right) = 8 - 2\pi + 4 = 12 - 2\pi = 12 - 2 \times 3{,}14 = 12 - 6{,}28 = 5{,}72\ m^2$.

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, e curso de engenheiro geografo — Ano de 1960.

Ponto N.º 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5305 — Determinar os números naturais que, divididos por 67, dão resto igual ao cubo do cociente respectivo.

R: *Serão os números da forma* $N = 67 \times q + R$, *onde* $R = q^3$ *e* $R < 67$. R *pode tomar os valores* $1, 8, 27$ *e* 64, *correspondendo, respectivamente, aos valores* $1, 2, 3$ *e* 4 *de* q. *Os números pedidos serão, portanto,* 67, 142, 228, e 332.

ÁLGEBRA

I

5306 — Determinar os valores de m para os quais a função

$$x^2 - (m+1)x + m + 2$$

é positiva para todos os valores reais de x.

R: *Como é positivo o coeficiente de* x^2, *a função será positiva para todos os valores reais de* x *desde que sejam imaginárias as raízes da equação que se obtém igualando-a a zero. O descriminante desta equação é*

$(m+1)^2 - 4(m+2)$, *e terá de ser negativo.*

$$(m+1)^2 - 4(m+2) < 0$$

$$m^2 - 2m - 7 < 0$$

$m^2 - 2m - 7 = 0$ *para* $m = 1 \pm 2\sqrt{2}$.

Cumprem-se as condições pedidas para

$$1 + 2\sqrt{2} > m > 1 - 2\sqrt{2}.$$

II

5307 — Derivar a função $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+3}}$, simplificando o resultado.

R: $$y'=\frac{6x}{(x^2+3)\sqrt{x^4-9}}$$

TRIGONOMETRIA

I

5308 — Resolver a equação $\cos x+\cos 3x=\cos 2x$.

R: $\cos x+\cos 3x=\cos 2x$

$\cos x+\cos(x+2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

$\cos x+\cos x\cdot(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)-2\operatorname{sen}^2 x\cos x=$
$=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

$\cos x(1+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)-2\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x=$
$=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

como $1-\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x$, *vem*

$\cos x(\cos^2 x+\cos^2 x)-2\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

$2\cos x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$, *igualdade que se verifica para*

a) $\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=0$ *ou para*

b) $2\cos x=1$.

A equação a) *resolve-se para* $\cos x=\pm\operatorname{sen} x$, *ou seja para* $\operatorname{tg} x=\pm 1$, *portanto para todos os arcos* $x=45^\circ+n\times 90^\circ$.

A equação b), $\cos x=\dfrac{1}{2}$, *fornece-nos a solução*

$$x=360^\circ\times n\pm 60^\circ$$

II

5309 — Verificar a identidade $\dfrac{\operatorname{sen} 6a+\operatorname{sen} 2a}{\cos 6a-\cos 2a}+$ $+\operatorname{cotg} 2a=0$.

R:

$$\frac{\operatorname{sen} 6a+\operatorname{sen} 2a}{\cos 6a-\cos 2a}+\operatorname{cotg} 2a=\frac{\operatorname{sen} 6a+\operatorname{sen} 2a}{\cos 6a-\cos 2a}+\frac{\cos 2a}{\operatorname{sen} 2a}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen} 6a\cdot\operatorname{sen} 2a+\cos 6a\cdot\cos 2a+\operatorname{sen}^2 2a-\cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a(\cos 6a-\cos 2a)}$$

Mas

$\cos 6a\cdot\cos 2a+\operatorname{sen} 6a\cdot\operatorname{sen} 2a=\cos(6a-2a)=\cos 4a$

e $\cos 4a=\cos(2a+2a)=\cos^2 2a-\operatorname{sen}^2 2a$,

portanto

$$\frac{\operatorname{sen} 6a\cdot\operatorname{sen} 2a+\cos 6a\cdot\cos 2a+\operatorname{sen}^2 2a-\cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a(\cos 6a-\cos 2a)}=$$

$$=\frac{\cos 4a+\operatorname{sen}^2 2a-\cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a(\cos 6a-\cos 2a)}=$$

$$=\frac{\cos^2 2a-\operatorname{sen}^2+\operatorname{sen}^2 2a-\cos^2 2a}{\operatorname{sen} 2a(\cos 6a-\cos 2a)}=$$

$$=\frac{0}{\operatorname{sen} 2a(\cos 6a-\cos 2a)}=0,$$ *c. q. d.*

GEOMETRIA

5310 — Determinar a equação da recta que passa pelo ponto $(-1,3)$ e é paralela à recta de equação $2x+3y=1$.

R: *A família das rectas paralelas a* $2x+3y=1$ *tem por equação geral* $2x+3y=k$.

Há que determinar k *de modo que a recta passe pelo ponto* $(-1;3)$.

Portanto: $2\times(-1)+3\times 3=k$; $k=9-2=7$.

A equação pedida é $2x+3y=7$.

Exames de aptidão para frequência dos cursos de engenharia civil, engenharia de minas, engenharia mecânica, engenharia electrotécnica e engenharia químico-industrial e curso de arquitectura — Ano de 1960.

Ponto N.º 1

Prova escrita de Matemática

5311 — Uma recta A passa pelo ponto $\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)$ e é perpendicular a uma recta B de equação $y=-\dfrac{2}{3}x$.

Quais as equações das rectas paralelas à primeira e distantes dela $\sqrt{13}$?

R: *Rectas paralelas a* A *serão também perpendiculares a* B. *Trata-se, pois, de achar as duas rectas perpendiculares a* B *e que distam* $\sqrt{13}$ *do ponto* $\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)$. *A equação geral das rectas perpendiculares a* B *é* $y=\dfrac{3}{2}x+p$; *a expressão da distância de uma destas rectas ao ponto* $\left(4,-\dfrac{1}{2}\right)$

é $$d=\pm\frac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\times 4-p}{\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}}$$

$$\pm\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\times 4-p}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\sqrt{13}\,,\ \text{ou seja}$$

$$\pm\frac{-\frac{1}{2}-6-p}{\frac{\sqrt{13}}{2}}=\sqrt{13}\,;\ \pm\left(-\frac{13}{2}-p\right)=\frac{13}{2}$$

$$\begin{cases} -\frac{13}{2}-p=\frac{13}{2}\rightarrow p=-13 \\ \frac{13}{2}+p=\frac{13}{2}\rightarrow p=0\,. \end{cases}$$

As duas rectas pedidas têm por equação

$$y=\frac{3}{2}x \ \text{ e } \ y=\frac{3}{2}x-13\,.$$

5312 — Ache o resto da divisão de $2a^3+3b^2$ por 5 sabendo que os restos da divisão de a e de b por 5 são 2 e 3.

O que entende por divisão factorial?

R: $a=\dot{5}+2 \quad a^3=\dot{5}+2^3=\dot{5}+8=\dot{5}+5+$
$+3=\dot{5}+3 \quad 2a^3=\dot{5}+6=\dot{5}+1$

$b=\dot{5}+3;\ b^2=\dot{5}+9=\dot{5}+4;\ 3b^2=\dot{5}+12=\dot{5}+2$

$$2a^3+3b^2=\dot{5}+1+\dot{5}+2=\dot{5}+3\,.$$

O resto pedido é 3.

5313 — Calcule $\operatorname{tg}3\alpha$ sabendo que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

R:

$$tg\,3\alpha=tg\,(\alpha+2\alpha)=\frac{tg\,\alpha+tg\,2\alpha}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,2\alpha}$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$tg\,3\alpha=\frac{tg\,\alpha+\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}{1-tg\cdot\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}=\frac{tg\,\alpha-tg^3\alpha+2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha-2\,tg^2\alpha}=$$

$$=\frac{3\,tg\,\alpha-tg^3\alpha}{1-3\,tg^2\alpha}$$

Como $tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, *vem* $tg\,3\alpha=\dfrac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=$

$$=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-1}=\infty\,.$$

Com efeito $tg\,30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, *e* $tg\,90^\circ=\infty$.

5314 — Qual o verdadeiro valor da fracção

$$\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^4+x^3-11x^2-9x+18}$$

para cada um dos seguintes valores de $x: x=1$, $x=-2$ e $x=3$?

O que entende por raiz múltipla?

R:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^4+x^3-11x^2-9x+18}\,.$$

É $P(1)=P(3)=P(-2)=0$ *e*
$Q(1)=Q(3)=Q(-2)=0$.

Fácilmente se decompõem em factores os termos da fracção dada, obtendo-se o resultado

$$f(x)\,\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{(x-1)(x-3)(x+2)^2(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$f(1)=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{12}$$

$$f(3)=\frac{1}{5\times 6}=\frac{1}{30}$$

$$f(-2)=\frac{1}{0\times 1}=\infty\,.$$

Raiz múltipla: se o grau de multiplicidade de uma raiz de um polinómio é maior que 1, *essa raiz diz-se múltipla. Diz-se que a raiz* α *de um polinómio* $P(x)$ *é de grau de multiplicidade* k *quando*

$$P(x)=(x-\alpha)^k\times Q(x),\ \text{com}\ Q(\alpha)\neq 0\,.$$

5315 — É dada a parábola de vértice na origem e de foco $(0,5)$ e a circunferência tangente à directriz da parábola e de centro no foco da mesma.

Ache os pontos de intersecção das duas curvas.

R: *Equação da parábola:* $x^2=20y$
Directriz: $y=-5$
Circunferência pedida: $x^2+(y-5)^2=10^2$
Pontos de intersecção $\begin{cases} x^2=20y \\ x^2+(y-5)^2=10^2\,. \end{cases}$

$$20y = (y-5)^2 - 100 = 0$$
$$20y = y^2 - 10y + 25 - 100 = 0$$
$$y^2 + 10y - 75 = 0 \quad y = -15 \quad y = 5$$

Rejeitada a solução $y = -15$, *vem* $x^2 = 100 \quad x = \pm 10$.
Os pontos da intersecção são $(10,5)$ *e* $(-10,5)$.

5316 — Dada a equação

$$(x+2)^2 + y^2 = 32$$

ache pelas derivadas a equação das tangentes à curva e, estabelecendo a condição de elas fazerem 45° com o eixo dos xx, encontre os pontos de tangência.

O que entende por derivada de uma função?

R: *Nota: a determinação de tangentes pelas derivadas está fora do programa do curso complementar dos Liceus. Embora se pense que assim não devesse ser, não podemos deixar de fazer notar que é muito frequente aparecerem questões como esta nos exames de aptidão, tanto escritos como orais, o que não nos parece justo.*

$$y^2 = 32 - (x+2)^2$$
$$y' = \frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}}.$$

Num ponto (x, y) *da curva, a tangente tem por equação* $Y - y = m(X - x)$, *em que* m *é o valor da derivada da função* $y(x)$ *no ponto* x.

Se as tangentes fazem com o eixo dos $\overline{xx}$ *ângulos de 45°, será* $m = 1$.

$$\frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1.$$ *Como a equação da curva é* $y^2 = 32 - (x+2)^2$, *associando esta equação à relação* $\frac{-(x+2)}{\sqrt{32-(x+2)^2}} = 1$, *obtém-se:*

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^2}{32-(x+2)^2} = 1 \\ y^2 = 32 - (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ y^2 = 32 - (x+2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ y = \pm 4 \end{cases}.$$

As tangentes que fazem com $\overline{ox}$ *ângulos de 45° tocam a circunferência nos pontos* $(-6, 4)$ *e* $(-6, -4)$.

Derivada de uma função $f(x)$ *num ponto* x_0 *é o limite, se existe, da razão incremental, de* $f(x)$ *em* x_0 *quando* x *tende para* x_0.

ESTÁGIOS PEDAGÓGICOS

Liceus Normais — Estágio pedagógico de 8.° Grupo — Exames de Cultura (1959-60) — Decreto n.° 41273 de 17-9-1957.

Prova escrita

5317 — Faça uma «exposição» subordinada ao tema:

Números complexos a duas unidades

OBS: — O trabalho admite a orientação e a extensão que entender dever dar-lhe, mas, de preferência, considere as rubricas seguintes:

I

1. *Os números complexos:* — definição; relação de igualdade.
2. *As operações de adição e multiplicação:* — definição e propriedades formais; existência de operações inversas daquelas.
3. *Propriedades fundamentais do conjunto dos números complexos.*

II

4. A operação de *potenciação* (expoente inteiro e expoente fracionário).
5. A operação de *radiciação;* análise circunstanciada da operação e possível estudo comparativo com a mesma operação, quando definida no conjunto dos números reais.

Prova prática

I. GEOMETRIA

5318 — Num triângulo ABC, de centro de gravidade G, as medidas a, b e c dos lados verificam a relação

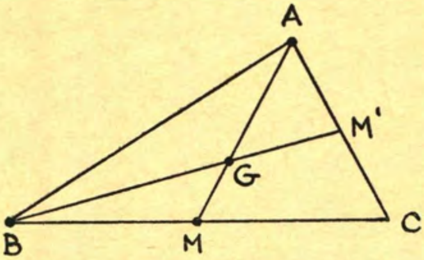
$$2a^2 = b^2 + c^2.$$

1.°) Prove que são tangentes ao lado BC as duas circunferências que passam, respectivamente, pelos pontos A, B e G (uma delas) e pelos pontos A, C e G (a outra).

2.°) Prove que as medidas m_a, m_b e m_c das *medianas*, saídas, respectivamente, dos vértices A, B

e *C* são, também respectivamente, proporcionais a *a*, *c* e *b*.

R: *Sejam:* ABC *o triângulo considerado;* AM *e* BM' *duas das suas medianas e* G *o centro de gravidade.*



1.º) *A circunferência definida pelos pontos* A, B, G *é tangente a* BC *se for*

$$1) \qquad \overline{BM}^2 = \overline{MG} \times \overline{MA}$$

Ora, pondo

$$\overline{BC} = a; \quad \overline{AB} = c; \quad \overline{AC} = b; \quad \overline{AM} = m_a$$

tem-se:

$$a) \qquad b^2 + c^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 = 2\,a^2 \quad (\textit{cond. do enunciado})$$

$$\therefore$$

$$2\,a^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2}; \quad m_a^2 = \frac{3\,a^2}{4};$$

$$2) \qquad \boxed{m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Então, vem

$$\overline{MG} \times \overline{MA} = \frac{1}{3}\,m_a \times m_a = \frac{1}{2}\,m_a^2 = \frac{1}{3} \times \frac{3\,a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

e, por outro lado,

$$b) \qquad \overline{BM}^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Conclusão: *verifica-se a relação* 1), *o que garante a tangência da circunferência considerada com* BC.

Obs.: *fazendo considerações análogas, conclui-se que a circunferência definida pelos pontos* A, C *e* G *é também tangente a* BC.

2.º) *Da relação* 2) *resulta*

$$\frac{m_a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por outro lado, como

$$2\,a^2 + 2\,b^2 = 4\,m_c^2 + c^2$$

vem

$$2\,a^2 - c^2 + 2\,b^2 = 4\,m_c^2$$

e, atendendo a $b^2 + c^2 = 2\,a^2$, *resulta*

$$3\,b^2 = 4\,m_c^2; \quad \frac{m_c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Anàlogamente, encontra-se

$$\frac{m_b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Em conclusão:

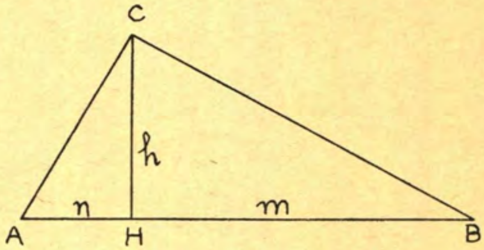
$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{c} = \frac{m_c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

II. TRIGONOMETRIA

5319 — Num triângulo *ABC*, rectângulo em *C*, sabe-se que a *altura* relativa à *hipotenusa* divide-a em dois segmentos cuja *diferença* é igual à *altura*.

Calcule as medidas dos ângulos A *e* B *do triângulo.*

R: *Sejam:* ABC *o triângulo no qual (por hipótese) é med* $\sphericalangle C = 90°$; CH *a altura relativa à hipotenusa* ($\overline{CH} = h$); m e n, *respectivamente, as medidas das projecções dos catetos* BC *e* AC *sobre a hipotenusa.*



Como $m - n = h \neq 0$, *será* $\overline{AC} \neq \overline{BC}$ *e, por isso,* $\sphericalangle A \neq \sphericalangle B$. *Para fixar ideias, suponhamos então* $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. *Tem-se:*

$$\begin{aligned} m &= h \cot B \\ n &= h \cot A = h \operatorname{tg} B \\ m - n &= h (\cot B - \operatorname{tg} B) \\ h &= h (\cot B - \operatorname{tg} B) \end{aligned}$$

$$\therefore$$

$$\cot B - \operatorname{tg} B = 1$$

e desta relação tira-se

$$\operatorname{tg} 2B = 2$$

o que dá a solução conveniente

$$2B = 63°\ 26'\ 6'' \ (\textit{aprox.})$$

$$B = 31°\ 43'\ 3''$$

$$A = 90° - B = 58°\ 16'\ 57''$$

Soluções de A. A. Lopes

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1959 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1959, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 71 — cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 71 — » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449