GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXII N.° 84-85 JULHO-DEZ. 1961

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXII — N.º 84-85 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO/DEZ. — 1961

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Existência de produto escalar em espaços vectoriais normados (*)

por **Luiz Adauto da Justa Medeiros**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Universidade do Brasil, Rio de Janeiro

Introdução. Esta redacção, contém o resumo de uma exposição feita por nós no IMPA, como trabalho complementar ao curso de Teoria Espectral das Transformações Lineares em Espaços de HILBERT, ministrado pelo Prof. LEOPOLDO NACHBIN em 1960.

No que segue, procuraremos descrever, sob forma didáctica, as ideias contidas no trabalho de VON NEUMANN-P. JORDAN, «On Inner Products in Linear Metric Spaces», Ann. Math. 3 (1935), 719-723. O objectivo dos autores do trabalho citado, é provar que dado um espaço vectorial normado complexo ou real, E, é possível, mediante uma condição natural, definir um produto escalar em E, de tal modo que a norma primitiva de E, seja induzida, no sentido que veremos a seguir, por um tal produto escalar.

Admitiremos conhecidos os princípios do estudo dos espaços vectoriais e por questão de nomenclatura e notação, poremos algumas definições que faremos uso frequente no que segue.

(*) Exposição em seminário de Análise Funcional do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

Os espaços vectoriais que vamos considerar, serão sobre os corpos C ou R dos números complexos ou reais respectivamente. Observemos, ainda, que dado um complexo z, vamos representar, como é habitual, o seu conjugado por $\bar{z}$.

1. Definição. Seja E um espaco vectorial. Diremos que E é um espaço vectorial normado, quando existir uma aplicação $\| \ \|$ de E em R, satisfazendo as seguintes condições:

N 1) $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se e sòmente se $x = 0$.

N 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, para todo escalar λ e todo vector x.

N 3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo par de vectores x e y.

A aplicação $\| \ \|$ denomina-se norma e o número real $\|x\|$ norma de x.

2. Definição. Seja E um espaço vectorial sobre C e φ uma aplicação de $E \times E$, produto cartesiano de E por E, em C. Diz-se que φ é uma forma sesquilinear hermitiana se as seguintes condições forem satisfeitas:

S 1) φ é uma forma linear relativamente a primeira coordenada, isto é

$$\varphi(x'+x'',y)=\varphi(x',y)+\varphi(x'',y)$$
$$\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y),\ \lambda\in C.$$

S 2) φ é dotada da simetria hermitiana, isto é,

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$$

onde $\overline{\varphi(y,x)}$ é o complexo conjugado de $\varphi(y,x)$.

Resulta desta definição, que se $\varphi:E\times E\to C$, for uma forma sesquilinear hermitiana, então φ satisfaz as condições segutntes:

$$\varphi(x,y'+y'')=\varphi(x,y')+\varphi(x,y'');$$
$$\varphi(x,\lambda y)=\bar{\lambda}\varphi(x,y),\ \lambda\in C.$$

3. Definição. Uma forma sesquilinear hermitiana φ, diz-se estritamente positiva, se $\varphi(x,x)$ for um número real estritamente positivo, para $x\neq 0$.

4. Definição. Diz-se que um espaço vectorial E, sobre C, é dotado de produto escalar, quando estiver definida em $E\times E$ uma forma φ sesquilinear hermitiana, estritamente positiva. Tal forma linear φ denomina-se um produto escalar em E e o seu valor $\varphi(x,y)$ representa-se por $(x|y)$.

Se um espaço vectorial E for dotado de um produto escalar, a aplicação $x\to+(x|x)^{1/2}$ de E em R, é uma norma em E, como é fácil verificar, denominada norma induzida em E pelo produto escalar e escreve-se

$$\|x\|^2=(x|x).$$

Seja E um espaço vectorial dotado de produto escalar. Tem-se, por um cálculo simples, para $x,y\in E$

$$(x+y|x+y)+(x-y|x-y)=2((x|x)+(y|y))$$

da qual obtem-se, usando a norma induzida,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2\ \text{(NJ)}.$$

Daí resulta que quando o espaço vectorial E for dotado de produto escalar, segue-se que a igualdade (NJ) é verdadeira para cada par de vectores de E. Tal igualdade, nada mais é, geomètricamente, do que o conhecido facto, de em um paralelogramo a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais ser igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos seus quatro lados.

O nosso problema, é provar a recíproca da afirmativa anterior, isto é, se E for um espaço vectorial complexo normado a igualdade (NJ) é uma condição suficiente para que E seja dotado de um produto escalar, de tal modo que a norma primitiva de E seja induzida por este produto escalar. Em outras palavras, devemos provar, que se a norma de E satisfaz a condição (NJ) é possível definir uma aplicação $\varphi:E\times E\to C$, que seja uma forma sesquilinear hermitiana estritamente positiva e se $x\in E$ então $\|x\|=+\varphi(x,x)^{1/2}$.

A seguir, provaremos a existência de uma φ nas condições anteriores. Antes, porém, daremos a motivação para que a definição da φ seja bastante natural.

5. Motivação. Suponhamos o problema resolvido. Tem-se $\varphi:E\times E\to C$, sesquilinear hermitiana estritamente positiva e $\|x\|^2=\varphi(x,x)$, para todo $x\in E$. Sendo $\varphi(x,y)$ um número complexo, podemos escrevê-lo sob a forma

$$\varphi(x,y)=R\varphi(x,y)+iI\varphi(x,y)$$

sendo $R\varphi(x,y)$ e $I\varphi(x,y)$ as partes real e imaginária de $\varphi(x,y)$, respectivamente. Por outro lado, tem-se por um cálculo simples

$$\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)=$$
$$=2[\varphi(x,y)+\varphi(y,x)]$$

que pode ser escrita também como segue:

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=$$
$$=2[\varphi(x,y)+\overline{\varphi(x,y)}]=4R\varphi(x,y)$$

ou seja

$$R\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2]$$

sendo

$$I\varphi(x,y)=-Ri\varphi(x,y)=-R\varphi(ix,y)$$

podemos escrever

$$\varphi(x,y)=R\varphi(x,y)-iR\varphi(ix,y)$$

sendo

$$R\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2].$$

De posse deste resultado, vamos no parágrafo seguinte demonstrar a existência do produto escalar.

6. Existência de produto escalar. Seja E um espaço vectorial normado, complexo, cuja norma satisfaz a condição (NJ). Vamos provar que a aplicação $\varphi: E\times E\to C$, definida por

$$(1)\quad \varphi(x,y)=R\varphi(x,y)-iR\varphi(ix,y)$$

sendo

$$(2)\quad R\varphi(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

é um produto escalar em E e que a norma de E é por ele induzida. Tal facto, ficará demonstrado, após os seguintes lemas.

Lema 1. *Se* $\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *for definida por* (2) *tem-se*

$$\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'+\mathrm{x}'',\mathrm{y})+\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'-\mathrm{x}'',\mathrm{y})=2\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}',\mathrm{y}).$$

Demonstração. De facto, sendo a igualdade (NJ) válida em E, se nela substituirmos x e y por $x'+y$ e x'' respectivamente, obtem-se

$$(3)\quad \|x'+x''+y\|^2+\|x'-x''+y\|^2=$$
$$=2(\|x'+y\|^2+\|x''\|^2).$$

Anàlogamente, substituindo em (NJ) x e y por $x'-y$ e x'' respectivamente resulta

$$(4)\quad \|x'+x''-y\|^2+\|x'-x''-y\|^2=$$
$$=2(\|x'-y\|^2+\|x''\|^2).$$

Subtraindo (4) da (3) obtem-se:

$$(\|x'+x''+y\|^2-\|x'+x''-y\|^2)+$$
$$+(\|x'-x''+y\|^2-\|x'-x''-y\|^2)=$$
$$=2(\|x'+y\|^2-\|x'-y\|^2)$$

que pela (2), pode ser escrita do seguinte modo:

$$(5)\quad R\varphi(x'+x'',y)+R\varphi(x'-x'',y)=$$
$$=2R\varphi(x',y)$$

o que prova o Lema 1.

Sendo $R\varphi(0,y)=0$, pois $\|-y\|=\|y\|$, fazeddo em (5) $x'=x''$, obtem-se $R\varphi(2x',y)=$ $=2R\varphi(x',y)$. Daí resulta que podemos escrever a (5) do seguinte modo:

$$(6)\quad R\varphi(x'+x'',y)+R\varphi(x'-x'',y)=$$
$$=R\varphi(2x',y).$$

Lema 2. *Se* $\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ *for definida por* (2), *então*

$$\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'+\mathrm{x}'',\mathrm{y})=\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}',\mathrm{y})+\mathrm{R}\varphi(\mathrm{x}'',\mathrm{y}).$$

Demonstração. É suficiente em (6) substituir x' por $(x'+x'')/2$ e x'' por $(x'-x'')/2$.

Dos lemas 1 e 2 resulta que

$$\varphi(x,y)=R\varphi(x,y)-iR\varphi(ix,y)$$

sendo $R\varphi$ definida por (2) uma forma aditiva relativamente a primeira coordenada x.

Lema 3. *A forma* φ *definida por* (1) *e* (2) *é homogénea relativamente a* x.

Demonstração. De facto, pondo

$$S=\{\lambda\in C;\ \varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)\},$$

vamos provar que $S = C$. Como S é uma parte de C é suficiente provarmos que $C \subset S$. Tem-se 0 e 1 pertencem a S. Sendo $\varphi(0, y) = 0$, pois $R\varphi(0, y) = 0$ segue-se que $\varphi(x - x, y) = 0$ ou $\varphi(x, y) + \varphi(-x, y) = 0$, isto é, $\varphi(-x, y) = -\varphi(x, y)$, provando que $-1 \in S$. Sendo φ aditiva em relação a x, se $\lambda, \mu \in S$, resulta que $\lambda \pm \mu \in S$ e daí resulta que o conjunto $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ dos inteiros é uma parte de S. Sejam $\lambda, \mu \in Z, \mu \neq 0$. Tem-se $\varphi\left(\frac{\lambda}{\mu} x, y\right) = \lambda \varphi\left(\frac{x}{\mu}, y\right)$ e multiplicando ambos os membros desta última igualdade pelo inteiro $\mu \neq 0$, obtem-se

$$\mu \varphi\left(\frac{\lambda}{\mu} x, y\right) = \mu \lambda \varphi\left(\frac{x}{\mu}, y\right) = \lambda \varphi(x, y)$$

pois $\mu \in Z \subset S$. Daí resulta que $\varphi\left(\frac{\lambda}{\mu} x, y\right) = \frac{\lambda}{\mu} \varphi(x, y)$, provando que S contém o conjunto Q dos racionais. Para provar que S contém os reais, seja λ um real e $\{\lambda_n\}$ uma sucessão de racionais convergente para λ. Lembrando as condições (1) e (2) que definem a φ e ainda mais, que a norma é contínua, segue-se que

$$\varphi(\lambda x, y) = \varphi(\lim \lambda_n x, y) = \lim \varphi(\lambda_n x, y) = \\ = \lim \lambda_n \varphi(x, y) = \lambda \varphi(x, y)$$

provando que S contém os números reais.

Vejamos que o número complexo $i \in S$. De facto, por (1) e (2), segue-se que

$$\varphi(ix, y) = R\varphi(ix, y) - iR\varphi(-x, y)$$

e sendo $R\varphi(-x, y) = -R\varphi(x, y)$, obtém-se

$$\varphi(ix, y) = R\varphi(ix, y) + iR\varphi(x, y) = \\ = i[R\varphi(x, y) - iR\varphi(ix, y)] = i\varphi(x, y).$$

Se μ for um qualquer número real, segue-se que $\mu i \in S$ e portanto $\lambda + \mu i \in S$, para cada par de números reais λ, μ, provando que $C \subset S$. Resulta que $C = S$.

Podemos resumir os resultados contidos nos lemas 2) e 3) dizendo que a forma $\varphi : E \times E \to C$ definida por (1) e (2) é linear relativamente a x.

Lema 4. *A aplicação* $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathrm{C}$, *definida por* (1) *e* (2) *é dotada da simetria hermitiana.*

Demonstração. Realmente, sendo

$$R\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2] = \\ = R\varphi(y, x),$$

pois, $\|x - y\| = \|y - x\|$ e sendo

$$R\varphi(ix, iy) = \frac{1}{4}[\|ix + iy\|^2 - \\ - \|ix - iy\|^2] = R\varphi(x, y),$$

porque

$$\|ix + iy\| = \|x + y\|, \|ix - iy\| = \|x - y\|,$$

resulta que podemos escrever

$$\varphi(x, y) = R\varphi(x, y) - iR\varphi(iix, iy) = \\ = R\varphi(y, x) + iR\varphi(x, iy) = \\ = R\varphi(y, x) + iR\varphi(iy, x)$$

ou finalmente

$$\varphi(x, y) = \overline{R\varphi(y, x) - iR\varphi(iy, x)} = \overline{\varphi(y, x)}$$

provando o lema 4.

Resulta do lema 4 e da definição que o precede, que a forma $\varphi : E \times E \to C$, definida por (1) e (2) é sesquilinear hermitiana, veja definição 2.

Lema 5. *Se* $\mathrm{x} \to \|\mathrm{x}\|$ *for a norma de* E *então* $\|\mathrm{x}\|^2 = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, *sendo* φ *definida por* (1) *e* (2).

Demonstração. De facto,

$$\varphi(x, x) = R\varphi(x, x) - iR\varphi(ix, x).$$

Tem-se

$$R\varphi(x, x) = \frac{1}{4}\|x + x\|^2 = \|x\|^2$$

e

$$R\varphi(ix, x) = \frac{1}{4}[\|ix + x\|^2 - \|ix - x\|^2 =$$
$$= \frac{1}{4}[\|(i+1)x\|^2 - \|(i-1)x\|^2] =$$
$$= \frac{1}{4}[(|i+1|^2 - |i-1|^2)\|x\|^2] = 0$$

o que prova o lema 5.

Resulta do lema 5, com os dados anteriores, que a aplicação $\varphi : E \times E \to C$ definida por (1) e (2) é uma forma sesquilinear hermitianae positiva, isto é, um produto escalar em E, tal que a norma de E é por êle induzida.

Tudo o que demonstramos, será resumido no seguinte:

TEOREMA 1. *Seja* E *um espaço vectorial normado, complexo. A condição necessária e suficiente para que* E *seja dotado de um produto escalar que induza a norma de* E, *é que para cada par de vectores* x, y ∈ E *se tenha*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

COROLÁRIO. *A condição necessária e suficiente para que um espaço vectorial normado complexo* E, *seja dotado de produto escalar, é que cada subespaço de dimensão dois o seja.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, se E for dotado de produto escalar, evidentemente cada subespaço de dimensão dois também será.

Recìprocamente, suponhamos que todo subespaço E' de dimensão dois do espaço vectorial normado complexo E, seja dotado de produto escalar. Daí resulta que para cada par de vectores do subespaço E' vale a condição (NJ). Como vale para cada E', valerá para cada par de vectores de E e pelo teorema 1 segue-se que E é dotado de produto escalar.

7. Espaços vectoriais reais. Vamos considerar neste parágrafo, apenas espaços vectoriais cujos escalares sejam números reais. Em um tal espaço vectorial E, denomina-se produto escalar a uma aplicação $\varphi : E \times E \to R$ que seja uma forma bilinear simétrica, estritamente positiva, isto é, satisfazendo as condições:

a) φ é linear relativamente a primeira coordenada

b) φ é simétrica, isto é

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

c) φ é estritamente positiva.

Resulta que φ é, também, linear relativamente a segunda coordenada.

O Teorema 1, demonstrado anteriormente, vale para espaços vectoriais reais. A necessidade da condição (NJ), no caso real, deduz-se de maneira semelhante aquela usada para o caso complexo. Quanto à suficiência, observe a motivação que foi feita e concluirá, sem dificuldade, que a parte real $R\varphi(x, y)$ seria o produto escalar no caso real. A demonstração seria análoga a que foi feita. Convém acrescentar, ainda, que vale também o corolário, evidentemente.

Sôbre a existência de produto escalar em espaços vectoriais, vale a pena, ainda, dar como notícia o seguinte trabalho: F. A. FICKEN, «Note on the existence of scalar products in normed linear spaces», Ann. of Math. (2) vol. 45 (1944) pp. 362-366, que consiste em impor uma outra condição sobre a norma de um espaço vectorial normado de modo a permitir a existência de um produto escalar. Faremos a seguir o resumo do trabalho citado, sem demonstrações. Pelo corolário do Teorema 1 é bastante nos limitarmos aos subespaços vectoriais de dimensão dois. Sejam então x, y dois vectores independentes de um espaço vectorial real E e seja V o subespaço gerado por estes dois vectores. Consideremos a aplicação σ de V em

V definida por

$$(1) \qquad \sigma(a\,x + b\,y) = b\,x + a\,y$$

sendo a e b reais, pois E é real. Segue-se que $\sigma^2 = I$, sendo I a aplicação idêntica, de onde resulta que σ é uma involução. Sendo

$$M = \{a\,x + b\,y\,;\ \sigma(a\,x + b\,y) = a\,x + b\,y\} = $$
$$= \{k\,(x + y)\,;\ -\infty < k < +\infty\}$$

e

$$N = \{a\,x + b\,y\,;\ \sigma(a\,x + b\,y) = -(a\,x + b\,y)\} = $$
$$= \{k\,(x - y)\,;\ -\infty < k < +\infty\}$$

segue-se que σ é uma involução em torno de M paralelamente a N.

Suponhamos que V seja dotado de produto escalar, o qual, como no caso complexo, vamos representar por $(\,|\,)$. Então se $\|x\| = \|y\|$, tem-se

$$\|a\,x + b\,y\|^2 = (a\,x + b\,y \,|\, a\,x + b\,y) =$$
$$= a^2\|x\|^2 + 2\,a\,b\ x,y\ + b^2\|y\|^2 =$$
$$= b^2\|x\|^2 + 2\,a\,b\,(x\,|\,y) + b^2\|y\|^2 =$$
$$= (b\,x + a\,y \,|\, b\,x + a\,y) =$$
$$= \|b\,x + a\,y\|^2 .$$

Daí resulta, que se E for um espaço vectorial real, quando $\|x\| = \|y\|$ a involução σ é uma isometria.

O trabalho de F. A. FICKEN, tem por objectivo provar que dado um espaço vectorial real normado E, se para cada par de vectores $x, y \in E$, tais que $\|x\| = \|y\|$, a involução σ definida por (1) for uma isometria, então E é dotado de um produto escalar, que induz a norma de E. O autor prova que se esta hipótese for verdadeira, então a norma de E satisfaz à condição (N J), de onde resulta a veracidade da afirmativa. Como observação final, estende o seu teorema para os espaços vectoriais complexos, ainda sem se libertar da condição (NJ).

Sobre produtos infinitos de funções

por Graciano Neves de Oliveira

§ 1 — No último número da «Gazeta de Matemática» publicámos um artigo em que estudámos produtos infinitos numéricos, procurando reduzi-los a séries por aplicação de logaritmos. Esta ideia tem-se-nos revelado fecunda e por isso aplicámo-la ao estudo de produtos infinitos de funções, tendo já conseguido alguns resultados interessantes que passamos a expor.

§ 2 — Consideremos o produto

$$(2.\ 1) \qquad P(x) = \prod_{0}^{\infty} \omega_n(x)$$

que suporemos convergente em todo o ponto x dum conjunto X onde os ω_n são definidos.

Diremos que o produto (2. 1) converge *quase uniformemente* no ponto a (ponto de acumulação de X) se dado um $\delta > 0$ arbitrário é sempre possível determinar uma ordem $m(\delta)$ tal que para $n > m(\delta)$ se verifique

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta$$

em certa vizinhança ε_n de a, podendo ε_n depender de n.

Dando-se o caso de ε_n ser independente de n diz-se que a convergência é uniforme.

No que se segue suporemos sempre $\omega_n > 0$.

TEOREMA 1. *Se* $\mathrm{P(x)}$ *é quase uniformemente convergente em* a *e se* $\mathrm{P(x)} > \mathrm{k} > 0$ *em certa vizinhança* ε *de* a, *o resto de ordem* n, $Q_n(x)$ *tende quase uniformemente para* 1 *em* a [1].

Por hipótese temos pois

$$(2.\ 2) \qquad |P_n(x) - P(x) < \delta$$

para $n > m(\delta)$ e $x \in I(a, \varepsilon_n)$.

A desigualdade (2. 2) pode ainda escrever-se

$$-\delta < P_n - P < \delta$$

ou

$$P - \delta < P_n < P + \delta$$

ou, escolhendo $\delta < k$ e por ser $P(x) > k > 0$ em $I(a, \varepsilon)$ temos

$$0 < k - \delta < P_n$$

para $n > m$ e na menor das vizinhanças $I(a, \varepsilon_n)$ e $I(a, \varepsilon)$ que designaremos por $I(a, \eta_n)$.

De (2. 2) vem então

$$\left|1 - \frac{P(x)}{P_n(x)}\right| < \frac{\delta}{k - \delta}$$

ou

$$(2.\ 3) \qquad |1 - Q_n(x)| < \frac{\delta}{k - \delta}$$

para $n > m$ e $x \in I(a, \eta_n)$ com o que fica concluida a demonstração.

Teorema 2. *Se* $Q_n(x)$ *tende quase uniformemente para* 1 *em* a *e numa vizinhança* ε_n *de* a *se tem* $P_n(x) < k$, *para* $n > m_1$, *o produto converge quase uniformemente em* a.

Por hipótese tem-se

$$(2.\ 4) \qquad |1 - Q_n(x)| < \delta$$

para $n > m(\delta)$ e $x \in I(a, \varepsilon_n')$.

A desigualdade (2. 4) pode escrever-se

$$\left|1 - \frac{P(x)}{P_n(x)}\right| < \delta$$

donde

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta\, |P_n(x)|.$$

Sendo m um número superior a m_1 e a $m(\delta)$ e designando por $I(a, \eta_n)$ a menor das vizinhanças $I(a, \varepsilon_n)$ e $I(a, \varepsilon_n')$ teremos

$$|P_n(x) - P(x)| < \delta k$$

para $n > m$ e $x \in I(a, \eta_n)$ e fica o teorema demonstrado.

§ 3 — A par com o produto (2. 1) consideremos a série

$$(3.\ 1) \qquad S(x) = \log P(x) = \sum_0^\infty \log \omega_n(x).$$

Designemos por $R_n(x)$ o resto de ordem n desta série. Será manifestamente $R_n = \log Q_n$.

Suponhamos que $P(x)$ satisfaz às hipóteses do teorema 1 do § 2. Isso implica como provámos a desigualdade (2. 3) que pode escrever-se

$$(3.\ 2) \qquad |1 - Q_n| < \delta'$$

para $n > m$ e $x \in I(a, \varepsilon_n)$.

De (3. 2) vem evidentemente

$$|\log Q_n(x)| < \varepsilon$$

ou

$$(3.\ 3) \qquad |R_n| < \varepsilon$$

ou ainda

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

que permite enunciar o

Teorema 1. *Se* $P(x)$ *é quase uniformemente convergente em* a *e se* $P(x) > k > 0$ *em certa vizinhança de* a, *a série* (3. 1) *é quase uniformemente convergente em* a.

E de modo semelhante se prova o

Teorema 2. *Se a série* (3. 1) *é quase uniformente convergente em* a *e numa vizinhança* ε_n' *de* a *se tem* $P_n(x) < k$, *para* $n > m_1$, *então o produto* $P(x)$ *é quase uniformemente convergente em* a.

---

[1] Isto é, ter-se-á $|Q_n(x) - 1| < \delta$ para $n > m(\delta)$ e $x \in I(a, \eta_n)$.

De facto verificando-se (3. 3) para $n > m$ e $x \in I(a, \varepsilon_n)$ temos nas mesmas condições

$$|\log Q_n(x)| < \varepsilon$$

ou

$$|1 - Q_n| < \delta'.$$

Pelo teorema 2 do § 2 fica este provado.

§ 4 — É conhecido o seguinte teorema de ARZELA:

A condição necessária e suficiente para que uma série seja contínua em ponto de continuidade dos seus termos é que a convergência seja quase uniforme nesse ponto.

Podemos agora provar o

TEOREMA 1. *Se em* a *o produto* (2. 1) *é quase uniformemente convergente, se em* $\mathrm{I}(a, \varepsilon)$ *é* $\mathrm{P}(x) > k > 0$ *e se em* a *todos os* ω_n *são funções contínuas então o produto* P *é ainda função contínua em* a.

De facto pelo teorema 1 do § anterior a série (3. 1) será quase uniformemente convergente em a. Os seus termos são todos funções contínuas em a [1]. Logo pelo teorema de ARZELA $\log P(x)$ é uma função contínua em a. O mesmo acontece pois a $P(x) = e^{\log P(x)}$.

TEOREMA 2. *Se em* a *o produto* (2. 1) *não se anula e é uma função contínua bem como todos os seus factores e se além disso numa vizinhança* $\mathrm{I}(a, \varepsilon_n)$ *se tem* $\mathrm{P}_n(x) < k$, *o produto converge quase uniformemente em* a.

Com efeito em a os termos da série (3. 1) e a sua soma serão funções contínuas. Pelo teorema de ARZELA convergirá quase uniformemente. E pelo teorema 2 do § anterior fica este provado.

---

(1) Supozemos de início $\omega_n(x) > 0$. Aliás aqui a condição $P(x) > k > 0$ em $I(a, \varepsilon)$ implica já que nenhum ω_n se anule em $I(a, \varepsilon)$.

§ 5 — Neste § suporemos sempre que existe uma vizinhança do ponto a onde o produto $P(x)$ é convergente e diferente de zero.

TEOREMA 1. *Se a série* $\sum_0^\infty \frac{\omega'_n(x)}{\omega_n(x)}$ *é uniformemente convergente no ponto* a, *a derivada de* $\mathrm{P}(x)$ *no ponto* a *pode obter-se pela regra de derivação dum produto finito:*

$$
\begin{aligned}
(5.\ 1) \qquad P'(a) = {} & \omega'_0(a)\,\omega_1(a)\,\omega_2(a)\cdots \\
& + \\
& \omega_0(a)\,\omega'_1(a)\,\omega_2(a)\cdots \\
& + \\
& \omega_0(a)\,\omega_1(a)\,\omega'_2(a)\cdots \\
& + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

De facto a série

$$(5.\ 2) \qquad S(x) = \log P(x) = \sum_0^\infty \log \omega_n(x)$$

será convergente numa certa vizinhança de a.

Consideremos a série $s(x)$ cujo termo geral é a derivada de $\log \omega_n(x)$:

$$s(x) = \sum_0^\infty \frac{\omega'_n(x)}{\omega_n(x)}$$

como esta série é uniformemente convergente em a teremos

$$S'(a) = s(a)$$

De (5. 2) vem

$$S'(a) = \frac{P'(a)}{P(a)}$$

e portanto

$$P'(a) = s(a)\,P(a)$$

ou ainda

$$(5.\ 3) \qquad P'(a) = \sum_0^\infty \frac{\omega'_n(a)}{\omega_n(a)} P(a)$$

donde imediatamente se tira (5. 1).

TEOREMA 2. *Se em* $\mathrm{I}(a, \varepsilon)$ *é* $\omega_n(x) > k > 0$, *para* $n > m_1$, *e se em* a $\sum_0^\infty \omega'_n(x)$ *converge* *absoluta e uniformemente,* P(x) *pode derivar-se pela regra deduzida.*

Bastará, pelo teorema anterior, provar que $\sum_0^\infty \frac{\omega_n'}{\omega_n}$ é uniformemente convergente em a.

Ora temos em $I(a, \varepsilon)$ e para $m > m_1$

$$\left|\sum_m^{m+p} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \sum_m^{m+p} \frac{|\omega_n'|}{\omega_n} < \frac{1}{k}\sum_m^{m+p} |\omega_n'| .$$

Por hipótese pode sempre tomar-se m tão grande que numa vizinhança $I(a, \varepsilon')$ se tenha

$$\sum_m^{m+p} |\omega_n'| < \delta k .$$

Logo para m suficientemente grande e x pertencente à menor das vizinhanças $I(a, \varepsilon)$ e $I(a, \varepsilon')$ temos

$$\left|\sum_m^{m+p} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \delta$$

donde

$$\left|\sum_m^{\infty} \frac{\omega_n'}{\omega_n}\right| < \delta$$

e fica o teorema demonstrado.

TEOREMA 3. *Todo o produto da forma* $\prod_0^\infty (1 + u_n \varphi(x))$ *se pode derivar no ponto* a, *pela regra deduzida, se* $\sum u_n$ *é absolutamente convergente, se em* a *a derivada de* $\varphi(x)$ *é limitada e se em* $I(a, \varepsilon)$ *se tem* $1 + u_n \varphi(x) > k > 0$ *a partir de certa ordem.*

Neste caso tem-se

$$\sum |\omega_n'| = |\varphi'(x)| \sum |u_n|$$

pelo que $\sum |\omega_n'|$ converge uniformemente. Pelo teorema 2 fica este provado.

TEOREMA 4. *Produto infinito da forma* $\prod_0^\infty (1 + u_n x^n)$ *é derivável, pela regra deduzida, em qualquer ponto* a *do interior do intervalo* $-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}$ *em que é*

$$\lambda = \overline{lim} \sqrt[n]{|u_n|}$$

desde que em $I(a, \varepsilon)$ *seja* $1 + u_n x^n > k > 0$.

Com efeito a série

$$\sum |\omega_n'| = \sum |n u_n x^{n-1}|$$

converge uniformemente em qualquer ponto interior a $-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}$ com $\gamma = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|u_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$.

§ 6 — Supozemos nas demonstrações dos quatro teoremas anteriores que existia uma vizinhança de a onde o produto infinito não se anulava e era sempre convergente. Supozemos ainda que nessa vizinhança era $\omega_n > 0$ para todo o n.

Se o produto não satisfaz a estas condições, mas é possível determinar uma ordem n tal que o resto Q_n as satisfaz os teoremas continuam válidos como é fácil verificar (1).

Efectivamente, teremos

$$P = P_n Q_n$$

Se Q_n satisfaz à hipótese de algum dos quatro teoremas anteriores e todos os ω_i, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$, são deriváveis podemos escrever

$$P' = P_n' Q_n + P_n Q_n' = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\omega_i'}{\omega_i} P_n Q_n + \\ + P_n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\omega_i'}{\omega_i} Q_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega_i'}{\omega_i} P .$$

Se algum dos ω_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ é nulo toma-se, é claro

$$\frac{P_n}{\omega_i} = \omega_0 \cdots \omega_{i-1} \omega_{i+1} \cdots \omega_{n-1} .$$

A regra mantém-se pois neste caso.

(1) Portanto agora só exigimos $\omega_i > 0$ para além da ordem $n-1$.

§ 7 — Damos agora algumas aplicações da regra de derivação que deduzimos.

Sabe-se que é

$$(7.1)\qquad \operatorname{sen} x = x \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

É fácil ver que este produto se pode derivar pela regra deduzida com base no teorema 3 do § 5 e no que se disse no § 6.

Teremos

$$(7.2)\qquad \begin{aligned} \cos x &= \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+ \\ &+x\left[\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right]' \end{aligned}$$

neste caso é

$$\frac{\omega' n}{\omega n} = -\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}.$$

Pela fórmula (5. 3)

$$\left[\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right]' = -\sum_{1}^{\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}\times \\ \times\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

pelo que (7. 2) passa a escrever-se

$$\cos x = \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) - x\sum_{1}^{\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2-x^2}\times \\ \times\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

entrando aqui com o valor de

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

tirado de (7. 1) vem

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{n^2\pi^2-x^2}.$$

Sabe-se também que

$$\cos x = \prod_{0}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

atendendo ao teorema 3 do § 5, ao § 6 e à fórmula (5. 3) podemos escrever

$$-\operatorname{sen} x = \sum_{0}^{\infty}\frac{-8x}{(2n+1)^2\pi^2-4x^2}\cos x$$

donde

$$\operatorname{tg} x = \sum_{0}^{\infty}\frac{8x}{(2n+1)^2\pi^2-4x^2}.$$

É ainda conhecido o seguinte produto infinito

$$(7.3)\qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots$$

Temos

$$\omega_n = \cos\frac{x}{2^n}$$

e

$$\omega_n' = -\frac{1}{2^n}\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}.$$

Como

$$|\omega_n'| = \left|\frac{1}{2^n}\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

a série $\sum_{1}^{\infty}|\omega_n'|$ é uniformemente convergente em qualquer ponto. Para qualquer x tem-se $\omega_n > k > 0$ desde que n seja suficientemente grande. Atendendo ao teorema 2 do § 5 e ao § 6 podemos a (6. 3) aplicar a fórmula (5. 3), vindo

$$\frac{\cos x\cdot x - \operatorname{sen} x}{x^2} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}\times \\ \times\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

donde

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}.$$

Provaremos agora que a soma da série

$$(7.\ 4)\qquad \sum\left[\frac{2(n+1)x^{2n+1}}{1+x^{2(n+1)}}+\frac{(2n+1)x^{2n}}{1+x^{2n+1}}-\frac{(2n+1)x^{2n}}{1-x^{2n+1}}\right]$$

é zero qualquer que seja x desde que $|x|<1$.

Para isso partiremos da igualdade (1)

$$\prod(1+x^{2(n+1)})\cdot\prod(1+x^{2n+1})\cdot\prod(1-x^{2n+1})=1$$

para $|x|<1$.

Designemos por P_1, P_2, P_3 respectivamente o 1.º, 2.º e 3.º produto infinito. Por derivação teremos

$$(7.\ 5)\qquad P_1' P_2 P_3 + P_1 P_2' P_3 + P_1 P_2 P_3' = 0$$

A fórmula (5. 3) é aplicável a qualquer dos três produtos num ponto de intervalo aberto $(-1, +1)$.

Fàcilmente se conclui que

$$P_1' = S_1 P_1$$
$$P_2' = S_2 P_2$$
$$P_3' = S_3 P_3$$

respectivamente com

$$S_1=\sum\frac{2(n+1)x^{2n+1}}{1+x^{2(n+1)}}$$

$$S_2=\sum\frac{(2n+1)x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$$

$$S_3=-\sum\frac{(2n+1)x^{2n}}{1-x^{2n+1}}.$$

Entrando com estes resultados em (7. 5) e dividindo tudo por $P_1 P_2 P_3$ logo obtemos o que pretendíamos.

§ 8 — Acabaremos, dando o seguinte critério de convergência uniforme para um produto infinito:

(1) Vicente Gonçalves, Curso de Álgebra Superior (1944), pág. 137.

Teorema 1. *Se* $\prod w_n$ $(w_n>0)$ *é um produto infinito numérico absolutamente convergente e numa vizinhança de* a, $\omega_n(x)$ *está sempre entre os números* $\frac{1}{w_n}$ *e* w_n *(ou é igual a um deles), então* $\prod \omega_n(x)$ *converge uniformemente em* a.

Antes de demonstrarmos esta proposição convém notar o seguinte:

Por um processo inteiramente análogo ao usado na demonstração do teorema 2 do § 2 se demonstraria:

Teorema 2. *Se* $Q_n(x)$ *tende uniformemente para* 1 *em* a *e numa vizinhança* ε *de* a *se tem* $P_n(x)<k$, *para* $n>m_1$, *o produto* $\prod \omega_n(x)$ *converge uniformemente em* a.

Depois, baseando-nos neste teorema e de modo análogo ao que se usou para provar o teorema 2 do § 3 se provaria:

Teorema 3. *Se a série* (3. 1) *é uniformemente convergente em* a *e numa vizinhança* ε *de* a *se tem* $P_n(x)<k$, *para* $n>m_1$, *então o produto* $\prod \omega_n$ *é uniformemente convergente em* a.

Posto isto provemos finalmente o teorema 1:

Designe W_n o maior dos valores $\frac{1}{w_n}$ e w_n. Teremos por hipótese em $I(a, \varepsilon)$

$$(8.\ 1)\qquad \frac{1}{W_n}\leq\omega_n(x)\leq W_n$$

donde

$$(8.\ 2)\qquad |\log\omega_n(x)|\leq\log W_n.$$

Como $\prod w_n$ é absolutamente convergente, convergirá $\prod W_n$ (1) e será evidentemente diferente de zero. A série $\sum\log W_n$ é pois convergente. Mostra a desigualdade (8. 2) que $\sum \log \omega_n(x)$ é uniformemente convergente em a.

De (8. 1) tira-se ainda

$$\prod_0^m \omega_n(x) \leqq \prod_0^m W_n .$$

Seja $K = \prod_0^\infty W_n$. Teremos

$$\prod_0^m \omega_n(x) < K \qquad \text{em } I(a, \varepsilon).$$

Pelo teorema 3 fica a demonstração concluida.

Notemos que, designando por $W_n^*(x)$ o maior dos valores $\omega_n(x)$ e $\dfrac{1}{\omega_n(x)}$, ainda se pode tirar de (8. 2)

$$\log W_n^*(x) \leqq \log W_n$$

logo $\sum \log W_n^*$ converge. Será portanto convergente e diferente de zero o produto $\prod W_n^*$. Podemos pois concluir que $\prod \omega_n(x)$ é absolutamente convergente em $I(a, \varepsilon)$(1).

(1) Como demonstrámos no nosso artigo do último número da «Gazeta de Matemática».

As funções recursivas e os fundamentos da matemática(*)

por Mário Tourasse Teixeira
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro — Brasil

Muitas vezes não estamos dispostos a aceitar (em algum sentido) de imediato uma certa sentença S. No entanto, se nos apresentam uma determinada sequência de sentenças

$$S_1, S_2, \cdots S_n = S$$

passamos a considerar aceitável a sentença S. Podemos dizer então que a sequência em questão é um argumento para S no sentido de aceitação considerado.

Uma maneira que parece natural de construir sistemàticamente argumentos é a seguinte. Damos um conjunto a de sentenças aceitáveis e um conjunto $R_1, R_2, \cdots, R_n$ de regras que nos convencemos levam sempre, quando aplicadas a sentenças aceitáveis, a sentenças aceitáveis.

(*) Palestra realizada no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

Então, toda a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

onde cada S_i ou pertence a a ou é obtida de anteriores por uma das regras R_i, é um argumento.

Suponhamos, por exemplo, que estejamos interessados em gerar dessa maneira argumentos para a teoria elementar dos números. Para tornar mais explícitas as sentenças em que estamos interessados, vamos dar também um processo de geração para elas.

Primeiro especifiquemos os termos (substantivos), que serão obtidos a partir de variáveis (x, y, etc.) e constantes (0 é bastante) por meio de $+$, $\cdot$ e $'$ (soma, multiplicação e sucessor). Exemplos de termos serão então

$$x + 0$$
$$x \cdot y$$
$$x' + y$$

etc.

As sentenças serão então alcançadas a partir dos termos por meio de $=$ e depois pela aparelhagem lógica. Como

$$x + 0' = x'$$
$$x = y \supset y = x$$
$$\neg x = 0$$
$$(\exists x)(y + x = y)$$

onde, por exemplo, $\supset$ corresponde a se... então..., $\neg$ à negação e $(\exists x)$ a «existe x tal que...»

Uma vez precisadas as sentenças em que estamos interessados, vamos especificar agora um método de geração de argumentos para essas sentenças.

Começamos com o nosso conjunto a de sentenças aceitáveis. Entre essas, incluimos as que se referem ao mecanismo lógico, como

$$S \supset (T \supset S)$$

onde S e T são sentenças quaisquer de nosso domínio, e as que se referem mais particularmente ao nosso caso, como

$$x + 0 = x\,.$$

Depois especificamos as regras R_i, como

de S e $S \supset T$
obter T.

Se aceitamos as sentenças de a e nos convencemos de que as regras levam sempre de sentenças aceitáveis a sentenças aceitáveis, então toda a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

onde cada S_i é de a ou obtido de anteriores pelas regras, fornece um argumento para uma sentença da teoria dos números.

Os argumentos assim obtidos podem ser testados de uma maneira particularmente simples. Seja, por exemplo, a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

que queremos testar a fim de verificar se é ou não um dos argumentos em questão. Para cada S_i podemos verificar se é ou não uma sentença de nosso sistema, de acordo com o método de geração, por um número determinado e finito de passos. Para verificar se S_i é elemento de a ou pode ser considerado como proveniente de sentenças anteriores da sequência por uma das regras, também nós o podemos fazer de acordo com um número finito e efectivo de passos. Ainda uma pessoa que não entendesse as sentenças de nosso sistema, mas entendesse as regras de geração dele, poderia testar uma sequência $S_1 \cdots S_n$ e verificar se ela é ou não um argumento do sistema. Poderíamos mesmo pensar na possibilidade, em princípio, de construir uma máquina que realizasse tais testes.

Podemos também nos convencer de que os argumentos usualmente encontrados na teoria dos números elementar podem ser convenientemente transportados em argumentos do tipo considerado.

Obtemos assim um sistema poderoso de argumentos para a teoria dos números, que admite um teste efectivo de verificação.

A maneira «construtiva» de gerar o nosso sistema assemelha-se, por sua vez, à própria teoria dos números. As sentenças, por exemplo, são obtidas a partir de um material inicial (variáveis e 0) por meio de um número finito e definido de operações. Os números naturais são obtidos a partir de zero por meio de uma operação definida (sucessão). a é um conjunto de sentenças para o qual temos um processo efectivo de determinar se uma sentença está ou não nele. Anàlogamente poderíamos tomar um sub-conjunto A dos números naturais tal que possamos sempre determinar efectivamente se um número natural está ou não em A. R_i são regras tais que sempre é possível determinar efectivamente se sentenças são ou não relacionadas por elas. Na analogia, serão substituídas por funções f_i de números naturais em $\{0, 1\}$ que são efectivamente calculáveis (isto é, que existe um método efectivo de calcular seu valor para objectos quaisquer de seu campo de aplicação). Quando, por exemplo, $f_i(x_1, x_2, x_3) = 0$ é que x_3 provém de x_1 e x_2 pela «regra» f_i e quando $f_i(x_1, x_2, x_3) = 1$ isso não se verifica. Assim sendo, a noção análoga de argumento seria uma sequência

$$a_1 \cdots a_n$$

de números naturais tal que, para cada a_i, ou $a_i \in A$ ou existe j tal que f_j aplicado a certos membros anteriores e a a_i dá como resultado 0.

Nessa analogia do sistema, usamos a noção de sub-conjunto efectivo de números naturais e a noção de função efectivamente calculável. Examinemos primeiro esta última. Não seria possível dar um processo de geração para essas funções? Isto é, a partir de um certo conjunto de funções iniciais, aplicando um certo número finito de vezes certas operações definidas, obter todas e apenas as funções efectivamente calculáveis dos números naturais neles mesmos.

Como funções iniciais podemos tomar, por exemplo, funções como

$$f(x) = x'$$
$$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

e, como operações, por exemplo, à que leva da função φ à função f dada por

$$f(0) = q \quad \text{(onde } q \text{ é um certo número natural)}$$
$$f(x') = \varphi(x, f(x)) .$$

É possível definir assim uma classe de funções dos números naturais nos números naturais, chamada classe das funções recursivas e dar argumentos convincentes a favor da tese de que essa classe coincide com a classe das funções efectivamente calculáveis, (dos números naturais neles mesmos).

Admitindo essa tese e, chamando de função característica de um conjunto a função que aplicada a um elemento do conjunto dá 0 e dá 1 quando aplicada aos outros elementos, temos que um conjunto é efectivo se e só se sua função característica fôr recursiva.

Por extensão natural podemos falar de relações efectivamente calculáveis, como $x < y$, que o serão quando e sòmente quando a função associada $f(x, y)$ (igual a zero se a relação se verifica e igual a um se não) fôr recursiva.

Vendo a analogia no outro sentido, podemos aplicar essa elaboração das funções recursivas ao nosso sistema. Chamemos de F o conjunto formado pelos elementos constituintes do nosso sistema, ou seja, variáveis, $0, +, \supset, \neg$, etc., sequências finitas desses elementos, como

$$(0, +, x)$$

ou sequências finitas dessas sequências, como

$$((x, +, 0), (0, \supset, x), (0, ', +, 0))$$

Assim sendo, é possível estabelecer uma correspondência efectiva biunívoca entre F e uma parte infinita dos números naturais. Por consequência, uma parte dos números naturais vai corresponder às sentenças e outra parte aos argumentos.

Devido a essa correspondência, surge a possibilidade de que as sentenças do nosso sistema se refiram ao próprio sistema. Ademais, como as noções de sentença e de argumento são efectivas, essas noções vão corresponder, via correspondência, a funções recursivas que, por sua vez, podem ser expressas no sistema.

As sentenças, por exemplo, vão corresponder a um sub-conjunto B dos números naturais. A função f que a cada $x \in B$ associa 0 e a cada $x \notin B$ associa 1 é recursiva. Com o material de nosso sistema podemos construir uma família de sentenças $S(x)$, uma sentença para cada número natural x, tal que, se x é o número correspondente a uma sentença então existe um argumento do sistema para $S(x)$ e se x não é o número correspondente a uma sentença então existe um argumento do sistema para $\neg S(x)$.

Assim sendo, podemos estudar o nosso sistema no próprio sistema e podemos formular e tentar responder perguntas relativas ao sistema usando o próprio sistema.

Uma pergunta que naturalmente se impõe é se será o nosso sistema suficientemente poderoso. Numa forma extrema, poderemos indagar se para toda sentença S, sem variáveis livres, existirá sempre no nosso sistema um argumento ou para S ou para $\neg S$. Uma construção engenhosa, devida a GÖDEL, nos permite determinar uma sentença T do nosso sistema, sem variáveis livres, tal que, se o sistema fôr compatível como esperamos (isto é para nenhuma sentença S existe no sistema argumentos tanto para S como para $\neg S$), nem para T nem para $\neg T$ existem argumentos no sistema. A ideia norteadora para determinar T é descobrir uma sentença do sistema que exprima, de acordo com a correspondência, que para ela própria não existe argumento no sistema.

A natureza da argumentação acima é tão geral que nos convencemos que se aplica a todos os sistemas com as características de efectividade descritas acima e capazes de expressar uma certa parte da classe das funções recursivas.

Outra pergunta que naturalmente ocorre é se podemos esperar determinar um argumento do sistema para uma sentença que, de acordo com a correspondência, exprime a compatibilidade do sistema. Baseados no resultado anterior, poderemos então nos convencer de que tal coisa não é de se esperar. E as mesmas considerações anteriores se aplicam à respeito do poder deste resultado.

Vimos então que as funções recursivas estão intimamente ligadas aos processos efectivos. Poderíamos indagar se é possível dar para o nosso sistema um método efectivo que, aplicado a qualquer sentença do sistema, diga se existe ou não um argumento do sistema para essa sentença. Se, por assim dizer, retirarmos do sistema a parte que lida com a multiplicação $(\cdot)$ poderemos então dar uma resposta afirmativa à tal indagação. Isto é, podemos exibir um procedimento efectivo tal que nos convencemos que aplicado a qualquer sentença desse sub-sistema nos diz se existe ou não um argumento desse sub-sistema para ela. E para isso não necessitamos das funções recursivas, basta que nos convençamos de que o procedimento é realmente efectivo e faz o que pretende. No entanto, se, por exemplo, queremos argumentar que não devemos esperar determinar um tal procedimento efectivo para o sistema inteiro, necessitamos antes ter precisado o que entendemos pelo conjunto de procedimentos efectivos e é aí que a teoria das funções recursivas nos ajuda, nos fornecendo uma maneira manejável de trabalhar com essa noção. E é assim, trabalhando com as funções recursivas, que chegamos a nos convencer de que não podemos obter para o nosso sistema um método efectivo de determinar, para cada sentença, se existe ou não um argumento do sistema para ela.

Muito se tem feito, no sentido de obter resultados como o acima, mostrando que não devemos esperar obter procedimentos efectivos para sistemas. Para muitas teorias matemáticas simples nos convencemos de que isso se verifica, como também para a aparelhagem lógica fundamental usada, por exemplo, no sistema acima.

O sistema que exemplificamos se restringe a métodos construtivos e podemos pensar que o sentido de aceitação associado a ele está estreitamente relacionado à essa restrição. Mas que dizer de outras partes da matemática? Em vez de construir um sistema para a teoria dos números, podemos construir um sistema para a teoria dos conjuntos e nos convencermos de que esse sistema engloba grande parte da matemática. Mas agora o nosso conjunto inicial de sentenças a é aceitável em outro sentido, ou pelo menos nem todos estão dispostos a aceitá-lo da mesma maneira que o anterior. Por outro lado, podemos construir este novo sistema com as mesmas características de efectividade do anterior. Em particular, existe um critério efectivo para saber se uma sequência $S_1 \cdots S_n$ é ou não um argumento desse novo sistema. Vimos que essas características de efectividade estão intimamente relacionadas ao sistema inicial, que então poderia, sob um certo ponto de vista, ser considerado como o sistema matemático básico.

Espaços de Banach uniformemente convexos (*)

por ***Luiz Adauto da Justa Medeiros***
Professor da Universidade do Brasil e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro — Brasil

§ 1. Introdução. Nosso objectivo nesta exposição é apresentar, sob forma didáctica, um resultado sobre espaços de BANACH, descoberto por D. MILMAN e publicado em «Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S.», vol. 20 (1938). O resultado a que nos referimos consiste do teorema 1, do parágrafo 3, cuja demonstração que faremos, não é o original de MILMAN, mas sim uma devida a B. J. PETTIS, publicada em «Duke Mathematical Journal», vol. 5 (1939) 249-253. Convem salientar, que fizemos, oralmente, esta exposição, como complemento ao curso sobre Espaços de HILBERT ministrado no IMPA pelo professor LEOPOLDO NACHBIN, em 1960.

A demonstração do teorema 1 do § 3 se baseia na representação das formas lineares φ, do segundo dual $\mathfrak{X}^{**}$ do espaço de BANACH $\mathfrak{X}$, através de uma integral. Vamos nos limitar a espaços de BANACH reais o que não é restritivo como veremos no parágrafo 3.

§ 2. Representação de formas lineares. Neste parágrafo, demonstraremos um teorema de representação das formas lineares sobre o espaço de BANACH $M(E)$, das funções limitadas em um conjunto E, já provado por BANACH no caso particular em que E é o conjunto dos inteiros naturais e generalizado por T. H. HILDEBRANDT, consulte Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36 (1934) p. p. 868-875. Antes de iniciarmos a demonstração, faremos um apanhado rápido de alguns resultados sobre a teoria da integral.

Seja E um conjunto e representemos por $\mathscr{P}(E)$ a família de todas as partes de E incluindo E e a parte vazia.

Denomina-se decomposição de E a um conjunto finito $E_1, E_2, \cdots, E_n$ de elementos de $\mathscr{P}(E)$ tais que $E_i \cap E_j$ é a parte vazia para $i \neq j$ e $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = E$.

Se D_1 e D_2 forem duas decomposições de E, diremos que D_1 precede D_2, quando toda parte de D_1 estiver contida em alguma parte de D_2 e escreveremos $D_1 \leqq D_2$. É fácil verificar que a relação $\leqq$ assim definida é uma relação de ordem parcial na família Π das decomposições de E. Dada duas decomposições D_1 e D_2 de E, a decomposição obtida de D_1 e D_2 interseptando os seus elementos, a qual representaremos por $D_1 \cap D_2$ é tal que precede D_1 e D_2. Como

(*) Exposição em seminário de Análise Funcional no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

este facto vale para qualquer par de decomposições, segue-se que a família das decomposições é um conjunto dirigido. Resulta, portanto, que se f for uma função numérica definida em Π, tem sentido falar em limite da f segundo o conjunto dirigido Π, que é dito do seguinte modo: diremos que um número L é limite de uma função numérica f definida em Π, quando, para cada $\varepsilon > 0$, existir uma decomposição D_ε tal que para toda $D \leqq D_\varepsilon$ tenha-se $|f(D) - L| < \varepsilon$. Escreve-se abreviadamente

$$L = \lim_{D \leq} f(D)$$

e que se lê limite de f segundo a direcção $\leqq$.

Seja μ uma função numérica de conjunto, real, definida em $\mathscr{P}(E)$. Diz-se que μ é aditiva quando $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ para $E_1 \cap E_2$ vazio. Diz-se que μ é de variação limitada em E, quando para cada decomposição D de E, a soma $\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|$ for finita e nesse caso, ao número real positivo

$$V(\mu; E) = \sup_D \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| = \lim_{D \leq} \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|$$

denomina-se variação total de μ em E. Caso μ seja uma função de conjunto real e positivo, obtem-se:

$$V(\mu; E) = \sup_D \sum_{i=1}^{n} |(E_i)| = \sup_D \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \mu(E).$$

Seja f uma função real definida em E, μ uma função de conjunto real, aditiva definida em $\mathscr{P}(E)$ e de variação limitada. Seja D uma decomposição de E e $t_i \in E_i$. Consideremos as somas $s_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \mu(E_i)$, quando D varia em Π.

Quando existir $\lim_{D \leq} s_D$, diremos que êle será a integral de Stieltjes da f em E e representaremos por

$$\int_E f(x)\, d\mu(x).$$

Seja $M(E)$ o espaço de Banach das funções reais limitadas em E com a norma definida por

$$\| f \| = \sup \{ |f(x)| ; x \in E \}$$

e representemos por $M^*(E)$ o espaço de Banach das formas lineares reais contínuas sobre $M(E)$, isto é, o dual de $M(E)$.

Vamos representar por χ_{E_i} a função característica da parte E_i, isto é, $\chi_{E_i}(t) = 0$ se $t \in [E_i$ e $\chi_{E_i}(t) = 1$ se $t \in [E_i$.

Na demonstração do teorema que segue, faremos uso da função $\operatorname{sgn} \mu$, definida em $\mathscr{P}(E)$ por

$$\operatorname{sgn} \mu(E_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu(E_i) = 0 \\ \dfrac{|\mu(E_i)|}{\mu(E_i)} & \text{se } \mu(E_i) \neq 0. \end{cases}$$

Segue-se que $\mu(E_i) \operatorname{sgn} \mu(E_i) = |\mu(E_i)|$.

Proposição 1. A cada elemento φ de $M^*(E)$, corresponde uma função real μ, aditiva, de variação limitada, definida em $\mathscr{P}(E)$, cuja variação total em E é igual a $\| \varphi \|$ e tal que

$$\varphi(f) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

para toda $f \in M(E)$.

Demonstração. Seja χ_{E_i} a função característica de E_i. Se $\varphi \in M^*(E)$, como $\chi_{E_i} \in M(E)$, $\mu(E_i) = \varphi(\chi_{E_i})$ é uma função de conjunto real, aditiva definida em $\mathscr{P}(E)$. Vamos provar que μ é de variação limitada em E. De facto, seja D uma decomposição de E em n partes E_i e seja f a função definida em E por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \operatorname{sgn} \mu(E_i).$$

Conclui-se que f pertence a $M(E)$ e portanto

$$\|f\| = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x)\operatorname{sgn}\mu(E_i)\right| ; x \in E_i\right\} \leqq 1$$

porque $\chi_{E_i}(x) = 1$ e $\operatorname{sgn}\mu(E_i) = \pm 1$ ou zero. Daí obtém-se

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}\mu(E_i)\,\varphi(\chi_{E_i})$$

ou

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\operatorname{sgn}\mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|\,.$$

Logo, para toda decomposição D de E, obtem-se

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \leqq \|\varphi\|$$

e portanto, $V(\mu\,;E)$ é finita e μ é de variação limitada, sendo $V(\mu\,;E) \leqq \|\varphi\|$. Dada $f \in M(E)$, consideremos a função f_D definida por

$$f_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\chi_{E_i}$$

sendo $t_i \in E_i$, a qual pertence a M(E) pois é uma combinação linear de funções de $M(E)$. Vamos provar que $\lim_{D\leq} f_D = f$. De facto, sendo f limitada, seu conjunto de valores está contido em um intervalo finito (a, b). Logo, dado $\varepsilon > 0$, decomponhamos (a, b) em partes iguais $a = y_0 < y_1 < \cdots \cdots < y_{n-1} < y_n = b$ de tal modo que $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Representando por $E_i = \{x \in E\,; y_{i-1} < < f(x) \leqq y_i\}$ e por D_ε a decomposição de E cujos conjuntos são E_i, segue-se que

$$\|f_{D_\varepsilon} - f\| = \sup\{|f_{D_\varepsilon}(x) - f(x)|\,; x \in E\} < \varepsilon$$

pois se $x \in E$, $x \in E_i$ para algum i e daí

$$f_{D_\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\chi_{E_i}(x) = f(t_i)$$

e portanto

$$|f_{D_\varepsilon}(x) - f(x)| = |f(t_i) - f(x)| < y_i - y_{i-1} < \varepsilon\,,$$

pois t_i também pertence a E_i.

A mesma desigualdade vale para toda a decomposição obtida redecompondo os intervalos de D_ε ou seja, para toda $D \geqq D_\varepsilon$. Logo, $\lim_{D\leq} f_D = f$ como desejávamos.

Sendo $\varphi \in M^*(E)$ e $f_D \in M(E)$, obtém-se

$$\varphi(f_D) = \varphi\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\chi_{E_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\varphi(\chi_{E_i})$$

e como $\varphi(\chi_{E_i}) = \mu(E_i)$, obtém-se finalmente

$$\varphi(f_D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\mu(E_i)\,.$$

Sendo μ de variação limitada e f limitada, segue-se que o limite do somatório existe segundo $[D \leqq]$ e é igual a integral da f relativamente a μ. Sendo $|\varphi(f_D) - \varphi(f)| \leqq \leqq \|\varphi\| \cdot \|f_D - f\|$, pelo que vimos anteriormente conclui-se que $\lim \varphi(f_D) = \varphi(f)$ e finalmente obtém-se

$$\varphi(f) = \int_E f(x)\,d\,\mu(x)\,.$$

Para completar a demonstração, é suficiente provar que $\|\varphi\| = V(\mu\,;E)$. Vimos anteriormente $\|\varphi\| \geqq V(\mu\,;E)$ e usando a representação anterior, obtém-se

$$|\varphi(f)| \leqq \|f\| \cdot V(\mu\,;E) \text{ ou } \|\varphi\| \leqq V(\mu\,;E)$$

o que prova ser $\|\varphi\| = V(\mu\,;E)$.

Nossa próxima etapa, será obter um resultado análogo para os elementos do biudal $\mathfrak{X}^{**}$ de um espaço de Banach $\mathfrak{X}$, provando que neste caso é possível obter uma representação integral, sendo a função de conjunto positiva. Isto será obtido através do corolário que segue.

Corolário. *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de Banach real e φ um elemento de $\mathfrak{X}^{**}$. Então existe* *uma função de conjunto real β satisfazendo as seguintes condições:*

a) *β é definida em toda parte da esfera unitária* S *do dual* $\mathfrak{X}^*$, *sendo aditiva e de variação limitada.*

b) *β é uma função não negativa.*

c) $\| \varphi \| = \mathrm{V}(\beta\,; \mathrm{S})$.

d) $\varphi(f) = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{f(x)\, d}\,\beta\mathrm{(x)}$ para toda $\mathrm{f} \in \mathfrak{X}^*$.

Demonstração. Seja $M(S)$ o espaço de Banach de todas as funções reais limitadas em S, esfera unitária de $\mathfrak{X}^*$, com a norma supremo. É claro que a restricção de um elemento qualquer $f \in \mathfrak{X}^*$ a S pertence a $M(S)$. Ainda mais, se $\varphi \in \mathfrak{X}^{**}$ ele pertencerá a $\mathrm{M}^*(S)$ e portanto, a proposição anterior garante a existência de uma função de conjunto μ satisfazendo as condições a), c) e d). Pelo teorema da decomposição de Jordan, tem-se $\mu = \pi - \nu$, sendo π e ν funções de conjunto satisfazendo as condições a) e b). Para cada parte F de S, consideremos a parte $P(F)$ de S constituída por todos os $x \in S$ tais que $-x \in F$ e definamos a função de conjunto ν_0 por $\nu_0(F) = \nu(P(F))$. Segue-se que ν_0 tem as propriedades a) e b) pois ν as possui e ainda mais $\nu_0(S) = \nu(S)$. Pois bem, a função β definida em $\mathscr{P}(S)$ por $\beta(F) = \pi(F) + \nu_0(F)$ para toda parte F, possui as propriedades exigidas na tese do corolário. De facto, a) e b) são imediatas. Para provarmos a c), sabemos que $\| \varphi \| = V(\mu\,; S)$ e que sendo $\mu = \pi - \nu$, ainda pelo teorema da decomposição de Jordan, tem-se $V(\mu\,; S) = \pi(S) + \nu(S)$ e como $\nu(S) = \nu_0(S)$, obtém-se $V(\mu\,; S) = \pi(S) + \nu(S)$ e como $\nu(S) = \nu_0(S)$, vem $\| \varphi \| = V(\mu\,; S) = \pi(S) + \nu_0(S) = \beta(S) = V(\beta\,; S)$, porque β é uma função de conjunto real positiva.

Antes de demonstrarmos a d), observemos que

$$\int_S -f(x)\,d\nu(x) = \int_S f(-x)\,d\nu(x) =$$

$$= \int_S f(x)\,d\nu_0(x)\,.$$

Sabemos que

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\mu(x)$$

e portanto,

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\pi(x) - \int_S f(x)\,d\nu(x)$$

que pela observação anterior pode ser escrita do modo seguinte

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\pi(x) + \int_S f(x)\,d\nu_0(x)$$

ou

$$\varphi(f) = \int_S f(x)\,d\beta(x)$$

como desejávamos provar.

§ 3. Espaços de Banach uniformemente convexos. Consideremos o espaço vectorial R^2 constituido por todos os vectores $x = (x_1, x_2)$ do plano. Sabemos que com as normas

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \text{máx}\,(|x_1|, |x_2|)$$

R^2 é um espaço normado. A esfera unitária S_2 correspondente a norma $\| \;\; \|_2$ é um círculo de raio um e centro na origem e a S_∞ correspondente a $\| \;\; \|_\infty$ é um quadrado com vértices nos pontos $(+1, +1)$, $(+1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, +1)$. Sejam x e y dois vectores *quaisquer* do plano tais que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ e $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$. É fácil verificar que quando $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|_2$ tende para um, resulta que $\|x - y\|_2$ tende para zero. Entretanto, $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|_\infty$ pode tender para um sem que necessàriamente $\|x - y\|_\infty$ tenda para zero. O leitor poderá verificar tal facto intuitivamente. No que segue vamos trabalhar com espacos de BANACH cuja norma tenha um comportamento semelhante ao da norma $\| \ \|_2$, com relação ao facto observado anteriormente.

Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de BANACH e consideremos dois vectores x e y quaisquer da superfície da esfera unitária S de $\mathfrak{X}$. Suponhamos que quando o ponto médio $\frac{x+y}{2}$ da corda unindo os vectores x e y, tenda para a superfície de S resulte, que o comprimento desta corda tenda para zero, quaisquer que sejam x e y tomados na superfície de S. Este mesmo facto pode ser dito do seguinte modo: se x e y são dois vectores quaisquer de $\mathfrak{X}$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ então

$$\lim_{\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \to 1} \|x-y\| = 0$$

o que é ainda equivalente a dizer que se x, y forem dois vectores quaisquer de $\mathfrak{X}$ sendo $\|x\| = \|y\| = 1$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon$ quando $\left| \left\|\frac{x+y}{2}\right\| - 1 \right| < \delta_\varepsilon$.

Observando que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1$, o que acabamos de dizer é equivalente a afirmar que para cada $\varepsilon > 0$, existe δ_ε de tal modo que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta_\varepsilon$ então $\|x-y\| < \varepsilon$. Finalmente esta última forma é equivalente a afirmar que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| > \varepsilon$ então $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta_\varepsilon$. Tal facto motiva a definição que segue, que embora limitada a espaços de BANACH, poderia ser posta em um espaço normado.

DEFINIÇÃO 1. Diz-se que um espaço de BANACH $\mathfrak{X}$ é uniformemente convexo, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que se x e y forem dois vectores quaisquer de $\mathfrak{X}$ sendo $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| > \varepsilon$ então $\|x+y\| < 2 - \delta_\varepsilon$.

EXEMPLO. Todo espaço de HILBERT $\mathfrak{H}$ é como espaço de BANACH uniformemente convexo.

De facto, a norma induzida pelo produto interno de $\mathfrak{H}$ satisfaz a condição

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo par de vectores x e y de $\mathfrak{H}$. Em particular se tomarmos $\|x\| = \|y\| = 1$, obtem-se

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4$$

ou

$$\|x+y\|^2 = 4 - \|x-y\|^2 < 4 - \varepsilon^2$$

para $\|x-y\| > \varepsilon$. Daí resulta que tomando $0 < \varepsilon < 2$, vem

$$\|x+y\| < 2 - \delta_\varepsilon$$

sendo $\delta_\varepsilon = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$.

Nosso objectivo, agora, é provar que todo espaço de BANACH uniformemente convexo é reflexivo. Devemos provar que para cada forma linear φ do segundo dual $\mathfrak{X}^{**}$, existe um vector x_0 do espaço de partida $\mathfrak{X}$ tal que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda forma linear f pertencente ao dual $\mathfrak{X}^*$. Observemos que é suficiente provar este facto para as formas lineares reais φ pertencentes ao bidual $\mathfrak{X}^{**}$. Realmente, admitamos que tenhamos provado para as formas reais φ. Seja ψ uma forma linear complexa de $\mathfrak{X}^{**}$. Tem-se por um resultado conhecido, que $\psi(f) = \psi_1(f) - i\psi_1(if)$ sendo ψ_1 uma forma linear real de $\mathfrak{X}^{**}$. Supondo que a ψ_1 corresponda x_0 pertencente a $\mathfrak{X}$, tem-se $\psi_1(f) = f(x_0)$, $\psi_1(if) = if(x_0)$ e daí resulta que $\psi(f) = f(2x_0)$ e como a decomposição da ψ é única, é suficiente à ψ fazer corresponder $2x_0$. Conclui-se daí, que podemos realmente nos limitar as formas lineares reais, para o objectivo que temos em mente.

A demonstração do teorema principal se baseia essencialmente no corolário da proposição 1 do § 2 e nos dois lemas que seguem.

LEMA 1. *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de* BANACH *uniformemente convexo. Para cada* f *real pertencente a* $\mathfrak{X}^*$, *sendo* $\|f\| \neq 0$, *existe um e um só vector* x_0 *tal que* $\|x_0\| = 1$ *sendo* $f(x_0) = \|f\|$.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $\|f\| \neq 0$ é bastante supor que $\|f\| = 1$. Como $\|f\| = \sup \{|f(x)|;\ \|x\| = 1\}$, existe uma sequência $\{t_n\}$ de vectores de $\mathfrak{X}$, tal que $\|t_n\| = 1$ e $\lim\limits_{n \to \infty} |f(t_n)| = 1$. De modo equivalente, para cada $\varepsilon > 0$ existe um n_ε tal que $1 - \varepsilon < |f(t_n)| < 1 + \varepsilon$ para $n > n_\varepsilon$. Sabemos que $|f(t_n)| \leq \|f\| \cdot \|t_n\| = 1$ e por ser f uma forma linear real $|f(t_n)|$ tomará os valores $\pm f(t_n) = f(\pm t_n)$. Daí resulta que existe uma sucessão $\{x_n\}$ de vectores de $\mathfrak{X}$ tal que, $\|x_n\| = 1$ e $1 - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq 1$ para $n > n_\varepsilon$. Vamos provar que $\{x_n\}$ é uma sequência de CAUCHY e como $\mathfrak{X}^*$ é de BANACH será convergente. De facto, sendo $\mathfrak{X}$ uniformemente convexo, para cada $\varepsilon > 0$ existe um δ_ε tal que para quaisquer x e y de $\mathfrak{X}$ sendo $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x + y\| > 2 - \delta_\varepsilon$, tem-se $\|x - y\| < \varepsilon$. Considerando o ε anterior e o seu correspondente δ_ε, seja $n_\varepsilon = \dfrac{2}{\delta_\varepsilon}$. Logo pelo que vimos anteriormente, para $m, n > n_\varepsilon$, obtem-se $f(x_m + x_n) = f(x_m) + f(x_n) > 1 - \dfrac{1}{m} + 1 - \dfrac{1}{n} > 2 - \dfrac{2}{n_\varepsilon} = 2 - \delta_\varepsilon$ ou seja, $2 - \delta_\varepsilon < |f(x_m + x_n)| \leq \|f\|\ \|x_m + x_n\| = \|x_m + x_n\|$. Sendo $\|x_m\| = \|x_n\| = 1$, resulta, pois $\mathfrak{X}$ é uniformemente convexo, que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ para $m, n > n_\varepsilon$, o que prova ser $\{x_n\}$ uma sucessão de CAUCHY e portanto existe um x_0 em $\mathfrak{X}$ tal que $\lim x_n = x_0$. Sendo $\|\ \|$ uma aplicação contínua, conclui-se que $\|x_0\| = \lim \|x_n\|$ e portanto $\|x_0\| = 1$. Ainda mais tem-se

$$f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 1 = \|f\|.$$

Para completar a demonstração é suficiente provarmos a unicidade. Para tal, suponhamos que existisse x_1 em $\mathfrak{X}$, sendo $\|x_1\| = 1$, $f(x_1) = \|f\| = 1$ e que $x_1 \neq x_0$. Seja então $\varepsilon > 0$ tal que $\|x_1 - x_0\| > \varepsilon$ e como $\|x_1\| = \|x_0\| = 1$ e $\mathfrak{X}$ é uniformemente convexo, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\|x_1 + x_0\| < 2 - \delta_\varepsilon$, sendo portanto $\delta < 2$. Tem-se portanto

$$2 = f(x_1 + x_0) \leq |f(x_1 + x_0)| \leq$$
$$\leq \|f\| \cdot \|x_1 + x_0\| < 2 - \delta_\varepsilon$$

o que é absurdo, logo $x_0 = x_1$.

LEMA 2. *Seja $\mathfrak{X}$ um espaço de* BANACH *uniformemente convexo,* x, y *dois vectores de $\mathfrak{X}$ e* $f \neq 0$ *uma forma linear real de* $\mathfrak{X}^*$. *Se* $\|x\| = 1$, $\|y\| \leq 1$ *e* $f(x) = \|f\|$ *então para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$f(y) \leq (1 - \delta_\varepsilon) \|f\|.$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, dado um qualquer $\varepsilon > 0$, seja $\eta = \min(1/2, \varepsilon/2)$. Usando o facto de $\mathfrak{X}$ ser estritamente convexo, seja ζ_η o correspondente de η e ponhamos $\delta_\varepsilon = \min(\zeta_\eta, \eta)$. Vamos provar que um tal δ_ε satisfaz as condições do teorema. Observemos que não é restritivo supor que $0 < \varepsilon < 2$, daí obtém-se $0 < \delta_\varepsilon \leq \eta \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon < 2$ e dividamos a demonstração em duas etapas.

a) Suponhamos $0 \leq \|y\| \leq 1 - \eta$. Tem-se $f(y) \leq \|f\| \cdot \|y\| \leq \|f\|\ (1 - \eta) \leq (1 - \delta_\varepsilon) \|f\|$ e o lema é verdadeiro.

b) Suponhamos $1 - \eta < \|y\| \leq 1$. Ponhamos $z = \dfrac{y}{\|y\|}$. Sendo $\|x-y\| \geqq \varepsilon$, obtém-se

$$\|x - z\| \geqq \|x - y\| - \|y - z\| \geqq \varepsilon - \\ - \left\| y - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

ou

$$\|x - z\| \geqq \varepsilon - (1 - \|y\|) > \varepsilon - \eta \geqq \eta .$$

Daí resulta que $\|x\| = \|z\| = 1$ e $\|x - z\| \geqq \eta$ e por ser $\mathfrak{X}$ uniformemente convexo, obtém-se que $\|x + z\| \leqq 2 - \zeta_\eta$ e portanto, para $f(x) = \|f\|$, conclui-se que

$$f(z) = f(z + x) - f(x) \leqq \|f\| \, \|z + x\| - \|f\|$$

ou

$$f(z) \leqq \|f\| (2 - \zeta_\eta) - \|f\| = \\ = \|f\| (1 - \zeta_\eta) \leqq (1 - \delta_\varepsilon) \|f\| .$$

Resultando, finalmente, que

$$f(y) = \|y\| f(z) \leqq \|y\| (1 - \delta_\varepsilon) \|f\| \leqq \\ \leqq (1 - \delta_\varepsilon) \|f\|$$

o que prova completamente o lema.

TEOREMA 1. *Todo espaço de* BANACH $\mathfrak{X}$ *uniformemente convexo é reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Devemos provar que para cada forma linear $\varphi \in \mathfrak{X}^{**}$, existe um vector $x_0 \in \mathfrak{X}$ tal que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda forma linear $f \in \mathfrak{X}^*$. Pela observação que fizemos sobre as formas lineares reais e complexas é suficiente considerar as formas lineares $\varphi \in \mathfrak{X}^{**}$ que sejam reais. Seja, portanto, φ uma forma linear real de $\mathfrak{X}^{**}$ e vamos supor que $\|\varphi\| = 1$. Para uma tal φ existe uma sequência $\{f_n\}$, $f_n \in \mathfrak{X}^*$, tal que

$$(1) \quad \|f_n\| = 1 \ \text{ e } \ \|\varphi\| = 1 \geqq \varphi(f_n) > 1 - \frac{1}{n}$$

sendo os f_n reais para $n = 1, 2, \cdots$. Pelo lema 1, para cada n existe uma sequência $\{x_i^n\}_{i \in N}$ tal que $\|x_i^n\| = 1$, para $i = 1, 2, \cdots$, convergente para x_0^n e $f_n(x_0^n) = \|f_n\|$ e além disso $\|x_0^n\| = 1$ para todo n. Como para cada n faz-se corresponder um único $x_n = x_0^n$, conclui-se que existe uma sequência $\{x_n\}$ de elementos de $\mathfrak{X}$ satisfazendo a seguinte condição:

$$(2) \quad \|x_n\| = 1 \ \text{ e } \ f(x_n) = \|f_n\| = 1 .$$

Nossa próxima etapa, será demonstrar que esta sequência $\{x_n\}$ é de CAUCHY e que $x_0 = \lim x_n$ é tal que $\varphi(f) = f(x_0)$ para toda $f \in \mathfrak{X}$.

Sabemos, pelo corolário da proposição 1 do § 2, que dada φ existe uma função de conjunto β aditiva e real positiva definida em todas as partes da esfera unitária S de $\mathfrak{X}$ e tal que

$$(3) \qquad 1 = \|\varphi\| = V(\beta, S) = \beta(S)$$

e

$$(4) \quad \varphi(f) = \int_S f(x) \, d\beta(x) \ \text{ para toda } f \in \mathfrak{X}^* .$$

Ponhamos $S_{n,\varepsilon} = \{x \in S ; \|x - x_n\| < \varepsilon\}$, para cada $\varepsilon > 0$ e usando (4) obtém-se

$$\varphi(f_n) = \int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x) + \\ + \int_{S - S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x)$$

e por (1) podemos escrever

$$(5) \quad 1 - \frac{1}{n} < \int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x) + \\ + \int_{S - S_{n,\varepsilon}} f_n(x) \, d\beta(x)$$

Se $x \in S - S_{n,\varepsilon}$, tem-se $\|x - x_n\| \geqq \varepsilon$ e portanto, sendo $\|x_n\| = 1$, $\|x\| \leqq 1$, $\|x - x_n\| \geqq \varepsilon$, $f_n(x_n) = \|f_n\| = 1$, o lema 2 nos diz que

$$(6) \qquad f_n(x) \leqq (1 - \delta_\varepsilon)$$

sendo δ_ε independente de n.

Resulta que a (5), em vista de (6), toma a forma seguinte:

$$1-\frac{1}{n}<\int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x)\,d\beta(x)+$$
$$+(1-\delta_\varepsilon)\int_{S-S_{n,\varepsilon}} d\beta(x)$$

e sendo β positiva, obtém-se

$$1-\frac{1}{n}<\int_{S_{n,\varepsilon}} f_n(x)\,d\beta(x)+$$
$$+(1-\delta_\varepsilon)\beta(S-S_{n,\varepsilon}).$$

Sendo $x\in S_{n,\varepsilon}\subset S$, $\|x\|\leq 1$ portanto, $f_n(x)\leq|f_n(x)|\leq\|f_n\|\cdot\|x\|=1$ e finalmente

$$1-\frac{1}{n}<\beta(S_{n,\varepsilon})+(1-\delta_\varepsilon)\beta(S-S_{n,\varepsilon}).$$

Por (1) concluíu-se que

$$(7)\qquad \beta(S-S_{n,\varepsilon})\leq\frac{1}{n\,\delta_\varepsilon}$$

para $n=1,2,\cdots$.

Seja $n_\varepsilon>0$ tal que $n_\varepsilon\delta_\varepsilon>2$ e vamos provar que para $m,n>n_\varepsilon$, $S_{m,\varepsilon}\cap S_{n,\varepsilon}$ é não vazia. De facto, sendo

$$\beta(S)=1,\ \beta(S-S_{m,\varepsilon})<\frac{1}{2},$$
$$\beta(S-S_{n,\varepsilon})<\frac{1}{2}$$

então

$$\beta(S_{n,\varepsilon}\cap S_{m,\varepsilon})=\beta[S-[(S-S_{n,\varepsilon})\cup$$
$$\cup(S-S_{m,\varepsilon})]]\geq\beta(S)-[\beta(S-S_{n,\varepsilon}+$$
$$+\beta(S-S_{m,\varepsilon})]>0.$$

Portanto $S_{n,\varepsilon}\cap S_{m,\varepsilon}$ diferente do vazio e portanto se $x\in S_{n,\varepsilon}\cap S_{m,\varepsilon}$ tem-se

$$\|x_m-x_n\|\leq\|x-x_m\|+\|x-x_n\|<2\varepsilon$$

o que prova ser $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy e seja $x_0=\lim x_n$. Vamos provar que $\varphi(f)=f(x_0)$ para todo $f\in\mathfrak{X}^*$.

Definindo $S_{0,\varepsilon}=\{x\in S\,;\,\|x-x_0\|<\varepsilon\}$, conclui-se que se x_n for tal que

$$\|x_n-x_0\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

então $S_{0,\varepsilon}\supset S_{n,\varepsilon/2}$, pois se $x\in S_{n,\varepsilon/2}$ vem $\|x-x_0\|\leq\|x-x_n\|+\|x_n-x_0\|<\varepsilon$ e $x\in S_{0,\varepsilon}$. Portanto $S-S_{0,\varepsilon}\subset S-S_{n,\varepsilon/2}$ e para $n>n_{\varepsilon/2}$, pela (7), vem

$$0\leq\beta(S-S_{0,\varepsilon})\leq\beta(S-S_{n,\varepsilon/2})\leq\frac{1}{n\,\delta_{\varepsilon/2}}$$

de onde resulta que

$$(8)\qquad \beta(S-S_{0,\varepsilon})=0.$$

Consideremos, então, $\varphi(f)-f(x_0)$, onde f é uma qualquer forma linear de $\mathfrak{X}^*$. Tem-se

$$\varphi(f)-f(x_0)=\int_S f(x)\,d\beta(x)-$$
$$-\int_S f(x_0)\,d\beta(x)$$

pois $\beta(S)=1$. Sendo β não negativa, por (8) podemos escrever:

$$|\varphi(f)-f(x_0)|\leq\int_S|f(x)-f(x_0)|\,d\beta(S)=$$
$$=\int_{S_{0,\varepsilon}}|f(x)-f(x_0)|\,d\beta(x)\leq$$
$$\leq\|f\|\int_{S_{0,\varepsilon}}\|x-x_0\|\,d\beta(x)<$$
$$<\|f\|\,\varepsilon\int_{S_{0,\varepsilon}}d\beta(x),\ \text{pois se}$$
$$x\in S_{0,\varepsilon},\ \|x-x_0\|<\varepsilon.$$

Logo

$$\|\varphi(f)-f(x_0)\|<\|f\|\,\beta(S_{0,\varepsilon})\,\varepsilon$$

para cada $\varepsilon>0$ que prova ser

$$\varphi(f)=f(x_0)$$

isto é, $\mathfrak{X}$ é reflexivo.

Anteriormente, veja o exemplo após a definição 1 deste parágrafo, provamos que todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach uniformemente convexo. Resulta daí e do teorema 1, que todo espaço de Hilbert é como espaço de Banach reflexivo.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÂTICA

REUNIÕES CIENTÍFICAS

União Matemática Argentina — De 22 a 27 de Setembro, realizaram-se, nas Universidades de Buenos Aires e de La Plata, várias sessões matemáticas promovidas pela União Matemática Argentina, como parte das comemorações do sesquicentenário da Revolução de Maio. Participaram, a convite, 52 matemáticos de Argentina, Brasil, Chile, Estados Unidos, França, Hungria, México, Uruguai e Venezuela. As sessões consistiram de uma série de conferências a cargo dos Profs. S. Lefschetz, C. Ehresmann, S Eilenberg, P. Alexits, E. Grosswald, J. Adem e A. P. Calderon, bem como de 38 comunicações. Foram os seguintes os convidados do Brasil que participaram das sessões e suas respectivas comunicações:

Prof. Alfredo Pereira Gomes (do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife), «Fórmula de Plancherel e grupos de Lie».

Prof. Chaim Samuel Hönig (da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo), «Classificação dos grupos sem torção».

Prof. Charles Ehresmann (da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e da Sorbonne, Paris), «Construction des foncteurs type».

Prof. Élon Lages Lima (do IMPA, Rio de Janeiro), «A teoria dos espectros em Topologia».

Prof. José Cardoso Morgado (do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife), «Sobre os automorfismos de reticulado dos operadores de fecho dum reticulado completo».

Prof. Kuo Tsai Chen (do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos), «Formal differential equations».

Prof. Leopoldo Nachbin (do IMPA, Rio de Janeiro), «Álgebras de operadores e de funções contínuas».

Prof. Mario Schenberg (da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo), «On the Clifford and Jordan-Wigner algebras».

Terceiro Colóquio Brasileiro de Matemática — De 2 a 15 de Julho de 1961, realizou-se o Terceiro Colóquio Brasileiro de Matemática, no Instituto de Matemática da Universidade do Ceará, em Fortaleza.

A organização e a orientação geral do Colóquio ficaram a cargo do IMPA. O Director do IMPA nomeou uma Comissão Organizadora, por Portaria n.° 13, de 27 de Outubro de 1960, cuja constituição, homologada pelo CD do CNPq., conforme processo n.° 26/61, foi a seguinte:

Prof. Francisco Silva Cavalcante (Ceará).
Prof. Alfredo Pereira Gomes (Pernambuco).
Prof Rubens Gouveia Lintz (Baía).
Prof. Elon Lages Lima (Guanabara).
Prof. Ghaim Samuel Hönig (São Paulo).
Prof. António Rodrigues (Rio Grande do Sul).

Os demais membros da Comissão Organizadora indicaram o Prof. Elon Lages Lima, do IMPA, para Coordenador da mesma.

As actividades do Colóquio constaram de quatro cursos de seis horas cada, doze conferências de uma hora cada, quatro exposições sobre o ensino da Matemática nas universidades e uma sessão para comunicações breve de novos resultados de pesquisa além de duas sessões solenes, de abertura e encerramento.

O Colóquio foi patrocinado financeiramente pelo Conselho Nacional de Pesquisas, pela CAPES, pela Universidade do Ceará e pela Universidade de São Paulo. Participaram pouco mais de 100 pessoas dos seguintes Estados: Pará, Ceará, Paraíba, Pernambuco, Baía, Minas Gerais, Guanabara, São Paulo, Paraná e Rio Grande do Sul.

Entre os participantes, figuraram os seguintes matemáticos estrangeiros: Dov Tamari (Israel), Heinz Helfenstein (Canadá), Harold I. Levine (Estados Unidos), Jean François Treves (Estados Unidos), Jean Dieudonné (França), Mischa Cotlar (Argentina), Paullete Libemann (França) e Warren Ambrose (Estados Unidos).

Conferência Inter-Americana sobre Educação Matemática De 4 a 9 de Dezembro de 1961, será realizada em Bogotá, Colômbia, a primeira Conferência Inter-Americana sobre Educação Matemática, sob os auspícios da Comissão Internacional sobre Instrução Matemática da União Matemática Internacional, e da Organização dos Estados Americanos. A Comissão Organizadora da Conferência é presidida pelo Prof. Marshall H. Stone, como representante da União Matemática Internacional, sendo constituída pelos Profs. Guillermo Torres (México), Howard F. Fehr

(Estados Unidos), José Babini (Argentina), Leopoldo Nachbin (Brasil) e Marcel Alonso (Cuba). A realização da Conferência será financiada pela Fundação Ford, pela Fundação Rockefeller, pela UNESCO, pela Organização dos Estados Americanos, pela USA National Science Foundation e pelo Governo da Colômbia. Os temas da Conferência deverão versar sobre a educação matemática nas escolas secundárias e nas universidades, visando atingir conclusões acerca da forma de se adaptar o ensino actual da Matemática às necessidades do progresso científico e tecnológico. As exposições a serem realizadas estarão a cargo de conferencistas do continente americano, bem como de alguns especialistas da Europa. A Comissão Organizadora convidou os seguintes professores de Matemática do Brasil, a fim de participarem da Conferência: Alfredo Pereira Gomes (da Universidade do Recife) e Omar Catunda (da Universidade de São Paulo). Quaisquer pedidos de informação deverão ser dirigidos ao Secretário da Comissão Organizadora, Prof. Howard F. Fehr, Teachers College, Columbia University, New York 27, NY, USA.

SEMINÁRIOS

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro — Tiveram lugar os seguintes seminários:

1) «Análise Funcional», orientado pelo Prof. Leopoldo Nachbin. Foram feitas exposições pelos Profs. Jorge Alberto Barroso, Leopoldo Nachbin e Silvio Machado sobre funções de Baire, representação de formas lineares por integrais, desigualdades de Holder e Minkowski e generalizações, reticulados vectoriais.

2) «Tópicos de Variedades Diferenciáveis», orientado pelo Prof. Élon Lima. Foram feitas exposições pelos Profs. Gervásio Colares, Ruy Britto, Isolda Acioli, Élon Lima e Nathan M. dos Santos, sobre imersões, pontos estacionários e variedades de dimensão 1.

3) Teve prosseguimento o seminário «Geometria e Equações Diferenciais», com exposições dos Profs. Ruy Britto, Milton Martins, Eliana Rocha e Maurício Peixoto, sobre pontos conjugados em geodésicas, método de Wazewski, generalização do teorema de Poincaré-Bendixon e conjuntos minimais.

Instituto de Matemática e Física, Universidade da Baía — Foram realizados os seguintes seminários:

1) «Teoria da Medida e Integração», pelo Prof. Rubens G. Lintz.

2) «Variedades Diferenciáveis» pela Prof. Arlete C. Lima.

3) «Topologia dos Espaços Métricos», pelo Prof. Ramakrishna Bagavan dos Santos.

4) «Introdução à Teoria de Galois», pelos Profs. Ramakrishna Bagavan, Martha Dantas e Nilza Medrado.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Tiveram início em Agosto os seminários:

1) «Classes Características», com exposição dos Profs. Elon Lages Lima e Oscar Valdivia Gutiérrez. Assunto: Classes de Stiefel-Whitney, aplicações, classes de Chern e de Pontrjagin, cobordismo.

2) «Equações Diferenciais Ordinárias», orientado pelo Prof. Maurício Matos Peixoto; as exposições estão sendo feitas por: Augusto José Mauricio Wanderley, Emilio Ysla Cruzado, Hilton Vieira, Junia Borges Botelho, Maria Lucia Alvarenga, Mario de Carvalho Matos e Mauro Bianchini. Assunto: existência e unicidade de soluções, sistemas de equações, sistemas lineares, singularidades de um sistema autónomo.

3) «Análise», orientado pelo Prof. Leopoldo Nachbin e com exposições de Adarcy Maria Penna Costa, Celina Bittencourt Marques, Gilda Laroque, Guilherme Marcos de la Penha, Maria Helena Lanat Pedreira de Cerqueira, Maria Lucia Alvarenga, Mario de Carvalho Matos, Mario Tasso Ribeiro Serra e Mauro Bianchini. Assunto: topologia e aplicações diferenciáveis do R^n, integração, séries e integrais de Fourier, funções analíticas.

4) «Teoria dos Jogos», orientado pelo Prof. Mauricio Matos Peixoto e com exposições de Jack Schechtman e Jacob Palis Junior. Assunto: jogos rectangulares, jogos com uma infinidade de estratégias, teoria de von Neumann.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro. Desde o princípio de 1961, acha-se funcionando, no Serviço Nacional de Recenseamento, do IBGE, a Avenida Pasteur 404, Rio de Janeiro, Guanabara, um computador electrónico UNIVAC 1105, o qual poderá, igualmente, ser empregado em trabalhos de pesquisa científica, na dependência de entendimentos com a superintendência do citado órgão.

NOTÍCIAS DIVERSAS

Instituto de Matemática e Física, Universidade da Baía — Foi criado na Universidade da Baía, em Salvador, um Instituto de Matemática e Física directamente subordinado à Reitoria, o qual está funcionando à Avenida Joana Angélica 183, Salvador, Baía.

Instituto de Pesquisas Matemáticas, Universidade de São Paulo — Na Universidade de São Paulo, foi criado um Instituto de Pesquisas Matemáticas, órgão subordinado directamente à Reitoria. O referido Instituto deverá funcionar, em futuro próximo, em sede própria localizada na Cidade Universitária, na cidade de São Paulo.

Universidade de Brasília — Nos dias 28 e 29 de Outubro, a Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência promoveu uma mesa redonda sobre a «Organisação da Universidade de Brasília», realizada no Centro Brasileiro de Pesquisas Educacionais, Rio de Janeiro, Guanabara. Segundo o projecto discutido, o ensino da Matemática na Universidade de Brasília ficará concentrado num Institute Central de Matemática, o qual se encarregará da formação dos matemáticos profissionais e ministrará todos os cursos de Matemática que interessem ao pessoal de outros Institutos e Faculdades, tais como os que dizem respeito à formação dos professores de ensino secundário, dos engenheiros, dos físicos, dos economistas, etc. Participaram do sector matemático da mesa redonda, a convite, os profs. Alfredo Pereira Gomes e Leopoldo Nachbin.

Academia Brasileira de Ciências — No dia 8 de Novembro, realizou-se a sessão inaugural da sede própria da Academia Brasileira de Ciências, situada no Edifício António Severo, Rio de Janeiro, Guanabara.

Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro — Desde fins de Junho de 1960, encontra-se funcionando na sede Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Guanabara, um Centro de Processamento de Dados, contando com um computador electrónico digital de porte médio, modelo Burroughs 205. A aquisição desse computador foi possível graças à cooperação financeira da Comissão Nacional de Energia Nuclear, da Companhia Siderúrgica Nacional, do Conselho Nacional de Pesquisas e do Ministério da Guerra. O referido Centro está oferecendo uma série de cursos de Programação para turmas de doze alunos, com duração de sete semanas, sendo reiniciados de dois em dois meses. O currículo desses cursos inclui: 1) Informação Geral. 2) Programação e Codificação. 3) Métodos de Cálculo. 4) Operação do Computador. 5) Aplicações. Os pedidos de informação devem ser dirigidos ao Centro de Processsmento de Dados, Pontifícia Universidade Católica, Rua Marquês de São Vicente 209, Rio de Janeiro, Guanabara.

Grupo Executivo para Aplicação de Computadores Electrónicos — O GEACE, órgão do Conselho do Desenvolvimento, que funciona à Rua São José 90, 13.º andar, Rio de Janeiro, Guanabara, foi instalado em Junho de 1959, tendo por objectivos principais a implantação de computadores no Brasil, a orientação da instalação de Centros de Processamento de Dados e o estímulo à fabricação de componentes de computadores. O GEACE possui um arquivo referente aos computadores disponíveis comercialmente, mantém uma biblioteca especializada e dispõe de Informações sobre as actividades e a organização dos Centros de Processamentos de Dados do mundo inteiro. O GEACE tem, também, promovido vários cursos.

Primeiro Simpósio Brasileiro sobre Computadores Electrónicos — O Conselho Nacional de Pesquisas e o Grupo Executivo para Aplicação de Computadores Electrónicos (GEACE), órgão do Conselho do Desenvolvimento, com o apoio de firmas fabricantes e utilizadoras de computadores, farão realizar, durante o mês de Abril de 1961, um simpósio nacional sobre computadores electrónicos, a ter lugar na cidade do Rio de Janeiro. O programa previsto consiste de uma exposição e de visitas, entre 2 e 9 de Abril, além de conferências nos dias 6, 7 e 8 de Abril. A exposição estará a cargo de fabricantes e utilizadores que estão apoiando a realização do simpósio, devendo haver uma exibição de equipamento. Prevêm-se visitas às instalações de computadores em vários dos nossos Centros de Processamento de Dados. Haverá conferências, tanto para técnicos especializados como para o público em geral, a cargo de conferencistas nacionais e estrangeiros. Os temas deverão versar sobre: 1) Equipamento. 2) Programação. 3) Aplicações. 4) Problemas de Implantação. A Comissão Organizadora dessa reunião prestará maiores esclarecimentos, atendendo a pedidos de informação dirigidos ao GEACE, Rua de São José, 90, 13.º andar, Rio de Janeiro, Guanabara.

Simpósio Internacional sobre Equações Diferenciais — De 31 de Julho a 4 de Agosto último, realizou-se, em Colorado Springs, USA, um Simpósio Internacional sobre Equações Diferenciais.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame Final — (Cursos de Biológicas, Geológicas, Prof. Adjuntos) — 6-10-1961.

5378 — Dada a função $w = y^2 y^2 e^{x/2} + z^2 x^2 e^{y/2} + x^2 y^2 e^{z/2}$, calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$.

5379 — Determine os máximos e mínimos da função

$$z = x y^2 (3x + 6y - 2).$$

5380 — Efectue a condensação e determine a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

5381 — Faça a contagem e separação das raízes da equação

$$x^3 = 2x + 5$$

e calcule aproximadamente uma delas pelo método de Newton.

5382 — No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos qual a probabilidade de obter uma soma de pontos

a) Pelo menos igual a 3?

b) Maior do que 3?

5383 — Propriedades da distribuição normal. Num exame observaram-se os seguintes resultados:

40 °/。 de notas inferiores a 10.
50 °/。 de notas entre 10 e 15.
10 °/。 de notas superiores a 15.

Admitindo que as notas seguem a distribuição normal, determine a média e o desvio padrão.

Enunciados dos n.os 5378 a 5383 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.ª Prova Prática de Informação — 29-5-1961.

I

5384 — 1) Estudar a função $f(x) = \dfrac{2x^3}{(x-2)^2}$.

2) Desenvolver em série de potências inteiras de x a função

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

indicando o intervalo onde é válido o desenvolvimento.

3) Calcular

$$\lim_{x=\infty} \left(\cos\frac{a}{x} + m \operatorname{sen}\frac{a}{x}\right)^x.$$

R: 1. *a*) *Domínio* $]-\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$.

b) *Ponto de intersecção com os eixos:* P $(0, 0)$.

c) *Não apresenta simetrias nem é periódica.*

d) *Extremos e intervalos de monotonia*

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-6)}{(x-2)^3} \qquad \begin{array}{l} f'(x) \geqslant 0 \ \textit{em} \ [6, +\infty[\ \textit{e} \ ]-\infty, 2[\\ f'(x) \leqslant 0 \ \textit{em} \ ]2, 6] \\ f'(x) = 0 \ \textit{para} \ x = 0 \ \textit{e} \ x = 6 \end{array}$$

e apenas é extremante $x = 6$ *(minimizante).*

e) *Convexidade e concavidade*

$$f''(x) = \frac{48x}{(x-2)^4}$$

e assim $f(x)$ *é convexa em* $[0, +2[$ *e* $]2, +\infty[$ *e côncava em* $]-\infty, 0]$. *Em* $x = 0$ *tem um ponto de inflexão.*

f) *Assíntotas:*

Como $\lim\limits_{x=2} \dfrac{2x^3}{(x-2)^2} = +\infty$ *existe a assíntota* $X = 2$;

$\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{2x^3}{(x-2)^2} = \infty$: *não existem assíntotas paralelas* *ao eixo dos* y y. *Dado que* $f(x)=2x+8+\dfrac{24x-32}{(x-2)^2}$ *existe a assintota obliqua* $Y=2X+8$.

2. $$f'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}x^{2n}\ \textit{para}\ |x|<1.$$

Então $$f(x)=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ *para* $|x|<1$.

3. *É uma indeterminação da forma* 1^∞. *Calcule-se então*

$$\lim_{x=\infty}x\log\left(\cos\frac{a}{x}+m\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{\log\left(\cos\dfrac{a}{x}+m\,\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{a}{x^2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{x}-\dfrac{ma}{x^2}\cos\dfrac{a}{x}}{\cos\dfrac{a}{x}+m\,\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{a\,\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{x}+m\,a\cos\dfrac{a}{x}}{\cos\dfrac{a}{x}+m\,\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{x}}=m\,a$$

isto é, $\displaystyle\lim_{x=\infty}\left(\cos\frac{a}{x}+m\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{x}\right)^x=e^{ma}$.

II

5385 — 1) Mostre que a função

$$F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$$

verifica a equação $F'_x+F'_y+F'_z=0$ qualquer que seja F.

2) Calcular

$$\int_0^1\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

3) Determine os parâmetros reais a, b e c, por forma que o polinómio $f(z)=z^4-2z^3+az^2+bz+c$ tenha a raíz complexa i e uma raíz real dupla. Quais são as raízes de $f(z)$?

R: 1) *Fazendo* $u=x-y$, $v=y-z$, $w=z-x$, *vem* $F'_x=f'_u-f'_w$, $F'_y=-f'_u+f'_v$, $F'_z=-f'_v+f'_w$, *donde* $F'_x+F'_y+F'_z=0$.

2) *Fazendo* $x=t^6$, *vem*

$$\int_0^1\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=6\int_0^1\frac{t^6}{1+t^2}\,dt=$$

$$=6\int_0^1\left(t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\int_0^1t^4\,dt-$$

$$-6\int_0^1t^2\,dt+6\int_0^1dt-6\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{6}{5}[t^5]_0^1-2[t^3]_0^1+6[t]_0^1-6[\mathit{arctg}\,t]_0^1=$$

$$=\frac{6}{5}-2+6-6\frac{\pi}{4}=\frac{26}{5}-\frac{3\pi}{2}.$$

3) *Se* f(z) *tem a raiz* i *também tem a raiz* $-i$. *A fórmula de Girard* $\dfrac{p_1}{p_0}=\Sigma r_i$ *dá* $2=i-i+r_1+r_1\Rightarrow r_1=1$. *Portanto,*

$$\begin{cases}f(i)=0\\f(1)=0\end{cases}\begin{cases}(1-a+c)+(2+b)i=0\\a+b+c-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-a+c=0\\2+b=0\\a+b+c-1=0\end{cases}\begin{cases}b=-2\\1-a+c=0\\a+c-3=0\end{cases}\begin{cases}b=-2\\c=1\\a=2\end{cases}.$$

As raízes são $i,-i,1$ (*dupla*).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 27-6-1961.

I

5386 — 1) Deduza a fórmula de Taylor para uma função de uma variável.

2) O polinómio $f(z)=24z^5+34z^4+39z^3+36z^2+15z+2$ tem raízes positivas? Porquê? Calcule as suas raízes, sabendo que as raízes reais são racionais (não é necessário calcular os limites excedente e deficiente das raízes). Apresente a decomposição de $f(z)$ em factores primos.

R: 2) *As raízes racionais são da forma* p/q *em que* $p=\pm1,\pm2$ *e* $q=1,2,3,4,6,8,12,24$. *Como*

$f(z)$ *não tem raízes positivas, as raízes racionais encontram-se entre os números:* $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, -2, -\frac{2}{3}$.

A aplicação das regras de exclusão de Newton *permite aproveitar apenas os números:* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -2, -\frac{2}{3}$. *A regra de* Ruffini *indica, finalmente, que as raízes racionais são:* $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}$. *As outras duas raízes são imaginárias:* i e $-i$.

$$f(z) = 24\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)(z^2+1).$$

II

5387 — 3) Quando se diz que $F(x,y)$ é diferenciável em $P(a,b)$? Enuncie e demonstre uma condição suficiente de diferenciabilidade.

Mostre que a função $g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ é homogénea e verifique o teorema de Euler.

4) Mostre que toda a função contínua em $[a,b]$ é integrável no sentido de Riemann, nesse intervalo. Sendo $g(x)$ contínua em $[a,b]$, prove que $\int_a^b g(x)\,dx = g(c)(b-a)$ $(a \leqslant c \leqslant b)$.

R: 3) *A função é homogénea de grau zero pois* $g\left(\frac{tx+ty}{tx-ty}\right) = t^0 g\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$. *Como* $g'_x = g'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}$ *e* $g'_y = g'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}$ *vem* $x g'_x + y g'_y = 0$, *que é a verificação do teorema de* Euler.

III

5388 — 5) Dada a tabela

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	0	1	a

, determine a por forma que o polinómio interpolador seja do terceiro grau.

Sem achar o polinómio interpolador, calcule $y(-2)$ e $y(4)$.

6) Defina base de um espaço vectorial e prove que em R^n qualquer conjunto de n vectores independentes constitue uma base.

Deduza a regra de Cramer e utilize-a para resolver o sistema de n equações a n incógnitas $AX = A^j + A^k$ em que A^j e A^k são as colunas j e k da matriz A regular.

Utilize a teoria dos sistemas homogéneos para escrever as equações normais da recta $r \equiv \begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+z-1=0. \end{cases}$

Qual deverá ser o valor de a para que a recta seja perpendicular ao eixo Oy?

R: 5) *Construindo a tabela de diferenças vem*

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-1	2	-1	0	2	$a-6$
0	1	-1	2	$a-4$	
1	0	1	$a-2$		
2	1	$a-1$			
3	a				

Para que o polinómio interpolador seja do terceiro grau é preciso que $\Delta^4 y(-1) = 0$, *ou seja* $a = 6$.

Para $a = 6$ *vem* $y(4) = 6+5+4+2 = 17$ *e* $y(-2) = 1$.

6) *A solução do sistema* $AX = A^j + A^k$ *é o vector* X' *de componentes* $x'_r = 0$ $(r \neq j, k)$, $x' = 1$, $x'_k = 1$.

Para escrever as equações normais de r *escolha-se uma solução do sistema, por exemplo* $(0,-1,1)$ *e escreva-se o sistema na forma* $\begin{cases} ax+(y+1)+(z-1)=0 \\ x+(z-1)=0 \end{cases}$ *(sistema homogéneo).*

Para tal sistema é $\dfrac{x}{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}} = \dfrac{y+1}{\begin{vmatrix}1&a\\1&1\end{vmatrix}} = \dfrac{z-1}{\begin{vmatrix}a&1\\1&0\end{vmatrix}}$ *ou* $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1-a} = \frac{z-1}{-1}$, *que são as equações normais de* r.

Para que $r \perp Oy$ *deverá ser* $1-a=0$ *ou* $a=1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 30-6-1961.

I

5389 — 1) Mostre que $f(x)$ se desenvolve pela série de Taylor em qualquer intervalo $[a, a \pm k]$ onde as suas derivadas sejam globalmente limitadas. Prove também que toda a série inteira em x é série de Mac Laurin da sua própria soma.

2) Prove que é condição necessária e suficiente para que a seja zero de ordem n de $g(x)$ que esta função se possa escrever na forma $g(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, sendo $\varphi(x)$ uma função contínua que não se anula para $x = a$.

Separe os zeros do polinómio $2x^3-15x^2+36x+1$, utilizando a sucessão de ROLLE.

R: 2) *Utilizando o método de* NEWTON, *fàcilmente se calculam os limites excedente e deficiente das raízes do polinómio:* $L=3$ e $l=-1$. *Os zeros da primeira derivada são* $x_1'=2$ e $x_2'=3$ *e, construindo a sucessão de* ROLLE $\left|\begin{array}{c|c|c} -1 & 2 & 3 \\ \hline - & + & + \end{array}\right|$, *verifica-se que existe um zero do polinómio em* $[-1,2]$.

II

5390 — 3) Diga em que condições a equação $F(x,y)=0$ define uma função implícita $y(x)$ na vizinhança de $P(a,b)$. Utilize a regra de derivação das funções compostas para deduzir a expressão de $y'(x)$ e $y''(x)$.

4) Deduza a desigualdade de SCHWARTZ e a fórmula fundamental do cálculo integral. Utilize esta para calcular $\int_1^2 x^2 \log^2 x\, dx$.

R: 4)

$$\int_1^2 x^2 \log^2 x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 x^2 \log x\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\, dx\right\} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 + \frac{2}{9}\int_1^2 x^2\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\log^2 x\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^2 + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\log^2 2 - \frac{16}{9}\log 2 + \frac{14}{27}$$

III

5391 — 5) Dados os pares de valores (x_i, y_i), $(i=0,1,\cdots n)$, em que os valores de x estão em progressão aritmética, diga como procede para fazer uma interpolação com a fórmula de LAGRANGE, supondo que dispõe de tabelas de coeficientes Lagrangianos (não efectue demonstrações).

6) Quando se diz que p filas paralelas de uma matriz são independentes? Se, numa dada matriz, o número máximo de linhas independentes é r e o número máximo de colunas independentes é s prove que $r=s$.

Qual é o valor dos menores de ordem superior a r numa matriz de característica r? Porquê?

Considere o sistema possível $AX=B$ e seja X_0 uma solução. Prove que todas as soluções deste sistema são da forma $X=X_0+Y$ em que Y é solução de $AY=0$.

Discuta o sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ x-y+z&=1 \\ 3x+y+3z&=a \\ 5x+3y+5z&=5 \end{aligned}$$

por meio da teoria dos determinantes. Interprete geomètricamente a discussão.

R: 6) *A matriz do sistema é* $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

e é fácil ver que $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$ *é determinante principal. Construindo os determinantes característicos*

$$\Delta_3'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}=6-2a \quad e \quad \Delta_4'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0$$

o sistema proposto será possível quando $6-2a=0$ *ou* $a=3$ *e impossível quando* $a\neq 3$.

A interpretação geométrica e simples. Quando o sistema é possível os planos representados pelas 3.ª e 4.ª equações passam pela recta $r\equiv\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$. *Quando o sistema é impossível, o plano representado pela 3.ª equação é paralelo à recta* r *e o plano representado pela 4.ª equação passa por* r.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova Prática — 12-7-61.

5392 — 1) Estude a natureza da série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{x^n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

R: *Como* $\lim\limits_{n=\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{x^{n+1}}\log\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{x^n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right|=\dfrac{1}{|x|}$,

a série é absolutamente convergente quando $|x|>1$ *e divergente quando* $|x|<1$. Para $x=1$ *tem-se a série* $\sum_1^\infty \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *que é divergente, e para* $y=-1$ *vem a série alternada decrescente* $\sum(-1)^n$

$log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *portanto convergente. A série é uniformemente convergente em* $]-\infty,-1]$ e $[r,+\infty[$ $(r>1)$.

2) Dada a função $f(x)=e^{ax}\log(e+x)$, calcule a por forma que $f(x)$ tenha um extremo para $x=0$. Indique a natureza desse extremo.

Averigue se a imagem de $f(x)$ admite assíntotas.

R: *Como* $f'(x)=e^{ax}\left[a\log(e+x)+\frac{1}{e+x}\right]$, *a condição* $f'(0)=0$ *implica* $a=-1/e$. *Calculando* $f''(x)$, *vem* $f''(0)<0$, *o que indica que* $x=0$ *é um maximizante.*

$$\lim_{x=-e} f(x)=-\infty \quad e \quad \lim_{x=+\infty} f(x)=\lim_{x=+\infty}\frac{\log(e+x)}{e^{\frac{1}{e}x}}=$$

$$=\lim_{x=+\infty} e\,\frac{e^{-\frac{1}{e}x}}{e+x}=0:\ X=-e \ \text{e}\ Y=0$$ *são pois assíntotas. Não há assíntotas obliquas.*

3) Calcule $P\,x\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

R: $$P\,x\,log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=P\,x\,log(x-1)-$$

$$-P\,x\,log(x+1)=\frac{x^2}{2}log(x-1)-\frac{1}{2}P\frac{x^2}{x-1}-$$

$$-\frac{x^2}{2}log(x+1)+\frac{1}{2}P\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2}{2}log(x-1)-$$

$$-\frac{1}{2}P\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{x^2}{2}log(x+1)+$$

$$+\frac{1}{2}P\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x^2}{2}log(x-1)-$$

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}log(x-1)-\frac{x^2}{2}log(x+1)+$$

$$+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}log(x+1)=\frac{x^2}{2}log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+$$

$$+log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x.$$

4) Sendo $z=F(x,y)$, considere as funções $u=g(z)$ e $v=h(z)$ e prove que:

a) $$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

sabendo que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}.$$

R: *a)* $$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\left(\frac{du}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{dv}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\frac{du}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{dv}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

e, como

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},$$

resulta a igualdade, atendendo também à alínea a).

5) Mostre que os vectores

$$A_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

são linearmente dependentes. Determine a forma geral dos números que satisfazem à igualdade $l_1A_1+l_2A_2+l_3A_3+l_4A_4=0$.

R: *Se os vectores são linearmente dependentes, ter-se-á de verificar a relação* $l_1A_1+l_2A_2+l_3A_3+l_4A_4=0$ *em que* l_1,l_2,l_3,l_4 *são constantes não conjuntamente nulas.*

Aquela condição equivale a dizer que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} l_1 \qquad + l_3 - l_4 &= 0\\ l_3 \qquad &= 0\\ l_1+l_2+l_3 \qquad &= 0\\ l_2 \qquad + l_4 &= 0 \end{aligned}$$

terá de possuir soluções não nulas. Com efeito,

$$\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}=0$$

e por conseguinte o sistema tem soluções não nulas. Como $\Delta=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-1\neq0$, *o sistema e simplesmente indeterminado e as suas soluções são proporcionais. Acha-se fàcilmente uma solução não nula tomando os complementos algébricos de* l_1,l_2,l_3 *e* l_4 *em*

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\l_1&l_2&l_3&l_4\end{vmatrix}.$$ *A forma geral das soluções é*

$$\frac{l_1}{-\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{l_2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = $$

$$= \frac{l_3}{-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{l_4}{\Delta} = \alpha$$

ou

$$\frac{l_1}{-1} = \frac{l_2}{1} = \frac{l_3}{0} = \frac{l_4}{-1} = \alpha$$

ou ainda

$$\begin{cases} l_1 = -\alpha \\ l_2 = \alpha \\ l_3 = 0 \\ l^4 = -\alpha \end{cases}.$$

6) Dada a recta $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, calcule os seus cosenos directores e escreva a equação do plano que passa por r e corta o eixo $0x$ em $(2,0,0)$.

R: *cos* $\alpha, \beta, \gamma = \pm \frac{0,1,2}{\sqrt{5}}$.

Como $r \equiv \begin{cases} x-1=0 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}$, *será* $\alpha(x-1) + \beta(2y-z-1) = 0$ *a equação do feixe de planos que passa por* r. *Fazendo* $m = \frac{\alpha}{\beta}$, *vem* $x + 2my - mz - m - 1 = 0$ *e a equação axial é* $\frac{x}{m+1} + \frac{2m}{m+1}y - \frac{m}{m+1}z = 1$. *Como o plano pedido deverá passar por* $(2,0,0)$, *terá de ser* $m+1=2$ *ou* $m=1: \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho (2.ª chamada) — Prova Prática — 15-7-1961.

5393 1) Dada a curva $y = \frac{ax + bx^2 + cx^3}{1 + 2x - x^2}$, determine a, b e c por forma que a assíntota oblíqua seja a recta $X + Y - 1 = 0$ e a tangente na origem seja $2X - Y = 0$.

R: *Como* $\frac{ax + bx^2 + cx^3}{1 + 2x - x^2} = -cx - (b+2c) + \varphi(x)$, *com* $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$, *a assíntota obliqua é* $Y = -cX - (b+2c)$, *isto é*, $c = 1$ *e* $b = -3$. *Então* $y = \frac{ax - 3x^2 + x^3}{1 + 2x - x^2}$ *e* $y'(0) = 2$, *o que dá* $a = 2$.

2) Ache o desenvolvimento em série de Mac Laurin da função $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$, determinando o inter- em que é válido o desenvolvimento.

Calcule $P\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$.

$$R: \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{a_0 + a_1(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{b_0}{x-2} = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x-2}.$$

Cálculo de a_0 *e* a_1: *fazendo* $x - 1 = t$, *vem* $R_1(x) = \frac{x+1}{x-2} = \frac{2+t}{-1+t} = -2 - 3t + \cdots$ *e* $a_0 = -2$, $a_1 = -3$.

Cálculo de b_0: $b_0 = R_2(2) = \left[\frac{x+1}{(x-1)^2}\right]_{x=2} = 3$.

Ora $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$ *para* $|x| < 1$ *e portanto*

$$-\frac{2}{(x-1)^2} = -2\left(\frac{1}{1-x}\right)' = $$

$$= -2\sum_1^\infty n\,x^{n-1} \text{ também para } |x| < 1;$$

$$-\frac{3}{x-1} = \frac{3}{1-x} = 3\sum_0^\infty x^n \text{ para } |x| < 1;$$

$$\frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{3}{2}\sum_0^\infty\left(\frac{x}{2}\right)^n \text{ para } |x| < 2;$$

Então $\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \sum_0^\infty \left(1 - 2n - \frac{3}{2^{n+1}}\right)x^n$, *para* $|x| < 1$.

$$P\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = -2P\frac{1}{(x-1)^2} - 3P\frac{1}{x-1} + 3P\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-1} + 3\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

3) Prove que a função $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ satisfaz, quaisquer que sejam as funções f e g, à relação

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R.:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}-g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^3}+\frac{y^2}{x^4}g''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x^3}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\cdot f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fazendo as operações indicadas no primeiro membro da igualdade, obtem-se 0.

4) Sendo $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&1&1\\1&2&p\end{bmatrix}$, determine p por forma que o sistema homogéneo $AX=0$ seja indeterminado. Ache nesse caso um sistema fundamental de soluções.

R.: *Para que o sistema* $AX=0$ *seja indeterminado é preciso que a característica de* A *seja menor do que três.*

Como $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$ *e* $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=0$, *deverá ser* $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&2&p\end{vmatrix}=0$, *ou* $p=2$.

O sistema é simplesmente indeterminado e o sistema fundamental de soluções é constituído apenas por uma solução que se obtém fàcilmente tomando os complementos algébricos de x_1, x_2 e x_3 *no determinante*

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\x_1&x_2&x_3\end{vmatrix}:\begin{cases}x_1=0\\x_2=-1.\\x_3=1\end{cases}$$

A solução geral é $\begin{cases}x_1=0\\x_2=-\alpha.\\x_3=\alpha\end{cases}$

5) Decomponha em quadrados a forma

$$x_1^2-2x_1x_2-2x_2x_3.$$

R.:

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	-1	0	$\to x_1-x_2$
x_2	-1	0	-1	
x_3	0	-1	0	

	x_2	x_8	
x_2	-1	-1	$\to -x_2-x_8$
x_3	-1	0	

	x_3	
x_3	-1	$\to -x_3$

$$x_1^2-2x_1x_2-2x_2x_3=(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2+x_3^2.$$

6) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,0,0)$ e é perpendicular à recta

$$r\equiv\begin{cases}x-y=0\\y+z=0.\end{cases}$$

R.: *O feixe de planos que passa por* $P(1,0,0)$ *é* $A(x-1)+By+Cz=0$ *e os parâmetros directores de* r *são* $h=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$, $k=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$ *e* $l=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1$. *Ter-se-á de verificar a condição* $\frac{A}{-1}=\frac{B}{-1}=\frac{C}{1}$, *o que conduz à equação do plano:* $x+y-z-1=0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Outubro — 2/10/1961.

Prova prática

3594 — 1) Calcule $\lim\limits_{x=+0}(\operatorname{cosec} x+\log x)$.

R.: $\lim\limits_{x=+0}(\operatorname{cosec} x+\log x)=\lim\limits_{x=+0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}+\log x\right)=$ $=\lim\limits_{x=+0}\frac{1+\operatorname{sen} x\log x}{\operatorname{sen} x}$.

Como $\lim\limits_{x=+0}\operatorname{sen} x\log x=\lim\limits_{x=+0}\frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}=$

$$= \lim_{x=+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} = \lim_{x=+0} - \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x} = 0 \text{, vem}$$

$\lim_{x=+0} (\operatorname{cosec} x + \log x) = +\infty$.

5395 — 2) Estude a função assim definida

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ \dfrac{x^2}{x-1} & (x > 0) \end{cases}$$

Faça a representação geométrica de $f(x)$.

R.: a) *Domínio* $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$. *Pontos de descontinuidade:* $x = 0$ *e* $x = 1$.

b) *Não apresenta simetrias nem periodicidade.*

c) *Intervalos de monotonia; extremos.*

Como o comportamento da função em $]-\infty, 0]$ *é bem conhecido, basta ver o que se passa em* $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \qquad \begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \\ f'(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \\ f'(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \end{array}$$

Portanto, $f(x)$ *é decrescente em* $]0, 1[$ *e* $]1, 2[$, *tem um mínimo no ponto* $m(2, 4)$ *e é crescente em* $]2, +\infty[$.

d) *Convexidade* $(x > 0)$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \qquad \begin{array}{l} f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1 \\ f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1 \end{array}$$

A função é convexa em $]1, +\infty[$ *e côncava em* $]0, 1[$.

e) *Assíntotas.*

Como $\lim_{x=1} f(x) = \infty$ *existe a assíntota* $X = 1$ *paralela ao eixo* Oy. *Existe também a assíntota oblíqua* $Y = X + 1$ *pois* $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ *e* $\lim_{x=\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

5396 — 3) Calcule $P \dfrac{1}{2 + \cos x}$.

R.: *Fazendo* $tg \dfrac{x}{2} = t$ *vem* $P \dfrac{1}{2 + \cos x} =$

$$= 2P \frac{1}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{1}{1 + t^2} = 2P \frac{1}{3 + t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} P \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

5397 — 4) A função $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $g(0,0) = 0$ é contínua no ponto $P(0, 0)$? Porquê?

Calcule $g'_x(0, 0)$ e $g'_y(0, 0)$.

R.: *Calculemos* $\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y)$ *segundo a direcção da recta* $y = \alpha x$:

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y) = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2 + \alpha^2 x^2} = \lim_{x=0} \frac{1}{x + \alpha^2 x} = \infty.$$

Segundo a direcção da parábola $y^2 = x$:

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y) = \lim_{x=0} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x=0} \frac{1}{x + 1} = 1.$$

Assim se vê que não existe $\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} g(x, y)$ *e portanto* $g(x, y)$ *não é contínua em* $P(0, 0)$.

$$g'_x(0, 0) = \lim_{x=0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{x} = +\infty$$

$$g'_y(0, 0) = \lim_{y=0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y=0} \frac{0}{y} = 0.$$

5398 — 5) Como se sabe, para uma tabela de três pares de valores $\begin{array}{c|ccc} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 \end{array}$ a fórmula interpoladora de Lagrange é $I(x) = \sum_{i=0}^{2} \dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} y_i$

$$\left[\varphi(x) = \prod_{i=0}^{2} (x - x_i) \text{ e } \varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_i} \right].$$

a) Sabendo que $\varphi_0(x_0) = 6$, $\varphi_1(x_1) = -2$, $\varphi_2(x_2) = 3$ e que $-7\varphi_0(x) + 9\varphi_1(x) - 2\varphi_2(x) = 12x - 18$, ache os valores de x_0, x_1 e x_2.

b) Supondo que o polinómio interpolador é do primeiro grau e que se verificam as relações $y_0 + y_1 + y_2 = -11$ e $y_2 - y_1 = 2$, determine os valores de y_0, y_1 e y_2. Escreva o polinómio interpolador.

R.: a) $-7\varphi_0(x_0) = 12x_0 - 18$
$-42 = 12x_0 - 18 \Rightarrow x_0 = -2$

$9\varphi_1(x_1) = 12x_1 - 18$
$-18 = 12x_1 - 18 \Rightarrow x_1 = 0$

$-2\varphi_2(x_2) = 12x_2 - 18$
$-6 = 12x_2 - 18 \Rightarrow x_2 = 1$

b) $\varphi_0(x) = x(x-1) = x^2 - x$
$\varphi_1(x) = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$
$\varphi_2(x) = (x+2)x = x^2 + 2x$

O polinómio interpolador é

$$I(x) = \frac{x^2 - x}{6} y_0 + \frac{x^2 + x - 2}{-2} y_1 + \frac{x^2 + 2x}{3} y_2$$

e, como é do primeiro grau, terá de ser

$$\frac{1}{6} y_0 - \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{3} y_2 = 0 .$$

Esta equação, juntamente com as duas relações dadas, conduz ao sistema $\begin{cases} y_0 - 3y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_0 + y_1 + y_2 = -11 \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$

cuja solução é $\begin{cases} y_0 = -7 \\ y_1 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

O polinómio interpolador é

$$I(x) = \frac{x^2 - x}{6}(-7) + \frac{x^2 + x - 2}{-2}(-3) + \\ + \frac{x^2 + 2x}{3}(-1) = 2x - 3 .$$

5399 — 6) Utilize a teoria dos determinantes para estudar a posição relativa dos planos $\pi_1 \equiv x - y - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z - 1 = 0$, $\pi_3 \equiv x - 2y - z - 1 = 0$ e $\pi_4 = y + z = 0$.

Escreva a equação da recta r que passa pela origem e se apoia na recta $s \equiv \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \end{cases}$ sabendo que $r \perp s$.

R.: *A característica da matriz do sistema*

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

é $r = 2$. *Com efeito, da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *o determinante de maior ordem significativo que dela se pode extrair é* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ *(determinante principal).*

Os determinantes característicos $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ *e* $\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *são ambos nulos e por isso o sistema é indeterminado de grau* 1.

Geomètricamente significa que os planos π_3 *e* π_4 *passam pela recta definida por* π_1 *e* π_2.

O problema de geometria analítica pode resolver-se do seguinte modo: conduz-se pela origem o plano $\pi \perp s$, *acha-se a intersecção* P *do plano* π *com a recta* s *e depois escreve-se a equação da recta* OP.

A recta s *tem os parâmetros directores* $h = -1$, $k = -1$ *e* $l = 1$; *o plano* π *é* $Ax + By + Cz = 0$ *tal que* $\frac{A}{h} = \frac{B}{k} = \frac{C}{l}$, *isto é,* $\pi \equiv x + y - z = 0$.

A intersecção P *determina-se resolvendo o sistema*

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *A recta* r *é então*

$$r \equiv \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{-\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \quad ou \quad r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} .$$

Enunciados e soluções dos n.os 5384 a 5399 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 20-7-1961.

5400 — Seja π_1 o plano determinado por $A(1,0,0)$, $B(0,1,2)$ e $C(0,0,1)$ e π_2 o plano que intersecta a parte positiva dos eixos coordenados a distâncias da origem iguais a 1.

Conduza pelo ponto $P(1,1,1)$ uma recta paralela à intersecção dos planos π_1 e π_2.

5401 — É dado um triângulo isósceles de base 20 e altura 8 cm. De todos os paralelogramos inscritos neste triângulo com um dos lados assente na base do triângulo e os ângulos agudos iguais a $\operatorname{ang}\operatorname{tg}\frac{4}{3}$, quais as dimensões do de área máxima?

5402 — Primitive as funções

$$a)\ x \sec^2 x\,; \quad b)\ \frac{2x^3 + x^2 + 6x + 1}{2x^3 - x^2 + 4x - 2} .$$

5403 — Sejam $OXYZ$ e $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ dois sistemas de referência não necessàriamente triortogonais, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ respectivamente, relacionados pela igualdade matricial

$$[\hat{\mathbf{e}}_1\ \hat{\mathbf{e}}_2\ \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3]\,T$$

a) Qual a relação entre as matrizes colunas X e $\hat{X}$ que representam um mesmo vector **x** de $\mathcal{R}^3$ nos dois sistemas de referência?

b) Se for G a matriz de elemento genérico $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j = \cos(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j})$ [matriz da métrica relativa ao sistema de referência $OXYZ$] e $\hat{G}$ a correspondente matriz para $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, qual a expressão matricial do produto interno de dois vectores **x** e **y** num e noutro dos sistemas de referência?

Aproveite a igualdade das duas expressões do produto interno para concluir que $\hat{G} = T^{T} G T$.

c) Se for $P^{T} \mathcal{Q} P + 2 \Lambda^{T} P + a_{44} = 0$ a equação de uma superfície de 2.ª ordem no primeiro sistema, qual a forma que toma a equação da mesma superfície no segundo sistema de referência?

Mostre que nesta transformação de coordenadas a matriz $G^{-1}\mathcal{Q}$ dá lugar a outra semelhante e que o polinómio $|G^{-1}\mathcal{Q} - \lambda I|$ é invariante, o mesmo acontecendo a $c(G^{-1}\mathcal{Q})$, $Tr(G^{-1}\mathcal{Q})$, $Tr\,\mathrm{adj}(G^{-1}\mathcal{Q})$ e $|G^{-1}\mathcal{Q}|$.

d) Se em vez de uma quádrica se tratar de uma cónica do plano XOY, deduza a forma que tomam os invariantes anteriores em função do ângulo θ que formam entre si os dois eixos coordenados.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame Final — 14-10-1961.

5404 — *a*) Verifique que a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio racional e dois irracionais.

b) Dados os vectores

$$\overline{a} = [1 \; -y \; z]$$
$$\overline{b} = [x \; 1 \; 0]$$

determine x, y e z de modo que $\overline{b}$ seja vector próprio da matriz correspondente ao valor próprio racional e os vectores $\overline{a}$ e $\overline{b}$ definam um rectângulo de área 6.

5405 — Uma função $T(x)$ está definida da seguinte forma:

$$T(x) = \begin{cases} x - 6 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 10 \\ 0 & \text{para} \quad 10 < x < 11 \\ -2 & \text{para} \quad 11 < x \leqslant 12 \end{cases}.$$

Determine a partir dela uma função contínua $M(x)$ que satisfaça às relações $\dfrac{dM}{dx} = T(x)$ e $M(0) = 12$.

Represente gràficamente as duas funções em dois sistemas de referência com o mesmo eixo de ordenadas e eixos das abcissas paralelos e indique como a partir da função dada se pode estudar o crescimento e os máximos e mínimos da função $M(x)$.

5406 — Calcule

a) $P\, e^{2x} \cdot \cos 3x$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

5407 — Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x(x+y)} & \text{para } x(x+y) \neq 0 \\ 0 & \text{para } x(x+y) = 0 \end{cases}.$$

a) Estude a sua continuidade na origem.

b) Verifique se aí admite derivadas parciais.

c) Investigue a existência de alguma direcção ao longo da qual exista derivada dirigida na origem e indique o seu valor.

Enunciados dos n.os 5400 a 5407 de F. R. Dias Agudo

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 1.ª chamada.

I

Parte Teórica

5408 — 1) $\mathfrak{G}$ é um grupo multiplicativo; que entende por ordem de um elemento $a \in \mathfrak{G}$?

Se os elementos $a_i \in \mathfrak{G}$ têm ordem n_i, com $i = 1, 2, \cdots, k$, qual é a ordem do elemento $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$?

5409 — 2) Seja $\mathfrak{A}$ um anel. Suponha que em $\mathfrak{A}$ semi-grupo em relação ao produto, existe inverso a^{-1} de qualquer elemento $a \neq 0$. Prove que $\mathfrak{A}$ é então um corpo — S.

5410 — 3) Considere o grupo das raízes índice n

da unidade e seja

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$$

a sua decomposição em factores primos. Indique os sub-grupos do grupo considerado e os respectivos índices.

II

Parte Prática

5411 — 1) Considere o grupo $\mathfrak{S}$ das permutações de ordem n e a aplicação de $\mathfrak{S}$ no grupo aditivo abeliano constituído pelos números 0 e 1 (a operação é a adição aritmética quando ao menos um dos números é zero e ainda $1 + 1 = 0$).

Como se chama a aplicação assim definida? Justifique.

5412 — 2) Considere o conjunto $\mathfrak{A}$ de elementos $a, b, \cdots$, cada um deles definido por três números reais; por exemplo,

$$a \equiv (x_1, x_2, x_3);$$

sendo

$$b \equiv (y_1, y_2, y_3),$$

defina-se $a + b$ por

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Mostre que $\mathfrak{A}$ é grupo aditivo abeliano. Justifique.

5413 — 3) Constituirão os polinómios de coeficientes reais um anel? No caso afirmativo:

a) Terá o anel elemento unidade?

b) Terá o anel divisores próprios de zero?

c) Será o anel comutativo?

Justifique as respostas.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 1.ª Frequência — 2.ª chamada.

I

Parte Teórica

5414 — 1) Dê a definição de grupo cíclico em notação aditiva. Defina elemento primitivo nesse caso. Se $k \cdot a$ é elemento primitivo e m a ordem do grupo, que relação existe entre k e m?

5415 — 2) Com fundamento nos postulados da definição de um corpo — S poderá assegurar a solução das equações

$$a \cdot x + b = c$$
$$y \cdot a + b = c.$$

Justifique.

5416 — 3) Seja $\mathfrak{G}$ um grupo aditivo e seja $\mathfrak{g}$ um dos seus sub-grupos. Como define classes laterais (à esquerda e à direita) neste, relativamente a $\mathfrak{g}$.

Prove que se estas classes laterais coincidem, o sub-grupo é normal.

II

Parte Prática

5417 — 1) Decomponha a permutação

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

no produto dum número mínimo de transposições.

5418 — 2) Os números $+1$ e -1 constituem um grupo relativamente à multiplicação. Mostre que este grupo é imagem homomorfa do grupo aditivo dos inteiros. Poderá estabelecer um homomorfismo entre aquele grupo e o grupo multiplicativo do conjunto dos números reais, uma vez deste excluído o zero?

5419 — 3) Considere o conjunto das matrizes diagonais de 3.ª ordem. Terá este conjunto estrutura de anel? Justifique completamente a resposta.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 1.ª chamada — Maio 1961.

I

Parte Teórica

5420 — 1) Estabeleça uma condição para que o produto de duas matrizes seja permutável quando elas são simétricas.

5421 — 2) Sejam: E espaço vectorial complexo de n dimensões $A \in (E \to E)$ e $e_1, e_2, \cdots, e_n$ uma base de E.

a) Supondo que

$$A e_1 = \cdots = A e_k = \Theta \qquad 1 < h < n$$

e que para $k \geqslant h + 1$, $A e_k$ é uma combinação linear de $e_{h+1}, \cdots, e_n$, escreva uma matriz que represente A naquela base. Qual a dimensão do espaço nulo do operador A?

b) Nas mesmas condições que relação existe entre os valores próprios de A e os da restricção de A no espaço de base

$$e_{h+1}, \cdots, e_n?$$

5422 — 3) Seja E o espaço vectorial dos números complexos sobre o corpo Ω dos números reais. Mostre que a transformação

$$x \to \bar{x} \quad \text{(conjugado de } x)$$

é linear e determine a sua matriz relativamente à base $1, i$.

II

Parte Prática

5423 — 1) Seja E o espaço vectorial real com 3 dimensões, considerado em Geometria Analítica com base e_1, e_2, e_3 (vectores unitários do sistema de eixos tri-rectangulares). Escreva a matriz que corresponde ao operador e que determina uma rotação de 30° em torno de e_3 e no sentido de e_1 para e_2.

Determine os valores próprios desse operador.

5424 — 2) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

determine o seu polinómio característico, a sua matriz adjunta e a sua inversa.

5425 — 3) Escreva a associada da matriz de transformação de

$$e_1^* = e_1$$
$$e_n^* = \alpha_{1k}\, e_1 + \alpha_{2k}\, e_2 + \cdots + \alpha_{(n-1)k}\, e_{n-1} + e_n \quad (2 \leqslant k \leqslant n).$$

Qual a matriz da transformação inversa?

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

F. C. C. — Álgebra Superior — 2.° exame de frequência — 2.ª chamada — 31/5/61.

I

Parte Teórica

5426 — 1) Se $\mathcal{A}$ é matriz simétrica e $\mathcal{B}$ anti-simétrica, de que natureza é a matriz $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$? Justifique.

5427 — 2) *a)* Considerem-se os operadores lineares A e B sobre o espaço vectorial E (no corpo Ω) e admita que eles têm um vector próprio comum x, mas correspondente a diferentes valores próprios. Será x vector próprio de uma combinação linear de A e B, com coeficientes em Ω?

b) Seja $\mathcal{A}$ uma matriz quadrada de ordem n com valores próprios $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Quais são os valores próprios de $\alpha A + \beta I$ (α e β complexos quaisquer)?

5428 — 3) Seja $A \in (E \to E_1)$ com E e E_1 espaços vectoriais. Mostre que: vectores linearmente dependentes são transformados em vectores com a mesma propriedade.

II

Parte Prática

5429 — 1) Num espaço de dimensão $n = 2k$ e x_i, x_i' $(i = 1, \cdots, k)$ uma base. Escreva a matriz que corresponde à transformação definida por

$$A x_i = \alpha_i x_i + \beta_i x_i'$$
$$A x_i' = -\beta_i x_i + \alpha_i x_i'.$$

Qual a matriz que corresponde à transformação inversa?

5430 — 2) Calcule a matriz adjunta e a matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5431 — 3) Calcular as raízes características e os vectores próprios da matriz de 4.ª ordem cujos elementos são todos iguais a 1.

Indicar uma base para cada sub-espaço próprio.

Nota: Responder só a 2 questões de cada grupo.

Enunciados dos n.os 5408 a 5431 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Prova escrita do exame final — Julho de 1961.

(Responda apenas a uma questão de cada grupo).

I

5432 — 1) Determinar as equações vectoriais da tangente, do plano normal, do plano osculador e da binormal no ponto da linha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

em que $x = 1$.

II

5433 — 1) Desenvolver em série de Fourier no intervalo $[-\pi, +\pi]$ a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}.$$

III

5434 – 1) Calcular $\iiint_{(v)} (x^2 + y^2)\, dv$ sendo (v) o volume limitado pelo plano XOY e pela semi-superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$.

2) Determinar o volume da parte da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

que é interior à superfície cónica

$$z^2 = x^3 + y^2.$$

IV

5435 — 1 — *a*) Quando é que se diz que a equação

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

é uma diferencial exacta?

b) Mostrar que $\frac{1}{y^2}$ é um factor integrante para a equação

$$3x^2 y^3\, dx + (x^3 y^2 + 2y + 1)\, dy = 0$$

e determinar o seu integral geral.

V

5436 – 1) Dada a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x e^x$$

mudar a variável (dependente) y para a variável z por forma que $y = z e^x$.

Determinar a solução geral da equação dada e a solução particular y_1 que verifica as condições $y_1(0) = y_1'(0) = 0$.

Enunciados dos n.os 5432 a 5436 de A. César de Freitas

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **1.ª frequência, 1.ª chamada — (Janeiro 1961).**

5437 – 1) Dados um ponto P do plano vertical de projecção, uma recta qualquer r e uma recta s do 2.º bissector, conduzir por P a recta perpendicular a r que se apoia em s.

5438 – 2) Dadas 2 rectas enviesadas, sendo uma delas vertical e a outra qualquer, determinar o ângulo que elas definem.

5439 — 3) Dados um plano qualquer pelos traços, um plano de nível de cota 3 e uma recta r que não pertence a nenhum dos planos, determinar:

a) a intersecção dos planos

b) os pontos de r que são equidistantes dos planos dados.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. C. — Cálculo das Probabilidades — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 8-3-1960.**

I

Parte Teórica

5440 — 1) Enuncie e demonstre o teorema da possibilidade composta para uma classe dupla em probabilidade descontínua.

5441 – 2) Enuncie a lei binomial no problema das provas repetidas. Generalize o enunciado.

5442 – 3) Em Probabilidade contínua defina probabilidade no caso de lançamentos em regiões ilimitadas. Enuncie um teorema relativo a esse caso e faça a aplicação a um exemplo.

II

Parte Prática

5443 – 1) Num baralho de 40 cartas tiram-se à sorte sucessivamente e sem reposição 5 cartas. Calcular a probabilidade de saída de:

a) um só ás;

b) um ás pelo menos;

c) 3 cartas de um mesmo naipe e 2 de outro;

d) uma copa na última tiragem, sabendo que nas anteriores só saiu uma. Justifique sumàriamente.

5444 – 2) Duma urna com 10 esferas, sendo 6 brancas e 4 pretas, tiram-se à sorte, simultâneamente, 2 esferas que saiem da mesma côr. Qual a probabilidade de, em nova tiragem de 2 esferas, de entre as 8 restantes, voltar a saír esfera da mesma côr das duas primeiras?

5445 – 3) Sobre os catetos dum triângulo rectângulo $[OAB]$ lançem-se à sorte 2 pontos M e N, um em cada cateto. A recta aleatória MN divide o triângulo em 2 regiões: um triângulo rectângulo e um quadrilátero. Calcule a probabilidade de, em novo lançamento de um ponto Q, este caír no quadrilátero.

Enunciados dos n.os 5437 a 5445 recolbidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

ASTRONOMIA

F. C. L. — ASTRONOMIA — Exame Final — 1.ª chamada — Outubro de 1961.

Teoria

5446 — 1) Os valores da paralaxe heliocêntrica de Marte aparecem nas efemérides astronómicas? Porquê?

5447 — 2) A expressão usualmente utilizada na correcção do semi-diâmetro

$$s_1'' = s'' \, (1 + \pi \operatorname{sen} 1'' \cos z)$$

inclui termos de 2.ª ordem? Justifique a resposta.

5448 – 3) A expressão analítica que nos permite determinar a precessão planetária inclui termos periódicos? Porquê?

5449 – 4) Todas as estrelas da nossa galáxia podem emitir energia em virtude dos fenómenos de contracção gravitacional? Justifique a resposta.

5450 — 5) A denominada lei da massa-luminosidade aplica-se a todas as estrelas situadas até 100 parsecs do Sol? Porquê?

5451 – 6) As estrelas novae têm uma posição determinada no diagrama HERTZSPRUNG-RUSSELL? Justifique a resposta.

Prática

5452 – Calcule o tempo médio do ocaso do Sol num lugar de coordenadas

$$\begin{cases} \varphi = +65^\circ \;\; 34' \;\; 54'' \\ \lambda = -7^h \;\; 39^m \;\; 17^s.9 \end{cases}$$

para o dia 1961 Junho 22.

(Precisão do problema $0^m.1$).

F. C. L. — ASTRONOMIA — Exame Final — 2.ª chamada — Outubro de 1961.

Teoria

5453 – 1) O fenómeno da aberração da luz proveniente de Júpiter varia no decurso do ano? Justifique a resposta.

5454 – 2) A partir da expressão da influência, na ascensão recta, da precessão luni-solar em um ano

$$d\alpha = \theta \, (\cos \varepsilon + \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} \alpha)$$

justifique se um erro $d\delta$ no valor da declinação tem importância no valor da ascensão recta.

5455 – 3) Do ponto de vista teórico, poderão existir estrelas sem movimento próprio? Justifique a resposta.

5456 – 4) O aparecimento, na esfera celeste, das estrelas novas é um fenómeno frequente? Porquê?

5457 – 5) As estrelas sub-gigantes são muito numerosas na nossa galáxia? Justifique a resposta.

5458 – 6) Uma galáxia espiral com barra apresenta substracto? Justifique a resposta.

Prática

5459 – Calcule o tempo legal do nascimento do Sol num lugar de coordenadas

$$\begin{cases} \varphi = -71^\circ \;\; 58' \;\; 43'' \\ \lambda = +8^h \;\; 35^m \;\; 08^s.9 \end{cases}$$

para o dia 1961 Setembro 24.

(Precisão do problema $0^m.1$).

Enunciados dos n.os 5446 a 5459 de Raimundo Vicente

F. C. C. — ASTRONOMIA — 1.ª Frequência — 2.ª chamada — Fevereiro de 1961.

Prova Prática

5460 — Em 1961, Janeiro 16, observou-se em Coimbra uma estrela com um teodolito, tendo-se determinado a distância zenital

$$z = 46^\circ\ 57'\ 46'',6$$

e o azimute

$$A = 279^\circ\ 7'\ 23'',6\,.$$

A observação foi feita às $2^h\ 13^m\ 20^s,53$ de tempo universal.

Calcular a ascensão recta e a declinação da estrela.

Prova Teórica

5461 — 1) Determinação da latitude de um lugar. Vantagem de observação de uma estrela no meridiano.

5462 — 2) Conversão de tempo sideral local em tempo solar médio local.

5463 — 3) Transformação de coordenadas; passagem de um astro no 1.º vertical.

Nota — Responder só a duas questões.

F. C. C. — ASTRONOMIA — 2.ª Frequência — 1.ª chamada — 26-4-1961.

Parte Prática

5464 — Calcular para Coimbra e para o dia 15 de Maio de 1961 o T. U. e o azimute nos instantes correspondentes ao nascimento e ocaso da estrela γ Pegasis.

Parte Teórica

5465 — 1) Influência da refracção nas coordenadas equatoriais.

5466 — 2) Deduzir (ou estabelecer) as fórmulas fundamentais da paralaxe em azimute e distância zenital.

5467 — 3) Estabelecer o desenvolvimento em série da latitude local geocêntrica.

Nota — Responder só a duas questões.

F. C. C. — ASTRONOMIA — 2.ª Frequência — 2.ª chamada — Maio de 1961.

Parte Prática

5468 — Em 1961, Abril 17, observou-se num determinado instante em Coimbra e a leste do meridiano a estrela γ Cassiopeiae com a distância zenital verdadeira

$$55^\circ\ 12'\ 33'',6\,.$$

Calcular o T. U., o azimute e o ângulo paraláctico da estrela nesse instante.

Parte Teórica

5469 — 1) Influência da refracção no nascimento ou ocaso de um astro

5470 — 2) Dedução das fórmulas fundamentais para a determinante da paralaxe em declinação e ascensão recta.

5471 — 3) Estabelecer o desenvolvimento em série do raio local terrestre.

Nota — Responder só a duas perguntas.

F. C. C. — ASTRONOMIA — Exame Final — 1.ª chamada 12-6-61.

Prova Prática

5472 — Calcular para um lugar situado no semi-meridiano de Coimbra de latitude

$$\varphi = 41^\circ\ 15'\ 34'',7$$

e para 1961, Junho 27, o T. U., a distância zenital e o azimute da maior digressão a leste da estrela α Cassiopeiae.

Enunciados dos n.os 5460 a 5472 recolhidos por Maria Beatriz Ferreira da Costa

PONTOS DE EXAME DA UNIVERSIDADE DO RECIFE

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — COMPLEMENTOS DE GEOMETRIA — 2.ª prova parcial — Novembro de 1960.

5473 — 1) Seja S a superfície definida pela equação vectorial paramétrica

$$\vec{r} = f(u)\,\vec{i} + f(u)\,g(v)\,\vec{j} + g(v)\,\vec{k},$$

onde f e g são funções de classe suficientemente elevada e tais que as derivadas f' e g' são constantemente positivas.

a) Mostre que as linhas de curvatura da superfície S são definidas pela relação

$$\log\left(f(u) + \sqrt{1 + (f(u))^2}\right) \pm$$
$$\pm \log\left(g(v) + \sqrt{1 + (g(v))^2}\right) = \log C$$

onde C é uma constante arbitrária (positiva).

b) Mostre que as linhas da superfície S que cortam ortogonalmente as linhas de S definidas por $f(u)\, g(v) = \text{Const.}$, são as linhas de S definidas por $(f(u))^2 - (g(v))^2 = \text{Const.}$

c) Verifique que a superfície S não tem pontos umbilicais.

5474 — 2) Dada a superfície S de equação vectorial paramétrica

$$\vec{r} = (u^3 + u)\,\vec{i} - \frac{2}{v}(u^3 + u)\,\vec{j} + 2\,v\,\vec{k},$$

seja Γ a família de linhas de S, definida pela equação diferencial

$$u^2 \frac{d^2 v}{d u^2} + (u^3 - 3u)\frac{d v}{d u} + (3 - u^2)\, v = u^5$$

a) Mostre que existe em Γ uma e uma só linha que é definida por uma equação da forma $v = a \cdot u^m$, onde a e m são constantes e determine uma equação vectorial paramétrica dessa linha.

b) Utilizando o resultado anterior, determine, em termos finitos, uma equação vectorial paramétrica geral das linhas da família Γ e determine, em particular, uma equação vectorial paramétrica da linha γ da família Γ que passa pelo ponto P definido por $u = 1, v = 1$ e tal que nesse ponto se tem $\left(\frac{d v}{d u}\right)_P = 2$.

c) Mostre que a linha γ obtida é uma linha assintótica da superfície S. Qual é a outra linha assintótica de S que passa pelo ponto P?

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática I — 2.ª prova parcial — Novembro de 1960.

5475 — 1) Seja f a função real de variável real x definida pela relação

$$f(x) = \frac{x^3 + A\,x^2 + B}{C\,x^2 + 4}$$

onde A, B, C são constantes.

a) Determinar as constantes A, B, C, de modo que o gráfico de f seja tal que a recta de equação cartesiana $x + y = 0$ seja uma assíntota e o ponto $(0, f(0))$ seja de inflexão.

b) Esboçar o gráfico da função f.

c) Determinar a área da região limitada pelo gráfico de f e pelas rectas $x + y = 0$ e $x = 1$.

5476 — 2) Sobre uma circunferência de raio R, considere um ponto A. Seja P um ponto da tangente à circunferência em A e que dista R de A. Designe por B e C os pontos de encontro da circunferência com uma secante variável que passe por P. Mostre que o valor máximo da área do triângulo $A\,B\,C$ é igual a $\frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{4} R^2$.

5477 — 3 — *a*) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ é convergente.

b) Verifique que a igualdade

$$\frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(2n-1)} =$$
$$= \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{2}{n+n}$$

é válida para todo o natural n.

c) Baseando-se na igualdade anterior, mostre que a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ é igual a $2 \log 2$.

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática II — 1.ª prova parcial — Agosto de 1961.

5478 — 1) Mostre que, se f é uma função real das variáveis reais x e y, homogénea, de grau m, cujas segundas derivadas existem e são contínuas, então

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,x\,y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1)\, f(x, y).$$

Conclua, em seguida, que a função f definida por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{\frac{x y}{x^2 + y^2}},\ (x, y) \neq (0, 0)$$

é solução da equação

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,x\,y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

5479 — 2) Dada a função f, das variáveis reais x e y, definida por

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{(x^3 - 4xy^2)\cdot \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

verifique que, no ponto $(0,0)$, existem e são diferentes as derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

5480 — 3) Seja E o conjunto dos pontos do plano euclideano, de coordenadas cartesianas

$$x = \frac{1}{m}, \; y = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n},$$

onde m e n são inteiros positivos.

a) Determinar o derivado E', do conjunto E, e o derivado E'', do conjunto E'.

b) Seja $A = E' - E''$. Dê exemplo de uma cobertura aberta, infinita, do conjunto A, da qual não seja possível extraír uma cobertura finita.

Qual é a condição do teorema de Heine-Borel que não é satisfeita pelo conjunto A?

Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática **(II Série) — 2.ª prova parcial — Novembro de 1961.**

5481 — 1) Calcule a massa do sólido definido, em coordenadas cartesianas triortogonais, pelas condições

$$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$$

sabendo que a função densidade é, em cada ponto, numèricamente igual à distância desse ponto ao eixo dos zz.

5482 — 2) Mostre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \log \frac{1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x}{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x}\, dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

(*Sugestão:* Considere a função f, da variável real y, definida por

$$f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \log \frac{1 + y \operatorname{sen} x}{1 - y \operatorname{sen} x}\, dx, \quad -1 < y < 1,$$

e calcule $\dfrac{df}{dy}$, em termos finitos; utilizando o resultado obtido, determine $f(y)$, em termos finitos).

5483 — 3) *a*) Mostre que, se $a > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen}(yx) = \frac{y}{y^2+a^2}$$

b) Mostre que a segunda integral converge uniformemente, qualquer que seja o intervalo (finito) de variação de y.

c) Conclua, em seguida, que

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \frac{1 - \cos bx}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+b^2}{a^2}$$

Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Análise Matemática **(II Série) — Exame final — Dezembro de 1961.**

5484 — 1) Calcule o volume do sólido definido, em coordenadas cartesianas tri-ortogonais pelas condições:

$$\begin{cases} 4 \geqslant z \geqslant x^2 + y^2 \\ 4x^2 + 4y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

5485 — 2) Utilizando a igualdade,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{y - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}}, \quad \text{para } |y| > 1,$$

calcule os integrais

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(y - \cos x)^2} \quad \text{e} \quad \int_0^\pi \log \frac{3 - \cos x}{2 - \cos x}\, dx.$$

5486 — 3) Calcule a integral

$$\int_0^{1/3} \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x^3}}$$

com um erro inferior a 0,001. Determine, em seguida, uma melhor avaliação do erro cometido.

Universidade do Recife — Faculdade de Filosofia de Pernambuco — Geometria Superior — **1.ª prova parcial — Agosto de 1961.**

5487 — 1) Seja $[G, \cdot]$ um grupo e a um elemento fixo de G. Considere o sistema $[G, \odot]$, onde a operação $\odot$ é definida por

$$x \odot y = x \cdot a \cdot y.$$

a) Mostre que o sistema $[G, \odot)$ é um grupo.

b) Seja λ a aplicação de G em G definida por $\lambda(x) = x \cdot b$, onde b é um elemento fixo de G. Mostre que λ é um isomorfismo de $[G, \cdot]$ sobre $[G, \odot]$, se e só se $b = a^{-1}$.

c) Seja α um automorfismo de $[G, \cdot]$ e seja α'

a aplicação de G em G definida por

$$\alpha'(x) = \alpha(x) \cdot \alpha(a) \cdot a^{-1}.$$

Mostre que α' é um automorfismo de $[G, \odot]$ e que a correspondência $\alpha \to \alpha'$ é um isomorfismo do grupo dos automorfismos de $[G, \cdot]$ sobre o grupo dos automorfismos de $[G, \odot]$.

5488 – 2) Sejam $[A, +, \cdot]$ um anel comutativo, a um elemento de A e I um ideal de A.

a) Verifique se o conjunto J, dos elementos $x \in A$, tais que $a \cdot x \in I$, é um ideal de A.

b) Verifique se o conjunto K, dos elementos $x \in A$, tais que $x = a \cdot z$, onde $z \in I$, é um ideal de A e mostre que $K \subseteq I \subseteq J$.

c) Suponha que A é o anel dos números inteiros e I é o conjunto dos múltiplos do inteiro b. Designando por d e m, respectivamente, o máximo divisor comum de a e b e o mínimo múltiplo comum de a e b, mostre que K é o conjunto dos múltiplos de m e J é o conjunto dos múltiplos de $\frac{b}{d}$.

Universidade do Recife – Faculdade de Filosofia de Pernambuco – Geomertria Superior – **III Série – 2.ª prova parcial – Novembro de 1961.**

5489 – 1) Considere a geometria analítica plana definida definida sobre o corpo K (suposto com mais de dois elementos).

Sejam A, B, C três pontos distintos colineares e seja f a dilatação definida pelas condições:

$$f(A) = A \text{ e } f(B) = C.$$

a) Mostre que não há nenhuma translação t permutável com f, a não ser a aplicação idêntica.

b) Mostre que, se a translação t não é aplicação idêntica, então as dilatações ft e tf têm pontos fixos distintos.

c) Suponha que K é o corpo dos inteiros módulo 7, que $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (3, 1)$ e $C \equiv (2, 5)$ e que $t(A) = D$, onde $D \equiv (2, 1)$. Determine os pontos fixos das dilatações ft e tf.

d) Sejam g e h as dilatações assim definidas:

$$g(B) = B \text{ e } g(C) = A; \quad h(C) = C \text{ e } h(A) = B.$$

Mostre que as dilatações fgh, ghf e hfg geram grupos cíclicos de ordem 2.

5490 – 2) Seja K um corpo e sejam P e Q dois polinómios móninos pertencentes a $K[x]$.

a) Determine uma condição necessária e suficiente a que deve satisfazer um polinómio mónico $R \in K[x]$, para que os polinómios PQ, QR e RP sejam divisíveis, respectivamente, por R, P e Q.

b) Supondo que k é o corpo dos inteiros módulo 5 e que

$$P = x^3 + x^2 + 4x + 4 \text{ e } Q = x^3 + 2x^2 + 4x + 3,$$

determine todos os polinómios R que verificam as condições da alínea anterior.

Enunciados dos n.os 5473 a 5490 de José Morgado

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

148 — Jean Porte — **La Logique mathématique et le calcul mecanique** — Publicado pelo Instituto de Matemática da Universidade Nacional del Sur — Baía Blanca.

A Universidade Nacional del Sur iniciou em 1960 a publicação de Cursos de Matemática de que este trabalho é o n.º 1. Segundo informa o autor no trabalho foi utilizado livremente o conteudo de diversas exposições feitas no Seminário de Lógica do Instituto Henri Poincaré.

O livro é de leitura fácil e acessível e trata do problema da decisão; programa logístico e sistemas formais; sistema formal do cálculo das proposições puro; funções recursivas; conjuntos recursivos e recursivamente numeráveis; as numerações de Gödel; aplicação das funções recursivas aos sistemas formais; sistema formal do cálculo de predicados puro; conclusões: as possibilidades das matemáticas mecanizadas.

Os problemas da lógica são, em geral, delicados e em particular os problemas da teoria da decisão. A exposição feita neste livro é no entanto bastante simples e não requere mais que conhecimentos elementares de lógica matemática que não vão muito além da simbologia e terminologia usadas hoje universalmente.

É um livro de leitura agradável e boa introdução ao estudo destes problemas.

J. Silva Paulo

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

T. Doetsch — *Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace.*

Études Relativistes

H. Arzeliès — *Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement.*
M. Parodi — *Introduction à l'étude de l'Analyse Symbolique.*
G. Polya — *Les Mathématiques et le Raisonnement «Plausible».*

Cahiers Scientifiques

J. Favard — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome II.*

Editor — LIBRAIRIE VUIBERT, Paris

Lentin et Rivaud — *Éléments d'Algèbre Moderne.*
J. Rivaud — *Exercices d'Analyse. Tome I et Tome II.*

Editor — SOCIÉTÉ D'EDITION D'ENGEIGNEMENT SUPÉRIEUR, Paris

J. Grey — *Mathématiques Préparatoires aux Sciences Expérimentales.*

Editor — CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, Paris

J. Lavoine — *Calcul Symbolique, Distributions et Pseudo-fonctions.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE Albert Blanchard, Paris

J. F. Montucla — *Histoire des Mathématiques.*
A. M. Ampère — *Théorie Mathématique des phénomènes electro-dynamiques.*
J. Hadamard — *Essai sur la psychologie de l'invention dans le donnaire Mathématique.*
Gauss — *Recherches arithmétiques*
A. M. Legendre — *Théorie des nombres.*
C. Jordan — *Traité des substituitions et des équations algébriques.*

Editor — CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge

L. G. Slater — *Confluent Hypergeometric Functions.*
D. G. Northcott — *An Introduction to Homological Algebra.*
P. J. Hilton & S. Wylie — *Homology Theory — An introduction to Algebraic Topology.*
E. A. Maxwell — *Advanced Algebra, part I.*
Snell & Morgan — *New Mathematics — A unified course, I and II.*

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics
G. L. Watson — *Integral Quadratic Forms.*

Editor — DENNIS DOBSON, London

Irving Adler — *The New Mathematics.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. Neumark — *Normierte Algebren.*
Otakar Borůvka — *Grundlagen der gruppoid-und gruppentheorie.*

Mathematische Monographien
Gerhard Ringel — *Färbungsprobleme auf flächen und graphen.*

Mathematische Forschungsberichte
A. N. Kolmogoroff und W. M. Tichomirow — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*
A. W. Pogorelow — *Einige untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im grossen.*
H. Hornich — *Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1962 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1961, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 85 { cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 85 { » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA - 2 — Telefone 369449