GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXIII — N.° 86-87 — JAN.-JUNHO 1962

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXIII — N.º 85-87 GAZETA DE MATEMÁTICA JAN./JUNHO — 1962

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Sur le normalisateur d'un sous-groupe cyclique

par *José Morgado*

Faculdade de Filosofia de Pernambuco e Instituto de Física e Matemática
da Universidade do Recife, Brasil

1 — Introduction.

Si a est un élément d'un groupe G et r est un entier quelconque, l'équation $a\,x = x\,a^r$ n'est pas généralement soluble dans G. Par exemple, si a appartient au centre de G, on a $a\,x = x\,a$, pour tout $x \in G$. Il en résulte que, si a est un élément d'ordre infini, alors l'équation $a\,x = x\,a^r$ est soluble, si et seulement si $r = 1$; et, si l'ordre de l'élément a est n, alors cette équation est soluble, si et seulement si la congruence arithmétique $r \equiv 1$ (modulo n) est satisfaite.

Cependant l'ensemble A, formé par les solutions de toutes les équations $a\,x = x\,a^r$, où r parcourt l'ensemble Z des nombres entiers, n'est pas vide, puisqu'il contient le normalisateur de a [1].

Dans cette note, on étudie quelques propriétés de l'ensemble A et on en déduit quelques propositions concernant les relations entre le normalisateur $N_{(a)}$, du sous-groupe cyclique (a) engendré par a, et le normalisateur N_a, de l'élément a.

2 — Propositions préliminaires.

Soit G un groupe et supposons que les éléments a et x, de G, vérifient l'égalité

(2. 1) $$a\,x = x\,a^r,$$

r étant un entier quelconque.

Alors, on a évidemment

$$a^2\,x = a\,x\,a^r = x\,a^{2\,r},$$

et de

$$a^m\,x = x\,a^{m\,r},$$

il résulte

$$a^{m+1}\,x = a\,x\,a^{m\,r} = x\,a^r \cdot a^{m\,r} = x\,a^{(m+1)\,r},$$

c'est-à-dire, l'égalité

$$a^m\,x = x\,a^{m\,r},$$

est satisfaite, quel que soit l'entier positif m.

De (2. 1), il résulte

$$a^{-1}\,x = (x\,a^r\,x^{-1})^{-1} \cdot x = x\,a^{-r}\,x^{-1} \cdot x = \\ = x\,a^{-r} = x\,(a^{-1})^r$$

---

[1] Rappelons que le normalisateur de a est formé par les éléments du groupe G qui sont permutables avec a. Le normalisateur de a est un sous-groupe de G.

Rappelons, en outre, que le normalisateur d'un sous-groupe H, de G, est l'ensemble des élements $x \in G$, tels que $x\,H = H\,x$. Le normalisateur de H est le plus grand sous-groupe de G qui contient H comme sous-groupe invariant.

et, moyennant (2. 2), on obtient

$$a^{-m}x=(a^{-1})^m\cdot x=x(a^{-1})^{mr}=x\,a^{-mr},$$

quel que soit l'entier positif m.

Nous pouvons, donc, énoncer la proposition suivante:

Lemme 1. *Si* a *et* x *appartiennent à un groupe et* $ax=xa^r$, *alors on a* $a^s x=x a^{sr}$, *pour tout entier* s.

La relation (2. 1) entraîne

$$a\,x^2=x^2\,a^r\,x$$

et, d'après le lémme 1, on a

$$a\,x^2=x\,a^{r^2}$$

et, par récurrence sur m, on établit

Lemme 2. *Si* a *et* x *appartiennent à un groupe et* $ax=xa^r$, *alors on a* $ax^m=x^m a^{r^m}$, *pour tout entier positif* m.

Remarquons que l'égalité (2. 1) *n'entraîne pas* l'égalité $a\,x^m=x^m\,a^{r^m}$, pour *tout* entier m; il peut même arriver qu'on ait $a\,x^{-1}\neq x^{-1}a^s$, quel que soit l'entier s, comme on voit dans l'exemple suivant:

Exemple: Soit G le groupe multiplicatif formé par les matrices régulières, du type 2×2, sur le corps des nombres réels. Si l'on prend

$$a=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

on voit que

$$a\,x=x\,a^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}.$$

D'autre part, on montre aisément que

$$a^s=\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix},$$

pour *tout entier* s, et, par conséquent, on a

$$\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}=a\,x^{-1}\neq x^{-1}\,a^s=\begin{pmatrix}0&1/2\\1&s\end{pmatrix},$$

quel que soit l'entier s.

Lemme 3. *Si* a *et* x *sont deux éléments d'un groupe* G, *tels que* $ax=xa^r$ *et* $ax^{-1}=x^{-1}a^s$, *avec* $rs\neq 1$, *alors le sous-groupe cyclique engendré par* a *est fini.*

Dém.: En effet, d'après le lemme 1, nous pouvons écrire

$$a=x^{-1}\,a^s\,x=x^{-1}\cdot x\,a^{sr}=a^{sr}.$$

Or, par hypothèse, on a $rs\neq 1$, et, par conséquent, le sous-groupe cyclique engendré par a est fini.

Si n désigne l'ordre de ce sous-groupe, l'égalité $a=a^{sr}$ montre que $sr\equiv 1$ (modulo n); il en résulte que $|r|$ et $|s|$ sont premiers à n.

Plus généralement, on peut énoncer la proposition suivante:

Lemme 4. *Si l'ordre du sous-groupe engendré par* a *est* $n\,(>1)$ *et si l'équation* $ax=xa^r$ *est soluble, alors* $|r|$ *est premier à* n.

Dém.: Nous pouvons évidemment supposer $0<r<n$. Alors, soit d le plus grand commum diviseur des nombres r et n. On a $n=d\,q_1$ et $r=d\,q_2$, q_1 et q_2 étant premiers entre eux.

D'après le lemme 1, on peut écrire

$$a^{q_1}x=x\,a^{q_1\cdot r}=x\,a^{q_2\cdot n}=x,$$

donc,

$$a^{q_1}=u,$$

u étant l'élément neutre pour l'opération du groupe.

Cela veut dire que q_1 est un multiple de n; mais, d'autre part, q_1 est un diviseur de

n, c'est-à-dire, $q_1 = n$, donc $d = 1$ et, par conséquent, r est premier à n.

Il est bien connu que, si $r (> 1)$ est premier à n, alors il y a un entier s, $0 < s < n$, tel que

$$r s \equiv 1 \text{ (modulo } n).$$

Il en résulte, d'après le lemme 1,

$$a^s x = x a^{rs} = x a,$$

donc,

$$a x^{-1} = x^{-1} a^s,$$

ce qui prouve

LEMME 5. *Si le groupe cyclique engendré par* a *est fini et si, en outre, il existe un élément* x *tel que* $\mathrm{a\,x} = \mathrm{x\,a}^r$, *alors il y a un entier* s *tel que* $\mathrm{a\,x}^{-1} = \mathrm{x}^{-1}\mathrm{a}^s$.

Nous pouvons préciser que, sous les hypothèses du lemme 5, il n'y a qu'un entier s tel que $a x^{-1} = x^{-1} a^s$ et $0 < s < n$ (1) et que l'égalité $a x^{-1} = x^{-1} a^{s'}$ est satisfaite, si et seulement si s' et s sont liés par la relation $s' \equiv s$ (modulo n).

3 — L'ensemble des solutions des équations $a x = x a^r$.

Désignons par A_r l'ensemble (éventuellement vide) des solutions de l'équation $a x = x a^r$ et soit A l'union des ensembles A_r, où r parcourt l'ensemble Z des nombres entiers :

$$A = \bigcup_{r \in Z} A_r.$$

L'ensemble A contient le normalisateur $N_{(a)}$ du sous-groupe cyclique (a) engendré par a. En effet, si $x \in N_{(a)}$, alors, pour tout entier h, il existe au moins un entier k, tel que

$$a^h x = x a^k;$$

en particulier, pour $h = 1$, il y a au moins un entier r, pour lequel on a $a x = x a^r$, c'est-à-dire, $x \in A_r$, donc $x \in A$.

(1) Nous excluons naturellement le cas $n = 1$.

L'exemple donné ci-dessus montre que A *n'est pas généralement un sous-groupe du groupe* G.

Cependant,

si $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{y} \in \mathrm{A}$, *alors* $\mathrm{x\,y} \in \mathrm{A}$.

En effet, si l'on a

$$a x = x a^r \text{ et } a y = y a^s,$$

alors, d'après le lemme 1, on a

$$a x y = x a^r y = x y a^{rs}$$

c'est-à-dire, $x y \in A_{rs}$, donc $x y \in A$.

THÉORÈME 1. *Si* A *est un sous-groupe de* G, *alors* A *est le normalisateur du sous-groupe cyclique engendré par* a.

Dém.: Il suffit de montrer que, sous l'hypothèse du théorème, on a $A \subseteq N_{(a)}$, puisqu'on a toujours $N_{(a)} \subseteq A$.

Soit $x \in A$; alors, il y a des entiers r et s, tels que

$$a x = x a^r \text{ et } a x^{-1} = x^{-1} a^s.$$

D'après le lemme 1, on a $a^t x = x a^{tr}$, pour tout entier t, donc $a^t x^{-1} = x^{-1} a^{ts}$. Cela veut dire que

$$(a) x \subseteq x (a) \text{ et } (a) x^{-1} \subseteq x^{-1} (a),$$

où, comme d'habitude, (a) désigne le sous-groupe cyclique engendré par a.

Mais, de cette dernière inclusion, il résulte

$$x (a) \subseteq (a) x,$$

donc

$$x (a) = (a) x,$$

c'est-à-dire, $x \in N_{(a)}$, ce qui prouve le théorème.

Une condition suffisante, pour que l'ensemble A soit un groupe, est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Si le sous-groupe cyclique engendré par* a *est fini, alors* A *est un sous-groupe de* G.

Dém.: En effet, nous avons déjà remarqué que l'ensemble A est non vide et contient, avec deux éléments, leur produit; de plus, d'après le lemme 5, $x \in A$ entraîne $x^{-1} \in A$.

De ce théorème et du lemme 3, il résulte immédiatement

COROLLAIRE 1. *Si, dans* G, *il y a un élément* x *tel que* $x \in A$, $x^{-1} \in A$ *et* $a x = x a^r$, *avec* $|r| \neq 1$, *alors* A *est un sous-groupe de* G.

Moyennant le lemme 2, on peut conclure

COROLLAIRE 2. *Si* $x \in A_r$, *avec* $|r| \neq 1$, *et si l'ordre de* x *est fini, alors* A *est un sous-groupe de* G.

En effet, si l'ordre de x est m, on a

$$a = a x^m = x^m a^{r^m} = a^{r^m}, \text{ avec } r^m \neq 1,$$

donc l'ordre de a est fini.

Sous les hypothèses du corollaire 1, supposons que

$$a y = y a^t$$

et proposons-nous de déterminer une équation de ce même type qui soit satisfaite par y^{-1}.

Une telle équation existe, puisque A est un groupe.

Les équations

$$a x = x a^r \text{ et } a x^{-1} = x^{-1} a^s$$

entraînent

$$a^{rs} = a$$

et, de même, les équations

$$a y = y a^t \text{ et } a y^{-1} = y^{-1} a^{t'}$$

entraînent

$$a^{t t'} = a .$$

Mais l'ordre de a est fini, soit n, (puisque $rs \neq 1$); donc

$$(3.\ 1) \qquad rs - t t' \equiv 0 \ (\text{modulo } n).$$

Or cette congruence a au moins une solution t', puisque t est premier à n (1), d'après le lemme 4.

Inversement, si t' satisfait la congruence (3. 1), on a

$$a^{t'} y = y a^{t t'} = y a^{rs} = y a$$

et il en résulte

$$a y^{-1} = y^{-1} a^{t'} .$$

THÉORÈME 3. *Si* $x^h \in A_r$ *et* $x^k \in A_s$ *et* $r^{|k|} \neq s^{|h|}$, *alors* A *est un sous-groupe de* G.

Dém.: Supposons $h>0$ et $k>0$; d'après le lemme 2, on a

$$a x^{hk} = x^{hk} \cdot a^{r^k} = x^{hk} \cdot a^{s^h},$$

d'où

$$a^{r^k} = a^{s^h}$$

et, puisque $r^k \neq s^h$, l'ordre de a est fini et on a

$$r^k - s^h \equiv 0 \ (\text{modulo } n),$$

n étant l'ordre de a.

Si $h<0$ et $k<0$, en posant $y = x^{-1}$, $h' = -h$ et $k' = -k$, on a de même

$$r^{k'} - s^{h'} \equiv 0 \ (\text{modulo } n).$$

Si $h<0$ et $k>0$, soit $h' = -h$; alors, des équations

$$a x^{-h'} = x^{-h'} \cdot a^r \text{ et } a x^k = x^k \cdot a^s,$$

(1) Puisque l'ordre de a est fini, nous pouvons supposer t positif.

il résulte, d'après le lemme 2,

$$a\,x^{-h'k} = x^{-h'k}\cdot a^{rk} \quad \text{et} \quad a\,x^{h'k} = x^{h'k}\cdot a^{sh'},$$

et, puisque $r^k\cdot s^{h'} \neq 1$, il en résulte, d'après le lemme 3, que l'ordre de a est fini(1).

On arrive à la même conclusion, si l'on a $h>0$ et $k<0$.

Ainsi, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, l'ordre de a est fini et, par conséquent, A est un sous-groupe de G (théorème 2).

4 — Décomposition de A par rapport à N_a.

Nous savons que $N_a \subseteq A$; le théorème suivant permet de voir plus clairement les relations qui existent entre N_a et A.

Théorème 4. *Si* $x \in A_r$, *on a* $y \in A_r$, *si et seulement si* $x\,y^{-1} \in N_a$.

Dém.: En effet, des équations

$$a\,x = x\,a^r \quad \text{et} \quad a\,y = y\,a^r$$

il résulte

$$a\,x\,y^{-1} = x\,a^r\,y^{-1} = x\,y^{-1}\,a,$$

d'où $x\,y^{-1} \in N_a$.

Inversement. si $x \in A_r$ et $x\,y^{-1} \in N_a$, c'est-à-dire,

$$a\,x = x\,a^r \quad \text{et} \quad a\,x\,y^{-1} = x\,y^{-1}\,a,$$

alors

$$x\,y^{-1}\,a = a\,x\,y^{-1} = x\,a^r\,y^{-1};$$

il en résulte

$$y^{-1}\,a = a^r\,y^{-1}$$

et, par conséquent,

$$a\,y = y\,a^r,$$

d'où $y \in A_r$, ce qui prouve le théorème.

(1) Si n désigne l'ordre de a, alors on a $r^k\cdot s^{h'} \equiv 1$ (modulo n).

De ce théorème il résulte que, si $x \in A_r$, alors, $A^r = N_a\,x$; donc, si $A_r \neq A_s$, l'intersection $A_r \cap A_s$ est l'ensemble vide.

Ainsi, *il y a une partition de l'ensemble* A, *formée par des ensembles de la forme* $N_a\,x$.

5 — Le groupe-quocient $N_{(a)}/N_a$.

On voit aisément que N_a est un sous-groupe invariant dans $N_{(a)}$.

En effet, soient $x \in N_{(a)}$ et $y \in N_a$; les équations

$$a\,x = x\,a^r \quad \text{et} \quad a\,y = y\,a$$

entraînent

$$a\cdot x\,y\,x^{-1} = x\,a^r\,y\,x^{-1} = x\,y\,a^r\,x^{-1} = x\,y\,x^{-1}\cdot a,$$

donc $x\,y\,x^{-1} \in N_a$.

Théorème 5. *Le groupe-quocient* $N_{(a)}/N_a$ *est un groupe abélien fini, quel que soit* $a \in G$.

Dém.: En effet, soit

$$N_{(a)}/N_a = \{N_a, N_a\,b, N_a\,c, \dots\}$$

où $b \notin N_a$, $c \notin N_a$ et $c \notin N_a\,b$.

Alors, on a

$$a\,b = b\,a^r \quad \text{et} \quad a\,c = c\,a^s, \tag{5. 1}$$

avec $r \neq 1 \neq s$; on a, de plus, $r \neq s$, en conséquence du théorème 4.

Soit $r \neq -1$; alors, si t est un entier tel que

$$a\,b^{-1} = b^{-1}\,a^t\,(1),$$

on a $r\,t \neq 1$ et, d'après le lemme 3, on déduit que l'ordre de a est fini. Donc, il y a seulement un nombre fini d'équations du type $a\,x = x\,a^r$, qui soient distinctes (2). Or chaque élément de $N_{(a)}/N_a$ est une classe

(1) Un tel entier existe, puisque $b^{-1} \in N_{(a)}$.

(2) Plus précisement. si n désigne l'ordre de a et m est un entier, l'équation $a\,x = x\,a^m$ est équivalente à une équation $a\,x = x\,a^r$, où r est un entier tel que $1 \leqslant r \leqslant n$.

formée par toutes les solutions d'une telle équation et, par conséquent, le groupe $N_{(a)}/N_a$ est fini.

A fin d'établir que le groupe $N_{(a)}/N_a$ est abélien, observons que, des relations (5. 1) il résulte

$$a\,b\,c = b\,a^r\,c = b\,c\,a^{rs} \quad \text{et} \quad a\,c\,b = c\,a^s\,b = c\,b\,a^{rs},$$

c'est-à-dire, $b\,c$ et $c\,b$ sont solutions d'une même équation du type $a\,x = x\,a^t$, donc $b\,c \in N_a\,c\,b$ et, par conséquent,

$$N_a\,b\,c = N_a\,c\,b\,,$$

c'est-à-dire,

$$N_a\,b \cdot N_a\,c = N_a\,c \cdot N_a\,b\,,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous venons de prouver que, si l'ordre du groupe-quocient $N_{(a)}/N_a$ est plus grand que 2, alors a est un élément d'ordre fini. D'autre part, si l'ordre de a est n et l'équation $a\,x = x\,a^r$ est soluble, alors, d'après le lemme 4, r est premier à n (¹). Donc

$$ord\ (\mathrm{N}_{(a)}/\mathrm{N}_a) > 2 \ \ entraîne$$
$$ord\ (\mathrm{N}_{(a)}/\mathrm{N}_a) \leqq \varphi(\mathrm{n}),$$

où φ est l'*indicateur d'Euler*.

Maintenant nous allons préciser ce résultat: Soit $a\,b = b\,a^r$ et proposons-nous de déterminer tous les éléments du groupe cyclique (b) qui appartiennent à N_a.

Si $r = 1$, on a évidemment $(b) \subseteq N_a$.

Supposons $r \neq 1$.

D'après le lemme 2, on a, pour tout entier positif m,

$$a\,b^m = b^m\,a^{r^m}$$

et, par conséquent, $b^m \in N_a$, si et seulement si

$$(5.\ 2) \qquad r^m \equiv 1 \ (\text{modulo } n).$$

Soit e *l'exposant de* r *par rapport à* n, c'est-à-dire, e est l'infimum des entiers positifs m satisfaisant la condition (5. 2).

Il est immédiat que l'entier e est un diviseur de tout entier positif m satisfaisant (5. 2) et, inversement, de

$$r^e \equiv 1 \ \ (\text{modulo } n)$$

il résulte, pour tout entier k,

$$r^{ke} \equiv 1 \ \ (\text{modulo } n);$$

et, par conséquent,

$$(b) \cap N_a = (b^e).$$

En particulier, e est un diviseur de $\varphi(n)$, une fois que, d'après un bien connu théorème d'Euler, on a

$$r^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (\text{modulo } n).$$

Il en résulte que l'ordre de tout sous-groupe cyclique de $N_{(a)}/N_a$ est un diviseur de $\varphi(n)$.

D'autre part, on sait que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit direct de sous-groupes cycliques (dont les ordres sont puissances de nombres premiers).

De tout cela, il résulte le théorème suivant:

Théorème 6: *Si l'on a ord* $(\mathrm{N}_{(a)}/\mathrm{N}_a) > 2$, *alors l'ordre de* a *est fini et ord* $(\mathrm{N}_{(a)}/\mathrm{N}_a)$ *est un diviseur de* $\varphi(\mathrm{n})$, *où* n *désigne l'ordre de* a *et* φ *est l'indicateur d'Euler.*

Supposons ord $(N_{(a)}/N_a) = 2$, c'est-à-dire,

$$N_{(a)}/N_a = \{N_a\,,\, N_a\,b\}\,,$$

où $a\,b \neq b\,a$, $a\,b = b\,a^r$ (avec $r \neq 1$), $b^2 \in N_a$.

Si $r > 0$, alors

$$a\,b^2 = b^2\,a^{r^2} = b^2\,a$$

et, par conséquent,

$$a^{r^2} = a\,.$$

(¹) Nous pouvons supposer r positif, une fois que l'ordre de a est fini.

Si $r<0$, en posant $r'=-r$, on a

$$b^{-1}a^{-1}=a^{r'}b^{-1}$$

et on peut écrire

$$a^{-1}b=b\,a^{r'},$$

d'où

$$a^{-1}b^2=b^2a^{-r'^2}=b^2a^{-1},$$

donc

$$a^{r'^2}=a=a^{r^2}.$$

Cela veut dire que, si l'ordre de a est n, alors

$$r^2\equiv 1 \text{ (modulo } n);$$

si l'ordre de a est infini, alors on a $r=-1$.

Par conséquent,

THÉORÈME 7. *Si ord* $(\mathrm{N}_{(\mathrm{a})}/\mathrm{N}_{\mathrm{a}})=2$ *et le sous-groupe cyclique* (a) *est infini, les seuls entiers* r *pour lesquels l'équation* $\mathrm{a\,x}=\mathrm{x\,a^r}$ *est soluble sont* 1 *et* -1.

Il en résulte immédiatement le suivant

COROLLAIRE. *Si le sous-groupe cyclique* (a) *est infini, alors on a* $\mathrm{N}_{(\mathrm{a})}=\mathrm{N}_{\mathrm{a}}$, *si et seulement si l'équation* $\mathrm{a\,x}=\mathrm{x\,a^{-1}}$ *n'est pas soluble.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALMEIDA COSTA, *Elementos de Álgebra Linear e de Geometria Linear,* Lisboa, 1958.

[2] C. C. MAC DUFFEE, *An Introduction to Abstract, Algebra,* John Wiley & Sons New York, 1940.

[3] NATHAN JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra,* vol. I, D. Van Nostrand Company, New York, 1951.

[4] PAUL DUBREIL, *Algèbre,* tome I, Gauthier-Villars Paris, 1946.

[5] PAUL DUBREIL et M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'Algèbre Moderne,* Dunod, Paris, 1961.

Sobre alguns teoremas da teoria das matrizes

por **Graciano Neves de Oliveira**

§ 1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, I a matriz identidade da mesma ordem e x uma variável.

É sabido que em várias questões tem interesse considerar a função

$$S(x)=|A-x\,I|$$

que é evidentemente um polinómio de grau n em x e se denomina *polinómio característico* de A.

Podemos escrever

$$(1.\ 1)\qquad |A-x\,I|=(-x)^n+(-x)^{n-1}S_1+\\+\cdots+(-x)\,S_{n-1}+S_n$$

e demontrou JACOBI que o coeficiente S_{n-k} de $(-x)^k$ é igual à soma dos menores principais de ordem $n-k$ do determinante da matriz A (1).

Ocupar-nos-emos agora da dedução duma fórmula que nos permitirá dar uma demonstração muito simples deste teorema de JACOBI.

§ 2. Consideremos a função de x

$$D(x)=|A-x\,\mathrm{I}\,|$$

e procuremos a expressão da sua derivada de ordem k.

Designemos por $D^{(\alpha_1,\,\cdots,\,\alpha_k)}$ o menor principal de $D(x)$ que se obtém, suprimindo as

(1) VICENTE GONÇALVES, Curso de Álgebra Superior, 2.º volume (1950), pág. 153.

linhas de ordem $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ e as colunas das mesmas ordens.

Sendo a_{ik} o elemento da linha i e coluna k de A temos pela conhecida regra de derivação de determinantes

$$\frac{d\,D(x)}{d\,x} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \cdots$$

e atendendo ao teorema de LAPLACE

$$\frac{d\,D}{d\,x} = -\sum_{\alpha_1=1}^{n} D^{(\alpha_1)}.$$

Como $D^{(\alpha_1)}$ é um determinante da forma de D conclui-se sem mais que

$$\frac{d\,D^{(\alpha_1)}}{d\,x} = -\sum_{\alpha_2 \neq \alpha_1} D^{(\alpha_1, \alpha_2)}$$

e ainda por $D^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ ser da forma de D tem-se

$$\frac{d\,D^{(\alpha_1, \alpha_2)}}{d\,x} = -\sum_{\alpha_3 \neq \alpha_1, \alpha_2} D^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}$$

ou dum modo geral

$$(2.\ 2) \qquad \frac{d\,D^{(\alpha_1, \cdots, \alpha_i)}}{d\,x} = \\ = \sum_{\alpha_{i+1} \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_i} D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1})}.$$

Podemos agora demonstrar por indução a fórmula

$$(2.\ 3) \qquad \frac{d^k\,D}{d\,x^k} = (-1)^k \sum_{\alpha_1=1}^{n} \sum_{\alpha_2 \neq \alpha_1} \cdots \\ \cdots \sum_{\alpha_k \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}} D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

Em primeiro lugar ela verifica-se para $k=1$ como mostra (2. 1). Suponhamo-la válida para $k=i$

$$(2.\ 4) \qquad \frac{d^i\,D}{d\,x^i} = (-1)^i \sum_{\alpha_1=}^{n} \cdots \\ \cdots \sum_{\alpha_i \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}} D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)}$$

e provemos que então também vale para $k=i+1$.

Derivando (2. 4) e por (2. 2) temos

$$\frac{d^{i+1}\,D}{d\,x^{i+1}} = (-1)^{i+1} \sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \\ \cdots \sum_{\alpha_i \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}} \sum_{\alpha_{i+1} \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_i} D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1})}$$

que mostra que (2. 3) é válida para a ordem $k=i+1$.

Fica pois estabelecida a fórmula (2. 3) que duma maneira mais simples se pode escrever

$$(2.\ 5) \qquad \frac{d^k\,D}{d\,x^k} = (-1)^k \sum D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

subentendendo-se que o somatório é estendido a todas as permutações $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ de k números tomados de 1 a n.

É claro que dois determinantes $D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$ que só difiram pela ordem dos α_i são iguais. Fixados k números $\alpha_1 \cdots \alpha_k$ entrarão pois no somatório do segundo membro de (2. 5) $k!$ determinantes iguais a $D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$. A soma deles pode portanto substituir-se por $k!\,D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$ e supor-se $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$. Logo (2. 5) pode escrever-se

$$(2.\ 6) \qquad \frac{d^k\,D}{d\,x^k} = \\ = (-1)^k\,k! \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k} D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

§ 3. Podemos agora fazer a demonstração do teorema atrás referido.

Designemos por $A^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$ o valor de $D^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$ para $x=0$, que é precisamente o valor do menor principal de A obtido por supressão das linhas $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ e colunas das mesmas ordens.

Tomemos em (1. 1) as derivadas de ordem k para $x=0$. O primeiro membro reduz-se por (2. 6) a

$$(3.\ 1) \qquad (-1)^k k! \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} A^{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}$$

e o segundo membro reduzir-se-á ao termo independente da derivada de ordem k do polinómio que representa e que é

$$(3.\ 2) \qquad (-1)^k k!\, S_{n-k}.$$

As expressões (3. 1) e (3. 2) deverão ser iguais donde se tira

$$S_{n-k} = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} A^{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)}$$

que nos diz precisamente que S_{n-k} é a soma dos menores principais de ordem $n-k$ do determinante da matriz A, como pretendíamos.

§ **4.** Por um processo análogo ao acabado de seguir se pode demonstrar o teorema de LAPLACE sobre determinantes. Para fazermos esta demonstração é porém necessário basearmo-nos em que a derivada dum determinante em ordem a um seu elemento é o complemento algébrico desse elemento. A demonstração deste facto pode fazer-se muito simplesmente com o auxílio do teorema de LAPLACE, mas também se pode fazer independentemente deste, como aqui convém evitar um círculo vicioso.

De facto seja

$$(4.\ 1) \qquad y = |a_{ik}|$$

e designemos o elemento da linha r e coluna s por x. A regra que aplicámos no § 1 para derivar determinantes pode demonstrar-se independentemente do teorema de LAPLACE[1]. Aplicando-a a (4. 1) e depois por trocas convenientes de filas paralelas chega-se a

$$(4.\ 2) \qquad \frac{dy}{dx} = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ X & A \end{vmatrix}$$

em que 0 representa a matriz nula do tipo $1 \cdot (n-1)$, X a matriz coluna de elementos $a_{is} (i = 1, \cdots n;\ i \neq r)$ e A o menor complementar de x. Atendendo agora à definição de determinante fàcilmente se prova regra.

Posto isto consideremos o determinante D de elemento genérico a_{ik}. Por definição ele é igual à soma dos termos pares da sua matriz menos os termos ímpares da mesma. Nalguns dos termos o representante da linha i é a_{i1}, noutros $a_{i2}, \cdots$ noutros é a_{in}. A soma dos termos pares e ímpares depois de multiplicados por -1 que contêm a_{i1} pode pois representar-se por $a_{i1} k_1$ em que k_1 é independente de todos os elementos da linha i. Anàlogamente para a soma dos termos que contêm a_{i2}, etc. Por outro lado como todos os termos têm de conter algum elemento da linha i podemos escrever

$$D = a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \cdots + a_{in} k_n.$$

Vamos procurar determinar as constantes k_j. Derivando a igualdade acima em ordem a a_{ij} temos

$$\frac{dD}{da_{ij}} = k_j$$

mas $\dfrac{dD}{da_{ij}}$ é o complemento algébrico de a_{ij}. Ficam pois determinadas as constantes e demonstrado o teorema de LAPLACE.

§ **5.** Vamos agora introduzir o conceito de *derivada duma matriz* o que nos permitirá chegar a conclusões interessantes.

---

[1] VICENTE GONÇALVES, C. de Álg. Sup., 2.º vol. (1950), pág. 149.

Seja A uma matriz cujos elementos são funções deriváveis da variável x que toma valores em certo conjunto X. Chamaremos derivada de A em ordem a x, num ponto interior de X, à matriz que de A se obtém substituindo cada elemento pela sua derivada nesse ponto. Representaremos a derivada de A em ordem a x por $\dfrac{dA}{dx}$.

Demonstramos agora algumas propriedades da derivação de matrizes que mais tarde utilizaremos.

Sendo
$$A(x) = B(x)\,C(x)$$
tem-se

$$\text{(5. 1)} \qquad \frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dx}\,C + B\,\frac{dC}{dx}\,.$$

De facto o elemento da matriz A será
$$a_{ik} = \sum_{\alpha} b_{i\alpha}\, c_{\alpha k}$$
e de $a'_{ik} = \sum b'_{i\alpha}\, c_{\alpha k} + \sum b_{i\alpha}\, c'_{\alpha k}$ logo se conclui (5. 1). É fácil fazer a generalização para mais de dois factores.

Em particular pondo $B(x) = f(x)\,I$ temos
$$\frac{dA(x)}{dx} = f'(x)\,C(x) + f(x)\,\frac{dC(x)}{dx}\,.$$

Como a regra de derivação do produto duma função por uma matriz é idêntica à regra de derivação do produto de duas funções, e ainda porque o produto duma função por uma matriz é igual ao produto da matriz pela função, fàcilmente se conclui que se mantém a fórmula de Leibniz
$$\frac{d^k f(x)\,C(x)}{dx^k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x)\, C^{(k-i)}(x)\,.$$

É evidente que $\dfrac{d(A+B)}{dx} = \dfrac{dA}{dx} + \dfrac{dB}{dx}$.

§ **6.** É sabido que se chama matriz *adjunta* da matriz $A - xI$ à matriz cujo elemento da linha i e coluna k é o complemento algébrico do elemento da linha k e coluna i de $A - xI$. E sendo $B(x)$ a adjunta de $A - xI$ tem lugar a igualdade

$$\text{(6. 1)} \qquad (A - xI)\,B(x) = |\,A - xI\,|\,I\,.$$

Atendendo à definição de $B(x)$ é fácil concluir que cada elemento desta matriz é um polinómio de grau quando muito $n-1$. Portanto pode escrever-se

$$\text{(6. 2)} \qquad B(x) = B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \\ + \cdots + B_{n-1} x + B_n$$

com B_i matrizes cujos elementos são números.

Em $B(x)$ só os elementos principais são de grau $n-1$, os restantes são de grau inferior. E o coeficiente de x^{n-1} nos elementos principais é precisamente $(-1)^{n-1}$. Logo

$$\text{(6. 3)} \qquad B_1 = (-1)^{n-1}\,I\,.$$

§ **7.** Seja A uma matriz qualquer. Se A é regular $S(x) = |\,A - xI\,|$ é diferente de zero para $x = 0$ e como é uma função contínua de x manter-se-á diferente de zero em alguma vizinhança deste ponto. Se porém A é singular teremos $S(0) = 0$. Como um polinómio só tem zeros isolados existirá ainda neste caso uma vizinhança de zero (com o zero excluido) onde $S(x) \neq 0$. Qualquer que seja A podemos pois sempre determinar uma vizinhança de zero (excluindo este se necessário) em que $S(x) \neq 0$. Suponhamos pois que x varia nessa região.

Teremos
$$(A - xI)\,(A - xI)^{-1} = I\,.$$

Derivando e pelas propriedades atrás estabelecidas temos
$$-(A - xI)^{-1} + (A - xI)\,\frac{d(A - xI)^{-1}}{dx} = 0$$
donde

$$\text{(7. 1)} \qquad \frac{d(A - xI)^{-1}}{dx} = (A - xI)^{-2}\,.$$

Vamos demonstrar por indução a fórmula

$$(7.2)\qquad \frac{d^n (A - x I)^{-1}}{d x^n} = n!\,(A - x I)^{-n-1}.$$

Ela é válida para $n = 1$ como mostra (7.1). Suponhamo-la válida para $n = k$:

$$\frac{d^k (A - x I)^{-1}}{d x^k} = k!\,(A - x I)^{-1} \cdots (A - x I)^{-1}$$
$(k + 1$ factores matriciais$)$.

Derivando tem-se

$$\frac{d^{k+1} (A - x I)^{-1}}{d x^{k+1}} = k! \left[\frac{d (A - x I)^{-1}}{d x} (A - x I)^{-1} \cdots + \right.$$
$$\left. + (A - x I)^{-1} \frac{d (A - x I)^{-1}}{d x} \cdots + \cdots \right].$$

Por (7.1)

$$\frac{d^{k+1} (A - x I)^{-1}}{d x^{k+1}} = k!\,[(A - x I)^{-2} (A - x I)^{-1} \cdots +$$
$$+ (A - x I)^{-1} (A - x I)^{-2} (A - x I)^{-1} \cdots + \cdots] =$$
$$= k!\,[(A - x I)^{-k-2} + (A - x I)^{-k-2} + \cdots].$$

Como no colchete há $k + 1$ parcelas vem

$$\frac{d^{k+1} (A - x I)^{-1}}{d x^{k+1}} = (k + 1)!\,(A - x I)^{-k-2}$$

que mostra que (7.2) é válida para a ordem $k + 1$. Fica pois a fórmula (7.2) completamente demonstrada.

§ 8. Escrevendo $T(x)$ em vez de $(A - x I)^{-1}$ e $S(x)$ em vez de $|A - x I|$ da igualdade (6.1) tira-se

$$B(x) = S(x)\,T(x)$$

e pela fórmula de Leibniz

$$\frac{d^k B(x)}{d x^k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} S^{(i)}(x)\,T^{(k-i)}(x).$$

Atendendo a (7.2) podemos ainda escrever

$$\frac{d^k B(x)}{d x^k} = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} S^{(i)}(x) (A - x I)^{i-k-1}$$

donde

$$(8.1)\qquad (A - x I)^{k+1} \frac{d^k B(x)}{d x^k} =$$
$$= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} S^{(i)}(x) (A - x I)^i.$$

Se A é regular podemos fazer $x = 0$ e vem

$$(8.2)\qquad A^{k+1} \left(\frac{d^k B(x)}{d x^k} \right)_{x=0} =$$
$$= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} S^{(i)}(x)\,A^i.$$

Se A é singular vem de (8.1)

$$\lim_{x \to 0} (A - x I)^{k+1} \left(\frac{d^k B(x)}{d x^k} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} k! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} S^{(i)}(x) (A - x I)^i$$

e por evidentes razões de continuidade tira-se novamente (8.2).

Entrando em (8.2) com o valor de $S^{(i)}(0)$ indicado no § 3 e tirando $\left(\frac{d^k B(x)}{d x^k} \right)_{x=0}$ de (6.2) vem

$$(8.3)\qquad A^{k+1} B_{n-k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i S_{n-i} A^i,$$

igualdade que pretendíamos demonstrar e de que o teorema de Hamilton-Cayley, se pode considerar caso particular. Com efeito, fazendo $k = n - 1$ e por (6.3) vem

$$(-1)^{n-1} I A^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_{n-i} A^i$$

ou

$$(-1)^n A^n + (-1)^{n-1} S_1 A^{n-1} +$$
$$+ \cdots - S_{n-1} A + S_n I = 0,$$

isto é, *a matriz* A *anula o seu polinómio característico*. Desta igualdade tira-se

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i S_{n-i} A^i = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^i \quad (S_0 = 1)$$

pelo que (8. 3) passa a escrever-se

$$A^{k+1} B_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^i$$

e se A é regular

$$B_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{i+1} S_{n-i} A^{i-(k+1)}$$

ou, pondo $i-(k+1)=j$

$$B_{n-k} = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j S_{n-k-1-j} A^j \tag{8. 4}$$

que nos dá as matrizes coeficientes do desenvolvimento (6. 2). Em particular, fazendo $k=0$ obtém-se a matriz adjunta de A:

$$\hat{A} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j S_{n-1-j} A^j .$$

§ **9.** Deduzimos a fórmula (8. 4) só para o caso de A ser regular, mas ela é válida ainda para o caso de A ser singular. Efectivamente, sendo A singular $|A-\eta I|$ anula-se para $\eta=0$, mas existe uma vizinhança ε da origem, com esta excluida, onde $|A-\eta I| \neq 0$. Designemos por $B_{n-k}(\eta)$ os coeficientes do desenvolvimento (6. 2) aplicado à matriz $A(\eta)=A-\eta I$ e por $S_i(\eta)$ os coeficientes do polinómio característico da mesma matriz que serão polinómios em η.

Para a matriz $A(\eta)$ com $\eta \in I(0,\varepsilon)$, $\eta \neq 0$ teremos

$$B_{n-k}(\eta) = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j S_{n-k-1-j} A^j(\eta)$$

tomando limites para $\eta=0$ e por razões de continuidade obtém-se novamente a fórmula (8. 4).

Enquadramento sinóptico do pensamento matemático

por **J. M. Gil**

No que se expõe a seguir procurámos uma sistematização dos aspectos diferentes assumidos pelo pensamento matemático, com carácter provisório de ponto de partida para estudos aprofundados. Não há a contribuição de interpretação valiosa de algum dos aspectos apontados, nem esclarecimento pertinente de algum ponto do tema, tão sòmente deficiência de exposição por falta de domínio dos assuntos encarados. Mesmo assim pareceu-nos a apresentação de interesse, quanto ao nexo articular que nos esforçámos por manter, para quem desejar um esquema inicial de trabalho, sujeito a futuras correcções, à medida que se progride.

A inspiração veio profundamente de «Consistency and Completeness» – FRANK DE SUA – A. M. M. pág. 295 – 1956, e ainda dos trabalhos «Kurt Goedel e os Problemas do Fundamentos da Matemática e a Teoria do Conjuntos» – L. NEVES REAL – G. M. n.º 4 – 1951, e «O que é uma Axiomática – J. SEBASTIÃO E SILVA – G. M. n.º 5 – 1953, e «Sobre a não contradição d Matemática» – GOTTFRIED KOETH – G. M n.º 58 – 1954, e «Aspectos da Actualidad Matemática» – A. PEREIRA GOMES – G. M n.º 68-69-70-71 – 1957-1958.

Utilizámos também de perto «Men Matematics» – PARADISE LOST? (CANTO E. T. BELL – 1937, «Les Fondements Log ques des Mathématiques» – E. W. BET – 1950, e os artigos de HANS HAHN – «In nity», de CARL G. HEMPEL – «On the natu of mathematical truth», de RAYMOND L. WI DER – «The axiomatic method», de ERNE

NAGEL + JAMES R. NEWMAN — «Goedel's proof», de OSWALD VEBLEN + J. WESLEY YOUNG — «A Mathematical Science», de RICHARD VON MISES — «Mathematical Postulates and human understanding», de J. VON NEWMAN — «The mathematician» – em «The Wold of Mathematics» — New York, 1956, e também «The Basic Concepts of Algebraic Logic» – P. R. HALMOS – A. M. M. pág. 363 — 1956, por vezes, de tão perto que foram feitas transcrições completas, quando o todo se integrava sem dificuldade na exposição, enriquecendo-a, embora o facto não esteja na altura apontado.

1 — A matemática foi tida durante muito tempo, por razões de confiança na construção e de sucesso imediato nas descrições, como *isenta de contradição*. Ainda por vezes o é, gratuitamente. A cada uma das suas teorias atribui-se um rigor tal que afasta a possibilidade de alguma contradição.

2 — A formulação da «Teoria dos Conjuntos», incluindo os conjuntos infinitos, como foi apresentada por CANTOR, conduziu a contradições — as antinomias.

No entanto, a noção de conjunto tinha sido utilizada largamente na construção da Análise Clássica — estudo dos números e das funções de números. Não só conjuntos finitos, mas também conjuntos infinitos. por oposição aos conjuntos finitos, e a muitos destes tinham-se estendido as propriedades daqueles.

3 — Propôs-se como aceitável — FREGE, 1879, e RUSSELL, 1901 — a definição de número cardinal n: — a classe, definida pela propriedade comum a todos os conjuntos equivalentes a um dado conjunto. Sustenta-se que a propriedade comum aos conjuntos considerados define um conjunto — classe — com um único elemento, a que se dá o nome de número cardinal. A «propriedade» é assim suficiente para definir alguma coisa, para garantir a *existência* dum conjunto, vazio ou não.

Claramente a existência dum conjunto fica assegurada com a indicação de todos os seus elementos, mas no caso de conjuntos infinitos, por oposição aos finitos, a determinação não é exequível por este processo.

Está indicado definir um destes conjuntos compreensivamente por uma propriedade comum e exclusiva dos seus elementos.

Para definir um conjunto infinito precisamos dum universo sem restrições.

Uma propriedade seguramente define um conjunto num universo restrito de referência, isto é, tem nele uma *extensão*, quando é possível reconhecer em cada elemento do universo a participação ou não participação dessa propriedade. Este reconhecimento é o processo construtivo do conjunto.

O processo pode falhar na construção dos conjuntos infinitos.

Admitamos um universo de referência sem restrições. A extensão da propriedade p obter-se-ia marcando os objectos que a manifestassem. O processo não exige a marcação da própria extensão, como objecto do universo de referência, porque pretende simplesmente individualizá-la; quer tenha a propriedade quer não, colho-a sempre, sempre a individualizo. A extensão da propriedade p pode ter, ou não, a propriedade p. O processo indicado para a sua determinação não exige que me pronuncie sobre o facto. Supondo uma marcação por tiragem, tiraria sempre o conjunto extensão de p, sem, possìvelmente, me ter pronunciado sobre esse elemento do universo de referência.

A possibilidade de pronunciação a respeito da propriedade p depende mesmo da atitude tomada em relação ao universo de referência.

Como há possìvelmente falta de pronunciação a respeito dum objecto do universo de referência, não ficará concluida a construção do conjunto extensão da propriedade

p. O processo usado, em geral, não garante o acabamento da construção, nem a existência de conjuntos infinitos.

A definição compreensiva dum conjunto infinito exigiria ainda uma escolha das propriedades definidoras em relação à Lógica usada na construção do conjunto.

Há conjuntos que têm a propriedade de não serem elementos deles próprios; por exemplo, qualquer conjunto de objectos materiais da mesma natureza, ou um conjunto de rectas dum plano. Esta propriedade não define um conjunto, quando se utiliza a Lógica de Aristóteles — B. RUSSEL.

Claramente, supondo que existe o conjunto S dos conjuntos com a propriedade de não serem elementos de eles prórios, é S subconjunto de S, isto é, os elementos de S são elementos dele próprio — propriedade geral dos conjuntos; mas, se S é elemento de S, tem a propriedade de não ser elemento de ele próprio, contra a propriedade geral indicada. A hipótese da existência de S é absurda. Segundo a Lógica de Aristóteles o conjunto S não existe.

Há números que satisfazem a definição de número ordinal, mas, no sentido apontado, não existe o conjunto dos números ordinais. A propriedade de ser «número ordinal» não é definidora de conjunto — BURALI-FORTI.

Existem conjuntos finitos mas a propriedade de «ser conjunto» não é definidora de conjunto. No sentido considerado, não existe o conjunto de todos os conjuntos — CANTOR.

A possibilidade de definição por compreensão é limitada pela Lógica usada, sob a forma de regras de dedução.

SKOLEM demonstrou a existência de conjuntos de números sem propriedade definidora na Lógica de Aristóteles.

BERRY e RICHARD isolaram números finitos, constituindo um conjunto numerável, que não formariam um conjunto. Aceitando a existência de conjuntos numeráveis, a Lógica de Aristóteles — a usada — não permite decidir se os números gozam da propriedade de ser conjunto ou não. Por serem conjunto numerável seriam conjunto, por outro lado não satisfazem a definição de conjunto.

A propriedade definidora pode ser tal que a lógica usada não seja suficientemente informadora a respeito da participação dela por um dado objecto. Esta decisão pode exceder a capacidade da lógica usada.

A definição de conjunto por compreensão só é aceitável, em geral, como axioma — o Axioma da Compréensão.

A extensão duma propriedade e conjunto terão de ser noções diferentes, podendo convir ao mesmo objectivo em casos particulares.

4 — O problema fundamental de encontrar processo de definição dum conjunto, que não seja finito, ficou ligado ao problema da existência das entidades matemáticas.

A construção dum conjunto infinito por marcação dos elementos dum universo de referência, sem restrições, pode considerar-se legítima, se entendo que as entidades matemáticas têm existência independentemente de nós, independentemente de as construirmos ou não. O universo de referência do pensamento, na sua maior latitude, conterá todas as entidades matemáticas, incluindo o próprio conjunto. Assim sou obrigado a pronunciar-me sobre se tem ou não a propriedade definidora. O problema de fundo é o da legitimidade da concepção de tal universo que terá de ser postulado — Princípio da Abstracção, sem restrições.

Se sustento que as entidades matemáticas existem só porque as construo, o conjunto que procuro construir ainda não existe, não é elemento do universo em referência, e não terei de pronunciar-me sobre ele. Preciso apenas de encontrar processo — uma construção — de colher todos os objectos com a propriedade definidora. Se tal construção existe, o conjunto procurado existe. O conjunto será a extensão da propriedade p, se se provar por outra construção que os objectos, não colhidos, não tem a propriedade p.

O problema fundamental é agora definir as construções legítimas, as regras que produzem os elementos do conjunto.

Uma construção que conduza a um objecto do universo de referência não é definidora de novo conceito. Não poderei construir conjuntos com a propriedade de serem elementos de eles próprios.

Todas as propriedades são definidoras de conjunto por construção, incluindo o conjunto vazio.

Também se negou a existência de conjuntos como extensão de algumas propriedades, porque conduzia a contradições; o que equivale a afirmar que existem os conceitos que não conduzem a contradições, segundo as regras de inferência usadas.

5 — O pensamento matemático triparte-se assim, quanto à natureza e existência dos seus objectos, em: atitude realista ou platónica — a de CANTOR e outros — os objectos do pensamento matemático existem independentemente da construção matemática; atitude intuicionista — a de KANT, KRONECKER, BROUWER, WEIL e outros — os objectos do pensamento matemático são construções de pura intuição, existem quando são construidos com um número finito de operações elementares legítimas; e a atitude nominalista ou logistica — a de PEANO, RUSSELL e outros — os objectos do pensamento matemático são simples sinais desligados da realidade ou de puras intuições, e combinações destes segundo regras básicas; existem quando não conduzem a contradição.

6 — Qualquer das atitudes procura desembaraçar-se das contradições, procura justificar as suas teorias pela garantia da não-contradição.

No realismo, acredita-se na existência dos conjuntos e esclarece-se o conceito de «propriedade» ou de «condição», para evitar paradoxos; no intuicionismo, legitimam-se as construções que não conduzem a contradição; no logicismo, admitem-se as combinações de sinais que não são contraditórias.

Ora a contradição entende-se dentro da lógica usada, das regras de inferência admitidas válidas. Estas regras de inferência precisam de ser convenientemente escolhidas, para garantir que a contradição observada provem da teoria formulada, e não das regras de inferência usadas. A Lógica precisa de ser convenientemente formulada para evitar que crie contradições.

Se chamarmos «proposição» a toda a frase declarativa a respeito de algum facto, parece daí decorrer naturalmente que a cada proposição se poderá atribuir ou o valor 1, quando a declaração feita é verdadeira, ou o valor 0, quando a referida declaração é falsa. Qualquer proposição terá um, e um só, destes valores.

Se não impuser restrições na formação das proposições, poderei formar proposições a respeito de proposições, frases a respeito de proposições de valor lógico bem definido. E isto sucede frequentemente.

É possivel encontrar, então, frases que seriam proposições, quanto à construção, e que não têm valor determinado. Assim a declaração a respeito da própria proposição — «Esta proposição é falsa». Se é realmente falsa, a declaração é de valor 1; se é verdadeira, a declaração seria de valor 0.

As regras de construção das proposições devem ser restringidas de modo a evitar construções que conduzam a estas dificuldades.

A lógica precisa de ser estudada convenientemente de modo a determinar as restrições próprias. A Lógica de Aristóteles foi edificada para conjuntos finitos e baseada na experiência com conjuntos finitos, nada garante a sua aplicabilidade aos conjuntos infinitos. Reconheceu-se que nenhum sistema de inferência, convenientemente restringido, podia criar por si contradições. São estas restrições que é preciso procurar e estudar.

É preciso pensar correctamente — inferir devidamente — e sobre o que não é contraditório, o que não conduz a contradição.

7 — As demonstrações construtivas do intuicionismo abandonaram o Princípio do 3.º Excluido da Lógica de Aristóteles. O intuicionismo supõe que esta restrição aos princípios intuitivos do raciocínio é suficiente para a eliminação das contradições numa teoria.

A afirmação $\forall n[p(n)]$ significa que existe um processo construtivo — uma construção — que permite verificar a propriedade p em cada inteiro positivo n; a afirmação $\exists n[\text{não}\, p(n)]$ é a da existência duma construção de n, sem a propriedade p. Se n é construível de modo a ter a propriedade p, também pode acontecer ser construível sem ter a propriedade p. O facto de ter a propriedade p nada adianta à informação de não ter a propriedade p. Este segundo facto não se pode inferir, tem de ser verificado construtivamente.

Por assim dizer são as propriedades que são definidas construtivamente e não se nega a possibilidade de duas construções serem satisfeitas pelo mesmo elemento, convirem ao mesmo inteiro positivo.

São admissíveis proposições a respeito das quais não faz sentido ser verdadeiro ou falso.

8 — Esta ideia da imposição de restrições ao raciocínio intuitivo foi bastante explorada.

Procurou-se descobrir as restricões suficientemente fortes a impôr ao raciocínio intuitivo para impedir a contradição, mas suficientemente fracas para permitir o desenvolvimento da matemática, pelo menos legitimar a construção já feita.

São exemplos dessas restrições: a teoria dos tipos lógicos de Russell, a teoria dos tipos lógicos simplificada de Ramsey, a teoria da estratificação de Quine, as axiomáticas da teoria dos conjuntos, de Zermelo e outros.

A adequação dos sistemas lógicos para construir com eles a matemática clássica tem sido apresentada ou integrando a matemática clássica, quanto à derivação, no próprio sistema considerado — Whitehead + Russell em «Principia»; ou provando que todo o teorema que se pode derivar com um dos sistemas lógicos — «Principia», por exemplo — também pode ser derivado com o sistema em causa.

A primeira apresentação exige a formalização da própria matemática e a segunda suspende a resolução da existência de contradição no desenvolvimento da matemática, transferindo-a para a decisão na construção com outro sistema lógico diferente, eventualmente mais esclarecedor.

9 — Escolhido um sistema de derivação adequado, haverá que provar por métodos «inatacáveis» que as restrições determinantes, impostas ao raciocínio, são suficientemente fortes, isto é, a matemática construida de acordo com elas é isenta de contradições. Isto exige provar a compatibilidade dum sistema formal, quer dizer, duma teoria, cujos termos foram analisados de modo a reduzir a axiomas todas as suas propriedades com importância na dedução de teoremas. Os termos ficam assim reduzidos a mera forma, que permite reconhecê-los, mas despidos de qualquer significado concreto. São como «palavras» sem significado, puras colecções de sinais.

A lógica do sistema é também explicitamente incorporada sob a forma de axiomas e de regras de inferências, expressas por símbolos de preferência à forma verbal. Todo o estudo do sistema se reduz a questões de forma ou estrutura — questões de sintaxe. O desenvolvimento do estudo do sistema constitui a «sintaxe da teoria», de que o sistema resultou.

A atribuição de significado concreto aos termos dum sistema formal, e forma verbal às regras de inferência admitidas, constitui uma semantização do sistema.

As teorias axiomatizadas — sistemas intuitivos vulgares, com termos primitivos recheados de significação nas deduções — e as axiomáticas — sistemas de termos primitivos indefinidos e regras de dedução em forma verbal — são sistemas semânticos.

A axiomatização duma teoria e a criação duma axiomática, de que a teoria seja sistema semântico, são passos sucessivos para a formalização da teoria, sua transformação em sistema formal.

As axiomáticas são sistemas semiformalizados.

10 — Vejamos como se opera uma axiomatização.

Isolam-se as propriedades dos termos da teoria que têm importância na dedução das propriedades apresentadas pelos termos. Reduzem-se os termos da teoria a sinais e enunciam-se como axiomas as propriedades isoladas. As regras de inferência, que permitem passar dos axiomas para os teoremas, são reduzidas a axiomas explícita ou implìcitamente e verbal ou simbòlicamente. No último caso a formalização fica completa.

A teoria concreta em estudo é agora uma solução ou um modelo da axiomática criada.

É conveniente que os axiomas sejam no número mínimo que permite todo o desenvolvimento da teoria e além disso independentes e compatíveis.

11 — A compatibilidade só pode ser estabelecida com a completa formalização da teoria e passa a constituir objecto fora dela. Teremos assim teorias da compatibilidade das teorias, designadas por metateorias.

A existência dum modelo da axiomática é uma relativa garantia de compatibilidade. A axiomática é compatível, se soubermos sê-lo o sistema concreto solução. Os axiomas transformam-se agora em propriedades dos termos, dos objectos do modelo. Se no modelo não se encontram simultâneamente duas propriedades contraditórias, na axiomática não será possível deduzir dois enunciados válidos e contraditórios.

12 — A possibilidade duma demonstração da compatibilidade por aproximações conduziu à redução do estudo da não-contradição da Análise Clássica ao da não-contradição da Aritmética, a uma aritmetização da Análise.

A compatibilidade de grandes partes da Análise Clássica foi, por processo conveniente, reduzida à compatibilidade da aritmética dos números inteiros naturais. Como as propriedades usuais dos números naturais — a Aritmética — podem deduzir-se da Axiomática de PEANO por meio das regras da Lógica Clássica — a de ARISTÓTELES —, aquela compatibilidade ficou dependente da compatibilidade duma teoria dos conjuntos, suficientemente restringida, para permitir a sua derivação daquela axiomática.

As definições dos números reais e dos números imaginários e a dedução das suas propriedades exige a junção do axioma lógico da escolha — ZERMELO — ao sistema constituido pela Axiomática de PEANO e Lógica Clássica.

Podemos agora definir nestes conjuntos numéricos as noções de função, limite, derivada e integral. Toda a Análise Clássica é deduzível da Axiomática de PEANO pelas regras da Lógica Clássica e o Axioma de ZERMELO. Todo o conceito da Análise Clássica pode ser definido pelos três termos primitivos de PEANO e toda a propriedade matemática da Análise Clássica se pode deduzir dos cinco axiomas de PEANO.

Não se pode afirmar a dedutibilidade a partir da Axiomática de PEANO de qualquer propriedade dos números naturais. Reconheceu-se a possibilidade de formular propriedades dos números naturais estranhas a qualquer axiomática da Aritmética, o que dá o carácter de incompletude às axiomatizações da Aritmética como axiomáticas completas da teoria dos números naturais.

Demonstrada a compatibilidade da Axiomática de PEANO fica garantida a não-contradição do seu modelo Aritmética, construída com a Lógica Clássica, e do seu modelo Análise Clássica, construída com a Lógica Clássica e com o Axioma de ZERMELO.

13 — HILBERT formulou uma teoria geral da demonstração da compatibilidade dum sistema de axiomas, sem recorrer a modelos da axiomática, portanto capaz de dar «provas absolutas» da compatibilidade.

O método partia da formalização completa da axiomática e a demonstração consistiria na análise de factos estruturais das expressões produzidas por um cálculo, legitimado pelas regras de inferência, aplicado aos sinais representativos dos termos da teoria em questão. O rigor era mantido com a produção de expressões do cálculo — fórmulas — por processo finitista: à custa de noções finitas e construções completamente exequíveis. A análise dos processos de construção das fórmulas e das suas propriedades isolaria um critério para reconhecer se dada fórmula seria ou não possível resultado dum cálculo operacional legitimado na metateoria.

Há aqui duas operações essenciais: a formalização da axiomática e a elaboração duma metateoria.

14 — Vejamos como se faz a formalização, se cria um sistema formal.

Considera-se um conjunto de símbolos, que poderão ser em número infinito. Qualquer disposição linear, finita, destes símbolos, com ou sem repetição, constitui uma fórmula. As fórmulas repartem-se por dois conjuntos disjuntos: o das fórmulas bem construídas (f. b. c.) e o das fórmulas vãs, ou ilegítimas.

Numa interpretação semântica do sistema formal, em construção, só as f. b. c. adquirirão significado.

As f. b. c. serão definidas por recorrência e sintàcticamente, portanto, ùnicamente pela sua estrutura. Além disso indicar-se-á um processo finito de reconhecer se uma fórmula é, ou não, f. b. c.

Vejamos agora o desenvolvimento do sistema.

Escolhe-se um subconjunto de fórmulas bem construídas para axiomas do sistema — não é possível falar de evidência destes axiomas, uma vez que as fórmulas foram despidas de todo o significado. Novas fórmulas bem construídas são derivadas dos axiomas por aplicação de regras de inferência, definidas por recorrência, sintàcticamente e por processos finitos.

Por «demonstração» entende-se uma sequência finita de f. b. c., cada uma das quais é um axioma ou se obteve das anteriores fórmulas da sequência por aplicação das regras de inferência.

A última fórmula duma demonstração é por definição um «teorema».

Escreve-se $\vdash A$ para indicar que A é um teorema ou que A é deduzível no sistema.

Dada uma sequência de fórmulas, há processo efectivo de saber se constitui, ou não, uma demonstração; geralmente, dada uma fórmula, não há processo geral de determinar se é, ou não, um teorema.

15 — Exemplifiquemos com uma das possíveis formalizações do Cálculo Proposicional, subteoria da Lógica Elementar.

Símbolos — as letras minúsculas do alfabeto, com e sem linhas: $a, b, c, \cdots ; a', b', c', \cdots ;$ $a'', b'', c'', \cdots ; \cdots ;$ os parêntesis: (e também); o símbolo de negação $\sim$; e o símbolo de disjunção $\vee$.

Fórmulas — qualquer disposição seguida destes símbolos, por exemplo: $\vee\,))\,a' \sim$. É f. b. c. qualquer letra, com linha ou sem linha. Se A e B são fórmulas bem construídas, então $\sim A$ e $(A \vee B)$ também são f. b. c.

Axiomas — uma infinidade de sistemas de axiomas dados pelo esquema seguinte: 1) $(A \vee \sim (A \vee A))$; 2) $((\sim B \vee C) \vee B)$; 3) $(\sim (D \vee \sim E) \vee (\sim E \vee F) \vee (F \vee D))$ em que A, B, C, D, E e F representam f. b. c. Cada escolha particular dos f. b. c. dá origem a um sistema de axiomas.

Regra de Inferência — das duas fórmulas G e $(\sim G \vee H)$ infere-se que H é f. b. c.

Exemplo duma demonstração:

TEOREMA. $\vdash (r \vee \sim r)$.

1 — $(\sim r \vee \sim (\sim r \vee \sim r))$ *é f. b. c., porque se obteve do axioma* (1) *substituindo* A *por* $\sim r$.

2 — $(\sim (\sim r \vee \sim (\sim r \vee \sim r))) \vee (\sim ((\sim r \vee \sim r) \vee r) \vee (r \vee \sim r)))$ *é f. b. c., porque se obteve do axioma* (3), *substituindo* D *por* $\sim r$, E *por* $(\sim r \vee \sim r)$ *e* F *por* r.

3 — $\vdash (\sim ((\sim r \vee \sim r) \vee r) \vee (r \vee \sim r))$ *é f. b. c., por inferência.*

Partindo agora de

1 — $(\sim ((\sim r \vee \sim r) \vee r) \vee (r \vee \sim r)$ *é f. b. c., por ser um teorema.*

2 — $((\sim r \vee \sim r) \vee r)$ *é f. b. c., porque se obteve do axioma* (2) *substituindo* B *por* r *e* C *por* $\sim r$.

3 — $\vdash (r \vee \sim r)$ *é f. b. c., por inferência.*

16 — A definição dos símbolos $\rightarrow$, $\wedge$ e $\supset$ na axiomática permite fazer simplificações nas fórmulas e dar expressão simbólica à regra de inferência.

Usaremos $(A \rightarrow B)$ como abreviatura de $(\sim A \vee B)$ e $(A \wedge B)$ como abreviatura de $(\sim (\sim A \vee \sim B))$. Consequentemente $(A \rightarrow B)$ e $(A \wedge B)$ são f. b. c. O sinal $\supset$ é simples indicação de inferência ou de substituição duma fórmula pela abreviatura correspondente. Com $A \supset B$ indicaremos que B foi inferida de A, ou que se substituiu A por B, para efeito de simplificação. Assim

$$(\sim A \vee B) \supset (A \rightarrow B)$$

e

$$(\sim (\sim A \vee \sim B)) \supset (A \wedge B).$$

A regra de inferência traduz-se agora pela Regra do Corte ou da Simplificação:

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \supset B$$

que pode ler-se: concluiu-se B por corte do A

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \supset B.$$

Apliquemos estas simplificações à demonstração de que, se E e F são f. b. c., então $\vdash (E \vee F) \rightarrow (F \vee E)$.

Substituindo D por E no axioma (3), vem

$$((\sim (E \vee \sim E) \vee (\sim (E \vee F) \vee (F \vee E)))$$

ou

$$((E \vee \sim E) \rightarrow ((E \vee F) \rightarrow (F \vee E))).$$

Como é $\vdash (E \vee \sim E)$, temos

$$(E \vee \sim E) \wedge ((E \vee \sim E) \rightarrow ((E \vee F) \rightarrow (F \vee E))) \supset ((E \vee F) \rightarrow (F \vee E)).$$

17 — Vejamos porque é que o sistema formal construido é uma sintaxe do Cálculo Proposicional. É equivalente a mostrar que o Cálculo Proposicional é uma semantização do sistema formal.

As letras podem ser substituidas por proposições (ou enunciados) — frases declarativas com um dos valores lógicos zero ou 1.

O símbolo $\sim$ pode ser substituido pelo conectivo lógico «não»; o símbolo $\vee$ pode ser substituido pelo conectivo lógico «ou ... ou» e as fórmulas transformam-se em composições de proposições.

Os termos assim considerados satisfazem os axiomas apontados. A cada f. b. c. corresponde biunìvocamente uma composição de proposições válida — um teorema do Cálculo Proposicional.

18 — Encaremos o problema da compatibilidade.

Um sistema formal diz-se compatível (às vezes consistente) se nele não há alguma f. b. c., A, para qual sejam $\vdash A$ e $\vdash \sim A$, isto é, A e $\sim A$ teoremas.

Desenvolvamos uma metateoria que nos assegure a não construtibilidade de A.

Se no sistema fossem deduzíveis $\vdash A$ e $\vdash \sim A$, então o axioma (2) permitia escrever, com $\sim A$ em vez de B, $((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A)$ para qualquer C f. b. c. Como $(\sim(\sim A) \vee C)$ e $\sim A$ são f. b. c. é

$$\vdash ((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A) \to (\sim A \vee (\sim(\sim A) \vee C))$$

e

$$((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A) \wedge (((\sim(\sim A) \vee C) \vee \sim A) \to \\ \to (\sim A \vee (\sim(\sim A) \vee C))) \supset \\ \supset (\sim A \vee (\sim(\sim A) \vee C)) \supset A \to (\sim A \to C).$$

Assim de $\vdash A$ vem

$$A \wedge (A \to (\sim A \to C)) \supset (\sim A \to C).$$

De $\vdash \sim A$ vem $\sim A \wedge (\sim A \to C) \supset C$.

Qualquer f. b. c. C é no sistema $\vdash C$, é deduzível no sistema.

Suponhamos que possuimos regra de valorizar as fórmulas do sistema, isto é, de atribuir a cada f. b. c. um e só um dos valores «u» ou «v», de modo que, se A tem o valor «u», $\sim A$ terá o valor «v», e recìprocamente; se A ou B tem o valor «u», então $A \vee B$ terá o valor «u»; se A e B têm o valor «v», então $A \vee B$ terá o valor «v».

Cada valorização determina para cada fórmula um dos valores possíveis e pode acontecer que alguma fórmula A seja sempre de valor «u», qualquer que seja a valorização considerada. Diz-se que A é uma identidade lógica ou uma tautologia. Se A, qualquer que seja a valorização, é sempre de valor «v», diz-se uma contradição lógica. Quando A toma umas vezes o valor «u» e outras o valor «v», conforme a valorização do sistema, diz-se fórmula anfótera.

Cada semantização do sistema determina uma valorização por meio da verdade ou falsidade da expressão traduzida pela fórmula.

A fórmula $(\sim(\sim A \vee A))$ qualquer que seja o valor de A, é semânticamente um enunciado falso, e consequentemente $(\sim A \vee A)$ é semânticamente um enunciado verdadeiro.

As tautologias são fórmulas semânticamente verdadeiras, quaisquer que sejam os valores dos componentes.

Verifica-se que os axiomas (1), (2) e (3) são tautologias, e que, se A e $(\sim A \vee G)$ são tautologias, também G é tautologia.

A regra de inferência conserva a tautologia. Consequentemente todos os teoremas do sistema são tautológicos.

Ora $p \vee q$ é uma f. b. c., e, portanto, um teorema, na hipótese de qualquer f. b. c. o ser; mas não é tautológica, o seu valor semântico depende dos valores de p e de q.

O absurdo resultou da suposição da existência de algum A, tal que $\vdash A$ e $\vdash \sim A$. Concluiremos que no sistema não há alguma f. b. c., A, com $\vdash A$ e $\vdash \sim A$.

19 — O Cálculo Proposicional fica assim devidamente fundamentado, à HILBERT: não há nele contradição possível, a prova fornecida é absoluta.

Demonstra-se também que o sistema formal, que o fundamenta, é completo, no sentido de que para qualquer f. b. c. A, ou $\vdash A$ ou o sistema torna se incompatível considerando A como um axioma adicional.

20 — Vejamos disto o que é possível fazer, para a fundamentação da Matemática.

Segundo a orientação apontada, havia que construir um sistema formal, adequado para a derivação da matemática, e além disso compatível e completo (qualquer proposição matemática seria decidível, no sentido de ser afirmável ou negável).

Frege, Whitehead e Russell construíram sistemas formais adequados à derivação da Matemática então existente. Não pensaram em garantir a adequação à derivação de quaisquer desenvolvimentos futuros.

Alguns destes sistemas foram apresentados como compatíveis. Por exemplo: «Principia Mathematica» de Russell e Whitehead, «Lógica Matemática» de Quine, sistemas de Bernays, de Fraenkel, de Gödel, de Von Neumann, e de Zermelo.

Não foi possível demonstrar, à Hilbert, a compatibilidade suposta, mas tem-se como muito provável.

A compatibilidade de alguns outros sistemas formais foi sucessivamente estabelecida, mas estes sistemas não são adequados à derivação de toda a aritmética dos números naturais. São assim formalizações parciais da Aritmética. Por exemplo, Post, em 1921, demonstrou a não-contradição do Cálculo Proposicional, e a sua completude, entendida em certo sentido; Hilbert e Ackermann, em 1928, demonstraram a não-contradição do Cálculo Funcional de primeira ordem, e, em 1930, Goedel provou, de certa maneira, a sua completude; Tarski demonstrou a não-contradição e completude da aritmética dos números reais e da geometria elementar.

Em 1931, Goedel, com os seus trabalhos, esclareceu as limitações dos métodos usados na metamatemática, tal qual foram criados por Hilbert. Goedel, trabalhando com sistemas formais construídos a partir dos axiomas de Peano, ou com sintaxe suficientemente rica para permitir a derivação daqueles axiomas — como acontece com sistemas relacionados com Principia Mathematica, adequados à derivação, não só da Análise Clássica, mas também de outra matemática presumìvelmente a ser desenvolvida — provou a impossibilidade de demonstrar a não contradição de tais sistemas por métodos finitistas, isto é, processos construtivos formalizáveis dentro do sistema.

Isto equivalia à impossibilidade de fazer a fundamentação da matemática (Aritmética), à Hilbert.

Este resultado é uma consequência da incompletude dos sistemas formais com que Hilbert trabalhou. Goedel revelou a existência de proposições indecidíveis — correspondentes a fórmulas, A, para as quais nem $\vdash A$ nem $\vdash \sim A$ — e a afirmação da «não-contradição do sistema» é uma dessas proposições.

Uma ideia do raciocínio de Goedel na demonstração apontada.

Suponhamos que «CONSIS» representa uma fórmula sintáctica, cuja interpretação semântica implica a não-contradição do sistema em estudo.

O problema da compatibilidade do sistema fica agora reduzido ao da demonstração de que $\vdash$ CONSIS.

Um dos caminhos, para fazer esta demonstração, seria procurar uma condição A suficiente, tal que $\vdash (A \rightarrow \text{CONSIS})$ e demonstrar que $\vdash A$. Pela regra da simplificação resultaria $\vdash$ CONSIS. Gödel suspeitou que, se o sistema de CONSIS é realmente compatível, não é no sistema nem $\vdash$ CONSIS nem $\vdash \sim$ CONSIS, quer dizer, não é demonstrável no sistema formal que ele seja compatível, nem que seja contraditório. Em vez de procurar A nas condições indicadas, Gödel procurou uma condição necessária B para a derivação de CONSIS, isto é, $\vdash (\text{CONSIS} \rightarrow B)$.

Se B, além disso, é f. b. c. — verdadeira —, mas indecidível no sistema, então nem $\vdash$ CONSIS, nem $\vdash \sim$ CONSIS. É CONSIS indecidível também. Porque, se fosse $\vdash$ CONSIS, de $\vdash \text{CONSIS} \wedge (\vdash (\text{CONSIS} \rightarrow B)) \supset B$ era $\vdash B$, contra a hipótese de não ser teorema; se fosse $\vdash \sim \text{CONSIS}$, por ser $\vdash (\sim B \rightarrow \sim \text{CONSIS})$, era $\vdash \sim B$, contra a hipótese de não ser teorema.

Se for possível construir a fórmula B, admitindo a compatibidade do sistema, e nas condições indicadas, ficará demonstrado que os processos usados para provar a adequação dum sistema formal à derivação da matemática existente, são impotentes para demonstrar a compatibilidade do sistema e até para decidir, ainda que teòricamente, de todas as proposicões matemáticas.

Goedel construíu uma fórmula B indecidível, construindo a fórmula, cujo conteúdo semântico é que B é indecidível. Para isso atribuíu coordenadas numéricas às fórmulas deduzíveis no sistema formal com que trabalhava e, enumerando-as, construíu B pelo processo da diagonal de Cantor. O próprio sistema formal foi traduzido por correspondência no sistema numérico que analisava.

A construção de B estabelecia a incompletude do sistema, pois a sua construção é puramente metamatemática. e B não é deduzível no sistema, e ainda a impossibilidade de demonstrar dentro do sistema a compatibilidade do mesmo.

21 — Esta incompletude refere-se apenas a sistemas formais, cuja sintaxe é adequada à formalização de muitas propriedades dos números naturais, usadas na construção da proposição indecidível B.

Poderá pensar-se que a dificuldade desapareceria, juntando aos axiomas outros que permitissem a dedução das proposições encontradas indecidíveis.

Goedel mostrou que os sistemas, que se iam assim obtendo por extensão do primeiro, eram ainda incompletos, isto é, sempre é possível construir fórmulas indecidíveis. Será a explicação da dificuldade de demonstrar certas propriedades dos números inteiros naturais, fàcilmente aceites como muito prováveis, mas ainda não demonstradas.

22 — Goedel estabeleceu assim que os sistemas formais, adequados à derivação da matemática clássica, não permitem demonstrar a sua compatibilidade, à Hilbert, por métodos finitistas, formalizáveis no próprio sistema, pois que são traduzíveis eles mesmos em números naturais, por correspondência; e que os sistemas conhecidos, não-contraditórios, são inadequados à derivação da matemática. Suspeita-se que a matemática (clássica) é compatível, mas não se pode incorporar esta informação — esta propriedade da matemática — no sistema formal que a fundamentaria.

23 — Depois de apresentadas as limitações, formuladas por Goedel, do método proposto por Hilbert para a fundamentação da matemática, é conveniente uma revisão deste problema Cantor levantou o problema de haver contradições na matemática, desenvolvida pelos processos tradicionais. B. Russell e Whitehead apresentaram soluções para as evitar, propondo lógica adequada para a derivação. Brouwer melhorou as soluções apresentadas para evitar a contradição, propondo processos construtivos e finitistas. Hilbert procurou, à custa dos melhores processos conhecidos, os de Brouwer, fazer a demonstração da não-contradição, da impossibilidade de topar no desenvolvimento da matemática com alguma contradição. Goedel provou a impossibilidade de tal demonstração pelos processos hilbertianos.

O esquema apresentado mostra que o problema está apenas esclarecido em alguns aspectos e não solucionado. A solução continua a ser procurada com as três orientações apontadas, características do pensamento matemático.

24 — Para o intucionismo, a não-contradição estabelece-se reconstruindo a matemática por processos, que não conduzam a contradição. É preciso edificar a matemática sem fazer apelo a ideias preconcebidas a respeito da actividade matemática e dos objectos da matemática. A matemática é independente da Lógica; os princípios usuais da lógica não merecem, em matemática, confiança sem limites.

O intucionismo justifica o que está construído como matemática na medida em que coincide com o obtido pelos processos construtivos e finitistas. A matemática será não-contraditória, quando for possível obter todos os seus resultados por aqueles processos. Os processos usuais na matemática seriam aceites, quando se estabelecesse que não conduziam a algum resultado, que não pudesse ser obtido por uma construção finitista.

O intucionismo não crê possível a construção definitiva dum sistema de axiomas, que permita a derivação da matemática.

A Escola Intuicionista Holandesa — BROUWER e WEIL — tem desenvolvido assim uma matemática intuicionista, isto é, uma fundamentação da matemática à BROUWER.

Os significados de frases como «todos os números que ...» e «há um número que ...» são estabelecidos por construção para evitar que conduzam a contradição. Nos assuntos relacionados com os conjuntos infinitos, pela mesma razão, não é usado o Princípio do Terceiro Excluido da Lógica de ARISTÓTELES. São rejeitadas as demonstrações de existência baseadas no Axioma da Escolha e na Hipótese do Contínuo.

HEYTING e KOLMOGOROFF formalizaram a lógica adequada à derivação da matemática intuicionista, começando por uma lógica elementar, o chamado Cálculo dos Problemas, análogo ao Cálculo Proposicional, e que pode usar os mesmos símbolos, mas com significado diferente: $A, B, \cdots$ representam problemas a resolver; $\sim A \cdots$ a solução do problema A é impossível, ou conduz a contradição; $A \wedge B$ — os problemas A e B são solúveis; $A \vee B$ — um, pelo menos, dos dois problemas é solúvel; $A \rightarrow B$ — a solução do problema B reduz-se à solução do problema A.

São dadas regras para construir as f. b. c. com os sinais «$\sim$», «$\wedge$», «$\vee$» e «$\rightarrow$» de acordo com as situações que ocorrem na resolução de problemas e só estas.

As regras de inferência afastam a afirmação do Princípio do 3.º Excluido e assim $\sim A \vee A$ não é um teorema. A respeito do problema A não há, em geral, razão para afirmar que A é solúvel ou A é reconhecível como contraditório. «A» pode não ser solúvel nem contraditório.

Os axiomas são escolhidos convenientemente de acordo com estas propriedades dos símbolos.

A partir deste Cálculo pode desenvolver-se uma Lógica de ordem superior e paralelamente à formalização da Lógica Clássica, apenas em alguns casos bastante mais complicada.

A matemática deduzida por este processo lógico rejeita todas as demonstrações tradicionais, em que se usou o Princípio do 3.º Excluido, isto é, os teoremas demonstrados pelo método analítico indirecto — ou de redução ao absurdo.

Se se procura x, e se demonstrou que não existir x é contraditório, este facto não prova a existência de x; BROUWER exige uma construção de x, uma demonstração construtiva da existência de x.

Existir é diferente de não contraditório.

Pelos métodos intuicionistas reencontra-se — fundamenta-se à BROUWER — muita da matemática clássica, muitas vezes por caminhos mais árduos, mas não foi possível ainda reencontrá-la toda, nem demonstrar a possibilidade de tal encontro. Tem-se sim construido uma matemática diferente da Matemática Clássica, devidamente fundamentada.

25 — O logicismo, como fundamentação da matemática, consiste numa redução da matemática à Lógica. A matemática pode ser incorporada em sistemas lógicos convenientes por definição das suas noções fundamentais em termos puramente lógicos e conversão dos seus teoremas em fórmulas duma formalização da Lógica.

FREGE pretendeu neste sentido reduzir a Aritmética à Lógica, começando por uma formalização conveniente dela.

FREGE, RUSSELL e WHITEHEAD reconheceram que a Axiomática de PEANO podia ser interpretada em termos da Lógica.

A definição de número cardinal 2 pode ser dada em termos de «classe», conceito lógico, e sem apelo à aritmética. Por exemplo, número cardinal 2, ou é 2 o número de elementos da classe C, isto é, $n(C)=2$, se, e só se, (1) $\exists x \in C$ e $\exists y \in C$; (2) $x \neq y$; (3) se ainda $z \in C$, então $z=x$ ou $z=y$.

O número 2 é assim a extensão (classe) duma propriedade, a de todas as classes com o número 2. Por recorrência definem-se os outros números. Os axiomas podem traduzir-se completamente em expressões da Lógica por meio dos conceitos de variável de elemento, «x», e de variável de classe, «C», e as expressões «não», «e», «se, então» «todos os $x x$», «há um x», «x é da classe C» e «C é a classe dos elementos tais que». Estas expressões podem representar-se por fórmulas contendo apenas os símbolos «$\sim$», «$\cdot$», «$\forall$», «$\exists$» respectivamente de «não», «e», «todos» e «existe».

Todos os conceitos da matemática — Aritmética e Análise Clássica — podem definir-se a partir destes quatro termos da Lógica. Todas as proposições da matemática podem deduzir-se destes termos por meio de regras de inferência da Lógica — Lógica Clássica ampliada com os Axioma da Escolha e da Infinidade. Os números reais exigem uma lógica de ordem superior à da Lógica Elementar.

Os axiomas da Aritmética são, assim entendidos, simples transcrições de teoremas da Lógica.

A matemática ficaria fundamentada à RUSSELL, com a demonstração da compatibilidade da Lógica.

Este critério levanta objecções. A Lógica fica cheia de limitações para permitir a derivação da matemática. Alguns raciocínios considerados legítimos conduziram a contradições, quando aplicados aos conjuntos infinitos, e é de supor que criem contradição noutros domínios. RUSSELL teve de criar a teoria dos tipos lógicos que é o desenvolvimento da aplicação do princípio do círculo vicioso: tudo o que contém uma variável ligada deve ser excluído dos valores dessa variável, para evitar que o sistema lógico, com que derivava a matemática, criasse, por si mesmo, contradições. Esta teoria é só meia solução do problema, constitui um processo de reconhecer as fórmulas contraditórias, e não evita os raciocínios que a elas conduzem, sem pôr de lado partes usuais da matemática.

Nos «Principia», RUSSELL e WHITEHEAD apresentaram uma fundamentação da matemática, que inclui a Aritmética e a Teoria dos Conjuntos, consequentemente a Análise Clássica, derivando esta do sistema lógico de RUSSELL — axiomas da Lógica Elementar, teoria dos tipos lógicos e Axioma da Redutibilidade e Axioma do Infinito. Mais tarde pôs-se de lado o Axioma da Redutibilidade, exigido apenas por dificuldades técnicas da teoria dos tipos, tal qual fora formulada por RUSSELL, e que então foi possível remover.

RAMSEY mostrou que o Axioma do Infinito, que postula a existência duma infinidade de objectos, não tinha carácter puramente lógico, pois não é uma identidade lógica, como acontece serem os outros. Este axioma não é indiscutìvelmente aceite e fica assim comprometida a fundamentação da matemática pela Lógica, no sentido do logicismo de FREGE, COUTURAT e RUSSELL: dedução da matemática de axiomas puramente lógicos, sem apelo a axiomas especìficamente matemáticos.

26 — Segundo o que foi exposto, as pesquisas na fundamentação da matemática têm sido dominadas pela atribuição aos símbolos matemáticos dum conteúdo intuitivo — BROUWER; dum conteúdo lógico — RUSSELL; de ausência de conteúdo — HILBERT. Mais ainda, o intuicionismo acaba por ser pròpriamente uma reconstrução da matemática, um rigorismo da matemática; e o formalismo hilbertiano é uma tentativa de demonstração intuicionista da não-contradição da matemática pré-intuicionista, demonstração que legitimaria os processos da matemática clássica.

27 — Revisto por GOEDEL, o formalismo ganha novos aspectos nas pesquisas que prossegue. Utiliza agora processos construtivos e finitistas não formalizáveis no sistema formal derivado da Axiomática de PEANO. GENTZEN, em 1936, demonstrou a compatibilidade da teoria dos números naturais, usando uma indução transfinita com números ordinais até ao número $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}$. Esta indução transfinita tem justificação intuicionista. O tipo de ordem ε_0 pode materializar-se numa disposição apropriada dos números naturais e com uma definição de recorrência.

A demonstração consiste numa disposição das demonstrações da teoria dos números naturais, de modo que, usando os ordinais do tipo indicado, se consegue fazer uma espécie de enumeração delas todas, e pela qual se reconhece a impossibilidade duma fórmula representativa duma contradição. Assim com base no Axioma de ZERMELO o processo deriva fórmulas bem construídas dum número infinito de premissas e não é formalizável no sistema formal da Aritmética.

A demonstração é aceite quase universalmente, mas a utilização da boa ordenação dos conjuntos, ligada estrictamente ao Axioma de ZERMELO, levanta algumas objecções.

Em 1951, LORENTZEN apresentou uma demonstração que utiliza uma espécie de indução ramificada, seguindo a ordem natural de formação das demonstrações, em vez de as dispôr num conjunto bem ordenado. É uma demonstração com aceitação mais extensa. O processo usado por LORENTZEN é algébrico e teríamos a não-contradição da Aritmética consequência dum teorema da Álgebra.

LORENTZEN propôs ainda outra demonstração da não-contradição da Aritmética, em que utiliza uma formalização da matemática intuicionista.

28 — O exposto permite-nos caracterizar, do ponto de vista da fundamentação, os três aspectos seguintes coexistentes da matemática actual. Análise Clássica: — conceito de número e de função de números — desenvolvida, com excessiva liberdade, pelo realismo, do ponto de vista platónico a respeito dos objectos da matemática. A demonstração de LORENTZEN legitima a construção platónica dos números naturais. No caso dos números reais é impossível uma teoria construtiva, que abranja todos. Não é possível a construção dum sistema formal definitivo, que permita a derivação de todas as propriedades dos números reais. É possível a construção de sistemas formais, que permitem a derivação de algumas propiedades dos números reais, e a partir destes construir outros sistemas que englobem os primeiros; mas não há definitivamente um que englobe todos e daí insuficiência de fundamentação. Matemática Intuicionista — reconstrução, por processos de rigor inatacável, da matemática já desenvolvida por outros processos — Rigorismo de fundamentação desenvolvido deselegante e, por vezes, complexamente.

Matemática Axiomátizada — Análise Geral — redução de cada teoria matemática a uma axiomática, não contraditória, e quando possível, completa. Fundamentação discutível devido a dificuldades de demonstração de não-contradição — em geral, por modelos — e da completude.

29 — Do ponto de vista do rigor matemático, apontamos os resultados importantes seguintes nos aspectos demarcados na matemática actual: necessidade de fundamentação da Análise Clássica; condenação de alguns dos seus processos de construção; complexidade e deselegância da matemática intuicionista; demonstração construtiva do Axioma de Zermelo; existência de propriedades da aritmética — matemática portanto — que escapam a qualquer axiomática; se há algnm sistema de axiomas, não-contraditório, para a teoria dos conjuntos, é possível juntar o Axioma de Zermelo ou a Hipótese do Contínuo, sem que impliquem contradição no sistema.

30 — Claramente os pontos de vista tomados nos quadros apresentados anteriormente contribuiram para o esclarec mento do pensamento matemático e estão-se esclarecendo mutuamente.

Sôbre alguns problemas de ocupações

por R. M. Barbosa

Pretendemos com êste trabalho divulgar alguns estudos que fizemos sôbre Ocupações, especialmente quatro problemas, aplicámos a estas questões as probabilidades como algorítmo demonstrativo.

No final do trabalho procurámos mostrar com novas interpretações a possibilidade de obter-se como consequência quatro fórmulas da análise combinatória usual.

Acrescentou-se para elucidação um exemplo numérico para cada um dos problemas com os respectivos diagramas.

A — Quatro problemas de ocupações-Enunciados

A. 1 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *com exclusão de celas* ocupadas, por n *elementos distinguíveis*.

A. 2 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *sem exclusão das celas* ocupadas, por n *elementos distinguíveis*.

A. 3 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *com exclusão das celas* ocupadas, por n *elementos indistinguíveis*.

A. 4 — Determinação do número de ocupações possíveis de K celas distinguíveis, *sem exclusão das celas* ocupadas, por n *elementos indistinguíveis*.

B — Denominações

Aos números fornecidos pelos problemas A. 2, A. 3 e A. 4 denominam-se respectivamente número de Maxwell-Boltzman, número de FERMI-DIRAC ou FERMIONS ou ainda FERMIÕES, e número de BOSÉ-EINSTEIN ou BOSONS ou ainda BOSÕES.

Alguns autores preferem denominar *fermions* ou *bosons* aos elementos, assim em A. 3 os elementos seriam chamados fermions, em A. 4 seriam bosons; e nessa interpretação o número de fermions, ou de bosons, é o número n de elementos indistinguíveis, e não o número de ocupações.

C — Notações

Indicaremos os números dos problemas anteriores por $N(K^+;n^+)$, $N(K;n^+)$ ou N(FERMI), e $N(K;n)$ ou N(BOSÉ).

D — Deduções

D. 1 — Procuraremos a probabilidade de n celas determinadas (das K celas dadas) serem ocupadas pelos n elementos distinguíveis, com exclusão das celas ocupadas.

Admitindo que i celas determinadas já foram ocupadas, portanto excluídas, a probabilidade de ocupação de outra cela determinada é dada por $(n-i)/(K-i)$.

Fazendo variar i de 0 a $n-1$ teremos a probabilidade pedida:

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{K-i} = \frac{n!}{K^{(n)}}.$$

Atendendo à A. 1 e C o número de elementos do universo é dado por $N(K^+, n^+)$, e o número de elementos do evento é dado por $n!$, pois os elementos são distinguíveis. Segue que a probabilidade é dada também por:

$$\frac{n!}{N(K^+;n^+)}.$$

Comparando os dois valores da probabilidade teremos:

D. 1. 1 $\qquad N(K^+;n^+) = K^{(n)}.$

Nota — Obrigatòriamente tem-se $n \leq K$.

D. 2 — Procuremos a probabilidade de uma cela determinada ser ocupada por n elementos distinguíveis.

Admitindo que a cela determinada já foi ocupada por i elementos, a probabilidade de ocupação por outro elemento será dada por: $1/K$.

Fazendo i variar de 0 a $n-1$ a possibilidade pedida é dada por: $1/K^n$.

Atendendo à A. 2 e C o número de elementos do universo é $N(K;n^+)$ e o número de elementos do evento é 1, logo a probabilidade também é dada por:

$$\frac{1}{N(K;n^+)}.$$

Comparando as probabilidades anteriores obtemos:

D 2. 1 $\qquad N(\text{MAXWELL}) = N(K;n^+) = K^n$

D. 3 — No problema A. 3 os elementos são indistinguíveis, portanto no raciocínio aplicado em D. 1 os elementos não podem ser pensados permutados, ou que o número de elementos do evento é 1 e o número de elementos do universo é N(FERMI).

$$N(\text{FERMI}) = \frac{K^{(n)}}{n!} = \frac{K!}{n!(K-n)!}$$

ou

D 3. 1 $\qquad N(\text{FERMI}) = \binom{K}{n}$

Nota — Obrigatòriamente tem-se $n \leq K$.

D. 4 — Procuremos a probabilidade de uma cela determinada (sem exclusão da cela ocupada) ser ocupada pelos n elementos indistinguíveis.

Substituamos inicialmente a cela escolhida por n sub-celas em idênticas condições que as celas anteriores, de tal modo que sejam ainda distinguíveis mas com a mesma probabilidade de ocupação.

A substituição anterior coincide em pensar o acréscimo de $n-1$ celas.

Consideremos a condição, agora, que ocupada uma cela, ela será excluída.

As condições estabelecidas transformam o problema A. 4 no problema A. 3, com modificação no número de celas, isto é:

$$N(K;n) = N(K+n-1^+;n)$$

ou

$$N(K;n) = \binom{K+n-1}{n}$$

ou

D. 4. 1 $$N(\text{Bosé}) = \binom{K+n-1}{n}$$

E — Interpretação dos quatro problemas em têrmos de agrupamentos

Invertamos todos os problemas, com a inclusão de duas regras, considerando ocupação de K celas distinguíveis por n elementos, como agrupamentos distintos de K celas distinguíveis em n lugares.

REGRA E. 1 — *Celas sem exclusão* ou *com exclusão*, quando ocupadas, são interpretadas por celas podendo *ser repetidas ou não*, respectivamente, nos agrupamentos.

REGRA E. 2 — *Elementos distinguíveis* ou *indistinguíveis* serão interpretados como *lugares distinguíveis* ou *indistinguíveis* (isto é, em têrmos de Arranjos ou de Combinações).

F — Identificações

Teremos com as interpretações anteriores as seguintes identificações:

$N(K^+;n^+) = A_{K,n}$
(número de arranjos simples)

$N(K;n^+) = (A\,C)_{K,n}$
(número de arranjos completos)

$N(K^+;n) = C_{K,n}$
(número de combinações simples)

$N(K;n) = (C\,C)_{K,n}$
(número de combinações completas)

G — Fórmulas

Utilizando as identificações dadas em F teremos as quatro fórmulas seguintes, da análise combinatória usual:

G. 1: $A_{K,n} = K^{(n)} = K(K-1)(K-2)\cdots(K-n+1)$

G. 2: $(A\,C)_{K,n} = K^n$

G. 3: $C_{K,n} = \binom{K}{n}$

G. 4: $(C\,C)_{K,n} = \binom{K+n-1}{n} = C_{K+n-1,n}$

H — Observações

É interessante observar que apenas G. 1 não pode ser considerada como deduzida dos problemas de ocupação, desde que em D. 1 utilizou-se implìcitamente o conceito e fórmula de arranjos $(n!)$.

I — Exemplos numéricos

I. 1 — Número de ocupações de 3 celas por 2 elementos distinguíveis, com exclusão das celas ocupadas:

$$N(K^+,n^+) = 3^{(2)} = 6\,.$$

Diagramas — (*)

$(\,a \mid b \mid -)$ $(\,b \mid a \mid -)$
$(\,a \mid - \mid b\,)$ $(\,b \mid - \mid a\,)$
$(- \mid a \mid b\,)$ $(- \mid b \mid a\,)$

(*) Usámos as representações de FELLER.

I. 2 — Número de ocupações de 2 celas por 3 elementos distinguíveis, sem exclusão de celas ocupadas:

$$N(\text{Maxwell}) = 2^3 = 8\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{ll} (\,ab \mid c\,) & (\,c \mid ab) \\ (\,ac \mid b\,) & (\,b \mid ac) \\ (\,bc \mid a\,) & (\,a \mid bc) \\ (abc \mid -) & (- \mid abc) \end{array}$$

I. 3 — Número de ocupações de 4 celas por 3 elementos indistinguíveis, com exclusão da cela ocupada:

$$N(\text{Fermi}) = \binom{4}{3} = 4\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{c} (\,1 \mid 1 \mid 1 \mid 0\,) \\ (\,1 \mid 1 \mid 0 \mid 1\,) \\ (\,1 \mid 0 \mid 1 \mid 1\,) \\ (\,0 \mid 1 \mid 1 \mid 1\,) \end{array}$$

I. 4 — Número de ocupações de 3 celas por 4 elementos indistinguíveis, sem exclusão da cela ocupada:

$$N(\text{Bosé}) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15\,.$$

Diagramas —

$$\begin{array}{lll} (4 \mid 0 \mid 0) & (0 \mid 4 \mid 0) & (0 \mid 0 \mid 4) \\ (3 \mid 1 \mid 0) & (3 \mid 0 \mid 1) & (0 \mid 3 \mid 1) \\ (0 \mid 1 \mid 3) & (1 \mid 0 \mid 3) & (1 \mid 3 \mid 0) \\ (2 \mid 2 \mid 0) & (2 \mid 0 \mid 2) & (0 \mid 2 \mid 2) \\ (2 \mid 1 \mid 1) & (1 \mid 2 \mid 1) & (1 \mid 1 \mid 2) \end{array}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Feller, William — *An introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, [1950], N. Y.

[2] Gil, J. M. — *Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações*, in. Gazeta de Matemática, N.º 79-80, N.º 81 e N.º 82-83, Lisboa.

[3] Parzen, Emanuel — *Modern Probability Theory and its Applications*, Wiley, [1960], N. Y.

[4] Riordan, John — *An introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, [1958], N. Y.

[5] Springer, G. — *Notas de aula de um curso sôbre Estruturas Finitas da Matemática*, 1961, S. Paulo.

[6] Barbosa, R. Madsen — *Um Curso Moderno Elementar de Análise Combinatória*, publicação da F. F. C. L. de Araraquara (a ser publicado).

Duas observações sobre Estática do Ponto Material

por José Manuel dos Santos Simões Pereira

As duas observações que a seguir se apresentam surgiram-nos quando estudámos a Estática do Ponto Material segundo as «Lições de Mecânica Racional» do Ex.^{mo} Sr. Prof. Doutor Diogo Pacheco de Amorim.

Na primeira referimo-nos a um facto que parece estar em desacordo com a nossa experiência corrente: o de serem instáveis as posições de equilíbrio indiferente. Trata-se é claro duma propriedade que admite uma excepção quando entre as forças aplicadas ao ponto se encontram algumas que dependem da sua velocidade. É o caso, por exemplo, do atrito ou de resistências do meio ambiente que estão presentes na maioria das questões a que diz respeito a nossa experiência corrente.

Na segunda constrói-se um exemplo de posição de equilíbrio estável à qual não corresponde nenhum extremo da função de forças. Pretendemos apenas ilustrar o facto de que a condição dada pelo teorema de Lejeune-Dirichelet para a estabilidade do equilíbrio, sendo suficiente como prova o referido teorema, não é contudo necessária.

No que segue, as notações usadas e as definições de que partimos são as da obra citada.

1 — Consideremos um campo de forças conservativo.

Designemos por U a função de forças e por $V = -U$ a função potencial.

Como é sabido, as posições de equilíbrio num campo de forças conservativo correspondem aos pontos estacionários da função de forças e a definição de equilíbrio indiferente em P_0, implicando a existência duma vizinhança finita de P_0 formada por pontos que são todos eles posições de equilíbrio do ponto material dado, exige que P_0 faça parte duma secção de invariabilidade de U.

Dentro desta secção de invariabilidade o campo é nulo. Por isso, colocando o ponto material (P, m) na posição de equilíbrio P_0, com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$, qualquer, pela primeira lei de Newton ele seguirá uma trajectória rectilínea com velocidade constante e atingirá sempre a fronteira dessa secção de invariabilidade por menor que seja v_0.

Em P_0 pois o equilíbrio obedece à condição de instabilidade.

2 — Vamos agora considerar um campo de forças conservativo unidimensional, definido sobre o eixo das abcissas cujo vector unitário chamaremos $\vec{i}$.

Seja $\vec{F}$ o vector do campo tal que

$$\vec{F} = \left(-4x^3 \cdot \cos\frac{1}{x} - x^2 \sin\frac{1}{x}\right) \cdot \vec{i}.$$

A função $U = -x^4 \cdot \cos\frac{1}{x}$ é tal que grad $U = \vec{F}$.

Trata-se duma função contínua, uniforme, de derivada limitada e contínua cuja representação gráfica se pode estudar pelos processos usuais do cálculo. É simétrica em relação ao eixo dos yy e fica toda na porção do plano cartesiano limitado pelas curvas $y = x^4$ e $y = -x^4$. (Ver nota 1).

Com $x = \pm\infty$ tende assimptòticamente para $y = x^4$.

Na origem $U = 0$ e $\frac{dU}{dx} = 0$ mas não se trata de extremo local pois em qualquer vizinhança deste ponto a função toma valores negativos e positivos. Trata-se dum zero não isolado da função e também da derivada, em cuja vizinhança U admite aliás uma infinidade numerável de extremos locais.

Ora no campo de forças assim definido a origem é uma posição de equilíbrio estável.

Com efeito sendo h a constante das forças vivas, tem lugar a relação

$$h = T + V = \frac{1}{2} m v^2 + x^4 \cdot \cos\frac{1}{x}.$$

O valor de h para as condições iniciais v_0 e x_0 será $h = \frac{1}{2} m v_0^2 + x_0^4 \cdot \cos\frac{1}{x_0}$.

Seguindo as definições da obra citada basta considerar o valor $x_0 = 0$ o que equivale a tomar $h = \frac{1}{2} m v_0^2$.

Sendo assim é fácil verificar que à medida que x aumenta vão surgindo intervalos nos quais V toma valores superiores a quaisquer outros anteriormente tomados. (Ver nota 2).

E, nesses mesmos intervalos, v^2 terá de tomar valores mais baixos que quaisquer outros anteriormente tomados. Só num ponto desses intervalos v^2 se poderá anular e o móvel atingiu aí o seu máximo afastamento. Sujeito a uma aceleração nesse ponto dirigida para a origem, retoma o movimento em sua direcção (salvo, é claro, no caso excepcional de v se anular num dos xx minimizantes de U), atinge-a com a velocidade v_0 e ultrapassa-a. Mas a simetria da função leva-nos, por raciocínios análogos, à conclusão de que, para este lado oposto, o afastamento máximo será o mesmo.

Um cálculo feito supondo, para simplificar, $m=1$ mostra-nos que para

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}<v_0<\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k)^2}$$

a velocidade se anula antes do ponto de abcissa $x=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4k}$ pois naquele ponto v anula-se pela primeira vez se $v_0=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k)^2}$.

Quando $k\to\infty$, v_0, enquadrado por duas sucessões infinitesimais, tende para zero e $\Delta=\overline{\lim}\,|x|$ tenderá também para zero, visto o mesmo acontecer à sucessão de termo geral $u_k=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4k}$.

A origem obedece, pois, à condição de equilíbrio estável, segundo a obra citada.

3 — Há Autores que não formulam assim a condição de estabilidade. No caso mais geral, impõem que durante todo o movimento o valor absoluto dos parâmetros q_i que definem a posição do móvel (ponto ou sistema) seja inferior a um certo ε (arbitràriamente pequeno) desde que os correspondentes valores iniciais q_i^0 e $\dot{q}_i^0$ sejam em módulo inferiores respectivamente a ε_1 e ε_2 com ε_1 e ε_2 funções do ε dado.

No nosso exemplo, em que x é o único q_i teremos de examinar as soluções das equações diferenciais do movimento para condições iniciais x_0 e v_0 pertencentes a certa vizinhança da origem.

A partir do integral da energia

$$\frac{1}{2}v^2+x^4\cdot\cos\frac{1}{x}=h$$

(supondo sempre, para simplificar, $m=1$) consideremos que a constante $h=\frac{1}{2}v_0^2$ para $x_0=0$ passa a ter o valor

$$h'=\frac{1}{2}v_0^2+x_0^4\cdot\cos\frac{1}{x_0}\quad(\text{com }x_0\neq 0).$$

Notemos que o movimento não pode dar origem a valores de x para os quais $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}>h'$ pois viria

$$\frac{1}{2}v^2=h'-x^4\cdot\cos\frac{1}{x}<0;$$

o que equivale a dizer, sob o ponto de vista geométrico, que o movimento não pode dar origem a valores de x para os quais a imagem geométrica da função $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}$ esteja acima da paralela ao eixo dos xx de ordenada h'.

Suponhamos então $v_0<\sqrt{\nu}$ e $|x_0|<\sqrt[4]{\frac{\nu}{2}}$.

Virá $h'=\frac{1}{2}v_0^2+x_0^4\cos\frac{1}{x_0}<\frac{\nu}{2}+\frac{\nu}{2}=\nu$.

Como durante todo o movimento é

$$\frac{1}{2}v^2+x^4\cdot\cos\frac{1}{x}=h',$$

uma vez provado que se podem tomar pontos arbitràriamente próximos da origem onde $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}>\nu$ desde que ν seja suficientemente pequeno, fica demonstrado que se pode restringir o movimento a qualquer vizinhança da origem, limitando convenientemente v_0 e $|x_0|$. Ora a função $x^4\cdot\cos\frac{1}{x}$ para $x=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{k}$ (k inteiro) toma o valor $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\cdot\frac{1}{k^4}$. Se k for tal que $k^4<\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\cdot\frac{1}{\nu}$

será $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{k^4} > \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \cdot \frac{1}{\nu}} = \nu$.

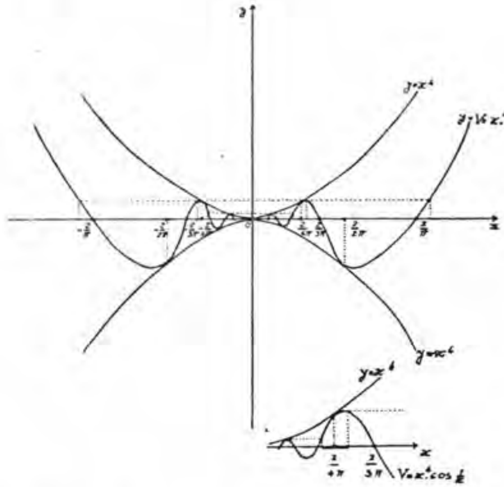
Por isso, querendo limitar o movimento a certa vizinhança da origem $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ basta tomar, por inversão das relações anteriores, $k = I\left[\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ — onde $I[\ ]$ tem o significado habitual, e fixar ν pela condição $\nu < \frac{1}{(2\pi k)^4}$.

O nosso exemplo obedece pois a esta outra definição de estabilidade, que parece ser mais restritiva.

4 — Para as condições iniciais consideradas, como é $h' < \nu$ e $|x| < \varepsilon$ será ainda $\frac{1}{2} v^2 = h' - x^4 \cdot \cos \frac{1}{x} < \nu + \varepsilon^4$. E pondo $\nu + \varepsilon^4 = \frac{1}{2} \delta^2$ isto significa que durante o movimento é sempre $|v| < \delta$ desde que tomemos x_0 e v_0 em vizinhanças convenientes da origem. Quer dizer, mesmo que se exija, na definição de estabilidade, que durante o movimento $\vec{v}$ se mantenha em módulo próxima da origem, desde que x_0 e v_0 também o sejam, mesmo assim o exemplo que demos apresenta uma posição de equilíbrio estável num ponto onde a função de forças não é máxima.

5 — As conclusões precedentes são imediatamente generalizáveis, em vista de cálculos análogos, para a função de forças $U = - d^4 \cdot \cos \frac{1}{d}$ definida num espaço euclidiano a n dimensões, onde $d^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

NOTA 1 — Damos a seguir o aspecto gráfico da função $V = -U = x^4 \cdot \cos \frac{1}{x}$.



NOTA 2 — Referimo-nos no n.º 2 a intervalos nos quais V toma valores superiores a quaisquer outros anteriormente tomados. Destacámos, na figura, um desses intervalos. Note-se em especial que os respectivos extremos mais afastados da origem são os máximos locais de V, $\left(\text{não são os pontos } \frac{1}{2k\pi}\right)$ e os mais próximos são os x tais que V retoma neles o valor que tem no máximo local imediatamente mais chegado à origem. Nos pontos $\frac{1}{2k\pi}$ são tangentes as curvas $y = x^4$ e $V = x^4 \cdot \cos \frac{1}{x}$ como se verifica por cálculo simples.

A bibliografia do assunto é muito vasta.

Entre outras consultámos as seguintes obras:

Levi Civitta, *Lezioni di Mecanica Razionale.*
Paul Appel, *Traité de Mécanique Rationelle.*
Appel et Dautheville, *Précis de Mécanique Rationelle*».
Joseph Pérès, *Mécanique Générale.*
H. Beghin, *Statique et Dinamique.*
G. Hamel, *Theoretishe Mechanik.*
J. Nielsen, *Vorlesungen über Elementare Mechanik.*
Henry Favre, *Cours de Mécanique.*
Rutherford, *Classical Mechanics.*

On the density of irreducible polynomials

by Wolmer V. Vasconcelos *

This short note concerns the frequency, in some sense to be precised, with which the irreducible polynomials appear in some polynomial rings. We deal specifically with the case when the coefficients are taken in a finite field.

To simplify the arguments we deal with prime fields, i. e. Z_p. Tentatively we define a set function on the class of subsets of the polynomial ring $R = Z_p[x]$. Let $S \subset Z_p[x]$. The polynomials in S of degree at most n are in a finite number, which we denote by $D_n(S)$. If $D_n(S)/D_n(R)$ has a limit as n increases, we denote it by $D(S)$ and the class of all such S by $\mathcal{S}$. The following obvious properties of D hold:

1. $D(R) = 1$ (bounded)
2. If $S \subset S'$ then $D(S) \leqq D(S')$ (monotone)
3. If $S \cap S' = \emptyset$, then $D(S \cup S') = D(S) + D(S')$ (finitely additive).

We say that D is a density function on $\mathcal{S}$. The main result is:

Theorem. *Let* I *be the subset of irreducible polynomials in* $Z_p[x]$, *then* $D(I) = 0$.

Proof. For definiteness let K be an algebraic closure of Z_p. Due to property 3. it is enough to prove for the subset $S \subset I$, consisting of monic polynomials. If $P(n)$ is the number of those polynomials of degree n, $n \cdot P(n)$ is the number of elements in K of degree n over Z_p. This follows from the fact that the roots of those polynomials are simple (Z_p is perfect) and distinct polynomials do not have a common root. On the other hand, if we adjoin to Z_p any element of degree n, the extension is the splitting field of $x^{p^n} - x$, and so each element of degree n over Z_p is root of this polynomial. Since it has not more than p^n roots we get $n \cdot P(n) \leqq p^n$.

This implies $D_n(S) = \sum_1^n P(k) \leqq \sum_1^n p^k/k$ so that $D_n(S)/D_n(R) \leqq \sum_1^n \frac{p^k/k}{p^{n+1}}$.

A straightforward use of the integral test will complete the proof. Just notice

$$\sum_2^n \frac{p^k}{k} \leqq \int_2^{n+1} \frac{p^x}{x}\, dx = \frac{1}{\log p} \frac{p^x}{x}\Big]_2^{n+1} + \frac{1}{\log p}\int_2^{n+1} \frac{p^x}{x^2}\, dx$$

and

$$\int_2^{n+1} \frac{p^x}{x^2}\, dx \leqq \frac{p^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot (n-1).$$

It is clear that the same argument holds for $F[x]$ where F is any finite field. If instead, we take $Z[x]$ where Z is the ring of integers, we can cope with the infinity of elements in Z in the following way: the height of a polynomial is understood as the sum of the absolute values of its coefficients and for $S \subset Z[x]$, $D_n(S)$ is defined to be the number (finite) of polynomials in S of degree and height at most n. However a similar result for the irreducible polynomials does not seem to be at hand.

---

* Do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife com uma bolsa de estudo da Capes na Universidade de Chicago.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geofísicas, e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1961.

Ponto n.º 1

Prova escrita de Matemática

ARITMÉTICA

5491 — Dividindo dois números naturais pelo seu máximo divisor comum obtém-se os quocientes 8 e 15. Determinar os dois números, sabendo que a soma do seu máximo divisor comum com o seu menor múltiplo comum é 726.

R: *Sejam* m *e* d *o menor múltiplo comum e o máximo divisor comum de dois inteiros* a *e* b. *Tem-se, como se sabe,* $a = d \cdot p_1$, $b = d \cdot p_2$ *e* $m\,d = a\,b$, *onde* p_1 *e* p_2 *são primos entre si. Daqui resulta, em vista dos dados do problema, que* $a = d \cdot 8$, $b = d \cdot 15$ *e* $m + d = \frac{a\,b}{d} + d = 726$, *e portanto* $d \cdot 8 \cdot 15 + d = 726$ *e* $d = 6$. *Deste modo será* $a = 6 \cdot 8 = 48$ *e* $b = 6 \cdot 15 = 90$.

ÁLGEBRA

I

5492 — Determinar m de modo que as raízes da equação

$$16\,x^4 - 4\,m\,x^2 + m - 1 = 0$$

estejam em progressão aritmética.

R. *Prova-se que, para que as raizes da equação biquadrada estejam em progressão aritmética é necessário e suficiente que* $9\,p^2 - 100\,q = 0$, *se* p *e* q *forem a soma e o produto das raizes da resolvente da equação biquadrada. Neste caso teremos* $p = m/4$ *e* $q = (m-1)/16$, *de modo que será* $9\,m^2 - 100\,(m-1) = 0$ *e portanto* $m = 50$ *ou* $m = 10$.

II

5493 — Derivar a função $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^3}}$ e simplificar o resultado.

$$R: \quad y' = \left[\sqrt{1 + x^3} - x \cdot 3\,x^2 \cdot {}^1/_2 \cdot (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}}\right] :$$
$$: (1 + x^3) = (2 - x^3) : \left(2\sqrt{(1 + x^3)}\right)$$

TRIGONOMETRIA

I

5494 — Resolver a equação $\sqrt{3}$ sen $x + \cos x = 2$.

R: *A equação pode escrever-se sob a forma* $\frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x + \frac{1}{2}\cos x = 1$ *e como* $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$ *e* $sen\,30^\circ = \frac{1}{2}$ *vem:* $sen\,x \cos 30^\circ + \cos x\,sen\,30^\circ = 1$ *ou* $sen\,(x + 30^\circ) = sen\,90^\circ$. *Tem-se então* $x + 30^\circ = k \cdot 180 + (-1)^k \cdot 90^\circ$ *ou* $x = k \cdot 180^\circ - 30^\circ + (-1)^k \cdot 90^\circ$

II

5495 — Derivar a função $y = \frac{\cos\left(a + \sqrt{x}\right)}{\text{sen}\left(a - \sqrt{x}\right)}$ e simplificar o resultado.

$$R: \quad y' = \left[-sen\left(a + \sqrt{x}\right) sen\left(a - \sqrt{x}\right) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(a - \sqrt{x}\right)\cos\left(a + \sqrt{x}\right)\right] : sen^2\left(a - \sqrt{x}\right) =$$
$$- \left[\cos\left(a + \sqrt{x} - a + \sqrt{x}\right)\right] : sen^2\left(a - \sqrt{x}\right) =$$
$$= \left(-\cos 2\sqrt{x}\right) : sen^2\left(a - \sqrt{x}\right)$$

GEOMETRIA

5496 — Determinar o ângulo da recta $y = 3\,x - 2$ com a recta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(0, -2)$.

R: *A equação da recta que passa pelos dois pontos é* $(y + 1) : (-1 + 2) = (x - 2) : (2 - 0)$ *ou seja* $y = \frac{1}{2}x - 2$. *A fórmula que dá a tangente do ângulo de duas rectas com os declives* m *e* m' *é* $tg\,\theta = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$.

No caso será $tg\,\theta = \left(3 - \frac{1}{2}\right) : \left(1 + \frac{3}{2}\right) = 1$ *e portanto* $\theta = 45^\circ$.

Ponto n.º 2

ARITMÉTICA

5497 — Dividindo dois números naturais pelo seu máximo divisor comum obtêm-se quocientes cuja soma é 10. Determinar os dois números, sabendo que o seu menor múltiplo comum é 672.

R: *Se forem* p_1 *e* p_2 *os quocientes assinalados será* $p_1 + p_2 = 10$. *Fàcilmente se reconhece que os valores possíveis de* p_1 *e* p_2 *são:* $p_1 = 1$ *e* $p_2 = 9$ *ou* $p_1 = 3$ *e* $p_2 = 7$. *Por outro lado se* m *for o menor múltiplo comum dos dois números dados é, como se sabe,* $m = d\,p_1\,p_2$ *sendo* d *o máximo divisor comum. Então, no 1º caso, será* $672 = d \cdot 9$ *equação que não tem solução inteira. No 2º caso é* $672 = d \cdot 3 \cdot 7$ *e* $d = 32$. *Daqui resulta* $a = 32 \times 3 = 36$ *e* $b = 32 \times 7 = 224$, *que são os números procurados.*

ÁLGEBRA

I

5498 — Determinar m de modo que

$$x^2 - (m+1)\,x - m + 7$$

seja positivo para todos os valores reais de x.

R: *Trata-se de resolver a desigualdade* $x^2 - (m+1)\,x - m + 7 > 0$ *que deve ser verificada para todo o valor real de* x. *Basta então que o descriminante seja negativo, caso em que o trinómio toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2. *Teremos por isso* $(m+1)^2 + 4\,(m-7) < 0$. *Os zeros deste último trinómio são* 3 *e* -9. *As soluções da primeira desigualdade são, por isso, os valores que verificam* $-9 < m < 3$.

II

5499 — Derivar a função $y = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ e simplificar o resultado.

R: $y' = \left[-1 \cdot \sqrt{1+x^2} + (1-x) \cdot 2\,x \cdot \frac{1}{2} \cdot \right.$ $\left. \cdot \sqrt{(1+x^2)^{-1}}\right] : (1+x^2) = -(1+x) : \sqrt{(1+x^2)^3}$

TRIGONOMETRIA

I

5500 — Resolver a equação

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3\,x = \operatorname{sen} 5\,x + \operatorname{sen} 7\,x\,.$$

R: *Como* $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3\,x = 2\operatorname{sen}\frac{x+3\,x}{2}\cos\frac{x-3\,x}{2} = 2\operatorname{sen} 2\,x\cos x$ *e* $\operatorname{sen} 5\,x + \operatorname{sen} 7\,x = 2\operatorname{sen}\frac{5\,x+7\,x}{2}\cos\frac{5\,x-7\,x}{2} = 2\operatorname{sen} 6\,x\cos x$. *Teremos que a equação proposta é equivalente a* $\operatorname{sen} 2x\cos x = \operatorname{sen} 6x\cos x$ *ou seja* $\cos x(\operatorname{sen} 2\,x - \operatorname{sen} 6\,x) = 0$ *ou ainda* $\cos x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{2\,x-6\,x}{2}\cos\frac{2\,x+6\,x}{2} = 0$ *e finalmente* $\cos x \cdot \operatorname{sen}(-2\,x)\cos 4\,x = 0$. *As soluções desta última equação e portanto da proposta são as soluções das equações* $\cos x = 0$; $-\operatorname{sen} 2\,x = 0$ *e* $\cos 4\,x = 0$. *Da primeira as soluções são dadas pela fórmula* $x = \frac{\pi}{2} + n\,\pi$, *onde* n *é um inteiro qualquer. As da segunda são os valores de* x *tais que* $2\,x = n\,\pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{2} \cdot n$. *As da terceira são os valores de* x *tais que* $4\,x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ *ou seja* $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{4}$.

II

5501 — Derivar a função $y = \sec\left(1 + \sqrt{3\,x - 1}\right)$ e simplificar o resultado.

$$\text{R:}\quad y' = \frac{3 \cdot tg\left(1 + \sqrt{3\,x-1}\right)\sec\left(1 + \sqrt{3\,x-1}\right)}{2\sqrt{3\,x-1}}\,.$$

GEOMETRIA

5502 — Determinar a equação da recta que passa pelo ponto $(0, -1)$ e pelo ponto de intersecção das rectas de equações $x + y = 2$ e $x - 2\,y = 1$.

R: *As coordenadas do ponto de encontro das duas rectas são as soluções do sistema* $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2\,y = 1 \end{cases}$ *ou sejam* $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. *A equação da recta pedida é então* $\dfrac{y+1}{-1-\frac{1}{3}} = \dfrac{x-0}{0-\frac{5}{3}}$ *ou ainda* $5\,y - 4\,x + 5 = 0$.

Soluções dos n.ºs 5491 a 5502 de J. S. P.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de frequência — 18-1-1962.

5503 — Designando por Z a imagem do complexo z no plano xOy, considere os conjuntos:

$$C_1 = \{Z : |z-1| \leqslant 1\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{Z : |z+i| \leqslant 1\}$$

e determine o transformado de $C_1 \cap C_2$ por meio da relação $w = \dfrac{z-1}{z+i}$.

5504 — Considerando a equação vectorial $(2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

a) determine λ de modo que a equação seja solúvel e determine nesse caso as respectivas soluções;

b) se for $\mathbf{v} = P - 0$ com 0 fixo, diga qual o lugar geométrico dos pontos P tais que $(2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (P - 0) = \mathbf{e}_1 + \lambda\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ onde λ tem o valor determinado em *a*).

5505 — Estude o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \\ \alpha x + y + z = 1 \\ y - z = \alpha \end{cases}$$

apresentando a respectiva solução (ou soluções) quando existam.

5506 — Considere no espaço R^3 a transformação que a cada vector $\mathbf{x} = \Sigma\, x_i\,\mathbf{e}_i$ faz corresponder $\mathbf{y} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times \mathbf{x}$.

a) Verifique que a transformação é linear e que em relação à base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Que relação existe entre A e A^T? Mostre que toda a matriz hemisimétrica de ordem ímpar é singular.

c) Determine os valores próprios e os vectores próprios reais da matriz A.

Enunciados dos números 5503 a 5506 de F. R. Dias Agudo

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 29 de Junho de 1962.

5507 — Dadas as rectas $2x + 1 = 3y = z$ e $x = y + 1 = 2z - 1$, verifique se são complanares (determinando ao mesmo tempo a distância entre elas) e determine a equação do plano que passa pela primeira e é paralelo à segunda.

5508 — Uma curva passa pela origem e o coeficiente angular da tangente à curva é dado, em cada ponto, pela expressão $\dfrac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

Determine a equação da curva e faça o seu estudo.

5509 — *a*) Mostre que se u_n é um infinitésimo (com valores do mesmo sinal), as séries $\sum u_n$ e $\sum \log(1 + u_n)$ são da mesma natureza.

b) Estude a série $\sum_1^\infty \log \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ por aplicação do critério de *a*).

c) Mostre que o termo geral da série anterior se pode pôr na forma $f(n) - f(n+1)$ e aproveite o facto para calcular a soma da série (se for convergente).

5510 — Seja X o vector $\{x_1\, x_2\}$ e $Y = \{y_1\, y_2\}$ um segundo vector função do primeiro (i. e., $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$) e designe por $\dfrac{dY}{dX}$ a matriz $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$.

Considerando agora que X é por sua vez função de $T = |t_1\, t_2|$ e definindo $\dfrac{dX}{dT}$ de modo análogo a $\dfrac{dY}{dX}$, mostre que $\dfrac{dY}{dT} = \dfrac{dY}{dX} \cdot \dfrac{dX}{dT}$, fórmula que generaliza a derivação de funções compostas de uma só variável independente.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 24 de Julho de 1962.

5511 — Seja **T** uma transformação linear de $R^3 \equiv [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ em $R^2 \equiv [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ definida por $\mathbf{T}\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{T}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{T}\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

a) Determine a matriz da transformação e os vectores de R^3 que se transformam no vector nulo de R^2.

b) Considerando R^3 e R^2 formados por segmentos orientados de origem 0, a transformação anterior representa uma projecção oblíqua de R^3 sobre R^2. Caracterize a direcção da projecção pelos seus cosenos directores.

c) Considerando **T** como transformação de R^3 em R^3, qual a matriz que a representa? Quais os vectores próprios da transformação?

5512 — Determine a primitiva de $\dfrac{\dfrac{2x-1}{1-x}}{1-\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$ que se anula para $x = 0$.

5513 — Determine o i. c. da série $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$. Verifique que a série coincide com a série de McLaurin de $\log(1+x)$ e a partir daí escreva os desenvolvimentos de $\log(1-x)$ e de $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ em série de potências de x. Aproveite o resultado para indicar qual a parte principal de $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ quando $x \to 0$.

5514 — Seja $AX = B$ um sistema de n equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e $\det A \neq 0$.

a) Que sabe acerca da natureza de um tal sistema?

b) Dando a A a forma $A = [A_1\, A_2 \cdots A_i \cdots A_n]$ mostre que o sistema se pode escrever

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_i x_i + \cdots + A_n x_n = B,$$

ou seja

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + (A_i x_i - B) \cdot 1 + \cdots + A_n x_n = 0.$$

c) Que pode concluir quanto à dependência linear das matrizes colunas $A_1, A_2, \cdots, A_i x_i - B, \cdots A_n$, onde x_i é o valor da incógnita de ordem i? Quanto vale o determinante de $[A_1\, A_2 \cdots A_i x_i - B \cdots A_n]$? Justifique.

d) Deduza da alínea anterior que

$$x_i = \frac{\det[A_1\, A_2 \cdots B \cdots A_n]}{\det[A_1\, A_2 \cdots A_i \cdots A_n]}.$$

Que regra obteve?

Enunciados dos n.os 5507 a 5514 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Prova Prática de Informação — 16-2-1962.

I

5515 — 1) Prove que

$$(A \cup B) \cap C \cup D) = \\ = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup A \cap D) \cup (B \cap D).$$

2) Dado o conjunto

$$X = \left\{(-1)^n \frac{2n}{n+1}\right\} (n = 1, 2, \cdots)$$

indique, justificando todas as respostas:

a) pontos interiores, pontos exteriores, pontos fronteiros e pontos de acumulação;

b) ínfimo e supremo;

O conjunto é fechado? Porquê?

R: 1) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \\ = |x \mid x \in (A \cup B) \wedge x \in (C \cup D)|$.

Ora

$$x \in (A \cup B) \wedge x \in (C \cup D) = (x \in A \vee x \in B) \wedge \\ \wedge (x \in C \vee x \in D) = (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \vee \\ \vee (x \in A \wedge x \in D) \vee (x \in B \wedge x \in D) = (x \in A \cap C) \vee \\ \vee x \in B \cap C) \vee (x \in A \cap D) \vee (x \in B \cap D) = x \in (A \cap C) \cup \\ \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$$

o que prova a igualdade proposta.

2 *a*) *Interior*: $\emptyset$.
Exterior: $R - X - |2| - |-2|$.
Fronteira: $X \cup |2| \cup |-2|$.
Pontos de acumulação: -2 e 2.

b) *inf* $X = -2$ *sup* $X = 2$.
O conjunto não e fechado porque $-2 \notin X$ *e* $2 \notin X$.

II

5516 – 1) Mostre que, sendo $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ e $a_1 a_2 = b^2$, se tem $(1+a_1)(1+a_2) \geqq (1+b)^2$.

2) Verifique a identidade seguinte:

$$(1+i)^n = \left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)(1-i)^n.$$

R: 1) $(1+a_1)(1+a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 = 1 + a_1 + a_2 + b^2$ *e, como* $\frac{a_1+a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}$ *ou* $a_1 + a_2 \geqq 2b$, *vem* $(1+a_1)(1+a_2) \geqq 1 + 2b + b^2 = (1+b)^2$.

2) $$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)(1-i)^n = \left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)(\sqrt{2})^n \times$$
$$\times\left[\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right] = (\sqrt{2})^n\left(\cos n\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}\right).$$

III

5517 – 1) Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot \log n}$.

2) Em relação à série $\sum \frac{x^n}{\log(n+1)}$

a) determine o intervalo onde ela é absolutamente convergente e refira a sua natureza fora de tal intervalo;

b) estude a natureza da série nos extremos do intervalo de convergência;

c) refira-se à convergência uniforme, determinando o respectivo intervalo.

3) Mostre que, se for $\sum\limits_0^\infty a_n = a$ (finito), então

$$\sum_1^\infty (a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = 3a - (a_1 + 2a_0).$$

R: 1) *Fazendo* $y_n = \frac{n+1}{n}\log n$, *vem* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$ *e o teorema de Cauchy permite concluir imediatamente que* $\sqrt[n]{y_n} \to 1$.

2 *a)* $$\lim_{n=\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{\log(n+2)}}{\dfrac{|x|^n}{\log(n+1)}} = |x| \lim_{n=\infty}\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = |x|.$$

A série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$ *e divergente para* $x > 1$ e $x < -1$.

b) Para $x = 1$ *tem-se a série* $\sum \frac{1}{\log(n+1)}$ *que é divergente, pois* $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ e $\sum \frac{1}{n+1}$ *é uma série divergente (série harmónica).*

Para $x = -1$ *tem-se a série alternada* $\sum (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$ *que é convergente (simplesmente), pois* $\frac{1}{\log(n+1)} \to 0$ *decrescendo.*

c) A série é uniformemente convergente em qualquer intervalo $[-1, r]$ $(r < 1)$.

3) *Fazendo* $S_n = \sum\limits_0^{n-1} a_n$, *vem*

$$S'_n = \sum_1^n (a_{n-1} + a_n + a_{n+1}) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) +$$
$$+ (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}) =$$
$$= S_n + (S_{n+1} - a_0) + (S_{n+2} - a_0 - a_1) =$$
$$= S_n + S_{n+1} + S_{n+2} - (a_1 + 2a_0)$$

e, como $S_n \to a$, $S_{n+1} \to a$, $S_{n+2} \to a$, $S'_n \to 3a - (a_1 + 2a_0)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 21-3-1962.

I

5518 – 1) Diga o que é uma relação de ordem parcial e uma relação de ordem.

Mostre que o conjunto de todas as sucessões reais pode ser parcialmente ordenado do seguinte modo: a sucessão $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ *precede* a sucessão $b_1, b_2, \cdots b_n \cdots$ se existe um m tal que $a_n < b_n$ para $n > m$.

2) Diga como se define a soma de números racionais e mostre que a soma de dois números racionais positivos recíprocos não pode ser inferior a 2.

R: 1) *Se* $a_n < b_n$ *para* $n > m$ *e* $b_n < c_n$ *para* $n > m'$, *então para* $n > \sup(m, m')$ *é* $a_n < c_n$, *o* *que mostra que a relação introduzida é uma relação de ordem parcial. Sendo* $\mathcal{R}$ *a relação, não se tem sempre* $a_1, a_2, \cdots a_n \cdots \mathcal{R}\, b_1, b_2, \cdots b_n \cdots \vee b_1, b_2, \cdots b_n \cdots \cdots \mathcal{R}\, a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ *e portanto não se trata de uma relação de ordem.*

2) *Sendo* $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] > 0$ *e* $\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] > 0$, *se fosse* $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] + \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] < \left[\frac{2}{1}\right]$ *ter-se-ia* $\left[\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right] < \left[\frac{2}{1}\right]$ *ou* $\alpha^2+\beta^2 < 2\alpha\beta$, *o que é absurdo.*

II

5519 — 1) Demonstre que uma condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão é que os limites máximo e mínimo sejam iguais e finitos.

Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{n+3}{n+1}}-1}$.

2) Se $\sum u_n$ é uma série absolutamente convergente e se a sucessão v_n é limitada, prove que a série $\sum u_n v_n$ é também absolutamente convergente.

Mostre que a série $\sum\limits_1^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ é simplesmente convergente e tem por soma 1.

R: 1) $$\lim_{n=\infty} \frac{\log\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{n+3}{n+1}}-1} = \lim_{n=\infty} \frac{\log\left(1+\dfrac{n}{n^2+1}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim_{n=\infty} \frac{\xi\dfrac{n}{n^2+1}}{\zeta\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{n+1}} = \lim_{n=\infty}\frac{3n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{3}{2},$$ *pois* $\lim \xi = \lim \zeta = 1$.

2) *A série é convergente pois é alternada decrescente e* $a_n \to 0$. *A convergência é simples pois* $\sum \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ *é divergente:* $\lim\limits_{n=\infty} n^\alpha \cdot \dfrac{2n+1}{n(n+1)} = 2\ (\alpha = 1)$.

Como $u_n = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$, *vem*

$$S_{2n} = \left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$$ *e portanto* $S = \lim\limits_{n=\infty} S_{2n} = 1$.

III

5520 — Se $f(x)$ satisfaz a desigualdade $|f(z_1) - f(z_2)| \leqq C\,|z_1 - z_2|$ (C constante) para todo o par de pontos z_1, z_2 de um conjunto Z, prove que $f(x)$ é uniformemente contínua em Z.

Interprete geomètricamente aquela desigualdade e demonstre utilizando um exemplo, que a proposição recíproca não é verdadeira (sugestão: tome como exemplo a função $y = \sqrt{x}$ em $[0, 1]$).

2) Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$

Calcule $g'(x)$ e estude a continuidade de $g(x)$ e $g'(x)$ em $]-\infty, +\infty[$.

3) Calcule $P\dfrac{\log x}{(x-1)^2}$.

R: 1) $|\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| = \dfrac{1}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}}\,|z_1 - z_2|$

e, como não se pode ter $\dfrac{1}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}} \leqq C$ *para* $z_1, z_2 \in V_\varepsilon(0)$, *não se verifica a desigualdade apresentada, embora* $y = \sqrt{x}$ *seja uniformemente contínua em* $[0, 1]$.

2) $g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$g(x)$ *é uma função contínua em todos os pontos próprios e descontínua no infinito;* $g'(x)$ *é uma função contínua para* $x \neq 0$, *descontínua em* $x = 0$ *e contínua no infinito.*

3) $$P\frac{\log x}{(x-1)^2} = P(x-1)^{-2}\log x = -(x-1)^{-1}\log x + P\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{\log x}{x-1} + P\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{\log x}{x-1} + \log|x-1| - \log|x|.$$

Enunciados e soluções dos n.os 5515 a 5520 de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 30 de Abril de 1962.

I

5521 — Defina a multiplicação de números inteiros e prove que $[m+1, m]$ é o elemento unidade para a multiplicação.

Prove a propriedade distributiva da multiplicação para os números inteiros.

2) Defina as médias aritmética e geométrica e utilize a desigualdade existente entre elas para provar que $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

R: 2) $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} =$
$= \frac{n+1}{2}$, *isto é*, $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ *ou* $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

II

5522 — 1) Demonstre que a fórmula $\log(1+x) = x - \lambda x^2 \left(\lim_{x=0} \lambda = \frac{1}{2}\right)$ se pode obter da fórmula de MAC-LAURIN para a função $\log(1+x)$.

Calcule $\lim_{n=\infty} \frac{\log n!}{1^k + 2^k + \cdots + n^k} \; (k>0)$.

2) Deduza o critério da razão e explique por que motivo ele não serve para esclarecer a natureza da série S) $1 + a + b^2 + a^3 + b^4 + \cdots + a^{2n-1} + b^{2n} + \cdots$ $(0 < a < b < 1)$. Estude a natureza de S).

R: 1) *Pela fórmula de* MAC-LAURIN *é* $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}$ *e, como* $\lim_{x=0} \frac{1}{2(1+\theta x)^2} = \frac{1}{2}$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

Fazendo $x_n = \log n!$ *e* $y_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, *como* $\lim_{n=\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)! - \log n!}{(n+1)^k} =$
$= \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)^k} = \frac{1}{k} \lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)^k}{(n+1)^k} = 0$, *vem imediatamente (teorema de* CAUCHY*)*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n!}{1^k + 2^k + \cdots + n^k} = 0.$$

2) *Como* $\rho_{2n} = \frac{b^{2n}}{a^{2n-1}} \to +\infty$ *e* $\rho_{2n+1} = \frac{a^{2n+1}}{b^{2n}} \to 0$, *tem-se uma infinidade de vezes* $\rho_n > 1$ *mas isso não é garantia de divergência.*

$1 + a + b^2 + a^3 + b^4 + \cdots < 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \cdots$ *e a série* Σb^n *é convergente o que implica a convergência da série dada.*

III

5523 — 1) Considere o polinómio $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ e calcule $\lim_{x=+\infty} P(x)$ e $\lim_{x=-\infty} P(x)$ (considere separadamente os casos n par e n ímpar).

Prove que, com n ímpar, o polinómio $P(x)$ tem pelo menos uma raiz real.

2) Calcule $P \frac{x+1}{x^4(x^2+1)}$.

3) Sendo $f''(x) \geq 0$ em $[a, b]$, prove que o gráfico de $f(x)$ em $[x_1, x_2]$ $(a \leq x_1 < x_2 \leq b)$ está abaixo da corda que une os pontos $M_1[x_1, f(x_1)]$ e $M_2[x_2, f(x_2)]$.

R: 2) $\frac{x+1}{x^4(x^2+1)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{x^4} + \frac{S_0}{x^2+1}$.

Cálculo de a_0, a_1, a_2 *e* a_3:

$R_0(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ *e, fazendo a divisão do numerador pelo denominador até o cociente atingir o grau 3, obtem-se* $1 + x - x^2 - x^3$ *que é o polinómio procurado.*

Cálculo de S_0:

$R_\Delta(x) = \frac{x+1}{x^4} = \frac{x+1}{1 - 2\Delta + \Delta^2}$ *e vem imediatamente* $S_0 = x + 1$.

$P \frac{x+1}{x^4(x^2+1)} = P\frac{1}{x^4} + P\frac{1}{x^3} - P\frac{1}{x^2} - P\frac{1}{x} + P\frac{x}{x^2+1} + P\frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$.

Enunciados e soluções dos n.os 5521 a 5525 de Fernando de Jesus

F. C. P. — MATEMÁTICAS GERAIS — Engenharia — 1.º Exame de Frequência — Fevereiro de 1962.

Ponto N.º 2

5524 — 1 — *a*) Resolver a equação $\bar{z}^4 + 1 = 0$ em que $z \in C$. (Tal como no curso, sendo $z \in C$, o símbolo $\bar{z}$ designa aqui o conjugado de z).

b) Mostrar que os afixos das raízes encontradas são vértices de um quadrado centrado na origem.

c) Decompor o polinómio $X^4 + 1 \in C[X]$ em factores *primos* (sobre C); indicar ainda a decomposição desse polinómio em factores primos (sobre R). Justificar a resposta.

2 — *a*) Decompor em fracções simples de $C(X)$ a fracção racional

$$\frac{2iX^3 + (1-3i)X^2 + (8-3i)X + 2i - 2}{(X-2)^2(X+1)^2}$$

b) Calcular a soma dos inversos dos zeros do polinómio

$$2iX^3 + (1-3i)X^2 + (8-3i)X + 2i - 2.$$

3 — *a*) Achar equações paramétricas da recta r que passa pelo ponto

$$A(1,2,-1)$$

e tem a direcção do vector $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

b) Achar equações cartesianas dessa mesma recta r.

c) Achar a equação cartesiana do plano α, que passa pela recta r, e é paralelo à recta s, de equações cartesianas.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y+3z=5 \end{cases}$$

d) Escrever equações cartesianas de uma recta genérica do plano α que seja paralela ao plano

$$y+z=1.$$

4 — Seja A um operador linear sobre um espaço vectorial E; designe $C(A)$ o *contra domínio* de A (isto é, a totalidade das imagens, Ax, dos vectores $x \in E$).

a) Mostrar que $C(A)$ é um *sub-espaço* de E.

b) Supondo $\dim E=n$, e $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ uma *base* de E, mostrar que $C(A)$ é a *variedade linear* gerada pelos n vectores $Ae_1, Ae_2, \cdots Ae_n$, e indicar como, mediante adequado confronto destes n vectores, é possível calcular a *dimensão de* $C(A)$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Engenharia — 2.ª chamada — 1.º Exame de Frequência.

Ponto N.º 4

5525 — 1 — *a*) Seja λ um parâmetro real arbitrário; mostrar que o afixo do complexo $z=\lambda-1+2\lambda i$ descreve uma recta (que será determinada), quando λ varia de $-\infty$ a $+\infty$.

b) Determinar o valor mínimo de $|z|$, aproveitando o resultado obtido em *a*).

c) Será o conjunto dos valores de z, considerados em *a*), um *espaço vectorial* (sobre C), a respeito da *adição* e *multiplicação* por um complexo, habituais? Justificar a resposta.

2 — Indicar, justificando a resposta, quais dos seguintes conjuntos de polinómios constituem um *ideal* de $C[X]$:

a) o conjunto $R[X]$ dos polinómios de $C[X]$, cujos coeficientes são reais;

b) o conjunto D dos polinómios de $C[X]$ que não têm valoração inferior a 2;

c) o conjunto dos polinómios constantes de $C[X]$.

Num dos casos afirmativos, indicar ainda um gerador do respectivo ideal.

3 — Num referencial orto-normal, sejam $\begin{cases} x=2z+1 \\ y=3z-2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=4z-1 \\ y=2z+3 \end{cases}$ as equações de duas rectas r e s, respectivamente.

a) Determinar a equação do plano α, que passa por r e é paralelo a s;

b) Achar o ângulo que forma com o plano α uma recta que tem a direcção do vector $\vec{u}=\frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

c) Achar os planos, paralelos às rectas r e s, que distam da origem 4 unidades.

4 — Seja A um operador linear sobre um espaço vectorial E, n — dimensional sobre um corpo K de números.

a) Mostrar que, sendo $u_1, u_2 \cdots, u_n$ uma *base* de E, e $Au_1, Au_2 \cdots, Au_n$, vectores *linearmente dependentes* (em E), o operador A não tem inverso, — e que, se os vectores $Au_1 Au_2 \cdots Au_n$, são *linearmente independentes*, o operador A é invertível.

b) Sejam, em particular, $E=R^3$ e $K=R$. Seja A o operador linear sobre R^3 tal que

$$A(1,0,1)=(1,0,0)$$
$$A(0,1,1)=(0,1,0).$$
$$A(0,1,0)=(0,0,1)$$

Estudar a invertibilidade do operador A assim caracterizado, tendo em conta a alínea *a*).

c) Achar os transformados, por A, dos vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, de R^3.

NOTA — Na elaboração dos precedentes enunciados teve-se em conta o facto seguinte, que fortemente condiciona, desde 1958, o ensino da cadeira de Matemáticas Gerais na Faculdade de Ciências do Porto: em virtude da carência de pessoal docente e salas de aula, tornou-se impossível proporcionar aos numerosíssimos alunos inscritos nessa cadeira (1350, no corrente ano lectivo) *as duas aulas práticas por semana prescritas por lei, sendo uma apenas dada em cada turma. (E, mesmo assim, cada turma comporta por vezes 60 alunos).*

Enunciados dos n.os 5524 a 5525 de A. Andrade Guimarães

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 1962.

1.ª chamada

5526 — 1 *a*) Defina conjunto aberto e conjunto fechado. Sendo Y sub-conjunto fechado do conjunto aberto X, prove que $X-Y$ é aberto.

1 *b*) Calcule

$$\lim (n+2)^2 \left[\frac{1}{n+1} - \log(n+2) + \log(n+1) \right].$$

2 *a*) Demonstre que o raio de convergência de $\sum a_n x^n$ é dado por

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

2 *b*) Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{(a + b \cos n\pi)^{2n}}{n^2+1} (2x+1)^n$$

2 *c*) Prove que a convergência é uniforme nesse intervalo.

3 *a*) Calcule $\omega(2)$, $f'_e(2)$ e $f'_d(2)$ para

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} & \text{se } x < 2 \\ +\sqrt{5-x^2} & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

3 *b*) Se $f(x)$ é contínua em a e $g(y)$ em $b = f(a)$, prove que a composição $g[f(x)]$ é contínua com a.

4 *a*) Calcule $P\ (\operatorname{cosec} x \cdot \sec x)^2$.

4 *b*) Calcule $P \dfrac{1+x}{x^5 + 4x^3}$.

2.ª chamada

5527 — 1 *a*) Sejam $X_1, X_2, \cdots$ conjuntos limitados de números reais tais que $X_n \supset X_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Relacione, justificando, os limites de W · l_n, L_n, l_{n+1}, L_{n+1} de X_n e X_{n+1}. As sucessões l_n e L_n convergem? Porquê?

1 *b*) Discuta a existência de limite para a sucessão de termo geral

$$\mu_n = \frac{\alpha^n \beta^n}{\alpha^n + \beta^n} \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$$

2 *a*) Enuncie e prove o critério de Raabe.

2 *b*) Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{1}{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n.$$

2 *c*) Deduza daí a convergência uniforme da série

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{\cos nx}{n}$$

em $(-\infty, +\infty)$.

3 *a*) Usando a definição de derivada, calcule $f'(3)$ para

$$f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{1+x}}.$$

Confirme o resultado usando as regras de derivação.

3 *b*) Seja $f(x)$ um polinómio de grau par e termo independente negativo. Que pode dizer das suas raízes? Justifique.

4 *a*) Calcule $P \dfrac{\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

4 *b*) Calcule $P \dfrac{4x+1}{4x^4 + 4x^2 + 1}$.

Enunciados dos n.os 5526 a 5527 entregues por J. J. Dionísio

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — (Biológicas, Geológicas e Prof. Adj.) — 13-7-62.

5528 — Se A e B representarem dois acontecimentos, diga o que entende por $A \cup B$ e $A \cap B$. Como estão relacionadas as probabilidades $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A)$ e $P(B)$? Quando diz que dois acontecimentos são incompatíveis?

Aplicação: Seja A o acontecimento «saída de um ás» e B o acontecimento «saída de uma carta de espadas» numa tiragem casual de um baralho de 52 cartas.

O que vêm a ser neste caso $A \cup B$ e $A \cap B$?
Calcule $P(A \cup B)$.

R: $P(A \cup B) = \dfrac{4}{13}$.

5529 — Faça o estudo da curva de equação

$$y = \frac{1}{2{,}4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-13{,}4}{2{,}4}\right)^2}$$

e diga qual a importância das curvas deste tipo em Estatística.

Aplicação: Num exame em que se apresentaram 500 alunos a classificação média obtida foi 13,4 e o desvio padrão 2,4.

Admitindo que as classificações se distribuem normalmente, determine

a) a percentagem de alunos com 12 valores (considerando incluidas nesta categoria as notas do intervalo $11{,}5 \leqslant x < 12{,}5$);

b) o percentil de ordem 10 (ou 1.º decil), i. e., a nota máxima dos 50 alunos menos classificados;

c) a nota mínima dos 50 alunos mais classificados.

R: 14 %; 10,3; 16,5.

5530 — Distribuição de frequências; histogramas; classificação dos dados.

Aplicação: De uma população escolar escolheram-se ao acaso 40 alunos e mediram-se as respectivas alturas em cm, obtendo-se os seguintes resultados:

138	164	150	132	144	125	149	157	146	158
140	147	136	148	152	144	168	126	138	176
163	119	154	165	146	173	142	147	135	153
140	135	161	145	135	142	150	156	145	128

a) Organize um quadro de frequência com os dados distribuidos pelas 12 classes 118-122, 123-127, ...

b) Desenhe o histograma correspondente e determine gràficamente os quartis.

c) Calcule a média da amostra.

d) Como obter estimas centradas do valor médio e da variância da população?

5531 — Ensaios de hipóteses sobre o tipo de distribuição.

Aplicação: Considere a totalidade de famílias com 5 filhos e designe por X o n.º de rapazes de cada família. Aceitando que são igualmente prováveis os nascimentos de rapazes e de raparigas, prova-se que

$$P(X=0)=P(X=5)=\frac{1}{32}\,; \quad P(X=1)= $$
$$=P(X=4)=\frac{5}{32}\,; \quad P(X=2)=P(X=3)=\frac{10}{32}\,.$$

a) Qual a expressão que permite calcular estes valores?

b) Estudando o que se passa numa amostra de 320 famílias com 5 filhos, obtiveram-se os seguintes dados:

n.º de rapazes	0	1	2	3	4	5
n.º de famílias	8	40	88	110	56	18

Organize com estes valores um quadro para o cálculo de Q^2 e conclua daí qual a confiança que lhe merece a hipótese de serem igualmente prováveis os nascimentos de rapazes e raparigas.

R: $Q^2=12{,}0>\chi^2_{0.95}=11{,}1$ *(para 5 graus de liberdade) e a hipótese não é aceitável ao nível de significância de 5%.*

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — (Biológicas, Geológicas e Prof. Adj.) — 16-7-62.

5532 — Sejam A e B dois acontecimentos a que correspondem as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$. O que entende por *probabilidade condicional de* B *realizado* A e em que condições se pode definir? Quando diz que A e B são independentes?

Aplicação: De um baralho de 40 cartas tiram-se sucessivamente duas ao acaso. Qual a probabilidade de obter 2 ases

a) se houver reposição da 1.ª carta antes de tirar a 2.ª?

b) se as tiragens se fizerem sem reposição?

Indique como a probabilidade pedida em *b*) se pode calcular também pela relação entre o n.º de resultados que conduzem ao acontecimento e o n.º total de resultados possíveis.

R: *a*) $\frac{1}{100}$ *b*) $\frac{1}{130}$.

5533 — Dada uma curva de equação $y=f(x)$, como calcula a área compreendida entre a curva, o eixo das abcissas e as rectas $x=a$ e $x=b$?

E se $f(x)$ for a densidade de probabilidade de uma variável casual X, que significado pode dar à referida área? Quais as condições a que se deve sujeitar $f(x)$ para que possa ser uma densidade de probabilidade?

Aplicação: Represente gràficamente a função

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ se } x<0\\ 1/2-cx \text{ se } 0\leqslant x\leqslant 4\\ 0 \text{ se } x>4\end{cases},$$

determine c de modo que $f(x)$ possa ser a densidade de probabilidade de uma variável casual X e calcule nesse caso $P(1<X<2)$ e $P(X>3)$.

R: $c=\frac{1}{8}$; $P(1<X<2)=\frac{5}{16}$; $P(X>3)=\frac{1}{16}$.

5534 — Distribuição binomial. Sua aproximação pela distribuição normal.

Aplicação: Uma variável X que segue a lei binomial tem $M(X)=6$ e $\sigma(X)=2$.

Calcule n, p, q, dê a expressão que permite calcular $P(X=1)$ e calcule um valor aproximado desta probabilidade recorrendo à distribuição normal.

R: $n=18$, $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$, $P(X=1)\simeq 0{,}009$.

Estima do valor médio e da variância. Estimas pontuais e por intervalos.

Aplicação: Uma amostra de 50 classificações de uma população escolar conduziu a $\overline{x}=7{,}5$ e $s^2=4$. Aceitando que a distribuição é normal com valor médio μ e desvio padrão σ, determine uma estima centrada de σ e calcule

$$P(7{,}5-0{,}1<\mu<7{,}5+0{,}1)\,.$$

R: $\frac{2\sqrt{50}}{7}$ e 0,28,

Enunciados dos n.ºs 5528 a 5534 de F. R. Dias Agudo

CÁLCULO INFINITÉSIMAL

Academia Militar — Cálculo Infinitésimal — Algumas questões saídas nos primeiros exames de frequência da 6.ª cadeira no ano lectivo de 1961-1962.

5535 — *a*) Defina diferencial da função $f(x, y, z)$ no ponto (x_0, y_0, z_0).

b) Determine a diferencial da função $f(x, y, z) = x \cos(y z)$ com

$$x = u \operatorname{sen} v$$
$$y = u \cos v$$
$$z = u$$

e verifique para este caso o princípio da invariância da diferencial.

5536 — *a*) Mostre que nas vizinhanças do ponto $(1, -1, 2)$ as equações

$$x^2(y^2 + z^2) = 5$$
$$(x - z)^2 + y^2 = 2$$

definem y e z como funções de x continuamente deriváveis.

b) Determine os valores das derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ das funções a que se refere a alínea anterior, no ponto considerado.

5537 — *a*) Mostre que as funções u, v, w definidas por

$$u = x + y$$
$$v = x + z$$
$$w = y^2 + z^2 - 2yz$$

são funcionalmente dependentes.

b) Determine o domínio e o contradomínio da transformação $(x, y, z) \to (u, v, w)$ definida pelas funções anteriores.

5538 — Mostre que as funções $z(x, y)$ definidas implicitamente pela expressão

$$f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

onde f designa uma função arbitrária dos seus argumentos, derivável, verificam a equação

$$x^2 - y^2 + (xz + yz)\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

5539 — *a*) Defina plano tangente e normal a uma superfície num ponto regular.

b) Determine as equações cartesianas e equações vectoriais do plano tangente e da normal à superfície

$$x^2 + y^2 = 2z$$

no ponto em que $x = -1, y = 1$.

5540 — Considere os campos vectoriais de R^3 definidos pelos vectores $\mathbf{u}(X)$ e $\mathbf{v}(X)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, e suponha que existe $\operatorname{div}\mathbf{u}$, $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ e $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ num dado aberto de R^3.

a) Mostre que

1) $$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}\cdot\mathbf{k}.$$

2) $$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{i}\times\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{j}\times\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mathbf{k}\times\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}.$$

b) Utilize os resultados da alínea anterior e as propriedades do produto misto de três vectores para mostrar que

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

5541 — *a*) Utilizando a teoria dos extremos condicionados (multiplicadores de Lagrange) determine o ponto da reta

$$x + z - 6 = 0$$
$$x - 2y - 3z = 0$$

que está à menor distância da origem.

b) Verifique o resultado obtido na alínea anterior resolvendo o problema por outro processo.

5542 — Utilizando a teoria dos extremos condicionados (multiplicadores de Lagrange) determine o ponto da parábola $y = 4x^2$ que está à menor distância da recta $x - y = 1$.

5543 — *a*) Determine a área da região limitada pelas linhas $x^2 = 3 - y$ e $x = 2y$.

b) Determine o perímetro do contorno que limita a área a que se refere a alínea anterior.

5544 — *a*) Método de integração por partes.

b) Utilize o método a que se refere a alínea anterior para mostrar que se for

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n \, dx, \quad n \text{ inteiro não negativo,}$$

então

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n .$$

5545 — Considere a expressão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ (c = \text{const.})$$

e mude as variáveis independentes x, y, z, t para as variáveis ξ, η, ζ, τ relacionadas com as primeiras por

$$x = \frac{\xi + v\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \ y = \eta, \ z = \zeta, \ t = \frac{\tau + \frac{v}{c^2}\xi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

sendo v uma constante.

Enunciados dos n.os 5535 a 5545 de A. César de Freitas

MOVIMENTO MATEMÁTICO

FORUM ATÓMICO PORTUGUÊS (em organização)

A Comissão Organizadora do *Forum Atómico Português*, constituída — por iniciativa da Secção Nuclear da Associação Industrial Portuguesa — pelos Srs.: Eng. Álvaro Machado de Assunção, Dr. Carlos Cacho, Prof. Herculano de Carvalho, Dr. Manuel Corte-Real, Eng. Quadros e Costa, Dr. Armando Gibert, Eng. Ivo Gonçalves, Eng. Teixeira Lopo e Eng. Manuel Rocha, pede-nos a publicação da seguinte nota:

«Na convicção de que o prestígio e a eficiência do futuro *Forum Atómico Português* estão intimamente ligados ao número e projecção das empresas que se inscreveram como seus sócios colectivos e, designadamente, de apoio, bem como ao interesse e entusiasmo dos seus sócios efectivos individuais, os membros da Comissão Organizadora, lançam um convite a todos — empresas e técnicos individuais — para que dêem desde já a sua adesão a esta iniciativa».

O *Forum Atómico Português* destina-se a preencher uma lacuna no nosso País, pois já há alguns anos que existem e florescem organizações semelhantes na maioria dos países da Europa. Designadamente as associações dos seguintes países: Alemanha, Bélgica, Holanda, Itália, Luxemburgo, Suiça, resolveram unir-se numa associação europeia, o *Foratom*, à qual se juntaram recentemente a Áustria e a Espanha. Portugal será membro efectivo do *Foratom* logo que se tenha constituído o *Forum Atómico Português*. Até lá está representado naquela agremiação, a título provisório, pela Secção Nuclear da Associação Industrial Portuguesa.

Para orientação dos interessados publicamos a seguir extractos de alguns dos mais significativos artigos dos Estatutos da futura associação, a saber:

Art. 3.º — O objectivo desta associação, entre outros autorizados pela lei, é o de contribuir para a promoção e coordenação de todos os esforços ao seu alcance que favoreçam o progresso e o desenvolvimento das aplicações pacíficas da energia nuclear em todos os campos.

§ único — Para isso deverá, em particular:

1.º) organizar reuniões e realizar trabalhos de interesse geral, designadamente através dos Grupos de Trabalho previstos no Art.º 23.º;

2.º) manter os sócios informados dos principais progressos técnicos da energia nuclear e das suas aplicações pacíficas e das perspectivas do mercado que esses progressos representam:

3.º) divulgar entre o público em geral a importância para o bem-estar social das aplicações pacíficas da energia nuclear, quer pela sua utilização directa, quer pelos mercados que criam, bem como procurar esclarecer os problemas relativos a riscos atómicos;

4.º) promover o conhecimento das actividades nacionais nos diversos sectores das aplicações pacíficas da energia nuclear e dos esforços feitos para o seu desenvolvimento, através de conferências, congressos, exposições, etc.;

5.º) colaborar com outros organismos nacionais ou internacionais prosseguindo objectivos análogos ou concorrentes para os mesmos fins gerais.

Art. 4.º — Podem ser sócios do *Forum Atómico Português* todas as pessoas físicas ou morais de nacionalidade portuguesa ou não, que manifestem esse desejo e sejam recomendadas, para esse fim, por dois sócios de apoio ou efectivos, de nacionalidade portuguesa.

Art. 7.º — As quotas serão pagas anualmente, em Janeiro de cada ano, de acordo com a seguinte tabela:

Sócios efectivos ou correspondentes:
pessoas físicas: cem escudos
pessoas morais: quinhentos escudos
Sócios de apoio: cinco mil escudos.

Art. 9.º — As actividades da associação exercem-se através dos seguintes órgãos:
a Assembleia Geral
o Conselho de Orientação
a Direcção
os Serviços Administrativos
os Grupos de Trabalho.

cuja composição e atribuições se fixam nos artigos seguintes ou serão definidas em Regulamentos Internos a elaborar pela Direcção.

Art. 13.º — O Conselho de Orientação é constituído essencialmente por delegados de organismos públicos ou de utilidade pública, expressamente convidados a nomearem representantes seus para esse fim.

§ único — A Direcção regulamentará a organização deste Conselho.

Art. 23.º — Com o fim de criar as melhores condições à consecução do objecto social, criar-se-ão Grupos de Trabalho cujo número, composição e programa de actividades serão objecto do Regulamento Interno a elaborar pela Direcção.

Art. 27.º — Considerar-se-ão Sócios Fundadores todos os que se tenham inscrito nas várias classes de sócios, a título provisório, até à realização da Assembleia Geral Constituinte e que tomem parte nesta.

Todo o expediente relativo a esta associação deverá ser remetido para o seguinte endereço: Comissão Organizadora do F. A. P. — a/c da Associação Industrial Portuguesa, Praça das Indústrias — Lisboa 3.

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Como noticiamos no N.º 74-75 a Fundação Calouste Gulbenkian concedeu à «Gazeta de Matemática» um subsídio da importância de 100.000$00. Depois de troca de correspondência onde se procurou a forma aceitável da utilização do subsídio, chegou-se a entendimento pela aprovação concedida pelo Conselho de Administração da Fundação à proposta que apresentámos em Novembro do ano findo.

O ofício que a seguir se transcreve, estabelece o plano pormenorizado da utilização daquele subsídio, plano que mereceu também a aprovação do Digníssimo Conselho de Administração da Fundação Calouste Gulbenkian, ao qual aqui renovamos os nossos sinceros agradecimentos.

Ao
Ex.mo Senhor
Director do Serviço de Ciência
Fundação Calouste Gulbenkian
LISBOA

Ex.mo Senhor Doutor:

Recebemos e agradecemos a carta de V. Ex.ª, de 4 de Dezembro último, em que nos é comunicada a aprovação pelo Digníssimo Conselho de Administração da Fundação Calouste Gulbenkian, do proposto no N.º 1 do projecto por nós apresentado em carta de 15 de Novembro do ano findo.

Em conformidade, pedimos a V. Ex.ª nos seja remetido documento que nos permita a utilização imediata dos 25 % do referido subsídio.

Em seguida permitimo-nos apresentar a V. Ex.ª plano mais pormenorizado de aplicação dos restantes 75 %, como foi prometido na mesma nossa carta de 15 de Novembro do ano findo.

Como dissemos, em nossa exposição de 31 de Julho de 1958, a «Gazeta de Matemática» «tem feição principalmente didáctica e divulgadora, dirigindo-se a professores e estudantes» e possibilitando-lhes trabalho mais de «mise-au-point» que de investigação matemática sobre assuntos não versados nos nossos programas universitários.

Neste campo de actividades, a «Gazeta de Matemática» tem um papel fundamental a desempenhar.

Com efeito, permita-me V. Ex.ª recordar que, se considerarmos um país de população equivalente à da metrópole portuguesa mas de conjuntura nacional igual à de um país europeu de desenvolvimento médio, nas suas Faculdades de Ciências se deveriam formar no corrente ano lectivo 1961-1962

	990	licenciados e	120	doutores
dos quais	396	licenciados e	30	doutores
	297	» »	45	»
	297	» »	45	»

deveriam ser imediatamente ocupados respectivamente pela indústria, pela investigação e pelo ensino.

A realidade portuguesa é infelizmente bastante diferente.

Não nos compete nem nos interessa neste momento mais que esta simples constatação para afirmarmos mais uma vez a nossa firme decisão de contribuir para a melhoria dos conhecimentos matemáticos no nosso país e para a consequente repercussão nacional.

Tendo em vista estes factos, sentir-se-ia a «Gazeta de Matemática» muito honrada se pudesse colaborar ou auxiliar a Fundação Calouste Gulbenkian em qualquer plano de actividade que tivesse como campo de acção o domínio atrás referido: aperfeiçoamento dos nossos licenciados em matemática e estudantes dos últimos anos do curso em trabalhos de «mise-au-point» (não de investigação) nos ramos ou não suficientemente desenvolvidos ou não versados nos nossos programas universitários.

* * *

Nestes termos, pensamos que, como princípio fundamental, os restantes 75 °/₀ devem ser aplicados por forma que:

a) a revista venha a ser directamente beneficiada, particularmente no que respeita a assegurar-lhe colaboração mais regular e permanente e potencialmente extensiva a todos os estudiosos de matemática em Portugal;

b) se promova e se fomente a disposição de estudo e de publicação de resultados de estudo de novos temas de matemática.

Assim os 75.000$00 dividir-se-iam em três parcelas iguais:

1) 25.000$00 seriam distribuídos como prémios de um concurso aberto nas condições gerais seguintes:

a) O concurso consta de duas secções: A e B
À secção A poderão concorrer quaisquer indivíduos não licenciados.
À secção B poderão concorrer quaisquer indivíduos não doutorados.

b) Os concorrentes deveriam apresentar trabalho de «mise-au-point» com extensão mínima a determinar e sobre assunto incluindo em secções como:
Pedagogia e história das matemáticas
Matemáticas puras
Matemáticas aplicadas
Física matemática ou Física teórica

c) Os trabalhos premiados seriam publicados na «Gazeta de Matemática», a quem os autores cederiam os seus direitos.
Os trabalhos não premiados mas considerados com mérito e interesse poderiam ser também publicados na «Gazeta de Matemática» mas sem direito a qualquer outro prémio que não seja o da sua publicação.

2) 25.000$00 seriam aplicados na compra de livros, que ficariam na posse da Biblioteca da «Gazeta de Matemática», mas que seriam adquiridos segundo necessidade fundamentada de estudiosos não doutorados, em especial aqueles que fossem subvencionados, para realizarem trabalho de «mise-au-point» dentro de plano a estudar em pormenor e a estabelecer entre várias entidades nomeadamente a Fundação Calouste Gulbenkian e a «Gazeta de Matemática».

3) 25.000$00 seriam destinados a garantir a realização completa dos objectivos expostos na primeira alínea, particularmente no que respeita a publicação de qualquer trabalho apresentado que mereça a forma de monografia.

Para regulamentação do concurso referido em 1) e classificação dos trabalhos apresentados seria organizado júri constituído por representantes da Fundação Calouste Gulbenkian, da «Gazeta de Matemática» e dos Ensinos Superior, Secundário e Técnico.

Pedíamos o parecer de V. Ex.ª sobre o que acabamos de expor e aproveitamos a oportunidade para apresentar os nossos melhores cumprimentos.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

149 — A. César de Freitas — **Cálculo com números aproximados.** — Lisboa, 1960

O «Seminário de Cálculo Numérico e Máquinas Matemáticas do Instituto de Alta Cultura» iniciou com este trabalho do Dr. César de Freitas as suas publicações que serão dos três tipos seguintes:

Publicações A — destinadas a fornecer elementos de trabalho e de consulta aos estudantes e a todos aqueles que necessitam de efectuar cálculos numéricos (matemáticos, físicos, engenheiros, etc.).

Publicações B — destinada a apresentar resultados dos novos.

Publicações C — tabelas.

O livro *Cálculos com Números Aproximados* pertence à primeira categoria e é um livro elementar de iniciação, muito claro, acessível até ao aluno do último ano liceal. Os diversos parágrafos do livro intitulam-se:

Erros e enganos; valores aproximados dos números; algarismos significativos; relação entre o erro relativo e o número de algarismo significativos; fórmula fundamental do cálculo dos erros; aplicação da fórmula fundamental do cálculo dos erros ao caso das operações fundamentais; outras aplicações; o problema inverso do cálculo dos erros; operações aproximadas.

Termina o livro com uma bibliografia actual onde o estudioso poderá continuar e completar o seu esclarecimento.

O livro preenche uma lacuna na bibliografia portuguesa sobre o assunto e prestará bons serviços aos que se queiram iniciar nos métodos do cálculo com números aproximados.

J. Silva Paulo

150 — Martins Rodrigues, A. A., e Muniz Oliva, W. Quádricas num espaço afim euclideano — Sociedade de Matemática de São Paulo, 1961.

O desenvolvimento assumido nos últimos anos pela álgebra linear tem-se feito sentir em larga escala no estudo dos assuntos tradicionalmente englobados na geometria analítica do segundo grau, e é exemplo disso a presente publicação da Sociedade de Matemática de São Paulo, com as lições referentes a dois capítulos da cadeira de Geometria Analítica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Os autores começam por dar umas noções gerais da teoria das formas bilineares e formas quadráticas sobre um espaço vectorial de dimensão n, e das funções quadráticas sobre um espaço afim associado ao espaço vectorial, que interessam para o estudo posterior das quádricas nesse espaço afim. Aplicam a teoria feita aos casos correntes $n=2$ (cónicas) e $n=3$, apresentando uma classificação destes lugares geométricos, primeiro a partir dos invariantes ortogonais, e depois a partir dos coeficientes da equação que os representa em relação a um sistema ortogonal de coordenadas.

Este último quadro de classificação não é totalmente selectivo (nele não se distinguem, por exemplo, dois planos paralelos de dois planos coincidentes e um cilindro hiperbólico de dois planos concorrentes) mas pode completar-se por recurso às expressões (na notação dos autores) $\sum_1^3 A_{ii}$ e $D_1 \cdot \sum_1^3 A_{ii}$ (invariantes para as quádricas com mais do que um centro) e $\sum_1^3 \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{i4} \\ a_{4i} & a_{44} \end{vmatrix}$ (invariante para as quádricas com um plano de centros), como pode ver-se no livro, do autor destas linhas, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Lisboa, 1960.

A publicação da S. M. S. P., em policópia, tem VI+52 páginas e consta dos seguintes capítulos e parágrafos:

Cap. I — Formas quadráticas. Cap. II — Quádricas. § 1 — Funções quadráticas. § 2 — Centros, vértices e classificação de uma quádrica pela função quadrática. § 3 — Cones, cone assintótico de uma quádrica com centro. § 4 — Variedades lineares conjugadas. § 5 — Equivalência de quádricas por movimento rígido. § 6 — Equações reduzidas das quádricas em relação aos sistemas ortogonais de coordenadas. Casos $n=2$ e $n=3$: Classificação das cónicas, caso $n=2$; classificação das quádricas, caso $n=3$: § 7 — Classificação das quádricas por meio dos coeficientes; determinação de um sistema de invariantes a partir dos coeficientes; classificação das cónicas pelos coeficientes; classificação das quádricas em dimensão três pelos coeficientes.

F. R. Dias Agudo

151 — Premier Congrès de l'Associations Française de Calcul (AFCAL). Grenoble 14 au 16 Septembre 1960 — Gauthier Villars, Paris, 1961.

Num volume de 488 páginas com figuras e ilustrações são publicadas as actas do primeiro Congresso da Associação Francesa de Cálculos (AFCAL) realizado em Grenoble desde 14 a 16 de Setembro de 1961 sob a presidência de M. André Danjor. Este importante documento compreende, assinados por especialistas dos mais autorizados, 51 memórias originais tratando fundamentalmente, da análise numérica e da teoria dos erros e complementarmente de uma longa série de problemas relacionados com a operação dos calculadores electrónicos para a solução dos problemas científicos e industriais: estrutura das máquinas, programação automática e lógicas exteriores, tradução e documentação automática, programação, utilisação dos calculadores na gestão, na investigação operacional e nas aplicações industriais.

Este congresso foi o ponto de partida da extensão da actividade da Associação a todo o conjunto de problemas relacionados com o tratamento da informação, circunstância que ficou expressa na mudança do nome da Associação: de AFCAL passou a AFCALTI.

J. G. Teixeira

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

T. Doetsch — *Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace.*

Études Relativistes

H. Arzeliès — *Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement.*
M. Parodi — *Introduction à l'étude de l'Analyse Symbolique.*
G. Polya — *Les Mathématiques et le Raisonnement «Plausible».*

Cahiers Scientifiques

J. Favard — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome II.*

Editor — LIBRAIRIE VUIBERT, Paris

Lentin et Rivaud — *Éléments d'Algèbre Moderne.*
J. Rivaud — *Exercices d'Analyse. Tome I et Tome II.*

Editor — SOCIÉTÉ D'EDITION D'ENGEIGNEMENT SUPÉRIEUR, Paris

J. Grey — *Mathématiques Préparatoires aux Sciences Expérimentales.*

Editor — CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, Paris

J. Lavoine — *Calcul Symbolique, Distributions et Pseudo-fonctions.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE Albert Blanchard, Paris

J. F. Montucla — *Histoire des Mathématiques.*
A. M. Ampère — *Théorie Mathématique des phénomènes electro-dynamiques.*
J. Hadamard — *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine Mathématique.*
Gauss — *Recherches arithmétiques*
A. M. Legendre — *Théorie des nombres.*
C. Jordan — *Traité des substituitions et des équations algébriques.*

Editor — CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge

L. G. Slater — *Confluent Hypergeometric Functions.*
D. G. Northcott — *An Introduction to Homological Algebra.*
P. J. Hilton & S. Wylie — *Homology Theory — An introduction to Algebraic Topology.*
E. A. Maxwell — *Advanced Algebra, part I.*
Snell & Morgan — *New Mathematics — A unified course, I and II.*

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics
G. L. Watson — *Integral Quadratic Forms.*

Editor — DENNIS DOBSON, London

Irving Adler — *The New Mathematics.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. Neumark — *Normierte Algebren.*
Otakar Borůvka — *Grundlagen der gruppoid-und gruppentheorie.*

Mathematische Monographien
Gerhard Ringel — *Färbungsprobleme auf flächen und graphen.*

Mathematische Forschungsberichte
A. N. Kolmogoroff und W. M. Tichomirow — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*
A. W. Pogorelow — *Einige untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im grossen.*
H. Hornich — *Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1963 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1961, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 a 75 cada número simples	17$50
N.os 78 a 87 » » duplo	35$00
N.os 76-77	60$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449